

Teoria Dei Campi

Enrico Malatesta

5 gennaio 2015

Indice

1 Formalismo Generale della Teoria dei Campi	1
1.1 Principio di Località	1
1.2 Lorentz Covariance	2
1.2.1 Caso di Klein-Gordon: Gruppo di Lorentz	4
1.2.2 Caso di Klein-Gordon: Traslazioni	5
1.3 Spettro di massa di una teoria in interazione	6
1.4 Matrice S e basi IN e OUT	7
1.4.1 Completezza	8
1.5 La rappresentazione spettrale di Kallen-Lehmann	9
1.5.1 Funzione di Wightman a due punti	9
1.5.2 Spettro di massa	12
1.6 Distribuzioni	14
1.6.1 Richiami	14
1.6.2 Operatori Locali come Distribuzioni	17
1.7 T-prodotti	18
1.8 Teorema del Limite Asintotico	21
1.9 Formule di Riduzione	23
2 Quantization with Path Integrals	27
2.1 Path Integrals in Nonrelativistic Quantum Mechanics	27
2.1.1 Feynman's Path Integral	28
2.1.2 The Time-Ordered Product and n -Point Functions	28
2.1.3 The Vacuum Persistence Amplitude	28
2.2 The Path integral For Scalar Quantum Fields	28
2.2.1 Euclidean Field Theory	29
3 Metodo dell'integrale Funzionale in Teoria dei Campi	31
3.1 Funzionale Generatore e passaggio all'Euclideo	31
3.1.1 Rotazione di Wick e passaggio all'Euclideo	33
3.1.2 Discretizzazione, cut-off e limite del continuo	35
3.2 Teoria Libera nel formalismo Funzionale	36
4 Rinormalizzazione	41
4.1 Idea di Base	41
4.2 Espansione Perturbativa	42
4.3 Rinormalizzazione al primo ordine per la teoria $\lambda\varphi^4$	45
4.4 Teorema di Rinormalizzabilità	47
4.5 Rinormalizzazione al secondo ordine per la teoria $\lambda\varphi^4$	48
4.5.1 Espansione perturbativa al secondo ordine per la funzione generatrice a due punti dei vertici propri	48
4.5.2 Espansione perturbativa al secondo ordine per la funzione generatrice a quattro punti dei vertici propri	49
4.5.3 Risultato	50

4.5.4	Problema dei grandi logaritmi	51
4.6	Divergenze Infrarosse	52
4.7	Equazioni di Callan-Symanzik	53
4.7.1	Libertà Asintotica	57
4.7.2	Calcolo della funzione $\beta(g)$ nel caso della teoria $\lambda\varphi^4$	59
4.7.3	Argomento di Landau	60
4.7.4	Invarianza di Scala	62
5	Teorie di Gauge	65
5.1	Campi Fermionici	65
5.1.1	Integrazione e derivazione per funzioni di 1 o 2 variabili di Grassmann	66
5.1.2	Integrazione Gaussiana	67
5.1.3	Integrazione su variabili complesse	67
5.1.4	Integrale funzionale fermionico	68
5.1.5	Propagatore Fermionico Libero	69
5.1.6	Propagatore Fermionico nel caso interagente	72
5.2	Teorie di Gauge Classiche	76
5.3	Quantizzazione delle teorie di Gauge	77
5.3.1	Misura invariante su un gruppo	78
5.3.2	Metodo di Faddeev-Popov	80
5.3.3	Caso Abeliano	83
5.3.4	Caso non Abeliano	85
6	Simmetrie	91
6.1	Teorema della Noether	91
6.2	Simmetrie $SO(N)$	92
6.3	Identità di Ward	96
6.3.1	Derivazione dall'integrale funzionale	98
6.3.2	Rinormalizzazione	100
6.4	Teorema di Goldstone	102
6.4.1	Deduzione dalle identità di Ward	107
6.4.2	Un apparente paradosso	108
6.4.3	Calcolo con l'inserzione di rottura spontanea esplicita	109
6.5	Loop expansion	111
A	Gruppi e Rappresentazioni	117
A.1	Definizione di Gruppi e sottogruppi, sottogruppi normali, prodotto diretto di gruppi, omeomorfismi e isomorfismi	117
A.2	Rappresentazione di un gruppo	118
A.2.1	Rappresentazioni riducibili e completamente riducibili	119
A.2.2	Prodotto diretto di Rappresentazioni	119
A.2.3	Rappresentazione Aggiunta	121
B	Gruppi ed Algebre di Lie	123

Capitolo 1

Formalismo Generale della Teoria dei Campi

1.1 Principio di Località

Mentre nella fisica newtoniana un certo ordinamento temporale di eventi rimane invariato in ogni sistema di riferimento e solo le coordinate spaziali dell'evento possono al massimo cambiare, in relatività anche il tempo cambia con il cambiamento del sistema di riferimento inerziale. La struttura delle trasformazioni di Lorentz genera una *struttura causale* dello spazio-tempo. Si può facilmente verificare come, dati due eventi con distanza di tipo luce o tempo, in tutti i sistemi di riferimento inerziali connessi con una trasformazione di Lorentz, l'ordinamento cronologico dei due eventi rimane sempre il medesimo. Pertanto gli eventi interni al cono di luce corrispondenti ad un istante di tempo precedente il tempo di P rimangono precedenti a P in tutti i riferimenti inerziali connessi da una trasformazione di Lorentz e per questa ragione quindi la parte interna bassa del cono di luce viene denominata *passato assoluto* di P . Invece gli eventi interni al cono di luce corrispondenti ad un istante di tempo successivo al tempo dell'evento P rimarranno successivi a P in tutti i sistemi di riferimento inerziali connessi da una trasformazione di Lorentz e quindi la parte interna alta del cono di luce viene denominata *futuro assoluto* dell'evento P . È ancora facilmente verificabile come, dati due eventi con distanza di tipo spazio, esista sempre una trasformazione di Lorentz che porti ad un altro sistema di riferimento inerziale in cui i due eventi hanno l'ordinamento temporale scambiato o siano simultanei. Poichè gli eventi esterni al cono di luce di P sono eventi che, come detto, in qualche altro sistema di riferimento inerziale possono diventare simultanei con l'evento P , la regione esterna al cono di luce viene detta *presente assoluto* rispetto all'evento P . Ovviamente si tratta di un presente fittizio in quanto non c'è modo di comunicare da P verso questa regione inaccessibile ai raggi luminosi.

Da questa struttura causale segue che la velocità c della luce è invalicabile. La ragione dell'invalicabilità di c non è, come si potrebbe pensare semplicisticamente, la presenza di $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ nel denominatore delle trasformazioni di Lorentz, che diventerebbe immaginario se la velocità v avesse modulo maggiore di c . La presenza di tale radicando impedisce, al più, che vi siano velocità relative maggiori di c , ma non chiarisce perchè non possa esistere, ad esempio, una radiazione che si propaghi con velocità maggiore di c . L'invalicibilità della velocità della luce è motivata dalla richiesta che non vengano violate le relazioni causali tra gli eventi. Se qualche oggetto potesse avere velocità superiore a quella della luce, esso potrebbe essere utilizzato per trasmettere un'informazione che parta da P in un certo istante di tempo e arriva in Q (evento esterno al cono di luce di P) in un istante successivo. Ma poichè, dato il cono di luce di P e un evento Q esterno a tale cono di luce, esiste sempre un sistema di riferimento inerziale rispetto al quale gli eventi P e Q hanno ordinamento temporale scambiato, se un'informazione partisse da P e con velocità maggiore di c arrivasse in Q , avremmo il paradosso per cui in un altro sistema di riferimento inerziale tale informazione giungerebbe in Q in un istante di tempo antecedente al tempo di P , ovvero prima che l'informazione stessa sia stata inviata da P . Concludiamo quindi che la luce ha una velocità c invalicabile perchè un oggetto avente, per assurdo, una velocità maggiore di c violerebbe quello che possiamo denominare *principio di causalità* e renderebbe possibile il paradosso per cui un effetto si realizzerebbe prima che se ne sia manifesta la causa.

