

2021 线代期末试题解析

彭康学导团

1 填空题

1. 26.

注意到

$$\mathbf{B} = [\alpha_1, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3, \alpha_2 + 6\alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & 3 & 1 \\ & 5 & 6 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & 3 & 1 \\ & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

故

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & 3 & 1 \\ & 5 & 6 \end{pmatrix} \right| = 26$$

2. -2.

由于实对称矩阵属于不同特征值的特征向量相互正交，故

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -1 + 3 + x = 0 \quad \implies \quad x = -2$$

3. $\begin{pmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$

$\mathbf{A}^{15}\mathbf{C}$ 是将 \mathbf{C} 的 1,2 行交换 15 遍，即交换 \mathbf{C} 的 1,2 行。 \mathbf{CB}^{16} 是将 \mathbf{C} 的 1,3 列交换 16 遍，即不变。故总体的作用是将 \mathbf{C} 的 1,2 行交换。

4. (1, 0, -1).

设 $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2} = t$, 即

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$$

带入平面方程有

$$-2t + t + 1 - 2t - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

5. $t \in (0, 2)$.

实二次型的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} t & & \\ & 1 & t \\ & t & 4 \end{pmatrix}$$

由正惯性指数为 3 可知 \mathbf{A} 是正定矩阵, 故各阶顺序主子式大于 0, 即

$$\begin{cases} \Delta_1 = t > 0 \\ \Delta_2 = t > 0 \\ \Delta_3 = 4t - t^3 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t \in (0, 2)$$

2 选择题

1. B

解的解构: 齐次通解 + 非齐次特解

$$\frac{1}{2}\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2} \cdot 2\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$$

为方程的特解, $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$ 与 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关。又 $r(\mathbf{A}) = 2$ 因此 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$ 与 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\mathbf{Ax} = 0$ 的基础解系。

2. A

(1) 由于相似矩阵的迹相同, 故

$$-2 + 1 = y + 2 - 2 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

(2) 有

$$|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

3. B

(1) $(E - A)(E + A) = E^2 - A^2 = E$, 正确;

(2) 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 则 $A^2 = A$, 但 $A \neq E$, $A \neq O$, 错误;

(3) 由于 A 可逆, 故

$$Ax = Ay \implies A^{-1}Ax = A^{-1}Ay \implies x = y$$

正确;

(4) 由于 $AB = BA$ 在一般情况下是不成立的, 故错误.

4. C

由于 $a = -(b + c)$, 故

$$a \times b = -(b + c) \times b = -c \times b = b \times c$$

5. B

由题目有: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$ 线性相关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性无关, 故 $\alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性无关 (整体线性无关则部分组线性无关)。

3

设 \overline{A} 为 A 的增广矩阵, 则

$$\overline{A} = \left[A \mid b \right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & -11 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -12 & 6 \\ 3 & -6 & 3 & 2 & -13 & t \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 9-t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 9-t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 9-t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-8 \end{array} \right]$$

要使线性方程组有解, 则 $r(A) = r(\overline{A})$, 此时 $t = 8$.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

由此得方程组由自由未知量表示的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 1 \\ x_3 = 3x_5 + 1 \\ x_4 = 2x_5 + 1 \end{cases}$$

于是得方程组的结构式通解为

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

4

由题意有 $\det(\mathbf{A}) = 4$, 故 \mathbf{A} 可逆.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}^* &= 8\mathbf{X}\mathbf{A}^{-1} + 12\mathbf{E}_4 \Rightarrow \mathbf{X}\mathbf{A}^* = 8\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{A}^{-1} + 12\mathbf{A}^{-1} \\ &\Rightarrow \det(\mathbf{A})\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}^{-1} = 8\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{A}^{-1} + 12\mathbf{A}^{-1} \\ &\Rightarrow 4\mathbf{X} = 8\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X} + 12\mathbf{E}_4 \\ &\Rightarrow (\mathbf{E}_4 - 2\mathbf{A}^{-1})\mathbf{X} = 3\mathbf{E}_4 \\ &\Rightarrow \mathbf{X} = 3(\mathbf{E}_4 - 2\mathbf{A}^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

于是解得

$$\mathbf{X} = 3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5

设 $\mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$, 故对正整数 n , 有 $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1^n & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2^n \end{pmatrix}$.

因为

$$\mathbf{I}_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -2\mathbf{I}_1$$

故 $\mathbf{I}_1^n = (-2)^{n-1}\mathbf{I}_1$.

