Санкт-Петербургский политехнический университет имени Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Высшая школа прикладной математики и физики

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №2

Выполнил:

Студент: Ахметшин Рауль
Группа: 5030102/90201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Александр Николаевич

2023г.

Содержание

Список иллюстраций

1 Постановка задачи

Дана ИСЛАУ

$$\begin{cases} [0,\ 2] \cdot x_1 + [1,\ 3] \cdot x_2 = [3,\ 7] \\ x_1 + [-4,\ -2] \cdot x_2 = [-0.5,\ 0.5] \\ [0.75,\ 1.25] \cdot x_1 = [3,\ 5] \\ [0.75,\ 1.25] \cdot x_2 = [0,\ 2] \end{cases} \tag{1}$$

Для нее необходимо провести вычисления и привести иллюстрации:

- Максимума распознающего функционала
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы
- Оценок вариабельности решения
- Управления положением максимума распознающего функционала за счет коррекции матрицы ИСЛАУ в целом
- Управления положением максимума распознающего функционала за счет коррекции матрицы ИСЛАУ построчно

2 Теория

2.1 Распознающий функционал

Распознающим называется функционал

$$\mathrm{Tol}(x) = \mathrm{Tol}(x, A, b) = \min_{1 \le i \le m} \left\{ b_i - \left| b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right\}$$

$$x \in \Xi_{\mathrm{tol}} \Leftrightarrow \mathrm{Tol}(x) \ge 0$$

$\mathrm{Tol}(x)$ - ограничен, вогнут. Он всегда достигает конечного максимума на R^n. Таким образом, найдя максимум данного функционала, можно судить о пустоте допускового множества решений ИСЛАУ. Если $\max\limits_{x \in R^n} \mathrm{Tol}(x) \ge 0$, то допусковое множество не пусто. В противном случае $\Xi_{\mathrm{tol}} =$. Обратные утверждения также верны.

2.2 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части

Общая схема метода заключается в добавлении к каждой компоненте правой части ИСЛАУ величины $K \cdot \nu_i \cdot [-1,\ 1]$, где i - номер компоненты, ν_i - вес, задающий относительное расширение i-й компоненты, K - общий коэффициент расширения вектора b. В данной работе используются значение $\nu_i = 1\ \forall i = \overline{1, 3}$. Подобрав K таким образом, чтобы выполнялось $K + \max\limits_{x \in R^n} \mathrm{Tol}(x) \ge 0$, получим разрешимую систему с непустым допусковым множеством.

2.3 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы

Общая схема метода заключается в модификации исходной матрицы ИСЛАУ. Производим замену A на $A \ominus K \cdot N \cdot E$ где $N = \{\nu_i\}$ - матрица весов, K - общий коэффициент сужения A, E состоит из $[-e_{ij}, e_{ij}]$. При выполнении процедуры необходимо следить за тем, чтобы мы оставались в рамках IR.

При выполнении задания достижения разрешимости рекомендуется выполнять корректировку пропорционально координатам точки, в которой достигается максимум распознающего функционала.

При выполнении задания управления положением максимума распознающего функционала в случае коррекции матрицы в целом N - единичная матрица, в случае построчной - $N = \text{diag}\{\nu_i\}$.

2.4 Оценки вариабельности решения

Для оценки вариабельности решений предлагается использовать абсолютную и относительную оценки:

$$\text{ive}(A, b) = \min_{A \in A} \text{cond}\, A \cdot ||\text{argmax Tol}(x)|| \frac{\max\limits_{x \in R^n} \text{Tol}(x)}{||b||}$$

$$\text{rve}(A, b) = \min_{A \in A} \text{cond}\, A \cdot \max_{x \in R^n} \text{Tol}(x)$$

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств в среде разработки Matlab. Использованы библиотеки IntLab для реализации вычислений интервальной арифметики.

