

Théorie Trajectoires et Cosmogravity

I - Métriques de Schwarzschild

I.1 Métrique extérieure

I.2 Métrique intérieure

II - Métrique de Kerr

III - Annexe

III.1 Equations d'Euler-Lagrange

III.2 Métriques et géodésiques

III.3 Application

III.4 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

I - Métriques de Schwarzschild

I.1 Métrique extérieure

On souhaite étudier le mouvement d'une particule (massive ou photon) dans le champ de gravitation extérieur d'une masse centro-symétrique, sans rotation, placée à l'origine de coordonnées spatiales r, θ, φ et temporelle t .

Le modèle est un espace-temps statique à symétrie sphérique de métrique :

$$ds^2 = -e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + e^{\nu(r)} c^2 dt^2$$

En **relativité générale**, pour une masse M sans rotation, à symétrie sphérique, placée à l'origine des coordonnées, dans un espace-temps vide, la solution des équations d'Einstein est :

$$\lambda + \nu = 0 \quad e^{\nu} = 1 - \frac{r_s}{r} \quad \text{avec} \quad r_s = 2 \frac{GM}{c^2}$$

d'où l'expression de la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2$$

c la vitesse de la lumière et G la constante de gravitation universelle.

r_s est appelé « rayon de Schwarzschild » ou « horizon du trou noir ». Il représente la limite de la région d'où lumière et matière ne peuvent s'échapper.

Cette solution de Schwarzschild a une importance remarquable puisqu'elle constitue également l'unique solution aux équations d'Einstein à l'extérieur de tout corps à symétrie sphérique de masse M , sans rotation. Cette métrique n'est donc pas limitée à décrire les seuls trous noirs, elle est aussi valable à l'extérieur d'une étoile, d'une planète, ou de tout autre corps à symétrie sphérique sans rotation. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Birkhoff (théorème de Gauss en gravitation newtonienne).

Les trajectoires d'une particule libre sont les géodésiques de la métrique.

Par raison de symétrie la trajectoire est plane (on prendra $\theta = \frac{\pi}{2}$).

I.1.1 Particule massive

Les intégrales premières trouvées à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L} = \frac{ds}{d\tau}$ s'écrivent :

$$(S_{pm}^e 1) \quad \frac{dt}{d\tau}(r) = \frac{E_e}{1 - \frac{r_s}{r}} \quad et \quad (S_{pm}^e 2) \quad \frac{d\varphi}{d\tau}(r) = \frac{c L_e}{r^2}$$

Avec deux constantes d'intégration : E_e sans dimension et L_e une longueur. Ces fonctions reportées dans l'expression $ds = c d\tau$ entraînent :

$$(S_{pm}^e 3) \quad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{Spm}^e = c^2 E_e^2 \quad avec \quad V_{Spm}^e(r) = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(1 + \frac{L_e^2}{r^2}\right)$$

Ces relations vérifient les équations des géodésiques.

En dérivant par rapport à τ l'équation $(S_{pm}^e 3)$ et pour des trajectoires non circulaires, on déduit l'équation différentielle suivante utilisée pour faire la simulation :

$$(S_{pm}^e 4) \quad \frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{dV_{Spm}^e}{dr} = \frac{c^2}{2r^4} (-r_s r^2 + 2r L_e^2 - 3r_s L_e^2) = f_{Spm}^e(r)$$

avec les conditions initiales : $r = r_0$, $U_r(r_0) = \frac{dr}{d\tau}(r_0)$ et $U_\varphi(r_0) = r_0 \frac{d\varphi}{d\tau}(r_0)$ d'où :

$$L_e = \frac{U_\varphi(r_0) r_0}{c} \quad et \quad c^2 E_e^2 = U_r(r_0)^2 + c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right) \left(1 + \frac{U_\varphi(r_0)^2}{c^2}\right)$$

Remarque : les valeurs de $U_r(r_0)$ et $U_\varphi(r_0)$ (respectivement vitesse radiale-coordonnée et vitesse tangentielle-coordonnée) ne sont pas limitées par c (elles vérifient l'équation de la métrique) voir [Éricourgoulhon - Relativité générale](#) .