又

$$\mathbf{I}_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{I}_2^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

由归纳法可得,

$$\mathbf{I}_2^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n \cdot (-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathbf{A}^{2014} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}^{2014} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1^{2014} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2^{2014} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2013} & -2^{2013} & 0 & 0 \\ -2^{2013} & 2^{2013} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2014 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故 $\det(\mathbf{A}^{2014}) = \det(\mathbf{I}_1^{2014}) = 0$.

6

1. 由题意有 $b\alpha_1 + c\alpha_2 + \alpha_3 = \beta$, 即

$$\begin{cases} b + c + 1 = 1 \\ 2b + 3c + a = 1 \\ b + 2c + 3 = 1 \end{cases}$$

解得 $a = 3, b = 2, c = -2$.

2. 设 $\mathbf{A} = (\alpha_2 \ \alpha_3 \ \beta)$, 则有 $r(\mathbf{A}) = 3$, 故 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关, 可作为 \mathbb{R}^3 的一个基.

考虑非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \alpha_1$, 解得 $\alpha_1 = \alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{1}{2}\beta$. 故其过渡矩阵为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7

由题意有

$$T(\alpha) = (x - y, y - z, z)^T = \mathbf{A}\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

设 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 \mathbf{B} , 则

$$T(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) \mathbf{B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

即

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

设 \mathbb{R}^3 中的一组基 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1, 0, 0)^T, \boldsymbol{\beta}_2 = (0, 1, 0)^T, \boldsymbol{\beta}_3 = (0, 0, 1)^T$. 则 T 的值域即为 $\text{span}\{T(\boldsymbol{\beta}_1), T(\boldsymbol{\beta}_2), T(\boldsymbol{\beta}_3)\}$. 且

$$\begin{pmatrix} T(\boldsymbol{\beta}_1) & T(\boldsymbol{\beta}_2) & T(\boldsymbol{\beta}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

于是 T 的秩为 3.

8

1.

$$L: \begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x + 5 = 2z \\ 7 - y = 2z \end{cases} \implies \frac{x+5}{2} = \frac{7-y}{2} = z$$

2. $\forall M \in L$, M 可以表示成如下形式

$$M(2t-5, 7-2t, t) \implies \overrightarrow{PM} = (2t-7, 7-2t, t+1)$$

由于直线的方向向量 $\mathbf{n} = (2, -2, 1)$, 故由几何关系

$$\overrightarrow{PM} \cdot \mathbf{n} = (2t-7, 7-2t, t+1) \cdot (2, -2, 1) = 0 \implies t = 3 \implies M(1, 1, 3)$$

其中 M 就是过点 P 在直线 L 上的垂足. 设对称点为 $P_1(x, y, z)$, 那么 M 是 PP_1 的中点, 故

$$\begin{cases} 2+x=2 \\ y=2 \\ 1+z=6 \end{cases} \implies \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=5 \end{cases}$$

故对称点为 $(0, 2, 5)$.

9

二次型的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

令 $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$, 解得

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 7$$

将 λ_i 代入 $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ 中求解特征向量有

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}^T \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^T \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T$$

故令 $\mathbf{P} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 那么

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^T$$

其中

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 7 \end{pmatrix}$$

因此线性变换为 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$, 标准型为

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 7y_3^2$$

规范型为

$$f = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$$

10

1. 由于

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= (\mathbf{E} - \alpha \alpha^T)(\mathbf{E} - \alpha \alpha^T) = \mathbf{E} - 2\alpha \alpha^T + \alpha \alpha^T \alpha \alpha^T \\ &= \mathbf{E} - 2\alpha \alpha^T + (\alpha^T \alpha) \alpha \alpha^T = \mathbf{E} - (2 - \alpha^T \alpha) \alpha \alpha^T \end{aligned}$$

其中 $\alpha^T \alpha$ 可以提出来是因为 $\alpha^T \alpha$ 是一个数。故

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{E} - \alpha \alpha^T = \mathbf{E} - (2 - \alpha^T \alpha) \alpha \alpha^T \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha^T \alpha = 1$$

2. 由 1 知,

$$\alpha^T \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$$

我们断言: \mathbf{A} 是降秩矩阵。若不然, 反设 \mathbf{A} 满秩, 从而可逆。那么

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} &\implies \mathbf{A}^2 \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \implies \mathbf{A} = \mathbf{E} \\ &\implies \mathbf{A} = \mathbf{E} - \alpha \alpha^T = \mathbf{E} \implies \alpha \alpha^T = 0 \end{aligned}$$

这与 $\alpha \alpha^T = 1$ 矛盾, 故 \mathbf{A} 是降秩矩阵。