Quantisticamente dato un campo φ libero deve valere il *principio di microcausalità*:

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_{x \sim y} = 0 \quad (1.1)$$

Questo deve accadere (ed è stato verificato che effettivamente accade così se si impongono le regole di commutazione canoniche) perchè dobbiamo introdurre delle restrizioni dovute alla struttura causale dello spazio-tempo: due eventi separati da un intervallo di tipo spazio devono essere indipendenti. Gli operatori che soddisfano questa relazione si chiamano *operatori locali*. Questi sono in generale dipendenti dai prodotti di campi fondamentali e delle loro derivate calcolate tutte nello stesso punto. Queste quantità possono essere misurate: esempi di osservabili locali sono $\varphi^2(x)$, la densità di Hamiltoniana, mentre l'energia H non è un'osservabile locale perchè è un integrale. La struttura della meccanica quantistica rimane invariata in teoria dei campi: abbiamo uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , una base completa di stati $|p\rangle$ e un insieme di operatori locali $O(x)$ definiti punto per punto nello spazio-tempo. Notare che l'operatore $\varphi^2(x)$ è singolare. Nel caso della teoria libera questa singolarità può essere risolta con il buon ordinamento ($aa^\dagger \rightarrow a^\dagger a$). Verificheremo che questa singolarità è una proprietà generale dei campi qualunque sia l'interazione che possa intervenire. Supponiamo ora di avere una teoria caratterizzata da una hamiltoniana H funzione dell'insieme di osservabili $\{O_i\}$ e due osservatori A e B nello spazio-tempo. Mettiamoci in schema di interazione e supponiamo di voler eseguire un esperimento di trasmissione fra i due osservatori. L'osservatore A costruisce quindi un trasmettitore localizzato in una certa zona dello spazio e che accende per un certo intervallo di tempo. Questo modifica l'Hamiltoniana nel seguente modo:

$$H \rightarrow H + \int d^3x J(\mathbf{x}, x^0) A(\mathbf{x}, x^0) \quad (1.2)$$

dove J è una funzione a supporto compatto (il supporto o sostegno di una funzione è la chiusura dell'insieme dei punti del dominio dove la funzione si annulla). In particolare è nulla per valori temporali esclusi dall'intervallo, diciamo, $[x_m^0, x_M^0]$. Quando $J \neq 0$ ci sarà una emissione di segnale che potrà forse essere rilevato dall'osservatore B . Supponiamo (per semplicità) che la sorgente sia tale da poter usare la teoria delle perturbazioni al primo ordine. Prima dell'accensione del trasmettitore ci troviamo in uno stato $|\alpha\rangle$ che è stazionario per $x^0 < x_m^0$. Quando accendiamo l'interazione, lo stato evolverà in funzione del tempo, e poichè siamo in schema di interazione sappiamo che questa evoluzione dipende solo dal termine aggiuntivo dell'Hamiltoniana

$$|\alpha, t\rangle = T \left\{ e^{-i \int_{-\infty}^t d^4y A(y) J(y)} \right\} |\alpha\rangle \simeq |\alpha\rangle - i \int_{-\infty}^t d^4y A(y) J(y) |\alpha\rangle . \quad (1.3)$$

Per studiare le misure di B dobbiamo calcolare il prodotto scalare $\langle \alpha, t | B(x) |\alpha, t \rangle$, che trascurando termini in J^2 assume la forma

$$\langle \alpha, t | B(x) |\alpha, t \rangle = \langle \alpha | B(x) |\alpha \rangle + i \int_{-\infty}^t d^4y J(y) \langle \alpha | [A(y), B(x)] |\alpha \rangle |\alpha\rangle . \quad (1.4)$$

Stiamo eseguendo la cosiddetta teoria della risposta lineare usata anche in struttura della materia: è la situazione molto frequente in cui si deve calcolare la risposta di un'osservabile ad una perturbazione dell'Hamiltoniana (tipico esempio è quello della risposta della conducibilità di un solido all'accensione di un campo elettrico esterno). Il primo termine può essere considerato come un segnale di fondo costante al quale non è associata nessuna informazione. Il termine interessante è invece il secondo. Se l'evento x è esterno a tutti i coni di luce costruibili nel supporto di J , dobbiamo imporre che non vi sia alcuna variazione nelle misure di B poichè questo osservatore non può ricevere alcun segnale. Questo in termini matematici si traduce nelle condizioni $[A(y), B(y)]_{x \sim y} = 0$ come volevamo dimostrare.

1.2 Lorentz Covariance

Ci vogliamo ora chiedere che cosa vuol dire che una teoria sia relativisticamente covariante. Dal punto di vista classico sappiamo che avendo un campo $\varphi(x)$ (che può essere un campo scalare, vettoriale o in generale spinoriale) questo assegna ad ogni evento dello spazio-tempo un valore φ . Quindi abbiamo un osservatore O

che parametrizza il suo spazio-tempo con quattro coordinate x e in ogni punto o evento esegue una misura di φ . Classicamente la perturbazione indotta dalla misura è trascurabile. Prendiamo ora un osservatore O' connesso ad O tramite una trasformazione di Lorentz propria (possono essere scritte in forma infinitesima); le coordinate nei due sistemi di riferimento sono legate dalla relazione $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ (questa trasformazione lascia la metrica invariante in forma e valore: $g_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g_{\mu\nu}$). I campi (calcolati dai due osservatori nello stesso punto dello spazio tempo) poichè sono oggetti geometrici (ovvero assoluti) sono connessi tramite

$$\varphi'(x') = S(\Lambda)\varphi(x). \quad (1.5)$$

$S(\Lambda)$ è una rappresentazione del gruppo di Lorentz proprio ovvero se $\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_2$

$$S(\Lambda) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) \quad (1.6)$$

Questo riflette semplicemente il fatto che se è nota la configurazione per O , allora lo è anche per qualsiasi altro sistema di riferimento inerziale, in virtù della loro equivalenza. Tutte questi campi sono quantità assolute e sotto trasformazioni di Lorentz le loro componenti si mescolano questo perchè le componenti che sto misurando dipendono dall'orientamento degli assi. Questo fa sì che la nostra $S(\Lambda)$ non dipenda dalle traslazioni in quanto le componenti di un campo che sia scalare vettoriale o spinoriale rimangono invariate per traslazioni degli assi. L'equazione (1.5) è puramente cinematica. Per connettere i valori dei campi in punti diversi dello spazio tempo abbiamo bisogno delle equazioni del moto, cioè della dinamica. La dinamica sarà tale che l'equazione del moto di $\varphi(x)$ e quella di $\varphi'(x')$ si ottengono una dall'altra semplicemente aggiungendo gli apici.

Quantisticamente, ogni osservatore O è equipaggiato da uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_O e un set di operatori di campo locali $\varphi_O(x)$. Per la covarianza di Poincarè tutti gli spazi di Hilbert relativi a differenti osservatori sono isomorfi; in questo modo possiamo immaginare di avere uno spazio di Hilbert \mathcal{H} universale e un insieme universale di operatori di campo $\varphi(x)$, al quale tutti gli osservatori si riferiscono. Supponiamo ora che l'osservatore O associ il ket $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ad una certa configurazione fisica del campo e che l'osservatore O' assegna allo stesso stato il ket $|\psi'\rangle \in \mathcal{H}$. Per il principio di corrispondenza tra meccanica classica e quantistica, se un campo quantistico ha piccola fluttuazione in modo che la sua dispersione sia quasi tutta dovuta agli errori di misura (in altre parole la dispersione quantistica è molto minore dell'errore di misura classico), si può assumere che il valor medio di un operatore si comporti come la corrispondente osservabile classica (possiamo utilizzare la teoria classica)

$$\tilde{\varphi}(x) = \langle \psi | \varphi(x) | \psi \rangle. \quad (1.7)$$

L'osservatore O' misurerà il valor medio

$$\tilde{\varphi}'(x') = \langle \psi' | \varphi(x') | \psi' \rangle. \quad (1.8)$$

Nota: l'operatore di campo non è primato; come dice il Greiner: “this would amount to double counting since the new system is already reached by using the transformed state vectors. Indeed $\varphi(x)$ and $\varphi(x')$ are *different operators* if $x \neq x'$. The degrees of freedom of the quantum field are described completely by specifying the set of field operators $\varphi(x)$ at all points x of Minkowski space”. In altre parole vi è, come avevamo detto prima, *un solo* campo φ . Andando avanti, avremo che quando i due osservatori O e O' eseguono una misura di una data osservabile, essi dovranno ottenere il medesimo valor medio, ciascuno attribuendo le proprie coordinate agli eventi. I valori medi saranno connessi dalla relazione

$$\tilde{\varphi}'(x') = \langle \psi' | \varphi(x') | \psi' \rangle = S(\Lambda) \langle \psi | \varphi(x) | \psi \rangle = S(\Lambda) \tilde{\varphi}(x) \quad (1.9)$$

