UNIVERSITE DE MONTPELLIER

FACULTE DES SCIENCES

1968-1969 N°33

INTRODUCTION A L'ETUDE DES COSMOLOGIES

(extrait)

Par

Henri ANDRILLAT

Professeur

La solution intérieure de Schwarzschild. Implosion d'une masse sphérique homogène :

La solution extérieure de Schwarzschild que nous venons d'étudier schématise le problème du champ de gravitation créé par une masse M , en ce sens que l'on suppose la masse concentrée au point O. Dans les cas réels (étoiles, noyaux de galaxies, etc...), il est plus correct de supposer la masse répartie uniformément dans une sphère de centre O et de rayon r_1. Il sera souvent commode de supposer comme hypothèse de travail que la matière emplissant cette sphère présente les propriétés d'un gaz parfait. Nous adopterons cette hypothèse. A l'extérieur de la sphère la solution "extérieure" de Schwarzschild est valable

$$ds^2 = \frac{-dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2.d\theta^2 - r^2.\sin^2\theta.\ d\phi^2 + (1 - \frac{2m}{r}).\ dt^2$$

puisque la masse sphérique se comporte comme son centre doté de toute la masse, du point de vue du potentiel newtonien ; mais, à l'intérieur de la masse, une autre métrique est à envisager dont l'utilité se manifestera par exemple dans une étude plus détaillée du collapse gravitationnel.

Pour établir cette métrique "intérieure", nous devons utiliser les équations d'Einstein, sans y annuler les composantes du tenseur impulsion-énergie qui se réduisent, puisque le fluide est parfait à l'intérieur de la sphère, à :

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = - p_0 \qquad \text{et} \qquad T_4^4 = \rho_0$$

d'après la forme développée des composantes du tenseur impulsion-énergie, et en utilisant un système de coordonnées comobiles avec le fluide. En effet

$$T_\upsilon^\mu = g_{\alpha\upsilon} \cdot T^{\mu\alpha} = g_{\alpha\upsilon} (\rho_0 + p_0) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} - g_\upsilon^\mu \cdot p_0$$

Pour $\mu = \upsilon = 1, 2, 3$, nous avons

$$\frac{dx^\mu}{ds} = 0 \quad \text{(coordonnées comobiles)}$$

$$g_\upsilon^\mu = 1 \qquad \text{et} \qquad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = - p_0$$

Pour $\mu = \upsilon = 4$, $\alpha = 4$ car $g_{\alpha\upsilon} = 0$ si $\alpha \neq \upsilon$ et $ds^2 = g_{44}(dx^4)^2$ en coordonnées comobiles. Ainsi

$$g_{44} \cdot \frac{dx^4}{ds} \cdot \frac{dx^4}{ds} = 1 \quad \text{et} \quad T_4^4 = \rho_0 + p_0 - p_0 = \rho_0 \cdot$$

Ecrivons provisoirement la métrique sous la forme :

$$ds^2 = - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta \, d\phi^2 + e^\upsilon dt^2$$

où λ et υ sont des fonctions de r seulement. Les équations d'Einstein

$$\frac{1}{2} R \, g_\upsilon^\mu - R_\upsilon^\mu - \Lambda \, g_\upsilon^\mu = 8 \pi T_\upsilon^\mu$$

dont on a déjà calculé les premiers membres à l'occasion de la métrique de Schwarzschild, (solution extérieure et de deuxième espèce), s'écrivent :

$$\text{(I)} \qquad - e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = - 8\,\pi\, p_0 = 8\,\pi\, T_1^1$$

$$\text{(II)} \qquad - e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'\,\nu'}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2\,r}\right) - \Lambda = - 8\,\pi\, p_0 = 8\,\pi\, T_2^2 = 8\,\pi\, T_3^3$$

$$\text{(III)} \qquad - e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = 8\,\pi\, \rho_0 = 8\,\pi\, T_4^4$$

où les accents représentent les dérivées des fonctions λ et ν par rapport à r

Des équations (I) et (III), on déduit :

$$8\,\pi\,(p_0 + \rho_0) = + e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda' + \nu'}{r}\right)$$

puis, en dérivant par rapport à r les 2 membres de l'équation (I), on obtient :

$$8\,\pi\,\frac{d\,p_0}{dr} = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{r} - \frac{\nu'}{r^2} - \frac{2}{r^3}\right) - e^{-\lambda}\,\lambda'.\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{r^3}$$