L'étude de la fonction V_{Spm}^e permet de déduire l'existence de deux trajectoires circulaires de rayons :

$$\frac{L_e}{r_s} \left(L_e + \sqrt{L_e^2 - 3r_s^2} \right) \quad (stable) \quad et \quad \frac{L_e}{r_s} \left(L_e - \sqrt{L_e^2 - 3r_s^2} \right) \quad (instable).$$

L'équation $S_{pm}^e 4$ est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta.

L'observateur resté loin du trou noir voit son collègue évoluer de plus en plus lentement et à la limite se figer lorsque celui-ci atteint l'horizon r_s . Un voyageur qui tombe dans le trou noir arrive au centre ($r=0$) en un temps fini tandis que son collègue a l'impression qu'il reste figé sur l'horizon (et, dans la pratique, disparaît à cause du décalage spectral).

I.1.2 Photon

On garde les relations en t et φ avec un paramètre λ différent du temps propre τ puisque pour un photon on a toujours $d\tau = 0$.

$$(S_{ph}^e 1) \quad \frac{dt}{d\lambda}(r) = \frac{E_e}{1 - \frac{r_s}{r}} \quad et \quad (S_{ph}^e 2) \quad \frac{d\varphi}{d\lambda}(r) = \frac{c L_e}{r^2}$$

Ces fonctions reportées dans l'expression $ds = c d\tau = 0$ entraînent :

$$(S_{ph}^e 3) \quad \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{Sph}^e = c^2 E_e^2 \quad avec \quad V_{Sph}^e(r) = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{L_e^2}{r^2}$$

Ces relations vérifient les équations des géodésiques.

En dérivant par rapport à λ l'équation $(S_{ph}^e 3)$ et pour des trajectoires non circulaires, on déduit l'équation différentielle suivante utilisée pour faire la simulation :

$$(S_{ph}^e 4) \quad \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{1}{2} \frac{dV_{Sph}^e}{dr} = \frac{c^2}{2r^4} (2r L_e^2 - 3r_s L_e^2) = f_{Sph}^e(r)$$

avec les conditions initiales : $r = r_0$, $U_r(r_0) = \frac{dr}{d\lambda}(r_0)$ et $U_\varphi(r_0) = r_0 \frac{d\varphi}{d\lambda}(r_0)$ d'où :

$$L_e = \frac{U_\varphi(r_0)r_0}{c} \quad \text{et} \quad c^2 E_e^2 = U_r(r_0)^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right) U_\varphi(r_0)^2$$

Remarque : les valeurs de $U_r(r_0)$ et $U_\varphi(r_0)$ ne sont pas limitées par c (elles vérifient l'équation de la métrique).

L'étude de la fonction V_{sph}^e montre qu'il existe une trajectoire circulaire instable de rayon $\frac{3}{2}r_s$.
L'équation S_{ph}^e est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta.

I.2 Métrique intérieure

On souhaite étudier le mouvement d'une particule (soumise uniquement à la gravitation) à l'intérieur d'un astre de **masse volumique constante**, centro-symétrique, sans rotation. La masse est placée à l'origine de coordonnées spatiales r, θ, φ et temporelle t . Le modèle est un espace-temps statique à symétrie sphérique. La solution des équations d'Einstein donne la métrique :

