

Análisis numérico de un sistema vibratorio lineal y no lineal

[CB051] Modelación Numérica - Curso 02 Tarela
Trabajo Práctico - Primer cuatrimestre de 2025

Estudiantes:

Nombre	Padrón	Mail
Enrique José Heller	111605	eheller@fi.uba.ar
Martín Zaton Cardozo	112188	mzaton@fi.uba.ar

Índice

1. Objetivos	2
2. Introducción	2
3. Análisis del sistema lineal (modelo base)	2
3.1. Método de Euler Explícito	2
3.1.1. Análisis de precisión y estabilidad	3
3.2. Método de Runge-Kutta de orden 2	4
3.2.1. Análisis de precisión y estabilidad	5
3.3. Resultados empíricos	5
3.3.1. Condiciones Iniciales	5
3.3.2. Caso subamortiguado ($\zeta < 1$)	5
3.3.3. Caso críticamente amortiguado ($\zeta = 1$)	7
3.3.4. Caso sobreamortigado ($\zeta > 1$)	9
4. Incorporación de no linealidad y análisis del oscilador de Duffing	11
4.1. Modificación del modelo	11
4.2. Resolución analítica del sistema no lineal	11
4.3. Análisis cualitativo de la solución	12
4.4. Resultados Empíricos	12
4.4.1. Caso $\alpha > 0$	12
4.4.2. Caso $\alpha < 0$	13
4.5. Investigación acerca del Oscilador de Duffing	15
4.5.1. Aplicaciones del modelo en la práctica	16
4.5.2. Importancia como modelo no lineal	16
4.5.3. Comportamientos posibles esperados dentro del modelo	16
4.5.4. Caso $\alpha > 0$ (resorte endurecedor)	16
4.5.5. Caso $\alpha < 0$ (resorte ablandador)	17
4.5.6. Comparación con el caso lineal ($\alpha = 0$)	17
4.5.7. Síntesis	17
5. Conclusiones	17
6. Anexos	18
6.1. Código implementado	18
6.2. Corridas numéricas	19

1. Objetivos

El presente trabajo tiene como objetivo analizar la aplicabilidad de métodos numéricos en la resolución de modelos matemáticos que describen sistemas físicos oscilatorios, específicamente el sistema **masa-resorte-amortiguador**. Se busca abordar tanto el caso lineal como el no lineal, con el fin de comprender las diferencias e implicancias de cada modelo. Por otro lado, se pretende contrastar los resultados obtenidos mediante simulación computacional con las soluciones analíticas disponibles, evaluando la precisión y estabilidad de los métodos numéricos implementados. Finalmente, se analizará el efecto del tamaño de paso sobre la calidad de las aproximaciones numéricas, haciendo uso de los conceptos teóricos estudiados en el curso.

2. Introducción

Se parte de entender al estudio de sistemas oscilatorios como fundamental en diversas ramas de la ingeniería, tal que permite comprender la respuesta de estructuras y componentes mecánicos ante perturbaciones. Se interpreta al modelo **masa-resorte-amortiguador** como una base para el análisis de estos fenómenos, permitiendo describir el movimiento oscilatorio de un cuerpo sometido a fuerzas restauradoras y disipativas.

A continuación, se abordará la resolución analítica y numérica del sistema lineal, haciendo especial énfasis en la comparación entre el **Método de Euler Explícito** y el de **Runge-Kutta de orden 2**, para distintos coeficientes de amortiguamiento relativo. Luego se dará lugar a la incorporación de la no linealidad y se propondrá un análisis a partir del *Oscilador de Duffing*.

3. Análisis del sistema lineal (modelo base)

En primer lugar, se propone la siguiente ecuación diferencial como el modelo matemático que representa nuestro caso de estudio:

$$m x''(t) + c x'(t) + k x(t) = 0$$

Donde:

- $x(t)$: Desplazamiento de la masa
- m : Masa del cuerpo
- c : Coeficiente de amortiguamiento
- k : Constante elástica del resorte
- t : Tiempo

A partir de dichas magnitudes, se define al coeficiente de amortiguamiento relativo como:

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Dicho coeficiente nos caracteriza a nuestro sistema de la siguiente manera:

- $\zeta < 1$ \Rightarrow Sistema subamortiguado
- $\zeta = 1$ \Rightarrow Sistema críticamente amortiguado
- $\zeta > 1$ \Rightarrow Sistema sobreamortiguado

Esta característica de amortiguamiento será uno de los criterios mediante los cuales se evaluarán los métodos numéricos presentados a continuación.

3.1. Método de Euler Explícito

Para el desarrollo de este método, se parte de reescribir la EDO de orden 2 presentada como un sistema de dos ecuaciones de primer orden. Para ello, se procede a definir las siguientes variables de estado $u(t)$ y $v(t)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= x(t) \\ v(t) &= x'(t) \end{aligned}$$

A partir de este cambio de variables y la EDO de orden 2 definida originalmente, es posible plantear el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} u'(t) = v(t), \\ v'(t) = \frac{-cv(t) - ku(t)}{m}. \end{cases}$$

La aplicación del método de Euler Explícito implica un proceso de discretización, tanto de la variable independiente t , como de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Para t , que es variable continua, la reescribimos como una serie de n puntos que se encuentran a paso h , lo que significa que:

$$t_n = n h.$$

Para las EDOs de primer orden, se discretiza cada ecuación por separado, siendo u^n y v^n las aproximaciones numéricas de las funciones en el instante t_n .

Para la primera ecuación, $u'(t) = v(t)$, discretizamos la derivada $u'(t)$ en t_n como:

$$u'(t_n) \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{h}.$$

Igualando esto a v^n y despejando u^{n+1} se obtiene la fórmula de avance:

$$u^{n+1} = u^n + h \cdot v^n.$$

Para la segunda ecuación, $v'(t) = \frac{-cv(t) - ku(t)}{m}$, discretizamos la derivada $v'(t)$ en t_n como:

$$v'(t_n) \approx \frac{v^{n+1} - v^n}{h},$$

por lo que

$$v^{n+1} = v^n + h \cdot \left(\frac{-cv^n - ku^n}{m} \right).$$

Resultando así en el siguiente sistema de avance:

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + h v^n, \\ v^{n+1} = v^n + h \cdot \left(\frac{-cv^n - ku^n}{m} \right). \end{cases}$$

A partir de este sistema y la definición de las condiciones iniciales y constantes que nos definen los casos particulares a analizar, se desarrolla el algoritmo que implementa este método.

3.1.1. Análisis de precisión y estabilidad

Respecto a la precisión, se puede demostrar que el error de truncamiento en este método es de orden $\mathcal{O}(h)$. Esto hace que el método de Euler Explícito se clasifique como un método de orden 1, lo que implica que, al reducir el paso de discretización h a la mitad, se espera que el error de truncamiento (y el error global, bajo ciertas condiciones) también se reduzca aproximadamente a la mitad.

Se espera también que este método sea **consistente**, es decir, que cuando $h \rightarrow 0$, el error de truncamiento tienda a cero.

Para el análisis de estabilidad, se utiliza el método de perturbaciones (método de Von Neumann) directamente para el caso general. Se introducen pequeñas perturbaciones δu_n , δv_n en las variables para un instante t_n y se analiza cómo estas perturbaciones se transforman en el instante siguiente t_{n+1} :

$$\begin{aligned} u_{n+1} + \delta u_{n+1} &= u_n + \delta u_n + h(v_n + \delta v_n), \\ v_{n+1} + \delta v_{n+1} &= v_n + \delta v_n + h \left(-\frac{c}{m}(v_n + \delta v_n) - \frac{k}{m}(u_n + \delta u_n) \right). \end{aligned}$$

Que si se restan las ecuaciones originales, se obtiene:

$$\begin{aligned}\delta u_{n+1} &= \delta u_n + h \delta v_n \\ \delta v_{n+1} &= -\frac{hk}{m} \delta u_n + \left(1 - \frac{hc}{m}\right) \delta v_n\end{aligned}$$

De este sistema se define la **matriz de amplificación** que describe cómo las perturbaciones se amplifican o se decaen de un paso al siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & h \\ -\frac{hk}{m} & 1 - \frac{hc}{m} \end{bmatrix}$$

Para que el esquema numérico sea estable, las perturbaciones no deberían crecer. Esto se traduce en la **condición de que el radiopectral de la matriz de amplificación sea menor o igual a 1**. Mediante la herramienta *WolframAlpha* calculamos los autovalores de la matriz y obtenemos el siguiente resultado:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \frac{hc}{m} \pm h \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4 \frac{k}{m}}}{2}$$

Esto indica que el análisis de estabilidad y la cota para h dependerán de los valores de m , c y k , por lo que la estructura general anterior permite estudiar cada caso particular estudiado más adelante, bajo el método de Euler Explicito. Cabe destacar que el hecho de que los autovalores sean complejos conjugados indica que la solución numérica presenta un comportamiento oscilatorio, lo que resulta coherente con el sistema físico.

