ECA414 – Sistemas de Controle I

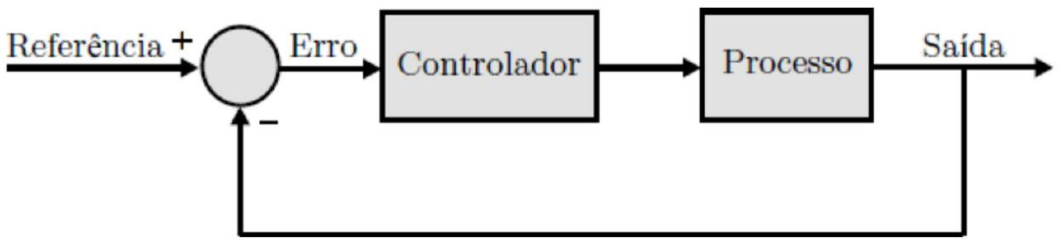
Experiência 09 – Compensador de Avanço utilizando Lugar das Raízes

Nomes e RA:

1 Introdução

Projetar um controlador ou um compensador significa modificar a resposta de um sistema de modo que sua saída atenda a determinadas especificações. Os controladores são formados por funções de transferência que adicionam polos e zeros ao sistema. Um esquema de controle típico de um processo em malha fechada com realimentação de saída é apresentado na Figura 1 a seguir.

Figura 1 – Diagrama de blocos do sistema com o compensador



De modo geral, os sistemas de controle possuem três especificações importantes:

a) estabilidade;

b) erro estacionário “pequeno” ou nulo;

c) desempenho, que consiste em sobressinal “baixo” e tempo de resposta transitória “pequeno”.

1.1 Compensação por avanço de fase

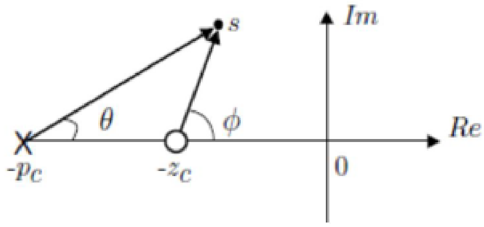
O bloco típico de um compensador por avanço de fase (*phase lead*) tem a função de transferência

$$G_c(s) = k_c\left(\frac{s+z_c}{s+p_c}\right), \qquad z_c < p_c.$$

(1)

O diagrama de polos e zeros de um compensador por avanço de fase é apresentado na Figura 2. O zero do compensador z_c deve estar localizado mais próximo do eixo imaginário, quando comparado ao polo p_c. A designação avanço de fase reside no fato de que para qualquer ponto s com $Re < 0\ e\ Im > 0$ o compensador $G_c(s)$ adiciona fase na malha aberta, pois $\angle G_c(s) = \phi - \theta > 0$.

Figura 2 – Diagrama de polos e zeros de um compensador de avanço de fase



Portanto a metodologia de projeto consiste em determinar as posições dos polos de malha fechada dominantes que satisfazem às especificações de desempenho desejadas, como sobressinal e tempo de resposta transitória (tempo de subida, pico, acomodação etc.). O zero e o polo do compensador $G_c(s)$ devem ser alocados de tal forma que o lugar das raízes passe pelos polos de malha fechada dominantes. Uma vez fixada a posição do zero do compensador, a posição do polo pode ser determinada por meio da condição de fase. Depois disso o ganho pode ser obtido por meio da condição de módulo.

2 Experimento

Pretende-se projetar uma função de transferência para atuar na planta do sistema *Quanser Cube*. Faremos o estudo e implementação de um controlador de um sistema conforme o diagrama da Figura 1 considerando a função de transferência do sistema em malha aberta

$$G_{ma}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{V_m(s)} = \frac{K}{s(\tau s + 1)} \qquad (2)$$

que representa a posição (ângulo) do disco em relação a tensão aplicada ao motor, conforme visto em experiências anteriores.

A função de transferência em malha fechada do sistema (considerando $G_c(s)$ = 1) é dada por

$$\frac{\Theta_m(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2} \qquad (3)$$

que neste caso resulta em

$$\frac{\Theta_m(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{\frac{K}{\tau}}{s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{K}{\tau}} \tag{4}$$

Utilizando valores de K igual a 22,5 e τ igual a 0,18 (obtidos na caracterização do sistema), obtemos um sistema com ω_n= 11,18 rad/s de frequência natural não amortecia e $\zeta \cong$ 0,12 como fator de amortecimento.

