2021 年期末试题解析

彭康学导团

1 选择题

1.1 D.

令 $\varphi(x)=\sqrt{x^2+1}, f(x)=\sqrt{x^2+2}, g(x)=\sqrt{x^2+3}$, 则 $\varphi(x)<f(x)<g(x)$, 且

$$\lim_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$$

但 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在.

1.2 C.

令 $f(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{\mathrm{d}t}-\ln x$, 则 $f'(x)=\frac{\sin x-1}{x}\leq 0$. 即 f 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 又

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\ln x\right]=+\infty, f(1)=0$$

故在 $(0,1)$ 上 $f(x)>0$.

1.3 A.

设 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, 则

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$$

故 $h(x)$ 在 (a,b) 上单调递减, 有 $h(b)<h(x)<h(a)$, 即

$$\frac{f(b)}{g(b)}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{f(a)}{g(a)}$$

于是 $f(x)g(a)<f(a)g(x)$.

1.4 B.

因为

$$\lim_{x\to0} g(x)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$$

又 $g(x)$ 在 $x=0$ 处无定义, 故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点.

1.5 C.

因为

$$\int_0^x xf'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x x\,\mathrm{d}f(x)=xf(x)\mid_0^x-\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中红色部分代表矩形 $OBAC$ 的面积, 蓝色部分代表曲边梯形 $OBAD$ 的面积. 故原式代表曲边三角形 ACD 的面积.

2 填空题

2.1 e^{x+1}.

因为

$$
\begin{aligned}
f(x+1) &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{n-2}\right)^{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+2}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{x+2}\cdot(x+2)\cdot\frac{n}{n-2}} \\
&= \mathrm{e}^{x+2}
\end{aligned}
$$

于是 $f(x)=\mathrm{e}^{x+1}$.

2.2 $\dfrac{5}{2}$.

因为

$$
f(x)=\begin{cases} x^2, & x>2 \\ a+\dfrac{3}{2}, & x=2 \\ ax-1, & x<2 \end{cases}
$$

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \Leftrightarrow a=\dfrac{5}{2}$.

2.3 3.

因为

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}f'(x) \\
&= f'(x)\sin x\,\big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\,\mathrm{d}\sin x \\
&= -\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x = -f(x)\cos x\,\big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\cos x \\
&= f(\pi)+f(0)-\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x + f(\pi)+f(0)-\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\
&= f(\pi)+f(0)
\end{aligned}
$$

故 $f(\pi)+f(0)=5$, $f(0)=3$.

2.4 $4x\left(\mathrm{e}^{-x^4}+6\right)$.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}f'(x+\alpha)+f'(x-\alpha)=2f'(x)=4x\left(\mathrm{e}^{-x^4}+6\right)$$

2.5 $\dfrac{1}{p+1}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^p\\&=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

3 计算题

3.1 对原式泰勒展开, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\sin x-x-x^2}{(\mathrm{e}^x-1)\sin^2 x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-x-x^2+o\left(x^3\right)}{x}\\&=\frac{x+x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}-x-x^2+o\left(x^3\right)}{x}\\&=\frac{\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{x^3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

3.2 容易发现 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且在 $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 可导, 故只需考虑分段点处的情况.

若使 f 在 $x=0$ 处可导, 则 f 在 $x=0$ 处连续, 有 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$. 又

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sin x+2a\mathrm{e}^x=2a \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}9\arctan x+2b(x-1)^3=-2b \tag{2}$$

由 (1), (2) 可得 $a=-b$.

因为 f 在 $x=0$ 处可导, 有 $f'_-(0)=f'_+(0)$, 又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x+2a\mathrm{e}^x-2a}{x}=2a+1 \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
f'_+(0) = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\to0^+}\frac{9\arctan x+2b(x-1)^3+2b}{x} \\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{9\arctan x+2b\cdot x\cdot\left[(x-1)^2-(x-1)+1\right]}{x} \\
&= \lim_{x\to0^+} 9+2b\cdot(x^2-3x+3) = 9+6b
\end{aligned}
\tag{4}
$$

即 $2a+1=9+6b$, 解得 $a=1, b=-1$.

3.3 因为 $f'(x)=1-\dfrac{2}{1+x^2}$, 解得驻点为 $x=\pm1$. 又 $f''(x)=\dfrac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}$, 拐点为 $x=0$.