Ci chiediamo ora quale sia la relazione tra $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$. Il teorema di Wigner assicura che

$$|\psi'\rangle = U(\Lambda, a) |\psi\rangle \quad (1.10)$$

dove, per il gruppo di Poincarè, $U(\Lambda, a)$ è un operatore unitario o antiunitario. Nel seguito useremo sempre un $U(\Lambda, a)$ unitario in modo tale da conservare la norma del ket nei due sistemi di riferimento. Notare che la $U(\Lambda, a)$ e la $S(\Lambda)$ commutano perchè agiscono in spazi di Hilbert contenenti elementi di natura diversa

(rispettivamente stati e operatori) e pertanto attengono a gradi di libertà diversi. Inserendo questa equazione nella precedente otteniamo

$$\langle \psi | U^\dagger(\Lambda, a) \varphi(\Lambda x + a) U(\Lambda) | \psi \rangle = S(\Lambda) \langle \psi | \varphi(x) | \psi \rangle . \quad (1.11)$$

Il modo più semplice per dire che questa relazione è vera è dire che lo è per qualsiasi stato $|\psi\rangle$ (cosa non vera perchè gli stati tipici possono avere anche alta dispersione)

$$U^\dagger(\Lambda, a) \varphi(\Lambda x + a) U(\Lambda) = S(\Lambda) \varphi(x) \quad (1.12)$$

oppure

$$U(\Lambda, a) \varphi(x) U^\dagger(\Lambda) = S^{-1}(\Lambda) \varphi(\Lambda x + a) \quad (1.13)$$

1.2.1 Caso di Klein-Gordon: Gruppo di Lorentz

Sappiamo che una soluzione esplicita per il campo φ libero è data da

$$\varphi(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}) . \quad (1.14)$$

Consideriamo per ora solo il gruppo di Lorentz, tratteremo dopo le traslazioni. Applicando l'equazione (1.13) trovata nel paragrafo precedente, facendo agire le $U(\Lambda)$ sugli operatori di creazione e distruzione otteniamo

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (U(\Lambda) a_{\mathbf{p}} U^\dagger(\Lambda) e^{-ipx} + \text{h.c.}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip(\Lambda x)} + \text{h.c.}) . \quad (1.15)$$

Per ottenere la regola di trasformazione per gli $a_{\mathbf{p}}$ dobbiamo far sì che questi moltiplichino lo stesso esponentiale per poterli eguagliare membro a membro; questa è una operazione non del tutto banale perchè devo cambiare variabile di integrazione (da p a Λp) nell'integrale a destra ma la misura così come è scritta non è invariante. Dobbiamo ricorrere al fatto noto che la misura

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} = \int d^4 p \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0) . \quad (1.16)$$

è invariante (rivedi bibbia MQR). Per sfruttare questa proprietà dobbiamo riscalare i campi di un fattore $\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}$ in maniera tale da far comparire la misura di integrazione desiderata. Ponendo $\tilde{a}_{\mathbf{p}} = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}$ otteniamo

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} (U(\Lambda) \tilde{a}_{\mathbf{p}} U^\dagger(\Lambda) e^{-ipx} + \text{h.c.}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} (\tilde{a}_{\mathbf{p}} e^{-ip(\Lambda x)} + \text{h.c.}) . \quad (1.17)$$

A questo punto cambiamo variabile da $p \rightarrow \Lambda p = p'$ e sfruttiamo il fatto che $p'x' = (\Lambda p)(\Lambda x) = px$ ovvero il prodotto scalare è invariante e rinominando di nuovo la variabile di integrazione come p otteniamo le relazioni

$$\begin{cases} U(\Lambda) \tilde{a}_{\mathbf{p}} U^\dagger(\Lambda) = \tilde{a}_{\Lambda \mathbf{p}} \\ U(\Lambda) \tilde{a}_{\mathbf{p}}^\dagger U^\dagger(\Lambda) = \tilde{a}_{\Lambda \mathbf{p}}^\dagger , \end{cases} \quad (1.18)$$

Nota che per gli operatori di creazione vecchi (quelli con normalizzazione non covariante) avremmo avuto ad esempio $\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} U(\Lambda) a_{\mathbf{p}} U^\dagger(\Lambda) = \sqrt{2\omega_{\Lambda \mathbf{p}}} a_{\Lambda \mathbf{p}}$. Da queste relazioni possiamo dedurre le due cose importanti:

- Applichiamo la prima delle equazioni precedenti allo stato di vuoto

$$U(\Lambda) \tilde{a}_{\mathbf{p}} U^\dagger(\Lambda) |0\rangle = U(\Lambda) [\tilde{a}_{\mathbf{p}} U^\dagger(\Lambda) |0\rangle] = 0 \quad (1.19)$$

poichè $U(\Lambda)$ è invertibile non può avere autovalori nulli e, applicato al ket in parentesi quadre fa 0, deve essere che il ket stesso sia pari a 0

$$\tilde{a}_{\mathbf{p}} U^\dagger(\Lambda) |0\rangle = 0 . \quad (1.20)$$

Poichè esiste solo uno stato che quando gli applichiamo $\tilde{a}_{\mathbf{p}}$ fa zero, otteniamo che

$$\begin{cases} U^\dagger(\Lambda) |0\rangle \equiv e^{i\phi(\Lambda)} |0\rangle \\ U(\Lambda) |0\rangle = e^{-i\phi(\Lambda)} |0\rangle , \end{cases} \quad (1.21)$$

Questo ci dice che lo stato di vuoto è un invariante sotto trasformazioni di Lorentz. Lo stato di vuoto è lo stesso per tutti gli osservatori relativi a sistemi inerziali. In più si può dimostrare che $\phi(\Lambda) = 0$; questo discende dal fatto che le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo non abeliano e che $U(\Lambda)$ ne è una rappresentazione unidimensionale (e per questo motivo una rappresentazione unidimensionale del gruppo di Lorentz non può essere che banale).

- Scriviamo ora gli stati ad una particella espressi con gli operatori covarianti e applichiamo la seconda delle equazioni (1.18)

$$\begin{aligned} O : \quad & \widetilde{|p\rangle} = \tilde{a}_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \\ O' : \quad & \widetilde{|p'\rangle} = U(\Lambda) \widetilde{|p\rangle} = U(\Lambda) \tilde{a}_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = U(\Lambda) \tilde{a}_{\mathbf{p}}^\dagger U^\dagger(\Lambda) |0\rangle = \tilde{a}_{\Lambda\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = \widetilde{|\Lambda p\rangle} \end{aligned}$$

avendo usato l'invarianza del vuoto. Dunque è tutto coerente: se O osserva una particella di impulso p , O' osserverà una particella di impulso Λp . Lo stesso risultato si ottiene per stati ad n particelle

$$\begin{aligned} O : \quad & \widetilde{|p_1 \dots p_n\rangle} = \tilde{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \dots \tilde{a}_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ O' : \quad & U(\Lambda) \widetilde{|p_1 \dots p_n\rangle} = U(\Lambda) \tilde{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger U^\dagger(\Lambda) \dots U(\Lambda) \tilde{a}_{\mathbf{p}_n}^\dagger U^\dagger(\Lambda) |0\rangle = \tilde{a}_{\Lambda\mathbf{p}_1}^\dagger \dots \tilde{a}_{\Lambda\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle = \widetilde{|\Lambda p_1 \dots \Lambda p_n\rangle} \end{aligned}$$

1.2.2 Caso di Klein-Gordon: Traslazioni

Nel caso delle traslazioni con il campo scalare di Klein-Gordon l'equazione (1.13) diventa

$$U(a) \varphi(x) U^\dagger(a) = \varphi(x + a). \quad (1.22)$$

Ripetendo gli stessi calcoli del paragrafo precedente si ottiene

$$\begin{cases} U(a) \tilde{a}_{\mathbf{p}} U^\dagger(a) = e^{-ipa} \tilde{a}_{\mathbf{p}} \\ U(a) \tilde{a}_{\mathbf{p}}^\dagger U^\dagger(a) = e^{ipa} \tilde{a}_{\mathbf{p}}^\dagger , \end{cases} \quad (1.23)$$

Notare che nel caso delle traslazioni spazio-temporali la normalizzazione covariante non è più importante in quanto la frequenza dell'onda piana non cambia, ma solo una fase. Pertanto si possono utilizzare nella (1.23) sia gli operatori con la tilde che quelli senza. Da queste relazioni possiamo dedurre le due cose importanti:

- Applicando la prima delle equazioni precedenti allo stato di vuoto e ripetendo gli stessi calcoli (basta sostituire $\Lambda \rightarrow a$) otteniamo che

$$\tilde{a}_{\mathbf{p}} U^\dagger(a) |0\rangle = 0. \quad (1.24)$$

e quindi che

$$\begin{cases} U^\dagger(a) |0\rangle \equiv e^{i\phi(a)} |0\rangle \\ U(a) |0\rangle = e^{-i\phi(a)} |0\rangle , \end{cases} \quad (1.25)$$

Questo ci dice che lo stato di vuoto è un invariante sotto traslazioni. Se abbiamo due osservatori che hanno semplicemente una origine traslata nello spazio e nel tempo vedono tutti e due lo stesso stato di vuoto. Combinato con il risultato precedente ci dice che il vuoto è invariante per trasformazioni di Poincarè. In questo caso la fase non è detto che sia banale come nel caso precedente (in questo caso il gruppo delle traslazioni è abeliano; lo vedremo più in dettaglio in seguito).