3.2. Método de Runge-Kutta de orden 2

Para este método, también se parte de reescribir la EDO de segundo orden como un sistema de dos ecuaciones de primer orden, utilizando las mismas variables de estado $u(t)$ y $v(t)$:

$$\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = \frac{-cv(t) - k u(t)}{m} \end{cases}$$

El método de Runge-Kutta de orden 2 (RK2) permite obtener una mejor aproximación que el método de Euler, ya que utiliza información adicional del sistema en cada paso.

El esquema predictor-corrector para este sistema es el siguiente:

■ **Paso predictor:**

Se realiza una primera estimación de los valores en el instante t_{n+1} a partir de información de la pendiente en t_n :

$$\begin{aligned}u_{n+1}^* &= u_n + h v_n \\ v_{n+1}^* &= v_n + h \left(\frac{-cv_n - k u_n}{m} \right)\end{aligned}$$

■ **Paso corrector:**

Se corrigen las estimaciones obtenidas en el paso predictor, utilizando un promedio de las pendientes aproximadas evaluadas en t_n y en t_{n+1} (con los valores predichos):

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n + \frac{h}{2} (v_n + v_{n+1}^*) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{2} \left[\frac{-cv_n - k u_n}{m} + \frac{-cv_{n+1}^* - k u_{n+1}^*}{m} \right]\end{aligned}$$

Se supone que el método, al considerar el promedio de la pendiente inicial y la precalculada, mejora la precisión respecto a Euler, lo cual se estudiará empíricamente.

3.2.1. Análisis de precisión y estabilidad

En cuanto a la precisión, este método es de orden $\mathcal{O}(h^2)$, lo que implica que el error de truncamiento es proporcional a h^2 . Por lo tanto, al reducir el paso de discretización h a la mitad, el error global (bajo ciertas condiciones) se reduce aproximadamente a la cuarta parte.

Respecto a la estabilidad, al ser un esquema explícito, su estabilidad es condicional al igual que Euler Explícito y es posible calcular la matriz de amplificación para así estudiar el radiopectral y determinar el rango de h para que el sistema sea estable. No obstante, al resultar un cálculo más complejo y poco práctico para el alcance del presente trabajo, se opta por estudiar empíricamente cuál será dicho rango de estabilidad para el paso h .

3.3. Resultados empíricos

A partir del marco analítico previamente presentado, se ofrece a continuación un análisis empírico y comparativo entre los métodos. Se establece un marco común para realizar la comparativa, de modo que las diferencias sean atribuidas únicamente a la variación del amortiguamiento.

3.3.1. Condiciones Iniciales

Se optó por establecer las siguientes constantes comunes a todos los casos de prueba:

- $u_0 = 10^{-2} \text{ m}$

- $v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.3.2. Caso subamortiguado ($\zeta < 1$)

Para el estudio de este caso, se tomaron los siguientes valores:

- $m = 1 \text{ kg}$

- $c = 5 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$

- $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

Lo que significa un $\zeta = 0,25$.

Se obtuvo la solución analítica mediante *WolframAlpha*:

$$x(t) = e^{-\frac{5t}{2}} \left(0,01 \cos\left(\frac{5\sqrt{15}}{2}t\right) + 0,105862 \sin\left(\frac{5\sqrt{15}}{2}t\right) \right).$$

Dicha solución se usó para medir los errores de los modelos propuestos.

Reemplazando en el cálculo de los autovalores que se realizó anteriormente, se obtiene:

$$\lambda_1 = \frac{2 - 5h - 5i\sqrt{15}h}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{2 - 5h + 5i\sqrt{15}h}{2}.$$

Para que el sistema sea estable (radiopectral ≤ 1), las cuentas indican:

$$0 \leq h \leq \frac{1}{20} = 0,05.$$

A continuación, se muestra una comparativa entre la solución analítica y las aproximaciones para distintos valores de h . Comenzamos analizando para el método de Euler Explícito:

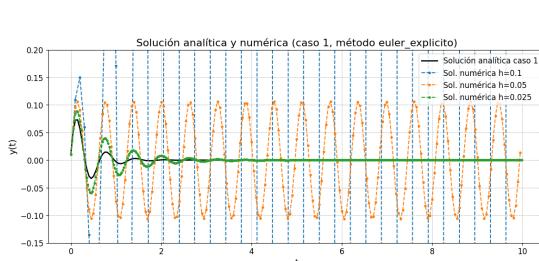


Figura 1: comportamiento de $u(t) \in [-2; 4]$

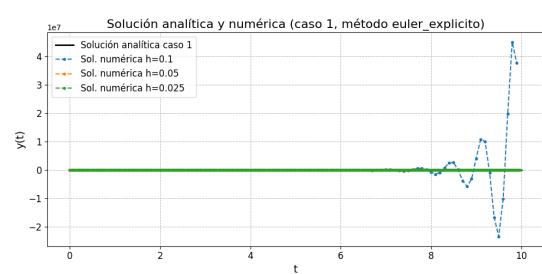
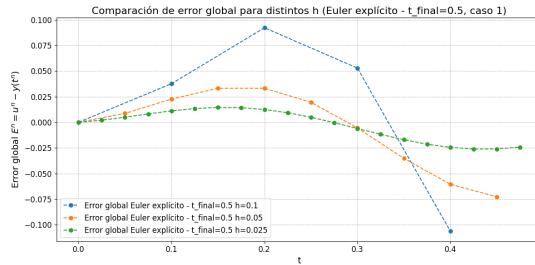
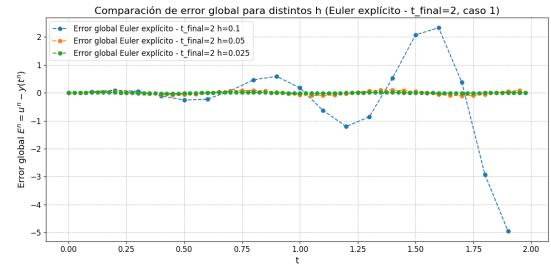
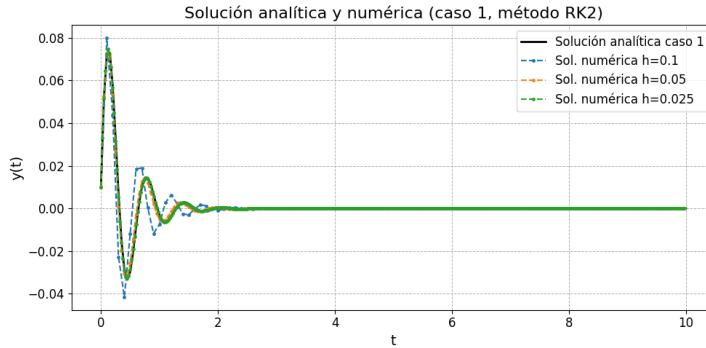