4 Результаты

4.1 Достижение разрешимости ИСЛАУ

Исходная рассматриваемая ИСЛАУ имеет пустое допусковое множество. $argmax = [2.57, 1.12]$ $tolmax = -1.79 < 0 \Rightarrow$ система несовместна.

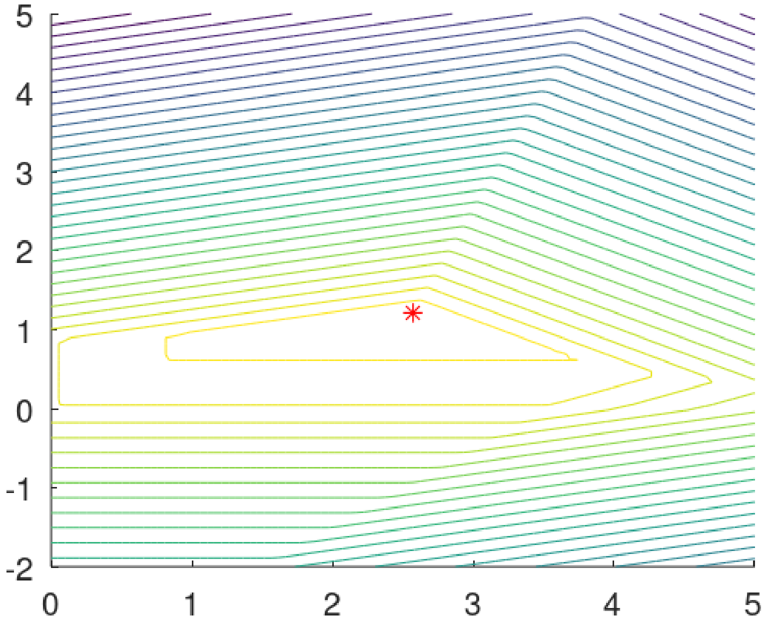

Рис. 1: График $\mathrm{Tol}(x, A, b)$

4.2 Корректировка правой части

Корректировака правой части, с помощью описанного выше способа помогла добиться непустого множества решений интервальной системы, $argmax = [2.57, 1.21]$ $tolmax = 0.89 > 0 \Rightarrow$ система совместна. Вектор столбца