- Applichiamo il vuoto alla seconda delle equazioni (1.23)

$$\begin{aligned} O : \quad & \widetilde{|p\rangle} = \tilde{a}_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \\ O' : \quad & \widetilde{|p'\rangle} = U(a) \widetilde{|p\rangle} = U(a) \tilde{a}_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = U(a) \tilde{a}_{\mathbf{p}}^\dagger U^\dagger(a) |0\rangle = e^{ipa} \tilde{a}_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = e^{ipa} \widetilde{|p\rangle} \end{aligned}$$

da cui $U(a) = e^{ipa}$. Nel caso di stati a n particelle avremo, eseguendo gli stessi calcoli

$$\begin{aligned} O : \quad & \widetilde{|p_1 \dots p_n\rangle} = \tilde{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \dots \tilde{a}_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \\ O' : \quad & U(a) \widetilde{|p_1 \dots p_n\rangle} = e^{iP_a} \tilde{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \dots \tilde{a}_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle = e^{iP_a} \widetilde{|p_1 \dots p_n\rangle} \end{aligned}$$

dove in questo caso $P = \sum_{i=1}^n p_i$ è l'impulso totale. Quindi

$$U(a) = e^{ip_\mu a^\mu}. \quad (1.26)$$

Otteniamo pertanto il vecchio risultato secondo il quale le traslazioni spazio-temporali sono generate dal quadriimpulso totale. Analogamente le rotazioni spaziali sono generate dal momento angolare. La (1.22) si riscrive

$$\varphi(x + a) = e^{ipa} \varphi(x) e^{-ipa}. \quad (1.27)$$

Poichè il gruppo è abeliano, la sua rappresentazione soddisferà le proprietà del gruppo stesso

$$U(a_1) U(a_2) = U(a_1 + a_2) = U(a_2) U(a_1) \quad (1.28)$$

da cui segue che $[p^\mu, p^\nu] = 0$ le componenti del quadriimpulso commutano tra di loro e quindi li posso diagonalizzare contemporaneamente.

1.3 Spettro di massa di una teoria in interazione

Vediamo ora come usare le quattro componenti del quadriimpulso per classificare il tipo di stati che mi interessano. Vogliamo vedere in altre parole che tipo di insieme formano una base degli autostati simultanei dell'impulso e dell'energia. Vogliamo andare a specificare il tipo di teorie che mi interesseranno; non è detto che qualsiasi dinamica dia origine a questo spettro degli stati, però a me interesseranno solo le teorie per le quali lo spettro sarà quello che andremo a descrivere (perchè so su base sperimentale che è fatto così). Gli stati della mia teoria saranno per ora soltanto stati stabili (autostati dell'energia). In natura alcune particelle sono stabili e altre quasi-stabili. Queste ultime diventano stabili se trascurro qualche interazione; ad esempio lo stato di singola particella composto da un neutrone è stabile se si considerano solo le interazioni forti; tuttavia in natura non è stabile a causa dell'interazione β che lo fa decadere in un protone e un neutrino. Quindi a seconda della teoria che sto studiando (e quindi dell'interazione che sto tenendo in conto) posso avere particelle che sono stabili o instabili in virtù dell'interazione. Ad esempio in una teoria delle interazioni deboli ci metterò solo il protone (in generale tutte le particelle stabili rispetto all'interazione debole), mentre in una teoria delle interazioni forti inserirò il protone e il neutrone e così via. Nel descrivere lo spettro di massa della teoria non consideriamo la presenza di particelle di massa nulla, che introdurrebbero delle forze a lungo raggio. La presenza di queste particelle indordurrebbe delle serie difficoltà nella descrizione dei processi di diffusione in quanto anche ai tempi $\pm\infty$ le particelle non possono essere considerate completamente libere. Notare però che *non tutte* le particelle a massa nulla portano danno! Il bosone di Goldstone ad esempio non arreca nessun danno visto che quando ha una energia molto bassa ha una interazione che decresce con l'energia (e quindi a quadriimpulso nullo dove potremmo avere dei problemi ha effettivamente una interazione nulla). Per il fotone non è così in quanto interagisce sempre con la stessa costante di accoppiamento anche se stiamo a energie molto basse (fotoni infrarossi). Le particelle a massa nulla ("dannose") pertanto impediscono di costruire gli stati asintotici (vedi prossimo paragrafo) e avremo delle difficoltà nel calcolo degli elementi di matrice S a causa della presenza di divergenze infrarosse. Infatti in un esperimento di scattering non sono mai sicuro, visto che il mio apparato sperimentale ha risoluzione finita, di vedere una matrice S tra due stati con numero di particelle ben definito. In altre parole posso sempre inserire una quantità indeterminata di fotoni non rilevabili, ovvero di energie inferiori del potere risolutivo del mio strumento (*fotoni soffici*) senza i quali si avrebbero delle divergenze infrarosse. Eliminiamo quindi per semplicità le particelle a massa nulla. Poichè queste particelle però sono presenti in natura, possiamo successivamente correggere i risultati con le cosiddette *correzioni radiative*.

Ci aspettiamo che lo spettro in energia sia limitato inferiormente e che a questo minimo corrisponda lo stato di vuoto (che, senza particelle a massa nulla è uno stato *isolato*). Il vuoto è ovviamente uno stato normalizzabile

$\langle 0 | 0 \rangle = 1$. Se rappresentiamo lo spettro nello spazio $\{\mathbf{p}, p^0\}$, il vuoto si colloca nell'origine. Dopodichè, sappiamo che ogni particella stabile ha una energia pari a $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Consideriamo qui il caso in cui esista solo una particella stabile di massa m : chiaramente dallo stato di vuoto non incontriamo nessun altro stato nello spettro fino a quello di energia m dato da una particella con impulso nullo. L'intervallo fra lo stato di vuoto e tale stato è detto *mass gap*. Lo stato di energia m è connesso a tutti gli altri stati ad una particella con impulsi diversi da zero che formano appunto l'iperboloido descritto dall'equazione $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ (nel caso in cui la mia teoria abbia più particelle stabili avremo tanti iperbolioidi quante sono queste particelle). Consideriamo ora gli stati a due particelle

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_1^2} + \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_2^2}. \end{cases} \quad (1.29)$$

Vediamo che il minimo di p^0 si ha per $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0$ ed ha energia $2m$; al variare dei due impulsi si ottiene poi un continuo di stati che formano un'iperboloido pieno. Salendo nel numero di particelle si ottengono una serie di iperbolioidi con un minimo in $\mathbf{p} = 0$ pari a $3m$, $4m$, etc... Poichè non vi sono particelle a massa nulla le forze tra le particelle decadono molto rapidamente con la distanza (tipo potenziale Yukawa). Questo fa sì che lo spettro di massa di una teoria che non contiene particelle a massa nulla, coincide con lo spettro di massa di una teoria libera con le stesse particelle.

Notare che nello spettro di massa verranno inclusi anche gli stati stabili composti. Facciamo un esempio: vogliamo analizzare lo spettro di massa di una teoria con protoni elettroni e fotoni (ai quali forniamo una piccola massa per evitare di avere delle divergenze infrarosse). Vi saranno quindi gli stati stabili di singolo protone elettrone neutrone e fotone. Successivamente posso creare degli stati legati: il protone e l'elettrone si uniscono per fare l'atomo di idrogeno. Gli stati dell'atomo di idrogeno sono infiniti; tuttavia nella nostra teoria solo uno di questi (lo stato fondamentale) è stabile in quanto quando accendiamo l'interazione elettromagnetica gli stati eccitati dell'atomo di idrogeno possono decadere nello stato fondamentale emettendo un fotone. Quindi nello spettro di massa non ci sono solo le particelle presenti all'interno della lagrangiana, ma anche particelle composte.

