2020 年高数上期末试题答案

彭康学导团

版本：2.40

更新：2023 年 2 月 27 日

1 填空题

1.1 $-\dfrac{1}{2021}$.

对原式进行 Taylor 展开, 有

$$\ln\frac{1-x}{1+x^3}=\ln(1-x)-\ln(1+x^3)={\color{red}-\sum_{k\geq1}\frac{x^k}{k}}{\color{blue}-\sum_{k\geq1}\frac{(-1)^{k-1}x^{3k}}{k}}$$

其中, 红色部分 x^{2021} 项的系数为 $-\dfrac{1}{2021}$. 由于 2021 不是 3 的倍数, 故蓝色部分中不含 x^{2021} 项. 故 x^{2021} 的系数为 $-\dfrac{1}{2021}$.

1.2 1.

当 $x\to0^-$ 时, 有

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\frac{2}{1}-1=1$$

当 $x\to0^+$ 时, 有

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+1}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}}+1=0+1=1$$

故答案为 1.

1.3 $1+\ln\pi$.

因为

$$\int_1^3 \ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^3(\ln\pi-\ln|2-x|)\,\mathrm{d}x=\ln\pi-\frac{1}{2}\int_1^3\ln|2-x|\,\mathrm{d}x$$

又 $\frac{1}{2}\int_1^3\ln|2-x|\,\mathrm{d}x=\int_2^3\ln(x-2)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x=(x\ln x-x)|_0^1$. 又 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$. 故 $\frac{1}{2}\int_1^3\ln|2-x|\,\mathrm{d}x=-1$. 答案为 $1+\ln\pi$.

1.4 $\frac{2\mathrm{e}^2-3\mathrm{e}}{4}$.

因为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=6t+2$, 将 y 看作关于 t 的函数, 隐函数求导, 有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^y\sin t+\mathrm{e}^y\cos t-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$. 于是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{1-\mathrm{e}^y\sin t}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{2-y}$. 所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(2-y)(6t+2)}$$

取对数有

$$\ln\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+\ln\cos t-\ln(6t+2)-\ln(2-y)$$

两边对 t 求导, 有

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\tan t-\frac{6}{6t+2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2-y}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\tan t-\frac{6}{6t+2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2-y}\right)$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\tan t-\frac{6}{6t-2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{2-y}\right)$$

当 $t=0$ 时由 $\mathrm{e}^y\sin t-y+1=0$ 得到 $y(0)=1$. 又

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=(6t+2)|_{t=0}=2$$

同理, 有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \mathrm{e},\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \left.\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{t=0} = \frac{\mathrm{e}}{2}$$

代入可得答案为 $\dfrac{2\mathrm{e}^2-3\mathrm{e}}{4}$.

1.5 $\dfrac{1}{3}$.

因为当 $x \to 0$ 时, $\tan x \sim x$. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{n}\right)^2\tan\frac{1}{n^3} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k^2\frac{1}{n^3}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\\ &= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

2 选择题

2.1 C.

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{2x} = \dfrac{1}{2} = f(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又

$$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\mathrm{e}^x-x-1}{2x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{2x^2} = \frac{1}{4}$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且导数不为 0.

2.2 D.

因为 $x\to0$ 时, $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$, 所以由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x} = 2$ 有 $f(x)\sim x^2+o\left(x^2\right)$. 于是

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x)}{x} = 0$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$. 故 $x\to0$, $f'(x)\sim 2x+o(x)$, $f''(x)\sim 2+o(1)$. 即 $f''(0)=2>0$. 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值.

2.3 B.

该微分方程的特征多项式为 $\lambda^2-\lambda=0$. 对 e^x+1 中的 e^x 讨论: $\varphi(x)\mathrm{e}^{\mu x}$ 中 $\varphi(x)$ 是 0 次多项式, $\mu=1$, 且 1 是特征多项式 $\lambda^2-\lambda=0$ 的单重根, 所以特解应设为 $ax\mathrm{e}^x$.

再对 e^x+1 中的 1 讨论, 其相当于一个 0 次多项式, 由于在 $y''+p(x)y'+q(x)y$ 中 $q(x)\neq 0$, 故待定系数也要设为一个 0 次多项式, 从而该微分方程的特解设为 $ax\mathrm{e}^x+b$.