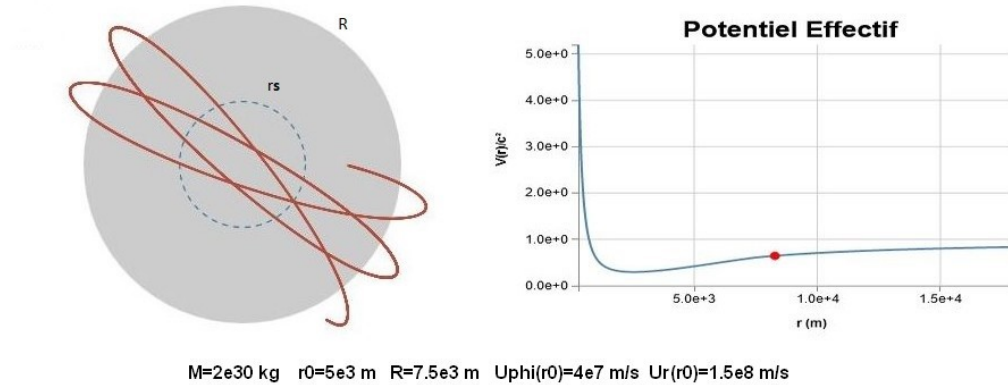
$$ds^2 = -\alpha(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + \beta(r)^2 c^2 dt^2$$

où $\alpha(r) = 1 - \frac{r^2 r_s}{R^3}$ $\beta(r) = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r^2 r_s}{R^3}}$ R rayon de l'astre

Les trajectoires d'une particule libre sont les géodésiques de la métrique. Par raison de symétrie la trajectoire est plane (on prendra $\theta = \frac{\pi}{2}$).

Pour l'établissement de cette métrique voir [Henri Andrillat - Introduction à l'étude des cosmologies](#).

I.2.1 Particule massive



Les intégrales premières trouvées à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L} = \frac{ds}{d\tau}$ s'écrivent :

$$(S_{pm}^1) \quad \beta(r)^2 \frac{dt}{d\tau}(r) = E_i \quad \text{et} \quad (S_{pm}^2) \quad \frac{d\varphi}{d\tau}(r) = \frac{c L_i}{r^2}$$

Avec deux constantes d'intégration : E_i sans dimension et L_i une longueur. Ces fonctions reportées dans l'expression $ds = c d\tau$ entraînent :

$$(S_{pm}^3) \quad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{Spm}^i(r) = c^2 E_i^2 \quad \text{avec} \quad V_{Spm}^i(r) = c^2 E_i^2 - c^2 \alpha(r) \left[\frac{E_i^2}{\beta(r)^2} - \frac{L_i^2}{r^2} - 1 \right]$$

Ces relations vérifient les équations des géodésiques.

En dérivant par rapport à τ l'équation $(S_{pm}^i 3)$ et pour des trajectoires non circulaires, on déduit l'équation différentielle suivante utilisée pour faire la simulation :

$$(S_{pm}^i 4) \quad \frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{dV_{Spm}^i}{dr} = -\frac{c^2 r r_s}{R^3} \left[\frac{E_i^2}{\beta(r)^2} - \frac{L_i^2}{r^2} - 1 \right] + \frac{c^2 \alpha(r)}{2} \left[\frac{-E_i^2 r r_s}{\beta(r)^3 \sqrt{\alpha(r)} R^3} + 2 \frac{L_i^2}{r^3} \right] = f_{Spm}^i(r)$$

avec les conditions initiales : $r = r_0$, $U_r(r_0) = \frac{dr}{d\tau}(r_0)$ et $U_\varphi(r_0) = r_0 \frac{d\varphi}{d\tau}(r_0)$ d'où :

$$L_i = \frac{r_0}{c} U_\varphi(r_0) \quad c^2 E_i^2 = \beta^2(r_0) \left[\frac{U_r^2(r_0)}{\alpha(r_0)} + U_\varphi^2(r_0) + c^2 \right]$$

Remarque : les valeurs de $U_r(r_0)$ et $U_\varphi(r_0)$ ne sont pas limitées par c (elles vérifient l'équation de la métrique).

L'équation $S_{pm}^i 4$ est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta.