1.4 Matrice S e basi IN e OUT

Passiamo a discutere la matrice S . Nello schema di Heisenberg è più delicato definirla poichè sono gli operatori che si evolvono e non gli stati. In altre parole gli stati non cambiano nel tempo, ma poichè ad ogni istante di tempo abbiamo un operatore diverso e quindi con autostati diversi abbiamo che ad ogni tempo cambia la base rispetto alla quale sto vedendo lo stato. Serve dunque definire due basi diverse per descrivere i processi di scattering: una per gli stati iniziali (base IN) e una per quelli finali (base OUT). La base IN si riferisce alle particelle al tempo $t = -\infty$ quando sono libere (se non ci sono particelle a massa nulla!) e non hanno ancora interagito, mentre la base OUT si riferisce alle particelle al tempo $t = +\infty$ che sono il prodotto delle interazioni e che sono ritornate ad essere libere. Le particelle libere interagiscono ovviamente quando i pacchetti d'onda si sovrappongono; lo stato (che rimarrà sempre lo stesso) quando viene analizzato in termini degli autostati degli operatori locali al tempo t dopo che l'interazione è avvenuta, risulterà essere una sovrapposizione quantistica di stati complicatissimi. Questa situazione permane fino ad un tempo $t = +\infty$ quando lo stato viene rivelato da un rivelatore (contatore). Questo provocherà il collasso in uno stato finale la cui forma sarà semplice in funzione degli operatori locali. Secondo la meccanica quantistica il prodotto scalare

$$S_{fi} = \langle q_1 \dots q_m, \text{out} | p_1 \dots p_n, \text{in} \rangle \quad (1.30)$$

ci da l'ampiezza di transizione del processo $p_1 \dots p_n \rightarrow q_1 \dots q_m$ ovvero gli elementi di matrice S . Gli stati asintotici IN e OUT sono tutti autostati di energia e impulso e rappresentano due basi complete dello spazio di Hilbert. Le due basi coincidono nel caso di una teoria libera oppure sono ruotate una rispetto all'altra in presenza di interazione; la trasformazione unitaria che esegue questa rotazione è proprio la matrice di scattering o matrice S . Ovviamente lo stato di vuoto e gli stati di singola particella sono comuni alle due basi. Ovviamente le basi IN e OUT sono due basi ortonormali

$$\langle p_2, \text{in} | p_1, \text{in} \rangle = \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \quad (1.31)$$

oppure, se normalizzo in maniera covariante

$$\langle \widetilde{p_2}, \text{in} | \widetilde{p_1}, \text{in} \rangle = 2\omega_{\mathbf{p}_1} \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \quad (1.32)$$

e uguale per la base OUT. I prodotti scalari incrociati invece sono non banali e dipendono in generale dall'interazione. Ovviamente abbiamo anche due diversi operatori di creazione e distruzione relativi alle due diverse basi tali che

$$\begin{aligned} a_{\text{in } \mathbf{p}_1}^\dagger a_{\text{in } \mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle &= |\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \text{in}\rangle \\ [a_{\text{in } \mathbf{p}_1}^\dagger, a_{\text{in } \mathbf{p}_1}] &= \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \end{aligned} \quad (1.33)$$

e analogamente per la base OUT. Anche qui i commutatori incrociati sono molto complicati ed in essi è contenuta tutta l'informazione sulla dinamica. Con queste regole di commutazione si possono calcolare infatti i prodotti scalari tra gli stati IN e OUT che sono gli elementi della matrice S . Ovviamente si tratta di regole molto complicate e non è questa la strada che viene seguita per calcolare praticamente le quantità fenomenologiche (tratteremo questo aspetto più avanti con le formule di riduzione). Definiti gli operatori di creazione e distruzione relativi alle due basi posso anche costruire i campi liberi scalare IN e OUT; essi devono essere tali da soddisfare

$$(\square + m^2) \varphi_{\text{in,out}}(x) = 0. \quad (1.34)$$

Notare che m è la massa fisica della particella, ovvero quella esatta: non è quella che compare nella lagrangiana m_0 perchè questa è già corretta dall'interazione.

Vediamo ora come agiscono le trasformazioni sulle basi IN e OUT. Esattamente come prima

$$U(\Lambda) |\widetilde{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}, \text{in}\rangle = |\widetilde{\Lambda \mathbf{p}_1 \Lambda \mathbf{p}_2}, \text{in}\rangle \quad (1.35)$$

e analogamente per gli stati OUT. A questo punto possiamo vedere cosa implica l'invarianza di Lorentz per la matrice S . Ad esempio abbiamo, usando una normalizzazione covariante (è più conveniente per evitare di avere fattori del tipo $\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}$), che

$$\langle \widetilde{k_1 k_2}, \text{out} | \widetilde{p_1 p_2}, \text{in} \rangle = \langle \widetilde{k_1 k_2}, \text{out} | U(\Lambda) U^\dagger(\Lambda) |\widetilde{p_1 p_2}, \text{in}\rangle = \langle \widetilde{\Lambda k_1 \Lambda k_2}, \text{out} | \widetilde{\Lambda p_1 \Lambda p_2}, \text{in} \rangle \quad (1.36)$$

Questa eguaglianza ci dice che gli elementi di matrice S non possono essere una funzione qualsiasi dei quadriimpulsi ma solo una funzione delle loro combinazioni Lorentz-invarianti, ovvero dei loro prodotti scalari. Inoltre possiamo sfruttare anche l'invarianza sotto traslazioni (nota che non è necessaria la normalizzazione covariante)

$$\langle k_1 k_2, \text{out} | p_1 p_2, \text{in} \rangle = \langle k_1 k_2, \text{out} | U(a) U^\dagger(a) |p_1 p_2, \text{in}\rangle = e^{i(p_1+p_2)a} e^{-i(k_1+k_2)a} \langle k_1 k_2, \text{out} | p_1 p_2, \text{in} \rangle .$$

Dunque l'elemento di matrice S è nullo a meno che non sia $p_1 + p_2 = k_1 + k_2$ ovvero che il quadriimpulso si conservi.

1.4.1 Completezza

Gli stati asintotici delle basi IN e OUT sono un insieme *completo* perchè questi devono corrispondere a qualcosa di misurabile; qualunque cosa succeda deve essere espandibile nella base degli stati asintotici. La completezza di una base di vettori $|n\rangle$ si indica simbolicamente come

$$\sum |n\rangle \langle n| = \mathbb{I}. \quad (1.37)$$

Nel nostro caso, con le basi IN e OUT, noi abbiamo però un mixto di stati discreti e continui e anche il problema di una normalizzazione covariante. Per entrambe le basi possiamo scrivere

$$|0\rangle \langle 0| + \int d\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| + \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 |\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\rangle \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2| f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + \dots = \mathbb{I}. \quad (1.38)$$

Siccome gli stati non sono normalizzati ad 1 (ma a delle delta; per questo motivo il vuoto è un vero proiettore in quanto è normalizzato ad 1) dobbiamo decidere che fattori metterci per soddisfare le relazioni di completezza; in altre parole dobbiamo trovare i valori di $f(p)$, $f(p_1, p_2)$ ecc... Per farlo applichiamo la somma di completezza agli stati di base

- vuoto: $\mathbb{I}|0\rangle = |0\rangle = |0\rangle$; in quanto il vuoto è ortogonale agli stati di singola particella;
- stati di singola particella:

$$\mathbb{I}|\mathbf{k}\rangle = |\mathbf{k}\rangle = \int d\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}|\mathbf{k}\rangle f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{k}) |\mathbf{k}\rangle \iff f(\mathbf{k}) = 1 \quad (1.39)$$

- stati a due particelle:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle &= |\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle = \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 |\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\rangle \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2| \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\ &= f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) |\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle + f(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) |\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle = 2! f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) |\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle \iff f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{2!} \end{aligned} \quad (1.40)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2| \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2\rangle = \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_2) + \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1)$ e che $f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ dei bosoni è simmetrica per scambio di particelle (caso del campo scalare).

