2021 线代期末试题解析

版本：2.40
更新：2022 年 12 月 12 日

1 填空题

1. 26.

   注意到

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\alpha}_1, 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 5\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 + 6\boldsymbol{\alpha}_3] = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & 3 & 1 \\ & 5 & 6 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & 3 & 1 \\ & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

   故

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & 3 & 1 \\ & 5 & 6 \end{pmatrix}\right| = 26$$

2. -2.

   由于实对称矩阵属于不同特征值的特征向量相互正交，故

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \rangle = -1 + 3 + x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -2$$

3. $\begin{pmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$.

   $\boldsymbol{A}^{15}\boldsymbol{C}$ 是将 $\boldsymbol{C}$ 的 $1,2$ 行交换 15 遍，即交换 $\boldsymbol{C}$ 的 $1,2$ 行。$\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{16}$ 是将 $\boldsymbol{C}$ 的 $1,3$ 列交换 16 遍，即不变。故总体的作用是将 $\boldsymbol{C}$ 的 $1,2$ 行交换。

4. $(1,0,-1)$.

设 $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}=t$，即

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=t+1 \\ z=2t+1 \end{cases}$$

带入平面方程有

$$-2t+t+1-2t-4=0 \quad\Longrightarrow\quad t=-1 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$$

5. $t\in(0,2)$.

实二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} t & & \\ & 1 & t \\ & t & 4 \end{pmatrix}$$

由正惯性指数为 3 可知 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，故各阶顺序主子式大于 0，即

$$\begin{cases} \Delta_1=t>0 \\ \Delta_2=t>0 \\ \Delta_3=4t-t^3>0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad t\in(0,2)$$

2 选择题

1. B

解的解构：齐次通解 + 非齐次特解

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)=\frac{1}{2}\cdot 2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}$$

为方程的特解，$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 与 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关。又 $\mathrm{r}(A)=2$ 因此 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha})$ 与 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系。

2. A

(1) 由于相似矩阵的迹相同，故

$$-2+1=y+2-2 \quad\Longrightarrow\quad y=-1$$

(2) 有

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0$$

3. B

(1) $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}$，正确;

(2) 令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 则 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$，但 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$，错误;

(3) 由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

正确;

(4) 由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 在一般情况下是不成立的，故错误.

4. C

由于 $\boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，故

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

5. B

由题目有：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性相关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关（整体线性无关则部分组线性无关）。

3

设 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的增广矩阵, 则

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & -11 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -12 & 6 \\ 3 & -6 & 3 & 2 & -13 & t \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 9-t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 9-t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 9-t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-8 \end{array}\right]$$

要使线性方程组组有解, 则 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}})$, 此时 $t = 8$.

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

由此得方程组由自由未知量表示的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 1 \\ x_3 = 3x_5 + 1 \\ x_4 = 2x_5 + 1 \end{cases}$$

于是得方程组的结构式通解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

4

由题意有 $\det(\boldsymbol{A}) = 4$, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AXA}^* = 8\boldsymbol{XA}^{-1} + 12\boldsymbol{E}_4 &\Rightarrow \boldsymbol{XA}^* = 8\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{XA}^{-1} + 12\boldsymbol{A}^{-1} \\ &\Rightarrow \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = 8\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{XA}^{-1} + 12\boldsymbol{A}^{-1} \\ &\Rightarrow 4\boldsymbol{X} = 8\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} + 12\boldsymbol{E}_4 \\ &\Rightarrow (\boldsymbol{E}_4 - 2\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{X} = 3\boldsymbol{E}_4 \\ &\Rightarrow \boldsymbol{X} = 3(\boldsymbol{E}_4 - 2\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

于是解得

$$\boldsymbol{X} = 3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5

设 $\boldsymbol{I}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}$, 故对正整数 n, 有 $\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1^n & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_2^n \end{pmatrix}$.
因为

$$\boldsymbol{I}_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -2\boldsymbol{I}_1$$

故 $\boldsymbol{I}_1^n = (-2)^{n-1}\boldsymbol{I}_1$.

