

El rol de la curvatura en la preferència estètica visual

Treball de Fi de Grau

Alumne: Enric Campmajó Bonet
Tutor: Dr. C. Alejandro Parraga

Universitat Autònoma de Barcelona
Grau en Matemàtica Computacional i analítica de dades
Curs 2024-2025

Resum

En aquest Treball de Fi de Grau s'analitza el paper de la curvatura de les vores en la percepció estètica d'imatges digitals i es proposa una mètrica computacional per quantificar automàticament el “grau de corba” i comparar-lo amb les valoracions estètiques humanes. El procés inclou la detecció de vores (Canny), l'esqueletització, el càlcul de curvatura local mitjançant derivades finites, l'agrupament en tres categories (recte, suau, angle) amb K-means i finalment l'escalat a un Curv_Score de 0 a 10 basat en una ponderació de fragments rectes, suaus i angulars.

En el procés de calibració del “Curv_Score” es duu a terme una enquesta visual amb 52 jutges que van puntuar 20 imatges representatives en una escala de 1 (“predomini de línies rectes”) a 10 (“predomini de corbes”), i posteriorment aquestes valoracions humanes es fan servir per ajustar paràmetres clau com els llindars de Canny, la desviació estàndard del filtre Gaussià i el factor de ponderació dels fragments rectes, assegurant així que el mètode reflecteixi fidelment la percepció humana de la curvatura.

La mètrica s'ha aplicat al conjunt MSC de paisatges naturals (10426 imatges) i al dataset AVA (més de 255000 imatges). Els resultats mostren una correlació positiva feble però estadísticament significativa entre curvatura i valoració estètica (MSC: $r = 0,180$, $p \ll 0,001$; AVA: $r = 0,103$, $p \approx 0$). Aquesta feblesa indica que la curvatura per si sola explica només una petita fracció de la variabilitat estètica, atès que factors de baix nivell (color, contrast, textura, composició) i variables semàntiques (tema, expressions facials, narració) actuen també a l'hora de decidir si una imatge es bonica.

Per al futur, es proposa ampliar la validació amb més imatges i jutges, explorar conjunts amb votacions extremes, desenvolupar models multivariables que integrin atributs geomètrics i visuals, i optimitzar computacionalment el processament per fer el mètode més ràpid i generalitzable.

Index

1	Introducció	3
1.1	Context i motivació	3
1.2	Objectius	3
2	Estat de l'art	4
2.1	Conclusions de l'estat de l'art	5
3	Metodologia	5
3.1	Recopilació dels Datasets	5
3.1.1	MSC_database	6
3.1.2	AVA_dataset	6
3.2	Enquesta amb observadors	7
3.3	Construcció de la mètrica de curvatura	9
3.3.1	Detecció i extracció de les vores	10
3.3.2	Càcul de la curvatura local mitjançant derivades finites	12
3.3.3	Assignació de puntuació	13
3.4	Ajust de paràmetres guiats pels observadors	14
3.5	Aplicació a la base de dades	16
4	Resultats	17
4.1	Coeficient de correlació de Pearson	17
4.2	Anàlisi del MSC_database	18
4.3	Anàlisi del AVA_dataset	19
4.3.1	Etiqueta Children	23
4.3.2	Etiqueta Advertisment	24
5	Conclusions i Millores	26
5.1	Conclusions Generals	26
5.2	Limitacions del mètode	26
5.3	Millores i futures línies de treball	27

1 Introducció

1.1 Context i motivació

L'estètica visual és una àrea d'estudi que busca entendre per què determinades imatges, formes o composicions són percebudes com a agradables pels éssers humans. Aquesta disciplina es troba a cavall entre la psicologia, la neu-rociència, el disseny i la computació, i ha esdevingut especialment rellevant en un món on la comunicació visual té un pes creixent.

Dins aquest marc, diversos estudis [1, 2] indiquen que la forma dels objectes, en particular el grau de curvatura que presenten, ha estat identificada com una característica perceptual amb un impacte clar en la valoració estètica. Segons aquests treballs, davant de formes similars, les corbes solen generar respostes més positives que les línies rectes o angulars, tot i que els mecanismes subjacents a aquesta preferència encara es troben en estudi.

Malgrat aquesta evidència, actualment no disposem d'eines computacionals prou robustes per quantificar de manera fiable la curvatura en imatges complexes del món real [3, 4]. Aquesta mancança metodològica limita la validació empírica de moltes hipòtesis sobre la percepció estètica i impedeix extreure conclusions generalitzables.

Aquest treball sorgeix amb la voluntat de cobrir aquest buit, mitjançant el desenvolupament d'una mètrica computacional capaç de quantificar automàticament el grau de curvatura en imatges digitals. A diferència d'altres aproximacions centrades en experiments visuals binaris [5], aquí es proposa una anàlisi quantitativa massiva aplicada sobre grans conjunts d'imatges ja valorades per observadors humans.

A nivell personal, aquest projecte respon a l'interès d'abordar un problema interdisciplinari on confluixen la visió per computador, la matemàtica aplicada i la ciència cognitiva.

1.2 Objectius

Aquest Treball de Fi de Grau té com a objectiu principal estudiar el rol de la curvatura (i, de manera oposada, l'angulositat) en el judici estètic d'imatges digitals. Es pretén quantificar el contingut de curvatura de les vores dels objectes presents en imatges i analitzar la seva correlació amb la valoració estètica humana.

Per assolir aquest objectiu general, es plantegen els següents subobjectius específics:

- Revisar l'estat de l'art sobre la percepció de la curvatura i la seva influència estètica.

- Dissenyar i implementar una mètrica computacional per quantificar la curvatura en imatges digitals.
- Aplicar aquesta mètrica a bases de dades amb imatges ja valorades per observadors humans.
- Avaluar experimentalment la correlació entre curvatura i bellesa percebuda.
- Explorar com el contingut semàntic de les imatges pot modular aquesta relació.

Amb aquest enfocament, es busca aportar evidència empírica addicional sobre el paper perceptiu de la curvatura i contribuir al desenvolupament de noves eines computacionals per a l'anàlisi estètica visual.

2 Estat de l'art

La percepció estètica visual és un camp multidimensional que involucra processos cognitius i emocionals. Diversos treballs han demostrat una clara preferència per les formes corbes sobre les angulars [5]. L'angulositat, per contra, pot evocar reaccions negatives vinculades a la percepció de perill. Posteriorment, diversos estudis [1, 2] van aprofundir en aquest fenomen, diferenciant entre atracció per la curvatura i aversió per l'angulositat. A més, Cotter et al. [6] van evidenciar que factors individuals, com la neofòbia o trets de personalitat, modulen aquesta preferència.

La robustesa d'aquest patró s'estén més enllà de formes abstractes: Navarrete et al.[7] van comprovar-ho en entorns arquitectònics i Ruta et al. [8] en l'anàlisi de pintures de diferents èpoques i estils, sempre trobant un avantatge estètic per als contorns corbs. Metodològicament, els estudis tradicionals han empès tasques de decisió forçada [5], qüestionaris de valoració [9] i, més recentment, ànalisis computacionals de la curvatura i de l'entropia d'orientació de vores [3, 4].

En paral·lel, l'àmbit de la generació i curació automàtica de continguts visuals ha experimentat un gran avenç gràcies a les xarxes generatives: des de les GANs originals [10] fins a arquitectures basades en estils [11]. Aquests desenvolupaments obren noves possibilitats per al disseny assistit per màquina, però la integració de mesures de curvatura en aquests sistemes encara és un repte obert.

2.1 Conclusions de l'estat de l'art

La literatura existent assenyala que les persones mostren, de manera consistent, una predilecció per la curvatura per sobre de l'angulositat [5, 9, 1, 2]. Aquesta tendència es confirma tant en objectes artificials com en entorns arquitectònics [7] i en l'anàlisi d'obres d'art [8]. Cal, però, matisar que la majoria d'aquests estudis s'han basat en mostres reduïdes i corpus d'imatges artístiques amb un nombre limitat d'estímuls i elevat soroll experimental, cosa que en limita la validesa externa ja que els efectes observats podrien no replicar-se en contextos o poblacions diferents i son difícilment aplicables a altres treballs.

