

Sistemas de Controle I

Controle Proporcional Derivativo (PD) para posição

Nomes e RA:

1 Introdução

1.1 Modelo Do Servo Motor

A função de transferência do Servomotor, considerando a sua posição em relação à tensão aplicada é expressa por:

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_m(s)} = \frac{K}{s(\tau s + 1)} \quad (1)$$

Onde K é o ganho do sistema obtido nos ensaios anteriores e τ é a constante de tempo do sistema de primeira ordem que relaciona a velocidade e tensão aplicada, também verificado nos ensaios das atividades anteriores. Θ_m é a posição do disco no eixo do motor e V_m é a tensão aplicada ao motor.

1.2 Controle PID

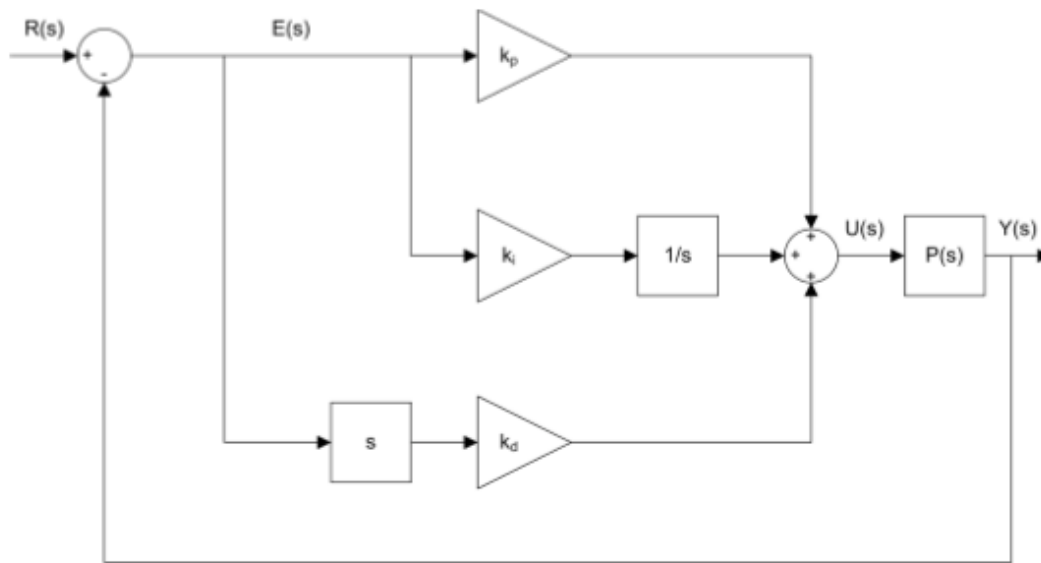
Um dos controladores mais utilizados é o controle PID (controlador proporcional, integral e derivativo). Sua equação pode ser expressa por:

$$u(t) = k_p(t)e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2)$$

O diagrama de blocos correspondente e a sua função de transferência são:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (3)$$

Figura 1 – Diagrama de blocos do controlador PID



1.2.1 As funções do controlador PID podem ser resumidas como:

- a) o termo proporcional se baseia no erro presente;
- b) termo integral se baseia no erro passado;
- c) o termo derivativo se baseia na predição do erro futuro.

1.2.2 A alteração dos ganhos poderá provocar alguns efeitos na resposta do sistema:

a) Proporcional: Aumentá-lo diminui o tempo de subida. Pode tornar o sistema instável se for muito alto.

b) Integral: Contribui para a diminuição do erro estacionário. Pode gerar efeitos de *wind-up*, onde o sistema demora para se recuperar e voltar a atuar sob um novo set-point.

c) Derivativo: Diminui o overshoot. Amortece variações bruscas no sistema. Se muito alto pode provocar oscilações.

Contudo, na prática também podem ocorrer pequenas modificações na equação do controlador. Para o controle de posição é comum utilizarmos um controlador do tipo PD que tende a diminuir o *overshoot* do sistema.