$$b' = ([0.32, 9.67], [-3.17, 3.17], [0.321, 7.67], [-2.67, 4.67])$$

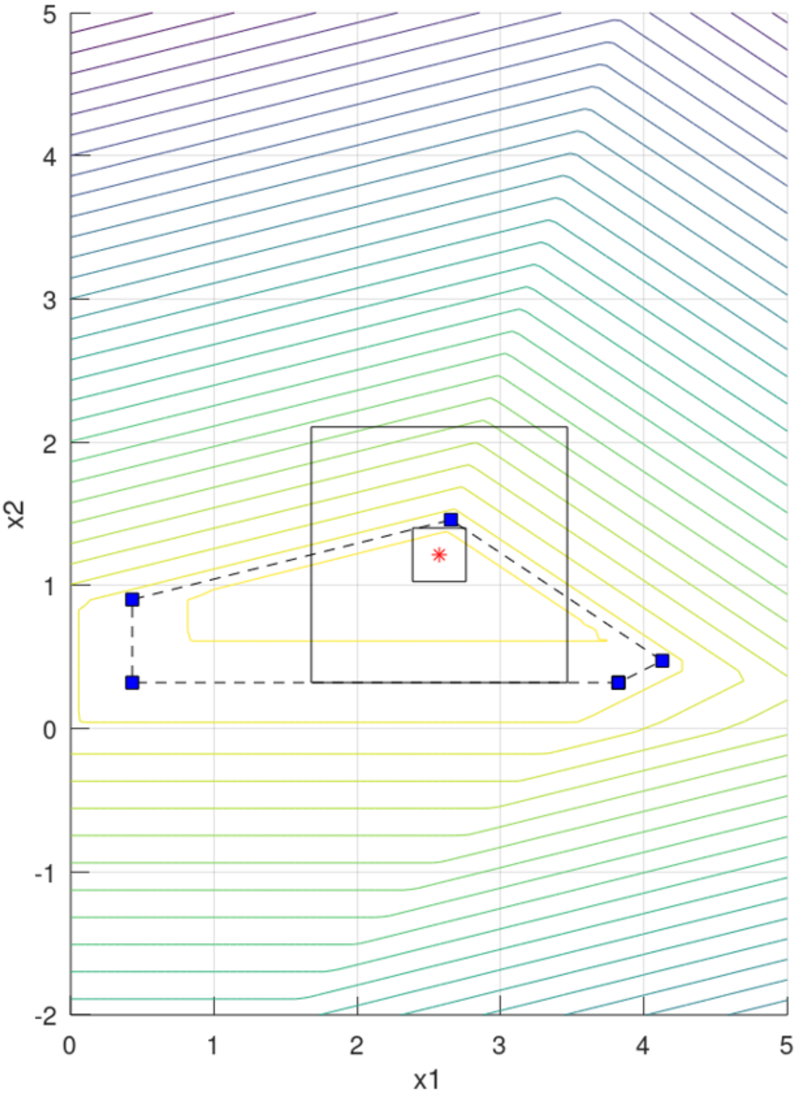

Рис. 2: График $\mathrm{Tol}(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с корректировкой в правой части

Допусковое множество решений стало непустым, оно отмечено на графике пунктиром. $ive(A, b') = 0.18, rve(A, b') = 0.89$. На графике изображены квадратные брусы с центром в точке максимума Tol (x) и радиусом ive и rve.

4.3 Корректировка матрицы

На каждой итерации сужаем радиус интервалов матрицы до тех пор, пока максимальное значение распознающего функционала не станет положительным или близким к нулю, $argmax = [3.52, 1.12]$ $tolmax = 0.34 > 0 \Rightarrow$ система совместна. Итоговая матрица:

$$A' = \begin{pmatrix} [0.75, 1.25] & 2 \\ 1 & 3 \\ [0.95, 1.05] & 0 \\ 0 & [0.75, 1.25] \end{pmatrix} \tag{2}$$