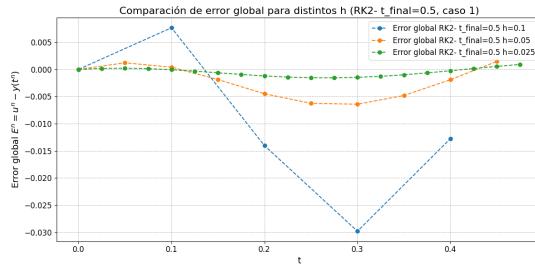
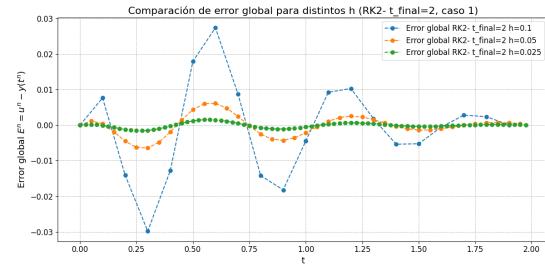
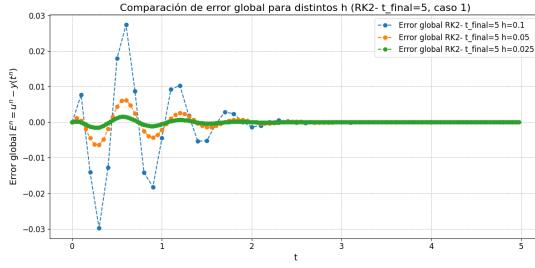
Figura 2: Comportamiento de $u(t) \in [-2, 4]$

Figura 3: Errores hasta $t = 0.5s$ Figura 4: Errores hasta $t = 2s$

Estos primeros gráficos para el caso subamortiguado y el método de Euler Explícito, se observa una solución analítica con un comportamiento oscilatorio que tiende a reducirse a mayor t . También se puede observar que para $h > 0.05$, la aproximación numérica se vuelve inestable y los gráficos evidencian una rápida divergencia respecto a la solución analítica (notar cómo para $h = 0.1$, llega un punto que el método diverge cada vez más). Este comportamiento se hace notar a partir de oscilaciones no propias del problema físico, que cambian su frecuencia o período en función de h , evidenciando un “efecto serrucho”. Por otro lado, para $h < 0.05$ (en este caso $h = 0.025$) se evidencia cómo la aproximación primero tiene un lapso de inestabilidad, la cual va decreciendo con el tiempo. Se hace notar cómo los errores locales en cada paso son menores que los anteriores, generando una tendencia asintótica en el error global. Esta combinación de consistencia y estabilidad, de acuerdo con el **Teorema de Lax**, garantiza que el método sea convergente. Para $h = 0.05$, vemos un comportamiento de **estabilidad marginal**, donde el error queda oscilando entre valores fijos. También se puede observar en general cómo, al reducirse el paso h a la mitad, los errores tienden a comportarse aproximadamente de forma proporcional, lo cual coincide con la teoría.

A continuación, observamos qué sucede para RK2:

Figura 5: comportamiento de $u(t) \in [-0,04; 0,08]$

Figura 6: Errores hasta $t = 0.5$ Figura 7: Errores hasta $t = 2s$ Figura 8: Errores hasta $t = 5s$

Para este método, lo primero que se destaca en comparación al de Euler Explícito es la mejora respecto a la precisión: Los errores en general para los distintos h son mucho menores. También es destacable como al reducirse a la mitad el paso, los errores se reducen a una cuarta parte como era de esperarse respecto a la teoría, lo que nos confirma la consistencia del método. Respecto a la estabilidad, podemos notar que para todos los pasos realizados el método no se comporta de forma inestable, de hecho para todos los pasos el método muestra convergencia a medida que se avanza iterativamente. Esto sugiere que el método es estable, por lo menos, para $h < 0,1$.

3.3.3. Caso críticamente amortiguado ($\zeta = 1$)

Para el estudio de este caso, se tomaron los siguientes valores:

- $m = 0,1 \text{ kg}$,
- $c = 0,55 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$,
- $k = 0,625 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Lo que significa un $\zeta = 1$.

Solución analítica:

$$x(t) = -0,443438 e^{-3,89564 t} + 0,453438 e^{-1,60436 t}.$$

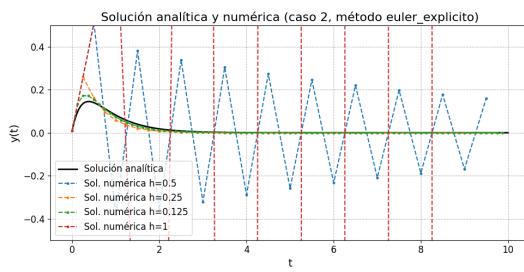
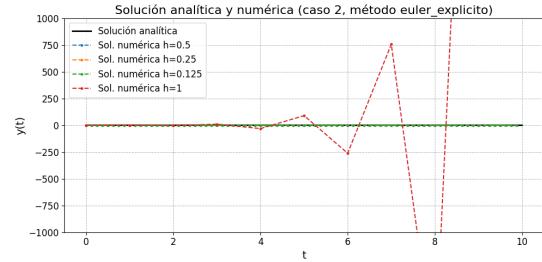
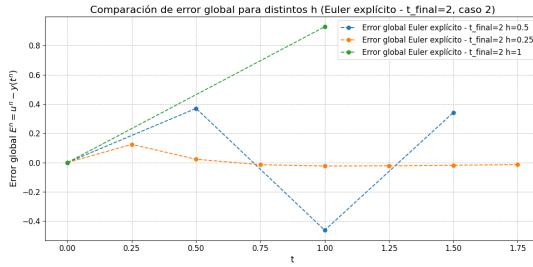
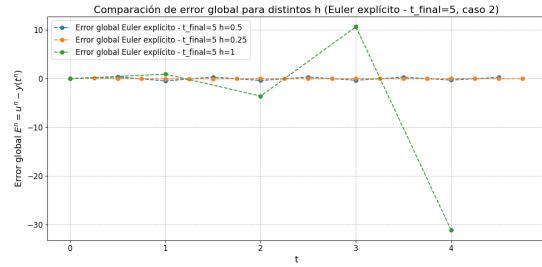
Autovalores y condiciones sobre h en el método Euler explícito (interesa la cota más restrictiva):

$$\lambda_1 = \frac{2 - 5,5 h - h \sqrt{5,25}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{2 - 5,5 h + h \sqrt{5,25}}{2},$$

Lo que nos da un h en el siguiente rango:

$$0 < h < 0,513394 \approx 0,5$$

Comparativas:

Figura 9: comportamiento de $y(t) \in [-0,4; 0,4]$ Figura 10: comportamiento de $y(t) \in [-1000; 1000]$ Figura 11: Errores hasta $t = 2s$ Figura 12: Errores hasta $t = 5s$

En este caso, la solución analítica nos muestra un gráfico donde hay una oscilación al principio y luego la función tiende a 0 asintóticamente. Podemos decir que para este caso, la tolerancia respecto al paso máximo que se puede dar para que haya estabilidad aumentó. Es decir, **a priori podemos decir que a mayor amortiguamiento, mayor es el paso que puedo dar manteniendo estabilidad**. Podemos plantear como hipótesis que para un mismo h tendremos mayor velocidad de convergencia, a mayor sea el amortiguamiento. Esto lo seguiremos comprobando para el siguiente caso. Respecto al comportamiento entre los h_s , notamos la tendencia esperada de reducción a la mitad de los errores cuando el h se reduce a la mitad. Para $h < 0,5$, el método muestra la convergencia esperada respecto al análisis teórico anteriormente descripto.

A continuación pasamos a mostrar los gráficos pertinentes a RK2 para este caso:

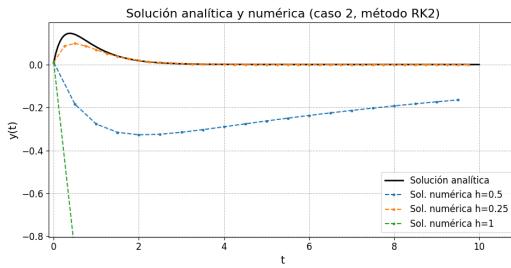
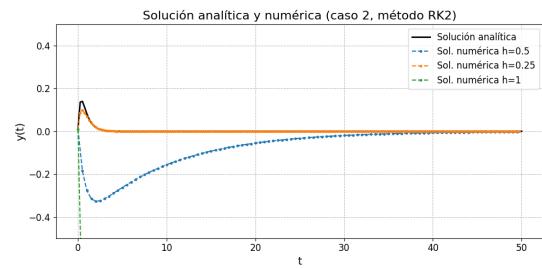
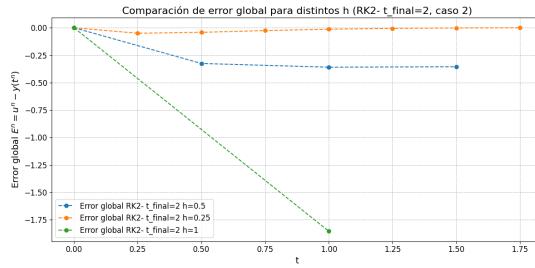
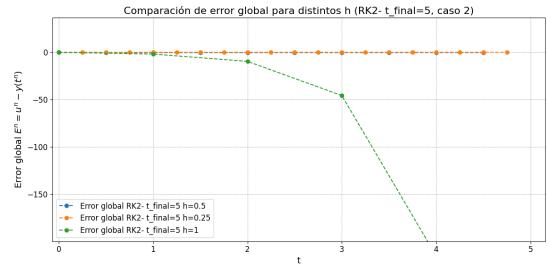
Figura 13: comportamiento de $y(t) \in [-0,08; 0]$ 