Ao observar os efeitos da componente derivativa sobre o erro do sistema, percebe-se que, no instante inicial em que o *Set Point* é modificado, há um derivada que tende a infinito. Isso pode gerar picos no sistema, o que não é desejado.

Para contornar este problema, controladores industriais, utilizam a derivada de PV (Variável de Processo) ao invés da derivada do erro, visto que ela possui o mesmo formato mas de forma invertida. Ao aplicarmos a derivada de PV negativo obteremos os mesmos valores da derivada do erro mas sem o pico inicial. As figuras 2 e 3 a seguir mostram os formatos do erro e da variável de processo e os efeitos da componente derivativa aplicada ao Erro e à Variável de Processo.

Figura 2 – Análise da Variável de Processo e do Erro ao longo do tempo

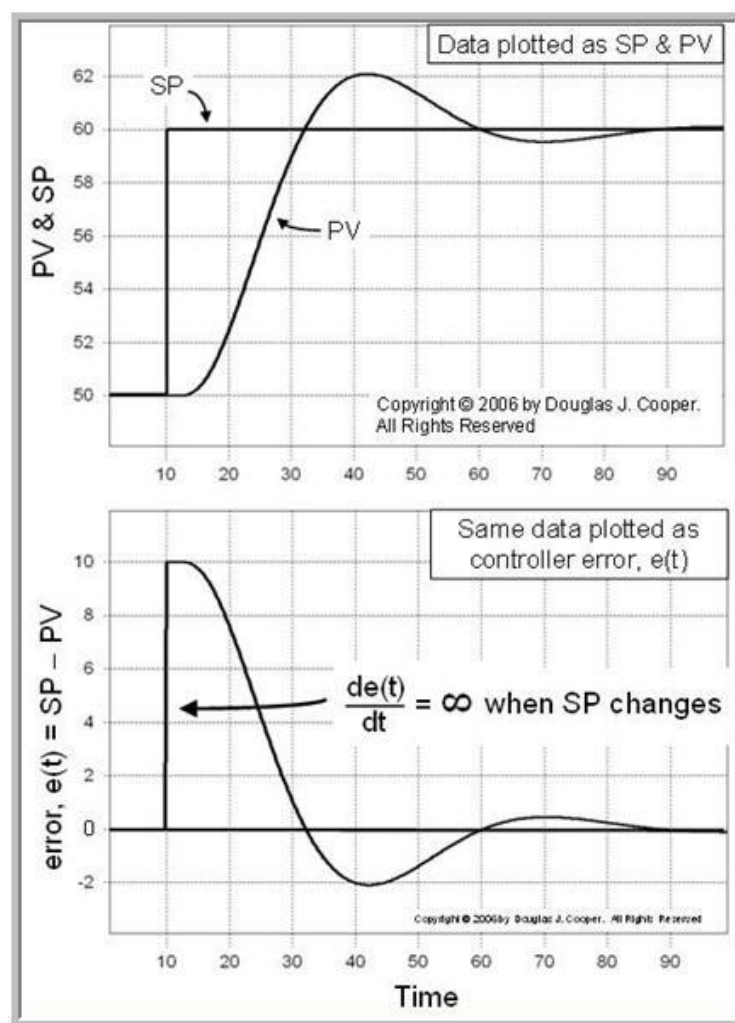
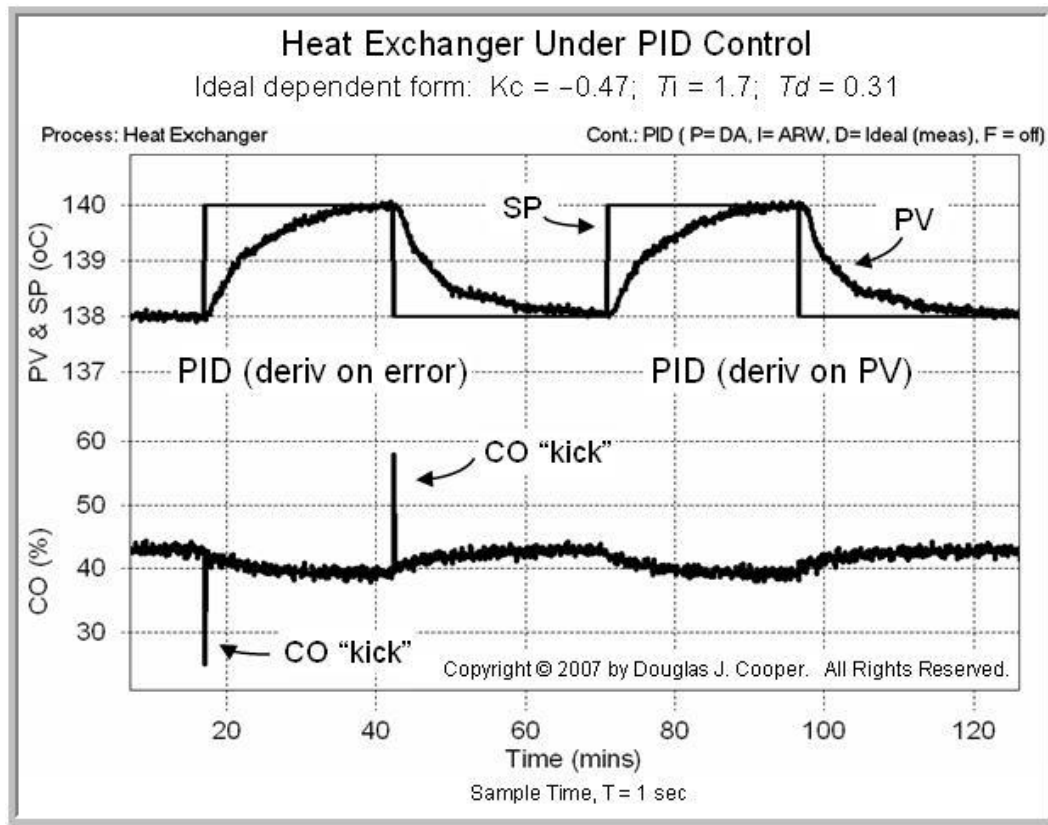


