POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Matematica per l'Ingegneria

Tesi di Laurea

Operatori autoaggiunti e loro proprietà: uno strumento per la Meccanica Quantistica

Relatori
prof. Simone Dovetta
prof. Lorenzo Tentarelli

Candidato
Enrico Greppi

Anno Accademico 2021-2022

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Nel primo quarto del XX secolo furono effettuati diversi esperimenti che evidenziarono una serie di fenomeni inspiegabili nel quadro della fisica classica.
A seguito di esperimenti sulle radiazioni di un corpo nero, Max Planck arrivò ad affermare che l'energia associata alla radiazione elettromagnetica è trasmessa in unità discrete, dette quanti. Il valore E di un quanto di energia dipende dalla frequenza v della radiazione secondo la formula $E = hv$, dove h è la costante di Planck.
L'effetto fotoelettrico è un fenomeno che consiste nell'emissioni di elettroni da parte di una superficie metallica quando viene colpita da una radiazione elettromagnetica ad alta frequenza. Einstein riuscì a dare un'interpretazione corretta dell'effetto fotoelettrico spiegandolo con l'utilizzo dei quanti, poi denominati fotoni. Fu, quindi, evidenziata la natura quantistica della luce.
Niels Bohr propose un modello atomico includente il principio di quantizzazione dell'energia, riuscendo a spiegare le caratteristiche sperimentali dello spettro di emissione dell'atomo di idrogeno. Lo spettro di emissione di un elemento chimico è l'insieme delle frequenze della radiazione elettromagnetica emesse dagli elettroni dei suoi atomi quando questi compiono una transizione da uno stato ad energia maggiore verso uno a energia minore. Teorizzò, quindi, l'esistenza di orbite con valori discreti di energia per l'elettrone.
Compton ricorse all'ipotesi dei fotoni per spiegare un effetto particolare osservato nella diffusione della radiazione monocromatica dei raggi X. L'effetto Compton segnò la definitiva conferma della natura corpuscolare della luce. Vi erano due modelli contrastanti della radiazione, quello ondulatorio, risalente all'elettromagnetismo classico, e quello corpuscolare, introdotto dalla teoria dei quanti.
Queste nuove idee quantistiche causarono, però, un crescente numero di anomalie, fu quindi necessaria una nuova teoria fisica in grado di spiegare i nuovi fenomeni con coerenza. Questa necessità portò ad un nuovo formalismo matematico in cui le idee quantistiche trovarono una loro espressione compiuta con la nascita della Meccanica Quantistica.

In questa tesi viene preso in esame come l'analisi matematica ha contribuito a costruire una teoria fisica coerente con le nuove idee.
A partire dalla teoria analitica degli operatori autoaggiunti, se ne discuterà la relazione con la Meccanica Quantistica, approfondendo alcuni aspetti basilari. Prenderemo in analisi

gli operatori illimitati in spazi di Hilbert, dando rilevanza, in particolare, alla proprietà di autoaggiuntezza. Arriveremo poi a formulare il Teorema Spettrale. Inoltre, evidenzieremo come questi strumenti matematici sono essenziali in Meccanica Quantistica, prendendo in esame le parti della teoria fisica a cui essi sono legati. Infine, si arriverà a presentare una formulazione rigorosa della Meccanica Quantistica, che vedremo essere basata proprio sui concetti matematici trattati.
Per l'intera scrittura di questa tesi è stato preso a riferimento il testo:[1].

Capitolo 2

La nascita della Meccanica Quantistica

2.1 Breve riassunto dei due approcci

Nel 1925 nacque una totalmente nuova teoria: la Meccanica Quantistica. Per arrivare ad essa furono seguite due strade differenti.
Il primo approccio fu quello di Heisenberg, con il contributo di Born, Jordan, Dirac, che portò alla formulazione della Meccanica delle Matrici. Heisenberg prende la cinematica classica basata su posizione e velocità, quantità non osservabili a livello atomico, e la sostituisce con una nuova cinematica, basata interamente su frequenze e ampiezze di radiazioni emesse ed assorbite nei salti quantici. Da questo concetto nasce la Meccanica delle Matrici.

Il secondo approccio, iniziato nel 1924 da De Broglie e approfondito nel 1926 da Schrödinger, è quello che porta alla formulazione della Meccanica Ondulatoria.
Einstein e Planck avevano già mostrato che una radiazione elettromagnetica può avere comportamento corpuscolare o ondulatorio. De Broglie a partire da ciò scrisse una tesi in cui estese anche alla materia il dualismo onda-particella. Studiò l'idea che tale natura ondulatoria abbia rilievo solamente nella descrizione di dinamiche microscopiche. Suppose che una particella puntiforme, di energia E e quantità di moto p, possa essere associata ad un pacchetto d'onda di frequenza $\hat{v} = \frac{E}{h}$ e lunghezza d'onda $\hat{\lambda} = \frac{h}{p}$, dove h è la costante di Planck. Inoltre, ipotizzò che l'evoluzione del pacchetto d'onda, il cui comportamento deve essere governato da una nuova equazione, dovesse avere la proprietà di ridursi all'evoluzione classica di una particella puntiforme per piccoli valori di $\hat{\lambda}$.
Erwin Schrödinger, a partire dalla tesi di De Broglie, arrivò a formulare la nuova equazione di evoluzione (riuscendo anche ad estrarne proprio i livelli energetici dell'atomo di Bhor), dando una prima formulazione della Meccanica Ondulatoria.

2.2 L'equazione di Schrödinger

Schrödinger congettura che la meccanica classica possa essere considerata come un caso limite della più generale meccanica delle onde, capace di descrivere il comportamento delle particelle microscopiche. Associando ad una particella microscopica, con quantità di moto p, un pacchetto d'onda di lunghezza d'onda $\hat{\lambda} = \frac{h}{p}$, la congettura di Schrödinger può essere schematizzata come segue

$$\textit{Meccanica delle Onde} \rightarrow \textit{meccanica classica per } \hat{\lambda} \rightarrow 0.$$

Il moto di una particella nello spazio è descritto per mezzo di una funzione d'onda $\psi(t) \equiv \psi(\cdot, t)$, siano poi $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la costante di Planck normalizzata, i l'unità immaginaria, m la massa della particella e $V(x)$ l'energia potenziale della particella in posizione x. Schrödinger arrivò a formulare l' equazione:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi + V(x)\psi, \tag{2.1}$$

che prende il nome proprio di Equazione di Schrödinger. Data la funzione onda ψ_0 al tempo $t = 0$, determina la funzione onda ad ogni tempo $t > 0$.
In che senso la soluzione ψ descrive il moto di una particella microscopica? Tale funzione, per la presenza dell'unità immaginaria non può avere un significato fisico diretto. Serve trovare una quantità reale ad essa associata. A questo scopo viene considerata la norma L^2 della soluzione ψ: essa è reale e si conserva nel tempo.

Proposizione 2.1. *Sia $\psi(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^3$ soluzione di (2.1), sia differenziabile due volte rispetto a x e differenziabile rispetto a t, tale che per ogni $t > 0$*

$$|\psi(x, t)\nabla\psi(x, t)| < \frac{a}{|x|^{2+\eta}},$$

dove a, η sono due costanti positive. Allora per ogni $t > 0$ si ha :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x,0)|^2 dx.$$

Questi risultati indicano che lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3)$ è lo spazio naturale per ψ e che la quantità $|\psi(x, t)|^2$ può essere una quantità con significato fisico. La corretta interpretazione di tale quantità fu offerta da Born nel 1926.

2.3 Interpretazione e rappresentazione matematica

Per Born, un elettrone, essendo sperimentalmente rilevato in un punto dello spazio, deve essere considerato come una particella puntiforme. D'altro canto, $|\psi(x, t)|^2$ è una funzione definita nell'intero spazio $L^2(\mathbb{R}^3)$ e non può univocamente identificare la posizione nello spazio di una particella puntiforme. Il campo guida, rappresentato da una funzione scalare ψ delle coordinate di tutte le particelle coinvolte e del tempo, propaga in accordo con l'equazione di Schrödinger (2.1). Quantità di moto ed energia, tuttavia, sono trasmesse come se le particelle si muovessero effettivamente. I percorsi di queste particelle sono determinati solo nella misura in cui le leggi dell'energia e della quantità di moto li limitano. Solo la probabilità di un certo percorso è trovata, determinata dai valori di ψ. Dato un elettrone descritto al tempo t dalla funzione d'onda $\psi(x,t)$, la quantità $|\psi(x,t)|^2$ è la densità di probabilità di trovare l'elettrone al tempo t, nella posizione x. Più precisamente, la probabilità di trovare un elettrone al tempo t in una regione dello spazio A è: $\int_A |\psi(x,t)|^2 dx$. Per rendere questa interpretazione coerente dal punto di vista matematico basta normalizzare la funzione d'onda iniziale $\psi_0 := \psi(x,0)$, così:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi_0(x)|^2 dx = 1.$$

La proposizione 2.1 è ora interpretata come conservazione della legge di probabilità. Nella meccanica classica una quantità osservabile relativa ad un dato sistema è rappresentata da una funzione regolare e a valori reali definita nello spazio delle fasi del sistema. Lo spazio delle fasi di un sistema è lo spazio astratto in cui è possibile descrivere matematicamente l'evoluzione nel tempo di un sistema fisico. Come possono essere rappresentate le quantità osservabili in questa nuova teoria?
Il valore medio di una funzione g della posizione ($g(x)$), quando la particella è descritta dalla funzione d'onda $\psi(x,t)$, sarà dato da

$$\langle g\rangle(t) = \int g(x)|\psi(x,t)|^2 dx$$

e può essere riscritto come prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$\langle g\rangle(t) = (\psi(t), g\psi(t)).$$

Sia ϕ una funzione appartenente allo spazio delle fasi $L^2(\mathbb{R}^3)$, che ricordiamo essere lo spazio naturale per ψ. Importanti quantità osservabili sono la j-esima componente di posizione (x_j) e di quantità di moto (p_j). È possibile riscriverle in termini operatoriali come segue

$$\hat{x}_j : L^2(\mathbb{R}^3) \ni \phi \to (\hat{x}_j\phi)(x) := x_j\phi(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

e

$$\hat{p}_j : L^2(\mathbb{R}^3) \ni \phi \to (\hat{p}_j\phi)(x) := \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

Questi operatori sono ben definiti sul loro dominio (in un sottospazio di $L^2(\mathbb{R}^3)$), lineari e simmetrici. Segnaliamo che questa definizione degli operatori, grazie alla proprietà di simmetria, offre la possibilità di rendere tali operatori autoaggiunti. L'autoaggiuntezza è una proprietà fondamentale, come vedremo, in Meccanica Quantistica. Essa garantirà la possibilità di definire una funzione qualsiasi di questi operatori e che il loro spettro sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.
Inoltre, ora si può ottenere il valore medio di x_j e p_j come prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$\langle x_j\rangle(t) = (\psi(t), \hat{x}_j\psi(t)).$$

$$\langle p_j \rangle(t) = (\psi(t), \hat{p}_j \psi(t)).$$

Identificate le quantità osservabili fondamentali di posizione e quantità di moto, per ogni altro osservabile classico $f(x,p)$, il corrispondente osservabile nella nuova teoria è rappresentato dall'operatore simmetrico $\hat{f}$ ottenuto sostituendo x_j e p_j, $j = 1{,}2{,}3$, rispettivamente con gli operatori $\hat{x}_j$ e $\hat{p}_j$. Questa operazione sarà resa possibile dal Teorema Spettrale che ci permetterà di definire rigorosamente funzioni di operatori autoaggiunti.
Infine, segnaliamo che, in un sistema classico, l'insieme dei possibili risultati di una misurazione sul sistema di un osservabile, rappresentato da una funzione f, è lo spettro, o l'immagine, della funzione f. È, come già detto in precedenza, un numero reale. Per analogia, in Meccanica Quantistica, assumiamo che l'insieme dei possibili risultati di una misurazione sul sistema di un osservabile, rappresentato dall'operatore $\hat{f}$, è lo spettro dell'operatore $\hat{f}$. Questa assunzione è coerente con il significato fisico di misurazione di un osservabile in quanto sarà possibile ricondursi allo spettro di un operatore autoaggiunto, che vedremo essere reale, e, di conseguenza, anche in Meccanica Quantistica la misurazione di un osservabile sarà sempre un numero reale.
Questa fondamentale proprietà dello spettro è, quindi, garantita per gli operatori autoaggiunti ma non per quelli simmetrici. La maggior parte degli operatori che rappresentano un osservabile sono illimitati e per essi le proprietà di autoaggiuntezza e simmetria non coincidono. Per una coerente rappresentazione matematica sono quindi state studiate le proprietà di questi operatori e in questa tesi ne sono analizzati i risultati principali.
Un altro ruolo chiave è quello del Teorema Spettrale che consentirà di definire rigorosamente il concetto di funzione di un dato operatore, permettendo così di estendere l'interpretazione di Born alla distribuzione di probabilità per gli esiti di una misurazione legata ad un generico osservabile.

Capitolo 3

Operatori autoaggiunti

In questo capitolo, innanzitutto, introdurremo i concetti base dell'analisi funzionale relativi agli operatori in spazi di Hilbert. Prenderemo in esame i concetti di simmetria e autoaggiuntezza e vedremo come, partendo da un operatore illimitato simmetrico, si possa giungere, per mezzo di operazioni di estensione, ad un operatore autoaggiunto. Studieremo, poi, alcuni criteri per l'autoaggiuntezza e le principali proprietà degli operatori autoaggiunti, in particolare, dimostreremo che lo spettro di un operatore autoaggiunto è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Infine, saranno introdotti gli operatori isometrici e unitari e sarà presentata la loro utilità in funzione degli operatori autoaggiunti.

3.1 Introduzione agli spazi di Hilbert

Iniziamo la trattazione richiamando la seguente definizione.

Definizione 3.1. *Sia H uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Un prodotto scalare su $\mathscr{H}$ è un'applicazione*

$$(\, . \, , \, . \,) : \; H \times H \to \mathbb{C}$$

tale che :

- $(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall x, y, z \in H$
- $(x, y) = \overline{(y, x)}$ $\forall x, y \in H$
- $(x, x) \geq 0$ $\forall x \in H$
- $(x, x) = 0$ *se e solo se* $x = 0$.

Da queste proprietà segue l'antilinearità rispetto alla prima componente:

$$(\alpha x, y) = \bar{\alpha}(x, y).$$

Infatti si ha: $(\alpha x, y) = \overline{(y, \alpha x)} = \overline{\alpha(y, x)} = \bar{\alpha}\overline{(y, x)} = \bar{\alpha}(x, y)$.

