

Цель работы

- Рассмотреть простейшую модель боевых действий – модель Ланчестера;
- Научиться составлять системы дифференциальных уравнений изменения численностей армий;
- Научиться строить графики для моделей боевых действий.

Задание №43

Между страной X и страной Y идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна X имеет армию численностью 227 000 человек, а в распоряжении страны Y армия численностью в 139 000 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывные функции.

Постройте графики изменения численности войск армии X и армии Y для следующих случаев:

1. Модель боевых действий между регулярными войсками

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -0.34x(t) - 0.87y(t) + \sin(t) + 2$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -0.51x(t) - 0.2y(t) + 2|\cos(t)|$$

2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -0.24x(t) - 0.75y(t) + \sin(8t) + 1$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -0.28x(t)y(t) - 0.18y(t) + 2|\cos(t)|$$

Краткая теоретическая справка

Рассмотрим некоторые простейшие модели боевых действий – модели Ланчестера. В противостоянии могут принимать участие как регулярные войска, так и партизанские отряды. В общем случае главной характеристикой соперников являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

Рассмотри три случая ведения боевых действий:

1. Боевые действия между регулярными войсками.
2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов.
3. Боевые действия между партизанскими отрядами.
 - В первом случае численность регулярных войск определяется тремя факторами: скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);

- Скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связано с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);
- Скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени). В этом случае модель боевых действий между регулярными войсками описывается следующим образом.

В этом случае модель боевых действий между регулярными войсками описывается следующим образом

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

Потери, не связанные с боевыми действиями, описывают члены $-a(t)x(t)$ и $-h(t)y(t)$, члены $-b(t)y(t)$ и $-c(t)x(t)$ отражают потери на поле боя. Коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ указывают на эффективность боевых действий со стороны y и x соответственно, $a(t)$, $h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери. Функции $P(t)$, $Q(t)$ учитывают возможность подхода подкрепления к войскам X и Y в течение одного дня.

Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбежно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан. В результате модель принимает вид:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

В этой системе все величины имеют тот же смысл, описанный выше.

Выполнение лабораторной работы

Случай 1: Модель боевых действий между регулярными войсками

model lab03

// Случай 1: Модель боевых действий между регулярными войсками

parameter Real t; // время

constant Real a=0.34; //степень влияния различных факторов

constant Real b=0.87; //эффективность боевых действий армии y

constant Real c=0.51; //эффективность боевых действий армии x

constant Real h=0.2; //степень влияния различных факторов

Real p;

Real q;

Real x;

Real y;

initial equation

$x=227000$; //Численность армии страны X

$y=139000$; //Численность армии страны Y

$t=0$;

equation

$p = \sin(t) + 2$; //возможность подхода подкрепления к войскам X

$q = 2 * \text{abs}(\cos(t))$; //возможность подхода подкрепления к войскам Y

$\text{der}(x) = -ax - by + p$;

$\text{der}(y) = -cx - hy + q$;

end lab03;

График первого случая (рис.01).