I.2.2 Photon

On garde les relations en t et φ :

$$(S_{ph}^i 1) \quad \beta(r)^2 \frac{dt}{d\lambda}(r) = E_i \quad et \quad (S_{ph}^i 2) \quad \frac{d\varphi}{d\lambda}(r) = \frac{c L_i}{r^2}$$

Ces fonctions reportées dans l'expression $ds = 0$ entraînent :

$$(S_{ph}^i 3) \quad \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{Sph}^i(r) = c^2 E_i^2 \quad et \quad V_{Sph}^i(r) = c^2 E_i^2 - c^2 \alpha(r) \left[\frac{E_i^2}{\beta(r)^2} - \frac{L_i^2}{r^2} \right]$$

En dérivant par rapport à λ l'équation $(S_{ph}^i 3)$ et pour des trajectoires non circulaires, on déduit l'équation différentielle suivante utilisée pour faire la simulation :

$$(S_{ph}^i 4) \quad \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{1}{2} \frac{dV_{Sph}^i}{dr} = -\frac{c^2 r r_s}{R^3} \left[\frac{E_i^2}{\beta(r)^2} - \frac{L_i^2}{r^2} \right] + \frac{c^2 \alpha(r)}{2} \left[\frac{-E_i^2 r r_s}{\beta(r)^3 \sqrt{\alpha(r)} R^3} + 2 \frac{L_i^2}{r^3} \right] = f_{Sph}^i(r)$$

avec les conditions initiales : $r = r_0$, $U_r(r_0) = \frac{dr}{d\lambda}(r_0)$ et $U_\varphi(r_0) = r_0 \frac{d\varphi}{d\lambda}(r_0)$ d'où :

$$L_i = \frac{r_0}{c} U_\varphi(r_0) \quad c^2 E_i^2 = \beta^2(r_0) \left[\frac{U_r^2(r_0)}{\alpha(r_0)} + U_\varphi^2(r_0) \right]$$

Remarque : les valeurs de $U_r(r_0)$ et $U_\varphi(r_0)$ ne sont pas limitées par c (elles vérifient l'équation de la métrique). L'équation $S_{ph}^i 4$ est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta.

II - Métrique de Kerr

II.1 Théorie générale

On souhaite étudier le mouvement d'une particule (massive ou photon) dans le champ de gravitation d'une masse centro-symétrique, en rotation, placée à l'origine des coordonnées .

En **relativité générale** , pour une masse M en rotation, à symétrie sphérique, placée à l'origine des coordonnées de Boyer-Lindquist r, θ, φ, t , dans un espace-temps vide, la solution des équations d'Einstein est la métrique de Kerr :

$$ds^2 = \frac{-\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - (r^2 + a^2 + \frac{r_s r a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{2 r_s r a}{\rho^2} \sin^2 \theta c dt d\varphi + (1 - \frac{r_s r}{\rho^2}) c^2 dt^2$$

$$\text{où} \quad \rho^2(r) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad \Delta(r) = r^2 - r_s r + a^2 \quad a = \frac{J}{c M} \quad (\text{J moment angulaire})$$

Au contraire de la métrique de Schwarzschild, il n'existe pas d'équivalent du théorème de Birkhoff en métrique de Kerr. Cette géométrie ne décrit donc que les trous noirs en rotation, et non pas l'espace temps extérieur à d'autres objets telles que des étoiles ou des planètes en rotation.

Les trajectoires d'une particule libre sont les géodésiques de la métrique.