Ogni prodotto scalare induce la corrispondente norma:

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$$

Definizione 3.2. *Definiamo spazio di Hilbert $\mathscr{H}$ uno spazio vettoriale munito di prodotto scalare $(\, . \, , \, . \,)$, tale che $\mathscr{H}$ con la norma indotta dal prodotto scalare sia completo, cioè ogni succesione di Cauchy in $\mathscr{H}$ è convergente.*

Assumeremo, quando non specificato, $\mathscr{H}$ separabile (ovvero che ammette base ortonormale) e a dimensione infinita.
Richiamiamo anche la nozione di spazio di Banach.

Definizione 3.3. *Sia X uno spazio vettoriale sul quale è definita una norma $\| \cdot \|$. Se lo spazio normato $(X, \| \cdot \|)$ è completo, rispetto alla metrica indotta dalla norma, viene detto spazio di Banach.*

Poiché ne faremo ampio uso nel seguito, richiamiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

Proposizione 3.4. *Dato uno spazio di Hilbert $\mathscr{H}$, si ha*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|, \qquad \forall x, y \in \mathscr{H} \tag{3.1}$$

Ricordiamo poi la definizione dello spazio delle funzioni quadrato integrabili rispetto alla misura di Lebesgue. Per ogni aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, definiamo

$$L^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ misurabile } \mid \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

su cui consideriamo il prodotto scalare

$$\forall f, g \in L^2(\Omega), \ (f, g) := \int_\Omega \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Segnaliamo, poi, le seguenti proprietà di densità. Lo spazio $C_0^\infty(\Omega)$ delle funzioni differenziabili infinite volte a supporto compatto in Ω è denso in $L^2(\Omega)$.
Lo spazio di Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Lo spazio di Schwartz è lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ a decrescita rapida, cioè, f tali che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x_1^{j_1} ... x_n^{j_n} D^\alpha f(x)| < \infty$$

per ogni $j_1 ... j_n \in \mathbb{N}$ e ogni $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ per cui $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, dove

$$D^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Da qui in avanti, quando il dominio di integrazione sarà omesso in un integrale, esso sarà inteso come il dominio di definizione della funzione integrata, rispetto alla variabile di integrazione.
Definiamo la trasformata di Fourier di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ come:

$$\tilde{f}(k) := (Ff)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-ik\cdot x} f(x) dx$$

e la sua antitrasformata :

$$f(x) := (F^{-1}\tilde{f})(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{ik\cdot x} \tilde{f}(k) dk.$$

La trasformata di Fourier è un' applicazione biettiva da $S(\mathbb{R}^n)$ a $S(\mathbb{R}^n)$ e ha l'importante proprietà di ridurre l'operazione di derivazione in una più semplice moltiplicazione. Infatti, data $f \in S(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\left(F\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(k) = ik_j(Ff)(k).$$

Notiamo che la trasformata di Fourier può essere estesa a $L^2(\mathbb{R}^n)$ in quanto $S(\mathbb{R}^n)$ è denso in tale spazio.
Richiamiamo poi la nozione di derivata debole e di spazio di Sobolev. Data $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e un multi indice α, diciamo che $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ è la derivata parziale debole di ordine α di u se :

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi dx \ , \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

(e scriviamo semplicemente $D^\alpha u = v$). La derivata debole è unica e coincide con la derivata classica se $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$. Lo spazio di Sobolev $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$ è lo spazio delle funzioni $u \in L^2(\Omega)$ tali per cui, per ogni multi indice α, $|\alpha| \leq m$, esiste la derivata debole $D^\alpha u$ ed appartiene a $L^2(\Omega)$.
Lo spazio $H^m(\Omega)$ con il prodotto scalare

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} := \int_\Omega \overline{u} v dx + \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} \int_\Omega \overline{D^\alpha u} D^\alpha v dx$$

è uno spazio di Hilbert separabile.
Quando $\Omega = \mathbb{R}^n$ lo spazio di Sobolev può essere definito anche con l'utilizzo della trasformata di Fourier:

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) | \int |k|^{2m} |\tilde{f}(k)|^2 dk < \infty \right\}.$$

Quest'ultima definizione dello spazio $H^m(\mathbb{R}^n)$ coincide con la definizione di Spazio di Sobolev presentata in precedenza.

3.2 Operatori limitati e illimitati

Introduciamo ora gli operatori limitati e illimitati in spazi di Hilbert e i concetti di base ad essi collegati.

Definizione 3.5. *Un operatore lineare in uno spazio di Hilbert $\mathscr{H}$ è una mappa $T : D(T) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ tale che $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T f + \beta T g$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e ogni $f, g \in H$*

L'insieme $D(T)$ è detto dominio di T e assumiamo sempre che sia uno spazio vettoriale e, se non specificato diversamente, che sia denso in $\mathscr{H}$. Il nucleo di T è $Ker(T) := \{f \in D(T) \mid Tf = 0\}$ e l'immagine di T è $Im(T) := \{f \in \mathscr{H} \mid f = Tg,\ g \in D(T)\}$.

Definizione 3.6. *Un operatore $T : D(T) \to \mathscr{H}$ è limitato se*

$$\|T\| := \sup_{f \in D(T), f \neq 0} \frac{\|Tf\|}{\|f\|} = \sup_{f \in D(T), \|f\|=1} \|Tf\| < \infty. \tag{3.2}$$

Il numero $\|T\|$ è la norma dell'operatore T . Tale norma può essere definita in modi equivalenti, per esempio, come

$$\|T\| := \inf\{c > 0 : \|Tf\| \leq c\|f\|,\ \forall f \in D(T)\}. \tag{3.3}$$

Da (3.3) segue che se esiste $c > 0$ tale per cui $\|Tf\| \leq c\|f\|$ per ogni $f \in \mathscr{H}$ allora T è limitato e $\|T\| \leq c$. Per gli operatori lineari le proprietà di limitatezza e di continuità si equivalgono, per la validità di questo fatto ci riferiamo all'inizio del capitolo 4 del testo [2], in cui è ampiamente discusso. Lo spazio degli operatori limitati in $\mathscr{H}$ con la norma (3.2) è uno spazio di Banach e lo denoteremo con *$B(\mathscr{H})$.*
Introduciamo ora un'uguaglianza che sarà utile in seguito.

Proposizione 3.7. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore limitato. Per ogni $f \in D(A)$ abbiamo*

$$\|Af\| = \sup_{g \in H, \|g\|=1} |(g, Af)| = \sup_{g \in H, \|g\|=1} |(Af, g)|.$$

Dimostrazione. Fissiamo $f \in D(A)$ e definiamo il funzionale $F_f : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ tale che

$$F_f(g) = (g, Af)_{\mathscr{H}}, \quad \forall g \in \mathscr{H}.$$

F_f è chiaramente lineare e, per (3.1), è limitato. Di conseguenza, Per il Teorema 3.14 (enunciato in seguito nel testo), esiste ed è unica $u \in \mathscr{H}$ tale che

$$F_f(g) = (g, v)_{\mathscr{H}}, \quad \forall g \in \mathscr{H}$$

e tale che $\|F_f\|_{\mathscr{H}'} = \|v\|_{\mathscr{H}}$.
D'altro canto, per definizione, $v = Af$ e quindi $\|Af\|_{\mathscr{H}} = \|F_f\|_{\mathscr{H}'}$. Infine, per definizione di norma di un operatore, ricordando che un funzionale lineare e limitato è un caso particolare di operatore lineare e limitato, abbiamo che

$$\|Af\|_{\mathscr{H}} = \|F_f\|_{\mathscr{H}'} = \sup_{g \in \mathscr{H},\ \|g\|=1} |F_f(g)| = \sup_{g \in \mathscr{H},\ \|g\|=1} |(g, Af)|.$$

L'equivalenza con

$$\sup_{g\in H,\|g\|=1} |(Af,g)|$$

segue, chiaramente, dalle proprietà di modulo e prodotto scalare. □

In certi casi un operatore, inizialmente definito su un dato dominio D_1, può essere esteso ad un dominio D_2, tale per cui $D_2 \supseteq D_1$.

Definizione 3.8. *L'operatore $B : D(B) \to \mathscr{H}$ si dice essere un'estensione dell'operatore $A : D(A) \to \mathscr{H}$ se $D(B) \supseteq D(A)$ e $Bf = Af$, $\forall f \in D(A)$.*

Per indicare che un operatore B è estensione di un operatore A useremo la notazione $B \supseteq A$. Un operatore limitato A , definito su $D(A)$ (denso in $\mathscr{H}$), può essere unicamente esteso per continuità all'intero spazio di Hilbert $\mathscr{H}$. Questo risultato è giustificato nel testo [2], in particolare, ci riferiamo al Teorema 4.19 nel Capitolo 4 del testo citato. Definiamo, per una sequenza di operatori limitati, le seguenti convergenze.

Definizione 3.9. *Sia $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successioni di operatori limitati in $\mathscr{H}$ e sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore limitato. Allora definiamo le seguenti convergenze convergenza forte (o in norma):*

$$n - \lim_{k\to\infty} A_k = A \text{ se } \lim_{k\to\infty} \|A_k - A\| = 0,$$

convergenza debole:

$$w - \lim_{k\to\infty} A_k = A \text{ se } \lim_{k\to\infty} \|A_k f - Af\| = 0 \ \forall f \in \mathscr{H},$$

convergenza debole stella:

$$w^* - \lim_{k\to\infty} A_k = A \text{ se } \lim_{k\to\infty} (A_k f, g) = (Af, g) \ \forall f, g \in \mathscr{H}.$$

Se non altrimenti specificato, quando si considererà una convergenza deve essere intesa come quella forte.

In seguito, dati due operatori $A : D(A) \to \mathscr{H}$ e $B : D(B) \to \mathscr{H}$, useremo la notazione di moltiplicazione AB per indicare la loro composizione $A \circ B$. Introduciamo ora la nozione di operatore inverso.

Definizione 3.10. *L'operatore $T^{-1} : D(T^{-1}) \to \mathscr{H}$ è detto operatore inverso dell'operatore $T : D(T) \to \mathscr{H}$ se*

$$T^{-1}T = TT^{-1} = I,$$

dove $I : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ è l'operatore identità.

Proposizione 3.11. *L'inverso di un operatore $T : D(T) \to \mathscr{H}$ è definito se e solo se $Ker(T) = \{0\}$. Quando definito abbiamo:*

$$D(T^{-1}) = Im(T) \text{ e } Im(T^{-1}) = D(T).$$

Possiamo dare una caratterizzazione di operatore inverso, per farlo prima ci occorre definire la serie di Neumann.

Definizione 3.12. *Sia $C : D(C) \to \mathscr{H}$ un operatore limitato con $\|C\| < 1$. Allora si dice serie di Neumann relativa all'operatore C, l'operatore*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C^n,$$

dove con la notazione di potenza di C si intende $C^0 = I$, $C^1 = C$, $C^2 = CC = C \circ C$ e così via.

Proposizione 3.13. *Se C è un operatore limitato in $\mathscr{H}$, con $\|C\| < 1$ allora la serie di Neumann*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C^n \tag{3.4}$$

converge e definisce l'operatore $(I + C)^{-1}$, anch'esso limitato in $\mathscr{H}$.

Dimostrazione. Se definiamo, per ogni $N \in \mathbb{N}$, $S_N := \sum_{n=0}^{N}(-1)^n C^n$, abbiamo, per $N < M$

$$\|S_N - S_M\| = \| \sum_{n=N+1}^{M} (-1)^n C^n\| \leq \sum_{n=N+1}^{M} \|C\|^n = \|C\|^{N+1} + ... + \|C\|^M.$$

Ricordando che $\|C\| < 1$, possiamo concludere che per ogni $\epsilon > 0$ esiste n_ϵ tale per cui $\|S_N - S_M\| < \epsilon$ per ogni $N, M > n_\epsilon$. $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ è quindi una successione di Cauchy in $B(\mathscr{H})$ e perciò, essendo in uno spazio di Banach, tale successione converge ad un elemento appartenente a $B(\mathscr{H})$.
Inoltre:

$$(I + C) \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} C^{n+1} = C^0 = I$$

e allo stesso modo $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C^n (I+C) = I$, da cui segue $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n C^n = (I+C)^{-1}$ $\square$

Osserviamo anche che, sotto le stesse ipotesi della Proposizione 3.13 per C, la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C^n \tag{3.5}$$

può essere trattata come (3.4) definendo $B := (-1)C$ ($\|B\| = |1|\|C\| < 1$) e applicando la Proposizione 3.13 a B, ottenendo così che (3.5) converge e coincide con l'operatore $(I + B)^{-1} = (I - C)^{-1}$

3.3 Operatori aggiunti

Introduciamo la nozione di operatore aggiunto, studiandone le principali proprietà. Saremo così in grado, successivamente, di prendere in esame gli operatori simmetrici e autoaggiunti, le due tipologie di operatori su cui si basa la formulazione della Meccanica Quantistica di nostro interesse.

Sia A un operatore lineare limitato in $\mathscr{H}$. Per ogni $f \in \mathscr{H}$ definiamo il funzionale in $\mathscr{H}$

$$\Phi_f : g \in \mathscr{H} \mapsto (f, Ag). \tag{3.6}$$

Tale funzionale è lineare, per la proprietà del prodotto scalare rispetto alla seconda componente, e limitato, poichè $|\Phi_f(g)| \leq_{(3.1)} \|f\|\|Ag\| \leq \|f\|\|A\|\|g\|$, dove l'ultima disuguaglianza segue dalla limitatezza di A.

Teorema 3.14. *(Teorema di Riesz-Fréchet)*
Sia $\mathscr{H}$ di Hilbert e l'applicazione $\Psi : \mathscr{H} \ni y \mapsto f_y = \Psi(y) \in \mathscr{H}'$ definita da $f_y(x) := (y, x)$ per ogni $x \in \mathscr{H}$.
Allora l'applicazione Ψ è un'isometria antilineare suriettiva .

Per isometria si intende che $\|\Psi(y)\|_{\mathscr{H}'} = \|y\|_H$ per ogni $y \in \mathscr{H}$. È chiaro che ogni isometria è iniettiva poichè $Ker(\Psi) = \{0\}$, in quanto se esistesse per assurdo $y \in Ker(\Psi)$, $y \neq 0$, avremmo $0 = \|\Psi(y)\|_{\mathscr{H}'} = \|y\|_{\mathscr{H}} \neq 0$. Ci è utile osservare che Ψ è un isomorfismo e in particolare per ogni $f \in \mathscr{H}'$ esiste ed è unico $y \in \mathscr{H}$ tale che $f = f_y$, $\|y\|_{\mathscr{H}} = \|f_y\|_{\mathscr{H}'}$. Possiamo ora concludere che per il Teorema 3.14 esiste un unico $h \in \mathscr{H}$ tale che $\Phi_f(g) = (f, Ag) = (h, g)$, per ogni $g \in \mathscr{H}$.
Per enunciare il Teorema 3.14 e le osservazioni fatte ad esso relative abbiamo preso a riferimento il Capitolo 5 nel testo [2].