Enfin l'égalité $8\,\pi\,T_1^1 = 8\,\pi\,T_2^2 = -8\,\pi\,p_0$ peut s'écrire :

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{r} - \frac{\nu'}{r^2} - \frac{2}{r^3}\right) - e^{-\lambda}\,\lambda'\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{r^3} + e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda' + \nu'}{2}\right)\frac{\nu'}{2} = 0$$

ou $$8\,\pi\,\frac{d\,p_0}{dr} + 8\,\pi\,(p_0 + \rho_0)\,\frac{\nu'}{2} = 0$$

D'où l'on déduit la relation fondamentale des fluides parfaits qui sera utilisée dans l'étude de toutes les métriques statiques :

$$\boxed{\frac{d\,p_0}{dr} + (p_0 + \rho_0)\,\frac{\nu'}{2} = 0}$$

Si le milieu qui emplit la sphère est homogène, ρ_0 est indépendant de r et l'équation (III) s'écrit

$$- e^{-\lambda} + e^{-\lambda}.\lambda'\,r = (8\,\pi\,\rho_0 + \Lambda)\,r^2 - 1$$

et devient, avec

$$y = - e^{-\lambda} \qquad y' = e^{-\lambda} \lambda'$$

$$y + y' r = (8 \pi \rho_0 + \Lambda) r^2 - 1 .$$

La solution de l'équation sans second membre est $y = \frac{A}{r}$ où A est une constante d'intégration. Une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme $y_0 = a + b r^m$ est :

$$y_0 = - 1 + \frac{8 \pi \rho_0 + \Lambda}{3} r^2$$

la solution générale est donc

$$y = - e^{-\lambda} = - 1 + \frac{8 \pi \rho_0 + \Lambda}{3} r^2 + \frac{A}{r}$$

Mais la métrique ne comporte pas de point singulier à l'origine, donc $A = 0$. Ainsi

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r^2}{R^2} \quad \text{avec} \quad R^2 = \frac{3}{\Lambda + 8 \pi \rho_0}$$

On a pratiquement $\Lambda = 0$ et $\rho_0 > 0$. En remarquant que ρ_0 est une constante, la relation des fluides parfaits s'écrit :

$$\frac{1}{p_0 + \rho_0} \, \frac{d(p_0 + \rho_0)}{dr} = - \frac{1}{2} \frac{d\upsilon}{dr} = \frac{d \; L(p_0 + \rho_0)}{dr}$$

dont l'intégrale est :

$$p_0 + \rho_0 = A \, e^{-\frac{\upsilon}{2}}$$

En appelant A une constante d'intégration. Ainsi

$$8 \pi(p_0 + \rho_0) = e^{-\lambda}\left(\frac{\upsilon' + \lambda'}{r}\right) = 8 \pi A \, e^{-\frac{\upsilon}{2}}$$

ou
$$e^{\frac{\upsilon}{2}} e^{-\lambda}\left(\frac{\upsilon' + \lambda'}{r}\right) = \text{constante}$$

avec $e^{-\lambda} = 1 - \frac{r^2}{R^2}$ et $e^{-\lambda}.\lambda' = \frac{2\,r}{R^2}$, l'équation différentielle qui déterminera la fonction υ s'écrit :

$$e^{\frac{\upsilon}{2}}\left[(1 - \frac{r^2}{R^2})\frac{\upsilon'}{r} + \frac{2}{R^2}\right] = \text{constante}$$

La solution est

$$e^{\frac{\upsilon}{2}} = A - B\sqrt{1 - r^2/R^2}$$ où A et B

sont deux constantes, dont l'une est fonction de la constante figurant au second membre de l'équation différentielle et l'autre une constante d'intégration.

