

Progetto di Metodi numerici per le equazioni alle derivate parziali

Del Negro Marta Greppi Enrico

Professori: Berrone Stefano Canuto Claudio

Gennaio 2023

Indice

1	Risoluzione di problemi ellittici	2
2	Analisi dell'errore di discretizzazione	3
2.1	Grafici dell'andamento dell'errore	3
3	Analisi del numero di condizionamento	4
4	Risoluzione dell'esercitazione di avvio	5
4.1	Descrizione del problema	5
4.2	Risoluzione del problema e discussione dei risultati ottenuti	5
4.2.1	Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti lineari	5
4.2.2	Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti quadratici	7
5	Risoluzione di un problema con condizioni al contorno di Dirichlet non omogenee	8
5.1	Descrizione del problema	8
5.2	Risoluzione del problema e discussione dei risultati	8
5.2.1	Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti lineari	8
5.2.2	Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti quadratici	10
6	Risoluzione di un problema con condizioni al contorno miste Dirichlet-Neumann	12
6.1	Descrizione del problema	12
6.2	Risoluzione del problema e discussione dei risultati	12
6.2.1	Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti lineari	12
6.2.2	Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti quadratici	13
7	Risoluzione di problemi ellittici con coefficienti non costanti	16
7.1	Descrizione del problema	16
7.2	Risoluzione del problema e discussione dei risultati	16
7.2.1	Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti lineari	16
7.2.2	Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti quadratici	17
7.3	Descrizione del problema	19
7.4	Risoluzione del problema e discussione dei risultati	19
7.4.1	Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti lineari	19
7.4.2	Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti quadratici	20
8	Stabilizzazione di un problema di convezione diffusione	22
8.1	Descrizione del problema di convezione diffusione risolto	23
8.2	Stabilizzazione con elementi finiti lineari	23
8.3	Stabilizzazione con elementi finiti quadratici	24
9	Risoluzione di un problema parabolico	25
9.1	Descrizione del problema parabolico risolto	25
9.2	Risoluzione del problema e discussione dei risultati	25
9.2.1	Risultati ottenuti con elementi finiti lineari	25
9.2.2	Risultati ottenuti con elementi finiti quadratici	26
9.2.3	Risultati riguardanti la discretizzazione temporale	27

1 Risoluzione di problemi ellittici

L'obiettivo di questo progetto è quello di dimostrare in pratica le nozioni studiate nella teoria risolvendo numericamente problemi di diversa natura. Abbiamo scritto nel programma MATLAB le istruzioni per risolvere innanzitutto problemi ellittici con diversi tipi di condizioni al contorno. Abbiamo quindi scritto il codice per la risoluzione di problemi del tipo

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\epsilon \nabla) + \beta \nabla u + \gamma u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ + \text{condizioni al contorno su } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

dove Ω è il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, sia con coefficienti costanti che con coefficienti dipendenti dalle coordinate (x, y) .

Abbiamo applicato ai problemi sopra menzionati il metodo di discretizzazione degli elementi finiti e risolto i differenti problemi (descritti in modo dettagliato nelle sezioni successive) utilizzando sia elementi finiti lineari che elementi finiti quadratici, quindi usando elementi finiti (E, V_E, L_E) in cui $V_E \subset \mathbb{P}_1$, nel caso di elementi lineari e $V_E \subset \mathbb{P}_2$ per elementi quadratici.

In particolare abbiamo sempre utilizzato elementi finiti triangolari Lagrangiani: l'elemento finito di Courant per il caso lineare e l'elemento finito triangolare con i sei gradi di libertà determinati dall'assegnazione dei valori associati ai vertici e ai punti medi dei lati del triangolo, per il caso quadratico. In entrambi i casi abbiamo poi calcolato gli errori di discretizzazione relativi alla soluzione approssimata sia in norma L^2 che in norma H^1 e il numero di condizionamento in norma euclidea della matrice di rigidità A del sistema

$$Au = f$$

associato al problema ellittico in analisi. Questo sistema lineare è stato costruito utilizzando il metodo di Galerkin. Per ciascun problema risolto abbiamo eseguito un'analisi dell'errore e del numero di condizionamento (riportate in dettaglio nelle sezioni 2 e 3) per verificare che la soluzione discreta da noi ottenuta rispettasse le leggi studiate sulla dipendenza dell'errore di discretizzazione e del numero di condizionamento dalla dimensione della mesh.

In particolare, abbiamo calcolato l'errore di discretizzazione e il numero di condizionamento associati a diversi valori del parametro che definisce l'area massima dei triangoli prodotti dal triangolatore. Per farlo abbiamo calcolato la soluzione discreta dei problemi all'interno di un ciclo (nel nostro caso di 6 iterazioni) in cui, ad ogni iterazione, abbiamo ridefinito il parametro che indica l'area dei triangoli moltiplicandolo ogni volta per 0,5 e partendo dal valore iniziale di 0,02. Ad ogni iterazione abbiamo quindi calcolato l'errore di discretizzazione e il numero di condizionamento della matrice A relativi all'iterazione corrente per poter osservare il loro andamento in funzione dell'area massima dei triangoli della partizione e quindi in funzione della dimensione della mesh.

2 Analisi dell'errore di discretizzazione

Per ciascun problema test affrontato abbiamo calcolato l'errore di discretizzazione in norma L^2 e in norma H^1 (più precisamente abbiamo calcolato l'errore in seminorma H^1 , la quale andrebbe semplicemente sommata alla norma L^2 per ottenere la norma H^1 ; studiandone il logaritmo, come spiegato in seguito, norma e seminorma hanno comunque uguale andamento al variare di h). Dall'analisi dell'errore di discretizzazione per il metodo degli elementi finiti da noi utilizzati deriva la seguente disuguaglianza:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^r |u|_{r,\Omega}, \quad \text{se } u \in H^r(\Omega), \quad \text{con } 2 \leq r \leq k+1,$$

che nel caso di massima regolarità di u , caso in cui $r = k+1$, diventa:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1} |u|_{k+1,\Omega}. \quad (2)$$

Per quanto riguarda l'errore di discretizzazione in norma H^1 vale il vincolo:

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \leq \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^{r-1} |u|_{r,\Omega}, \quad \text{se } u \in H^r(\Omega), \quad \text{con } 1 \leq r \leq k+1,$$

che nel caso di massima regolarità di u , $r = k+1$ diventa:

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \leq Ch^k |u|_{k+1,\Omega}. \quad (3)$$

Per comprendere se l'errore di discretizzazione da noi calcolato rispetta questi vincoli abbiamo utilizzato la funzione MATLAB *polyfit*(x, y, n) passando in x il logaritmo dei valori del parametro che definisce l'area massima della triangolazione e in y i valori del logaritmo dell'errore di discretizzazione. Questa funzione restituisce i coefficienti del polinomio $p(x)$ di grado n (nel nostro caso $n = 1$) interpolante i dati (x, y) .

Dai vincoli precedenti, se poniamo $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = E_0$ e $|u - u_h|_{1,\Omega} = E_1$ e ne calcoliamo il logaritmo otteniamo le seguenti relazioni:

$$\log(E_0) \sim \log(C|u|_{k+1,\Omega}) + (k+1) \log(h) \quad (4)$$

$$\log(E_1) \sim \log(C|u|_{k+1,\Omega}) + (k) \log(h), \quad (5)$$

dove h indica la dimensione della mesh.

Essendo per noi più comodo avere vincoli scritti in termini di area dei triangoli della triangolazione e sapendo che $Area \sim h^2$ le relazioni precedenti possono essere riscritte come:

$$\log(E_0) \sim \log(C|u|_{k+1,\Omega}) + \frac{k+1}{2} \log(Area) \quad (6)$$

$$\log(E_1) \sim \log(C|u|_{k+1,\Omega}) + \frac{k}{2} \log(Area). \quad (7)$$

Da queste relazioni deduciamo che per l'errore di discretizzazione valutato in norma L^2 la prima entrata del risultato della funzione *polyfit* (la denotiamo con $p(1)$) deve valere all'incirca $\frac{k+1}{2}$. Per l'errore valutato in norma H^1 , $p(1)$ deve invece essere circa uguale a $\frac{k}{2}$.

Ricordando che k è il grado dei polinomi approssimanti, la funzione di MATLAB *polyfit* ci permette di verificare che gli errori di discretizzazione relativi alle soluzioni discrete ottenute con il nostro codice dipendano dalla dimensione della mesh nel modo in cui ci aspettiamo dall'analisi teorica dell'errore di discretizzazione.

2.1 Grafici dell'andamento dell'errore

In tutta la relazione i grafici riguardanti l'andamento in norma L^2 e H^1 dell'errore di approssimazione in funzione dell'area massima della triangolazione (denotata semplicemente con "Area dei triangoli") sono stati realizzati in scala logaritmica, utilizzando il comando *loglog* di MATLAB. Ricordiamo inoltre di esserci serviti di un ciclo di 6 iterazioni in cui, ad ogni iterazione, abbiamo ridefinito il parametro della massima area dei triangoli moltiplicandolo ogni volta per 0,5 e partendo dal valore iniziale di 0,02. Per ogni problema è stata assegnata una sezione e i grafici relativi a tale problema sono stati suddivisi con due sottosezioni: una relativa agli elementi finiti lineari e una per i quadratici.

3 Analisi del numero di condizionamento

Dato il generico problema in forma variazionale

$$\begin{cases} \text{Trovare } u \in \mathbb{V} \text{ tale che} \\ a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathbb{V}, \end{cases}$$

sappiamo che, una volta fissata una base $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ dello spazio \mathbb{V} in cui cerchiamo la soluzione discreta del problema, quest'ultimo è equivalente al sistema algebrico

$$Au = f$$

dove le entrate della matrice A (detta matrice di rigidezza) e del vettore f sono date da

$$a_{jk} = a(\phi_k \phi_j), \quad f_j = F(\phi_j).$$

Sappiamo inoltre che per il numero di condizionamento della matrice di rigidezza vale:

$$\text{cond}_2(A) \sim Ch^{-2}$$

che, sapendo che $\text{Area} \sim h^2$, possiamo esprimere in termini di area massima degli elementi della mesh come:

$$\text{cond}_2(A) \sim C \text{Area}^{-1}. \quad (8)$$

Se consideriamo l'equazione (8) e ne calcoliamo il logaritmo otteniamo

$$\log(\text{cond}_2(A)) \sim \log(C) - \log(\text{Area}).$$

Da ciò deduciamo che per il numero di condizionamento della matrice di rigidezza A l'espressione

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(\text{cond}_2(A)), 1)$$

mi restituisce un vettore la cui prima entrata $p(1)$ deve valere ≈ -1 , affinché sia rispettata la relazione (8).

Sfruttando quindi nuovamente la funzione di MATLAB *polyfit* possiamo verificare che il numero di condizionamento della matrice di rigidezza ha il comportamento atteso.