故

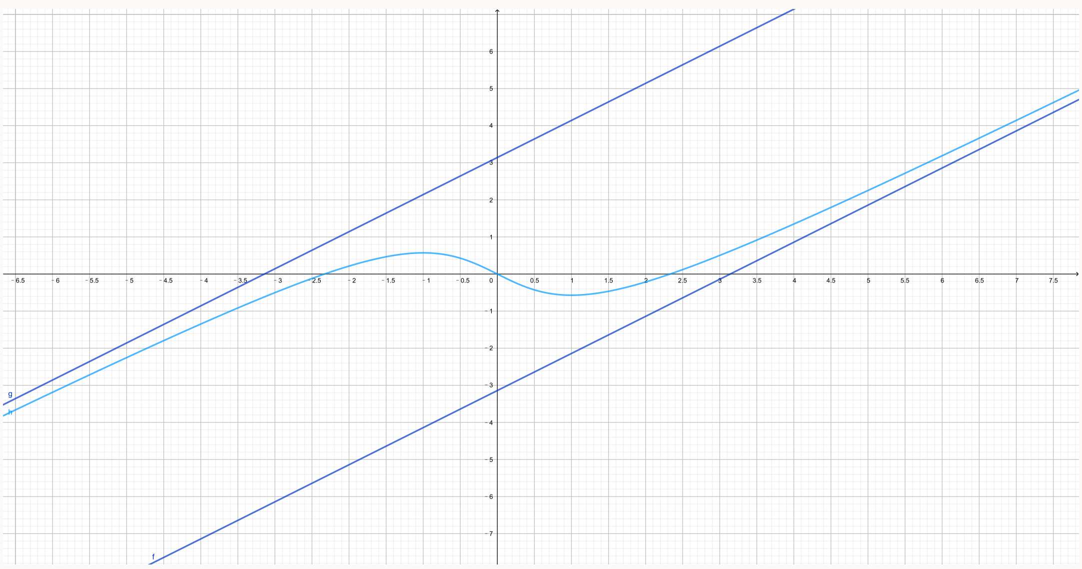
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\uparrow$下凹	极大	$\downarrow$下凹	拐点	$\downarrow$上凹	极小	$\uparrow$上凹

f 的单增区间为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, 单减区间为 $(-1,1)$.

$$
f_{\max}=f(-1)=\frac{\pi}{2}-1,\ f_{\min}=f(1)=1-\frac{\pi}{2}
$$

f 的图像在 $(-\infty,0)$ 下凹, 在 $(0,+\infty)$ 上凹, $(0,0)$ 是拐点.

渐近线: $x\to+\infty$ 方向为 $y=x-\pi$, $x\to-\infty$ 方向为 $y=x+\pi$.



3.4-1 令 $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$, 则 $\frac{1}{1+x}=1-t^2$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-t^2}\right)$. 于是

$$\begin{aligned}\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-t^2}\right)\\ &= \frac{1}{1-t^2}\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{4\pi}{3}-I_1\end{aligned}$$

其中 $I_1=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, 令 $t=\sin u$, 有

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \tan u\,\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$$

故答案为 $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$.

3.4-2

$$\begin{aligned}\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}(1+x)\\ &= (1+x)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\Big|_0^3 - \int_0^3 (1+x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{4\pi}{3}-\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} = \frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\end{aligned}$$

3.5-1 令 $x=\tan t$, 有

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\tan^3 t\sec^2 t}{\sec t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int \tan^2 t\cdot\tan t\sec t\\ &= \int (\sec^2 t-1)\,\mathrm{d}\sec t\\ &= \frac{1}{3}\sec^3 t-\sec t+C = \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C\end{aligned}$$

3.5-2

$$\begin{aligned}\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\left(1+x^2\right)\\ &= \int x^2\,\mathrm{d}\sqrt{1+x^2} = \int\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2\,\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}-\int\,\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}\\ &= \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C\end{aligned}$$

3.5-3

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\left(1+x^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\left(1+x^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\int \left(\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}\left(1+x^2\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+C\end{aligned}$$

3.6 设被积函数为 $g(x)$, 则 $g(x)$ 有奇点 $x=0, x=2$. 设

$$I=\int_{-1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{2}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} I_1+I_2+I_3$$