Definizione 3.15. *Sia A un operatore lineare e limitato. Si dice operatore aggiunto di A la mappa: $A^* : \mathscr{H} \ni f \to h \in \mathscr{H}$ tale che $(f, Ag) = (h, g)$, per ogni $g \in \mathscr{H}$.*

Proposizione 3.16. *A^* è un operatore lineare, limitato e $\|A\| = \|A^*\|$*

Dimostrazione. Partendo da $(f, \alpha Ag + \beta Az)$ mostriamo la linearità del funzionale Φ_f. Grazie alla linearità dell'operatore A, abbiamo che

$$(f, \alpha Ag + \beta Az) = (f, A(\alpha g + \beta z)) = \Phi_f(\alpha g + \beta z),$$

e, grazie alla linerità del prodotto scalare, abbiamo che

$$(f, \alpha Ag + \beta Az) = \alpha(f, Ag) + \beta(f, Az) = \alpha\Phi_f(g) + \beta\Phi_f(z).$$

La seguente uguaglianza è quindi valida

$$\Phi_f(\alpha g + \beta z) = \alpha\Phi_f(g) + \beta\Phi_f(z).$$

Possiamo perciò concludere che Φ_f è lineare. L'aggiunto è definito tramite Φ_f con il Teorema 3.14. La linearità di Φ_f garantisce la linearità dell'operatore aggiunto.

Per quanto riguarda la limitatezza, da un lato si ha

$$\begin{aligned}\|A^*f\| &= \sup_{g\in H,\ \|g\|=1} |(g, A^*f)| = \sup_{g\in H,\ \|g\|=1} |(Ag, f)| \\ &\leq_{(3.1)} \|f\| \sup_{g\in H,\ \|g\|=1} \|Ag\| = \|f\|\|A\|\end{aligned}$$

quindi, per (3.3), $\|A^*\| \leq \|A\|$. Dall'altro lato,

$$\begin{aligned}\|Af\| &= \sup_{g\in \mathscr{H},\ \|g\|=1} |(g, Af)| = \sup_{g\in \mathscr{H},\ \|g\|=1} |(A^*g, f)| \\ &\leq_{(3.1)} \|f\| \sup_{g\in \mathscr{H},\ \|g\|=1} \|A^*g\| = \|f\|\|A^*\|\end{aligned}$$

da cui, sempre per (3.3), $\|A\| \leq \|A^*\|$, che implica infine, $\|A\| = \|A^*\|$.

$\square$

Per un operatore illimitato la definizione di aggiunto è più delicata, perchè il funzionale (3.6) non è limitato per qualsiasi $f \in \mathscr{H}$. Per estendere la nostra discussione, l'idea è quindi quella di costruire l'aggiunto su un dominio opportuno.

Definizione 3.17. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore illimitato. Definiamo il sottospazio lineare $D(A^*)$ di $\mathscr{H}$ come:*

$$\begin{aligned} D(A^*) &:= \{f \in \mathscr{H} \mid \Phi_f \text{ limitato su } D(A)\} = \\ &\{f \in \mathscr{H} \mid \sup_{g\in D(A),\|g\|=1} |(f, Ag)| < \infty\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

In accordo alla Definizione 3.17 , per ogni $f \in D(A^*)$ il funzionale (3.6) definito su $D(A)$ è limitato.

Teorema 3.18. *(Teorema di Hahn-Banach)*
Sia X spazio di Banach, W sottospazio vettoriale di X. Sia $f : W \to \mathbb{C}$ lineare e limitata. Allora esiste $\tilde{f} \in X'$ tale che $\tilde{f}|_W = f$ e $\|\tilde{f}\|_{X'} = \|f\|_{W'}$.

Per enunciare il Teorema 3.18 ci siamo riferiti al Capitolo 5 del testo [2]. Non dimostriamo il teorema ma segnaliamo che esso ci suggerisce che se W è denso in X allora $\tilde{f}$ è unica. Il funzionale (3.6) appartiene al duale di $D(A)$, il quale è un sottospazio vettoriale, ci troviamo in spazi di Hilbert e possiamo applicare il Teorema 3.18. Se $D(A)$ è denso in $\mathscr{H}$, il funzionale ha un' unica estensione ad un funzionale lineare limitato in $\mathscr{H}$ e l'operatore aggiunto ad esso associato è unico.
Per il Teorema 3.14 esiste unico $h \in \mathscr{H}$ tale che $\Phi_f(g) = (f, Ag) = (h, g)$ e (3.7) può essere espressa come:

$$D(A^*) = \{f \in \mathscr{H} \mid \exists h \in \mathscr{H} \text{ tale che } (f, Ag) = (h, g)\ \forall g \in D(A)\}.$$

Ora possiamo definire l'operatore aggiunto in modo simile a quanto fatto per gli operatori limitati:

Definizione 3.19. *Sia* $A : D(A) \to \mathscr{H}$ *un operatore illimitato. Si dice operatore aggiunto di* A *la mappa* $A^* : D(A^*) \to \mathscr{H}$*:*

$$A^* : D(A^*) \ni f \to h \text{ tale che } (f, Ag) = (h, g), \forall g \in \mathscr{H}.$$

E' doveroso osservare che se $D(A)$ non è denso in $\mathscr{H}$, l'estensione del funzionale ad $\mathscr{H}$ non è unica e di conseguenza l'operatore aggiunto non può essere univocamente definito.

3.4 Operatori simmetrici e autoaggiunti

Possiamo ora presentare gli operatori simmetrici e autoaggiunti. Queste due tipologie di operatori, come già abbiamo detto in precedenza, sono di essenziale importanza per la Meccanica Quantistica.

Definizione 3.20. *Un operatore lineare* $A : D(A) \to \mathscr{H}$ *si dice simmetrico se*

$$(Af, g) = (f, Ag) \quad \forall f, g \in D(A).$$

Dato un operatore simmetrico si può dimostrare che il suo aggiunto è una sua estensione:

Proposizione 3.21. *Sia* $A : D(A) \to \mathscr{H}$ *un operatore simmetrico. Allora* $A^* \supseteq A$.

Dimostrazione. Se $f \in D(A)$ studiamo il comportamento di

$$\sup_{g \in D(A), \|g\|=1} |(f, Ag)|$$

e utilizzando la proprietà di simmetria di A abbiamo:

$$\sup_{g \in D(A), \|g\|=1} |(f, Ag)| = \sup_{g \in D(A), \|g\|=1} |(Af, g)| = \|Af\| < \infty,$$

per cui dalla Definizione 3.17 segue che $f \in D(A^*)$, cioé $D(A) \subseteq D(A^*)$.
Inoltre utilizzando prima la definizione di operatore simmetrico e poi di aggiunto, per $f \in D(A)$:

$$(Af, g) = (f, Ag) = (A^* f, g), \ \forall g \in D(A),$$

cioè $Af = A^* f$ su $D(A)$ □

Un ruolo cruciale nella nostra analisi è svolto dalla seguente classe di operatori simmetrici.

Definizione 3.22. *Un operatore* $A : D(A) \to \mathscr{H}$ *si dice autoaggiunto se* $A = A^*$*, cioè se* A *è simmetrico e* $D(A) = D(A^*)$*.*

Per quanto riguarda gli operatori limitati, un operatore simmetrico è sempre autoaggiunto, poiché i due concetti sono equivalenti. Nel caso di operatori illimitati invece non è così, poiché a priori i domini di A e A^* potrebbero non essere coincidenti. Diventa quindi utile capire se un operatore autoaggiunto può essere costruito a partire da un operatore simmetrico dato. Per questo scopo ci servirà agire con le estensioni.

Proposizione 3.23. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore simmetrico e $B : D(B) \to \mathscr{H}$ un'estensione di A. Allora $A^* : D(A^*) \to \mathscr{H}$ è un estensione di $B^* : D(B^*) \to \mathscr{H}$.*

Dimostrazione. Sia $f \in D(B^*)$, così che per definizione di $D(B^*)$ abbiamo

$$\sup_{g \in D(B), \|g\|=1} |(f, Bg)| < \infty$$

. Poiché B è estensione di A si ha $D(A) \subseteq D(B)$ e $A = B$ su $D(A)$, perciò:

$$\sup_{g \in D(B), \|g\|=1} |(f, Bg)| < \infty \Rightarrow \sup_{g \in D(A), \|g\|=1} |(f, Bg)| < \infty$$
$$\sup_{g \in D(A), \|g\|=1} |(f, Bg)| = \sup_{g \in D(A), \|g\|=1} |(f, Ag)| < \infty.$$

Da cui segue

$$f \in D(A^*), \text{ e quindi } D(B^*) \subseteq D(A^*).$$

$f \in D(B^*)$, $g \in D(A)$, si ha

$$(B^* f, g) = (f, Bg) = (f, Ag) = (A^* f, g).$$

Poichè $D(A)$ è denso, A^* è univocamente definito e quindi $B^* f = A^* f$ per ogni $f \in D(B^*)$. □

La Proposizione 3.23 ci offre un importante informazione: ampliare il dominio di un operatore simmetrico comporta la restrizione del dominio del suo aggiunto. La costruzione di un operatore autoaggiunto a partire da uno simmetrico, è quindi ridotta a cercare un' opportuna estensione dell'operatore simmetrico tale da far coincidere il suo dominio e quello dell'aggiunto.
Nella maggior parte delle applicazioni alla Meccanica Quantistica, la strategia è quella di partire da un operatore simmetrico definito su un dominio di funzioni sufficientemente regolare (C_0^∞) e da qui si cerca la possibile estensione. Se un operatore simmetrico ha più di un'estensione possibile, la scelta dipende dal problema fisico in esame.

Definizione 3.24. *Un operatore è essenzialmente autoaggiunto se ammette un' unica estensione all'operatore autoaggiunto.*

Proposizione 3.25. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore simmetrico tale che il suo aggiunto $A^* : D(A^*) \to \mathscr{H}$ è autoaggiunto. Allora A è essenzialmente autoaggiunto e la sua unica estensione autoaggiunta coincide con A^*.*

Dimostrazione. Richiamando la Proposizione 3.21 sappiamo che l'operatore aggiunto $A^*, D(A^*)$ è un estensione di $A, D(A)$ ed è autoaggiunta ($A^*, D(A^*)$ è autoaggiunto per ipotesi) .Ci basta perciò dimostrare l'unicità di tale estensione.
A tal fine, sia $B, D(B)$ un'altra estensione autoaggiunta di $A, D(A)$. Abbiamo per la Proposizione 3.23 che $B \supseteq A$ implica $B^* \subseteq A^*$, e poiché B è autoaggiunto, $B \subseteq A^*$ e

$(A^*)^* \subseteq B^* = B$. Ricordando che per ipotesi A^* è autoaggiunto, quindi $A^* = (A^*)^*$, si ottiene così

$$B = B^* \subseteq A^* := (A^*)^* \subseteq B^* = B.$$

Questi passaggi ci mostrano che B deve coincidere con A^*, quindi anche l'unicità è dimostrata. $\square$

3.5 Criteri per la proprietà di autoaggiuntezza

Per verificare che un operatore simmetrico $A, D(A)$ è autoaggiunto ci basta dimostrare che $D(A^*) \subseteq D(A)$ (grazie alla Proposizione 3.21 sappiamo già che $D(A) \subseteq D(A^*)$). Rimane però un problema: in molti casi la caratterizzazione di $D(A^*)$ non è facile da trovare. Ci viene in aiuto il criterio dell'autoaggiunto.

Prima di enunciare e dimostrare tale criterio è utile evidenziare alcune semplici proprietà dell'operatore $z : \mathscr{H} \ni f \to zf \in \mathscr{H}$ (inteso come operatore identità moltiplicato per la costante non nulla $z \in \mathbb{C}$): esso è lineare, limitato ($\|zf\|_{\mathscr{H}} = |z|\|f\|_{\mathscr{H}}$, $\forall f \in \mathscr{H}$), biettivo (l'operatore identità è biettivo) e il suo aggiunto coincide con il suo coniugato, utilizzando l'antilinearità della prima componente del prodotto scalare e la linearità della seconda

$$(f, zg) = z(f, g) = (\bar{z}f, g) \; \forall f, g \in \mathscr{H}.$$

Osserviamo inoltre che, essendo z una costante e l'operatore associato ben definito su tutto $\mathscr{H}$, dato un qualsiasi operatore $A : D(A) \to \mathscr{H}$, il dominio di $(A - z)$ coincide con il dominio di A:

$$D(A - z) = D(A). \tag{3.8}$$

Inoltre, se G è un operatore lineare qualsiasi, allora $(zG) = (Gz)$: segue dalla linearità di G.

Sia $z \in \mathbb{C}$, denotiamo la parte immaginaria di z con $\Im z$ e la parte reale con $\Re z$.

Proposizione 3.26. *(Criterio dell'autoaggiunto) Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore simmetrico. Se esiste $z \in \mathbb{C}$ con $\Im z \neq 0$ tale che*

$$Im(A - z) = Im(A - \bar{z}) = \mathscr{H},$$

allora $A, D(A)$ è autoaggiunto.

Dimostrazione. Poiché A è simmetrico, come già detto ci basta dimostrare $D(A^*) \subseteq D(A)$. Sia $f \in D(A^*)$, consideriamo $(A^* - \bar{z})f$. Da $f \in D(A^*)$ segue $A^*f - \bar{z}f \in \mathscr{H}$ e quindi, ricordando che per ipotesi $Im(A - \bar{z}) = \mathscr{H}$, esiste $g \in D(A)$ tale che

$$(A^* - \bar{z})f = (A - \bar{z})g. \tag{3.9}$$

Per ogni $\phi \in D(A)$ abbiamo:

$$(f, (A - z)\phi) = ((A^* - \bar{z})f, \phi) =_{(3.9)} ((A - \bar{z})g, \phi) = (g, (A - z)\phi),$$

che per la linearità del prodotto scalare possiamo scrivere come

$$(f - g, (A - z)\phi) = 0.$$

Quest'ultima equazione vale per ogni $\phi \in D(A)$ e siccome per ipotesi $Im(A-z) = \mathscr{H}$, alla luce di (3.8) ne segue che $(f-g) \in \{\mathscr{H}\}^{\perp} = \{0\}$, da cui $f = g$. Poiché $g \in D(A)$ si ottiene $f \in D(A)$. Ricordando che eravamo partiti da $f \in D(A^*)$ abbiamo dimostrato che $D(A^*) \subseteq D(A)$. □

La Proposizione 3.26 è quindi una condizione sufficiente per la proprietà di autoaggiuntezza, ma arriveremo a dimostrare che tale condizione è anche necessaria.