4 Risoluzione dell'esercitazione di avvio

4.1 Descrizione del problema

Determinare con un'approssimazione con elementi finiti la soluzione del seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} -\nu \Delta u = f, & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $\nu = 1.0$, la funzione

$$U(x, y) = 16x(1-x)y(1-y)$$

è la soluzione esatta e la funzione

$$f(x, y) = 32(x(1-x) + y(1-y))$$

è la forzante. Il dominio Ω è il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

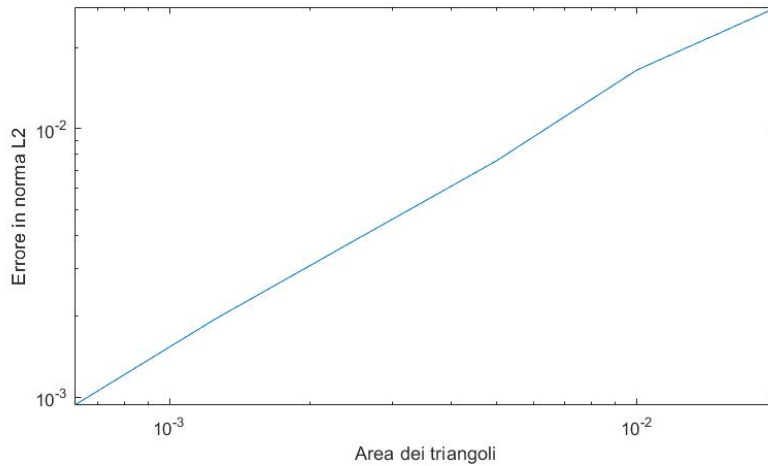
4.2 Risoluzione del problema e discussione dei risultati ottenuti

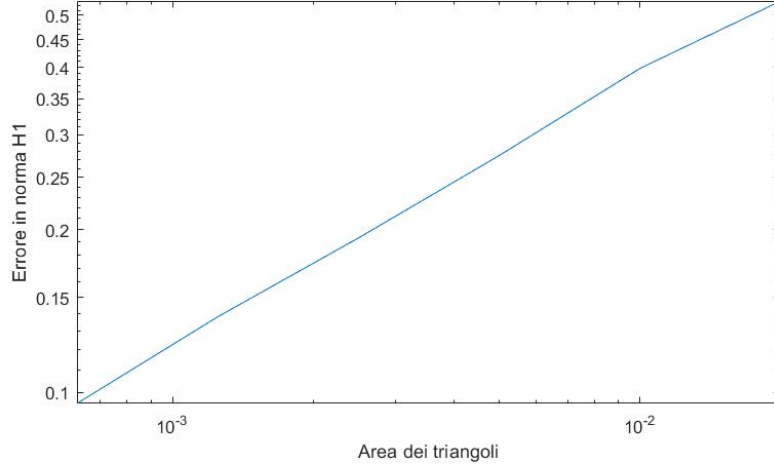
Abbiamo calcolato la soluzione discreta del problema descritto nella sottosezione precedente, utilizzando sia elementi finiti lineari che elementi finiti quadratici. Come descritto nella sezione 1, modificando il parametro che definisce l'area massima dei triangoli prodotti dal triangolatore, abbiamo osservato il comportamento del numero di condizionamento della matrice di rigidità A relativa al problema in questione calcolato in norma euclidea e il comportamento dell'errore, calcolato sia in norma L^2 che in norma H^1 .

Analizziamo in dettaglio i risultati ottenuti, distinguendo tra quelli ricavati dalla risoluzione del problema con elementi finiti lineari e con elementi finiti quadratici.

4.2.1 Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti lineari

Per gli errori di discretizzazione in norma L^2 e H^1 abbiamo ottenuto i seguenti andamenti in funzione dell'area massima dei triangoli della partizione:





Utilizzando le considerazioni fatte nella sezione 2 sappiamo che l'espressione

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(E_0), 1)$$

dovrebbe restituire un vettore la cui prima entrata è $p(1) \approx (k+1)/2$, cioè in questo caso $p(1) \approx 1$, ed effettivamente questa funzione ci ha restituito il vettore $p = [0,9959 \ 0,4006]$. Questo dimostra che l'errore di discretizzazione in norma L^2 relativo alla soluzione discreta da noi calcolata rispetta la relazione (2).

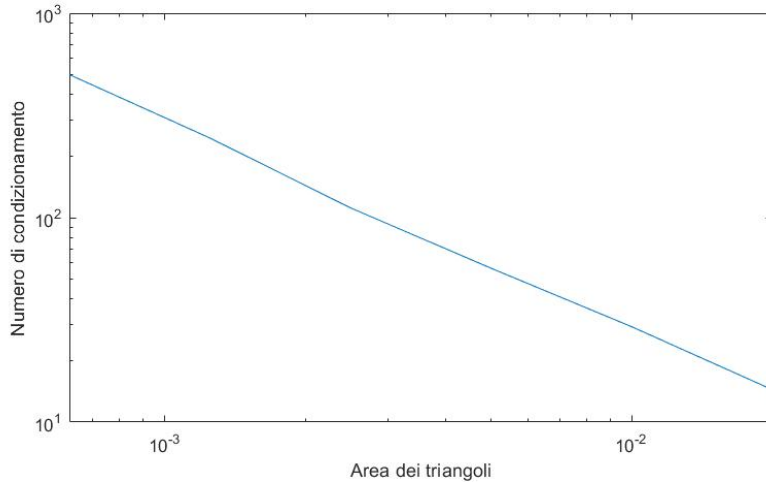
Le stesse considerazioni si possono fare a riguardo dell'errore valutato in norma H^1 , sapendo che in questo caso l'espressione

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(E_1), 1)$$

dovrebbe restituire un vettore la cui prima entrata è $p(1) \approx k/2$, cioè in questo caso $p(1) \approx 0,5$, affinché l'errore rispetti la legge (3). In questo caso il vettore restituito dalla funzione MATLAB *polyfit* è $p = [0,4992 \ 1,3479]$ e $p(1)$ è proprio $\approx 0,5$.

Questi risultati dimostrano che l'errore di discretizzazione verifica quanto affermato nella sezione 2.

Per il numero di condizionamento in funzione dell'area dei triangoli abbiamo il seguente grafico:



Dall'analisi del numero di condizionamento (sezione 3) deriva il fatto che possiamo verificare che il numero di condizionamento della matrice di rigidezza A abbia il comportamento atteso tramite

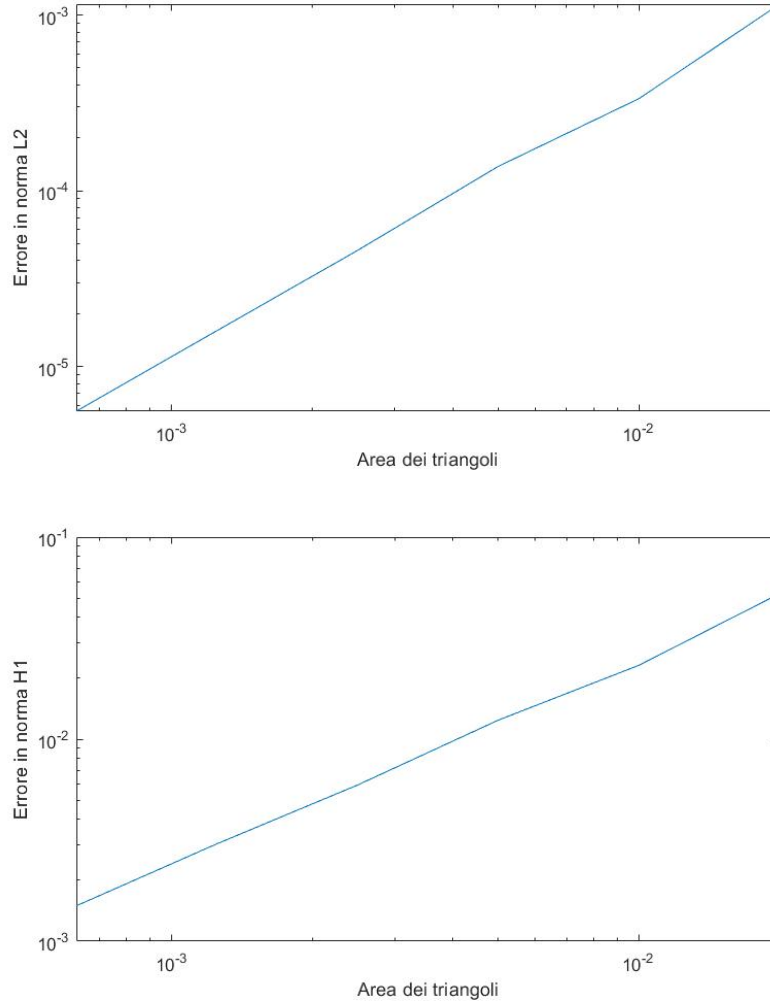
$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(\text{cond}_2(A)), 1).$$

Il vettore p ottenuto con questa funzione è $p = [-1,0223 \ -1,3527]$, dove $p(1) \approx -1$ proprio come ci aspettavamo.

4.2.2 Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti quadratici

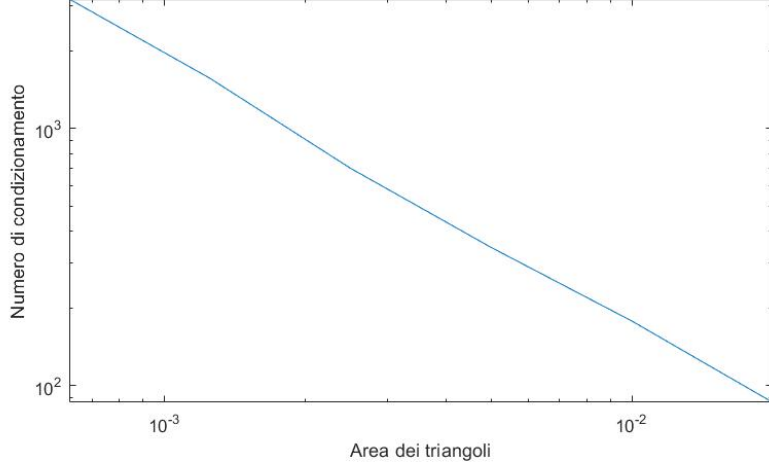
Nel progetto abbiamo approssimato la soluzione discreta del problema non solo utilizzando elementi finiti lineari ma anche, con i dovuti cambiamenti nel codice, usando elementi quadratici. Mostriamo di seguito i risultati ottenuti per il problema specifico.

Per quanto riguarda l'errore di discretizzazione, i grafici che ne raffigurano l'andamento in funzione del parametro che definisce l'area massima degli elementi della triangolazione sono i seguenti



Come fatto per l'analisi dell'errore di discretizzazione nel caso della risoluzione con elementi finiti lineari, allo stesso modo sfruttiamo la funzione di MATLAB *polyfit* per comprendere se l'errore relativo alla soluzione approssimata da noi ottenuta si comporti come previsto dalle equazioni (2) e (3). Passando $\log(Area)$ e $\log(E_0)$ (logaritmo dell'errore in norma L^2) come parametri alla funzione *polyfit*, questa ha restituito il vettore $p = [1, 5205 \quad -0, 8830]$. Per quanto detto nella sezione 2, siccome $p(1) \approx 1,5$, corrispondente a $(k + 1)/2$, questo conferma che l'errore ha il decadimento atteso. Passando invece come parametri $\log(Area)$ e $\log(E_1)$ (logaritmo dell'errore in norma H^1) abbiamo ottenuto il vettore $p = [1, 0152 \quad 0, 9766]$. Essendo $p(1) \approx k/2$, cioè ≈ 1 l'errore di discretizzazione valutato in norma H^1 rispetta la legge (3).