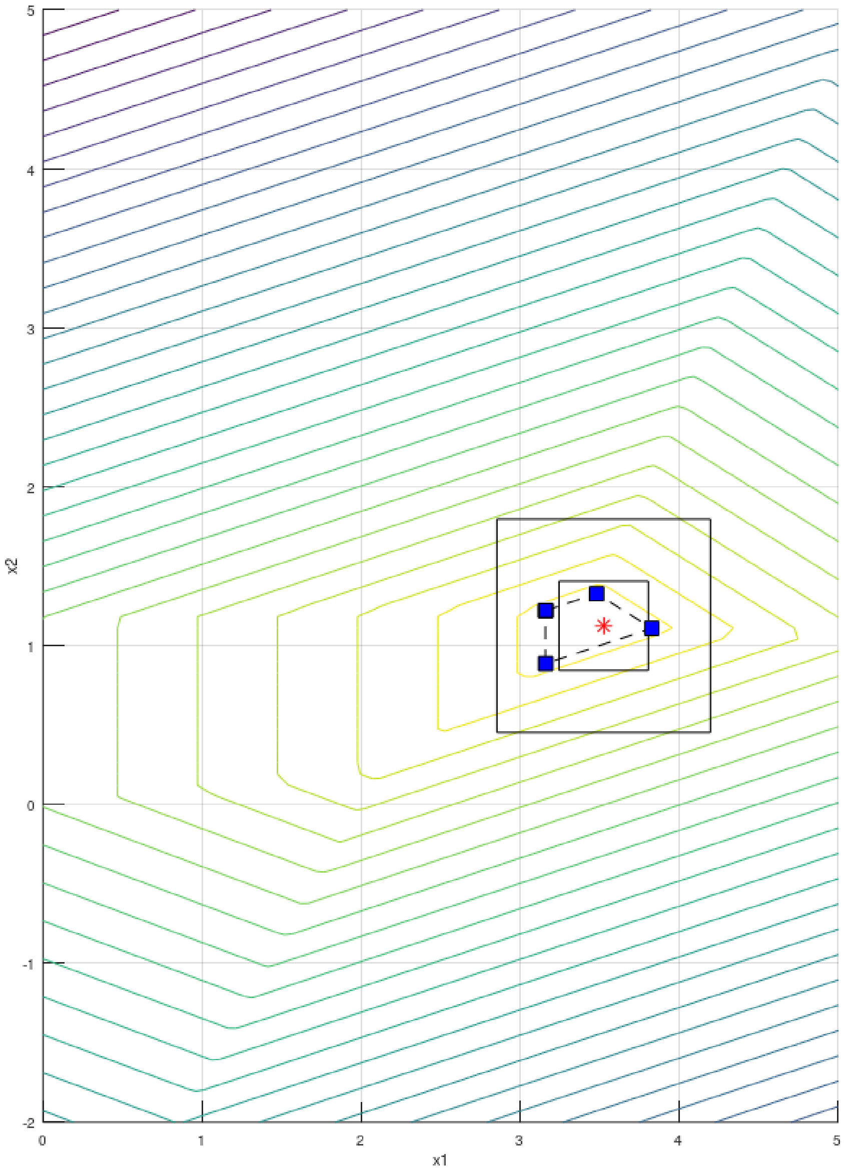

Рис. 3: График Ξ_{tol} для ИСЛАУ с корректировкой матрицы

Допусковое множество решений стало непустым, оно отмечено на графике пунктиром. $ive(A, b') = 0.28, rve(A, b') = 0.67$. На графике изображены квадратные брусы с центром в точке максимума Tol (x) и радиусом ive и rve.

4.4 Управление положением максимума распознающего функционала

Отметим на графике распознающего функционала прямые, образованные СЛАУ $(A)x = b$. Красной прямой соответствует первая строка, зелёной - вторая, синей - третья, черной - четвертая.

Результат корректировки первой строки:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & [-4, -2] \\ [0.75, 1.25] & 0 \\ 0 & [0.75, 1.25] \end{pmatrix} \tag{3}$$