Figura 3 – Comparação da aplicação da ação derivativa no erro e na variável de processo



Um controlador PID, desta forma seria:

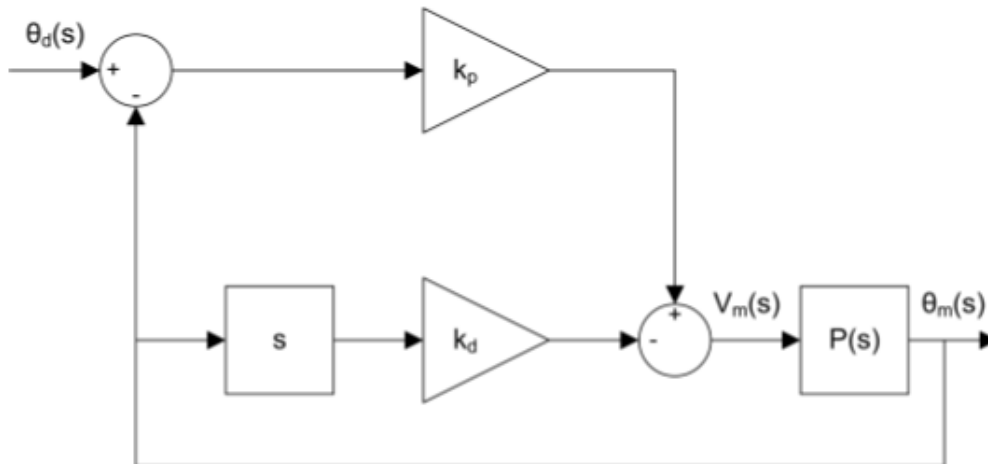
$$u(t) = k_p(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau - k_d \frac{dPV(t)}{dt} \quad (4)$$