Infine, per il numero di condizionamento della matrice di rigidità A , l'andamento in funzione dell'area dei triangoli della mesh è



Avvalendoci dei risultati riguardo il numero di condizionamento della matrice di rigidezza calcolato in norma euclidea riportati nella sezione 3, abbiamo scritto nel codice l'espressione

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(\text{cond}_2(A)), 1).$$

che ci ha restituito il vettore $p = [-1, 0424 \quad 0, 3601]$. Poichè $p(1) \approx -1$, possiamo affermare che vale proprio

$$\text{cond}_2(A) \sim C \text{Area}^{-1}.$$

5 Risoluzione di un problema con condizioni al contorno di Dirichlet non omogenee

5.1 Descrizione del problema

Abbiamo verificato che il codice dai noi scritto fosse in grado di risolvere problemi ellittici con condizioni al contorno di Dirichlet non omogenee utilizzando il seguente problema test:

$$\begin{cases} -\epsilon \Delta u + \beta \nabla u + \gamma u = f \\ + \text{condizioni al contorno su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $\epsilon = 1$, $\beta = [1, 0]$, $\gamma = 1$ e $f = \cos(x) + \cos(y)$, la cui soluzione esatta è:

$$u = \sin(x) + x \cos(y).$$

Il dominio Ω è il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

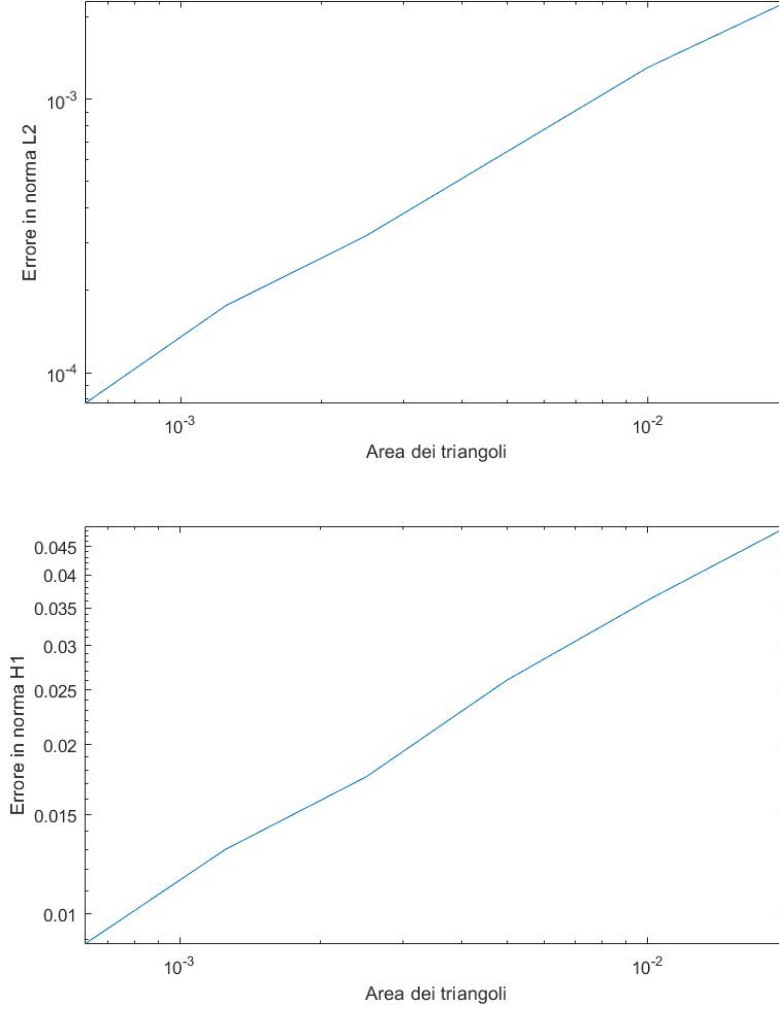
5.2 Risoluzione del problema e discussione dei risultati

Per la risoluzione del suddetto problema abbiamo dovuto apportare alcune modifiche al codice dovute al fatto che, a differenza del primo problema da noi risolto, qui siamo in presenza di condizioni al contorno **non** omogenee.

5.2.1 Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti lineari

Partiamo dalla risoluzione del problema con elementi finiti lineari, quindi con funzioni $\in \mathbb{P}_1$ e discutiamo i risultati ottenuti calcolando la soluzione discreta associata a differenti valori della dimensione della mesh.

Abbiamo calcolato l'errore di discretizzazione sia in norma L^2 che in norma H^1 relativi ai diversi valori del parametro che definisce l'area dei triangoli, e costruito il grafico che ne rappresenta l'andamento proprio in funzione dell'area. Riportiamo di seguito questi grafici in modo da poter comprendere meglio come varia l'errore di discretizzazione in funzione della dimensione della triangolazione.



Come descritto nella sezione 2, abbiamo utilizzato la funzione MATLAB *polyfit* per comprendere se i risultati sull'errore da noi ottenuti fossero coerenti con i risultati attesi. Scrivendo

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(E_0), 1)$$

abbiamo ottenuto $p = [0,9764 \quad -2,1936]$. Sappiamo che per l'errore di discretizzazione in norma L^2 la prima entrata del vettore p deve essere $\approx (k+1)/2$ con $k=1$. Possiamo osservare che la prima entrata di p è proprio ≈ 1 . Per l'errore di discretizzazione in norma H^1 , ci aspettiamo che $p(1)$ sia $\approx 0,5$. Scrivendo

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(E_1), 1)$$

abbiamo ottenuto $p = [0,4951 \quad -1,0558]$. Effettivamente si nota che la prima entrata di p è $\approx 0,5$. Da queste considerazioni deduciamo dunque che l'errore di discretizzazione calcolato si comporta proprio come ci si aspetta dai risultati teorici.

Possiamo effettuare anche un'analisi quantitativa dell'errore basata soltanto sui grafici e sui valori assunti dall'errore stesso. In particolare, essendo

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \sim Ch^2 |u|_{2,\Omega}$$

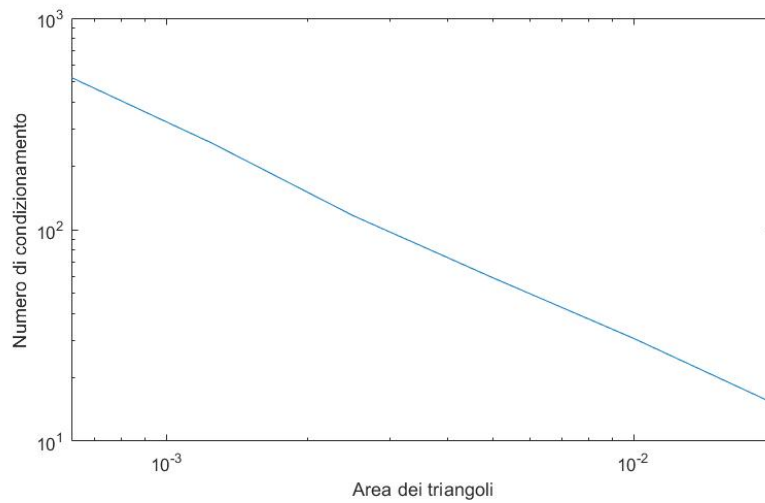
la relazione che lega l'errore in norma L^2 alla dimensione della mesh h , e essendo $\text{Area} \sim h^2$, quando l'area dimezza il valore dell'errore dovrebbe essere anch'esso circa la metà. Questo è proprio quanto si osserva guardando il grafico e i valori dell'errore.

Essendo invece

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \sim Ch |u|_{2,\Omega}$$

la relazione che lega l'errore in seminorma H^1 alla dimensione della mesh h , e essendo $\text{Area} \sim h^2$, quando l'area dimezza il valore dell'errore relativo al dimezzamento dell'area dovrebbe essere circa pari al valore di partenza dell'errore diviso per $\sqrt{2}$. Prendendo ad esempio i valori dell'errore di discretizzazione relativi ai valori 0,01 e 0,005 del parametro che definisce l'area, si ottiene in effetti $0,0361/\sqrt{2} \approx 0,0260$.

L'andamento del numero di condizionamento in norma 2 della matrice di rigidezza A è invece riportato nel seguente grafico:

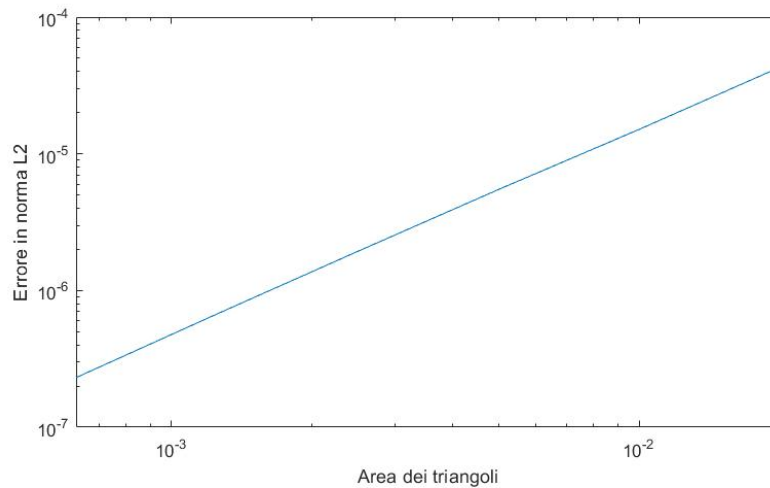


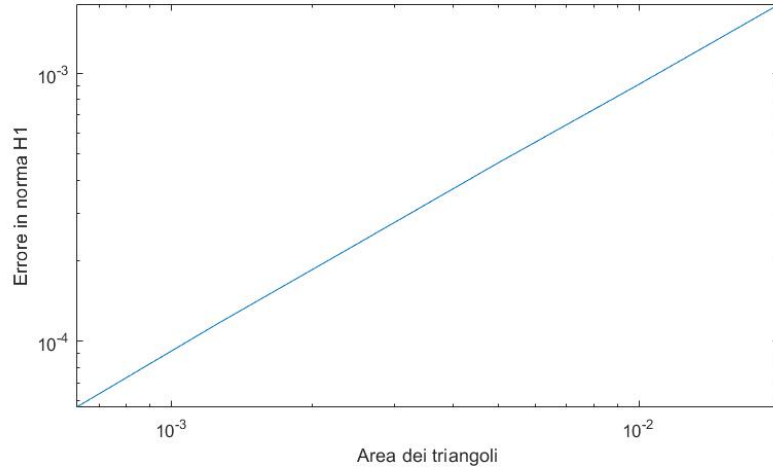
Per avere una conferma di quanto osservato sul grafico abbiamo utilizzato la funzione *polyfit* passando come parametri $\log(\text{Area})$ e $\log(\text{cond}_2(A))$ (come visto nella sezione 3). Questa funzione ci ha restituito il vettore $p = [-1, 0230 \quad -1, 3115]$ che dimostra che il numero di condizionamento è inversamente proporzionale all'area dei triangoli della partizione.

5.2.2 Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti quadratici

Ripetiamo la trattazione precedente nel caso in cui, però, si utilizzino funzioni in \mathbb{P}_2 per approssimare la soluzione del problema sugli elementi della triangolazione.

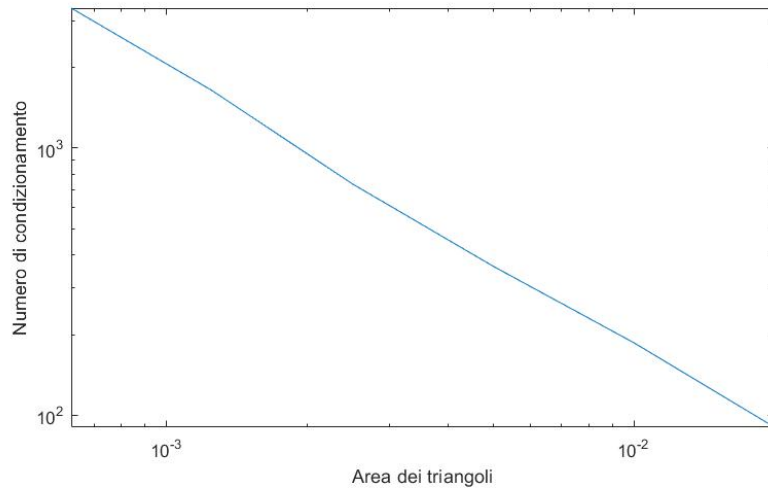
Anche in questo caso abbiamo calcolato la soluzione approssimata per diversi valori dell'area. Di seguito mostriamo i risultati ottenuti per quanto concerne l'andamento dell'errore di discretizzazione e del numero di condizionamento della matrice di rigidezza, in funzione del parametro che definisce l'area massima dei triangoli della partizione.





Utilizzando il comando *polyfit* di MATLAB abbiamo ottenuto $p = [1, 5045 \quad 4, 1617]$ per l'errore di discretizzazione in norma L^2 , e $p = [0, 9984 \quad -2, 3972]$ per l'errore calcolato in norma H^1 . Anche in questo caso quindi otteniamo ciò che era previsto, cioè che $p(1) \approx 3/2$ per l'errore in norma L^2 , e che $p(1) \approx 1$ per l'errore in norma H^1 .

Il numero di condizionamento associato alla matrice di rigidità A del problema in questione ha invece il seguente andamento in funzione dell'area dei triangoli:



Anche in questo caso si nota bene dal grafico la crescita del numero di condizionamento al diminuire dell'area degli elementi della partizione. In particolare, tramite l'espressione

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(\text{cond}_2(A)), 1)$$

abbiamo ottenuto il vettore $p = [-1, 0426 \quad 0, 4044]$ che conferma quanto atteso per le considerazioni fatte nella sezione 3.