Definizione 3.27. *Sia g un elemento qualsiasi appartenente ad $\mathscr{H}$. Un operatore $A : D(A) \to \mathscr{H}$ si dice chiuso se per ogni successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che*

$$f_n \in D(A),\ f_n \to f,\ Af_n \to g$$

si ha

$$f \in D(A),\ Af = g.$$

Proposizione 3.28. *Un operatore $T : D(T) \to \mathscr{H}$ limitato è chiuso.*

Dimostrazione. Sia $g \in \mathscr{H}$ arbitrario. Sia $T : D(T) \to \mathscr{H}$ un operatore limitato e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi appartenenti a $D(T)$ tale per cui $f_n \to f$ e $Tf_n \to g$ per $n \to \infty$. T è limitato, ovvero è continuo. La continuità di T e l'ipotesi $f_n \to f$ implicano che $Tf_n \to Tf$ per $n \to \infty$. Inoltre, sempre per ipotesi, abbiamo che $Tf_n \to g$, ne concludiamo quindi che $Tf = g$ e $f \in D(T)$. □

Proposizione 3.29. *L'aggiunto di un operatore qualsiasi è un operatore chiuso. In particolare un operatore autoaggiunto è chiuso.*

Dimostrazione. Sia $A, D(A)$ un operatore qualsiasi e $A^*, D(A^*)$ il suo aggiunto. Sia g un elemento qualsiasi appartenente ad $\mathscr{H}$. Consideriamo una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $f_n \in D(A^*)$ per ogni n, $f_n \to f$ e $A^*f_n \to g$.
Per ogni $h \in D(A)$ abbiamo che

$$(f_n, Ah) = (A^*f_n, h).$$

Calcoliamone il limite per $n \to \infty$, per le ipotesi fatte, troviamo:

$$(f, Ah) = (g, h).$$

Dalla definizione di aggiunto si ha così $A^*f = g$ e $f \in D(A^*)$. □

Introduciamo ora un lemma che useremo subito nella dimostrazione del prossimo enunciato e poi di nuovo più avanti.

Lemma 3.30. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore autoaggiunto e consideriamo l'operatore $(A - z)$ con $\Im z \neq 0$. Si ha*

$$\|h\|^2 \leq \frac{\|(A-z)h\|^2}{|\Im z|^2},\ \forall h \in D(A). \tag{3.10}$$

Dimostrazione. Utilizzando le proprietà di linearità e antilinearità del prodotto scalare abbiamo

$$\begin{aligned}\|(A-z)h\|^2 &= ((A-z)h,(A-z)h) \\ &= ((A-\Re z)h - i\Im z h, A-\Re z)h - i\Im z h) \\ &= \|(A-\Re z)h\|^2 - ((A-\Re z)h, i\Im z h) - (i\Im z h,(A-\Re z)h) + \|i\Im z h\|^2 \\ &= \|(A-\Re z)h\|^2 - i\Im z((A-\Re z)h,h) + i\Im z(h,(A-\Re z)h) + |\Im z|^2\|h\|^2 \\ &= \|(A-\Re z)h\|^2 + |\Im z|^2\|h\|^2 \geq |\Im z|^2\|h\|^2,\end{aligned} \tag{3.11}$$

avendo usato nell'ultimo passaggio l'ipotesi che A è autoaggiunto $((A-\Re z)h,h) = (h,\overline{(A-\Re z)}h) = (h,(A-\Re z)h))$. Dalla (3.11) otteniamo proprio la (3.10). □

Dalla dimostrazione precedente osserviamo inoltre la validità, sotto le stesse ipotesi del Lemma 3.30, della seguente uguaglianza:

$$\|(A-z)h\|^2 = \|(A-\Re z)h\|^2 + |\Im z|^2\|h\|^2. \tag{3.12}$$

Proposizione 3.31. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore autoaggiunto. Allora, per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $\Im z \neq 0$, si ha*

$$Ker(A-z) = \{0\},\ Im(A-z) = \mathscr{H}. \tag{3.13}$$

In più l'operatore $(A-z)^{-1} : \mathscr{H} \to D(A)$ è limitato e soddisfa

$$\|(A-z)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\Im z|}. \tag{3.14}$$

Dimostrazione. Sia $z \in \mathbb{C}$ con $\Im z \neq 0$. Per ogni $f \in Ker(A-z)$ abbiamo che : $(A-z)f = 0$, cioé $Af = zf$, e perciò:

$$z(f,f) = (f,zf) = (f,Af) = (Af,f) = (zf,f) = \bar{z}(f,f) \tag{3.15}$$

Ricordando che $\Im z \neq 0$ e di conseguenza $z \neq \bar{z}$, dalla (3.15) si ha necessariamente che $f = 0$, da cui $Ker(A-z) = \{0\}$.
Ora mostriamo che $Im(A-z)$ è denso in $\mathscr{H}$. Assumiamo esista $f \in (Im(A-z))^{\perp},\ f \neq 0$, cioè:

$$((A-z)g,f) = 0, \quad \forall g \in D(A). \tag{3.16}$$

Richiamando la Definizione 3.17 di $D(A^*)$ e ricordando che $(f,(A-z)g) = \overline{((A-z)g,f)}$ con la (3.16) possiamo dire che $f \in D(A^*)$ ed essendo A autoaggiunto, $f \in D(A)$. Inoltre da (3.16) si ha anche $(g,(A-\bar{z})f) = 0$ per ogni $g \in D(A)$. Ne segue che $f \in Ker(A-\bar{z})$ e $f \neq 0$. Siamo così giunti ad un assurdo, poiché $Ker(A-\bar{z}) = Ker(A-z) = \{0\}$, essendo il primo passaggio giustificato dal fatto che z è scelta in modo arbitrario (con $\Im z \neq 0$).
Se $f \in (Im(A-z))^{\perp}$, allora f deve essere necessariamente 0 e ne segue:

$$\{0\} = (Im(A-z))^{\perp} \text{ da cui}$$
$$\mathscr{H} = \overline{Im(A-z)}.$$

Abbiamo così dimostrato che $Im(A-z)$ è denso in $\mathscr{H}$. Se riusciamo a dimostrare anche che $Im(A-z)$ è chiuso concludiamo che $Im(A-z)$ coincide con tutto $\mathscr{H}$.
Sia $\{g_n\}$ una successione tale che $g_n \in Im(A-z)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $g_n \to g$ per $n \to \infty$. Allora esiste $\{f_n\} \in D(A)$ tale che $(A-z)f_n = g_n$ e $(A-z)f_n \to g$. Per il Lemma 3.30, se nella (3.10) come elemento h scegliamo $h = f_n - f_m$ otteniamo la seguente:

$$\|f_n - f_m\|^2 \leq \frac{\|(A-z)(f_n - f_m)\|^2}{(\Im z)^2} = \tag{3.17}$$
$$\frac{\|(A-z)f_n - (A-z)f_m\|^2}{(\Im z)^2} = \frac{\|g_n - g_m\|^2}{(\Im z)^2}.$$

Poiché $g_n \to g$, per la (3.17) si ha che $\{f_n\}$ è di Cauchy in uno spazio di Hilbert e di conseguenza esiste $f \in \mathscr{H}$ tale che $f_n \to f$.
$(A-z)$ è un operatore chiuso perchè differenza di due operatori chiusi: A è chiuso perchè è autoaggiunto (Proposizione 3.29) e z è chiuso in quanto costante che moltiplica l'operatore identità (che è limitato e di conseguenza chiuso). Possiamo quindi concludere che $f \in D(A)$ e $(A-z)f = g$. Quindi $g \in Im(A-z)$, che mostra che $Im(A-z)$ è chiuso. Abbiamo concluso che $Im(A-z) = \mathscr{H}$.
Per la (3.13), $(A-z)^{-1}$ è ben definito e agisce da $\mathscr{H}$ a $D(A)$. Serviamoci di nuovo del Lemma 3.30, e poiché $(A-z)^{-1}f \in D(A)$ per ogni $f \in \mathscr{H}$, possiamo quindi scegliere $h = (A-z)^{-1}f$ e utilizzando (3.10):

$$\|(A-z)(A-z)^{-1}f\|^2 \geq (\Im z)^2\|(A-z)^{-1}f\|^2 \Rightarrow \|(A-z)^{-1}f\| \leq \frac{\|f\|}{|\Im z|}$$

e con quest'ultima abbiamo dimostrato anche (3.14). □

Definizione 3.32. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore autoaggiunto e $B : D(B) \to \mathscr{H}$ un operatore simmetrico con $D(A) \subseteq D(B)$. Diremo che B è una piccola perturbazione rispetto ad A se esiste $a \in (0,1)$, $b > 0$ tale che*

$$\|B\phi\| \leq a\|A\phi\| + b\|\phi\|, \ \forall \phi \in D(A). \tag{3.18}$$

Proposizione 3.33. *Sia $B : D(B) \to \mathscr{H}$ un operatore simmetrico. Se B è anche limitato allora è una piccola perturbazione rispetto a qualsiasi operatore autoaggiunto $A, D(A)$ con $D(A) \subseteq D(B)$.*

Dimostrazione. Sia $\phi \in D(A)$, da cui $\phi \in D(B)$. Ci basta usare la limitatezza di B e la positività della norma per ottenere, per ogni $a \in (0,1)$:

$$\|B\phi\| \leq \|B\|\|\phi\| \leq \|B\|\|\phi\| + a\|A\phi\|.$$

Scegliendo $b = \|B\| > 0$ si ottiene (3.18). □

Teorema 3.34. *(Teorema di Kato-Rellich) Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore autoaggiunto e $B : D(B) \to \mathscr{H}$ un operatore simmetrico con $D(A) \subseteq D(B)$. Se B è una piccola perturbazione rispetto ad A, allora l'operatore $(A+B) : D(A) \to \mathscr{H}$ è autoaggiunto.*

Dimostrazione. Ricordando che un operatore autoaggiunto è per definizione simmetrico si ha che $A, D(A)$ simmetrico implica $A+B, D(A)$ simmetrico. Possiamo perciò utilizzare la Proposizione 3.26 e ci basta dimostrare che esiste $\mu > 0$ tale che $Im(A+B+i\mu) = Im(A+B-i\mu) = \mathscr{H}$.
Per la Proposizione 3.31 l'operatore $(A+i\mu)^{-1}$ esiste ed è limitato. Allora per ogni $\phi \in D(A)$ vale

$$(A+B+i\mu)\phi = (I + B(A+i\mu)^{-1})(A+i\mu)\phi. \tag{3.19}$$

Mostriamo che la norma dell'operatore $B(A+i\mu)^{-1}$ è minore di 1 per μ sufficientemente grande. Per ogni $\psi \in \mathscr{H}$ abbiamo che

$$\begin{aligned} \|B(A+i\mu)^{-1}\psi\| &\leq a\|A(A+i\mu)^{-1}\psi\| + b\|(A+i\mu)^{-1}\psi\| \qquad (3.20)\\ &\leq_{(3.14)} a\|A(A+i\mu)^{-1}\psi\| + \frac{b}{\mu}\|\psi\|; \end{aligned}$$

dove nel primo passaggio abbiamo usato la definizione di piccola perturbazione (3.18), essendo $(A+i\mu)^{-1}\psi$ un elemento appartenente a $D(A)$ e nel secondo passaggio si è utilizzato il Lemma 3.30.
Richiamando (3.12) e scegliendo $h = (A+i\mu)^{-1}\psi$, che sappiamo appartenere a $D(A)$ per ogni $\psi \in \mathscr{H}$, troviamo che

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \|(A+i\mu)(A+i\mu)^{-1}\psi\|^2 \qquad (3.21)\\ &=_{(3.12)} \|A(A+i\mu)^{-1}\psi\|^2 + \mu^2\|(A+i\mu)^{-1}\psi\|^2 \geq \|A(A+i\mu)^{-1}\psi\|^2. \end{aligned}$$

Usando (3.21) in (3.20) otteniamo

$$\|B(A+i\mu)^{-1}\psi\| \leq \left(a + \frac{b}{\mu}\right)\|\psi\|.$$

Scegliamo $\mu > \frac{b}{1-a}$ e otteniamo $\|B(A+i\mu)^{-1}\psi\| < \|\psi\|$, da cui $\|B(A+i\mu)^{-1}\| < 1$.
Per la Proposizione 3.13 l'operatore $I + B(A+i\mu)^{-1}$ è invertibile e tale operatore inverso è limitato in $\mathscr{H}$ e definito dalla serie di Neumann.
Dato $f \in \mathscr{H}$ definiamo ϕ_f come segue

$$\phi_f := (A+i\mu)^{-1}(I + B(A+i\mu)^{-1})^{-1}f.$$

Si ha $\phi_f \in D(A)$ perchè

$$\begin{aligned} &(A+i\mu) : D(A) \mapsto \mathscr{H}\\ \Rightarrow\ &(A+i\mu)^{-1} : \mathscr{H} \mapsto D(A). \end{aligned}$$

Usando (3.19) possiamo concludere che $(A+B+i\mu)\phi_f = f$, cioè $Im(A+B+i\mu) = \mathscr{H}$. Con gli stessi identici passaggi si dimostra che $Im(A+B-i\mu) = \mathscr{H}$. □

3.6 Risolvente e spettro

Introduciamo i concetti di risolvente e spettro di un operatore e le nozioni principali ad essi collegate. Studiamo poi le proprietà di risolvente e spettro per le varie tipologie di operatori.

Definizione 3.35. *$z \in \mathbb{C}$ è detto autovalore di un operatore $A : D(A) \to \mathscr{H}$ se esiste $\psi \in D(A)$, $\psi \neq 0$, tale che $A\psi = z\psi$. L'elemento ψ è detto autovettore corrispondente all'autovalore z.*

Equivalentemente $z \in \mathbb{C}$ è un autovalore se $Ker(A - z) \neq \{0\}$ e ogni $\psi \neq 0$, $\psi \in Ker(A-z)$, è un autovettore. Se z non è un autovalore allora l'operatore $A-z$ è invertibile ma può accadere che tale inverso non sia definito su tutto $\mathscr{H}$ e che sia illimitato.