2.4 D.

由于 $y(x)$ 在 $x=-1, x=0, x=1, x=2$ 处都没有定义, 所以均为 $y(x)$ 的间断点. 故间断点的个数为 4 个.

2.5 A.

取 $x=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, 此时 $y=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$. 当 $x\to 0$ 时 $n\to+\infty$, 此时 $y\to+\infty$. 因此 y 无界.

又对每一个 n, 取 $x=\dfrac{1}{2n\pi+\pi}$, 此时 $y=0$. 因此始终存在 $\dfrac{1}{2n\pi+\pi}<\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ 满足 $y\left(\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\to+\infty$, 但是 $y\left(\dfrac{1}{2n\pi+\pi}\right)\equiv 0$. 因此不是无穷大量.

3 计算题

3.1 1.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x (t\sin t+\tan^3 t\cdot\ln t)\,\mathrm{d}t}{\cos x\cdot\displaystyle\int_0^x \ln^2(1+t)\,\mathrm{d}t} &= \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x (t\sin t+\tan^3 t\cdot\ln t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^x \ln^2(1+t)\,\mathrm{d}t} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+\tan^3 x\cdot\ln x}{\ln^2(1+x)}=1
\end{aligned}
$$

3.2 $f(x)$ 有两个零点.

因 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f(0)=-2$, 故只需考虑 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点.

又当 $x>1$ 时, 有 $f(x)>2-2\cos x\geq 0$, 且 $f(1)>0$. 故 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上没有零点.

当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)>0$. 即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格单调递增. 从而该区间至多有一个零点. 又 $f(0)<0, f(1)>0$. 因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个零点, 在 $\mathbb{R}$ 上仅有两

个零点.

3.3 $\ln(y+\ln y)=x$.

记 $p=y'$, 则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 原方程化为

$$(y+1)p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=(1+2y+\ln y)p$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+\frac{p}{y+1}=\frac{1+2y+\ln y}{y+1}$$

解得

$$p=\frac{1}{y+1}\left(y^2+y\ln y+C_1\right)$$

由 $y(0)=1, y'(0)=\dfrac{1}{2}$ 解得 $C_1=0$. 即 $y'=\dfrac{1}{y+1}\left(y^2+y\ln y\right)$. 进而 $\ln(y+\ln y)=x+C_2$. 代入初值条件得到 $\ln(y+\ln y)=x$.

3.4 $4-\pi$.

注意到 $\sin x$ 是奇函数, 于是

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x^2\sin x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=4\int_{0}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

分母有理化, 有

$$4\int_{0}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=4\int_{0}^{1}(1-\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x=4-4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=4-\pi$$

3.5 $4\pi^2$.

圆周方程为 $(x-2)^2+y^2=1$.

$$V=\int_{-1}^{1}\pi\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}\pi\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2\mathrm{d}y=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y=4\pi^2$$

3.6 $k>2, b=0, c=0$.

易见 f 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内均连续可微, 只要讨论 f 在 $x=0$ 处的性质.

当 $k\le 0$ 时, $f(0^+)$ 不存在, 故 $k>0$.

当 $k>0$ 时, 有 $f(0^-)=c, f(0)=0, f(0^+)=0$. 故 $c=0$.

又 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}$. 因此 $k>1$, 且 $f'_+(0)=0$. 又 $f'_-(0)=b$, 从而 $b=0$.

当 $k>1, b=0, c=0$ 时, 有

$$f'(x)=\begin{cases}2a\sin x\cos x, & x<0\\ 0, & x=0\\ kx^{k-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{k-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$$

当 $k\le 2$ 时, $f'(0^+)$ 不存在, 所以 $k>2$.

即 $k>2, b=0, c=0$ 是 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微的必要条件.

3.7 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $f(x)=x^2\displaystyle\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $f'(x)=2x\displaystyle\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+2x^3\mathrm{e}^{-x^4}-2x^3\mathrm{e}^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. 故 $f(x)$ 的驻点为 $x=0,\pm1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	<0	$=0$	>0	$=0$	<0	0	>0
$f(x)$	递减	取极小值	递增	取极大值	递减	取极小值	递增

故单调增区间为 $(-1,0),(1,+\infty)$, 单调减区间为 $(-\infty,-1),(0,1)$; 极小值为 $f(\pm1)=0$, 极大值为 $f(0)=\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

3.8 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=(\lambda+2)^2(4-\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=4$.