又 $f(0-0)=-\infty, f(0+0)=+\infty, f(2-0)=-\infty, f(2+0)=+\infty$, 故

$$I_1=\arctan f(x)\,|_{-1}^{0}=\arctan(f(0-0))-\arctan(f(-1))=-\frac{\pi}{2}-0=-\frac{\pi}{2}$$

$$I_2=\arctan f(x)\,|_{0}^{2}=\arctan(f(2-0))-\arctan(f(0+0))=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\pi$$

$$I_3=\arctan f(x)\,|_{2}^{3}=\arctan(f(3))-\arctan(f(2+0))=\arctan\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2}$$

于是 $I=\arctan\dfrac{32}{27}-2\pi$.

3.7 由题意有

$$\mathrm{d}W=\pi\left(y-\frac{y}{4}\right)\mathrm{g}(H-y)\,\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\pi\mathrm{g}(Hy-y^2)\,\mathrm{d}y$$

故

$$W=\frac{3}{4}\pi\mathrm{g}\int_{0}^{H}(Hy-y^2)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{8}\pi\mathrm{g}H^3$$

4

令 $t=\ln(2x-1)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{2x-1}.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{2x-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{4}{(2x-1)^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{4}{(2x-1)^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

代入原式, 化简得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y=\frac{\mathrm{e}^t}{2}-\frac{1}{4}$$

因此

$$\lambda^2+\lambda-2=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1=-2,\lambda_2=1.$$

齐次通解:

$$\tilde{y}=c_1\mathrm{e}^{-2t}+c_2$$

$$\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y=\frac{\mathrm{e}^t}{2},$$

设特解为 $y_1^*=At\mathrm{e}^t$, 解得

$$y_1^*=\frac{t}{6}\mathrm{e}^t\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y=-\frac{1}{4},$$

易见特解为

$$y_2^*=\frac{1}{8}$$

通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^{-2t}+c_2\mathrm{e}^t+\frac{t}{6}\mathrm{e}^t+\frac{1}{8}=\frac{c_1}{(2x-1)^2}+c_2(2x-1)+\frac{2x-1}{6}\ln(2x-1)+\frac{1}{8}$$

5

解法一: $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(3-\lambda) \qquad \therefore \lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=3$

对 $\lambda_1=\lambda_2=2, (A-2I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 解 $(A-2I)^2x=0$, 得:

$$\vec{r}_0^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_0^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1^{(1)}=(A-2I)\vec{r}_0^{(1)}=0, \quad \vec{r}_1^{(2)}=(A-2I)\vec{r}_0^{(2)}=(-1,0,0)^T$$

$$\vec{x}_1(t)=\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_2(t)=\mathrm{e}^{2t}\left(\vec{r}_0^{(2)}+t\vec{r}_1^{(2)}\right)=\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} -t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对 $\lambda_3=3$, 解得特征向量为: $\vec{r}_3=(0,0,1)^T$. $\quad \vec{x}_3(t)=\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

齐次方程的基解矩阵为 $X_1(t)=(\vec{x}_1(t),-\vec{x}_2(t),\vec{x}_3(t))=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & -\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
X(t)=X_1(t)X_1^{-1}(0)&=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & -\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & -\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
X(t-\tau)\vec{f}(\tau)=X(t-\tau)\begin{pmatrix}\tau\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2(t-\tau)} & (t-\tau)\mathrm{e}^{2(t-\tau)} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{2(t-\tau)} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{3(t-\tau)}-\mathrm{e}^{2(t-\tau)} & \mathrm{e}^{3(t-\tau)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\mathrm{e}^{2(t-\tau)}\\ \mathrm{e}^{2(t-\tau)}\\ \mathrm{e}^{3(t-\tau)}-\mathrm{e}^{2(t-\tau)}\end{pmatrix}
$$

$$
\int_0^t X(t-\tau)\vec{f}(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{pmatrix}\frac{t}{2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{t}{2}\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}+\frac{1}{6}\end{pmatrix}
$$