6 Risoluzione di un problema con condizioni al contorno miste Dirichlet-Neumann

6.1 Descrizione del problema

Con l'obiettivo di verificare se il nostro codice fosse in grado di risolvere anche problemi ellittici con condizioni al contorno miste Dirichlet-Neumann, lo abbiamo testato sul seguente problema:

$$\begin{cases} -\epsilon \Delta u + \beta \nabla u + \gamma u = f \\ + \text{condizioni di Dirichlet su } \Gamma_D, \\ + \text{condizioni di Neumann su } \Gamma_N \end{cases}$$

dove $\epsilon = 1$, $\beta = [0, 0]$, $\gamma = 0$ e $f = -2e^{x+y}$, la cui soluzione esatta è:

$$u = e^{x+y}.$$

Il dominio Ω è il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, mentre $\Gamma_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, y = 0 \vee y = 1\}$ e $\Gamma_N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \vee x = 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

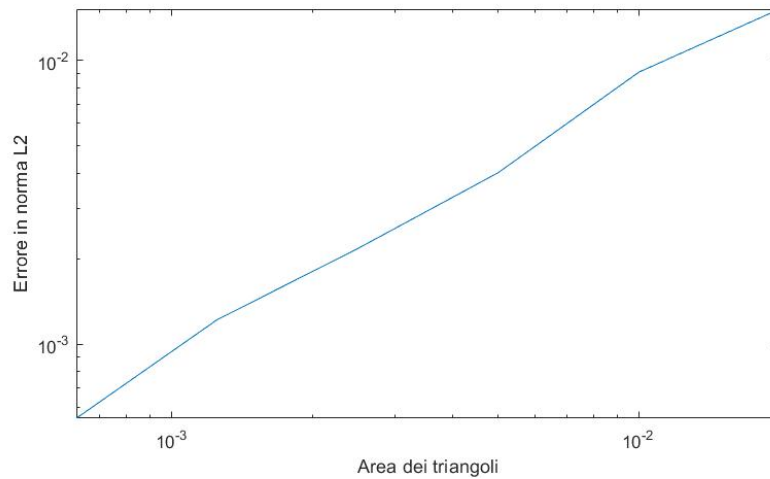
6.2 Risoluzione del problema e discussione dei risultati

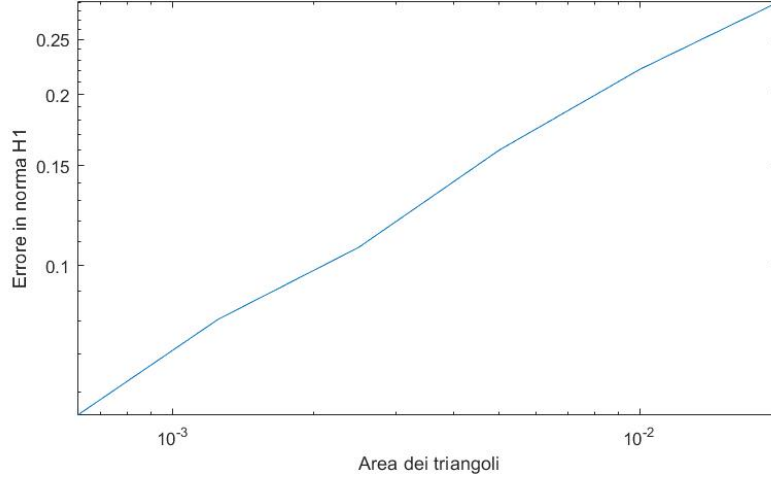
Dopo uno studio teorico del problema variazionale, che ci ha permesso di riscrivere il sistema lineare tenendo conto delle condizioni sia di Neumann che di Dirichlet nel codice, siamo giunti, con i soliti metodi, alla soluzione discreta u .

6.2.1 Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti lineari

Iniziamo con l'analisi dei risultati ottenuti risolvendo il problema utilizzando per la partizione del dominio Ω elementi finiti lineari.

Come per i problemi test precedentemente descritti, abbiamo calcolato l'errore di discretizzazione sia in norma L^2 che in norma H^1 relativi alle soluzioni approssimate ottenute per diversi valori dell'area dei triangoli della mesh. L'andamento di questi errori in funzione del parametro che definisce l'area massima degli elementi della triangolazione è rappresentato in questi grafici in scala logaritmica:





Come al solito abbiamo usato la funzione *polyfit* per verificare la correttezza di quanto da noi ottenuto (vedere sezione 2). In particolare, l'espressione

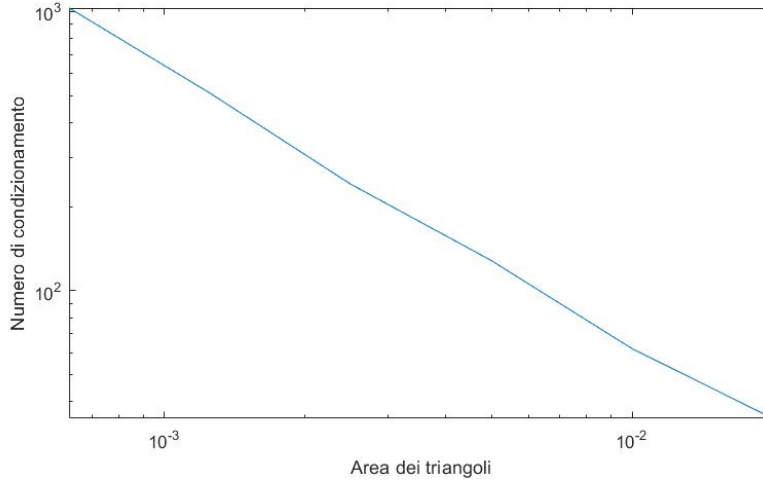
$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(E_0), 1)$$

ci ha restituito il vettore $p = [0, 9580 \quad -0, 3859]$. Questo è coerente con il fatto che la prima entrata del vettore p dev'essere $\approx (k+1)/2$ per quanto riguarda l'errore di discretizzazione in norma L^2 (E_0). Con l'espressione

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(E_1), 1)$$

abbiamo invece ottenuto il vettore $p = [0, 4872 \quad 0, 7115]$ la cui prima entrata ($p(1)$) è proprio $\approx k/2$, come ci si aspettava per le considerazioni fatte sull'errore in H^1 (E_1). Questo dimostra che l'errore di discretizzazione calcolato sia in norma L^2 che in norma H^1 , si comporta proprio in accordo con le leggi (2) e (3).

Il numero di condizionamento della matrice A del sistema algebrico associato al problema in questione ha invece il seguente andamento in funzione dell'area dei triangoli della partizione:



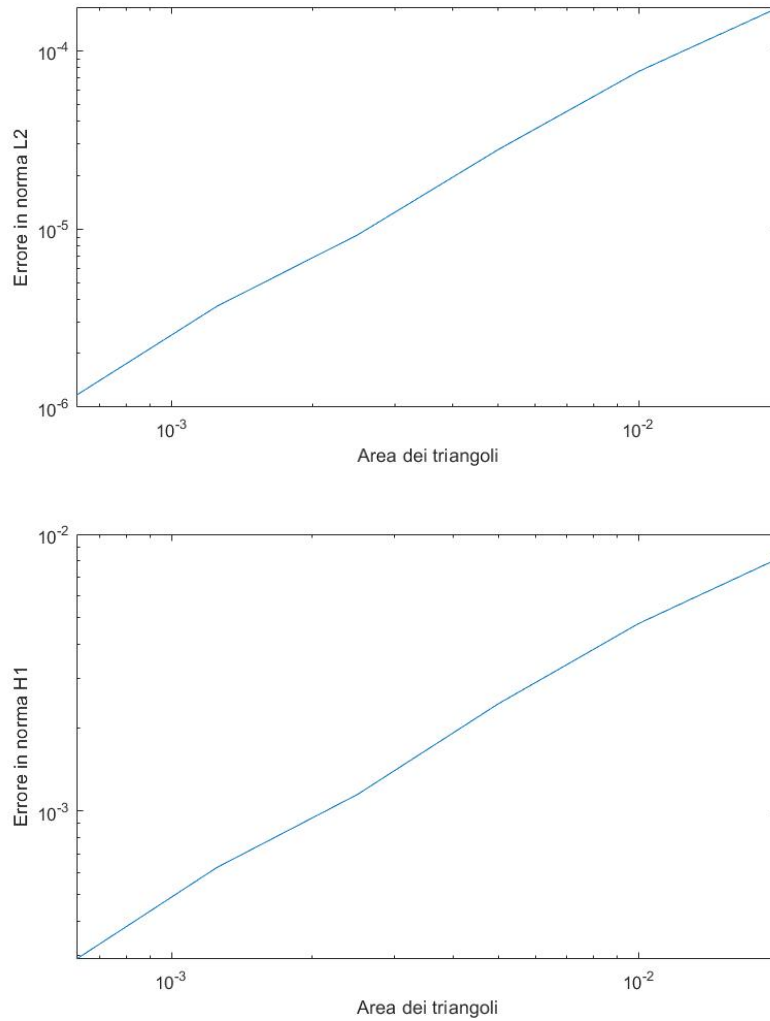
Utilizziamo anche qui la funzione *polyfit*(x, y, n), con $x = \log(\text{Area})$, $y = \log(\text{cond}_2(A))$ e $n = 1$ e osserviamo se la prima entrata del vettore restituito dalla funzione è proprio ≈ -1 come ci aspettiamo (vedere sezione 3). Il vettore p ottenuto in questo caso è $p = [-0, 9842 \quad -0, 3580]$, quindi, essendo $p(1) \approx -1$, il numero di condizionamento della matrice di rigidezza A rispetta la legge $\text{cond}_2(A) \sim C \text{Area}^{-1} \sim Ch^{-2}$.

6.2.2 Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti quadratici

Come sopra, anche per quanto riguarda la risoluzione del problema con elementi finiti quadratici, abbiamo calcolato l'errore di discretizzazione in norma L^2 e in norma H^1 e il numero di condizionamento della matrice di rigidezza A del sistema algebrico associato al problema.

Iniziamo analizzando i risultati ottenuti per l'errore di discretizzazione e riportiamo di seguito i

grafici che mostrano come variano gli errori (in norma L^2 e in norma H^1) in funzione dell'area dei triangoli della triangolazione.



Si nota subito che raffinando sempre più la mesh, anche l'errore di discretizzazione associato alla soluzione approssimata diminuisce. Per capire se l'errore diminuisce secondo le leggi ottenute per via teorica e riportate nella sezione 2, ci serviamo come al solito della funzione MATLAB *polyfit*. Nel caso dell'errore valutato in norma L^2 la prima entrata del vettore restituito da questa funzione sappiamo dover essere $\approx (k+1)/2$, cioè $\approx 3/2$ per elementi finiti quadratici ($k=2$). Con l'espressione

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(E_0), 1)$$

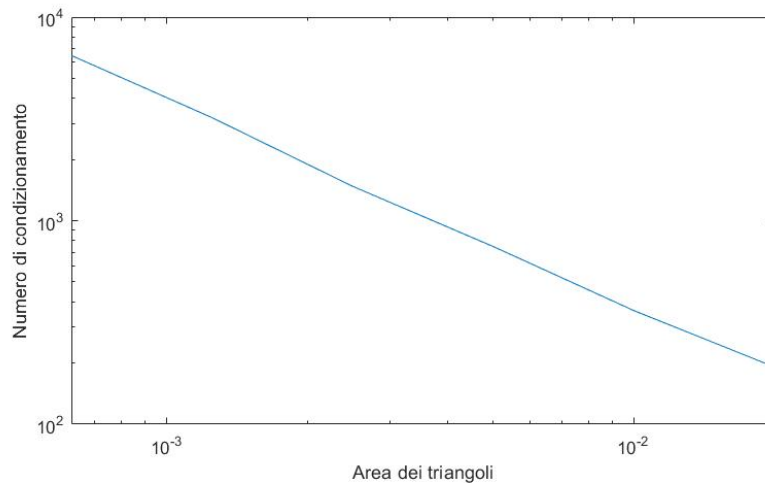
abbiamo ottenuto il vettore $p = [1, 4537 \quad -2, 8568]$, in cui effettivamente $p(1) \approx 3/2$, che dimostra il fatto che l'errore in norma L^2 si comporta proprio come atteso.