Definizione 3.36. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore chiuso. L'insieme risolvente di A, denotato con $\rho(A)$, è l'insieme delle $z \in \mathbb{C}$ per cui l'operatore $(A - z)$ è invertibile e $(A - z)^{-1}$ è limitato e ben definito su $\mathscr{H}$. L'operatore $(A - z)^{-1}$, $z \in \rho(A)$, è l'operatore risolvente (o semplicemente risolvente) di $A, D(A)$.*

Definizione 3.37. *Lo spettro dell'operatore chiuso $A : D(A) \to \mathscr{H}$ è l'insieme $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.*

Osserviamo da queste definizioni che gli autovalori appartengono tutti allo spettro dell'operatore, ma possono esserci elementi dello spettro che non sono autovalori.

Proposizione 3.38. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore chiuso e $z, w \in \rho(A)$. Allora la seguente uguaglianza è valida:*

$$(A - z)^{-1} - (A - w)^{-1} = (z - w)(A - z)^{-1}(A - w)^{-1}.$$

Dimostrazione. Si vede facilmente che

$$\begin{aligned}
&(A - z)^{-1} - (z - w)(A - z)^{-1}(A - w)^{-1}\\
&= (A - z)^{-1}[I - (A - A + z - w)(A - w)^{-1}]\\
&= (A - z)^{-1}\{I + [(A - z) - (A - w)](A - w)^{-1}\}\\
&= (A - z)^{-1}[I - I + A(A - w)^{-1} - z(A - w)^{-1}]\\
&= (A - z)^{-1}(A - z)(A - w)^{-1} = (A - w)^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Proposizione 3.39. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore chiuso. Allora $\rho(A)$ è un insieme aperto e $\sigma(A)$ un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Prendiamo $z_0 \in \rho(A)$, per la Definizione 3.36 abbiamo $(A-z_0)^{-1}$ limitato e ben definito su $\mathscr{H}$. Prendiamo l'intorno di z_0:

$$D_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0|\|(A - z_0)^{-1}\| < 1\}. \tag{3.22}$$

Evidenziamo che D_0 è aperto. Per la Proposizione 3.13, se $z \in D_0$ allora la successione di operatori limitati

$$R_n = \sum_{k=0}^{n}(z - z_0)^k[(A - z_0)^{-1}]^{k+1} \tag{3.23}$$

converge in norma ad un operatore limitato R. Dimostriamo che R coincide con l'operatore risolvente $(A-z)^{-1}$. Sappiamo che $(A-z)^{-1}:\mathscr{H}\to D(A)$ e anche $R_n:\mathscr{H}\to D(A)$. Abbiamo quindi, per ogni $f\in\mathscr{H}$, che $R_nf\in D(A)$ e $R_nf\to Rf$ per $n\to\infty$. Segue che

$$\begin{aligned} AR_nf &= (A-z_0+z_0)R_nf = (A-z_0)R_nf + z_0R_nf \\ =_{(3.23)} & \sum_{k=0}^{n}(z-z_0)^k(A-z_0)(A-z_0)^{-1}[(A-z_0)^{-1}]^kf + z_0R_nf \\ &= z_0R_nf + (z-z_0)\sum_{k=0}^{n}(z-z_0)^{k-1}[(A-z_0)^{-1}]^kf, \end{aligned}$$

Ridefinendo ora i pedici della sommatoria con $j:=k-1$ ne segue che l'espressione a cui siamo arrivati equivale a

$$\begin{aligned} & z_0R_nf + (z-z_0)\sum_{j=-1}^{n-1}(z-z_0)^j[(A-z_0)^{-1}]^{j+1}f \\ &= z_0R_nf + (z-z_0)(z-z_0)^{-1}[(A-z_0)^{-1}]^0f + \\ &+ (z-z_0)\sum_{j=0}^{n-1}(z-z_0)^j[(A-z_0)^{-1}]^{j+1}f \\ &= z_0R_nf + f + (z-z_0)R_{n-1}f. \end{aligned}$$

Per $n\to\infty$ otteniamo $AR_nf\to f+zRf$. Siccome A è chiuso, $Rf\in D(A)$ e $ARf = f+zRf$, da cui

$$(A-z)Rf = f. \tag{3.24}$$

Analogamente, con gli stessi passaggi, per $f\in D(A)$:

$$\begin{aligned} R_nAf &= R_n(A-z_0)f + z_0R_nf \\ &= z_0R_nf + \sum_{k=0}^{n}(z-z_0)^k[(A-z_0)^{-1}]^k(A-z_0)^{-1}(A-z_0)f \\ &= z_0R_nf + f + (z-z_0)R_{n-1}f \end{aligned}$$

Per $n\to\infty$ abbiamo $RAf = f+zRf$, da cui

$$R(A-z)f = f. \tag{3.25}$$

Considerando sia (3.24) che (3.25) per $z\in D_0$ abbiamo $R=(A-z)^{-1}$, che implica $z\in\rho(A)$. Concludiamo che per ogni elemento $z_i\in\rho(A)$ esiste un insieme (intorno di z_i) aperto D_i di elementi ancora appartenenti al risolvente. Ne segue che $\rho(A)$ è unione di insieme aperti ed è quindi aperto.
Lo spettro $\sigma(A)$, per come è stato definito, è quindi chiuso. □

Proposizione 3.40. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore autoaggiunto e $B : D(B) \to \mathscr{H}$ un operatore simmetrico e piccola perturbazione rispetto A. Per $z \in \rho(A) \cap \rho(A+B)$ valgono le seguenti uguaglianze:*

$$(A+B-z)^{-1} = (A-z)^{-1} - (A-z)^{-1}B(A+B-z)^{-1} \tag{3.26}$$

$$= (A-z)^{-1} - (A+B-z)^{-1}B(A-z)^{-1}. \tag{3.27}$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima la buona definizione degli operatori a destra dell'uguale: per farlo basta dimostrare ciò per gli operatori $B(A-z)^{-1}$ e $B(A+B-z)^{-1}$.
Se $z \in \rho(A) \cap \rho(A+B)$ allora $(A-z)^{-1}, (A+B-z)^{-1}$ sono limitati e definiti in $\mathscr{H}$ e hanno come immagine $D(A)$ e $D(A+B) = D(A)$, poiché $D(A) \subseteq D(B)$ per definizione di piccola perturbazione.
Per ogni $f \in \mathscr{H}$ si ha allora

$$\begin{aligned} \|B(A-z)^{-1}f\| &\leq a\|A(A-z)^{-1}f\| + b\|(A-z)^{-1}f\| \\ &\leq a\|(z+A-z)(A-z)^{-1}f\| + b\|(A-z)^{-1}\|\|f\| \\ &\leq a\|z(A-z)^{-1}f + f\| + k\|f\| \\ &\leq a(1+|z|\|(A-z)^{-1}\|)\|f\| + k\|f\| \leq K\|f\|. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Per il Teorema 3.34, $A+B, D(A)$ è autoaggiunto e $D(A) \subseteq D(B)$.
Se mostriamo che $B, D(B)$ è una piccola perturbazione anche rispetto ad $A+B$, anche $B(A+B-z)^{-1}$ è ben definito e limitato come per (3.28).
Per ogni $\phi \in D(A+B) = D(A)$, si ha

$$\begin{aligned} \|B\phi\| &\leq a\|(A+B-B)\phi\| + b\|\phi\| \\ &\leq a\|(A+B)\phi\| + a\|B\phi\| + b\|\phi\| \\ &\leq a\|(A+B)\phi\| + (\frac{a\|B\phi\|}{\|\phi\|} + b)\|\phi\|, \end{aligned}$$

da cui $B, D(B)$ è una piccola perturbazione anche rispetto ad $A+B$. Gli operatori a destra dell'uguale in (3.26) e (3.27) sono quindi limitati e ben definiti.
Ora:

$$\begin{aligned} B(A+B-z)^{-1} &= (B+A-z-(A-z))(A+B-z)^{-1} \\ &= (A+B-z)(A+B-z)^{-1} - (A-z)(A+B-z)^{-1} \\ &= I - (A-z)(A+B-z)^{-1}. \end{aligned}$$

Applichiamo $(A-z)^{-1}$ e otteniamo $(A-z)^{-1}B(A+B-z)^{-1} = (A-z)^{-1} - (A+B-z)^{-1}$, dimostrando (3.26).
per (3.27) procediamo allo stesso modo ma partendo da:

$$(A+B-z)^{-1}B = I - (A+B-z)^{-1}(A-z).$$

Applichiamo $(A-z)^{-1}$ e otteniamo $(A+B-z)^{-1}B(A-z)^{-1} = (A-z)^{-1} - (A+B-z)^{-1}$, dimostrando (3.27). □

Le identità della Proposizione 3.40 sono importanti in quanto forniscono informazioni sul risolvente di $A + B$ a partire dal risolvente di A. In particolare, il risolvente di $A + B$ coincide con il risolvente di A quando l'operatore $B(A - z)^{-1}$ ha norma minore di 1. Infatti partendo da (3.27), si ha

$$\begin{gathered}(A + B - z)^{-1} + (A + B - z)^{-1} B(A - z)^{-1} = (A - z)^{-1} \\ (A + B - z)^{-1}[I + B(A - z)^{-1}] = (A - z)^{-1} \\ (A + B - z)^{-1} = (A - z)^{-1}[I + B(A - z)^{-1}]^{-1}.\end{gathered}$$

A questo punto, ricordando che l'operatore $B(A-z)^{-1}$ ha norma minore di 1, utilizziamo la Proposizione 3.13 e otteniamo

$$(A + B - z)^{-1} = (A - z)^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(B(A - z)^{-1}\right)^n\right).$$

Vediamo ora, infatti, che in questo caso $(A + B - z)$ è invertibile se e solo se $(A - z)$ è invertibile e da qui $\sigma(A) = \sigma(A + B)$.

Proposizione 3.41. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore simmetrico. Allora tutti i suoi autovalori sono reali e autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono tra loro ortogonali.*

Dimostrazione. Sia $z \in \mathbb{C}$ con $\Im z \neq 0$. Per ogni $f \in Ker(A-z)$ abbiamo che $(A-z)f = 0$ implica $Af = zf$ e utilizzando la proprietà di simmetria di A:

$$z(f, f) = (f, zf) = (f, Af) = (Af, f) = (zf, f) = \bar{z}(f, f);$$

da cui necessariamente $f = 0$, quindi se z ha parte immaginaria non nulla, $Ker(A - z) = \{0\}$ e per la Definizione 3.35 non possono esistere autovalori con $\Im z \neq 0$. Ne concludiamo che gli autovalori sono tutti reali. Assumiamo esistano λ, μ autovalori diversi tra loro, siano f e g i corrispondenti autovettori ($Af = \lambda f;\ Ag = \mu g$)

$$\lambda(g, f) = (g, \lambda f) = (g, Af) = (Ag, f) = (\mu g, f) = \mu(g, f),$$

dove si è usato il fatto che gli autovalori hanno parte immaginaria nulla, per cui $\mu = \bar{\mu}$. Poiché $\lambda \neq \mu$, segue $(g, f) = 0$, cioè $g \perp f$. □

Tuttavia, lo spettro di un operatore chiuso e simmetrico non è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, poiché in generale vi sono elementi nello spettro che non sono autovalori.
Per gli operatori autoaggiunti invece tale proprietà è valida e cruciale nelle applicazioni alla Meccanica Quantistica.

Proposizione 3.42. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore autoaggiunto. Allora $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Per (3.14), l'operatore $(A-z)^{-1}$ con $\Im z \neq 0$ esiste, ben definito e limitato in $\mathscr{H}$. Per la Definizione 3.36 si ha quindi che ogni $z \in \mathbb{C}$ con $\Im z \neq 0$ appartiene a $\rho(A)$. Allora $\sigma(A)$ è un sottoinsieme dell'asse reale $\mathbb{R}$. □

I punti dello spettro di un operatore autoaggiunto possono essere caratterizzati con una successione di 'quasi-autovettori' nota come successione di Weyl.

Definizione 3.43. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore autoaggiunto e sia $\lambda \in \sigma(A)$. Definiamo successione di Weyl relativa a λ una successione di vettori $\{f_n\}$ tale che $f_n \in D(A)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\| = 1$ e $\|(A-\lambda)f_n\| \to 0$ per $n \to \infty$.*

Proposizione 3.44. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore autoaggiunto. Si ha che $\lambda \in \sigma(A)$ se e solo se esiste una successione di Weil relativa a λ.*

Dimostrazione. Iniziamo col dimostrare l'implicazione inversa. Sia $\{f_n\}$ la successione di Weyl relativa a λ e supponiamo per assurdo che $\lambda \in \rho(A)$, da cui esiste $(A-\lambda)^{-1}$ limitato in $\mathscr{H}$ e

$$1 = \|f_n\| = \|(A-\lambda)^{-1}(A-\lambda)f_n\| \leq \|(A-\lambda)^{-1}\|\|(A-\lambda)f_n\|.$$

Prendendo il limite per $n \to \infty$, per la Definizione 3.43 sappiamo che $\|(A-\lambda)f_n\| \to 0$ e giungiamo quindi ad una contraddizione. Ne concludiamo che $\lambda \in \sigma(A)$.
Dimostriamo ora l'implicazione diretta della Proposizione. Sia $\lambda \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$, consideriamo la successione $z_n = \lambda + in^{-1}$. z_n ha parte immaginaria non nulla, quindi, per la Proposizione 3.42 $z_n \in \rho(A)$. Inoltre per $n \to \infty$ si ha $|z_n - \lambda| \to 0$.

Supponiamo ora, per assurdo, esista $\tilde{n}$ tale per cui

$$|z_{\tilde{n}} - \lambda|\|(A - z_{\tilde{n}})^{-1}\| < 1. \tag{3.29}$$

Procediamo come nella dimostrazione della Proposizione 3.39 e definiamo un insieme D_0 come in (3.22)

$$D_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_{\tilde{n}}|\|(A - z_{\tilde{n}})^{-1}\| < 1\}.$$

Per la supposizione (3.29), abbiamo che $\lambda \in D_0$, ma sappiamo dalla dimostrazione della Proposizione 3.39 che questo implica che $\lambda \in \rho(A)$. Siamo giunti ad un assurdo, in quanto per ipotesi $\lambda \in \sigma(A)$. Allora (3.29) è falsa e, perciò, la seguente disuguaglianza vale per ogni n

$$|z_n - \lambda|\|(A - z_n)^{-1}\| \geq 1. \tag{3.30}$$

Poiché $|z_n - \lambda| \to 0$, perchè la (3.30) sia rispettata necessariamente si ha:

$$\|(A - z_n)^{-1}\| \to \infty \text{ per } n \to \infty.$$

Per come è definita la norma di un operatore deve anche esistere una succesione di funzioni $\{g_n\}$ tale che $\|g_n\| = 1$ e $\|(A - z_n)^{-1}g_n\| \to \infty$ per $n \to \infty$. Costruiamo la successione $\{f_n\}$ nel seguente modo:

$$f_n := \frac{(A - z_n)^{-1}g_n}{\|(A - z_n)^{-1}g_n\|}.$$

Chiaramente, $\|f_n\| = 1$, $f_n \in D(A)$, e

$$(A-\lambda)f_n = (A - z_n + z_n - \lambda)f_n = (A - z_n)f_n + (z_n - \lambda)f_n =$$
$$\frac{g_n}{\|(A - z_n)^{-1}g_n\|} + (z_n - \lambda)f_n \to 0 \text{ per } n \to \infty,$$

in cui il limite finale si ottiene perché, per quanto già visto, $(z_n - \lambda) \to 0$ e $\|(A - z_n)^{-1} g_n\| \to \infty$.
Pertanto, f_n è una successione di Weyl relativa a λ. $\square$

3.7 Operatori isometrici e unitari

Introduciamo ora altre due tipologie fondamentali di operatori: isometrici ed unitari. Preliminarmente, ricordiamo che, dati due spazi di Hilbert $\mathscr{H}$ e $\mathscr{H}'$, se $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ è un operatore limitato allora il suo aggiunto $A^* : \mathscr{H}' \to \mathscr{H}$ è anch'esso limitato ed è definito da $(f', Ag)' = (A^* f', g)$ per ogni $f' \in \mathscr{H}'$ e ogni $g \in \mathscr{H}$.