Figura 14: Variacion del t final a 40s

Figura 15: Errores hasta $t = 2\text{s}$ Figura 16: Errores hasta $t = 5\text{s}$

Para este caso, podemos confirmar empíricamente que el método resulta estable y que converge para $h < 0,5$. Notar también la rápida divergencia para un h que es el doble de 0,5. Es interesante notar que, evidentemente el paso máximo para que el método sea convergente, no necesariamente es 0,5, tal que es posible notar que para un t final de 40s, la aproximación termina convergiendo.

El método también muestra una conservación del signo mostrándose más estable y con una convergencia más veloz en términos generales.

3.3.4. Caso sobreamortado ($\zeta > 1$)

Para el estudio de este caso, se tomaron los siguientes valores:

- $m = 10 \text{ kg}$,
- $c = 10 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$,
- $k = 0,5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Lo que significa un $\zeta = 3,16$.

Solución analítica:

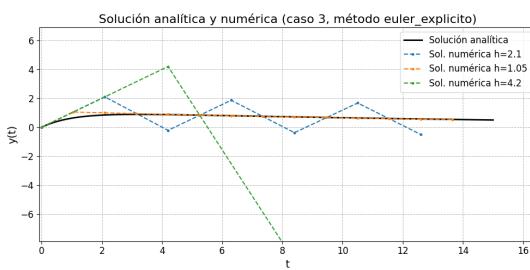
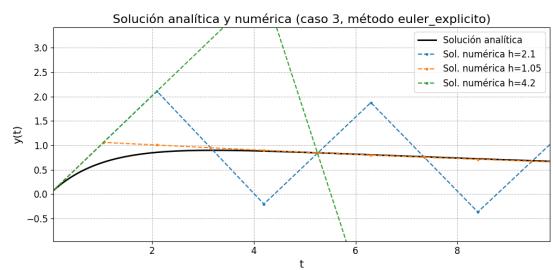
$$x(t) = -1,11862 e^{-0,947214 t} + 1,12862 e^{-0,0527864 t}.$$

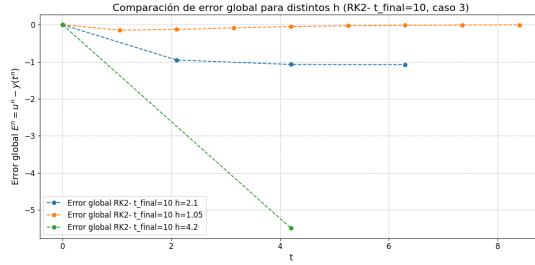
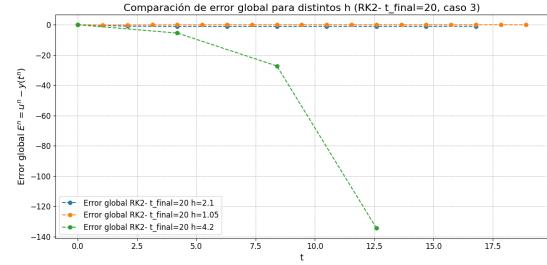
Autovalores y condiciones sobre h en el método Euler explícito:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(2-h) \pm h\sqrt{0,8}}{2}$$

$$0 \leq h \leq 2,111$$

Comparativas:

Figura 17: comportamiento de $y(t) \in [-6; 4]$ Figura 18: comportamiento de $y(t) \in [-0,5; 3]$

Figura 19: Errores hasta $t = 10$ Figura 20: Errores hasta $t = 20$

Observamos nuevamente que el análisis de estabilidad hecho analíticamente se ve reflejado en los gráficos. En este caso sobreamortiguado, la solución analítica nos muestra una menor oscilación en la función, lo cual era esperable. También nuestra hipótesis formulada en el método anterior respecto a notar un mayor h máximo para la estabilidad, a medida que crece el índice de amortiguamiento, se sigue cumpliendo.

Cuando $h < 2.1$ para este caso de Euler Explícito, el método se aproxima rápidamente a la solución analítica, con errores que tienden a cero con el tiempo. Al igual que en el caso anterior de amortiguamiento notamos que para el método de Euler Explícito, el error es proporcional al h .

Cuando $h = 2.1$, Euler Explícito presenta un comportamiento marginalmente estable: la solución numérica oscila sin amortiguar ($|g^n| = 1$), generando una oscilación constante.

Si $h > 2.1$, se pierde la estabilidad numérica. En Euler Explícito, el error se amplifica y aparecen oscilaciones grandes ($|g^n| > 1$).

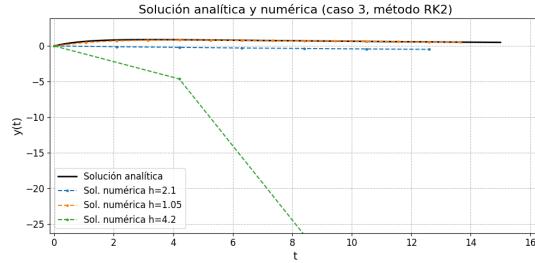
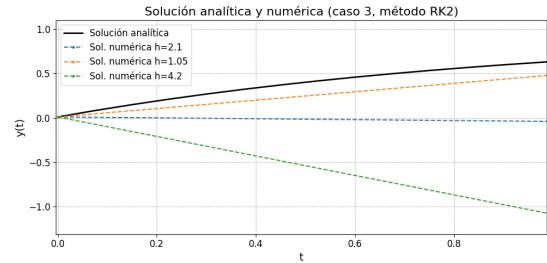
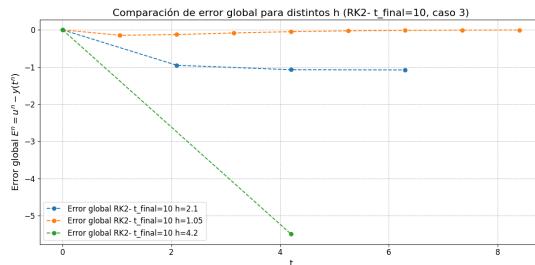
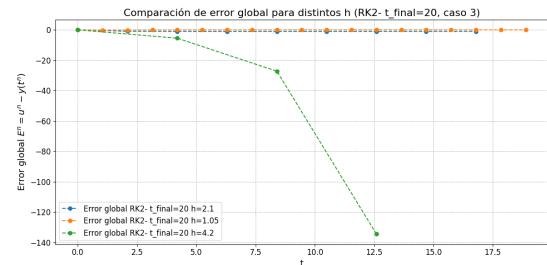
Figura 21: comportamiento de $y(t) \in [-0,08; 0]$ 

Figura 22: Variacion del t final a 40s

Figura 23: Errores hasta $t = 2s$ Figura 24: Errores hasta $t = 5s$

Para este caso en particular, podemos ver claramente como el error se reduce cuadraticamente (*figura 22*). Notamos también que el error no posee un comportamiento oscilatorio, al igual que sucedía en el caso críticamente amortiguado. También sucede que para el doble del valor crítico calculado en Euler Explícito, hay una divergencia veloz. Lo que se puede confirmar también a partir de los gráficos es que para $h < 2.1$, el método resulta estable.

Vemos que también tiende a alinearse con la solución teórica con el tiempo más rápidamente, lo que refleja su mayor robustez cerca del límite de estabilidad. la desviación es menos abrupta.

