Observatoire de Paris, Universités Paris 6, Paris 7 et Paris 11,
École Normale Supérieure

Master *Astronomie, Astrophysique et Ingénierie Spatiale*
Année M2 - Parcours Recherche

2013 - 2014

UE FC5

Relativité générale

Éric Gourgoulhon

Laboratoire Univers et Théories (LUTH)
CNRS / Observatoire de Paris / Université Paris Diderot (Paris 7)
eric.gourgoulhon@obspm.fr

http://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relat.html *sont décrits par la* métrique de Kerr-Newman*, qui ne dépend que de trois paramètres réels : M, a et Q, ce dernier étant la charge électrique totale du trou noir.*

5.5.3 Horizon des événements

Pour un paramètre de Kerr $\bar{a} \leq 1$, nous admettrons que l'horizon des événements $\mathcal{H}$ de la métrique de Kerr est l'hypersurface définie par $r = R_{\mathcal{H}}$, où

$$\boxed{R_{\mathcal{H}} := \frac{GM}{c^2}\left(1 + \sqrt{1 - \bar{a}^2}\right)}. \tag{5.29}$$

À la limite $a = 0$, on retrouve $R_{\mathcal{H}} = 2GM/c^2 = R_{\mathrm{S}}$.

Pour $\bar{a} > 1$, la métrique de Kerr n'admet pas d'horizon des événements : elle décrit alors une *singularité nue* et non un trou noir (cf. § 5.3.1). Le cas critique $\bar{a} = 1$ est appelé *espace-temps de Kerr extrême*.

L'horizon des événements $\mathcal{H}$ est une hypersurface de genre lumière (cf. § 5.3.2), qui admet le vecteur suivant comme normale :

$$\vec{\boldsymbol{\ell}} := \vec{\boldsymbol{\xi}}_{(0)} + \frac{\Omega_{\mathcal{H}}}{c}\,\vec{\boldsymbol{\xi}}_{(z)}, \tag{5.30}$$

avec

$$\boxed{\Omega_{\mathcal{H}} := \frac{c\,\bar{a}}{2R_{\mathcal{H}}}}. \tag{5.31}$$

En tant que combinaison linéaire de vecteurs de Killing avec des coefficients constants (1 et $\Omega_{\mathcal{H}}$), $\vec{\boldsymbol{\ell}}$ est également un vecteur de Killing[6]. On peut vérifier que

$$\left.\vec{\boldsymbol{\ell}}\cdot\vec{\boldsymbol{\ell}}\right|_{r=R_{\mathcal{H}}} = 0, \tag{5.32}$$

comme il se doit pour toute normale à une hypersurface lumière. Les lignes de champ du vecteur $\vec{\boldsymbol{\ell}}$ sont des géodésiques lumière tangentes à $\mathcal{H}$. $\Omega_{\mathcal{H}}$ mesure leur enroulement et on l'appelle *vitesse de rotation* du trou noir de Kerr. Une autre interprétation de $\Omega_{\mathcal{H}}$ sera fournie par l'Eq. (5.53) plus bas.

5.5.4 Ergosphère

Le carré scalaire du vecteur de Killing $\vec{\boldsymbol{\xi}}_{(0)} = \vec{\boldsymbol{\partial}}_0$ est

$$\vec{\boldsymbol{\xi}}_{(0)}\cdot\vec{\boldsymbol{\xi}}_{(0)} = g_{00} = -1 + \frac{2GMr}{c^2(r^2 + a^2\cos^2\theta)}. \tag{5.33}$$

Les zéros de cette fonction sont

$$r = \frac{GM}{c^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \bar{a}^2\cos^2\theta}\right). \tag{5.34}$$

6. Comme $\vec{\boldsymbol{\ell}}$ n'est pas linéairement indépendant de $\vec{\boldsymbol{\xi}}_{(0)}$ et $\vec{\boldsymbol{\xi}}_{(z)}$, il n'introduit pas de nouvelle symétrie de l'espace-temps de Kerr