Utilizando apenas as partes proporcional e derivativa tem-se:

$$u(t) = k_p(t) - k_d \frac{dPV(t)}{dt} \quad (5)$$

Seu diagrama de blocos pode ser representado por:

Figura 4 – Diagrama do controle Proporcional Derivativo (PD)



2 Controle de Posição

Montagem do kit: Ligue os cabos de energia do **kit Qube-Servo 2**. Faça a conexão USB com o computador. Conecte o disco na parte superior. Abra o código **Controle_PD_exercício.vi**. Execute o código e verifique os valores de k_p e k_d .

Figura 5 – Painel Frontal do programa

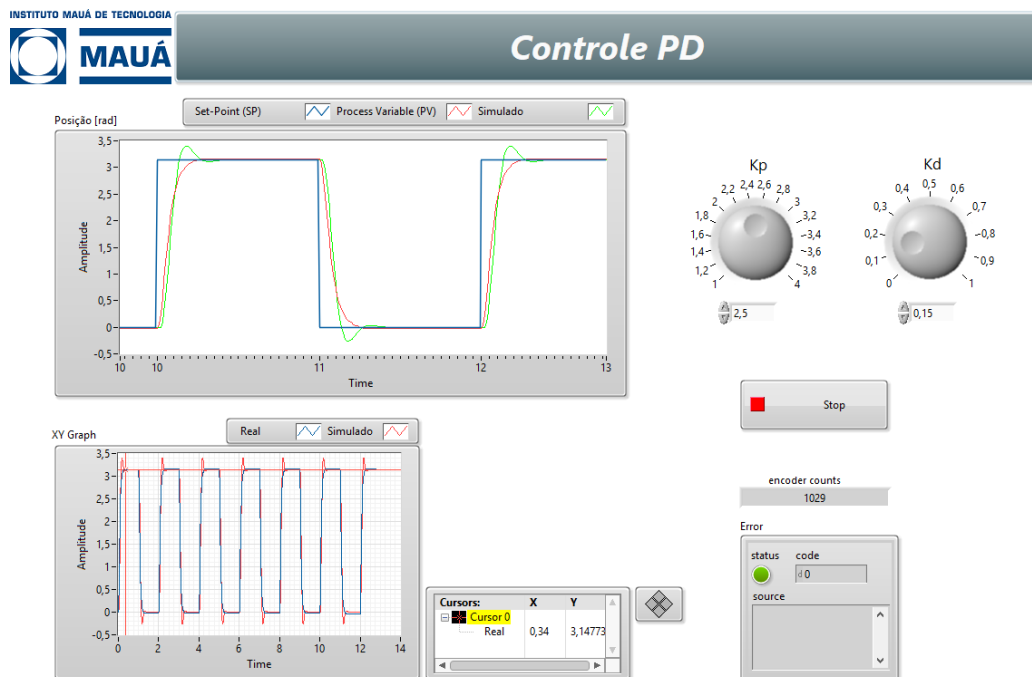
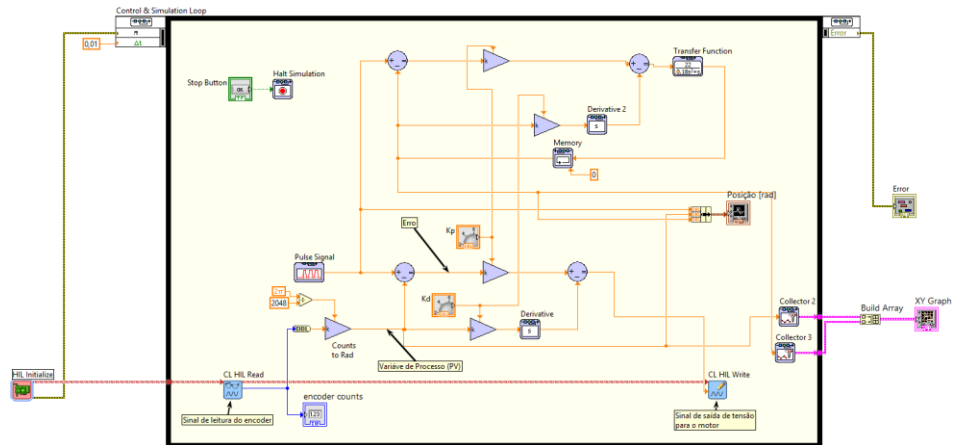