4. Incorporación de no linealidad y análisis del oscilador de Duffing

Tras haber analizado el comportamiento en el modelo lineal, en esta sección se introduce el término no lineal αx^3 al modelo de Masa–resorte–amortiguador, con el objetivo de estudiar el comportamiento de los métodos numéricos de la Parte 1 y realizar un análisis cualitativo de los resultados obtenidos.

4.1. Modificación del modelo

El modelo lineal base es:

$$m x''(t) + c x'(t) + k x(t) = 0.$$

Para incorporar la rigidez no lineal, agregamos el término $\alpha x(t)^3$. La ecuación de Duffing resulta en:

$$m x''(t) + c x'(t) + k x(t) + \alpha x(t)^3 = 0$$

Al igual que hicimos anteriormente, es posible definir las variables de estado

$$\begin{aligned} u(t) &= x(t) \\ v(t) &= x'(t) \end{aligned}$$

de modo que el sistema de primer orden equivale a:

$$\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = \frac{-c v(t) - k u(t) - \alpha u(t)^3}{m} \end{cases}$$

4.2. Resolución analítica del sistema no lineal

Para resolver numéricamente el sistema anterior, se utilizan los mismos esquemas numéricos empleados en la Parte 1:

1. Método de Euler Explícito:

$$u^{n+1} = u^n + h v^n,$$

$$v^{n+1} = v^n + h \frac{-c v^n - k u^n - \alpha (u^n)^3}{m}$$

Observación: en cada paso, es posible evalúae directamente $(u^n)^3$, ya que el método es explícito.

2. Método de Runge–Kutta de orden 2 (RK2 / Euler Modificado): *Paso predictor:*

$$u_{n+1}^* = u_n + h v_n,$$

$$v_{n+1}^* = v_n + h \frac{-c v_n - k u_n - \alpha (u_n)^3}{m}.$$

Paso corrector:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} (v_n + v_{n+1}^*),$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2} \left[(-c v_n - k u_n - \alpha u_n^3) + (-c v_{n+1}^* - k u_{n+1}^* - \alpha (u_{n+1}^*)^3) \right]$$

De nuevo, se calcula αu^3 usando los valores conocidos o predichos en cada paso. El método al utilizar aproximación ya aproximada, también resulta explícito.

A nivel cálculos, notar que al haber elegido los métodos Euler Explícito y RK2, no se presentan mayores inconvenientes.

4.3. Análisis cualitativo de la solución

Para el análisis cualitativo del comportamiento de $u(t)$ se procede a examinar la existencia de las siguientes posibles características que definimos a continuación:

- **Oscilaciones periódicas:** la forma de onda se repite con amplitud y frecuencia constantes.
- **Comportamiento amortiguado:** la amplitud de las oscilaciones disminuye con el tiempo.
- **Comportamiento amplificado o inestable:** la amplitud crece con el tiempo, lo que interpretabamos que puede indicar inestabilidad numérica para h_s demasiados grandes.
- **Comportamiento caótico:** no hay una frecuencia bien definida y la trayectoria no se repite ni se cierra.

4.4. Resultados Empíricos

Para los gráficos de a continuación, se optó por realizar las mediciones pertinentes mediante el método Euler Explícito. Se decidió centrarnos en este método para el análisis no lineal dada su conveniencia en términos de su resolución y poder focalizarnos en la incidencia del término no lineal $\alpha x(t)^3$). La baja complejidad computacional del método resulta conveniente para que en la corrida no tener errores de *Overflow*, cosa que sucedió al querer resolver por RK2.

Cabe destacar también, que los análisis de estabilidad realizados en la Parte 1 para Euler Explícito nos permiten reutilizar los rangos de pasos de cálculo h donde el método es estable y preciso. Dichos valores de h resultan útiles para garantizar que las soluciones numéricas para el sistema de Duffing no muestren inestabilidades numéricas artificiales y reflejen el comportamiento físico intrínseco de la no linealidad. Al utilizar un método ya familiar y con un h adecuado, se mantiene la claridad en los gráficos, permitiendo un análisis focalizado en los fenómenos no lineales del sistema.

Se han separados los casos de forma conveniente con lo investigado acerca de los Osciladores de Duffing, explayado más adelante

4.4.1. Caso $\alpha > 0$

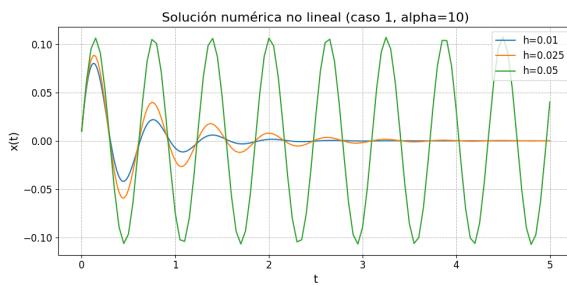


Figura 25: $\zeta < 1$, $\alpha = 10$

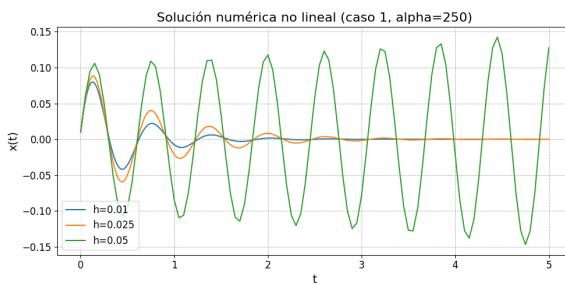
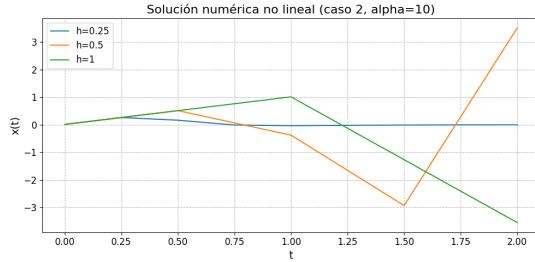
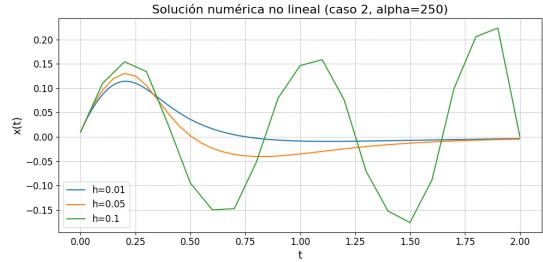
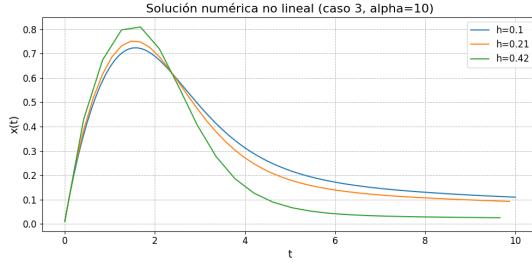
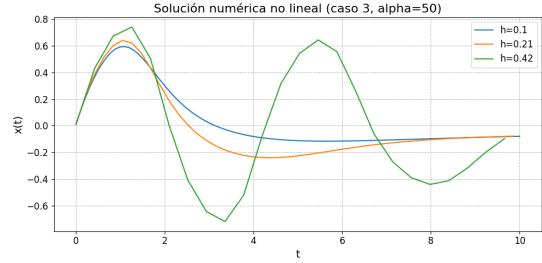


Figura 26: $\zeta < 1$, $\alpha = 250$

En el caso sub-amortiguado que se puede observar en la figura 25, para el h que se había acordado como $h_{max} = 0.05$, la aproximación oscilaría entre valores sin aumentar ni reducir sus errores, es decir, se observan oscilaciones periódicas. Sin embargo, en la Figura 26 cuando α toma un valor mayor en magnitud, ahora la aproximación muestra una onda que tiende a amplificarse: Se observa mayor amplitud y frecuencia de la onda, a medida que pasa el tiempo.