Malgrat els avenços en anàlisi computacional, per exemple, mitjançant l'entropia d'orientació de vores [3, 4] per quantificar estadísticament les corbes i direccions en una imatge, continua existint una absència d'una mètrica estàndard i robusta capaç de mesurar de manera fiable la curvatura en imatges. Per això, és imprescindible el desenvolupament d'eines computacionals específiques que ofereixin una avaluació precisa, comparable i reproductible de la curvatura en contextos visuals heterogenis.

3 Metodologia

La metodologia proposada combina tècniques de processament d'imatges per al càlcul de la curvatura, l'aplicació d'aquesta mètrica a una base de dades d'imatges valorades estèticament i l'anàlisi estadística de les dades obtingudes.

L'estructura metodològica es divideix en diverses fases: recopilació dels datasets, enquesta amb observadors, disseny de la mètrica computacional de curvatura, ajust dels paràmetres, aplicació sobre les imatges i anàlisi de la correlació entre curvatura i preferència estètica.

3.1 Recopilació dels Datasets

Per tal de dur a terme l'estudi, hem fet ús de dues bases de dades públiques que contenen imatges accompanyades de valoracions estètiques proporcionades per observadors humans: la [MSC_database](#) [12] i el [AVA_dataset](#) [13]. Aquests conjunts de dades han estat seleccionats per la seva qualitat, volum i complementarietat pel que fa al tipus d'imatges i contextos representats.

Abans de explicar cada dataset s'ha de tenir en compte que hi ha un concepte que en serà molt important durant tot l'estudi, que és el de contingut semàntic. El contingut semàntic d'una imatge fa referència a tots aquells elements de nivell alt que porten significat i són fàcilment reconeixibles per

l'observador: objectes, vehicles, edificis, animals, persones, escenes urbanes o naturals carregades de context, senyals i qualsevol forma capaç d'evocar coneixements previs i associacions cognitives. Aquestes característiques semàntiques interactuen amb els processos perceptius (contrast, color, textures, formes) i modulen la valoració estètica activant memòria, emocions i narratives que poden distorsionar o amplificar la percepció purament formal de la “bellesa”.

3.1.1 MSC_database

La base de dades **MSC_database** (Minimum Semantic Content) [12] consta de 10426 imatges de paisatges naturals triades específicament per la seva absència d'elements com persones, animals, edificis, vehicles o altres objectes manufacturats, de manera que el contingut semàntic es redueix al mínim i es posa un èmfasi exclusiu en característiques formals (formes, colors, textures). Cada imatge va ser valorada de manera independent per 100 observadors, que van assignar-li una puntuació de bellesa de l'1 al 5. A més, per compensar la manca d'imatges amb puntuacions extremes, molt “boniques” o molt “lletges”, presents en altres conjunts de dades, el MSC inclou un subconjunt d'imatges alterades pels mateixos observadors per garantir una distribució equilibrada de valuacions.

3.1.2 AVA_dataset

La base de dades **AVA_dataset** (Aesthetic Visual Analysis) [13] inclou més de 255000 imatges recollides de la plataforma DPChallenge.com, cadascuna vinculada a un “challenge” fotogràfic amb títol i descripció. Per a cada imatge es disposa d'una distribució de puntuacions estètiques (entre 78 i 549 vots, amb una mitjana de 210) obtingudes de prosumers de fotografia, que són persones que al mateix temps consumeixen: veient, valorant o comentant imatges, i produeixen: penjant, editant o participant activament en concursos i reptes fotogràfics, cosa que permet analitzar no només la mitjana, sinó també la variabilitat de l'opinió entre votants. A més, AVA incorpora 66 etiquetes semàntiques i 14 categories de estil fotografic (per exemple, “Rule of Thirds”, “High Dynamic Range”, “Macro”), proporcionant un ric conjunt d'anotacions per a estudis de contingut i estil.

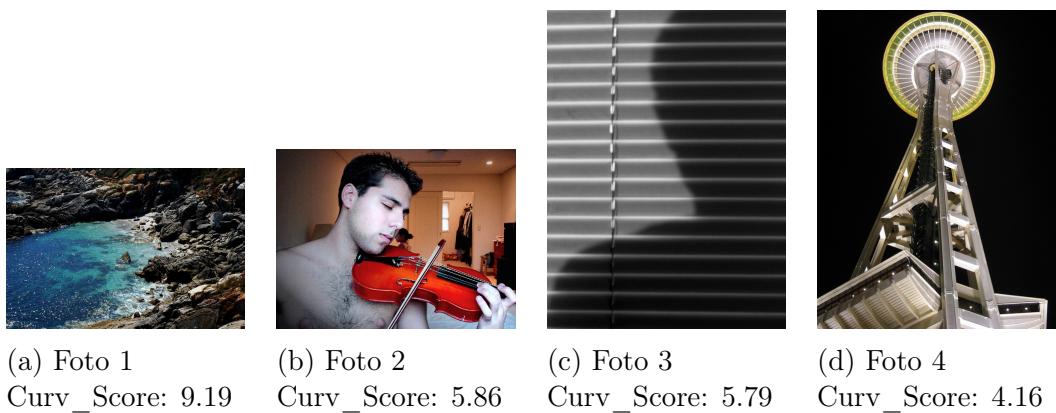
Ambdós conjunts de dades ens proporcionen una base sòlida per explorar la relació entre la curvatura de les formes i la percepció estètica. A més, la diferència en l'estil visual i la riquesa semàntica entre els dos datasets ens permet avaluar la robustesa de les correlacions en contextos molt diferents. La **MSC_database** [12] està composta per imatges de paisatges naturals sense

elements identificables, amb un estil visual relativament homogeni centrat en característiques de baix nivell (formes, textures, color), i valorada de manera uniforme per 100 observadors. En contrast, l'AVA_dataset [13] inclou imatges d'origen variat (escenes urbanes, retrats, natura, macro, etc.), amb 66 etiquetes semàntiques i 14 categories d'estil fotogràfic, valorades per prossumers amb perfils heterogenis i una àmplia distribució de puntuacions.

Aquest contrast ens permet comprovar si la relació entre la nostra mètrica de curvatura i les valoracions estètiques es manté tant en un entorn de contingut semàntic mínim i estil uniforme (MSC) com en un entorn ric en semàntica i estils diversos (AVA). Si la correlació es dóna de manera consistent en ambdós casos, indicaria que el nostre indicador de curvatura és realment robust a la variabilitat de contingut i estil; en cas contrari, ens posaria de manifest dependències específiques del context visual o semàntic.

3.2 Enquesta amb observadors

Abans de definir la nostra mètrica de curvatura, es realitza una enquesta visual per validar quins aspectes perceptius cal capturar. Es seleccionen 20 imatges representatives de tot l'espectre de formes, des de composicions amb línies gairebé rectes fins a estructures molt corbades, incloent paisatges naturals, objectes, construccions humanes, retrats i animals. Han participat 52 persones de totes les edats que han fet l'enquesta de manera online i han hagut de puntuar el grau de corbament de cada imatge en una escala de 1 (“només línies rectes”) a 10 (“moltes corbes”), sense conèixer l'objectiu de l'estudi.