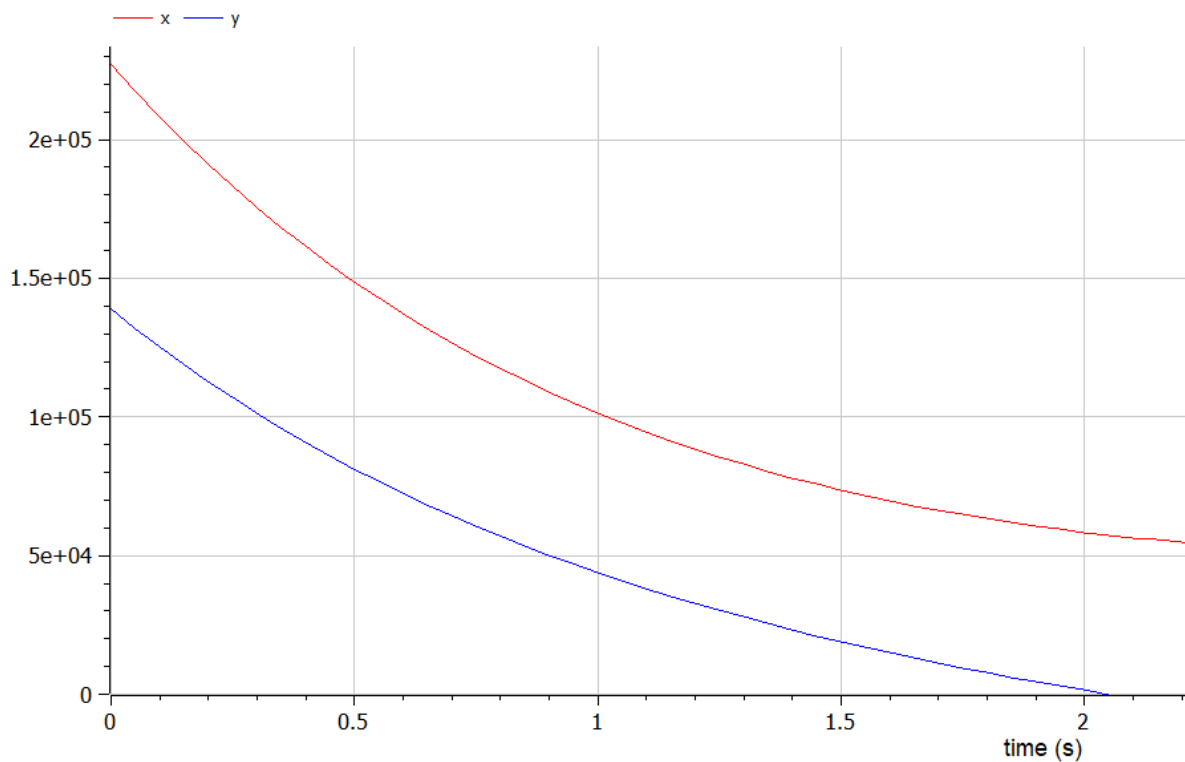


рис.01

Победила страна X.

Случай 2: Модель боевых действий между регулярными войсками

model lab03

// Случай 2: Модель боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

parameter Real t; // время

constant Real a=0.24; //степень влияния различных факторов

constant Real b=0.75; //эффективность боевых действий армии y

constant Real c=0.28; //эффективность боевых действий армии x

constant Real h=0.18; //степень влияния различных факторов

```

Real p;
Real q;
Real x;
Real y;

initial equation
x=227000; //Численность армии страны X
y=139000; //Численность армии страны Y
t=0;

equation
p= sin(8*t) + 1; //возможность подхода подкрепления к войскам X
q= 2 * abs(cos(t)); //возможность подхода подкрепления к войскам Y
der(x)=-a*x-b*y+p;
der(y)=-c*x-h*y+q;

end lab03;

```

График второго случая (рис.02).

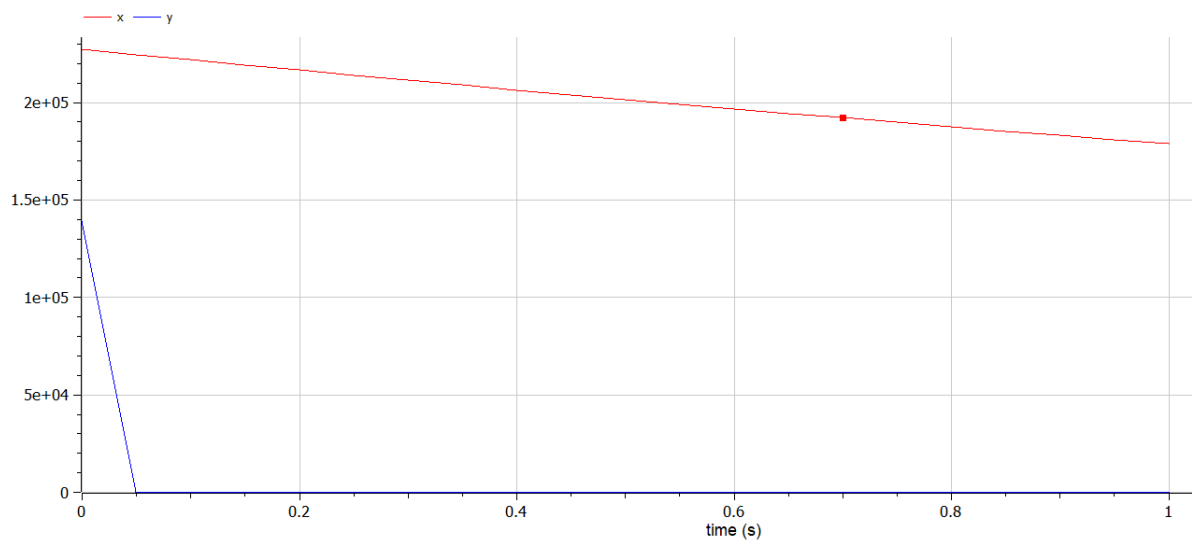


рис.02

Победила страна X.

Вывод

- Рассмотрел простейшую модель боевых действий – модель Ланчестера;
- Научился составлять системы дифференциальных уравнений изменения численностей армий;
- Научился строить графики для моделей боевых действий.

Список литературы

Кулябов Д.С "Лабораторная работа №3": https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1343805/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%202.pdf