Definizione 3.45. *Un operatore $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ si dice isometrico se*

$$(Tf, Tg)' = (f, g), \qquad \forall f, g \in \mathscr{H}, \tag{3.31}$$

o equivalentemente se $T^*T = I$

Osserviamo che l'equivalenza tra (3.31) e $T^*T = I$ è dovuta dal fatto che $(f, g) = (Tf, Tg)' = (T^*Tf, g)$, per ogni $f, g \in \mathscr{H}$.

Definizione 3.46. *Un operatore $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ si dice unitario se è isometrico e suriettivo.*

Si può notare che, se T è isometrico allora $\|Tf\|^2_{\mathscr{H}'} = (Tf, Tf)' = (f, f) = \|f\|^2_{\mathscr{H}}$, ovvero $\|T\| = 1$. Di conseguenza ogni operatore isometrico è limitato, con norma 1. Inoltre se per assurdo esistesse $f \neq 0$, tale che $f \in Ker(T)$, allora avremmo che $Tf = 0$, ovvero che $\|Tf\|^2_{\mathscr{H}'} = 0$. Di conseguenza $\|f\| = 0$ e perciò $f = 0$, che contraddirebbe l'ipotesi. Quindi, $Ker(T) = \{0\}$, che implica che ogni operatore isometrico è iniettivo. Alla luce di ciò è anche evidente che, se U è unitario, allora U^{-1} esiste ed è limitato.
Presentiamo ora una caratterizzazione equivalente degli operatori unitari.

Proposizione 3.47. *Sia $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ un operatore limitato. Allora U è unitario se e solo se $U^*U = I$ e $UU^* = I'$ o, equivalentemente, $U^* = U^{-1}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima che se U è unitario, allora $UU^* = I'$ e $U^*U = I$.
Siano$f', g' \in \mathscr{H}'$. Dato che U è unitario, $Im(U) = \mathscr{H}'$ e quindi, esiste $g \in \mathscr{H}$ tale che $Ug = g'$. Allora si ha che

$$(f', g')' = (f', Ug)' = (U^* f', g) = (UU^* f', Ug)' = (UU^* f', g')'. \tag{3.32}$$

Dato che (3.32) vale per ogni $g' \in \mathscr{H}'$, si ha che $UU^* f' = f'$. Dato che il ragionamento si può ripetere per ogni $f' \in \mathscr{H}'$, si ha che $UU^* = I'$. In modo analogo si dimostra che $U^*U = I$.
Dimostriamo ora che, se $UU^* = I'$ e $U^*U = I$, allora U è unitario. Dato che $U^*U = I$, U è isometrico. Sia poi $f' \in \mathscr{H}'$. Dato che $f' = I' f' = UU^* f'$, se definiamo f come $f := U^* f' \in \mathscr{H}$, si ha che $f' = Uf$. Dato che tale procedura si può ripetere per ogni $f' \in \mathscr{H}'$, si ha che $Im(U) = \mathscr{H}'$ e che, quindi, U è unitario. $\square$

Proposizione 3.48. *Sia* $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ *operatore unitario. Allora anche* $U^{-1} : \mathscr{H}' \to \mathscr{H}$ *è unitario.*

Dimostrazione. Dato che chiaramente $Im(U^{-1}) = \mathscr{H}$, resta solo da dimostrare che U^{-1} è isometrico. Dato che U è unitario, per ogni $f', g' \in \mathscr{H}'$ si ha che

$$\begin{aligned}(U^{-1}f', U^{-1}g') &= (U^*f', U^*g') = \\ &= (UU^*f', g')' = (f', g')'.\end{aligned}$$

Quindi, per definizione U^{-1} è isometrico. □

Diamo ora una caratterizzazione degli autovalori e degli autovettori di un operatore isometrico.

Proposizione 3.49. *Sia* $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ *un operatore isometrico. Allora i suoi autovalori hanno modulo 1 e autovettori corrispondenti ad autovalori differenti sono tra loro ortogonali.*

Dimostrazione. Sia λ autovalore di T, ovvero $Tf = \lambda f$. Dato che T è isometrico $\|f\| = \|Tf\| = \|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$, che implica che $|\lambda| = 1$.
Sia poi μ un autovalore di T, tale che $\mu \neq \lambda$. Se f e g sono autovettori di λ e μ, rispettivamente, allora $(f, g) = (Tf, Tg) = (\lambda f, \mu g) = \bar{\lambda}\mu(f, g)$. Dato che $|\lambda| = 1$, $\lambda(f, g) = \mu(f, g)$. Dato che, però, $\lambda \neq \mu$, questo è possibile solo se $(f, g) = 0$, ovvero se f e g sono ortogonali. □

Vediamo ora cosa si può dire di TT^* quando T è isometrico, ma non unitario.

Proposizione 3.50. *Sia* $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ *un operatore isometrico con* $Im(T) \neq \mathscr{H}'$*. Allora* $Im(T)$ *è chiusa e*

$$TT^*f' = f' \text{ se } f' \in Im(T)$$
$$TT^*f' = 0 \text{ se } f' \in \big(Im(T)\big)^\perp$$

Dimostrazione. Consideriamo una successione $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Im(T)$ tale che $f'_n \to f'$ per $n \to \infty$. Se dimostriamo che $f' \in Im(T)$ allora $Im(T)$ è chiusa. Dato che $f_n \in Im(T)$ per ogni n, esiste una successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{H}$ tale che $Tg_n = f'_n$. Inoltre, dato che T è isometrico, $\|g_n - g_m\| = \|Tg_n - Tg_m\|' = \|f_n - f_m\|'$. Quindi, poiché $f'_n \to f' \in \mathscr{H}'$, si ha che $\|f_n - f_m\|' \to 0$, per $n, m \to \infty$, che implica $\|g_n - g_m\| \to 0$, ovvero $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Quindi esiste $g \in \mathscr{H}$ tale che $g_n \to g$ in $\mathscr{H}$ e, perciò, dato che T è limitato,

$$f' = \lim_{n\to\infty} f'_n = \lim_{n\to\infty} Tg_n = Tg,$$

ovvero $Im(T)$ è chiusa.
Sia ora $f' \in Im(T)$. Allora esiste $g \in \mathscr{H}$ tale che $Tg = f'$. Dato che T è isometrico

$$TT^*f' = TT^*Tg = Tg = f'.$$

Se, infine, $f' \in \big(Im(T)\big)^\perp$, per ogni $g \in \mathscr{H}$ si ha che $(T^*f', g) = (f', Tg)' = 0$. Quindi, $T^*f' = 0$ e, dato che T è iniettivo, $0 = T(0) = T(T^*f') = TT^*f' = 0$. □

In conclusione della sezione, possiamo finalmente mostrare la relazione tra operatori unitari e operatori autoaggiunti. In particolare gli operatori unitari preservano la proprietà di autoaggiuntezza e lasciano invariato lo spettro.

Proposizione 3.51. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore autoaggiunto in $\mathscr{H}$ e sia $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ un operatore unitario. Allora l'operatore A' in $\mathscr{H}'$ definito da*

$$A'f' := UAU^{-1}f', \;\; D(A') := \{f' \in \mathscr{H}' \mid f' = Uf, \;\; f \in D(A)\}$$

è autoaggiunto. Inoltre $\sigma(A) = \sigma(A')$ e gli autovalori di A e A' coincidono. Infine, se $A, D(A)$ è essenzialmente autoaggiunto allora anche $A', D(A')$ è essenzialmente autoaggiunto.

Dimostrazione. Iniziamo con il provare che A' è simmetrico. Siano $f', g' \in D(A')$. Si ha che

$$\begin{aligned} (g', A'f')' &= (g', UAU^{-1}f)' \\ &= (U^{-1}g', AU^{-1}f') = (AU^{-1}g', U^{-1}f') \\ &= (UAU^{-1}g', f')' = (A'g', f')', \end{aligned}$$

Ovvero A' è simmetrico.
Consideriamo ora $z \in \rho(A)$. Dato che A è autoaggiunto, $\Im z \neq 0$. Sia ora $f' \in \mathscr{H}'$ e definiamo $u' := U(A-z)^{-1}U^{-1}f'$ (ben definito in quanto $(A-z)$ invertibile).
Poiché $f' \in \mathscr{H}'$, $U^{-1}f' \in \mathscr{H}$ e quindi $(A-z)^{-1}(U^{-1}f') \in D(A)$. Di conseguenza $u' \in D(A')$, per definizione. Inoltre si può dimostrare che $(A'-z)u' = f'$. Infatti

$$\begin{aligned} U(A-z)^{-1}U^{-1} &= [U(A-z)U^{-1}]^{-1} \\ &= [UAU^{-1} - UzU^{-1}]^{-1} \\ &= (A'-z)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Quindi, per ogni $f' \in \mathscr{H}'$, $f' \in Im(A'-z)$, ovvero $Im(A'-z) = \mathscr{H}'$. Dato che il ragionamento si può replicare per $\bar{z}$, si ha, per la Proposizione 3.26, che A' è autoaggiunto. Inoltre, per la (3.33), se $z \in \rho(A)$, allora $(A'-z)^{-1}$ è limitato da $\mathscr{H}'$ a $D(A')$. Quindi $z \in \rho(A')$, ovvero $\rho(A) \subseteq \rho(A')$. Inoltre, dato che $A = U^{-1}A'U$ e che U^{-1} è unitario per la Proposizione 3.48, si ha che $\rho(A') \subseteq \rho(A)$, da cui $\rho(A) = \rho(A')$. Di conseguenza $\sigma(A) = \sigma(A')$.
Inoltre, sia λ autovalore di A e sia $g \in \mathscr{H}$ suo autovettore. Sia, poi, $f' \in \mathscr{H}'$ tale che $U^{-1}f' = g$. Allora

$$A'f' = UAU^{-1}f' = UAg = U\lambda g = \lambda UU^{-1}f' = \lambda f',$$

Ovvero λ è autovalore di A'. Dato che, con conti analoghi, si dimostra il viceversa, ne concludiamo che anche gli autovalori di A e A' coincidono.
Infine, sia A essenzialmente autoaggiunto e sia A_1 la sua unica estensione autoaggiunta. Dato che $A_1' := UA_1U^{-1}$ è autoaggiunta (per quanto appena dimostrato), è un'estensione autoaggiunta di A'. Supponiamo, per assurdo, che esista un'altra estensione di A' che chiamiamo A_2'. Allora anche $U^{-1}A_2'U$ è autoaggiunto, ma questa è una contraddizione perchè sarebbe un'estensione autoaggiunta di A diversa da A_1. □

Una delle applicazioni più importanti della Proposizione 3.51 è che può essere utilizzata per costruire l'estensione autoaggiunta di un operatore simmetrico A_0. Assumiamo di trovare un operatore unitario U che diagonalizzi A_0, ovvero tale che $A_0' = UA_0U^{-1}$ sia un operatore di semplice moltiplicazione in qualche spazio di Hilbert e sia essenzialmente autoaggiunto. Allora la Proposizione 3.51 implica che A_0 è essenzialmente autoaggiunto e la sua estensione autoaggiunta è data da $A = U^{-1}A'U$, dove A' è l'unica estensione autoaggiunta di A_0'.

Capitolo 4

Teorema Spettrale

Una matrice simmetrica può essere ridotta ad una matrice diagonale attraverso una trasformazione unitaria. Vogliamo generalizzare questo concetto agli spazi di Hilbert nel caso di operatori autoaggiunti, ovvero vogliamo ridurre un operatore autoaggiunto ad un operatore di moltiplicazione in un opportuno spazio di Hilbert. Ciò può essere fatto tramite il Teorema Spettrale. L'applicazione più importante di questo teorema è quella di consentire di definire il concetto di funzione di un operatore, che è alla base del cosiddetto *calcolo funzionale.*

Prima di formulare il Teorema Spettrale studiamo alcuni concetti indispensabili per comprenderlo.

4.1 Misure di Stieltjes

Per arrivare alla formulazione del Teorema Spettrale è necessario richiamare alcuni concetti ben noti della Teoria della misura.

Definizione 4.1. *Una collezione $\mathscr{A}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ è detta σ- algebra di $\mathbb{R}$ se valgono le seguenti proprietà:*
(i) $\mathbb{R}, \emptyset \in \mathscr{A}$,
(ii) Se $A \in \mathscr{A}$, *allora* $\mathbb{R} \setminus A \in \mathscr{A}$,
(iii) Se $\{A_k\}$ *è successione di elementi di* $\mathscr{A}$, *allora* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.
La coppia $(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ *è detta spazio misurabile.*

Definizione 4.2. *Definiamo σ-algebra di Borel (denotata con $\mathscr{B}$), la più piccola σ-algebra di $\mathbb{R}$ contente gli aperti.*

Definizione 4.3. *Una misura di Borel m in $\mathbb{R}$ è una misura sullo spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$, cioè una funzione $m : \mathscr{B} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tale che:*
(i) $m(\emptyset)=0$,
(ii) $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$ *se* $B_k \cap B_n = \emptyset$ *per* $k \neq n$.
La misura di Borel è finita se $m(\mathbb{R}) < \infty$ ed è detta di probabilità se $m(\mathbb{R}) = 1$.

Elenchiamo alcune proprietà di una misura di Borel finita.

Proposizione 4.4. *Sia* $\{B_k\}$ *una successione di insiemi boreliani. Allora*
(i) $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$,
(ii) $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{k=1}^{n} B_k)$,
(iii) Se $B_k \subset B_{k+1}$ *allora* $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = lim_{k\to\infty} m(B_k)$,
(iv)Se $B_{k+1} \subset B_k$ *allora* $m(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) = lim_{k\to\infty} m(B_k)$.