- stati ad n particelle: procedendo per induzione si ha che $f(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \frac{1}{n!}$

Questa relazione, tuttavia, sarebbe stata usata in una teoria non-relativistica (questa scrittura non è covariante). Dobbiamo normalizzare il forma covariante. La domma di completezza allora assume la forma in funzione della misura invariante

$$|0\rangle \langle 0| + \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} |\widetilde{\mathbf{p}}\rangle \langle \widetilde{\mathbf{p}}| + \int \frac{d\mathbf{p}_1}{2\omega_{\mathbf{p}_1}} \frac{d\mathbf{p}_2}{2\omega_{\mathbf{p}_2}} |\widetilde{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}\rangle \langle \widetilde{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}| f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + \dots = \mathbb{I}. \quad (1.41)$$

Si può vedere come applicando una trasformazione di Lorentz la somma di completezza rimane invariata

$$\begin{aligned} |0\rangle \langle 0| &+ \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} U(\Lambda) |\widetilde{\mathbf{p}}\rangle \langle \widetilde{\mathbf{p}}| U^\dagger(\Lambda) + \int \frac{d\mathbf{p}_1}{2\omega_{\mathbf{p}_1}} \frac{d\mathbf{p}_2}{2\omega_{\mathbf{p}_2}} U(\Lambda) |\widetilde{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}\rangle \langle \widetilde{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}| U^\dagger(\Lambda) f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + \dots \\ &= |0\rangle \langle 0| + \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} |\widetilde{\Lambda \mathbf{p}}\rangle \langle \widetilde{\Lambda \mathbf{p}}| + \int \frac{d\mathbf{p}_1}{2\omega_{\mathbf{p}_1}} \frac{d\mathbf{p}_2}{2\omega_{\mathbf{p}_2}} |\widetilde{\Lambda \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}\rangle \langle \widetilde{\Lambda \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}| f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + \dots = \mathbb{I} \\ &\implies \mathbb{I} = \sum |\widetilde{n}\rangle \langle \widetilde{n}| = \sum |\widetilde{\Lambda n}\rangle \langle \widetilde{\Lambda n}| \end{aligned} \quad (1.42)$$

1.5 La rappresentazione spettrale di Kallen-Lehmann

Finora non abbiamo specificato la dinamica. Vogliamo vedere come tutta la conoscenza della dinamica possa essere ricondotta a funzione numeriche dette funzioni di Wightman: ovvero tutti i prodotti del tipo $\langle 0| O(x_1) \dots O(x_n) |0\rangle$. Queste funzioni, connesse con il propagatore di Feynman Δ_F hanno un importante ruolo nella teoria quantistica dei campi e nel caso libero possono essere calcolate analiticamente. Per campi interagenti questa soluzione esatta non è più disponibile. D'altra parte, esiste un formalismo molto utile che rappresenta queste funzioni come sovrapposizione delle corrispondenti funzioni libere prese a diversi valori della massa, moltiplicate per una densità di distribuzione spettrale. Anche la densità spettrale non può essere calcolata esattamente, ma è soggetta a dei vincoli che comunque ci permettono di trarre delle conclusioni generali. Vedremo anche come questi oggetti non siano propriamente delle funzioni bensì delle distribuzioni. L'oggetto più semplice della gerarchia è

$$\langle 0| O(x) |0\rangle = \langle 0| e^{ipx} O(0) e^{-ipx} |0\rangle = \langle 0| O(0) |0\rangle \quad (1.43)$$

che non dipende da x a causa dell'invarianza per traslazioni (avendo usato anche il fatto che il vuoto è invariante).

1.5.1 Funzione di Wightman a due punti

L'elemento successivo della gerarchia è la funzione di Wightman a due punti. Supponiamo di avere una osservabile locale $O(x) = O^\dagger(x)$ hermitiana. Non è una limitazione in quanto qualsiasi operatore locale si

può rendere hermitiano. Inserendo ora una identità (non specifico se ho preso la base IN o OUT e se la normalizzazione è covariante o no, l'importante è la completezza) e sfrutto l'invarianza per traslazioni

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | O(x) O(y) | 0 \rangle &= \sum_n \langle 0 | O(x) | n \rangle \langle n | O(y) | 0 \rangle \\
 &= \sum_n \langle 0 | e^{ipx} O(0) e^{-ipx} | n \rangle \langle n | e^{ipy} O(0) e^{-ipy} | 0 \rangle \\
 &= \sum_n \langle 0 | O(0) | n \rangle \langle n | O(0) | 0 \rangle e^{-ip_n(x-y)} \\
 &= \sum_n |\langle 0 | O(0) | n \rangle|^2 e^{-ip_n(x-y)}.
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Ovviamente a causa dell'invarianza per traslazioni la funzione di Wightman dipende solo dalla differenza $(x - y)$ dei punti in cui i due campi sono valutati. Inoltre, ma solo perché abbiamo considerato il prodotto dello stesso operatore ripetuto due volte, abbiamo nella somma un modulo quadro moltiplicato per un esponenziale ovvero un oggetto definito non negativo. Consideriamo lo stesso operatore perché avremo delle proprietà importanti in più rispetto al caso di due operatori distinti. Nei conti che seguono considereremo la somma su $n \neq 0$ (tralasciando quindi lo stato di vuoto). Il vuoto infatti non è molto interessante in quanto dà origine alla costante $|\langle 0 | O(0) | 0 \rangle|^2$. La cosa più semplice da fare è quindi immaginare di aver preso l'operatore meno il suo valor medio nel vuoto. Inseriamo ora una delta e riarrangiamo i termini in questo modo

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | O(x) O(y) | 0 \rangle &= \int d^4 q \sum_{n \neq 0} |\langle 0 | O(0) | n \rangle|^2 e^{-iq(x-y)} \delta^4(q - p_n) \\
 &= \int d^4 q \left[\sum_{n \neq 0} |\langle 0 | O(0) | n \rangle|^2 \delta^4(q - p_n) \right] e^{-iq(x-y)} = \int d^4 q \tilde{\rho}(q) e^{-iq(x-y)},
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

dove abbiamo definito la trasformata di Fourier della funzione di Wightman come

$$\tilde{\rho}(q) = \sum_{n \neq 0} |\langle 0 | O(0) | n \rangle|^2 \delta^4(q - p_n) \tag{1.46}$$

detta anche *funzione spettrale*.

Proprietà

- $\tilde{\rho}(q) \geq 0$. Se avessimo avuto due operatori diversi la trasformata sarebbe stata complessa. Notiamo inoltre che la $\tilde{\rho}(q)$ non è una funzione ma una distribuzione;
- Il supporto di $\tilde{\rho}$ (ovvero l'insieme dei q tali che la funzione spettrale non si annulla) è contenuto nello spettro degli stati fisici. Infatti se $q \neq p_n$ ovvero q è diverso da tutti i quadriimpulsi contenuti all'interno degli stati fisici della mia teoria allora la delta mi uccide; questo però non implica che se q corrisponde proprio ad un p_n allora l'oggetto è uguale a zero in quanto dipende se è zero il fattore $\langle 0 | O(0) | n \rangle$. Per questo motivo il supporto della funzione spettrale in generale è contenuto all'interno dello spettro degli stati fisici;
- In particolare la funzione spettrale è sicuramente zero quando

$$\begin{cases} \tilde{\rho}(q) = 0, & q^0 < 0 \\ \tilde{\rho}(q) = 0, & q^2 < 0. \end{cases} \tag{1.47}$$

La prima equazione assicura che non ci siano energie negative; la seconda invece assicura che la nostra teoria contenga solo stati di tipo tempo (e eventualmente luce se ci fossero particelle di massa nulla);

- La covarianza relativistica mi permette di dimostrare che la funzione spettrale è un invariante del suo argomento

$$\tilde{\rho}(\Lambda q) = \tilde{\rho}(q). \tag{1.48}$$

Dimostriamolo usando solo trasformazioni di Lorentz Λ proprie (per la parità in verità non avrei problemi; il vero problema che incontro invece è il time reversal che ha un operatore di rappresentazione che antiunitario invece che unitario).

$$\tilde{\rho}(\Lambda q) = \sum_n |\langle 0 | O(0) | n \rangle|^2 \delta^4(\Lambda q - p_n), \quad (1.49)$$

ora usiamo per convenienza una normalizzazione covariante per la quale sappiamo che vale la (1.42); quindi posso immaginare di essere partito fin dall'inizio invece che dagli stati $|\widetilde{n}\rangle$ da quelli $|\widetilde{\Lambda n}\rangle$. In quel caso avrei avuto