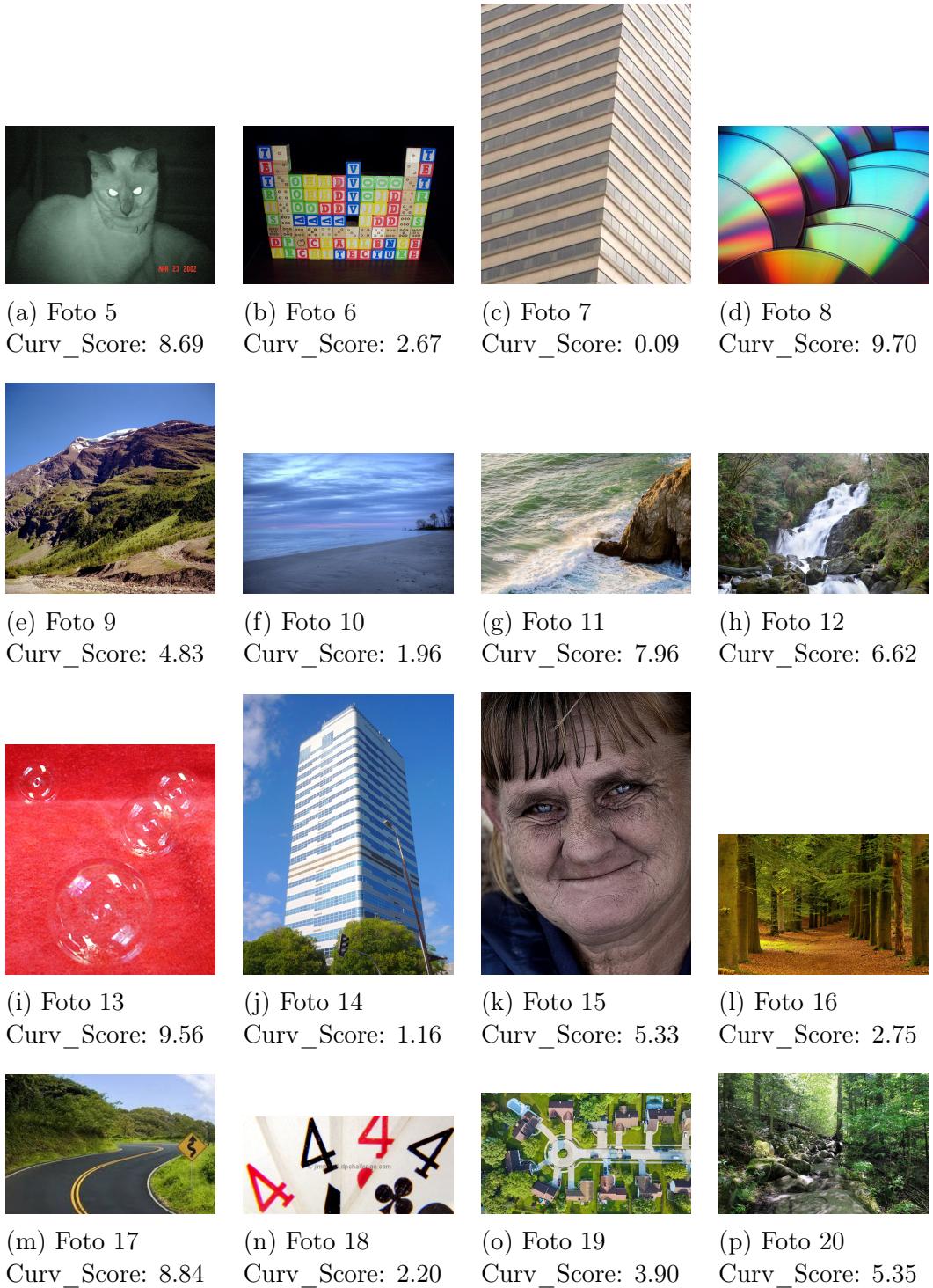


Figura 2: Les 20 imatges utilitzades a l'enquesta de validació junt amb les puntuacions que van obtenir.

3.3 Construcció de la mètrica de curvatura

Sense entrar encara en els valors finals dels paràmetres, el mètode consisteix en que en primer lloc, hem dissenyat i implementat un algorisme computacional capaç de quantificar de forma objectiva el contingut de curvatura en imatges digitals. Per aconseguir-ho, el procediment inicial consisteix en la detecció precisa de les vores dels objectes presents a cada imatge mitjançant tècniques de processament basades en filtres de contorn, en el nostre cas el detector de Canny [14] que comença amb una suavització mitjançant un filtre Gaussià per minimitzar el soroll, segueix amb el càlcul dels gradients d'intensitat per identificar canvis bruscos en la lluminositat, i aplica una supressió de no-màxims per conservar només els píxels que representen els pics locals de gradient. Finalment, un esquema d'histeresi amb dos umbrals permet distingir entre arestes fortes i febles i connectar-les de manera coherent. Primer, marca com a “arestes fortes” tots els píxels amb magnitud de gradient superior a T_{alt} . A continuació, tots els píxels amb magnitud inferior a T_{baix} s’eliminen. Finalment, els píxels amb magnitud entre T_{baix} i T_{alt} (les “arestes febles”) només es conserven si estan connectats a una aresta forta, el que permet enllaçar fragments d'aresta continua i descartar falsos positius dispersos. Aquest mecanisme assegura que els contorns siguin nets i estructuralment coherents, minimitzant el soroll sense interrompre línies actives.

S'escolleix Canny perquè, a diferència de altres detectors com Sobel [15] i Prewitt [16], que utilitzen només la primera derivada i són molt sensibles al soroll, Canny integra una fase de supressió de no-màxims i un mecanisme de doble umbral que redueix substancialment els falsos positius i produeix contorns més continus. Tampoc no s'ha emprat el mètode de Marr–Hildreth [17], basat en la segona derivada del Gaussià, perquè tendeix a generar contorns dobles i artefactes en zones amb textures complexes. En resum, Canny ofereix el millor equilibri entre precisió, robustesa al soroll i definició d'arestes, qualitats essencials per a la mesura fiable de la curvatura, com podem veure a la figura 3.

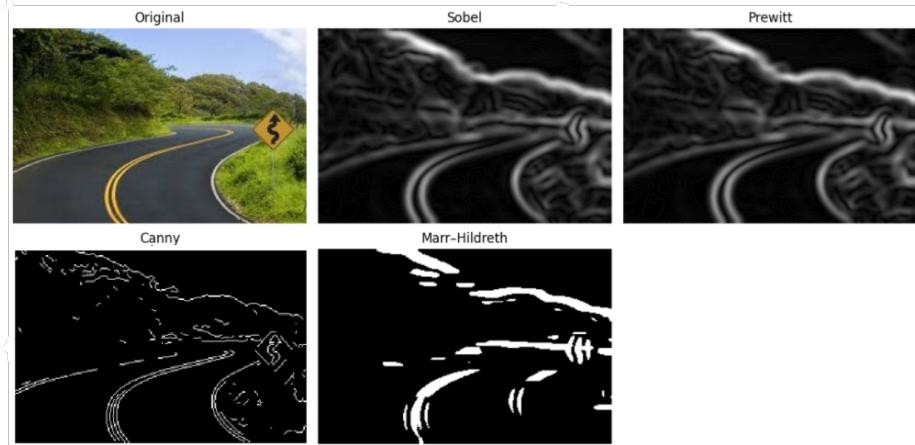


Figura 3: Comparació dels diferents detectors de vores junt amb la imatge original.

Un cop obtingudes aquestes línies de contorn, l'algorisme analitza la geometria de les mateixes per extraure indicadors rellevants de curvatura i finalment, per obtenir una mesura global de curvatura que sintetitzi la riquesta geomètrica de tota la imatge, l'algorisme combina la informació sobre la quantitat de corbes detectades i la intensitat dels seus canvis d'orientació. D'aquesta manera es pot assignar a cada imatge un valor únic que reflecteixi tant el volum de contorns com la seva complexitat, interpretada com la combinació ponderada del radi de curvatura i de la densitat de variacions angulars, oferint així una mètrica robusta i comparable entre imatges de naturalesa i contingut variat.