Deseja-se projetar um compensador $G_c(s)$ de modo que o coeficiente de amortecimento dos polos em malha fechada dominantes seja $\zeta \cong 0{,}78$ ($M_p \cong 2\%$) e o tempo de acomodação seja reduzido para $t_s \cong 0{,}5s$, ou seja

$$t_s \cong \frac{4}{\zeta\omega_n} = 0{,}5s \quad \rightarrow \quad \omega_n = 10{,}26\, rad/s \tag{5}$$

Para que estas especificações sejam aceitas, os polos de malha fechada dominantes devem estar localizados em

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}j \tag{6}$$

2.1 Cálculos para determinação do Compensador

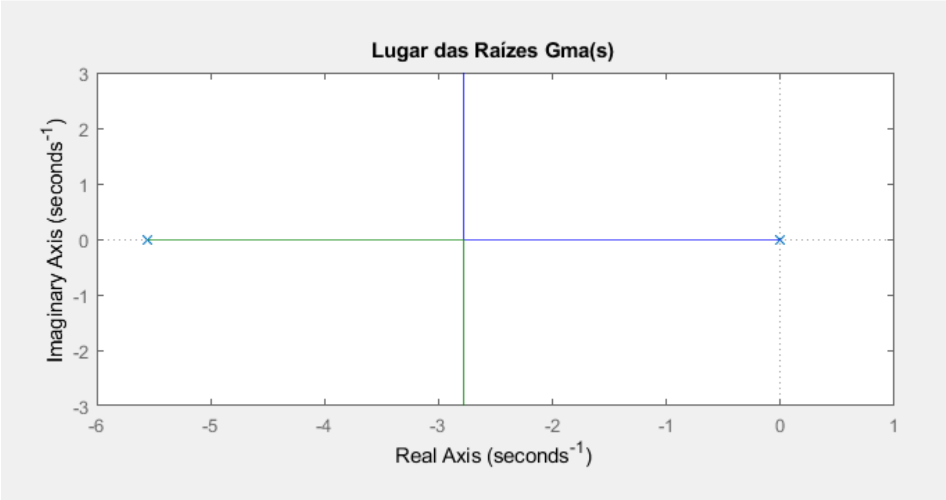
A partir das considerações abordadas vamos adotar os seguintes passos para implementação do compensador:

a) encontrar os polos desejados a partir da equação 6.

Polos =

O Lugar das Raízes a partir da função de transferência $G_{ma}(s)$ possui o seguinte gráfico da Figura 3

Figura 3 - Gráfico do Lugar das Raízes de $G_{ma}(s)$



É possível observar que, independente do ganho adotado não será possível atender aos requisitos do polo desejado sem adicionar um controlador.

b) adotar o zero do compensador na mesma posição da parte real do polo desejado.

$z_c =$

c) encontrar o ângulo do polo do compensador a partir da condição de fase

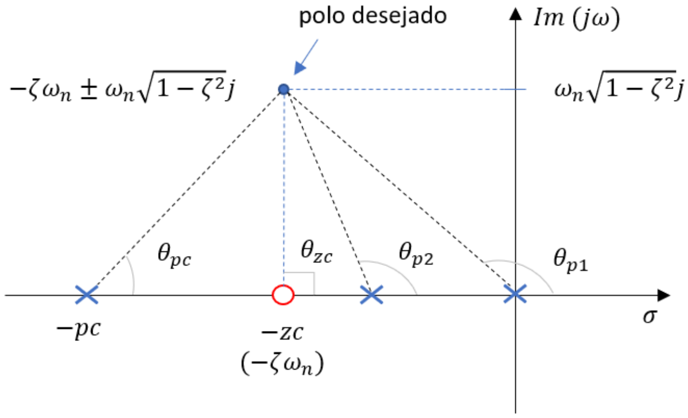
$$\sum \hat{a}ngulos\ dos\ polos - \sum \hat{a}ngulos\ dos\ zeros = 180^o \tag{7}$$

Ou ainda, para este caso

$$\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{pc} - \theta_{zc} = 180^o \tag{8}$$

Onde $\theta_{p1}\ e\ \theta_{p2}$ são os ângulos dos polos do sistema em malha aberta e θ_{pc} e θ_{zc} são os ângulos do polo e do zero do compensador, respectivamente. A Figura 4 mostra o esboço das posições dos polos e zeros e seus ângulos.

Figura 4 – Diagrama de polos e zeros do sistema



Calcular θ_{pc}.