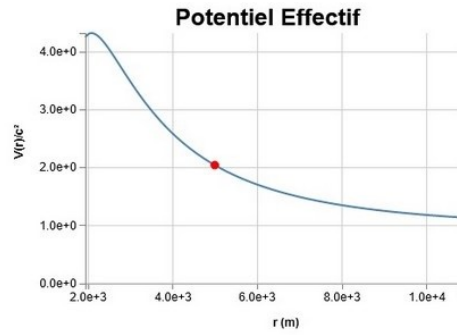
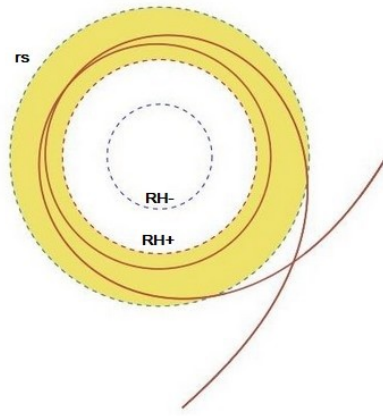
On étudiera uniquement les trajectoires planes (on prendra $\theta = \frac{\pi}{2}$).

L'horizon des événements correspond au changement de signe de g_{rr} , c'est à dire aux solutions de l'équation $\Delta = 0$. Si $a < \frac{r_s}{2}$ on obtient deux valeurs :

$$R_{H+} = \frac{r_s + \sqrt{r_s^2 - 4a^2}}{2} \quad \text{et} \quad R_{H-} = \frac{r_s - \sqrt{r_s^2 - 4a^2}}{2} \quad \text{donc} \quad \Delta(r) = (r - R_{H+})(r - R_{H-})$$

Le domaine compris entre r_s et R_{H+} est appelé ergorégion (dans la métrique de Schwarzschild il n'y a pas d'ergorégion $a = 0$ et $R_{H+} = r_s$) voir [Éricourgoulhon - Relativité générale](#).

II.2 Particule massive



$$M=2e30\text{kg} \quad r_0=4.5e3 \text{ m} \quad a=1.418e3 \text{ m} \quad U_{\phi}(r_0)=7e8 \text{ m/s} \quad U_r(r_0)=-4.25e8 \text{ m/s}$$

Les intégrales premières trouvées à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L} = \frac{ds}{d\tau}$ s'écrivent :

$$(K_{pm1}) \quad \frac{dt}{d\tau}(r) = \frac{1}{\Delta(r)} \left[(r^2 + a^2 + \frac{r_s}{r} a^2) E - \frac{r_s a}{r} L \right] \quad \text{et} \quad (K_{pm2}) \quad \frac{d\varphi}{d\tau}(r) = \frac{c}{\Delta(r)} \left[\frac{r_s a}{r} E + (1 - \frac{r_s}{r}) L \right]$$

Avec deux constantes d'intégration : E sans dimension et L une longueur.

Ces fonctions reportées dans l'expression $ds = c d\tau$ entraînent :

$$(K_{pm3}) \quad \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{Kpm} = c^2 E^2 \quad \text{avec} \quad V_{Kpm}(r) = c^2 - \frac{r_s}{r} c^2 - \frac{c^2}{r^2} (a^2 (E^2 - 1) - L^2) - \frac{r_s c^2}{r^3} (L - a E)^2$$

Ces relations vérifient les équations des géodésiques.

En dérivant par rapport à τ l'équation (K_{pm3}) et pour des trajectoires non circulaires, on déduit l'équation différentielle suivante utilisée pour faire la simulation :

$$(K_{pm4}) \quad \frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{dV_{Kpm}}{dr} = \frac{c^2}{2r^4} [r_s r^2 + 2r (a^2 (E^2 - 1) - L^2) + 3r_s (L - a E)^2] = f_{Kpm}(r)$$

avec les conditions initiales : $r = r_0$, $\Delta_0 = \Delta(r_0)$, $U_r(r_0) = \frac{dr}{d\tau}(r_0)$ et $U_\varphi(r_0) = r_0 \frac{d\varphi}{d\tau}(r_0)$ d'où :

$$c^2 E^2 = \frac{1}{r_0^2 \Delta_0} [U_r^2(r_0) (r_0 - r_s) r_0^3 + c^2 r_0 (r_0 - r_s) \Delta_0 + \Delta_0^2 U_\varphi^2(r_0)]$$

$$L = \frac{1}{c(r_0 - r_s)} [\Delta_0 U_\varphi(r_0) - r_s a c E]$$

Remarque : les valeurs de $U_r(r_0)$ et $U_\varphi(r_0)$ ne sont pas limitées par c (elles vérifient l'équation de la métrique).