3.3.1 Detecció i extracció de les vores

La detecció de les vores en el nostre pipeline es duu a terme en diferents fases principals. En primer lloc, convertim la imatge a escala de grisos i, a continuació, apliquem un filtre gaussià per reduir el soroll i estabilitzar els gradients de la imatge original. Concretament, utilitzem la funció de la llibreria OpenCV (*Open Source Computer Vision Library*), una col·lecció de funcions i algoritmes de codi obert per a processament d'imatges i visió per computador:

```
blur = cv2.GaussianBlur
```

Un cop obtinguda la imatge suavitzada, apliquem el detector de Canny:

```
edges = cv2.Canny
```

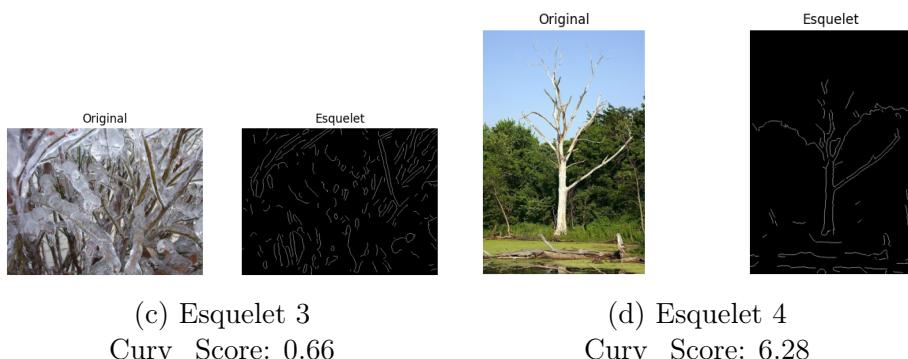
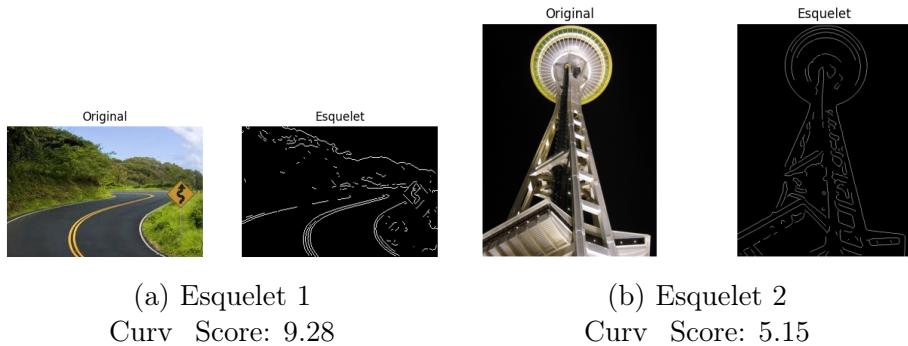
El resultat és un mapa binari d'intensitat elevada precisament en els punts on la imatge original experimenta canvis bruscos de color o il·luminació.

Seguidament, convertim aquest mapa de vores en un esquelet de línies de gruix únic mitjançant l'esqueletitzador de **scikit-image**:

```
binary      = edges > 0
skeleton_bool = skeletonize(binary)
skeleton = (skeleton_bool * 255).astype(np.uint8)
```

Finalment, convertim la màscara resultant en un llistat de coordenades per al processat posterior:

```
pts = np.argwhere(skeleton > 0)
```



(e) Comparativa de quatre esquelets amb les puntuacions automàtiques associades. A l'esquerra podem veure les imatges originals i a la dreta l'esquelet resultant d'aplicar la nostra extracció de vores

Figura 4: Esquelets de les imatges

La fase d'extracció de l'esquelet, tot i ser fonamental per al càlcul de la curvatura, pot presentar anomalies en una petita fracció d'imatges, com

podem veure en els exemples de la figura 4. Podem veure diferents casos, al esquelet 1 podem veure que la detecció de vores es molt bona però que en les parts on hi ha naturalesa queda una mica de soroll residual. En canvi, a l'esquelet 2 podem veure que el resultat es molt bo, deixant-nos amb un esquelet quasi perfecte que ens va molt bé per a la nostre mètrica, i això és el que passa en la gran majoria d'imatges amb les que treballem. Uns resultats molt diferents trobem tant al esquelet 3 com 4. Podem veure que a imatges que tenen moltes línies molt de prop amb colors molt similars, com a l'esquelet 3, on les vores no estan molt clares e'algorisme de detecció de vores ens retorna un esquelet dolent que no s'assembla res a la imatge original. Aquest tipus d'imatges son poc freqüents en els datasets que utilitzem però s'ha de tenir en compte que aquests casos passen algunes vegades. Finalment tenim l'esquelet 4, on es pot veure bé la figura i es semblant a la original però al ser branques fines i tenir un color tan clar semblant al del cel de fons, la il·luminació fa que l'esquelet a vegades es talli fent que perdem petites parts. En resum, el nostre mètode de detecció de vores i esqueletització funciona molt bé, però ens podem trobar amb alguns problemes com els que he explicat, on podem tenir petites falles o ,fins i tot, en una mínima porció de les imatges, resultats molt dolents.

3.3.2 Càcul de la curvatura local mitjançant derivades finites

Per fer això creem la funció

```
compute_local_curvature(pts, window)
```

que rep el vector de punts $\{p_i = (x_i, y_i)\}$ que descriu el camí esquelètic i un paràmetre `window` que indica quants píxels d'avant i darrera s'utilitzen per estimar la curvatura en cada posició. La implementació segueix aquests passos:

En primer lloc, per a cada punt p_i amb $i = \text{window}, \dots, |pts| - \text{window} - 1$, es defineixen tres punts separats per la finestra:

$$p_{i-\omega}, p_i, p_{i+\omega},$$

on $\omega = \text{window}$. A continuació es construeixen dos vectors tangents aproximats,

$$v_1 = p_i - p_{i-\omega}, \quad v_2 = p_{i+\omega} - p_i,$$

i se'n calcula la llargada ($\|v_1\|$ i $\|v_2\|$). Normalitzant aquests vectors a unitat, $u_1 = v_1 / \|v_1\|$ i $u_2 = v_2 / \|v_2\|$, obtenim dues direccions normals al pas de la corba. El canvi d'orientació entre aquests dos tangents es mesura per l'angle

$$\Delta\theta = \arccos(u_1 \cdot u_2),$$

que indica quant gira la direcció de la corba en aquell interval.

Per aproximar la derivada de l'angle respecte a l'arc-length (la definició contínua de curvatura, $\kappa = d\theta/ds$), dividim $\Delta\theta$ per la distància mitjana recorreguda $\frac{\|v_1\| + \|v_2\|}{2}$. Així obtenim el valor discret de curvatura

$$k_i \approx \frac{\Delta\theta}{(\|v_1\| + \|v_2\|)/2}.$$

Repetint aquest càlcul per a tots els punts interiors de la trajectòria generem un perfil $\{k_i\}$ de curvatura local.

Amb aquesta funció procedim a fer tres etapes per calcular un perfil de curvatura mitjana a partir de múltiples finestres d'estimació. Primament, definim una llista de finestres, `windows = [3, 5, 7]`, que representen diferents valors del paràmetre `window`. A continuació, iterem sobre cada valor d'aquesta llista, cridem la funció `compute_local_curvature(pts, window=w)` i emmagatzemem el vector de curvatura local resultant en una col·lecció de sèries. Un cop obtingudes totes les sèries, calculem la llargada mínima comuna entre elles i retallem cadascuna d'acord amb aquesta longitud, garantint que totes comparteixin el mateix nombre de punts. Finalment, fem la mitjana punt a punt de tots els vectors retallats mitjançant

```
curvatures = curvs_trim.mean(axis=0),
```

de manera que cada entrada `curvatures[i]` representa la curvatura mitjana en la posició i , combinant la sensibilitat de finestres petites amb la robustesa de finestres més grans. Aquest perfil mitjà s'utilitza a continuació en els passos de clustering i puntuació.

3.3.3 Assignació de puntuació

En aquesta fase prenem el vector de valors de curvatura, anomenat `curvatures`, i el transformem en un vector columna per poder aplicar-hi l'algoritme de K-means amb tres grups. Concretament, reorganitzem les dades perquè cada valor de curvatura passi a ser una fila amb una sola columna. A continuació, entrenem un model de K-means amb `n_clusters=3` i obtenim tres centres que representen la curvatura mitjana de cada clúster. Un cop calculats aquests tres centroides, els ordenem de menor a major: el centre més petit correspon als valors amb curvatura més baixa (que considerem “rectes”), el centre intermit correspons a valors de curvatura mitjana (la part “suau”) i el centre més gran representa valors amb curvatura alta (els “angles”). Gràcies a aquesta ordenació, sabem quina etiqueta del K-means és “recte”, quina és “suau” i quina és “angle”.