当 $\lambda=-2$ 时,

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3&-3&3\\3&-3&3\\6&-6&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\boldsymbol{r}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{r}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

当 $\lambda = 4$ 时,

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to r_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

令

$$X(t) = (r_1 e^{-2t}, r_2 e^{-2t}, r_3 e^{-4t}) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{4t} \\ e^{-2t} & 0 & e^{4t} \\ 0 & e^{-2t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}$$

对应的齐次微分方程组的通解为 $x = X(t)C$.

又 $X(0) \neq E$, 计算得 $X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

通解为 $x(t) = X(t)X^{-1}(0)C + \int_0^t X(t-\tau)X^{-1}(0)f(\tau)\,d\tau$.

代入公式, 得到

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{4t} \\ e^{-2t} & 0 & e^{4t} \\ 0 & e^{-2t} & 2e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} C + \int_0^1 \begin{pmatrix} e^{-2(t-\tau)} & -e^{-2(t-\tau)} & e^{4(t-\tau)} \\ e^{-2(t-\tau)} & 0 & e^{4(t-\tau)} \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} & 2e^{4(t-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau$$

解得

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} & e^{4t} \\ e^{-2t} & 0 & e^{4t} \\ 0 & e^{-2t} & 2e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{4t} \\ \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{4t} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t} \end{pmatrix}$$

4 证明题

4.1 令 $ax + \frac{x}{b} = \sqrt{t^2 + 4ab}$, 则 $t = ax - \frac{b}{x}$. 解得 $x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4ab}}{2a}$. 当 $t = 0$ 时, $x = \sqrt{ba}$. 故将原积分分段为

$$\int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx + \int_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx$$

当 $x \to 0$ 时, $ax + \frac{b}{x} \to +\infty$, 当 $x \to +\infty$ 时, $ax + \frac{b}{x} \to +\infty$.

故对红色部分, 代入 $x=\dfrac{t-\sqrt{t^2+4ab}}{2a}$, 对蓝色部分, 代入 $x=\dfrac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{2a}$. 原积分化为

$$I=\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\,\mathrm{d}\left(\frac{t-\sqrt{t^2-4ab}}{2a}\right)+\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\,\mathrm{d}\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4ab}}{2a}\right)$$

于是有

$$\begin{aligned} I=&\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\\ &+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\end{aligned}$$

即

$$I=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}t$$

原命题得证.

4.2 容易证明 $0<x_n<3$, 因为

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\le\frac{x_n+(3-x_n)}{2}=\frac{3}{2}$$

故

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\ge\sqrt{x_n\left(3-\frac{3}{2}\right)}=\sqrt{\frac{3}{2}x_n}\ge x_n(n\ge 2)$$

于是 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界. 故 $\{x_n\}$ 收敛, 对递推式两边求极限得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$.

4.3 (1). 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 知 $f(0)=0$, 且 $f'(0)=1$. 故 $\exists a>0$, 使得 $f(a)>f(0)=0$.

同理, $f(1)=0, f'(1)=2, \exists b<1$, 使得 $f(b)<f(1)=0$, 且 $b\ne a$.

于是 $f(a)f(b)<0$, 由零点定理知 $\exists\xi\in(a,b), f(\xi)=0$.

(2). 构造 $\mathscr{F}(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$. 则 $F(0)=F(1)=F(\xi)=0$. 由 Rolle 定理知: 存在 $\xi_1\in(0,\xi),\xi_2\in(\xi,1)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$.

又 $F'(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-f(x)]$. 故 ξ_1,ξ_2 是 $f'(x)-f(x)=0$ 的两个根.

构造 $G(x)=\mathrm{e}^{x}[f'(x)-f(x)]$, 则 $G(\xi_1)=G(\xi_2)=0$. 故存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $G'(\eta)=\mathrm{e}^{\eta}[f''(\eta)-f(\eta)]=0$. 即 $f''(\eta)-f(\eta)=0$, 原命题得证.