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\Lambda q) &= \sum_{n \neq 0} \left| \langle 0 | O(0) | \widetilde{\Lambda n} \rangle \right|^2 \delta^4(\Lambda q - \Lambda p_n) \\ &= \sum_{n \neq 0} \left| \langle 0 | U^\dagger(\Lambda) O(0) U(\Lambda) | \widetilde{n} \rangle \right|^2 \frac{\delta^4(q - p_n)}{|\det \Lambda|} = \sum_{n \neq 0} \left| \langle 0 | O(0) | \widetilde{n} \rangle \right|^2 \delta^4(q - p_n) \\ &= \tilde{\rho}(q), \end{aligned} \quad (1.50)$$

avendo usato l'invarianza del vuoto e la (1.12) che, nel caso *scalare* e di campo calcolato in 0 equivale a dire che l'operatore $O(0)$ commuta con $U(\Lambda)$;

Sapendo ora che per le proprietà della funzione spettrale di essere invariante di Lorentz rispetto al suo argomento e che $\tilde{\rho}(q) = 0$ per $q^0 < 0$ e per $q^2 < 0$ vettori di tipo spazio, possiamo scriverla nella seguente forma

$$\tilde{\rho}(q) = \rho(q^2) \frac{\theta(q^0)}{(2\pi)^3}, \quad (1.51)$$

(infatti il segno di q^0 è invariante se il vettore è di genere tempo o luce). Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} \langle 0 | O(x) O(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \theta(q^0) \rho(q^2) e^{-iq(x-y)} \\ &= \int_0^\infty d\mu^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \theta(q^0) \rho(\mu^2) e^{-iq(x-y)} \delta(q^2 - \mu^2) \\ &= \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \theta(q^0) \delta(q^2 - \mu^2) e^{-iq(x-y)} \\ &= \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) i\Delta^+(x-y; \mu^2) \end{aligned} \quad (1.52)$$

avendo utilizzato la definizione della distribuzione

$$i\Delta^+(x-y; \mu^2) \equiv \langle \bar{0} | \Phi(x) \Phi(y) | \bar{0} \rangle = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}} e^{-iq(x-y)} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \theta(q^0) \delta(q^2 - \mu^2) e^{-iq(x-y)}.$$

Ovvero il valor medio in un vuoto $|\bar{0}\rangle$ (la barra denota il vuoto della teoria libera) di un prodotto di campi scalari φ di massa μ corrispondenti sempre a quelli della teoria libera (la notazione è la stessa delle dispense di MQR; φ invece rappresentano i campi scalari nella teoria in interazione). Ovviamente $\omega_{\mathbf{q}} = \sqrt{\mu^2 + \mathbf{p}^2}$. La scomposizione (1.52) viene denominata *rappresentazione spettrale di Kallen-Lehmann*. La teoria che stiamo esaminando ci dice che la funzione di Wightman la posso ottenere come una sovrapposizione di $\Delta^+(x-y; \mu^2)$ con pesi determinati dalla dinamica che non conosco (le $\rho(q^2)$). Abbiamo due implicazioni immediate

- Come sappiamo le teorie libere hanno degli infiniti: pensa ad esempio all'energia alla quale abbiamo dovuto eliminare l'energia di punto zero, oppure ai prodotti del campo scalare libero per esempio $\Phi^2(x)$ calcolati nello stesso punto

$$i\Delta^+(0; \mu^2) \equiv \langle \bar{0} | \Phi^2(x) | \bar{0} \rangle = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{q}}},$$

il quale diverge quadraticamente. A differenza della meccanica quantistica ordinaria per la quale è possibile moltiplicare per se stessi gli operatori e trovare ancora degli oggetti ben definiti, qui dobbiamo stare molto attenti perché otteniamo degli infiniti.

Poichè non sappiamo nulla della teoria in interazione, potremmo concludere che questa possa essere “più regolare” della teoria libera. Tuttavia la rappresentazione spettrale di Kallen-Lehmann ci dice immediatamente che questa supposizione non può essere che falsa poichè la funzione di Wightman è scritta come sovrapposizione di $\Delta^+(x - y; \mu^2)$ della teoria libera. Se poniamo quindi $x = y$ otteniamo degli infiniti; poichè l’integrale è non negativo quello che può succedere è che la funzione di Wightman sia più singolare della teoria libera. In generale quindi la teoria in interazione non può essere meno singolare della teoria libera;

- *Teorema di Spin-Statistica:* In MQR il teorema di spin-statistica ci è stato mostrato andando a vedere il campo di Dirac libero e mostrando come la quantizzazione con i commutatori fosse inconsistente. Potremmo tuttavia mettere in discussione la validità del teorema di spin-statistica nella teoria in interazione. La risposta ovviamente è negativa e la dimostrazione avviene attraverso la rappresentazione spettrale di Kallen-Lehmann. Dimostreremo ovviamente come non sia possibile quantizzare canonicamente gli operatori bosonici tramite gli anticommutatori visto che abbiamo dedotto la rappresentazione di Kallen-Lehmann solo per i campi scalari (per l’altra metà del teorema di spin-statistica si veda il Bjorken-Drell). Possiamo dimostrare che se $x \sim y$ allora il commutatore $[O(x), O(y)]$ deve fare zero

$$\langle 0 | [O(x), O(y)] | 0 \rangle = \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \{ i\Delta^+(x - y; \mu^2) - i\Delta^+(y - x; \mu^2) \}. \quad (1.53)$$

Quando $x \sim y$ per la teoria libera avevamo verificato (rivedi la microcausalità!) che valor medio del commutatore (detto anche funzione di Pauli-Jordan)

$$\Delta(x - y) = \langle \bar{0} | [\Phi(x), \Phi(y)] | \bar{0} \rangle = i\Delta^+(x - y) - i\Delta^-(x - y) = i\Delta^+(x - y) - i\Delta^+(y - x), \quad (1.54)$$

era indenticamente uguale a zero. Questo quindi rimane vero anche nella teoria in interazione. Se scegliessimo di quantizzare la teoria scalare con gli anticommutatori (imponendo le regole di anticommutazione canoniche a tempi uguali)

$$\langle 0 | [O(x), O(y)]_+ | 0 \rangle = \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \{ i\Delta^+(x - y; \mu^2) + i\Delta^+(y - x; \mu^2) \}, \quad (1.55)$$

violeremmo automaticamente il principio di località, perché per intervalli di tipo spazio (e in particolare a tempi uguali) avremmo la somma di due termini non nulli e un risultato diverso da zero. Analogamente si può far vedere come i campi spinoriali non si possano quantizzare con i commutatori usando gli stessi argomenti.

1.5.2 Spettro di massa

La conoscenza della funzione di Wightman a due punti è utile per ottenere informazioni sullo spettro di massa della mia teoria ovvero l’insieme degli stati stabili incluse le loro masse. Come avevamo detto infatti la funzione spettrale $\tilde{\rho}(q)$ ha un supporto contenuto nello spettro degli stati fisici della mia teoria. Ricordando come è fatto lo spettro (escludendo sempre il vuoto) possiamo decomporre

$$\rho(\mu^2) = \rho_{1p}(\mu^2) + \rho_{2p}(\mu^2) + \dots \quad (1.56)$$

ovvero in una somma sugli stati ad una, due ... particelle. Limitiamoci ora agli stati ad una particella (ovvero all’intervallo $0 < \mu^2 < 4m^2$) utilizzando una normalizzazione covariante

$$\tilde{\rho}_{1p}(q) = \frac{\rho_{1p}(q^2) \theta(q^0)}{(2\pi)^3} = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \left| \langle 0 | O(0) | \widetilde{p} \rangle \right|^2 \delta^4(q - p) \quad (1.57)$$

con $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ e m massa *fisica* (ovvero corretta dall’interazione) della particella. Dimostriamo ora che la funzione $F(p) = \langle 0 | O(0) | \widetilde{p} \rangle$ deve essere una costante per l’invarianza relativistica nel suo argomento

$$F(\Lambda p) = \langle 0 | O(0) | \widetilde{\Lambda p} \rangle = \langle 0 | U^\dagger(\Lambda) O(0) U(\Lambda) | \widetilde{p} \rangle = \langle 0 | O(0) | \widetilde{p} \rangle = F(p). \quad (1.58)$$

Per questo motivo la chiamiamo

$$\langle 0 | O(0) | \tilde{p} \rangle = \frac{\sqrt{Z_O}}{(2\pi)^{3/2}} \quad (1.59)$$

