

Libro di Itaca

Alcune regole generali

Capitoli tutti della stessa lunghezza: 30-40 pagine. (Non superare le 40).

Si provi a non sfiancare il lettore nei capitoli iniziali.

L'idea è che i primi 5-6 capitoli sono l'inevitabile, devono capirlo tutti, deve essere in ogni corso onesto sulle categorie. I restanti capitoli sono approfondimenti.

Lo scopo del libro è dare i riferimenti basilari per cominciare una esplorazione generale della teoria delle categorie in tutte le direzioni.

Per ogni chapter, esattamente 5 BEGLI esercizi devono essere BEN risolti.

Contenuto dei capitoli

0. Intro alla lettura.

@Fosco.

- La teoria delle categorie è...

Quattro preludi categoriali:

- abelianizzazione, o naturalità
- teoremi di isomorfismo: prop universali
- completamenti: aggiunzioni
- il teorema di Brouwer: funtorialità

Commenti sparsi: Per il momento questo capitolo non viene scritto e se sarà scritto, ciò avverrà quando tutto sarà pronto. Si noti che questa non è l'introduzione del libro.

1. Categorie, funtori, trasf naturali.

@Paolo a 4 mani con Enrico.

- Dire qualcosina sulle fondazioni e rimandare all'appendice, che sarà comunque stringatissima.

- Categorie piccole e localmente piccole,
- Funtori, sottocategorie, trasformazioni naturali equivalenze di categorie.
- Costruzioni di categorie: prodotti, opposte, slices, skeletri.
- Isomorfismi. full, faithful, conservativi, sezioni retrazioni.
- Pieno Fedele e suriettivo sugli oggetti significa equivalenza di categorie.
- Mono, epi. Tanti esempi (a gusto dell'autore).

Commenti sparsi: Inserire i grafi come categoria di prefasci. Parlare di G-insiemi. I poset (e i monoidi!) sono categorie. Esempio fico: i grafi colorati visti come categorie slice sui grafi. Negli esercizi, fare qualcosa su sezioni e retrazioni.

2. Limiti and Colimiti.

@Beppe.

- Limiti e colimiti.
- La nozione di proprietà universale.
- Una categoria è completa se ha prodotti ed equalizzatori.
- Una categoria è completa se ha terminale e wide pullbacks.
- Esempi (ad esempio i prodotti in un poset, l'assenza di prodotti in Fld, oggetto dei numeri naturali di Fosco).
- Funtori che preservano/riflettono/creano i limiti. Una categoria supermegacompleta è un poset (v. Freyd).

3. Adjunctions.

@Gabriele

- Funtori aggiunti.
- Formulazione con (epsilon/eta) e formulazione con gli homset.
- Equivalenza delle definizioni.
- Mooolti esempi.
- Definizione di sottocategoria riflessiva e un poco di esempi.
- AFT (con dimostrazione: [fouche says: la dimostrazione sul libro di categorie di Grandis sta in una paginetta ed è bellissima, copiamola].

- Tutte le equivalenze sono rettificabili ad equivalenze aggiunte.
- Esercizio: Mettere la definizione di aggiunzione con le comma categories.

Commenti sparsi: Menzionare che equational reasoning and diagram chasing saranno fra le principali tecniche dimostrative.

4. Presheaves, representability, Yoneda embedding.

@Fosco.

- Introduzione
- Intuizione su Yoneda, I: estensionalità
- Definizione: prefascio, prefascio rappresentabile
- Intuizione su Yoneda, II: lanciamo cose
- Definizione: rappresentabilità
- Esempio: id di Set
- Esempi: U, V da Cat a Set
- Esercizio: V_n e categoria dei semplici
- Esempio: O da Top^{op} a Set
- Esercizio: Sierpinski è oggetto rappresentante
- Esempio: Disconn da Top^{op} a Set
- Teorema: connessione come proprietà geometrica v categoriale
- Esempio: U da Ring a Set
- Esempio: U da cat di strutture algebriche a Set
- Esempio: Sub da cat con pullback a Set
- Esempio: GL_2 da Ring a Grp
- Funtori non rappresentabili
- Teorema: condizione necessaria per rappresentabilità

[alla lezione 11 mancano i timestamp]

- Introduzione e recap
- Funtori rappresentabili e limiti

- Definizione: diagramma che ammette limite
- Proposizione: ammettere limite v avere un limite
- Esercizio: dualizzare tutto
- Idea: definire \lim e colim tramite rappresentabili
- Idea: prefasci come completamento formale
- Esempio: Yoneda per un poset
- Esempio: Yoneda v teorema di Cayley
- Esercizio: prefasci come azioni
- Esercizio: Yoneda per monoidi
- Esempio: la categoria dei grafi

5. Yoneda, aggiunti e limiti

- Representables preserve limits.
- RAPL.
- Descriptions of limits in terms of adjoints.
- (Co)limits in functor categories.

6. Monadi.

@ Paolo.

- Monadi e loro algebre.
- monadi da aggiunzioni, aggiunzioni da monadi
- Kleisli, Eilenberg-Moore e loro prop univ
- Beckity-Beck (dimostrazione crismatica)
- (Co)completezza della categoria delle algebre à la Riehl.
- Monadi idempotenti sottocategorie riflessive.
- Comonadi ed esempi. (Perché ne esistono meno (di esempi)?)
- Esempi di qua e di là.

7. Sistemi di Fattorizzazione.

@Fosco.

- la relazione di ortogonalità
- definizioni equivalenti di ortogonalità
- (Remark al volo su La santissima trinità: monadi idempotenti, FS riflessivi, subcat riflessive. Introdotto da brevi chiacchiere su iniettività e proiettività?)
- Squaring monad e fac sys come algebre
- Reg epi, extremal e strong epi.

8. Categorie monoidali chiuse, internalizzazioni ed arricchimenti.

@Enrico.

- Categorie monoidali simmetriche e chiuse. (Menzionare problemi di coerenza senza spendere troppe parole e dare per esercizio alcune parti del teorema di coerenza)
- Categorie arricchite. (Spazi metrici come categoria arricchita: *Metric spaces, generalized logic and closed categories*).
- Strutture interne, internalizzazione e categorie interne. (Menzionare che Yoneda manda monoidi per il prodotto in monoidi per il prodotto)
- A monad is a monoid in the category of endofunctors, monoidi in Ab are rings.
- Molti esempi.

9. Costruzioni di Grothendieck, Nerves and Realizations.

@Ivan.

- Grothendieck construction: corrispondenza fra prefasce e categorie degli elementi;
- densità dei rappresentabili;
- cocompletamento libero per colimiti.
- nervi e realizzazioni geometriche;

AA. Appendice.

Fondazioni e questioni di taglia. Na cosa breve. Potremmo pure decidere all'ultimo di non metterla.