Definizione 4.5. *Una misura di Borel* m *su* $\mathbb{R}$ *è detta:*
(i) discreta se esiste un insieme numerabile di punti P_i, $i \in \mathbb{N}$ *tale che* $m(\{P_i\}) \neq 0$ *per ogni* i *e* $m(B) = \sum_{i, P_i \in B} m(\{P_i\})$, *per ogni* $B \in \mathscr{B}$.
(ii) continua se $m(\{P\}) = 0$ *per ogni* $P \in \mathbb{R}$.
(iii) assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue se $m(A) = 0$ *per ogni* $A \in \mathscr{B}$ *di misura nulla rispetto alla misura di Lebesgue.*
(iv) singolarmente continua rispetto alla misura di Lebesgue se è continua ed esiste un insieme $M \in \mathscr{B}$ *di misura di Lebesgue nulla tale che* $m(\mathbb{R} \setminus M) = 0$.

Proposizione 4.6. *Per ogni misura di Borel* m *su* $\mathbb{R}$, *abbiamo che* $m = m_d + m_{ac} + m_{sc}$ *in un' unica scomposizione, dove* m_d *è discreta,* m_{ac} *è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, e* m_{sc} *è singolarmente continua rispetto alla misura di Lebesgue.*

Definizione 4.7. *Una* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice funzione di distribuzione se è crescente, continua da destra e*

$$\lim_{\lambda\to-\infty} F(\lambda) = 0, \ \lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda) = \alpha \ con \ 0 < \alpha < +\infty.$$

Data una distribuzione F, possiamo costruire una particolare misura di Borel su $\mathbb{R}$:

Definizione 4.8. *Data una funzione distribuzione* F, *esiste un'unica misura di Borel finita* m^F *per cui*

$$m^F((a,b]) = F(b) - F(a), \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \ a < b.$$

Una tale misura è detta misura di Stieltjes.

Osserviamo che se m è una misura di Borel finita allora la funzione $F^m(\lambda) := m((-\infty, \lambda])$ è una funzione di distribuzione e la misura di Stieltjes ad essa associata è proprio m. Alcune utili proprietà delle misure di Stieltjes sono riportate dalla proposizione seguente.

Proposizione 4.9. *Sia* m^F *una misura di Stieltjes associata ad una funzione di distribuzione* F. *Allora:*

$$(i) \ m^F(\mathbb{R}) = \alpha,$$
$$(ii) \ m^F(\{a\}) = F(a) - \lim_{x\to a^-} F(x),$$
$$(iii) \ m^F([a,b]) = F(b) - \lim_{x\to a^-} F(x),$$
$$(iv) \ m^F([a,b)) = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^-} F(x),$$
$$(v) \ m^F((a,b)) = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a).$$

4.2 Proiettori ortogonali

Prima di formulare l'enunciato del Teorema Spettrale bisogna introdurre alcuni concetti. Il primo è quello di proiettore ortogonale.

Sia $\mathscr{H}$ uno spazio di Hilbert ed $M \subseteq \mathscr{H}$ un sottospazio chiuso. Il complemento ortogonale di M è dato da

$$M^{\perp} = \{f \in \mathscr{H} |\ (f, g) = 0,\ \forall g \in M\}$$

e qualsiasi elemento $f \in \mathscr{H}$ può essere espresso in modo unico nella forma

$$f = f_M + f_M^{\perp} \tag{4.1}$$

con $f_M \in M,\ f_M^{\perp} \in M^{\perp}$.
Diamo, quindi, ora la definizione di proiettore ortogonale.

Definizione 4.10. *Una mappa $P : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ è detta proiettore ortogonale se esiste un sottospazio chiuso $M \subseteq \mathscr{H}$, $M \neq \{0\}$ tale che $Pf = f_M$ per ogni $f \in \mathscr{H}$.*

I proiettori ortogonali possono essere caratterizzati come segue.

Proposizione 4.11. *P è un proiettore ortogonale se e solo se P è un operatore lineare, limitato, simmetrico e idempotente (cioè $P^2 = P$).*

Dimostrazione. Sia P un proiettore ortogonale. Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $f, g \in \mathscr{H}$, usando l'unicità della (4.1), si può dimostrare che $(\alpha f + \beta g)_M = \alpha f_M + \beta g_M$. Di conseguenza $P(\alpha f + \beta g) = \alpha P f + \beta P g$, ovvero P è lineare. Inoltre, dato che

$$\begin{aligned}\|Pf\|^2 = (Pf, Pf) = (f_M, f_M) &\leq (f_M, f_M) + (f_M^{\perp}, f_M^{\perp}) \\ = (f_M + f_M^{\perp}, f_M + f_M^{\perp}) &- (f_M, f_M^{\perp}) - (f_M^{\perp}, f_M) \leq \|f\|^2\end{aligned}$$

si ha che P è anche limitato. La simmetria si può, invece, dimostrare mostrando che

$$\begin{aligned}(Pf, g) = (f_M, g) = (f_M, g_M + g_M^{\perp}) &= (f_M, g_M) + (f_M, g_M^{\perp}) \\ = (f_M, g_M) &=_a (f_M, g_M) + (f_M^{\perp}, g_M) \\ = (f_M + f_M^{\perp}, g_M) &= (f, g_M) = (f, Pg).\end{aligned} \tag{4.2}$$

Infine, di nuovo dalla (4.2), notiamo che $(Pf, g) = (f_M, g_M) = (Pf, Pg)$ e dato che abbiamo appena dimostrato che P é simmetrico, $(Pf, g) = (P^2 f, g)$, ovvero $P^2 = P$.

Dimostriamo ora che se P è un operatore lineare, limitato, simmetrico e idempotente allora P è un proiettore ortogonale. Definiamo $N := \{f \in \mathscr{H} |\ Pf = f\}$. Consideriamo poi una successione $f_n \in N$ tale che $f_n \to f$ per $n \to \infty$. Allora $\|f_n - Pf\| = \|Pf_n - Pf\| \leq \|P\| \|f_n - f\| \to 0$. Di conseguenza $f_n \to Pf$. Ne segue che $f = Pf$ e, allora, f appartiene ad N, ovvero N è un sottospazio chiuso di $\mathscr{H}$.

Esprimiamo ora un qualsiasi elemento $f \in \mathscr{H}$ come

$$f = Pf + (f - Pf). \tag{4.3}$$

Per ipotesi $P^2 = P$, perciò $P(Pf) = Pf$, ovvero $Pf \in N$. Inoltre, dato un qualsiasi elemento $g \in N$, si ha che

$$(f - Pf, g) = (f - Pf, Pg) = (Pf - P^2 f, g) = (Pf - Pf, g) = 0.$$

Quindi, $f - Pf \in N^{\perp}$. Di conseguenza, la (4.3) si può riscrivere come

$$f = f_N + f_N^{\perp}$$

e

$$Pf = Pf_N + Pf_N^{\perp} = f_N + P(f - Pf) = f_N + Pf - Pf = f_N.$$

□

4.3 Famiglia spettrale

Il secondo concetto da introdurre per poter formulare il Teorema Spettrale è quello di famiglia spettrale.

Definizione 4.12. *Una famiglia spettrale in $\mathscr{H}$ è una collezione di proiettori ortogonali $\{E(\lambda)\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, che soddisfi le seguenti proprieà per una qualsiasi $f \in \mathscr{H}$:*

$$(i) \quad \lim_{n \to -\infty} E(\lambda) f = 0 \qquad e \qquad \lim_{n \to +\infty} E(\lambda) f = f.$$

$$(ii) \quad (E(\lambda) f, f) \leq (E(\mu) f, f), \qquad se \quad \lambda \leq \mu.$$

$$(iii) \quad \lim_{\epsilon \to 0^+} E(\lambda + \epsilon) f = E(\lambda) f.$$

Fissiamo ora una $f \in \mathscr{H}$ arbitraria, una famiglia spettrale $\{E(\lambda)\}$ e definiamo la seguente funzione

$$F^f(\lambda) := (E(\lambda) f, f). \tag{4.4}$$

Proposizione 4.13. *$F^f(\lambda)$ è una distribuzione.*

Dimostrazione. $F^f(\lambda)$ è una funzione a valori reali. Infatti $E(\lambda)$ è un proiettore, perciò $(E(\lambda)f, f) = (f_E, f) = (f_E, f_E) \in \mathbb{R}$. Inoltre, F è crescente e continua da destra rispettivamente per la (ii) e la (iii) della Definizione 4.12. Per la (i), invece, si ha che

$$\lim_{\lambda \to -\infty} (E(\lambda) f, f) = 0$$

e

$$\lim_{\lambda \to +\infty} (E(\lambda) f, f) = \|f\|^2 \in (0, \infty),$$

cosa che completa la dimostrazione. □

Possiamo, quindi, dare la definizione di misura spettrale.

Definizione 4.14. *Per ogni $f \in \mathscr{H}$, la misura di Stieltjes m^f in $\mathbb{R}$ relativa alla funzione di distribuzione (4.4) è detta misura spettrale assocciata al vettore f e alla famiglia spettrale $\{E(\lambda)\}$.*

La Definizione 4.14 implica che m^f è una misura reale. A partire da essa, però, utilizzando l'identità di polarizzazione del prodotto scalare

$$4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x - iy\|^2 - i\|x + iy\|^2,$$

possiamo definire una misura spettrale complessa.
Per prima cosa ci è utile il seguente lemma.

Lemma 4.15. *Siano $g, f \in \mathscr{H}$ e sia $\{E(\lambda)\}$ una famiglia spettrale. Allora*

$$\|E(\lambda)f + g\|^2 = (E(\lambda)(f + g), f + g) + \|g - E(\lambda)g\|^2$$

Dimostrazione. $E(\lambda)$ è un proiettore ortogonale per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Di conseguenza

$$\|E(\lambda)f + g\|^2 = (E(\lambda)f + g, E(\lambda)f + g) = (E(\lambda)f + g, E(\lambda)f) + (E(\lambda)f + g, g) \tag{4.5}$$

Considerando il primo addendo a destra dell'uguale si ha

$$(E(\lambda)f + g, E(\lambda)f) = (E(\lambda)^2 f + E(\lambda)g, f) = (E(\lambda)(f + g), f). \tag{4.6}$$

Per il secondo addendo, invece,

$$\begin{aligned}(E(\lambda)f + g, g) &= (E(\lambda)f, g) + (E(\lambda)g + g - E(\lambda)g, g) \\ &= (E(\lambda)f, g) + (E(\lambda)g, g) + (g - E(\lambda)g, E(\lambda)g + g - E(\lambda)g) \\ &= (E(\lambda)(f + g), g) + \|g - E(\lambda)g\|^2.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Riprendendo la (4.5) e sostituendo i risultati trovati in (4.6) e (4.7) arriviamo a

$$\begin{aligned}\|E(\lambda)f + g\|^2 &= (E(\lambda)(f + g), f) + (E(\lambda)(f + g), g) + \|g - E(\lambda)g\|^2 \\ &= (E(\lambda)(f + g), f + g) + \|g - E(\lambda)g\|^2\end{aligned}$$

□

Date, ora, $f, g \in \mathscr{H}$, calcoliamo $(E(\lambda)f, g)$ usando l'identità di polarizzazione:

$$\begin{gathered}4(E(\lambda)f, g) \\ = \|E(\lambda)f + g\|^2 - \|E(\lambda)f - g\|^2 + i\|E(\lambda)f - ig\|^2 - i\|E(\lambda)f + ig\|^2.\end{gathered}$$

Di conseguenza, per il Lemma 4.15, si ha

$$\begin{aligned}(E(\lambda)f, g) = \frac{1}{4}(E(\lambda)(f + g), f + g) - \frac{1}{4}(E(\lambda)(f - g), f - g) + \\ + \frac{i}{4}(E(\lambda)(f - ig), f - ig) - \frac{i}{4}(E(\lambda)(f + ig), f + ig).\end{aligned}$$

Si noti che tutti i prodotti scalari a destra dell'uguale sono funzioni di distribuzione e definiscono le 4 misure spettrali: $m^{f+g}, m^{f-g}, m^{f-ig}, m^{f+ig}$. Ciò detto, è possibile dare la seguente definizione.

Definizione 4.16. *Per ogni $f, g \in \mathscr{H}$ la misura spettrale associata ad f, g e alla famiglia spettrale $\{E(\lambda)\}$ $m^{f,g}$ è data da*

$$m^{f,g} := \frac{1}{4}m^{f+g} - \frac{1}{4}m^{f-g} + \frac{i}{4}m^{f-ig} - \frac{i}{4}m^{f+ig}.$$

Le definizioni di misura spettrale reale e complessa ci consentono di definire rigorosamente gli integrali di Rieman-Stieltjes di una funzione $\phi(\lambda)$ come

$$\int \phi(\lambda)d(E(\lambda)f, f), \qquad \int \phi(\lambda)d(E(\lambda)f, g).$$

Infine ricordiamo alcune altre utili proprietà delle famiglie spettrali.

Proposizione 4.17. *Data una famiglia spettrale $\{E(\lambda)\}$ valgono le seguenti proprietà:*

$$\begin{gathered} (i) f \in Im(E(\lambda)) \text{ se e solo se } f = E(\lambda)f; \\ (ii) \text{ se } \lambda \leq \mu \text{ allora } Im(E(\lambda)) \subseteq Im(E(\mu)); \\ (iii) \text{ se } \lambda \leq \mu \text{ allora } E(\lambda)E(\mu) = E(\mu)E(\lambda) = E(\lambda). \end{gathered} \tag{4.8}$$

Dimostrazione. (i) Sia $f = E(\lambda)f$ allora, chiaramente, $f \in Im(E(\lambda))$.
Sia $f \in Im(E(\lambda))$. Allora $f_E^{\perp} = f - E(\lambda)f = 0$ ed $f = f_E = E(\lambda)f$.

(ii) Sia $f \in Im(E(\lambda))$. Dimostriamo che ciò implica $f \in Im(E(\mu))$. Per la (i), $f \in Im(E(\lambda))$ implica $f = E(\lambda)f$. Quindi

$$\begin{gathered} \|f\|^2 = (f, f) = (E(\lambda)f, E(\lambda)f) \\ = (E(\lambda)^2 f, f) = (E(\lambda)f, f) \leq (E(\mu)f, f) = (f, f) = \|f\|^2, \end{gathered}$$

ne segue che tutte le disuguaglianze sono in realtà uguaglianze e, in particolare, $(E(\lambda)f, f) = (E(\mu)f, f)$. Quindi, di nuovo per la (i), si ha $f = E(\lambda)f = E(\mu)f$, ovvero $f \in Im(E(\mu))$.