Figura 27: $\zeta = 1, \alpha = 10$ Figura 28: $\zeta = 1, \alpha = 250$

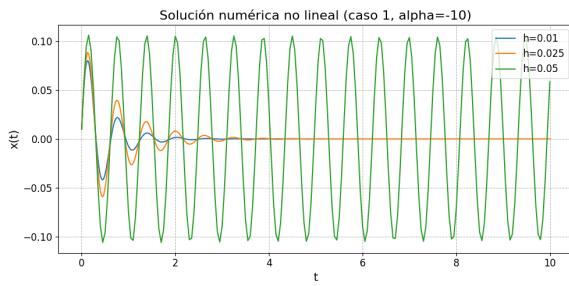
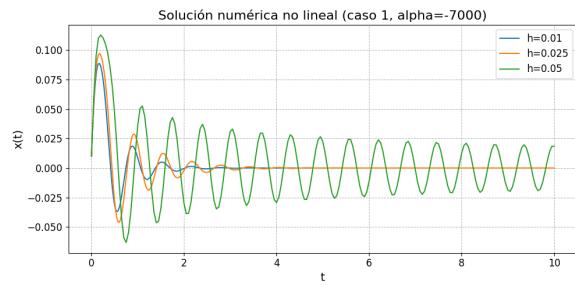
Para el caso estrictamente amortiguado, observamos un comportamiento caótico y más inestable para la *Figura 27*. Al aumentar la magnitud en la *Figura 28* se nota claramente un aumento en la frecuencia y amplitud de la aproximación para el h más grande, tendiendo a una oscilación periódica, pero con una onda no tan suave. Comparando con la *Figura 27*, observamos que fue necesario tomar h mucho más pequeños para conservar la estabilidad, lo que señala mayor inestabilidad a mayor sea el α . Esto se condice con el caso anterior $\zeta < 1$.

Figura 29: $\zeta > 1, \alpha = 10$ Figura 30: $\zeta > 1, \alpha = 50$

Por último, para el caso sobre-amortiguado, se toman valores de h 10 veces menores a los anteriormente utilizados en la parte 1 para mantener aproximaciones estables. Se hace notar también que a mayor sea la magnitud de α , la presencia de oscilaciones algo deformadas para h_s más grandes, se hace notar al igual que en el caso anterior, con una gran amplitud que va decayendo. Se sospecha que esto último puede deberse a la presencia del sobre-amortiguamiento que acelera la convergencia.

Ante todos estos casos, podemos plantear como hipótesis que a mayor amortiguamiento, el sistema tiende a estabilizarse y converger más rápidamente y a mayor α el sistema parece comportarse de forma más caótica, tendiendo a oscilaciones periódicas en la aproximación, con presencia de deformaciones.

4.4.2. Caso $\alpha < 0$

Figura 31: $\zeta < 1, \alpha = -10$ Figura 32: $\zeta < 1, \alpha = -7000$

Para este caso se observa un comportamiento altamente convergente para los h_s que tienden a 0. No obstante, es evidente como se dispara en oscilaciones periódicas con alta amplitud y frecuencia para un

$\alpha = -10$. No obstante, al aumentar considerablemente la magnitud de α , la aproximación se muestra de menor amplitud y con tendencia a reducirse en el tiempo.

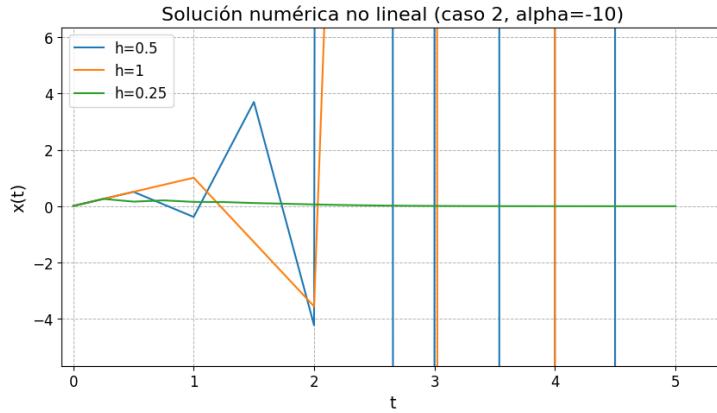


Figura 33: $\zeta = 1, \alpha = -10$

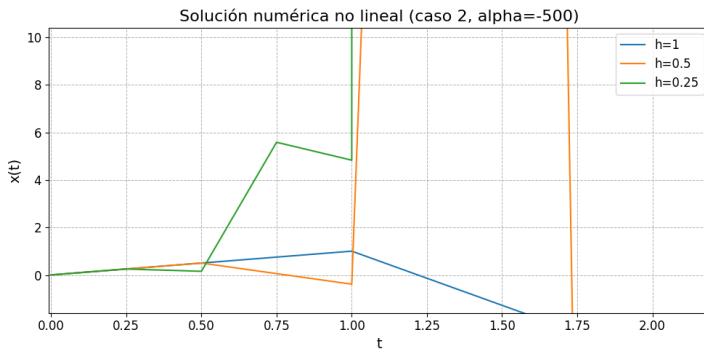


Figura 34: $\zeta = 1, \alpha = -500$

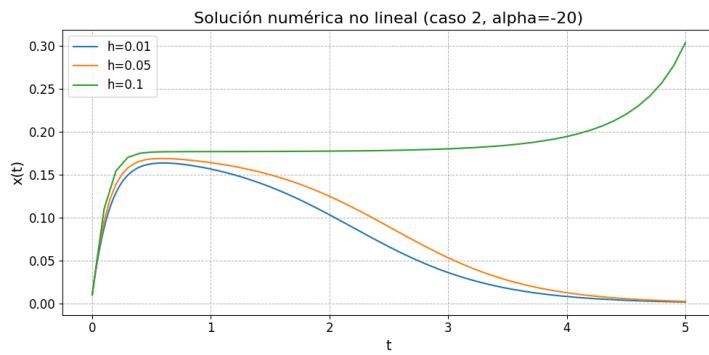
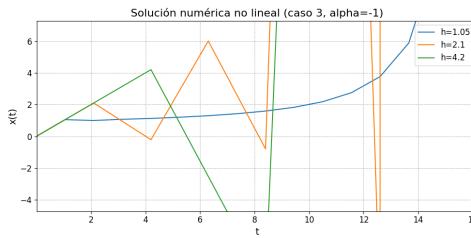
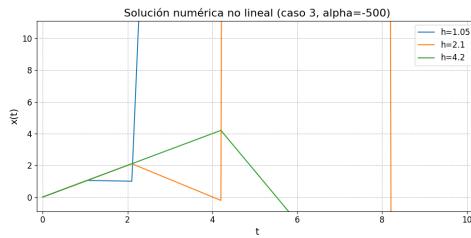


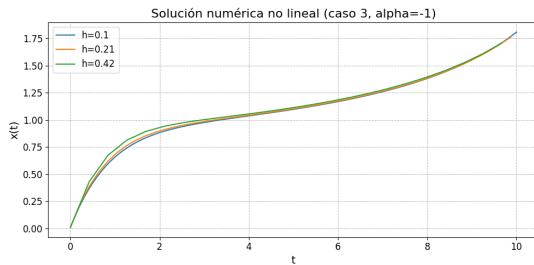
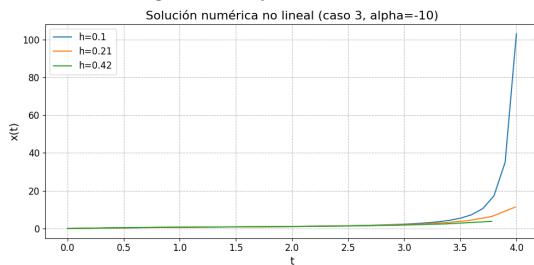
Figura 35: $\zeta = 1, \alpha = -20$

Para este caso críticamente amortiguado, es interesante notar un comportamiento altamente divergente y caótico. La tendencia indica que a mayor sea el α hay un mayor grado de divergencia para los h_s planteados en la *Figura 33* y *Figura 34*.

En la *Figura 35*, se aprecia como hay que reducir bastante el paso para tener un comportamiento estable. Sin embargo, como se aprecia que ya para un $h = 0.1$, ya se vuelve a tener un comportamiento divergente.

Figura 36: $\zeta > 1$, $\alpha = -1$ Figura 37: $\zeta > 1$, $\alpha = -500$

Para estos dos primeros casos observamos que los valores de h muestran inestabilidad en sus respectivas aproximaciones, sugiriendo proporcionalidad con la magnitud de α .