$argmaxTol(x, A, b) = (3.23, 1.08)$

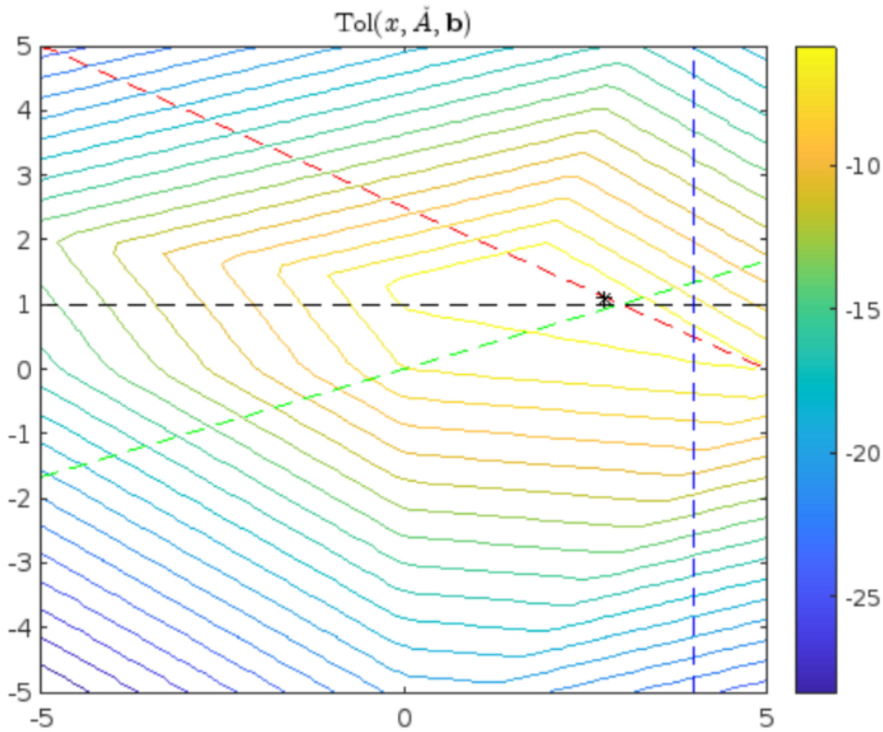

Рис. 4: График $Tol(x, A, b)$ с корректировкой первой строки матрицы

Результат корректировки второй строки:

$$A = \begin{pmatrix} [0, 2] & [1, 3] \\ 1 & -3 \\ [0.75, 1.25] & 0 \\ 0 & [0.75, 1.25] \end{pmatrix} \tag{4}$$

$argmaxTol(x, A, b) = (2.17, 1.42)$

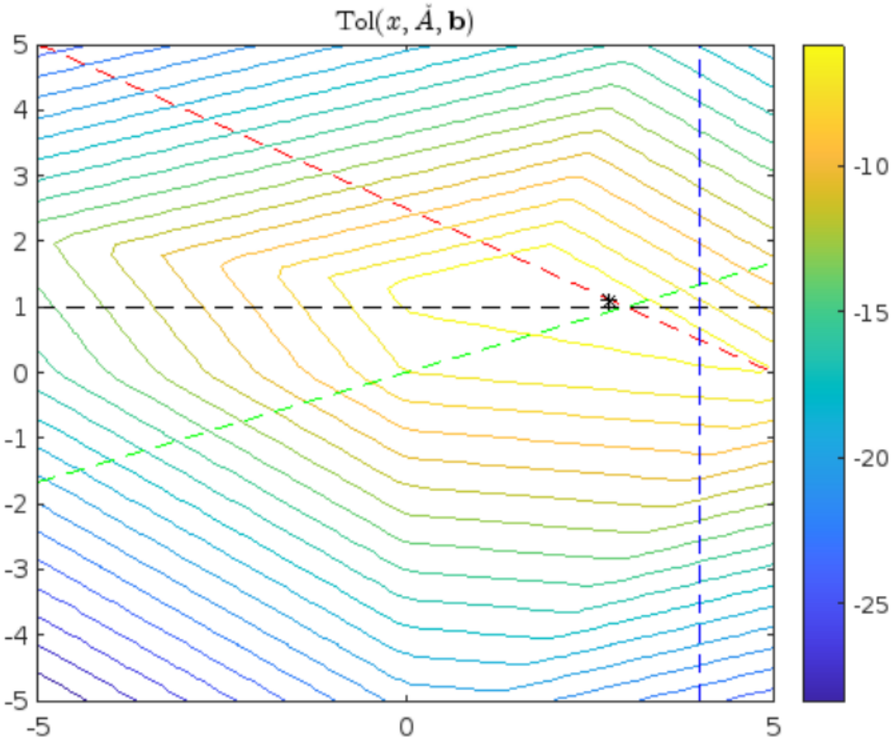

Рис. 5: График $Tol(x, A, b)$ с корректировкой второй строки матрицы

Результат корректировки третьей строки:

$$A = \begin{pmatrix} [0,2] & [1,3] \\ 1 & [-4,-2] \\ 1 & 0 \\ 0 & [0.75, 1.25] \end{pmatrix} \tag{5}$$