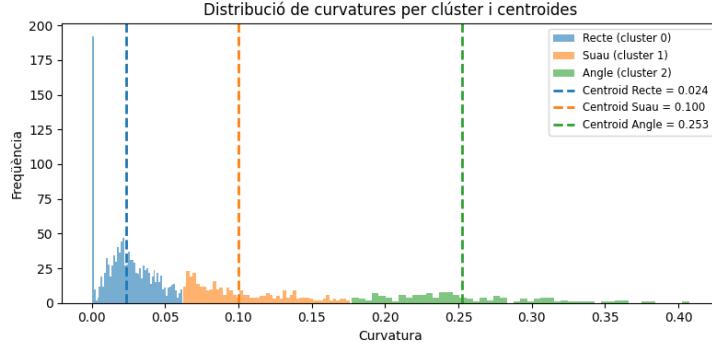


Figura 5: Exemple de la distribució Kmeans per a una imatge del MSC

Un cop definides les categories semàntiques, comptem el nombre total de punts atribuïts a cadascun dels tres grups: es fa la suma del nombre d'etiquetes iguals a `idx_recte`, al `idx_suau` i al `idx_angle`, i s'assignen aquests comptadors a les variables anomenades `straight`, `soft` i `corner`, respectivament. D'aquesta manera obtenim la fórmula:

$$\text{total} = \text{straight} + \text{soft} + \text{corner}.$$

Finalment, definim la `Curv_score` com la proporció de fragments “suaus” respecte del total, escalat a un rang de 0 a 10. Concretament, si `total > 0`, llavors

$$\text{Curv_Score} = \left(\frac{\text{soft}}{\text{total}} \right) \times 10,$$

D'aquesta manera, un `Curv_Score` proper a 10 indica que la major part del “pes” recau en valors de curvatura suau; en canvi, un valor baix (molt a prop de 0) vol dir que predominen els angles o que hi ha molts segments rectes.

3.4 Ajust de paràmetres guiats pels observadors

Amb els resultats de la enquesta i el mètode definit hem fet proves per determinar i optimitzar els paràmetres i factors clau a incloure en la nostra mètrica. Els paràmetres finals seleccionats per al processament i detecció de contorns han sigut:

- Un nucli del GaussianBlur de 21×21 i una desviació estàndard $\sigma = 0$

```
blur = cv2.GaussianBlur(img, (21,21), 0)
```

- La umbralització doble per al Canny de 50 i 80

```
edges = cv2.Canny(blur, 50, 80)
```

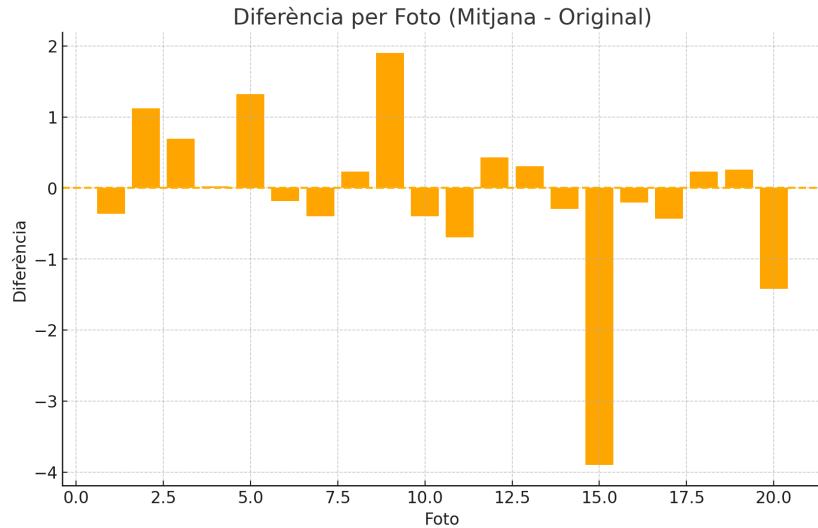
i per a la assignació de puntuacions:

- Un factor de 0.12 per al tipus de línies "Straight" que fa que el total acabi quedant com:

$$\text{total} = 0.12 \times \text{straight} + \text{soft} + \text{corner}.$$

El motiu d'aplicar el factor 0,12 sobre **straight** és que moltes de les mostres etiquetades com a "straight" corresponen en realitat a regions suavament corbades o plans dins d'una forma més rodona, i, si tinguessin el mateix pes que els vèrtexs "soft" o "corner", arribarien a desequilibrar el denominador de la mètrica. Aplicar-los un factor de 0,12 permet també atenuar l'efecte de possibles errors de detecció produïts per soroll o textures lleus i assegurar que la mètrica total valori amb equilibri tant les transicions més fines com els angles ben definits, sense menystenir la contribució dels trams rectes.

Utilitzant aquests paràmetres sobre les imatges del test hem tingut aquests resultats de la diferència mitjana entre la votació humana i el Curv_Score automàtic per foto:



(a) Diferència mitjana per foto (votació humana – puntuació automàtica). Les barres per sobre de zero indiquen que els humans han puntuat més alt que l'algorisme, i per sota de zero el contrari.

Figura 6: Comparativa general de diferències per cada imatge.

Els resultats indiquen que, de manera general, la mètrica automàtica s'ajusta molt bé a la percepció dels usuaris, ja que la majoria de discrepàncies queden molt a prop del zero. Tanmateix, es detecten desviacions rellevants en casos concrets. Per exemple, la fotografia 15 presenta una diferència mitjana d'uns $-3,9$, cosa que revela que els usuaris van percebre molt menys curvatura de la que l'algorisme ha assignat. En canvi, la foto 9 registra una diferència positiva d'uns $+2,0$, és a dir, la valoració humana supera la predicció automàtica. En la majoria de casos, quan el Curv_Score és proper a la mitjana obtinguda, la dispersió dels vots és relativament estreta: per exemple, per a una foto amb mitjana $\sim 7,2$, els participants tendeixen a puntuar-la entre 5,6 i 9, amb la majoria concentrada al voltant del valor mitjà (6, 7, 8). En canvi, aquestes imatges que mostren grans discrepàncies entre votació humana i Curv_Score automàtic presenten un rang de vots molt ampli, des de 0 fins a 10, cosa que reflecteix un consens molt més feble entre els observadors i posen de manifest que, en aquests casos, la percepció subjectiva varia significativament d'un usuari a un altre. En totes les ocasions que això passa en la nostra verificació es tracta d'imatges que mostren la naturalesa o imatges en les què apareixen persones.

Aquesta observació ens dóna una pista sobre què podem esperar dels resultats: en escenes naturals amb textures i detalls complexos, o en retrats d'éssers humans, la percepció individual tendeix a variar molt més, i per tant caldrà tractar amb cura aquestes categories.

Per exemple la cara de la senyora (Foto 15) va rebre votacions que oscil·len des de valors molt baixos fins a molt alts, cosa que contrasta amb la puntuació automàtica. Aquesta àmplia dispersió confirma que, en retrats humans i escenes naturals, les percepcions personals poden divergir significativament. Atesa aquesta variabilitat, que reflecteix diferències subjectives i no pas una debilitat de la nostra mètrica, atorgar una puntuació basada únicament en el grau de curvatura d'aquestes imatges esdevé més complex del previst.

3.5 Aplicació a la base de dades

Un cop recopilades i processades les dades originals, s'aplica la mètrica de curvatura a cadascun dels conjunts per tal de comparar-la amb la puntuació estètica obtinguda per crowdsourcing.

En el cas de `MSC_database`, es llegeix el fitxer associat a les imatges per extreure'n la columna `mu`, que conté la mitjana ponderada dels vots humans i que utilitzem com a valor estètic de referència. Tot seguit, s'exclouen les imatges que han estat sotmeses a filtres artificials, aquelles etiquetades com "`_uglified`" o "`random_`" perquè l'ús de processos de "lletgificació" perquè creiem que no son adients per al nostre estudi. Entre tots els filtres que els

participants podien escollir per ficar a les imatges normals cap tenia a veure amb la modificació de les corbes, cosa que també fonamenta la decisió de treure aquestes imatges. En descartar aquestes imatges artificials, garantim que la nostra `MSC_database` mantingui un rang equilibrat de valoracions i un contingut semàntic mínim, permetent així estudiar de manera rigorosa com els atributs visuals purs ,sense intervenció de filtres externs, correlacionen amb els judicis de bellesa. Això redueix el conjunt útil a unes 5.600 imatges i per a cadascuna d'aquestes es calcula el vector de curvatura i s'assigna a un dels tres clústers (recte, suau o angle) mitjançant l'algoritme de K-means. Amb aquesta classificació, es defineix una puntuació final basada en la proporció de corbes suaus. Finalment, es combina aquesta puntuació amb la mitjana de vots μ per a obtenir una taula de resultats unificada.