$\theta_{pc} =$

d) encontrar o polo do compensador p_c a partir do ângulo θ_{pc} desejado. Para isso é possível utilizar:

$$\frac{parte\ imaginária(polo\ desejado)}{p_c - z_c} = \tan(\theta_{pc}) \tag{9}$$

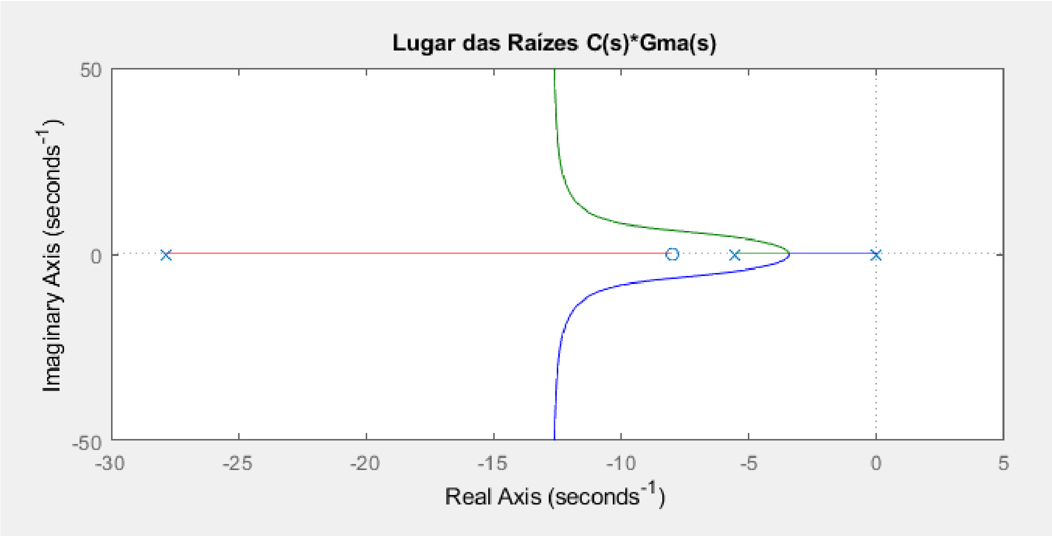
$p_c =$

Após encontrar z_c e p_c do compensador, consideramos a função do compensador sem o ganho k_c

$$C(s) = \frac{(s + \ z_c)}{(s + p_c)} \tag{10}$$

Com uma ferramenta de software é possível obter o gráfico do Lugar das Raízes de $C(s) *$ $G_{ma}(s)$ que deve ficar próximo à Figura 5 a seguir.

Figura 5 – Lugar das Raízes de $C(s) * G_{ma}$



e) Encontrar o valor de k_c a partir da condição de módulo

$$\left|\frac{k_c(s+z_c)}{(s+p_c)}\frac{k}{s(\tau s+1)}\right| = 1 \quad \rightarrow \quad k_c = \frac{|s+p_c||s||\tau s+1|}{k|s+z_c|} \qquad (11)$$

Onde s deverá ser substituído pelo polo desejado.

$k_c =$

f) anote a função resultante do compensador.