A proposito dell'errore calcolato in norma H^1 il vettore restituito da *polyfit*, ovvero

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(E_1), 1)$$

è invece $p = [0, 9700 \quad -0, 9335]$. Quindi l'errore di discretizzazione rispetta le legge (3) riportata nella sezione 2, essendo $p(1) \approx 1$ (corrispondente a $k/2$ con $k=2$).

Il grafico rappresentante il numero di condizionamento della matrice di rigidità associata al problema in funzione del valore dell'area degli elementi della partizione è il seguente:



Per osservare se il numero di condizionamento della matrice di rigidezza cresce proprio secondo la relazione $\text{cond}_2(A) \sim C \text{Area}^{-1}$ abbiamo utilizzato il comando MATLAB

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(\text{cond}_2(A)), 1).$$

Questa funzione ha restituito il vettore $p = [-1,0243 \quad 1,2019]$, che dimostra che la crescita del numero di condizionamento è inversamente proporzionale al valore dell'area dei triangoli della mesh.

7 Risoluzione di problemi ellittici con coefficienti non costanti

Risolviamo in questa sezione problemi ellittici

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\epsilon \nabla u) + \beta \nabla u + \gamma u = f \\ + \text{condizioni di Dirichlet su } \Gamma_D, \\ + \text{condizioni di Neumann su } \Gamma_N \end{cases}$$

in cui i coefficienti ϵ, β e γ non sono più costanti, come nei problemi affrontati nelle sezioni precedenti, ma possono essere funzione della posizione.

Per verificare che il codice da noi scritto fosse in grado di rispondere in modo adeguato alla necessità di risolvere problemi ellittici con coefficienti non costanti, lo abbiamo testato su problemi test di cui conosciamo la soluzione esatta in modo da poterla confrontare con la soluzione discreta ottenuta.

7.1 Descrizione del problema

Il primo problema ellittico con coefficienti non costanti che abbiamo risolto è il seguente:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\epsilon \nabla u) + \beta \nabla u + \gamma u = f \\ + \text{condizioni di Dirichlet su } \Gamma_D, \\ + \text{condizioni di Neumann su } \Gamma_N \end{cases}$$

dove $\epsilon = 1$, $\beta = [\frac{1}{2}x, y]$, $\gamma = -2$ e $f = -2 \cos y - 2 - x^2 y \sin y$, la cui soluzione esatta è:

$$u = x^2 \cos y + y^2.$$

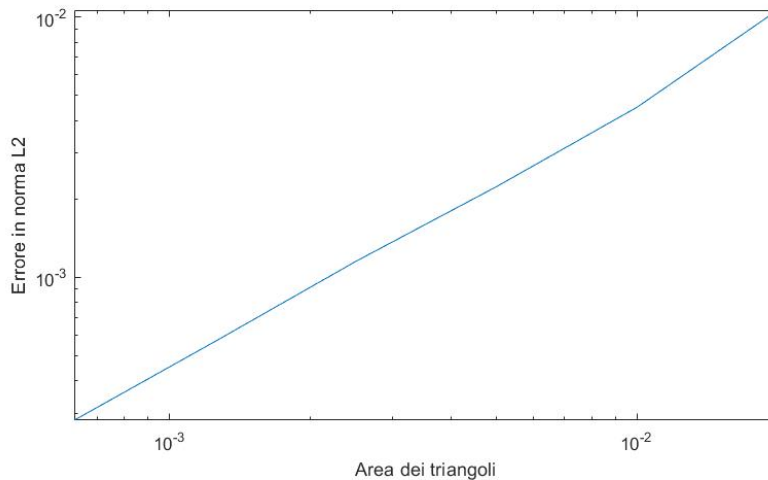
Il dominio Ω è il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, mentre $\Gamma_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, y = 0 \vee y = 1\}$ e $\Gamma_N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \vee x = 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

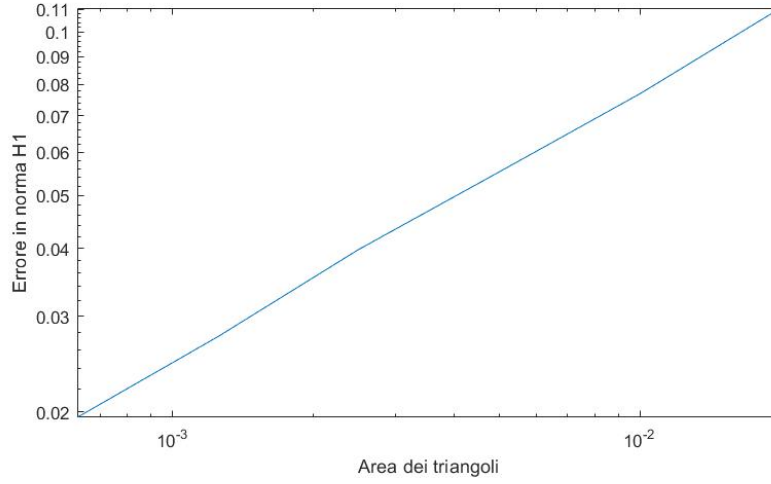
7.2 Risoluzione del problema e discussione dei risultati

Come al solito analizziamo i risultati ottenuti dalla risoluzione del problema facente uso del metodo degli elementi finiti con elementi finiti lineari e quadratici.

7.2.1 Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti lineari

Abbiamo risolto il problema suddetto utilizzando elementi finiti lineari e calcolato l'errore di discretizzazione associato alla soluzione approssimata in norma L^2 e in norma H^1 . Riportiamo qui i grafici rappresentanti il modo in cui essi variano in funzione del parametro che definisce l'area massima dei triangoli della mesh:



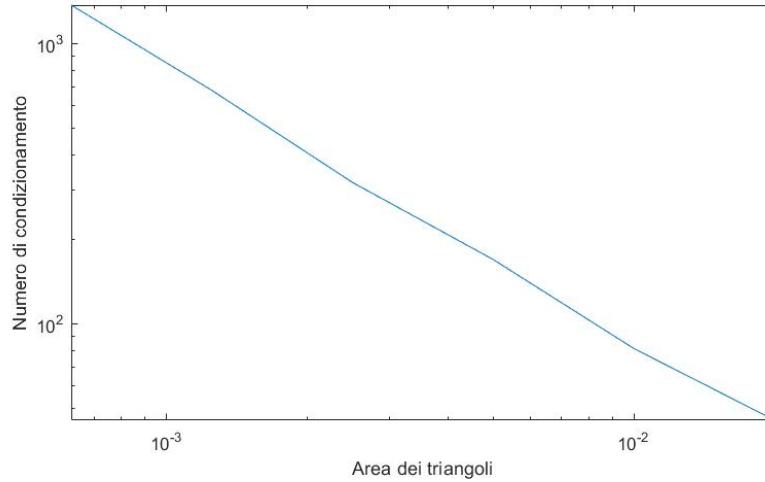


La funzione *polyfit* con i parametri $\log(Area)$ e $\log(E_0)$ ci ha restituito per il problema in questione il vettore $p = [1.0308 \quad -0.5927]$ che ci permette di capire che effettivamente l'errore di discretizzazione decade come indicato dalla relazione (2).

La stessa funzione, con i parametri $\log(Area)$ e $\log(E_1)$ restituisce invece $p = [0.4979 \quad -0.2588]$, e questo dimostra che l'errore di discretizzazione in norma H^1 decade secondo la legge (3).

Quindi anche nel caso di problemi ellittici con coefficienti non costanti il codice scritto ci permette di ottenere una soluzione discreta che si comporta proprio come ci si aspetta dai risultati teorici (riportati nella sezione 2).

Il numero di condizionamento della matrice di rigidità associata al problema cresce con il diminuire del valore dell'area nel seguente modo:



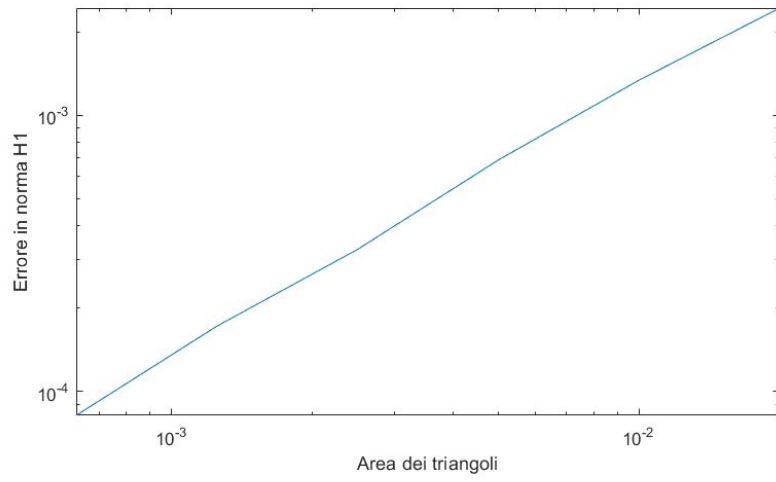
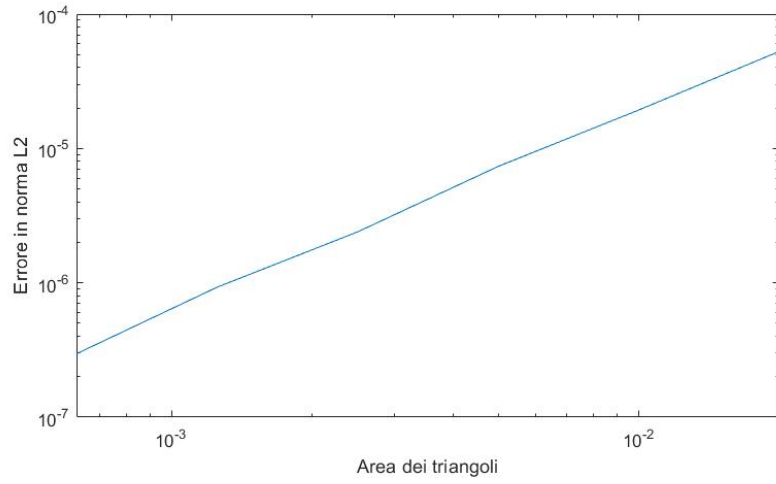
Con l'espressione

$$p = \text{polyfit}(\log(Area), \log(\text{cond}_2(A)), 1).$$

otteniamo $p = [-0.9899 \quad -0.1118]$. Essendo $p(1) \approx -1$ il numero di condizionamento è inversamente proporzionale al valore dell'area.

7.2.2 Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti quadratici

Per gli errori di discretizzazione relativi alla soluzione discreta ottenuta utilizzando elementi finiti quadratici abbiamo i grafici:



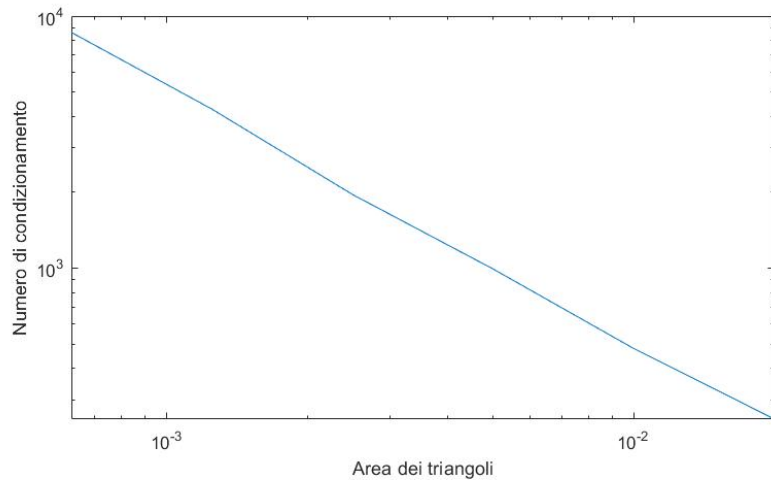
In questo caso con la funzione *polyfit* otteniamo:

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(E_0), 1) \rightarrow p = [1, 4898 \quad - 3, 9877];$$

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(E_0), 1) \rightarrow p = [0, 9835 \quad - 2, 1170].$$

Questi valori ci permettono di verificare che gli errori di discretizzazione seguono le leggi (2) e (3).