方程组通解为

$$
\begin{aligned}
\vec{x}=X(t)\vec{C}+\int_0^t X(t-\tau)\vec{f}(\tau)\mathrm{d}\tau&=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{t}{2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{t}{2}\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}+\frac{1}{6}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}C_1\mathrm{e}^{2t}+\left(C_2+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{e}^{2t}-\frac{t}{2}\\ \left(C_2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{2}\\ \left(C_2+C_3+\frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{3t}-\left(C_2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{6}\end{pmatrix}\quad \text{其中}\vec{C}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}\text{任意.}
\end{aligned}
$$

解法二:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1=2x_1+x_2 \quad +t & \cdots(1)\\
\dot{x}_2=\quad 2x_2 \quad +1 & \cdots(2)\\
\dot{x}_3=\quad x_2+3x_3 & \cdots(3)
\end{cases}
$$

其中 (2) 式的解为

$$x_2 = \mathrm{e}^{\int 2\mathrm{dt}}\left[\int \mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{dt}}\mathrm{d}t + C_2\right]$$

代入 (1), 得:

$$\dot{x}_1 - 2x_1 = C_2\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2} + t, x_1 = \mathrm{e}^{2t}\left[\int \left(C_2\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2} + t\right)\mathrm{e}^{-2t}\ \mathrm{d}t + C_1\right] = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2t\mathrm{e}^{2t} - \frac{t}{2}$$

代入 (3), 得:

$$\dot{x}_3 - 3x_3 = C_2\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2}, x_3 = \mathrm{e}^{3t}\left[\int \left(C_2\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-3t}\ \mathrm{d}t + C_3\right] = -C_2\mathrm{e}^{2t} + C_3\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{6}$$

故方程组通解为

$$\vec{x} = C_1\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}t\\1\\-1\end{pmatrix} + C_3\mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-t/2\\-1/2\\1/6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & 0\\0 & \mathrm{e}^{2t} & 0\\0 & -\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-t/2\\-1/2\\1/6\end{pmatrix}$$

6

(1) 构造函数 $F(x) = e^{\sin(x)}\mathscr{F}(x)$

$$F^{'}(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}\mathscr{F}(x) + e^{\sin(x)}\mathscr{F}^{'}(x) = (\cos(x)\mathscr{F}(x) + \mathscr{F}^{'}(x))e^{\sin(x)}$$

$\mathscr{F}(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 可导, $e^{\sin(x)}$ 在 $(0, 2\pi)$ 可导, 故 $F(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 可导, $\mathscr{F}(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 连续，$F(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 连续

(2) $F(0) = 1$，$F(\pi) = 3$，$F(2\pi) = 2$，又由于 $F(x)$ 连续，因此必有 a, b 满足 $0 < a < \pi < b < 2\pi$ 使得

$$F(a) = F(b)$$

且 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，故由罗尔定理知，$\exists\, \xi \in (a, b)$ 使得

$$F^{'}(\xi) = 0$$

即

$$e^{\sin(\xi)}(\mathscr{F}^{'}(\xi) + \mathscr{F}(\xi)\cos(\xi)) = 0$$

而 $e^{\sin(\xi)} \neq 0$ 故在 $(0, 2\pi)$ 上至少有一点 ξ,$\mathscr{F}^{'}(\xi) + \mathscr{F}(\xi)\cos(\xi) = 0$

7

(1) 由题干条件 $f(-x)+f(x)=A$, 考虑代换 $t=-x$, 有

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx &\overset{t=-x}{=} -\int_{a}^{-a} f(-t)g(-t)dt\\ &= \int_{-a}^{a} f(-t)g(t)dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{则} \int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx &= \frac{1}{2}\left[\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx+\int_{-a}^{a} f(-x)g(x)dx\right]\\ &= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]g(x)dx\\ &= \frac{A}{2}\int_{-a}^{a} g(x)dx \overset{(\text{偶})}{=} A\int_{0}^{a} g(x)dx.\end{aligned}$$

(2) 考虑到反正切函数特殊性，记 $h(x)=\arctan(e^x)$ 猜想 $h(x)+h(-x)=C$. 下面进行证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h(x)+h(-x)]=\frac{e^x}{1+e^{2x}}+\frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}=0$$

即

$$h(x)+h(-x)=C=2h(0)=\frac{\pi}{2}$$

由 (1) 中结论有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\cdot\arctan(e^x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx=\frac{\pi}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi^2}{32}$$

注: 华里士公式 (Wallis) 公式（书 $P_{2.11}$例3.21）

$$I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\end{cases}$$