L'équation $K_{pm}4$ est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta.

II.3 Photon

On garde les relations en t et φ :

$$(K_{ph}1) \quad \frac{dt}{d\lambda}(r) = \frac{1}{\Delta(r)} \left[(r^2 + a^2 + \frac{r_s}{r} a^2) E - \frac{r_s a}{r} L \right] \quad \text{et} \quad (K_{ph}2) \quad \frac{d\varphi}{d\lambda}(r) = \frac{c}{\Delta(r)} \left[\frac{r_s a}{r} E + (1 - \frac{r_s}{r}) L \right]$$

Ces fonctions reportées dans l'expression $ds = 0$ entraînent :

$$(K_{ph}3) \quad \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{Kph}(r) = c^2 E^2 \quad \text{avec} \quad V_{Kph}(r) = -\frac{c^2}{r^2} (a^2 E^2 - L^2) - \frac{r_s c^2}{r^3} (L - a E)^2$$

Ces relations vérifient les équations des géodésiques.

En dérivant par rapport à λ l'équation $(K_{ph}3)$ et pour des trajectoires non circulaires, on déduit l'équation différentielle suivante utilisée pour faire la simulation :

$$(K_{ph}4) \quad \frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{1}{2} \frac{dV_{Kph}}{dr} = -\frac{c^2}{2r^4} [2r(a^2 E^2 - L^2) + 3r_s(L - aE)^2] = f_{Kph}(r)$$

avec les conditions initiales : $r = r_0$, $\Delta_0 = \Delta(r_0)$, $U_r(r_0) = \frac{dr}{d\lambda}(r_0)$ et $U_\varphi(r_0) = r_0 \frac{d\varphi}{d\lambda}(r_0)$) d'où :

$$c^2 E^2 = \frac{1}{r_0^2 \Delta_0} [U_r^2(r_0) (r_0 - r_s) r_0^3 + \Delta_0^2 U_\varphi^2(r_0)]$$

$$L = \frac{1}{c(r_0 - r_s)} [\Delta_0 U_\varphi(r_0) - r_s a c E]$$

Remarque : les valeurs de $U_r(r_0)$ et $U_\varphi(r_0)$ ne sont pas limitées par c (elles vérifient l'équation de la métrique).

Il existe deux trajectoires circulaires instables de rayons (voir [James M. Bardeen](#)) :

$$r_s \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2}{3} \arccos \left(\frac{2a}{r_s} \right) \right] \right\} \quad \text{et} \quad r_s \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2}{3} \arccos \left(\frac{-2a}{r_s} \right) \right] \right\}$$

L'équation $K_{ph}4$ est résolue numériquement par la méthode de Runge-Kutta.

III - Annexe

III.1 Equations d'Euler-Lagrange

Soit $\mathcal{L}(x^1(\lambda), x^2(\lambda), \dots, x^n(\lambda), \dot{x}^1(\lambda), \dot{x}^2(\lambda), \dots, \dot{x}^n(\lambda))$ une fonction de $2n$ variables indépendantes

où $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$.

Alors, la valeur de l'intégrale $\int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \mathcal{L}(\lambda) d\lambda$ est extrémale pour les courbes $\{x^i(\lambda)\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$

qui vérifient les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = 0 \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

III.2 Métriques et géodésiques

Pour une étude exhaustive voir [Ericourgoulhon - Geometry and physics of black holes](#)
et [Ericourgoulhon - Relativité générale](#) .

Métriques

Dans un espace-temps, on représente par ds^2 l'intervalle infinitésimal entre deux évènements repérés par les coordonnées $(x^1, x^2, x^3, x^4 = ct)$ et $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3, ct + cdt)$ où

$$ds^2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 g_{ij}(x^1, x^2, x^3, x^4) dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j \text{ (avec la convention de sommation d'Einstein)}$$

Par abus de langage, on parlera de « distance » entre ces deux évènements.