(iii) Sia $f \in \mathscr{H}$ arbitraria, $E(\lambda)f = E(\lambda)E(\mu)f + E(\lambda)(f - E(\mu)f)$. A questo punto ci basta dimostrare che $E(\lambda)(f - E(\mu)f) = 0$. Per definizione $(f - E(\mu)f) \in \Big(Im(E(\mu))\Big)^{\perp}$. Per (ii) abbiamo che $Im(E(\lambda)) \subseteq Im(E(\mu))$, allora, di conseguenza, $\Big(Im(E(\mu))\Big)^{\perp} \subseteq \Big(Im(E(\lambda))\Big)^{\perp}$. Quindi $(f - E(\mu)f) \in \Big(Im(E(\lambda))\Big)^{\perp}$, cioè $E(\lambda)(f - E(\mu)f) = 0$, che dimostra che $E(\lambda)f = E(\lambda)E(\mu)f$ per ogni $f \in \mathscr{H}$, ovvero che $E(\lambda) = E(\lambda)E(\mu)$. Inoltre ciò implica che $E(\mu)E(\lambda)f = E(\mu)E(\lambda)E(\mu)f$. Ma dato che, sempre per la (ii), $E(\lambda)E(\mu)f \in Im(E(\lambda) \subseteq Im(E(\mu))$, allora per (i) abbiamo che $E(\mu)E(\lambda)E(\mu)f = E(\lambda)E(\mu)f$ e perciò $E(\mu)E(\lambda)f = E(\lambda)E(\mu)f$ per ogni $f \in \mathscr{H}$. Abbiamo quindi dimostrato che $E(\lambda) = E(\lambda)E(\mu) = E(\mu)E(\lambda)$. $\square$

Definizione 4.18. *Per $a < b$ definiamo i seguenti operatori*

$$
\begin{gathered}
E((a,b]) := E(b) - E(a), \\
E((a,b)) := \lim_{x \to b^-} E(x) - E(a), \\
E(\{a\}) := E(a) - \lim_{x \to a^-} E(a), \\
E([a,b]) := E(b) - \lim_{x \to a^-} E(x), \\
E([a,b) = \lim_{x \to b^-} E(x) - \lim_{x \to a^-} E(x).
\end{gathered}
$$

Questi operatori sono proiettori ortogonali. Verifichiamolo per il primo (per gli altri si procede analogamente).
Dato che $E((a,b])$ è differenza di operatori lineari e limitati, è a sua volta lineare e limitato. Inoltre
$(E((a,b])f,g) = (E(b)f,g) - (E(a)f,g) = (f, E(b)g - E(a)g) = (f, E((a,b]g))$, e quindi è anche simmetrico. Infine è idempotente, perché lo sono $E(a)$ ed $E(b)$.

In conclusione, presentiamo le seguenti proprietà.

Proposizione 4.19. *Sia $f \in Im(E((a,b]))$. Allora:*

$$
\begin{gathered}
(E(\lambda)f,f) = 0 \text{ se } \lambda \leq a, \\
(E(\lambda)f,f) = (E((a,\lambda])f,f) \text{ se } a < \lambda \leq b, \\
(E(\lambda)f,f) = \|f\|^2 \text{ se } \lambda > b.
\end{gathered} \tag{4.9}
$$

Inoltre, se $f \in Im(E(\{a\}))$, allora abbiamo che $(E(\lambda)f,f) = \|f\|^2 \chi_{[a,\infty)}(\lambda)$.

Dimostrazione. Per la (i) di (4.8), se $f \in Im(E((a,b]))$ allora $f = E((a,b])f$. Perciò, per la Definizione 4.18 possiamo scrivere

$$
\begin{gathered}
(E(\lambda)f,f) = (E(\lambda)E((a,b])f,f) = \\
(E(\lambda)(E(b) - E(a))f,f) = \\
(E(\lambda)E(b)f,f) - (E(\lambda)E(a)f,f).
\end{gathered}
$$

Da qui, utilizzando la proprietà (iii) di (4.8), si arriva a (4.9). Gli stessi passaggi valgono per $f \in Im(E(\{a\})$. □

Proposizione 4.20. *Sia $(a,b] \cap (c,d] = \emptyset$. Allora $E((a,b])E((c,d]) = E((c,d])E((a,b]) = 0$.*

Dimostrazione. Ipotizziamo, senza perdita di generalità, $c > b$. $E((a,b])E((c,d]) = (E(b) - E(a))(E(d) - E(c))$ per definizione.
Si può equivalentemente scrivere ciò come

$$
E(b)E(d) - E(b)E(c) - E(a)E(d) + E(a)E(c). \tag{4.10}
$$

Ora, utilizzando la (iii) di (4.8), abbiamo che (4.10) equivale a

$$
E(b) - E(b) - E(a) + E(a) = 0.
$$

□

4.4 Enunciato del Teorema Spettrale

Ora abbiamo tutti gli strumenti per enunciare il Teorema Spettrale. Questo consiste nel riscrivere il dominio e l'azione di un operatore autoaggiunto come integrale di Rieman-Stieltjes nel parametro spettrale di una famiglia spettrale opportunamente definita.

Teorema 4.21. *Teorema Spettrale*
Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore autoaggiunto. Allora esiste un'unica famiglia spettrale $\{E_A(\lambda)\}$ tale che :

$$D(A) = \{u \in \mathscr{H} | \int \lambda^2 d(E_A(\lambda)u, u) < \infty\},$$

$$(Au, v) = \int \lambda d(E_A(\lambda)u, v), \qquad \forall u \in D(A),\ \forall v \in \mathscr{H}. \tag{4.11}$$

Inotlre si ha che:

$$\|Au\|^2 = \int \lambda^2 d(E_A(\lambda)u, u), \qquad \forall u \in D(A). \tag{4.12}$$

Infine il supporto della misura di integrazione in (4.11) e (4.12) è $\sigma(A)$.

Ogni operatore autoaggiunto, per il Teorema Spettrale, può quindi essere semplificato in un operatore di moltiplicazione.
Diamo ora un'altra importante definizione.

Definizione 4.22. *Un operatore autoaggiunto $A : D(A) \to \mathscr{H}$ si dice limitato dal basso se esiste una costante γ tale che:*

$$(u, Au) \geq \gamma \|u\|^2, \qquad \forall u \in D(A).$$

Inoltre

$$\inf_{u \in D(A), \|u\|=1} (u, Au)$$

è detto estremo inferiore dell'operatore A. Infine, se $(u, Au) \geq 0$ per ogni $u \in D(A)$, l'operatore A è detto positivo.

Grazie al Teorema Spettrale, è possibile dare una caratterizzazione dell'estremo inferiore di un operatore autoaggiunto.

Proposizione 4.23. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore autoaggiunto. Allora, A è limitato dal basso se e solo se $\sigma(A)$ è limitato dal basso. Inoltre:*

$$\inf \sigma(A) = \inf_{u \in D(A), \|u\|=1} (u, Au).$$

Dimostrazione. Siano

$$\gamma_\sigma := \inf \sigma(A) \text{ e } \gamma_A := \inf_{u \in D(A), \|u\|=1} (u, Au).$$

Supponiamo che A sia limitato dal basso. Per ogni $\lambda < \gamma_A$ abbiamo

$$\begin{aligned} \|(A-\lambda)f\|\|f\| \geq |((A-\lambda)f, f)| \\ \geq ((A-\gamma_A+\gamma_A-\lambda)f, f) = ((A-\gamma_A)f, f) + ((\gamma_A-\lambda)f, f) \\ \geq (\gamma_A-\lambda)\|f\|^2, \end{aligned} \tag{4.13}$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dall'ipotesi che A è autoaggiunto e limitato dal basso. Supponiamo per assurdo $\lambda \in \sigma(A)$. Deve esistere una successione di Weyl relativa a λ, ma ciò è impossibile perchè, per la (4.13), $\|(A-\lambda)f_n\|$ non tende a 0 se $\|f_n\|^2 = 1$. Ne concludiamo che per ogni $\lambda < \gamma_A$, $\lambda \in \rho(A)$. Di conseguenza $\sigma(A)$ è limitato dal basso e $\gamma_\sigma \geq \gamma_A$.
Supponiamo ora che $\sigma(A)$ sia limitato dal basso. Per il Teorema Spettrale

$$\begin{aligned} (f, Af) = (Af, f) = \int \lambda d(E(\lambda)f, f) = \\ \int_{\lambda \geq \gamma_\sigma} \lambda d(E(\lambda)f, f) \geq \gamma_\sigma \|f\|^2. \end{aligned}$$

A è limitato dal basso e $\gamma_A \geq \gamma_\sigma$. □

4.5 Calcolo funzionale

Il Teorema Spettrale ci offre una via naturale per definire una funzione di un operatore autoaggiunto, strumento fondamentale per definire, ad esempio, l'evoluzione di un sistema quantistico come enunciato nella terza regola fondamentale riportata nel Capitolo 5. È, inoltre, fondamentale per esprimere un osservabile qualsiasi in funzione degli operatori associati alla quantità di moto ed alla posizione.

Proposizione 4.24. *Sia $A : D(A) \to \mathscr{H}$ un operatore autoaggiunto e sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua e limitata. Allora esiste un operatore limitato $\phi(A)$ tale che*

$$(\phi(A)u, v) = \int \overline{\phi(\lambda)} d(E_A(\lambda)u, v), \qquad \forall u, v \in \mathscr{H}.$$

Inoltre :

$$\|\phi(A)u\|^2 = \int |\phi(\lambda)|^2 d(E_A(\lambda)u, u).$$

Dimostrazione. Per ogni $u \in \mathscr{H}$, consideriamo il funzionale lineare in $\mathscr{H}$

$$\Psi_u : \mathscr{H} \ni v \to \int \overline{\phi(\lambda)} d(E_A(\lambda)u, v) \in \mathbb{R}.$$

Per la limitatezza di ϕ e quanto enunciato nel Teorema Spettrale, Ψ_u è limitato. Per il Teorema 3.14 esiste ed è unica $h \in \mathscr{H}$ tale che $\Psi_u(v) = (h, v)$. E' quindi sufficiente definire $\phi(A)$ come la mappa lineare e limitata: $\phi(A) : u \to h$.

□

Capitolo 5

Conclusione: una formulazione matematica della Meccanica Quantistica

Alla luce di quanto visto nei capitoli precedenti è, infine, possibile presentare una formulazione matematica rigorosa della Meccanica Quantistica. Tale formulazione è intrinsecamente legata ai concetti di autoaggiuntezza e spettro e, quindi, giustifica lo studio approfondito di tali concetti svolto fin qui.

La formulazione che presentiamo segue l'approccio sviluppato da Von Neumann e consiste nella sua essenza nell'enunciazione delle 5 regole fondamentali.
(1) (Stato) In ogni istante di tempo, lo stato di un sistema è descritto da un vettore ψ con norma $\|\psi\| = 1$, detto funzione onda. Il vettore ψ appartiene ad un dato spazio di Hilbert $\mathscr{H}$, detto spazio degli stati del sistema.
(2) (Osservabile) Le quantità fisiche associate al sistema $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, ..., sono dette osservabili. Esse sono descritte da operatori autoaggiunti $A, B, ...$ che agiscono nello spazio degli stati $\mathscr{H}$.
(3) (Evoluzione dello stato) Assegnato lo stato iniziale del sistema ψ_0, lo stato ad ogni tempo $t > 0$ è dato da:

$$\psi_t = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}\psi_0,$$

dove H è l'operatore Hamiltoniano, cioè l'operatore autoaggiunto che descrive l'energia osservabile del sistema.
(4) (Predizioni) Sia ψ_t lo stato del sistema al tempo t, sia $\mathscr{A}$ una quantità osservabile relativa al sistema e A il corrispondente operatore autoaggiunto. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Denotiamo con $\mathscr{P}(\mathscr{A} \in I; \psi_t)$ la probabilità che il risultato di una misurazione di $\mathscr{A}$, al tempo t effettuata sul sistema nello stato ψ_t, sia un valore appartenente all'intervallo I. Allora :

$$\mathscr{P}(\mathscr{A} \in I; \psi_t) = (\psi_t, E_A(I)\psi_t) \tag{5.1}$$

dove $E_A(\lambda)$ è la famiglia spettrale associata ad A.
(5) (Procedura di quantizzazione) Per una particella in Meccanica Classica, $(k = 1, ..., d)$ sia $(x, p) \to x_k$, la funzione, definita nello spazio delle fasi $\mathbb{R}^{2d}$, che rappresenta la k-esima componente della posizione osservabile. Sia $(x, p) \to p_k$, la funzione che rappresenta la k-esima componente della quantità di moto osservabile.
In Meccanica Quantistica il corrispondente spazio degli stati è $L^2(\mathbb{R}^d)$; i corrispondenti osservabili di posizione e quantità di moto sono rappresentati dagli operatori autoaggiunti:

$$(Q_k\phi)(x) := x_k\phi(x),\ D(Q_k) = \{\phi \in L^2(\mathbb{R}^d) | \int |x_k\phi(x)|^2 dx < \infty\},$$

$$(P_k\phi)(x) := \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}(x),\ D(P_k) = \{\phi \in L^2(\mathbb{R}^d) | \int |p_k\phi(p)|^2 dp < \infty\}.$$

Più in generale, sia $f : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ una funzione rappresentante un osservabile in meccanica classica. Il corrispondente osservabile quantico è rappresentato dall'operatore autoaggiunto $f(Q, P)$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$.

E' rilevante sottolineare che la regola (4) afferma che si possono solo formulare predizioni probabilistiche sui possibili risultati di una misurazione di un osservabile. Questo è un aspetto insolito, peculiare della Meccanica Quantistica.
Inoltre, riprendendo la (5.1), dato un operatore A associato ad un osservabile $\mathscr{A}$, possiamo definire la distribuzione $F_A^\psi(\lambda)$. Dato che A è autoaggiunto la misura spettrale m_A^ψ ha supporto $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Di conseguenza, qualsiasi misurazione di $\mathscr{A}$ avrà risultato compreso in $\sigma(A)$.
Infine, per un osservabile $\mathscr{A}$ possiamo definire il valore atteso come

$$\langle A \rangle := \int \lambda d(\psi, E_A(\lambda)\psi)$$

e analogamente la deviazione standard $\Delta A^2 := \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$.

Bibliografia

[1] Teta, Alessandro. A Mathematical Primer on Quantum Mechanics. Berlin: Springer, 2018.

[2] Rynne, Bryan, and Martin A. Youngson. Linear functional analysis. Springer Science Business Media, 2007.