Il grafico dell'andamento del numero di condizionamento della matrice di rigidezza è invece:



e con la funzione *polyfit* otteniamo i valori

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(\text{cond}_2(A)), 1) \rightarrow p = [-1, 0267 \quad 1, 4710].$$

Il fatto che $p(1)$ sia ≈ -1 dimostra che il numero di condizionamento della matrice A del sistema algebrico associato al problema in questione, decresce linearmente con il valore dell'area dei triangoli della triangolazione.

Abbiamo testato il nostro codice su un ulteriore esempio di problema ellittico in cui sono presenti coefficienti non costanti di cui riportiamo sinteticamente nelle sezioni successive la descrizione e i principali risultati ottenuti.

7.3 Descrizione del problema

Il secondo problema ellittico con coefficienti non costanti che abbiamo risolto è il seguente:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\epsilon \nabla u) + \beta \nabla u + \gamma u = f \\ + \text{condizioni di Dirichlet su } \Gamma_D, \\ + \text{condizioni di Neumann su } \Gamma_N \end{cases}$$

dove $\epsilon = x$, $\beta = [1, 0]$, $\gamma = 0$ e $f = -x(e^x + e^y)$, la cui soluzione esatta è:

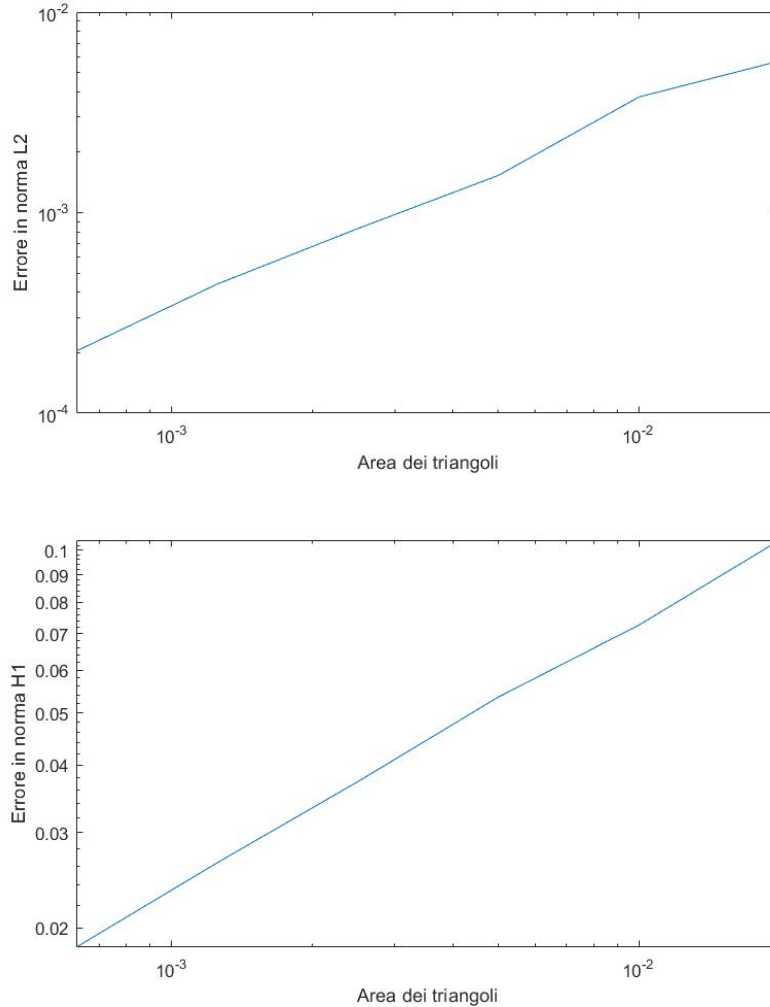
$$u = e^x + e^y.$$

Il dominio Ω è il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, mentre $\Gamma_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, x = 0 \vee x = 1\}$ e $\Gamma_N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \vee y = 1, 0 \leq x \leq 1\}$.

7.4 Risoluzione del problema e discussione dei risultati

7.4.1 Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti lineari

I grafici degli errori di discretizzazione sono i seguenti:

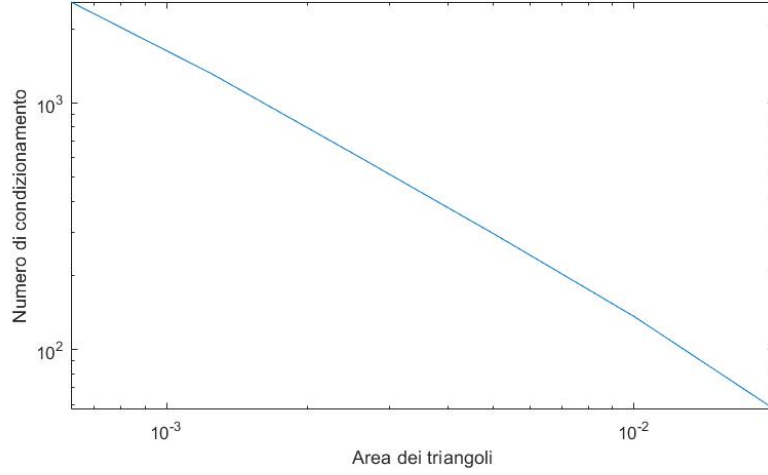


$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(E_0), 1) \rightarrow p = [0,9773 \quad -1,2408].$$

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(E_1), 1) \rightarrow p = [0,4974 \quad -0,3138].$$

⇒ Anche in questo caso abbiamo ottenuto i risultati attesi.

Il numero di condizionamento della matrice di rigidità associata al problema ha questo andamento:

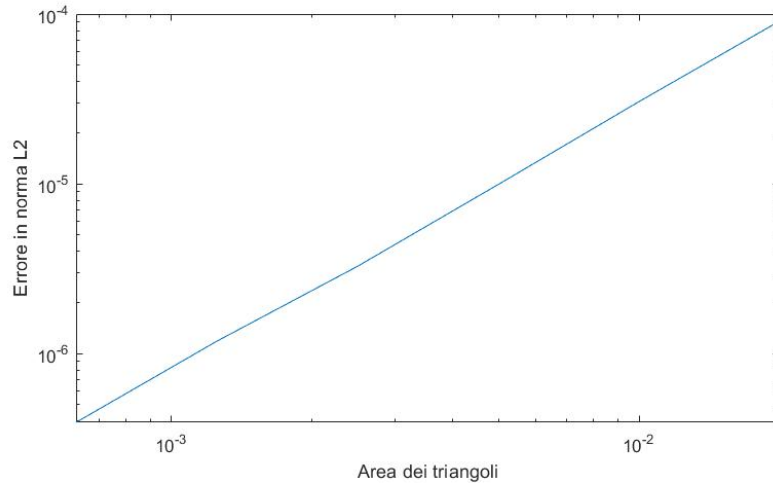


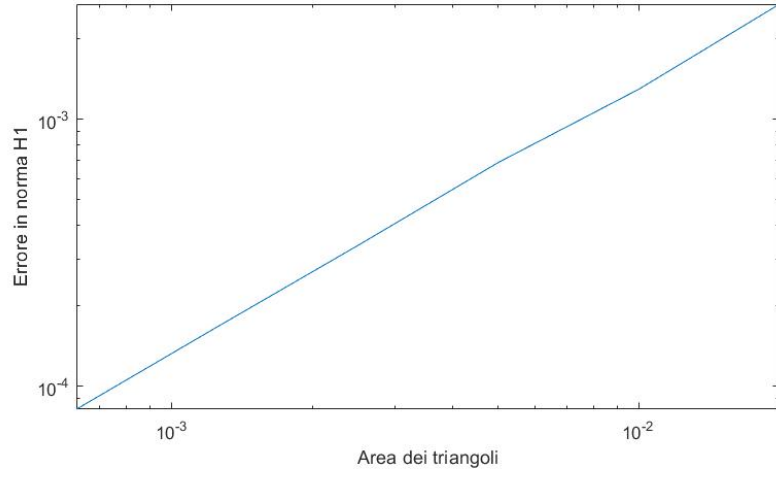
$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(\text{cond}_2(A)), 1) \rightarrow p = [-1,0959 \quad -0,1643].$$

⇒ La prima entrata del vettore restituito da *polyfit* dimostra (per le considerazioni fatte nella sezione 3) che $\text{cond}_2(A) \sim C \text{Area}^{-1}$.

7.4.2 Risultati ottenuti dalla risoluzione con elementi finiti quadratici

Riportiamo i grafici dell'andamento degli errori di discretizzazione:

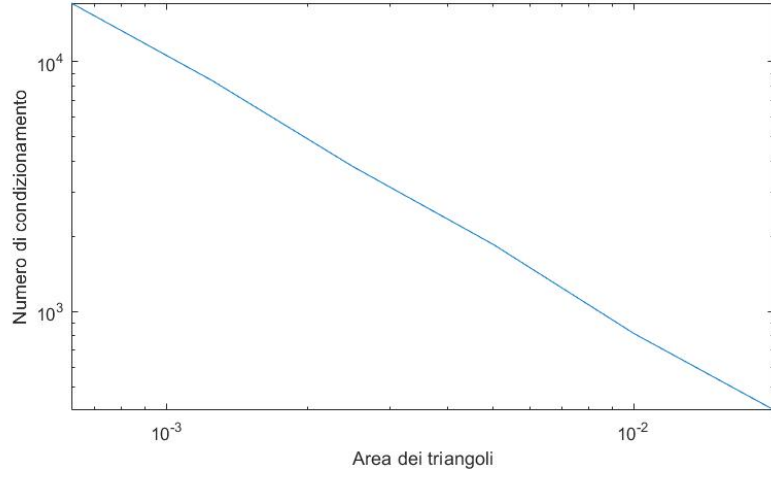




$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(E_0), 1) \rightarrow p = [1,5689 \quad -3,1847].$$

$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(E_1), 1) \rightarrow p = [1,0032 \quad -1,9957].$$

Per il numero di condizionamento in norma euclidea della matrice di rigidezza abbiamo:



$$p = \text{polyfit}(\log(\text{Area}), \log(\text{cond}_2(A)), 1) \rightarrow p = [-1,0911 \quad 1,7193].$$

8 Stabilizzazione di un problema di convezione diffusione

Infine abbiamo implementato il codice necessario per la stabilizzazione di un problema di convezione diffusione.

Riassumiamo qui brevemente il motivo per il quale si rende necessaria la stabilizzazione in alcuni dei problemi che rientrano in questa categoria.

Per comprendere questa necessità consideriamo il semplice problema 1D:

$$\begin{cases} -\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & 0 < x < L \\ u(0) = u_0 \\ u(L) = u_L, \end{cases}$$

e consideriamo una partizione uniforme del dominio $(0, L)$ con passo $h = L/N$. Utilizzando formule di derivazione numerica si ottiene:

$$-\epsilon \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \beta \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0,$$

che, introducendo $Pe_h = \frac{\beta h}{2\epsilon}$, si può scrivere come

$$(Pe_h - 1)u_{i+1} + 2u_i - (Pe_h + 1)u_{i-1} = 0.$$

Cercando una soluzione del tipo $u_i = C\xi^i$ si giunge alla soluzione

$$u_i = u_0 + (u_L - u_0) \frac{\xi_2^i - 1}{\xi_2^N - 1},$$

dove $\xi_2 = \frac{1+Pe_h}{1-Pe_h}$.

Notiamo che per $Pe_h > 1$, $\xi_2 < -1$ e di conseguenza per valori pari di i ξ_2^i sarà positiva, mentre per valori dispari di i sarà negativa. Inoltre il valore assoluto di ξ_2^i cresce al crescere di i , perciò la soluzione risultante avrà un comportamento oscillatorio.