Figura 38: $\zeta > 1$, $\alpha = -1$ Figura 39: $\zeta > 1$, $\alpha = -10$

Para las cuatro figuras anteriores, sin importar el tamaño de paso tomado (h), observamos trayectorias no periódicas y caóticas, incluso para valores de α de magnitud considerablemente pequeños respecto a los casos observados con anterioridad.

4.5. Investigación acerca del Oscilador de Duffing

Tras las observaciones empíricas ofrecidas anteriormente, procedemos a analizar que indican fuentes teóricas para luego ofrecer un contraste entre lo observado y lo que indican dichas fuentes. Se tomará

como referencia bibliográfica el libro *S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, Westview Press, 2^a edición, 2018.*, del cual se extrajo la siguiente información relevante:

4.5.1. Aplicaciones del modelo en la práctica

Las fuentes describen al Oscilador de Duffing como un modelo clásico de oscilador no lineal capaz de aplicarse en diferentes contextos. Menciona que el estudio de la dinámica en auge en la primera mitad del siglo XX, trajo aparejado el estudio de las oscilaciones no lineales, las cuales representan un rol fundamental en el desarrollo de tecnologías como **la radio, radares, láseres y bucles de enganche de fase (phase-locked loops)**, por ejemplo. En el ámbito teórico, los osciladores no lineales también estimularon la invención de nuevas técnicas matemáticas. Entre los pioneros en esta área se encuentran van der Pol, Andronov, Littlewood, Cartwright, Levinson y Smale.

Particularmente el Oscilador de Duffing, aparece aplicado en el oscilador de doble pozo forzado: Un sistema físico, como las vibraciones forzadas de una viga accionada por un generador de vibración electromagnética, el cuál se modela con una ecuación similar al oscilador de Duffing: $x + \delta x + x - x^3 = F \cos(\omega t)$.

Por otro lado, la invención de la computadora de alta velocidad en la década de 1950 marcó un hito en la historia de la dinámica, lo que permitió experimentar con ecuaciones de una manera que antes era imposible, y así desarrollar cierta intuición sobre los sistemas no lineales. Tales experimentos condujeron al descubrimiento de Lorenz en 1963, el cual desarrolló un modelo simplificado de las corrientes de convección en la atmósfera para entender la notoria imprevisibilidad del clima. El libro destaca este experimento de Lorenz como un hito que lo llevó a encontrar "*estructura dentro del caos*".

4.5.2. Importancia como modelo no lineal

El Oscilador de Duffing se presenta como uno de los ejemplos fundamentales de **osciladores débilmente no lineales**. Puede interpretarse físicamente como el movimiento de una masa unida a un muelle no lineal con una fuerza restauradora, donde la rigidez del muelle depende del desplazamiento. Además, exhibe comportamientos que son intrínsecamente no lineales, como la dependencia de la frecuencia de la oscilación con su amplitud, lo cual no ocurre en un oscilador lineal.

El modelo también resultó importante al ser utilizado para ilustrar y probar métodos de análisis de sistemas no lineales, como las técnicas de perturbación (*two-timing, Poincaré-Lindstedt*) y el estudio de bifurcaciones globales de ciclos.

4.5.3. Comportamientos posibles esperados dentro del modelo

Dentro del Oscilador de Duffing, la fuente indica que es probable encontrar un comportamiento dependiente de la amplitud, una frecuencia variable, posible inestabilidad y trayectorias que pueden divergir o aplandarse según el signo y valor de α . Particularmente, se estudia al coeficiente α (rigidez no lineal) afectando el comportamiento de maneras distintas.

4.5.4. Caso $\alpha > 0$ (resorte endurecedor)

Cuando $\alpha > 0$, el sistema se comporta como un resorte "endurecedor" (hardening spring) y se espera encontrar las siguientes características:

- La frecuencia de oscilación aumenta con la amplitud: a mayor desplazamiento, la rigidez efectiva crece y el sistema oscila más rápido.
- La respuesta puede mostrar deformaciones en la forma de onda, con oscilaciones más rígidas y rápidas a medida que crece la amplitud.
- Para valores suficientemente grandes de α , pueden aparecer fenómenos de bifurcación, saltos de amplitud o incluso comportamientos caóticos si el sistema es forzado.
- En presencia de amortiguamiento, la amplitud decrece pero la frecuencia sigue dependiendo de la amplitud instantánea.

4.5.5. Caso $\alpha < 0$ (resorte ablandador)

Para $\alpha < 0$, el sistema se comporta como un resorte *ablandador* (softening spring) donde:

- La frecuencia de oscilación disminuye con la amplitud: a mayor desplazamiento, la rigidez efectiva disminuye y el sistema oscila más lentamente.
- Es posible observar respuestas con oscilaciones de baja frecuencia y mayor duración, y para ciertos parámetros pueden aparecer trayectorias no periódicas o caóticas.
- Si $|\alpha|$ es grande, el sistema puede volverse inestable, mostrando divergencia o saltos abruptos en la amplitud.
- El amortiguamiento tiende a estabilizar la solución, pero la sensibilidad a las condiciones iniciales y a α es mayor que en el caso lineal.

4.5.6. Comparación con el caso lineal ($\alpha = 0$)

Se destaca que, en el caso lineal con ($\alpha = 0$), la frecuencia de oscilación es constante e independiente de la amplitud, y la respuesta es siempre predecible y periódica (o amortiguada, según el régimen de ζ). La introducción del término no lineal αx^3 rompe esta regularidad, haciendo que la frecuencia y la forma de la solución dependan de la amplitud y del propio α .

4.5.7. Síntesis

En resumen, la no linealidad introducida por α genera:

- Dependencia de la frecuencia respecto de la amplitud (fenómeno ausente en el caso lineal).
- Posibilidad de aparición de comportamientos no periódicos, bifurcaciones y caos para ciertos valores de α y condiciones iniciales.
- Mayor sensibilidad a los parámetros y condiciones iniciales, especialmente para $|\alpha|$ grandes.

Estos comportamientos teóricos son característicos de sistemas no lineales y explican la riqueza de fenómenos observados en el oscilador de Duffing, en contraste con la previsibilidad que ofrece el sistema lineal clásico.

5. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se analizaron y resolvieron numéricamente sistemas masa-resorte-amortiguador tanto en su versión lineal como no lineal (Duffing), empleando los métodos de Euler Explícito y Runge-Kutta de segundo orden (RK2). Se compararon los resultados numéricos con las soluciones analíticas disponibles, evaluando la precisión y estabilidad de cada método bajo distintos regímenes de amortiguamiento y no linealidad.

En el caso lineal, ambos métodos reprodujeron correctamente el comportamiento esperado para los distintos valores del coeficiente de amortiguamiento relativo, mostrando que RK2 ofrece una mayor precisión y estabilidad para pasos de integración más grandes, mientras que Euler requiere pasos más pequeños para evitar inestabilidades numéricas.

Para el sistema no lineal de Duffing, la presencia del término cúbico introdujo fenómenos cualitativamente distintos, como la dependencia de la frecuencia con la amplitud y la posibilidad de comportamientos no periódicos o caóticos para ciertos parámetros. Si bien se implementaron ambos métodos, en la práctica se optó por utilizar Euler Explícito para el estudio no lineal, ya que el método RK2 presentó problemas de overflow numérico en varias simulaciones, especialmente para ciertos valores de h y α . Esto limitó la aplicabilidad de RK2 en el régimen no lineal, mientras que Euler Explícito, con pasos de integración suficientemente pequeños, permitió obtener resultados estables y analizar con claridad la influencia de la no linealidad.

La modularización del código y la automatización de los barridos de parámetros facilitaron el estudio sistemático de la influencia de h y α sobre la solución, permitiendo identificar los rangos de estabilidad y la sensibilidad de los métodos frente a la rigidez del sistema.

En síntesis, el trabajo permitió comprender las ventajas y limitaciones de los métodos numéricos explícitos en la simulación de sistemas dinámicos, así como la importancia de una correcta elección de parámetros y del análisis cualitativo para interpretar los resultados.