La métrique intérieure de Schwarzschild a donc pour expression :

$$ds^2 = \frac{-\,dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2\,d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,d\phi^2 + (A - B\sqrt{1 - r^2/R^2})^2\,dt^2$$

Le calcul des constantes A et B s'effectue moyennant des hypothèses simples :

La pression est donnée par l'équation (I)

$$8\,\pi\,p_0 = e^{-\lambda}\left(\frac{\upsilon'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda$$

et avec $e^{-\lambda} = 1 - \frac{r^2}{R^2}$

$$8\,\pi\,p_0 = (1 - \frac{r^2}{R^2})\frac{\upsilon'}{r} - \frac{1}{R^2} + \Lambda \qquad = \frac{8\pi G}{c^4}\,p$$

avec la solution

$$e^{\frac{\upsilon}{2}} = A - B\sqrt{1 - r^2/R^2}$$ on trouve

$$\frac{\upsilon'}{r} = \frac{2\,B}{R^2(A - B\sqrt{1 - r^2/R^2})\sqrt{1 - r^2/R^2}}$$ et

$$8\,\pi\, p_0 = \frac{2\,B\sqrt{1 - r^2/R^2}}{R^2(A - B\sqrt{1 - r^2/R^2})} - \frac{1}{R^2} + \Lambda = \frac{3\,B\sqrt{1 - r^2/R^2} - A}{R^2(A - B\sqrt{1 - r^2/R^2})} + \Lambda\,.$$

On supposera $\Lambda = 0$ et à la limite de la sphère de fluide $(r = r_1)$, on supposera la pression p_0 nulle. Ainsi

$$A = 3\,B\sqrt{1 - \frac{r_1^2}{R^2}}$$

Enfin, à cette limite de la sphère, les deux solutions de Schwarzschild intérieure et extérieure, doivent s'identifier. Ainsi pour $r = r_1$:

$$e^{\nu} = \left(A - B\sqrt{1 - \frac{r_1^2}{R^2}}\right)^2 = 4\,B^2\left(1 - \frac{r_1^2}{R^2}\right) = 1 - \frac{2\,m}{r_1} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_1^2}{R^2}$$

On tire de l'une de ces égalités :

$$4\,B^2 = 1 \qquad B = \pm\,\frac{1}{2}$$

L'expression de A montre que A et B ont le même signe. La première solution est donc

$$B = \frac{1}{2} \qquad A = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_1^2}{R^2}}$$

La seconde étant :

$$B = -\,\frac{1}{2} \qquad A = -\,\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_1^2}{R^2}}$$

Toutes deux conduisent à la même expression de la métrique où l'on prendra garde de ne pas confondre la variable r avec la constante r_1, rayon de la sphère :

$$ds^2 = \frac{-dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2.\, d\theta^2 - r^2.\, \sin^2\theta.\, d\phi^2 + \left[\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_1^2}{R^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\right]^2 dt^2$$

avec $R^2 = \dfrac{3}{8\,\pi\,\rho_0}$ (puisque Λ est nulle) et $r < r_1$. On remarquera que la masse de la sphère est

$m = \frac{4\pi}{3} r_1^3 \rho_0$ où m et ρ_0 sont mesurées en unités relativistes et nous avons

$$\frac{2m}{r_1} = \frac{8\pi\rho_0}{3} r_1^2 = \frac{r_1^2}{R^2}$$

Cette relation montre bien l'unicité des 2 solutions intérieure et extérieure quand on fait $r = r_1$ dans l'expression de la métrique intérieure qui vient d'être établie.