Figura 6 – Diagrama de blocos do código em LabVIEW™



Mantenha $k_p = 2,5$ e $k_d = 0$. Varie k_p de 1 a 4.
O que ocorre com a resposta do sistema ao fazer esta variação?

Mantenha $k_p = 2,5$. Varie k_d de 0 a 1 e verifique o comportamento da resposta.
Como a componente derivativa influenciou a resposta do sistema?

3 Equacionando o sistema

A saída do controlador possui a seguinte estrutura:

$$u(t) = k_p(r(t) - y(t)) - k_d\dot{y}(t), \quad (6)$$

Onde k_p é o ganho proporcional, k_d é o ganho derivativo, $r = \theta_d(t)$ é o set-point do ângulo do motor, $y = \theta_m(t)$ é o ângulo do eixo medido e $u(t) = v_m(t)$ é a saída do controlador (tensão aplicada).

Assumindo todas as condições iniciais nulas, a transformada de Laplace da equação 6 é:

$$U(s) = k_p(R(s) - Y(s)) - k_d sY(s), \quad (7)$$

Considerando que $U(s)$ (saída do controlador) é igual a $V_m(s)$, que $Y(s)$ é igual a $\Theta_m(s)$ e substituindo na equação 1 tem-se:

$$\frac{Y(s)}{k_p(R(s) - Y(s)) - k_d s Y(s)} = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

$$Y(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)} k_p(R(s) - Y(s)) - k_d s Y(s) \quad (8)$$

Resolvendo $Y(s)/R(s)$, tem-se:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K k_p}{\tau s^2 + (1 + K k_d)s + K k_p} \quad (9)$$

Relembrando a função de transferência canônica para sistemas de segunda ordem,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (10)$$

Onde ω_n é a frequência natural e ζ (zeta) é o fator de amortecimento. As propriedades da resposta do sistema dependem de ω_n e ζ . Podemos dividir numerador e denominador da equação 9 por τ , obtendo

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K k_p}{\tau}}{s^2 + \frac{(1 + K k_d)}{\tau} s + \frac{K k_p}{\tau}} \quad (11)$$

4 Equações para k_p e k_d

A partir das equações 10 e 11 determine as equações de k_p e k_d em função de ω_n e ζ .

5 Especificações para o projeto

Para que a resposta do tempo de pico seja de 0,15 segundos e a porcentagem de *overshoot* seja de 2,5%, a frequência natural e o fator de amortecimento devem ser, respectivamente $\omega_n = 32,3 \text{ rad/s}$ e $\zeta = 0,76$. Utilizando os parâmetros K e τ ,

identificados anteriormente, calcule os ganhos que satisfaçam estes requisitos. Anote os resultados obtidos.

Coloque os valores obtidos no código e verifique o comportamento da resposta. Analise a resposta esperada em função da resposta obtida no sistema. É possível salvar a imagem do gráfico clicando com o botão direito do mouse sobre o gráfico, vá até *Export > Export Simplified Image*, escolha *Bitmap* e o local onde deseja salvar a imagem. Anexe a imagem dos gráficos de resposta obtidos ao relatório.

6 Conclusões