

Цель работы

- Построить модель «хищник - жертва» Лотки - Вольтерры:
 - Построить следующие графики зависимости:
 - x от y .
 - $x(t), y(t)$.
 - Найти стационарное состояние системы

Задание №49

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -0.76x(t) + 0.082x(t)y(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0.62y(t) - 0.039x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} x_0 &= 8 \\ y_0 &= 20 \end{aligned}$$

Найдите стационарное состояние системы.

Краткая теоретическая справка

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник-жертва» — модель Лотки-Вольтерры. Данная двухвидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса (по экспоненциальному закону), при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y – число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c – естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников xy . Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dx в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (положение равновесия, не зависящее от времени решения). Если начальное состояние будет другим, то это приведет к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в начальное состояние.

Стационарное состояние системы будет в точке:

$$x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$$

Если начальные значения задать в стационарном состоянии

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0$$

, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0)$, $y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

Выполнение лабораторной работы

Код работы

model lab05

constant Real a=0.76; //смертность хищников

constant Real b=0.082; //прирост жертв

constant Real c=0.62; //прирост хищников

constant Real d=0.039; //смертность жертв

Real x;

Real y;

initial equation //начальные условия

x=8;

y=20;

equation

der(x)=-ax+bxy;

der(y)=cy-dxy;

end lab05;

Стационарное состояние системы

$$x_0 = \frac{0.62}{0.039}$$
$$y_0 = \frac{0.76}{0.082}$$

Графики

Зависимость изменения численности хищников от изменения численности жертв (рис.01).

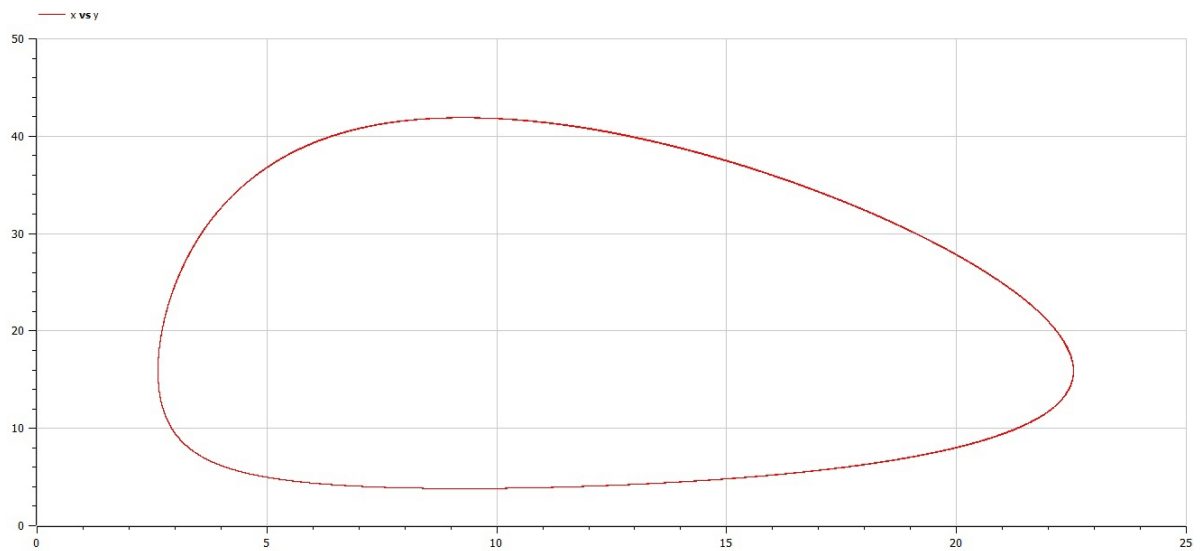


рис.01

Зависимость численности хищников и жертв от времени (рис.02).

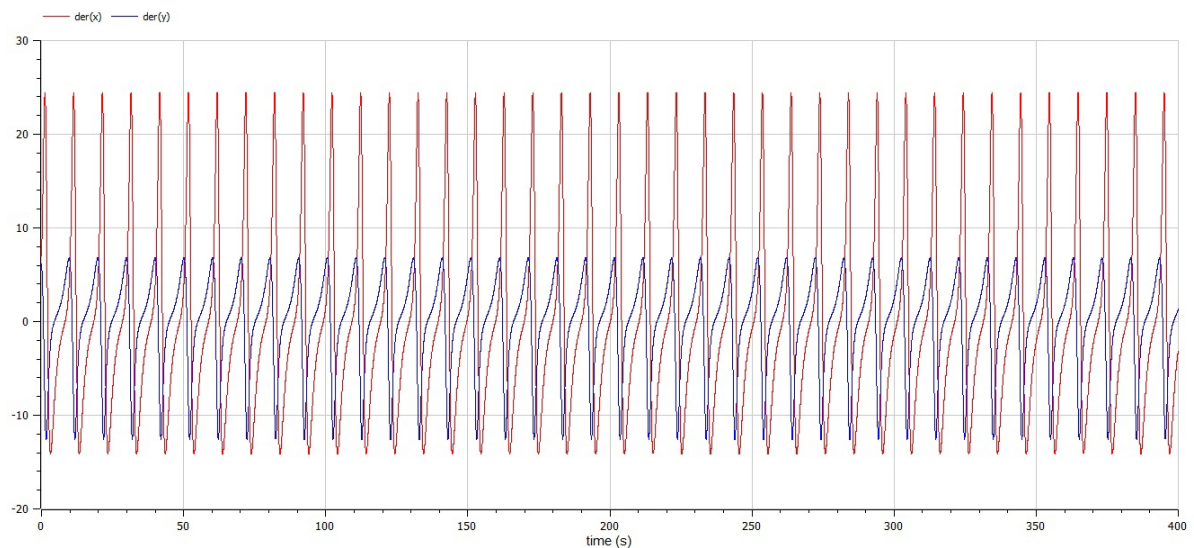


рис.02

Вывод

Построили модель «хищник - жертва» Лотки - Вольтерры.

Построили следующие графики зависимостей: x от y и $x(t)$, $y(t)$.

Нашли стационарное состояние системы.

Список литературы

Кулябов Д.С "Лабораторная работа №5": https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1343813/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%204.pdf