$argmaxTol(x, A, b) = (2.57, 1.21)$

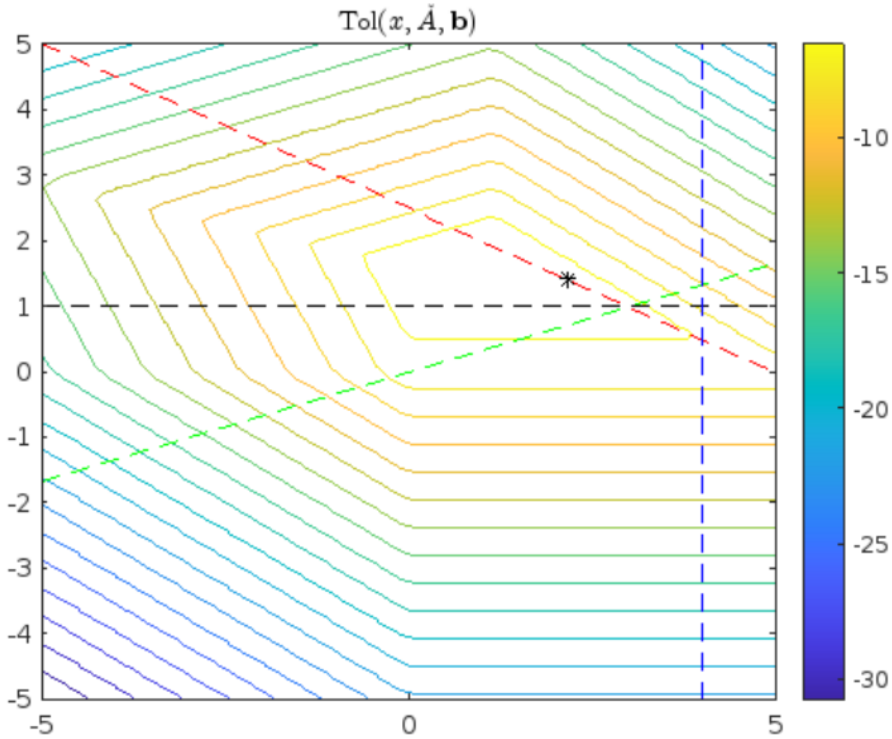

Рис. 6: График $Tol(x, A, b)$ с корректировкой третьей строки матрицы

Результат корректировки четвертой строки:

$$A = \begin{pmatrix} [0,2] & [1,3] \\ 1 & [-4,-2] \\ [0.75,1.25] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$argmaxTol(x, A, b) = (2.57, 1.21)$