Proprio da ciò deriva la necessità della stabilizzazione di problemi con $Pe_h \gg 1$. Per problemi 1D è sufficiente introdurre un parametro τ , noto come viscosità artificiale, per far sì che il numero di Peclet sia $Pe_h^* < 1$.

Nel caso di problemi 2D o 3D la questione della stabilizzazione è più complessa e il metodo da noi utilizzato per scrivere il codice è il metodo Streamline Upwind Petrov Galerkin (SUPG), consistente nella seguente formulazione:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \epsilon \nabla u_h \nabla \phi_j d\Omega + \int_{\Omega} \beta \cdot \nabla u_h \phi_j d\Omega + \sum_{E \in T} \tau_E \int_E (\nabla \cdot (\epsilon \nabla u_h) + \beta^t \nabla u_h) \cdot \beta^t \nabla \phi_j d\Omega \\ = \int_{\Omega} f \phi_j d\Omega + \sum_{E \in T} \tau_E \int_E f \beta^t \nabla \phi_j d\Omega \quad \forall j = 1, \dots, N_{dof}. \end{aligned}$$

La scelta del parametro τ_E deriva dalle seguenti relazioni:

$$Pe_h = m_k \frac{\|\beta\|_E h_E}{2\epsilon}$$

$$m_k = \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2C_*} \right\},$$

dove C_* è la costante della disuguaglianza inversa :

$$\|\Delta v_h\|_{0,E} \leq C_* h_E^{-1} |v_h|_{1,E}, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Per $k = 1$, $m_k = 1/3$, mentre per $k = 2$, $m_k = 1/24$, e

$$\tau_E = \begin{cases} m_k \frac{h_E^2}{4\epsilon}, & 0 \leq Pe_h < 1 \\ \frac{h_E}{2\|\beta\|_E}, & Pe_h \geq 1. \end{cases}$$

8.1 Descrizione del problema di convezione diffusione risolto

Per quanto affermato nella sezione precedente, abbiamo risolto un problema con $Pe_h \gg 1$, in modo tale da ottenere risultati considerevolmente diversi con e senza stabilizzazione, e poter quindi osservare in modo chiaro l'importanza e la necessità della stabilizzazione.

In particolare, abbiamo utilizzato il problema test:

$$\begin{cases} -\epsilon \Delta u + \beta \nabla u = f & \text{in } \Omega \\ + \text{condizioni di Dirichlet al contorno,} \end{cases}$$

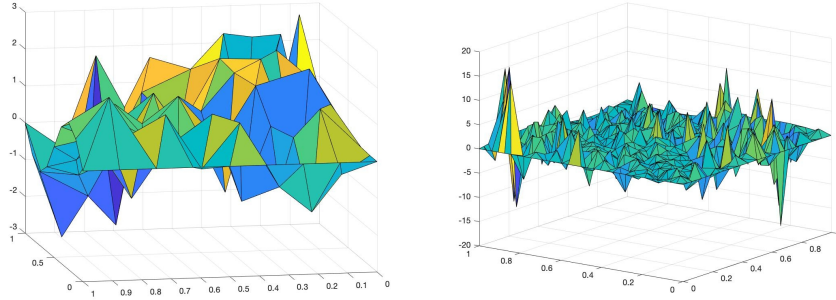
con $\epsilon = 0,01$, $\beta = [100000 \ 100000]$ e $f = 0,04\pi^2 \sin(2\pi xy)(x^2 + y^2) + 200000 \cos(2\pi xy)(x + y)$, la cui soluzione esatta è

$$u = \sin(2\pi xy).$$

Il dominio Ω è il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

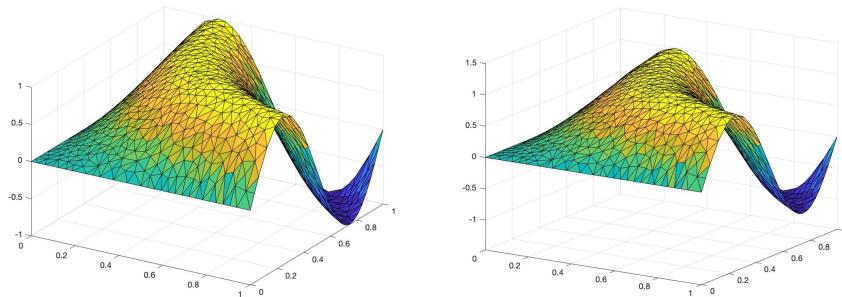
8.2 Stabilizzazione con elementi finiti lineari

Abbiamo risolto il problema descritto nella sezione 8.1 sia utilizzando elementi finiti lineari che quadratici e iniziamo analizzando i risultati ottenuti in \mathbb{P}^1 . Risolvendo il problema in questione senza l'utilizzo della stabilizzazione e osservando il grafico della soluzione discreta si vede chiaramente che la soluzione approssimata ha un brutto comportamento caratterizzato da brusche oscillazioni, essa è molto distante dall'approssimare la soluzione esatta. Un modo per ridurre il numero di Peclet è raffinare la mesh, ma in questo problema non si giunge ad un miglioramento della soluzione discreta neanche con aree dei triangoli molto piccole, anzi l'errore di discretizzazione aumenta con il raffinamento della mesh. Per constatare queste considerazioni è sufficiente osservare la figura 11.



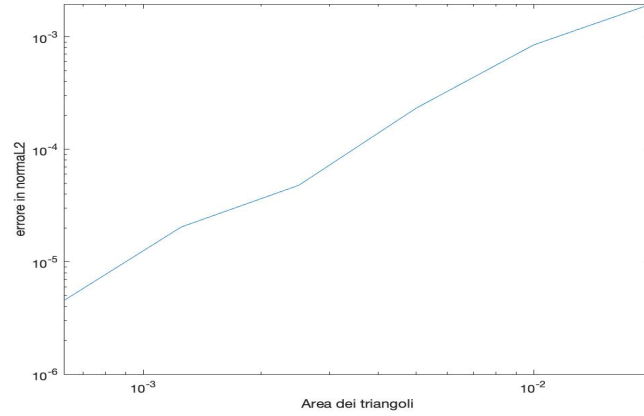
Pannello di sinistra: grafico della soluzione discreta con elementi finiti lineari ottenuta senza la stabilizzazione e con area dei triangoli 0.01; *Pannello di destra:* con area dei triangoli 0.0013.

In questo caso, quindi, non basta più raffinare la mesh per ottenere una soluzione discreta che approssimi correttamente la soluzione esatta, ma è necessario utilizzare il metodo di stabilizzazione descritto precedentemente. Utilizzando infatti il metodo SUPG descritto nella sezione 9, e confrontando i grafici della soluzione esatta e della soluzione discreta così ottenuta abbiamo:



Pannello di sinistra: grafico della soluzione esatta, *Pannello di destra:* grafico della soluzione ottenuta con la stabilizzazione e con elementi finiti lineari, area dei triangoli 0.0013.

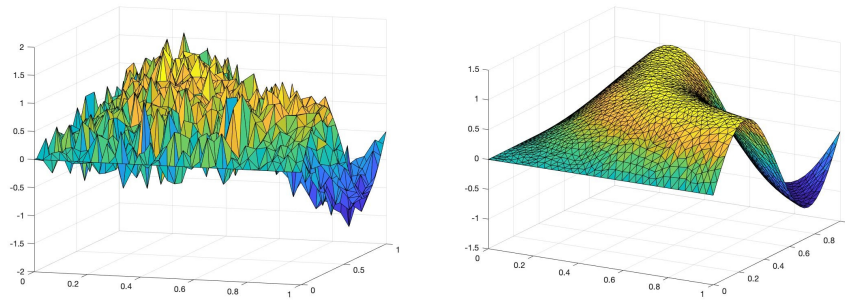
Si vede immediatamente dai grafici in figura che la soluzione discreta, trovata utilizzando la stabilizzazione e il metodo degli elementi finiti con elementi lineari, si comporta come la soluzione esatta del problema.



Il grafico dell'andamento dell'errore in norma L^2 della soluzione discreta nel caso lineare con stabilizzazione rispetta l'andamento atteso.

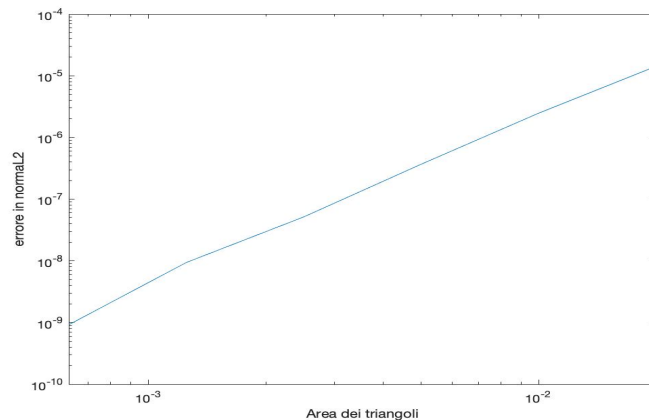
8.3 Stabilizzazione con elementi finiti quadratici

Analizziamo ora i risultati ottenuti in \mathbb{P}_2 . Risolvendo il problema in questione senza l'utilizzo della stabilizzazione si ottiene di nuovo una soluzione discreta con brusche oscillazioni e che non arriva ad approssimare la soluzione neanche raffinando molto la mesh, i risultati ottenuti con la stabilizzazione sono invece precisi.



Pannello di sinistra: grafico della soluzione ottenuta senza la stabilizzazione con elementi finiti quadratici; *Pannello di destra:* grafico della soluzione discreta utilizzando la stabilizzazione. (Area triangoli 0.0013 in entrambi i grafici)

Riportiamo anche il grafico dell'andamento dell'errore in norma L^2 della soluzione discreta nel caso quadratico con stabilizzazione:



Analizzando quindi un problema con $Pe_h \gg 1$ abbiamo dimostrato la necessità della stabilizzazione per poter approssimare adeguatamente la soluzione esatta.

9 Risoluzione di un problema parabolico

Un generico problema parabolico è del tipo

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\epsilon \nabla) + \beta \nabla u + \gamma u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, 0 < t \leq T \\ + \text{condizioni al contorno su } \partial\Omega & 0 < t \leq T \\ u = u_0 & \text{su } \Omega \text{ per } t = 0 \end{cases} \quad (9)$$

La soluzione u è ora funzione sia dello spazio che del tempo.

Sia $Q_T := \Omega \times [0, T]$, per ogni funzione w definita su questo spazio possiamo considerare la funzione dipendente solo dallo spazio

$$w(t) : x \in \Omega \rightarrow w(x, t). \quad (10)$$

A questo punto possiamo poi pensare la funzione w come funzione unicamente del tempo: $w(x, \cdot) : [0, T] \ni t \rightarrow (w(t))(x)$. Il problema parabolico in forma variazionale può essere scritto, con queste notazioni, come:

Trovare $u \in \mathbb{L}^2([0, T]; V) \cap \mathbb{C}^0([0, T]; H)$ tale che

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} b(u(t), v) + a(u(t), v) = F(t, v) & \forall v \in V, 0 < t \leq T \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (11)$$

L'utilità della scomposizione (10) è evidente dal fatto che possiamo scegliere le nostre funzioni base con cui approssimiamo la soluzione come funzioni unicamente dello spazio: $u_\delta(t) = \sum_k^{N_\delta} u_k(t) \phi_k(x)$. Possiamo così scrivere la matrice di rigidità A , associata alla forma bilineare $a(\cdot, \cdot)$, e la nuova matrice di massa B , associata a $b(\cdot, \cdot)$, con il metodo di Galerkin usato nei problemi ellittici e arrivare ad un problema di equazioni alle derivate ordinarie nell'unica incognita $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} Bu'(t) + Au(t) = f(t), & 0 < t \leq T \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (12)$$

Per risolvere questo sistema abbiamo utilizzato il metodo di Crank-Nicolson discretizzando l'intervallo temporale in N intervalli di lunghezza $\Delta t = \frac{T}{N}$.

