2021 年高等数学 I（上）期末试题

一、选择题（共 5 题，每题 3 分）

1. 若 $\forall\, x \in \mathbb{R}$，总有 $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$，则以下关于 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 的论述正确的是 (　　)

   A. 存在且为 0　　B. 存在但不一定为 0　　C. 一定不存在　　D. 不一定存在

2. 使不等式 $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t > \ln x$ 成立的 x 的范围是 (　　)

   A. $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$　　C. $(0,1)$　　D. $(\pi, +\infty)$

3. 设 $f(x)$，$g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有(　　)

   A. $f(x)g(b) > f(b)g(x)$　　B. $f(x)g(a) > f(a)g(x)$

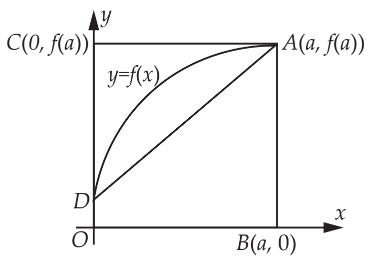
   C. $f(x)g(x) > f(b)g(b)$　　D. $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

4. 设函数 $f(x) \in C[-1,1]$，则 $x=0$ 是函数 $g(x) = \dfrac{\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x}{x}$ 的 (　　)

   A. 第一类跳跃间断点　　B. 第一类可去间断点

   C. 第二类无穷间断点　　D. 连续点

5. 如下图所示，曲线段的方程为 $y = f(x)$，且函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数，则定积分 $\displaystyle\int_0^a x f'(x)\,\mathrm{d}x$ 表示的是 (　　)



   A. 曲边梯形 $ABOD$ 的面积　　B. 梯形 $ABOD$ 的面积

   C. 曲边三角形 ACD 的面积　　D. 三角形 ACD 的面积

二、填空题（共 5 题，每题 3 分）

1. 设 $f(x+1) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-2}\right)^x$，则 $f(x) =$__________.

2. 设 $f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{x^2 e^{t(x-2)} + ax - 1}{e^{t(x-2)}+1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，则常数 $a =$__________.

3. $\displaystyle\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\sin x\,\mathrm{d}x = 5$，$f(\pi)=2$，则 $f(0) =$__________.

4. 设 $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2}(e^{-t^2}+6)\,\mathrm{d}t$，则 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha} =$__________.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=$__________. 其中常数 $p>0$.

三、计算题（共 7 题，每题 6 分）

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x-x^2}{(e^x-1)\sin^2 x}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x+2ae^x, & x<0\\ 9\arctan x+2b(x-1)^3, & x\geq 0\end{cases}$，试确定常数 a,b 的值，使得函数 $f(x)$ 在其定义域上可导.

3. 求函数 $f(x)=x-2\arctan x$ 的单调区间、极值和其对应曲线的凹凸区间以及渐近线，并画出此函数的简单示意图.

4. 计算定积分 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

5. 计算不定积分 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$，计算 $I=\displaystyle\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

7. 假设由抛物线 $y=x^2$, $y=4x^2$ 以及直线 $y=H\ (H>0)$ 围成的平面图形绕 y 轴旋转一周形成的旋转抛物面型容器内盛满水，若将水全部抽出，需要作多少功?

四、（8 分） 求微分方程 $(2x-1)^2y''+4(2x-1)y'-8y=4x-3$ 的通解.

五、（8 分） 求微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&1&3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$ 的通解.

六、（6 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，在 $(0,2\pi)$ 内可导，且 $f(0)=1$，$f(\pi)=3$，$f(2\pi)=2$. 试证明在

$(0,2\pi)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)+f(\xi)\cos\xi=0$.

七、（6 分） 设函数 $f(x),g(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续函数，$g(x)$ 是偶函数，$f(-x)+f(x)=A$（A 是常数）.

(1) 证明：$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = A\int_{0}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) 计算定积分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \arctan e^x\,\mathrm{d}x$.