Un procés gairebé idèntic s'aplica al `AVA_dataset`, tot i que amb les particularitats pròpies del volum molt més gran d'imatges. A més, gràcies a les etiquetes de contingut que incorpora, és possible extreure conclusions més específiques per categoria temàtica.

Aquest procediment permet analitzar si existeix una correlació consistent entre el grau de curvatura i la percepció de bellesa, tant en escenaris naturals com en escenes urbanes, retrats o composicions artístiques.

4 Resultats

A continuació mirarem els resultats que ha donat la nostra mètrica per als dos datasets.

4.1 Coeficient de correlació de Pearson

Per a veure les correlacions de les nostres variables el que utilitzarem sera el coeficient de correlació de Pearson[18], que mesura l'associació lineal entre dues variables quantitatives X i Y . El seu valor r es defineix com:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

on \bar{x} i \bar{y} són les mitjanes de les mostres x_i i y_i . Aquest coeficient pren valors en l'interval $[-1, 1]$:

- $r \approx +1$: correlació positiva forta,

- $r \approx 0$: absència de correlació lineal,
- $r \approx -1$: correlació negativa forta.

Per avaluar la significació estadística de r , es calcula el estadístic de prova t mitjançant

$$t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \sim t_{n-2},$$

on n és la mida de la mostra i t_{n-2} la distribució t de Student amb $n-2$ graus de llibertat. El p-value associat es determina com:

$$\text{p-value} = 2(1 - F_{t_{n-2}}(|t|)),$$

on $F_{t_{n-2}}$ és la funció de distribució acumulada de la t de Student.

4.2 Anàlisi del MSC_database

Primer de tot passarem a analitzar els resultats extrets de la `MSC_database`, on hem fet un diagrama de dispersió per a veure tots els punts conjuntament en un gràfic junt amb la regressió lineal per a veure la seva tendència.

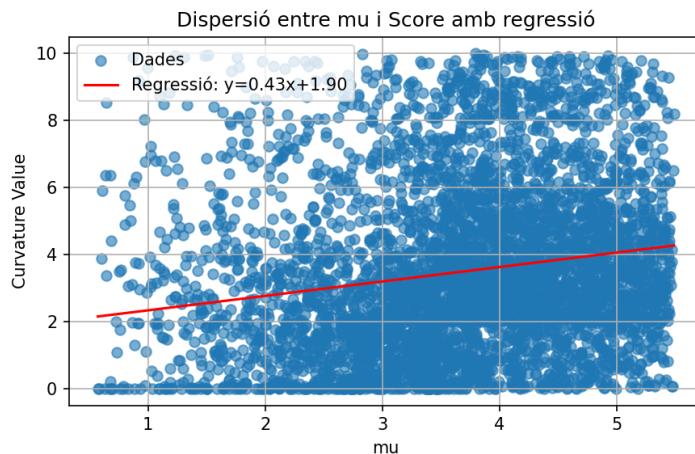


Figura 7: Dispersió entre `mu` i `Curvature Value` amb regressió lineal per al primer dataset.

La figura 7 mostra la relació entre la variable `mu` (mitjana ponderada dels vots humans) i el `Curvature Value`, acompanyada de la línia de regressió

lineal amb equació $y = 0,43x + 1,90$. Hem obtingut un coeficient de Pearson de

$$r = 0,180 \quad p = 7,17 \times 10^{-5}.$$

El valor $r = 0,180$ reflecteix una correlació positiva feble: a mesura que μ augmenta, el Curvature Value tendeix a pujar, però aquesta relació és molt suau i explica només una petita fracció de la variabilitat. El p-value tan diminut ($p \ll 0,001$) ens permet rebutjar amb molt alta confiança la hipòtesi nul·la (no correlació), confirmant que la tendència observada no és deguda a l'atzar. Tanmateix, la bondat de l'ajust lineal és modesta, de manera que el Curvature Value per si sol no seria un predictor robust de μ .

4.3 Anàlisi del AVA_dataset

Ara passarem a l'anàlisi del nostre segon dataset, el **AVA_dataset**, on hem aplicat la mateixa manera de treballar que al primer dataset, hem fet un diagrama de dispersió per a veure tots els punts conjuntament en un gràfic junt amb la regressió lineal per a veure la seva tendència.

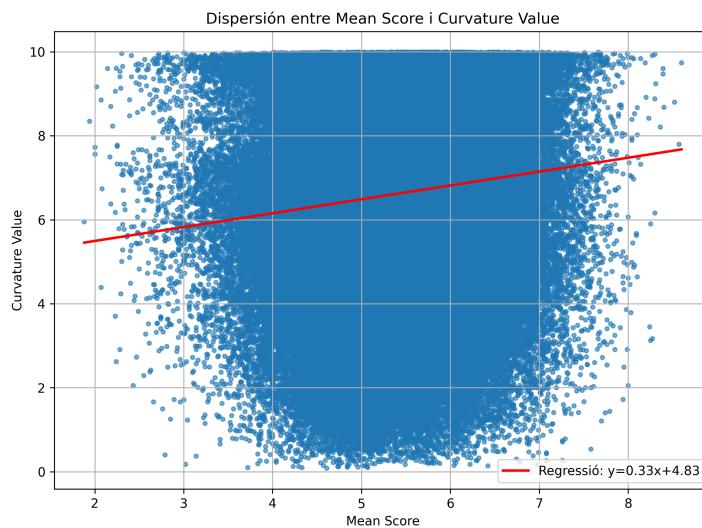


Figura 8: Dispersió entre Mean Score i Curvature Value amb regressió lineal per al AVA_dataset.

En aquest cas podem veure que el núvol de punts es molt mes ampli ja que la mida del dataset era consideradament mes gran, però tot i així els

punts estan molt dispersats. Dels càlculs de correlació obtenim

$$r = 0,103 \quad p \approx 0.$$

Aquest valor de $r = 0,103$ reflecteix una correlació positiva molt feble entre la mitjana de puntuacions i la nostra mètrica de curvatura. Tanmateix, el p-value extremadament baix permet rebutjar amb tota confiança la hipòtesi nul·la de no correlació. En termes pràctics, tot i que la relació és estadísticament significativa, la seva força és tan reduïda que la curvatura per si sola només explica aquesta relació de una manera parcial, de la mateixa manera que en el primer dataset.

Podem veure que en aquest dataset la mitjana de les votacions de la gran majoria d'imatges està compresa entre 2 i 8, donant-nos a entendre que no hi havia una imatge molt lletja ni cap molt bonica o, que les votacions de la gent que va participar varien molt unes de les altres, encara que estiguin mirant a la mateixa imatge, ajudant-nos a veure ja unes possibles conclusions per a aquest treball.

Tot i així aquest dataset contava també amb un apartat de etiquetes, uns números associats a cada imatge, les quals en poden tenir com a màxim 2, i que van des de el numero 1 fins el 66. Alguns exemples d'aquestes etiquetes son **Insects**, **Family**, **Rural**, **Architecture**... i ens han ajudat a poder extreure coeficients de correlació per a veure si la dinàmica es la mateixa que la general o si depenen de quin tema tractin les fotos la curvatura té mes o menys implicació. La Taula 1 mostra tots els valors de Pearson de les diferents etiquetes junt amb el seu p-valor:

Taula 1: Coeficients de correlació de Pearson i valors de p per cada etiqueta temàtica (ordenada per r descendent)

Etiqueta	r	p-value
Architecture	0.292	1.56e-04
Landscape	0.254	5.29e-04
Self Portrait	0.244	6.15e-04
Science and Technology	0.221	7.29e-05
Action	0.218	2.60e-04
Transportation	0.211	1.55e-04
Photo-Impressionism	0.205	3.12e-04
Urban	0.199	6.82e-04
Traditional Art	0.193	2.94e-04
Camera Phones	0.187	7.11e-05