$G_c(s) =$

2.2 Utilizando o MATLAB/Octave para realização dos cálculos

Crie o script a seguir em MATLAB ou Octave, que implementa os cálculos apresentados no item 2.1. Analise os comandos utilizados. Execute o código e verifique se estão de acordo com os valores calculados anteriormente.

```
%pkg load control %comando necessário no Octave
clear all
clc
k = 22.5;
tau = 0.18;
G = tf([k], [tau 1]);
I = tf(1, [1 0]);
Gma = G*I;
figure(1)
subplot(2,1,1)
rlocus(Gma)
title('Lugar das Raízes Gma(s)')
Gmf = feedback(Gma,1);
```

```
PO = 2; %porcentagem de overshoot
zeta = sqrt(log(PO/100)^2/(pi^2+log(PO/100)^2));
ts = 0.5; %tempo de acomodação em segundos
Wn = 4/(ts*zeta);
%polo desejado que atende aos requisitos
polo_d = -zeta*Wn + Wn*sqrt(1-zeta^2)*i; %apenas o complexo positivo

%pzmap(Gma)

%polos e zeros do sistema em malha aberta
polos_ma = pole(Gma)';
zeros_ma = zero(Gma);

%escolheu-se o zero igual a parte real do polo desejado
zc = -real(polo_d);
zeros = [-zc zeros_ma];

%ângulos dos polos
for n=1:length(polos_ma)
    if (real(polos_ma(n))>= real(polo_d))
        ang_p(n) = pi - atan(imag(polo_d)/(abs( real(polo_d))-abs(real(polos_ma(n)))));
    else
        ang_p(n) = atan(imag(polo_d)/(abs( real(polo_d))-abs(real(polos_ma(n)))));
    end
end
ang_p = ang_p*180/pi;
%ângulos dos zeros
for n=1:length(zeros)
    if ( real(zeros(n)) >= real(polo_d) )
        ang_z(n) = pi - atan(imag(polo_d) /(abs(real(polo_d)) - abs(real(zeros(n)))) );
    else
        ang_z(n) = atan( imag(polo_d) / (-abs ( real(polo_d)) + abs (real(zeros(n)))));
    end
end
ang_z = ang_z*180/pi;

%Condição de fase
sum_pz = sum(ang_p)- sum(ang_z);
if sum_pz > 180
    angulo_polo_graus = sum_pz - 180;
else
    angulo_polo_graus = 180 - sum_pz;
end
%convertendo para radianos
angulo_polo_rad = angulo_polo_graus*pi/180;
%polo do compensador
pc = (imag(polo_d)/( tan(angulo_polo_rad) ))  + zc ;
C = tf([1 zc],[1 pc]);

figure(1)
subplot(2,1,2)
rlocus(C*Gma)
title('Lugar das Raízes C(s)*Gma(s)')

%Condição de módulo
kc_num = abs([polo_d+pc polo_d polo_d*tau+1]);
kc_den = abs((polo_d+zc))*k;
kc = prod(kc_num)/prod(kc_den);

%imprime os resultados na tela
fprintf('\nPolos da função em malha aberta\n')
fprintf('%.2f\n', polos_ma)
fprintf("\nPolo desejado\n")
polo_d
fprintf("\nZero do compensador\n")
fprintf('%.2f\n', -zc)
fprintf('\nPolo do compensador\n')
fprintf('%.2f\n', -pc)
```

```
fprintf('\nFunção de transferência do compensador (sem o ganho)\n')
C
fprintf('\nGanho do compensador\n')
fprintf('%.2f\n', kc)

Gcmf = feedback(kc*C*Gma,1);
figure(2)
step(pi*Gcmf)
```

2.3 Implementação e Teste

Abra o código **Exp LeadCompensator.vi**. Ele deve ter Painel Frontal e Diagrama de Blocos conforme as Figuras 6 e 7 a seguir.