9.1 Descrizione del problema parabolico risolto

Il problema parabolico preso da noi in esame è il seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\epsilon \nabla) = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, 0 < t \leq T \\ + \text{condizioni di Dirichlet su } \partial\Omega & 0 < t \leq T \\ u = u_0 & \text{su } \Omega \text{ per } t = 0 \end{cases} \quad (13)$$

con $\epsilon = 1$, $f = (2t + 1)\sin(x)\cos(y)$, la soluzione esatta è $u = t\sin(x)\cos(y)$. Il dominio del problema è definito da $T = 1$ e Ω è il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

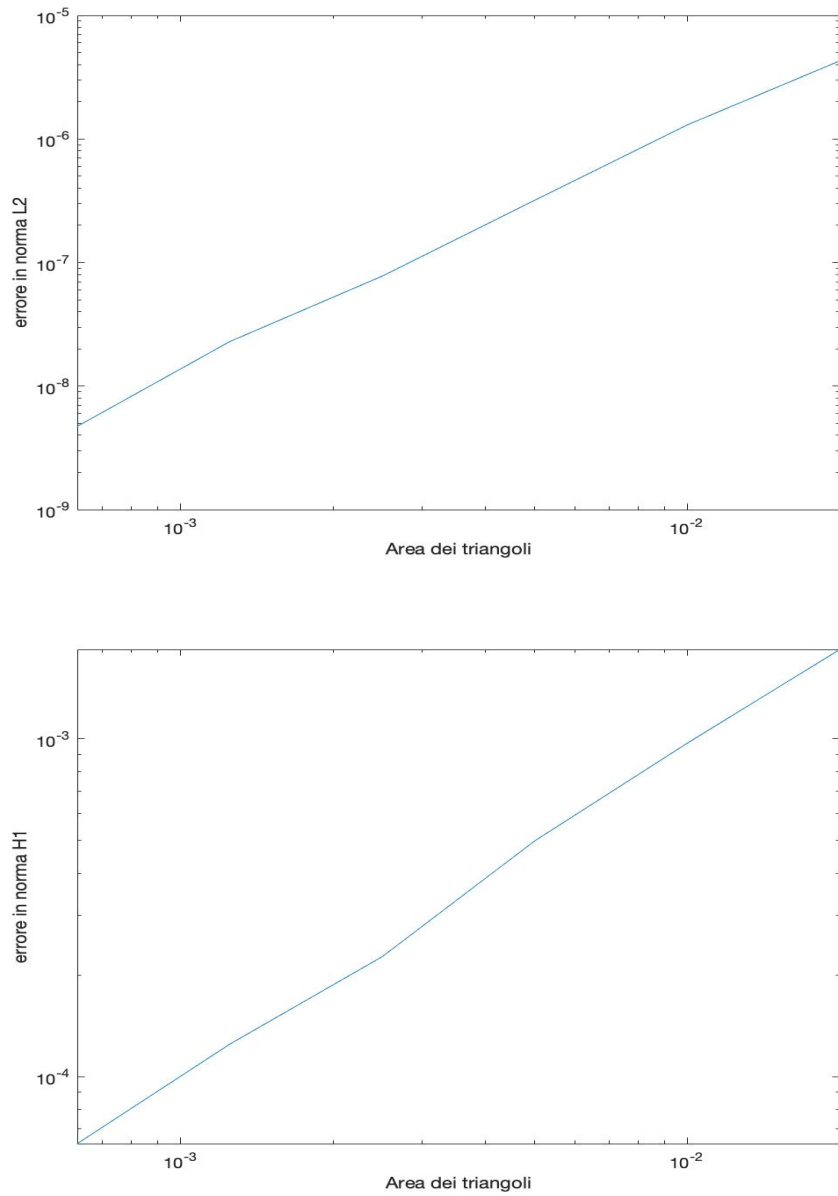
9.2 Risoluzione del problema e discussione dei risultati

L'errore della soluzione discreta non dipende solo più dalla scelta della dimensione dell'area dei triangoli ma anche dalla scelta del passo di discretizzazione dell'intervallo temporale. Una scelta di $\Delta t = \frac{T}{N}$ troppo grande potrebbe generare forti imprecisioni sulla soluzione discreta. Inoltre la nostra soluzione discreta approssimerà la soluzione esatta in tutti i punti con cui abbiamo discretizzato l'intervallo temporale.

La seguente analisi sull'andamento dell'errore è stata effettuata confrontando soluzione esatta e approssimata al tempo $T = 1$ e senza mai variare la discretizzazione temporale, realizzata scegliendo $N_t = 100$.

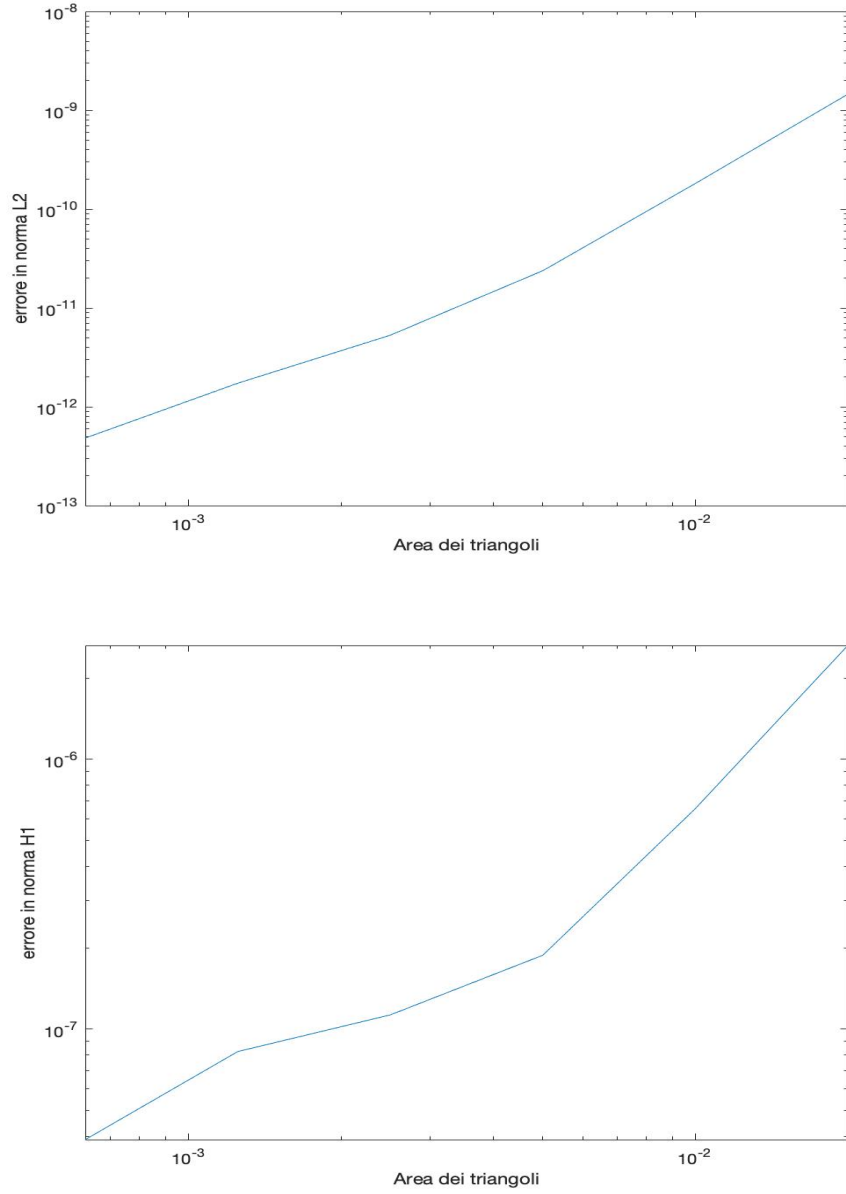
9.2.1 Risultati ottenuti con elementi finiti lineari

Riportiamo qui i grafici dell'andamento dell'errore di discretizzazione al variare dell'area dei triangoli per elementi finiti lineari, mantenendo invariata la discretizzazione temporale.



9.2.2 Risultati ottenuti con elementi finiti quadratici

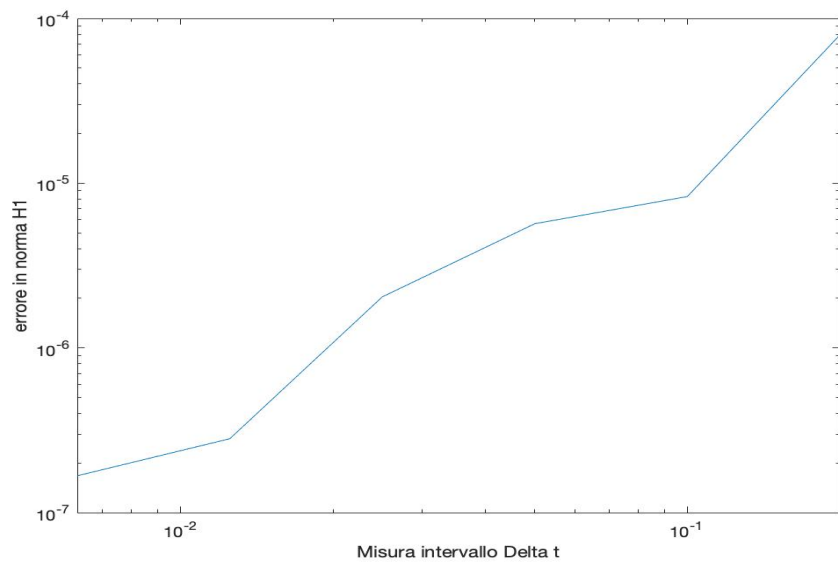
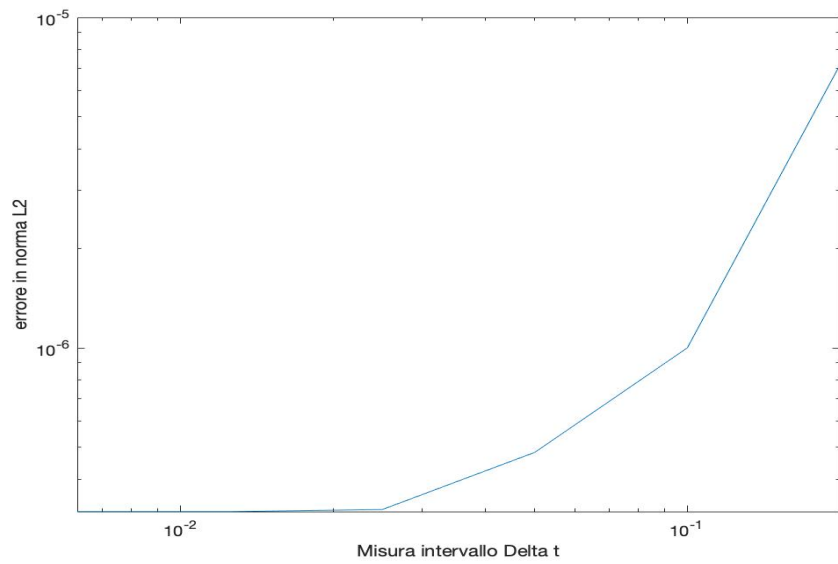
I grafici dell'andamento dell'errore di discretizzazione al variare dell'area dei triangoli per elementi finiti quadratici, mantenendo invariata la discretizzazione temporale, sono i seguenti



Sia nel caso di elementi finiti lineari che quadratici osserviamo che la soluzione discreta migliora con il raffinamento della mesh con un andamento coerente ai risultati teorici.

9.2.3 Risultati riguardanti la discretizzazione temporale

In conclusione studiamo anche l'andamento dell'errore in funzione dell'intervallo di discretizzazione temporale $\Delta t = \frac{T}{N_t}$. I seguenti grafici sono stati realizzati mantenendo l'area dei triangoli fissa al valore 0.005, partendo da $N_t = 5$ e raddoppiando questo valore ogni volta, con l'utilizzo di sei cicli. Per il grafico della norma L^2 (sopra) abbiamo utilizzato elementi finiti lineari e per quello in norma H^1 (sotto) elementi finiti quadratici.



Come ci aspettavamo l'errore di discretizzazione diminuisce al diminuire della misura degli intervalli Δt .