6. Anexos

6.1. Código implementado

A continuación se incluyen fragmentos relevantes del código utilizado para la resolución numérica de los sistemas:

Euler Explícito (lineal)

```
from metodos.solucion_analitica import solucion_analitica_lineal

def euler_explicito(m, c, k, h, u_0, v_0, t_final, resultado_file="resultados_euler.txt", caso=None):
    import os
    base_dir = "corridas_numericas/sin_revisar"
    os.makedirs(base_dir, exist_ok=True)
    resultado_file = os.path.join(base_dir, os.path.basename(resultado_file))
    n = int(t_final/h)
    u_n = u_0
    v_n = v_0
    with open(resultado_file, "w") as f:
        header = f"{'n':>3} {'t':>8} {'u^n':>12} {'v^n':>12} {'u^(n+1)':>12} {'v^(n+1)':>12} {'y(t)':>12}
        f.write(header + "\n")
        for i in range(n):
            t = h * i
            u_n1 = u_n + h * v_n
            v_n1 = v_n + h / m * (-c * v_n - k * u_n)
            y_t = solucion_analitica_lineal(t, caso)
            error = u_n - y_t
            f.write(f"[i:3d] {t:8.4f} {u_n:12.6f} {v_n:12.6f} {u_n1:12.6f} {v_n1:12.6f} {y_t:14.6f} {error:12.6f}\n")
            u_n = u_n1
            v_n = v_n1
```

Runge-Kutta 2 (lineal)

```
from metodos.solucion_analitica import solucion_analitica_lineal

def RK2(m, c, k, h, u_0, v_0, t_final, resultado_file="resultados_RK2.txt", caso=None):
    import os
    base_dir = "corridas_numericas/sin_revisar"
    os.makedirs(base_dir, exist_ok=True)
    resultado_file = os.path.join(base_dir, os.path.basename(resultado_file))
    def f2(u, v, c, k, m):
        return (-c * v - k * u) / m
    n = int(t_final / h)
    u_n = u_0
    v_n = v_0
    with open(resultado_file, "w") as f:
        header = f"{'n':>3} {'t':>8} {'u^n':>12} {'v^n':>12} {'u^(n+1)':>12} {'v^(n+1)':>12} {'y(t)':>12}
        f.write(header + "\n")
        for i in range(n):
            t = h * i
            # Predictor
            u_pred = u_n + h * v_n
            v_pred = v_n + h * f2(u_n, v_n, c, k, m)
            # Corrector
            u_n1 = u_n + (h / 2) * (v_n + v_pred)
            v_n1 = v_n + (h / 2) * (f2(u_n, v_n, c, k, m) + f2(u_pred, v_pred, c, k, m))
            y_t = solucion_analitica_lineal(t, caso)
            error = u_n - y_t
            f.write(f"[i:3d] {t:8.4f} {u_n:12.6f} {v_n:12.6f} {u_n1:12.6f} {v_n1:12.6f} {y_t:14.6f} {error:12.6f}\n")
            u_n = u_n1
            v_n = v_n1
```

```

        f.write(f"{i:3d} {t:8.4f} {u_n:12.6f} {v_n:12.6f} {u_n1:12.6f} {v_n1:12.6f} {y_t:14.6f} +\n"
        u_n = u_n1
        v_n = v_n1
    
```

Euler Explícito (no lineal)

```

def euler_explicito_no_lineal(m, c, k, h, u_0, v_0, t_final, alpha, resultado_file="resultados_euler_no_lineal.txt"):
    base_dir = os.path.dirname(resultado_file)
    if base_dir:
        os.makedirs(base_dir, exist_ok=True)
    n = int(t_final / h)
    u_n = u_0
    v_n = v_0
    ts = [0]
    us = [u_0]
    with open(resultado_file, "w") as f:
        header = f"{'n':>3} {'t':>8} {'u^n':>12} {'v^n':>12} {'u^(n+1)':>12} {'v^(n+1)':>12}\n"
        f.write(header + "\n")
        for i in range(n):
            t = h * i
            u_n1 = u_n + h * v_n
            v_n1 = v_n + h / m * (-c * v_n - k * u_n - alpha * u_n**3)
            f.write(f"{i:3d} {t:8.4f} {u_n:12.6f} {v_n:12.6f} {u_n1:12.6f} {v_n1:12.6f}\n")
            u_n = u_n1
            v_n = v_n1
            ts.append(t + h)
            us.append(u_n)
    return np.array(ts), np.array(us)

```

6.2. Corridas numéricas

A continuación se muestran ejemplos de salidas numéricas relevantes para distintos casos y métodos:

Euler Explícito, caso 1, $h = 0,05$, $t_{final} = 10$

n	t	u^n	v^n	$u^{(n+1)}$	$v^{(n+1)}$	y(t)	error
0	0.0000	0.010000	1.000000	0.060000	0.700000	0.010000	0.000000e+00
1	0.0500	0.060000	0.700000	0.095000	0.225000	0.051293	8.707141e-03
2	0.1000	0.095000	0.225000	0.106250	-0.306250	0.072340	2.266000e-02
3	0.1500	0.106250	-0.306250	0.090937	-0.760938	0.073060	3.318977e-02
4	0.2000	0.090937	-0.760938	0.052891	-1.025391	0.057794	3.314367e-02
5	0.2500	0.052891	-1.025391	0.001621	-1.033496	0.033384	1.950638e-02
6	0.3000	0.001621	-1.033496	-0.050054	-0.783228	0.007142	-5.520789e-03
7	0.3500	-0.050054	-0.783228	-0.089215	-0.337152	-0.014843	-3.521085e-02
8	0.4000	-0.089215	-0.337152	-0.106073	0.193211	-0.028749	-6.046595e-02
9	0.4500	-0.106073	0.193211	-0.096412	0.675272	-0.033351	-7.272138e-02

Euler Explícito, caso 3, $h = 0,05$, $t_{final} = 10$

n	t	u^n	v^n	$u^{(n+1)}$	$v^{(n+1)}$	y(t)	error
0	0.0000	0.010000	1.000000	0.060000	0.949975	0.010000	-8.673617e-18
1	0.0500	0.060000	0.949975	0.107499	0.902326	0.058769	1.231215e-03
2	0.1000	0.107499	0.902326	0.152615	0.856941	0.105152	2.346828e-03
3	0.1500	0.152615	0.856941	0.195462	0.813713	0.149260	3.354957e-03
4	0.2000	0.195462	0.813713	0.236148	0.772538	0.191199	4.263214e-03
5	0.2500	0.236148	0.772538	0.274775	0.733321	0.231069	5.078733e-03
6	0.3000	0.274775	0.733321	0.311441	0.695968	0.268966	5.808201e-03
7	0.3500	0.311441	0.695968	0.346239	0.660391	0.304983	6.457879e-03
8	0.4000	0.346239	0.660391	0.379259	0.626506	0.339205	7.033633e-03
9	0.4500	0.379259	0.626506	0.410584	0.594232	0.371718	7.540953e-03

Euler Explícito no lineal, caso 2, $h = 0,05$, $t_{final} = 10$, $\alpha = 500$

n	t	u^n	v^n	$u^{(n+1)}$	$v^{(n+1)}$
0	0.0000	0.010000	1.000000	0.060000	0.721625
1	0.0500	0.060000	0.721625	0.096081	0.450428
2	0.1000	0.096081	0.450428	0.118603	0.074789
3	0.1500	0.118603	0.074789	0.122342	-0.399925
4	0.2000	0.122342	-0.399925	0.102346	-0.785969
5	0.2500	0.102346	-0.785969	0.063047	-0.869821
6	0.3000	0.063047	-0.869821	0.019556	-0.712975
7	0.3500	0.019556	-0.712975	-0.016092	-0.524888
8	0.4000	-0.016092	-0.524888	-0.042337	-0.374473
9	0.4500	-0.042337	-0.374473	-0.061060	-0.239292

RK2, caso 1, $h = 0,1$, $t_{final} = 0,5$

n	t	u^n	v^n	$u^{(n+1)}$	$v^{(n+1)}$	y(t)	error
0	0.0000	0.010000	1.000000	0.080000	0.050000	0.010000	0.000000e+00
1	0.1000	0.080000	0.050000	0.043750	-0.593750	0.072340	7.660001e-03
2	0.2000	0.043750	-0.593750	-0.022656	-0.402344	0.057794	-1.404383e-02
3	0.3000	-0.022656	-0.402344	-0.041504	0.119629	0.007142	-2.979813e-02
4	0.4000	-0.041504	0.119629	-0.011780	0.326233	-0.028749	-1.275477e-02