Continua a la pàgina següent

Taula 1 – *Continuació de la taula*

Etiqueta	r	p-value
Astrophotography	0.185	8.13e-05
Digital Art	0.182	4.88e-04
Snapshot	0.173	4.87e-04
Insects, etc	0.173	2.06e-04
Photojournalism	0.171	1.04e-04
Cityscape	0.156	5.40e-05
Nature	0.154	7.95e-05
Rural	0.149	2.98e-04
Advertisement	0.142	4.06e-04
Emotive	0.141	2.74e-04
Sports	0.138	2.67e-04
Family	0.132	1.47e-04
Textures	0.128	7.11e-04
Interior	0.112	8.97e-05
Floral	0.111	3.65e-04
Candid	0.102	3.77e-04
Still Life	0.101	8.78e-05
Macro	0.097	4.52e-04
Pinhole/Zone Plate	0.088	8.10e-05
Fish Eye	0.088	8.36e-04
Seascapes	0.087	3.76e-04
History	0.085	2.18e-04
Overlays	0.083	9.42e-05
Food and Drink	0.076	9.01e-05
Abstract	0.070	7.58e-04
Studio	0.069	1.33e-04
Performance	0.062	2.49e-04
Fashion	0.058	5.12e-04
Portraiture	0.058	5.65e-04
Water	0.054	9.31e-05
Street	0.050	5.09e-04
Humorous	0.041	1.38e-04
Military	0.034	6.11e-04
Nude	0.021	3.33e-04
Diptych / Triptych	0.019	3.21e-04
Animals	0.014	5.84e-04
Sky	0.009	1.22e-04

Continua a la pàgina següent

Taula 1 – *Continuació de la taula*

Etiqueta	<i>r</i>	<i>p</i> -value
Music	0.009	2.13e-04
Travel	0.006	3.45e-04
Blur	0.003	1.02e-04
Wedding	-0.008	5.03e-04
Panoramic	-0.044	6.58e-04
Birds	-0.049	6.72e-04
Children	-0.053	2.90e-04
Texture Library	-0.054	4.19e-04
DPChallenge GTGs	-0.064	9.11e-05
Lensbaby	-0.068	1.67e-04
Black and White	-0.126	2.35e-04
Persuasive	-0.131	5.78e-04
Infrared	-0.159	4.75e-04
Vintage	-0.164	2.27e-04
Analog	-0.170	3.04e-04
High Dynamic Range (HDR)	-0.194	6.49e-04
Maternity	-0.221	3.89e-04
Horror	-0.233	7.24e-04
Political	-0.266	4.36e-04

Analitzant els 66 coeficients de correlació de Pearson, veiem que la majoria són positius, indicant una lleu tendència que la nostra mètrica creix amb la puntuació mitjana humana en moltes etiquetes. No obstant això, tots els valors de *r* es troben en un rang baix (entre $-0,266$ i $+0,292$), de manera que l'efecte és feble i explica només una petita fracció de la variabilitat. Pel que fa a la significació estadística, tots els *p*-values són menors que 10^{-3} , cosa que ens permet rebutjar amb confiança la hipòtesi nul·la de no correlació en totes les etiquetes. En resum, tot i que la majoria de correlacions són estadísticament significatives, la seva magnitud pràctica és limitada.

Tot i així, per separat hem escollit 2 etiquetes molt diferents, una amb coeficient negatiu i un altre amb coeficient positiu, per aprofundir-hi i ensenyar també els seus gràfics, ja que crec que ens poden donar una bona visió de com funcionen els conjunts en global. Aquestes etiquetes són **Children** i **Advertisement**, primerament perquè es interessant veure com funciona en persones, ja que es un tema molt més subjectiu i no hi han línies tan marcades, com hem pogut veure en la apartat d'ajust de paràmetres, i per altre part en imatges que estan especialment creades per a que t'entrin pels ulls i deixar una molt bona imatge d'una marca en pocs segons, com són les de

publicitat.

4.3.1 Etiqueta Children

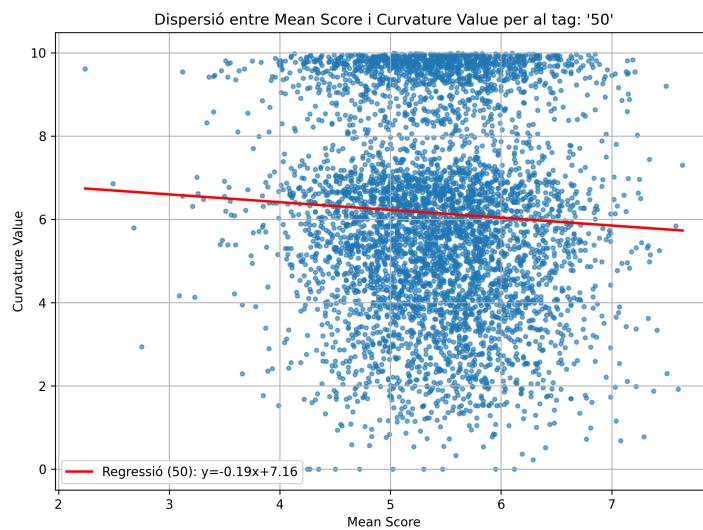


Figura 9: Dispersió entre Mean Score i Curvature Value amb regressió lineal per a l'etiqueta Children.

Podem veure a la figura 9 com la regressió lineal es negativa, es a dir, alhora que augmenta la votació mitjana disminueix el valor de la puntuació de la nostre mètrica lleugerament. El valor de Pearson és

$$r = -0,053 \quad p = 2.90e - 04.$$

Això pot tenir varies explicacions però la més clara es que a imatges on surten nens o persones en general la votació sobre la bellesa té poca relació amb si la imatge presenta corbes. Això passa durant tot el dataset AVA, on hi han molts factors de confusió, que fan que la curvatura no sigui tan important en la decisió dels observadors. Un exemple es la figura 10, que té una puntuació mitjana de 4.84 però una nota de curvatura de 8.90 i encara que aquests casos passen durant tot el dataset en aquest tipus de imatges en concret és encara més marcat.



Figura 10: Imatge d'un nen que pertany a l'etiqueta Children.

4.3.2 Etiqueta Advertisment

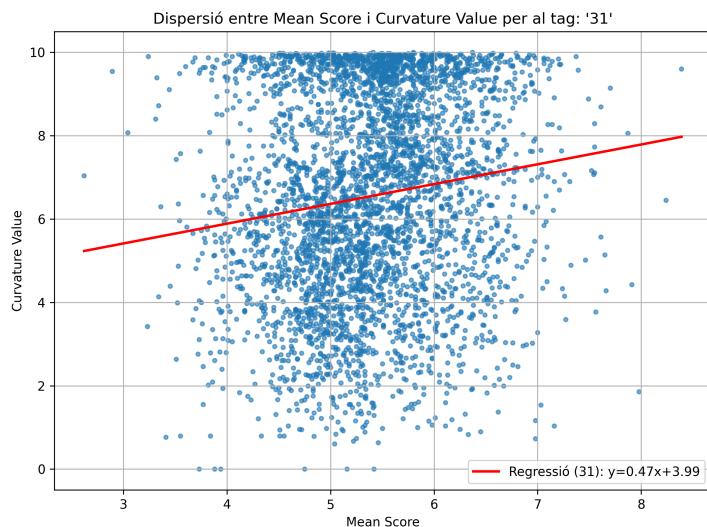


Figura 11: Dispersió entre Mean Score i Curvature Value amb regressió lineal per a l'etiqueta Advertisment.

En aquestes imatges dissenyades especialment per ser atractives podem veure, gràcies a la figura 11, que si que la curvatura afecta d'una manera més

clara a la puntuació, augmentant més de 2 punts la nota de corba des de la puntuació mitjana més baixa fins la més alta, fent veure que aquí si que té una gran part d'importància. Tot i així el núvol de punts és molt dispers, i el valor de Pearson que obtenim és

$$r = 0,142 \quad p = 4.06e - 04.$$

fent veure que no hi ha una correlació tan marcada i es que hi han molts altres factors apart de la curvatura que la gent té en compte per decidir si una imatge es bonica. Per exemple la figura 12 amb l'etiqueta de Advertisement té una nota mitjana de bellesa de 4.38 mentre que el valor de curvatura es 7.6, i fent una ullada a la imatge es poden entendre ambdós valors.



Figura 12: Imatge d'una marca de cervesa amb l'etiqueta Advertisement.