La matrice symétrique 4x4 des 16 fonctions g_{ij} (coefficients de la métrique) admettant une inverse (dont les coefficients sont notés $g^{\alpha\beta}$) en tout point où est définie la métrique.

Propriétés fondamentales de cette « distance » :

- C'est un invariant pour tout changement de coordonnées

$$ds^2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 g_{ij}(x^1, x^2, x^3, x^4) dx^i dx^j = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \bar{g}_{pq}(y^1, y^2, y^3, y^4) dy^p dy^q \quad (g_{ij} dx^i dx^j = \bar{g}_{pq} dy^p dy^q)$$

- Elle s'écrit $ds = c d\tau$ où τ est le temps propre mesuré (par une horloge) entre les évènements (x^1, x^2, x^3, x^4) et $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3, x^4 + dx^4)$

- Pour un photon on a toujours $ds = 0$

Géodésiques

Les courbes qui rendent extrémale la « distance » entre deux évènements de l'espace-temps sont appelées géodésiques. On montre qu'elles vérifient les équations différentielles :

$$\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0 \quad k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

avec les coefficients de connexion (symboles de Christoffel de deuxième espèce)

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i = \frac{1}{2} g^{ip} \left(\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{pj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^p} \right)$$

Soit la fonction : $\mathcal{L}(\dots, x^p(\lambda), \dots, \dot{x}^q(\lambda), \dots) = \sqrt{\epsilon g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} = \frac{ds}{d\lambda}$

où $\epsilon = 1$ pour les courbes du genre temps ($ds^2 > 0$) et $\epsilon = -1$ pour les courbes du genre espace ($ds^2 < 0$) (pour une signature $- - - +$) .

Les courbes $\{x^k(\lambda)\}_{k \in \{1, 2, 3, 4\}}$ qui rendent l'intégrale $\int_a^b ds = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \mathcal{L}(\lambda) d\lambda = s(b) - s(a)$ extrémale sont les géodésiques.

Pour trouver des intégrales premières des équations des géodésiques on pourra chercher des solutions

aux équations d'Euler-Lagrange : $\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = 0 \quad k \in \{1, 2, 3, 4\}$

III.3 Application

Pour les métriques de Schwarzschild et de Kerr les fonctions g_{ij} sont indépendantes de t et φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \\ \implies \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \text{constante1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \text{constante2} \end{aligned}$$

En imposant $\theta = \frac{\pi}{2}$ la combinaison des deux relations précédentes donnent les équations $S1, S2, K1, K2$.

III.4 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Méthode pour résoudre numériquement l'équation différentielle : $\frac{d^2 r}{d\lambda^2}(r) = f(r)$

avec les conditions initiales $\lambda = \lambda_0$, $r = r_0$ et $\frac{dr}{d\lambda}(r_0) = U_r(r_0)$.

On calcule les valeurs r_n , $y'_n = \frac{dr}{d\lambda}(r_n)$ et φ_n en partant de $(r_0, U_r(r_0), \varphi_0)$ avec un pas de h pour la variable λ .

$$k_1 = f(r_n) \quad , \quad k_2 = f\left(r_n + \frac{h}{2} y'_n\right) \quad , \quad k_3 = f\left(r_n + \frac{h}{2} y'_n + \frac{h^2}{4} k_1\right) \quad , \quad k_4 = f\left(r_n + h y'_n + \frac{h^2}{2} k_2\right)$$

$$r_{n+1} = r_n + h y'_n + \frac{h^2}{6} (k_1 + k_2 + k_3)$$

$$y'_{n+1} = y'_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + d\varphi \quad \text{voir} \quad S2 \quad \text{ou} \quad K2$$

voir [ici](#)