Figura 6 – Painel Frontal do código para realização do ensaio

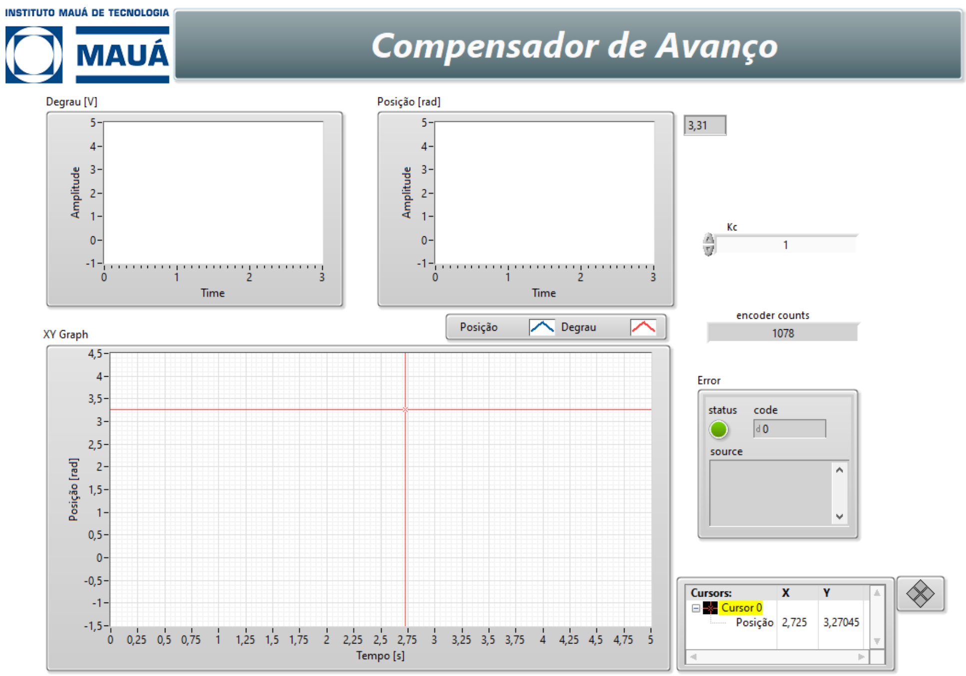
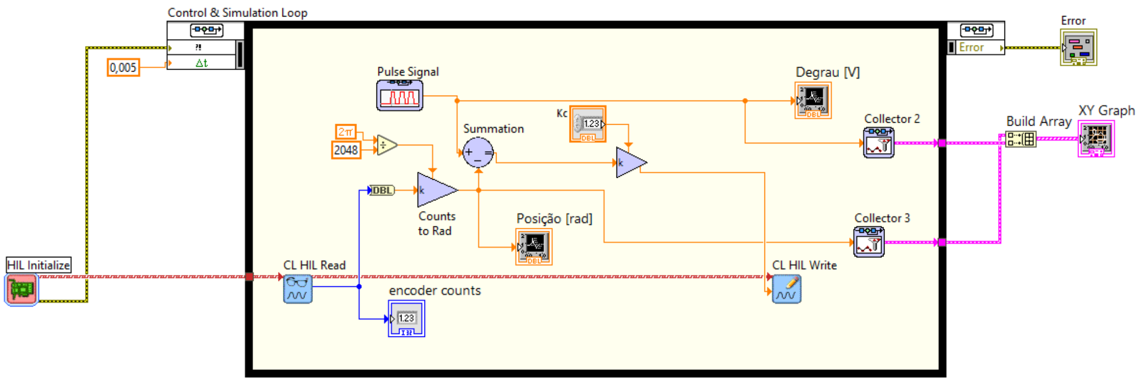
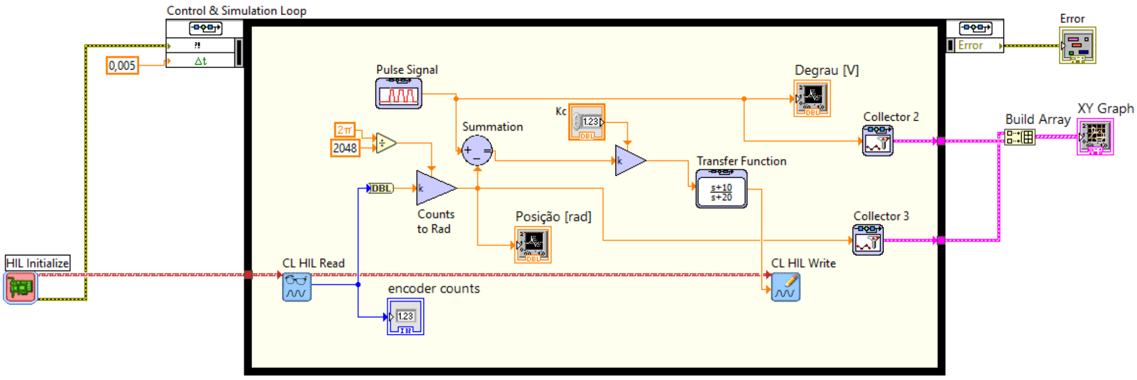


Figura 7 – Diagrama de blocos do código



Delete a linha que sai do ganho até a função **CL HIL Write** e insira uma função de transferência com os valores do compensador encontrado. O diagrama de blocos deve ficar parecido com a Figura 8:

Figura 8 – Diagrama de blocos com o compensador de avanço de fase



Confira se o kit está corretamente montado e ligado e execute o código. Verifique o comportamento do sistema simulado e analise os resultados obtidos. O sistema possui sobressinal? Quanto? Qual o tempo de subida?

Podem existir sistemas em que a resposta não depende apenas dos polos dominantes. Desta forma o controle pode não apresentar os resultados desejados. O zero escolhido próximo ou igual à parte real do polo desejado, por exemplo, faz com que a resposta do sistema na simulação não atinja os requisitos. Neste caso deve-se verificar os resultados e, se necessário, refazer o projeto.

Faça modificações na escolha do zero do compensador e/ou nos requisitos de projeto e execute novamente o script em MATLAB/Octave. Analise o Lugar das Raízes de $C(s) * G_{ma}(s)$. O que é possível concluir?

3 Conclusões

Escreve as conclusões sobre as atividades realizadas e os resultados obtidos.