5 Conclusions i Millores

5.1 Conclusions Generals

En aquest Treball de Fi de Grau hem pogut constatar que, tot i que existeix una tendència lleugerament positiva entre el grau de curvatura de les vores i la valoració estètica obtinguda per observadors humans, aquesta relació és només parcial. Els nostres resultats, tant per al conjunt MSC (paisatges naturals) com per al AVA (imatges de gran diversitat), mostren una dispersió significativa dels punts al voltant de la recta de regressió, indicant que la curvatura explica només una part de la variabilitat de la percepció de bellesa.

A més de la curvatura, hi intervenen multitud de factors de baix nivell, com ara el color, el contrast, la lluminació o la composició visual, que poden alterar de manera notable la impressió estètica sense fer referència directa a la geometria de les corbes. D'altra banda, també apareixen factors de contingut altament semàntic, per exemple el tema de la imatge (retrats, paisatges, escenes urbanes), la presència d'éssers vius, les expressions facials, els objectes recognoscibles o fins i tot aspectes culturals i emocionals, que modulen de forma complexa la valoració dels espectadors. Aquestes característiques semàntiques poden reforçar o contrarestar l'efecte de la curvatura, de manera que dues imatges amb corbes similars poden ser percebudes de manera molt diferent segons el seu contingut.

Per tant, en imatges tan diverses i complexes com les que hem analitzat, no és possible establir una relació directa i unívoca entre curvatura i belleza. La nostra mètrica aporta un indicador útil del “grau de corba” present, però caldria combinar-la amb mòduls addicionals que capturessin tant factors visuals de baix nivell com variables semàntiques per a aconseguir models predictius més sòlids i generals.

5.2 Limitacions del mètode

Malgrat l'aportació sistemàtica de la nostra mètrica de curvatura, el mètode presenta diverses limitacions que cal tenir en compte. En primer lloc, la decisió de reduir la corba a tres categories mitjançant K-means —“recte”, “suau” i “angle”— representa una simplificació important de la diversitat de formes presents en imatges reals. Aquesta discretització pot esborrar matisos perceptualment rellevants, especialment en escenes amb geometries complexes on diferents patrons corbats coexisteixen en una mateixa fotografia.

En segon lloc, el procés d'estimació de curvatura s'aplica de manera uniforme a totes les imatges, sense considerar el seu contingut semàntic. No obstant això, sabem que la percepció humana de les corbes varia notable-

ment en funció de la temàtica: la importància de la curvatura en un retrat o en una imatge amb éssers humans és molt diferent de la que té en un paisatge abstrait o en una composició arquitectònica. L'absència de mecanismes d'adaptació al contingut pot, doncs, conduir a valoracions no òptimes de la "suavitat" o la "angularitat" segons el context visual.

Una tercera limitació rau en la validació: tot i haver comptat amb una enquesta amb 20 imatges i 52 participants per comparar corbes automàtiques amb valoracions humanes, la mida reduïda de la mostra i les discrepàncies detectades en categories concretes (com ara retrats o escenes naturals) suggerixen que la mètrica no capture sempre de manera robusta la curvatura percebuda. Es fa evident la necessitat d'ampliar la validació a més imatges i a grups de jutges amb perfils diversos per aconseguir conclusions més generals.

Finalment, el nostre enfocament posa el focus exclusivament en la curvatura, sense integrar altres característiques visuals de baix nivell —com el color, el contrast, la textura o la profunditat de camp— ni informació semàntica d'alt nivell. Aquests factors són, però, determinants en la percepció estètica i poden interactuar amb la geometria de les corbes de manera complexa. La manca d'un model multivariable que incorpori aquests trets limita la capacitat del mètode per explicar de manera completa i precisa la valoració humana.

En conjunt, aquestes restriccions posen de relleu la necessitat de conjugar la mètrica de corba amb estratègies d'adaptació semàntica, ampliació de la validació experimental i integració de múltiples variables, per tal d'obtenir models predictius més sòlids i fiables en contextos heterogenis.

5.3 Millores i futures línies de treball

Encara que hem treballat en aquest Treball de Fi de Grau a fons, crec que es podrien implementar diverses millores per treure més rendiment, ja que algunes propostes no s'han pogut dur a terme degut a limitacions com he explicat ara. Per exemple, l'anàlisi completa del dataset AVA va requerir més de 20 hores de processament en el maquinari disponible.

Si fos possible es podria fer una enquesta molt més extensa per valorar més casos i poder ajustar els paràmetres veient aquests resultats.

Es podria comprovar altres datasets amb imatges amb votacions més polaritzades, es a dir, que fossin molt baixes o molt altes, per a veure si en els extrems hi ha una tendència a valors de curvatura també "extrems".

Finalment, la futura línia de treball que hem sembla mes adient veient els resultats seria considerar incorporar característiques de baix nivell (color, contrast, composició) i, fins i tot, alguna aproximació semàntica bàsica mitjançant models preentrenats que identifiquin categories d'objectes o ex-

pressions facials. Això ajudaria a entendre fins a quin punt aquell valor de corba interactua amb factors visuals habituals en la valoració estètica.

Referències

- [1] Marco Bertamini, Lorenzo Palumbo i Telea N. Gheorghes. “Do observers like curvature or do they dislike angularity?” A: *British Journal of Psychology* (2016).
- [2] G. Gómez-Puerto, E. Munar i M. Nadal. “Preference for curvature: A historical and conceptual framework”. A: *Frontiers in Human Neuroscience* (2016).
- [3] Maria Grebenkina, Adrian Brachmann i Marco Bertamini. “Edge-orientation entropy predicts preference for diverse types of man-made images”. A: *Frontiers in Neuroscience* (2018).
- [4] Svenja Stanischewski, Christoph S. Altmann i Adrian Brachmann. “Aesthetic perception of line patterns: Effect of edge-orientation entropy and curvilinear shape”. A: *i-Perception* (2020).
- [5] Michael Bar i Michal Neta. “Humans prefer curved visual objects”. A: *Psychological Science* 17 (2006), pag. 645 - 648.
- [6] K. N. Cotter et al. “Curve appeal: Exploring individual differences in preference for curved versus angular objects”. A: *i-Perception* (2017).
- [7] Gonzalo Navarrete et al. “Curvature preference in architectural spaces”. A: *Journal of Environmental Psychology* (2019).
- [8] Anna Ruta et al. “Curvature effects on painting preference across eras”. A: *Empirical Studies of the Arts* (2023).
- [9] Paul J. Silvia i Emily Brown. “Curvy versus angular: Preference and performance in shape discrimination”. A: *Acta Psychologica* 125.2 (2007), pag. 309 - 319.
- [10] Ian Goodfellow et al. “Generative Adversarial Nets”. A: *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2014.
- [11] Tero Karras, Samuli Laine i Timo Aila. “A Style-Based Generator Architecture for Generative Adversarial Networks”. A: *CVPR*. 2019.
- [12] C. A. Parraga et al. “Aesthetics Without Semantics”. A: *arXiv preprint arXiv:2505.05331* (2025). DOI: [10.48550/arXiv.2505.05331](https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.05331).
- [13] Naila Murray, Luca Marchesotti i Florent Perronnin. “AVA: A large-scale database for aesthetic visual analysis”. A: *2012 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2012, pag. 2408 - 2415. DOI: [10.1109/CVPR.2012.6247954](https://doi.org/10.1109/CVPR.2012.6247954).

- [14] John Canny. “A Computational Approach to Edge Detection”. A: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* PAMI-8.6 (1986), pag. 679 - 698. DOI: [10.1109/TPAMI.1986.4767851](https://doi.org/10.1109/TPAMI.1986.4767851).
- [15] Irwin Sobel i Gary Feldman. *A 3×3 Isotropic Gradient Operator for Image Processing*. Inf. tèc. SUIT-BCS70-010. Stanford Artificial Intelligence Project, 1970.
- [16] Jerry M. S. Prewitt. *Object Enhancement and Extraction*. Inf. tèc. SAIC-70-094. Stanford Artificial Intelligence Project, 1970.
- [17] David Marr i Ellen Hildreth. “Theory of Edge Detection”. A: *Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences* 207.1167 (1980), pag. 187 - 217. DOI: [10.1098/rspb.1980.0020](https://doi.org/10.1098/rspb.1980.0020).
- [18] Wikipedia contributors. *Pearson correlation coefficient*. https://en.wikipedia.org/wiki/Pearson_correlation_coefficient. Accessed: 2025-06-12. 2025.