又

$$\boldsymbol{I}_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{I}_2^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

由归纳法可得,

$$\boldsymbol{I}_2^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n \cdot (-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{A}^{2014} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_2 \end{pmatrix}^{2014} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_1^{2014} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_2^{2014} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2013} & -2^{2013} & 0 & 0 \\ -2^{2013} & 2^{2013} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2014 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故 $\det\left(\boldsymbol{A}^{2014}\right) = \det(\boldsymbol{I}_1^{2014}) = 0$.

6

1. 由题意有 $b\boldsymbol{\alpha}_1 + c\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}$, 即

$$\begin{cases} b + c + 1 = 1 \\ 2b + 3c + a = 1 \\ b + 2c + 3 = 1 \end{cases}$$

解得 $a = 3, b = 2, c = -2$.

2. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 & \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$, 则有 $r(\boldsymbol{A}) = 3$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 可作为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基. 考虑非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_1$, 解得 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1$. 故其过渡矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7

由题意有

$$T(\boldsymbol{\alpha}) = (x - y, y - z, z)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

设 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 则

$$T(\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

设 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 则 T 的值域即为 $\mathrm{span}\{T(\boldsymbol{\beta}_1),T(\boldsymbol{\beta}_2),T(\boldsymbol{\beta}_3)\}$. 且

$$\begin{pmatrix}T(\boldsymbol{\beta}_1)&T(\boldsymbol{\beta}_2)&T(\boldsymbol{\beta}_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

于是 T 的秩为 3.

8

1.

$$L:\begin{cases}x-y-4z+12=0\\2x+y-2z+3=0\end{cases}\implies\begin{cases}x+5=2z\\7-y=2z\end{cases}\implies\frac{x+5}{2}=\frac{7-y}{2}=z$$

2. $\forall\, M\in L$，M 可以表示成如下形式

$$M(2t-5,7-2t,t)\implies\overrightarrow{PM}=(2t-7,7-2t,t+1)$$

由于直线的方向向量 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$，故由几何关系

$$\overrightarrow{PM}\cdot\boldsymbol{n}=(2t-7,7-2t,t+1)\cdot(2,-2,1)=0\implies t=3\implies M(1,1,3)$$

其中 M 就是过点 P 在直线 L 上的垂足。设对称点为 $P_1(x,y,z)$，那么 M 是 PP_1 的中点，故

$$\begin{cases}2+x=2\\y=2\\1+z=6\end{cases}\implies\begin{cases}x=0\\y=2\\z=5\end{cases}$$

故对称点为 $(0,2,5)$.

9

二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

令 $|A - \lambda I| = 0$，解得

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -2, \qquad \lambda_3 = 7$$

将 λ_i 代入 $A - \lambda I$ 中求解特征向量有

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

故令 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，那么

$$A = P\Lambda P^{-1} = P\Lambda P^{\mathrm{T}}$$

其中

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 7 \end{pmatrix}$$

因此线性变换为 $x = Py$，标准型为

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 7y_3^2$$

规范型为

$$f = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$$

10

1. 由于

$$\begin{aligned} A^2 &= (E - \alpha\alpha^{\mathrm{T}})(E - \alpha\alpha^{\mathrm{T}}) = E - 2\alpha\alpha^{\mathrm{T}} + \alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\alpha^{\mathrm{T}} \\ &= E - 2\alpha\alpha^{\mathrm{T}} + (\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\alpha\alpha^{\mathrm{T}} = E - (2 - \alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\alpha\alpha^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

其中 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$ 可以提出来是因为 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$ 是一个数。故

$$A^2 = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad E - \alpha\alpha^{\mathrm{T}} = E - (2 - \alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\alpha\alpha^{\mathrm{T}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha^{\mathrm{T}}\alpha = 1$$

2. 由 1 知，

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$$

我们断言：$\underline{\boldsymbol{A}\text{ 是降秩矩阵}}$。若不然，反设 $\boldsymbol{A}$ 满秩，从而可逆。那么

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \qquad &\Longrightarrow \qquad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \\ &\Longrightarrow \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = 0 \end{aligned}$$

这与 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = 1$ 矛盾，故 $\boldsymbol{A}$ 是降秩矩阵。