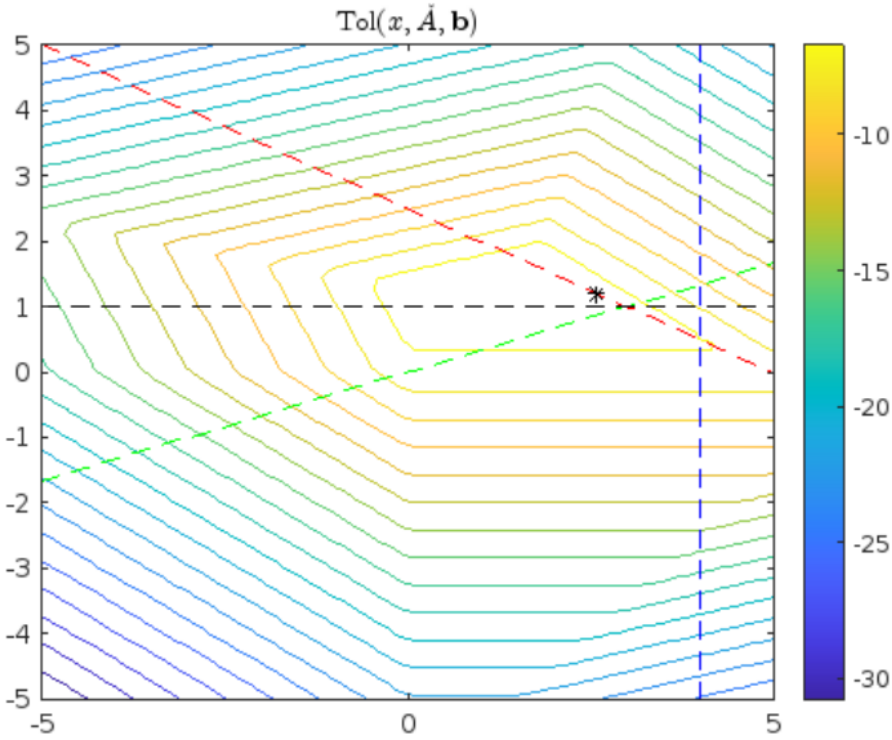

Рис. 7: График $Tol(x, A, b)$ с корректировкой четвертой строки матрицы

Результат корректировки матрицы в целом:

$$A = \begin{pmatrix} [0.25, 1.75] & [1.25, 2.75] \\ 1 & [-3.75, -2.25] \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$argmaxTol(x, A, b) = (2.77, 1.12)$

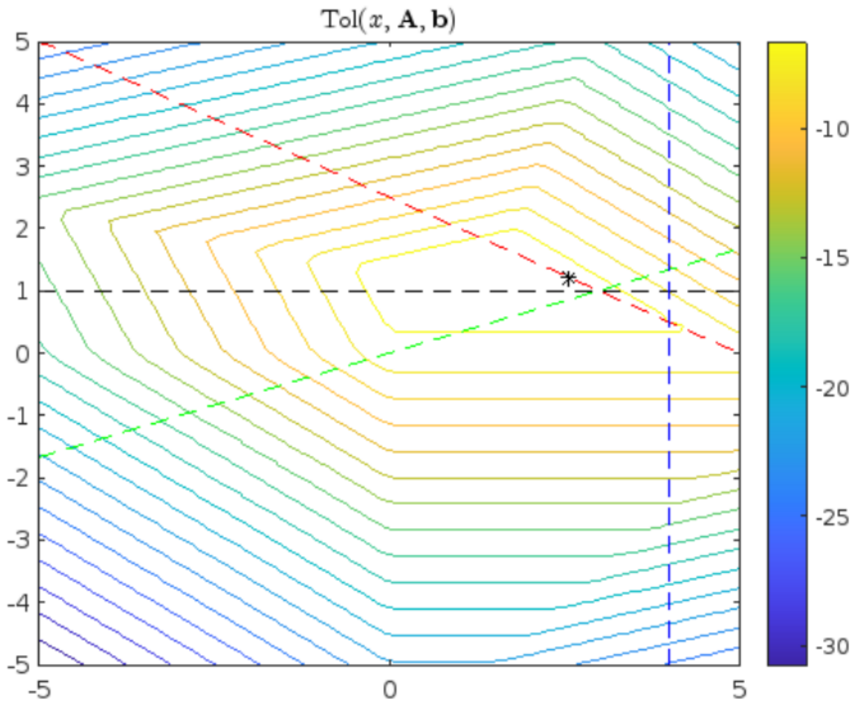

Рис. 8: График $Tol(x, A, b)$ с корректировкой матрицы первой

5 Обсуждение

- Оценки вариабльности меньше при коррекции матрицы, при этом брусы, соответствующие оценкам вариабельности, хорошо оценили допусковое множество итоговой ИСЛАУ

- Коррекция правой части влечет увеличение значений максимума распознающего функционала

- Коррекция матрицы ИСЛАУ меняет форму распознающего функционала во всех рассмотренных преобразованиях

- При коррекции матрицы в целом с увеличением параметра e максимум стремится к правой нижней вершине треугольника, составленного из центральных точечных уравнений ИСЛАУ.

- При корректировки третьей строки можно наблюдать смещение центра максимума и при увеличении параметра, начиная с $e = 0.2$, положение максимума не изменяется

6 Приложения

Код программы на GitHub, URL: https://github.com/Enoras/IntervalLabs