Observatoire de Paris, Universités Paris 6, Paris 7 et Paris 11,
École Normale Supérieure

Master *Astronomie, Astrophysique et Ingénierie Spatiale*
Année M2 - Parcours Recherche

2013 - 2014

UE FC5

Relativité générale

Éric Gourgoulhon

Laboratoire Univers et Théories (LUTH)
CNRS / Observatoire de Paris / Université Paris Diderot (Paris 7)
eric.gourgoulhon@obspm.fr

http://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relat.html

En multipliant matriciellement l'Eq. (2.127) par la matrice inverse $g^{\alpha\beta}$ [cf. Eq. (2.49)], on obtient l'équation des géodésiques cherchée :

$$\boxed{\ddot{X}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu = \kappa(\lambda)\dot{X}^\alpha}, \tag{2.129}$$

avec

$$\boxed{\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu} := \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)}, \tag{2.130}$$

Les quantités $\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}$ sont appelées *symboles de Christoffel* de la métrique $\boldsymbol{g}$ par rapport aux coordonnées (x^α).

Si l'on choisit de paramétrer la ligne d'univers géodésique $\mathscr{L}$ par le temps propre τ, alors $\dot{X}^\alpha = dX^\alpha/d\tau = c\,u^\alpha$, où u^α désigne les composantes de la 4-vitesse associée à $\mathscr{L}$ [cf Eq. (2.84)]. On alors, d'après (2.119) et la relation de normalisation de la 4-vitesse $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -1$, $L = c$. Ainsi

$$\lambda = \tau \quad \Longrightarrow \quad L = c \quad \Longrightarrow \quad \frac{dL}{d\lambda} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \kappa(\lambda) = 0. \tag{2.131}$$

En utilisant le temps propre comme paramètre, l'équation des géodésiques (2.129) se simplifie donc en

$$\boxed{\frac{d^2X^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}\frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{dX^\nu}{d\tau} = 0}. \tag{2.132}$$

Si l'on suppose connu $g_{\alpha\beta}$, et donc $\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu}$, comme fonction des coordonnées (x^α) dans la région considérée, l'équation (2.132) constitue un système de 4 équations différentielles du second ordre pour les 4 fonctions $X^\alpha(\tau)$. D'après le théorème de Cauchy, ce système admet une solution unique si l'on se fixe les conditions initiales suivantes :

$$X^\alpha(0) = x_0^\alpha \quad \text{et} \quad \dot{X}^\alpha(0) = U_0^\alpha, \tag{2.133}$$

où x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3 sont 4 constantes arbitraires et U_0^0, U_0^1, U_0^2, U_0^3 sont 4 constantes vérifiant $g_{\alpha\beta}U_0^\alpha U_0^\beta = -c^2$. La donnée de $X^\alpha(0)$ correspond à celle d'un point de $\mathscr{E}$ et la donnée de $\dot{X}^\alpha(0) = cu^\alpha(0)$ à celle des composantes d'une 4-vitesse. Ainsi, en un point quelconque de $\mathscr{E}$, il passe une, et une seule, géodésique du genre temps ayant une 4-vitesse donnée.

Exemple : *Si $(\mathscr{E}, \boldsymbol{g})$ est l'espace-temps de Minkowski et $(x^\alpha) = (ct, x, y, z)$ un système de coordonnées cartésiennes correspondant à un référentiel inertiel, alors les composantes $g_{\alpha\beta}$ sont données par la matrice de Minkowski (2.62), qui est constante. On a donc $\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^\gamma = 0$ de sorte que les symboles de Christoffel sont identiquement nuls dans ce cas :*

$$\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu} = 0. \tag{2.134}$$

L'équation des géodésiques (2.132) se simplifie alors drastiquement :

$$\frac{d^2X^\alpha}{d\tau^2} = 0. \tag{2.135}$$