(notare che $Z_O \geq 0$) che inserita nella (1.57) dà

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{1p}(q) &= \frac{\rho_{1p}(q^2) \theta(q^0)}{(2\pi)^3} = \frac{Z_O}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \delta^4(q - p) = \frac{Z_O}{(2\pi)^3} \int d^4p \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) \delta^4(q - p) \\ &= \frac{Z_O}{(2\pi)^3} \theta(q^0) \delta(q^2 - m^2), \end{aligned} \quad (1.60)$$

da cui ricaviamo

$$\rho_{1p}(\mu^2) = Z_O \delta(\mu^2 - m^2). \quad (1.61)$$

La scomposizione spettrale così si scrive in questo modo

$$\langle 0 | O(x) O(y) | 0 \rangle = \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) i\Delta^+(x - y; \mu^2) = Z_O i\Delta^+(x - y; m^2) + \int_{4m^2}^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) i\Delta^+(x - y; \mu^2).$$

Calcoliamo ora il valor medio nel vuoto del T-prodotto (ovvero il propagatore scalare di Feynman nel caso interagente) chiamata anche *funzione di Schwinger* a due punti

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(O(x) O(y)) | 0 \rangle &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | O(x) O(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | O(y) O(x) | 0 \rangle \\ &= \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) [\theta(x^0 - y^0) i\Delta^+(x - y; \mu^2) + \theta(y^0 - x^0) i\Delta^+(y - x; \mu^2)] \\ &= \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) i\Delta_F(x - y; \mu^2). \end{aligned} \quad (1.62)$$

Scomponendo la rappresentazione spettrale otteniamo

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(O(x) O(y)) | 0 \rangle &= \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) i\Delta_F(x - y; \mu^2) \\ &= Z_O i\Delta_F(x - y; m^2) + \int_{4m^2}^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) i\Delta_F(x - y; \mu^2). \end{aligned}$$

Se ne facciamo la trasformata di Fourier (un integrale in dz con $z = x - y$) otteniamo una funzione analitica nel piano k^2 complesso

$$\text{FT} \{ \langle 0 | T(O(x) O(y)) | 0 \rangle \} = \frac{iZ_O}{k^2 - m^2} + \int_{4m^2}^\infty d\mu^2 \frac{i\rho(\mu^2)}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}. \quad (1.63)$$

La prescrizione di Feynman dell' $i\varepsilon$ non è rilevante nel primo termine, mentre nel secondo si. Il primo termine ci dice che abbiamo un polo isolato in $k^2 = m^2$ con un residuo proporzionale all'elemento di matrice Z_O . Il secondo termine invece ci dice abbiammo una sovrapposizione di poli continua che va da $4m^2$ a $+\infty$ chiamata “taglio” (in inglese “branch cut”). In realtà sono una sovrapposizione di più tagli sull’asse $\text{Re}(k^2)$ in quanto un taglio inizia a $4m^2$ poi uno in corrispondenza delle 3 particelle a $9m^2$ uno a 4 particelle a $16m^2$, ... ecc. Il taglio è caratterizzato dal fatto che se mi avvicino da sopra o da sotto il risultato è diverso (ovvero vi è una discontinuità). In poche parole, se qualcuno mi dà questa lista di operatori locali $O(x)$ e $O(y)$ possiamo calcolare il T-prodotto, farne la trasformata di Fourier; infine possiamo andare a vedere i poli sull’asse reale. La posizione di questi poli nel piano k^2 complesso permette di ottenere i valori delle masse fisiche delle particelle. In questi operatori locali quindi è scritto lo spettro di massa della teoria. Ad esempio una teoria con elettrone (campo di Dirac $e(x)$) e protone (campo di Dirac $p(x)$) posso usare questi due campi per calcolare la loro massa (2 poli isolati) ma anche la massa dell’atomo o antiatomo di idrogeno nel suo stato stabile. Come già detto in precedenza, non ha importanza che lo stato sia composto o meno, questo formalismo permette di accedere a tutto lo spettro degli stati stabili. Riassumendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{FT} \{ \langle 0 | T(A^\mu(x) A^\nu(y)) | 0 \rangle \} \rightarrow \text{massa del fotone} \\ \text{FT} \{ \langle 0 | T(e(x) \bar{e}(y)) | 0 \rangle \} \rightarrow \text{massa dell’elettrone} \\ \text{FT} \{ \langle 0 | T(p(x) \bar{p}(y)) | 0 \rangle \} \rightarrow \text{massa del protone} \\ \text{FT} \{ \langle 0 | T(e(x) p(x) \bar{e}(y) \bar{p}(y)) | 0 \rangle \} \rightarrow \text{massa dell’atomo o antiatomo di idrogeno.} \end{array} \right. \quad (1.64)$$

Naturalmente la difficoltà è insita nel fatto che a volte questi prodotti di operatori locali sono singolari; inoltre per farlo bisogna risolvere la dinamica. Queste quantità sono accessibili al calcolo diretto (o numerico) mediante il formalismo degli integrali funzionali, senza passare attraverso la struttura operatoriale *vera* dello spazio di Hilbert degli stati. In questi valori medi infatti è contenuta tutta la fisica (spettro di massa).

1.6 Distribuzioni

1.6.1 Richiami

Le distribuzioni, note anche come funzioni generalizzate, sono oggetti che generalizzano il concetto di funzione. Per definire il concetto di distribuzione è necessario introdurre lo spazio delle funzioni di test \mathcal{T} : il suo duale è lo spazio delle distribuzioni.

SPAZIO DELLE FUNZIONI TEST

La scelta dello spazio delle funzioni di prova \mathcal{T} (infinitamente differenziabili e a decrescita rapida) è in larga misura suggerita dal problema, o dalla classe di problemi che si vuole affrontare, e, parallelamente, dalle proprietà e dalle operazioni che si vogliono compiere sulle distribuzioni: più “ristretto” è lo spazio delle funzioni di prova, tanto più “ricche” saranno le distribuzioni che su di esso vengono definite. In base alla velocità di decrescita possiamo definire pertanto diversi spazi di funzioni test

- Spazio $D(U)$. Una funzione $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ è detta avere supporto compatto se esiste un sottoinsieme compatto K di U tale che $\varphi(x) = 0$ per ogni $x \in U$ che non appartiene a K .

Una funzione di test è una funzione di variabile reale a valori reali liscia (ovvero differenziabile infinite volte), a supporto compatto e definita sullo spazio euclideo (per questi motivi si chiamano equivalentemente “well behaved functions” oppure “bump functions”). Lo spazio delle funzioni test definite in questo modo è lo spazio vettoriale $D(U)$. Lo spazio $D(U)$ può essere munito di una topologia definendo il limite di una successione di suoi elementi. Una successione φ_k converge a $\varphi \in D(U)$ se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- Esiste un insieme compatto $K \subset U$ contenente il supporto di tutte le successioni φ_k :

$$\bigcup_k \text{supp}(\varphi_k) \subset K$$

- Per ogni multi-indice α , la successione delle derivate parziali $D^\alpha \varphi_k$ converge uniformemente a $D^\alpha \varphi$.

Con tale definizione $D(U)$ è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e completo che soddisfa la condizione di Heine-Borel;

- Spazio $S(U)$. Un altro esempio è fornito dallo spazio $S(U)$ delle funzioni infinitamente derivabili, che decrescono all’infinito più rapidamente di ogni potenza. Anche questo spazio, come il precedente non è uno spazio normato ma è comunque *metrizzabile* ossia si può definire una convergenza. Questa è importante per poter dotare lo spazio duale delle funzioni test di una nozione di continuità.

Naturalmente, lo spazio delle funzioni prova può essere ulteriormente allargato, con una corrispondente restrizione sullo spazio duale (o viceversa). Potremo ad esempio prendere come spazio di funzioni di prova lo spazio delle funzioni C^∞ che divergono al più come una potenza (ad esso appartengono ad esempio i polinomi) e definire su di esso una nozione di convergenza.

DISTRIBUZIONI

Una distribuzione è un *funzionale lineare* $T : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ continuo, cioè tale che:

$$\begin{cases} T(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1T(\varphi_1) + c_2T(\varphi_2) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n\right) \end{cases} \quad (1.65)$$

per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{T}$ e per ogni successione convergente $\phi_n \in \mathcal{T}$. Lo spazio delle distribuzioni è denotato con \mathcal{T}^* ed è lo spazio vettoriale duale continuo dello spazio vettoriale \mathcal{T} (ricorda che in generale l'insieme dei funzionali lineari agenti su uno spazio vettoriale V forma a sua volta uno spazio vettoriale, chiamato *spazio duale V^**). Poi come spazio di funzioni test \mathcal{T} possiamo scegliere uno qualsiasi degli spazi definiti sopra.

Ovviamente, ogni funzione $f(x)$ integrabile su ogni intervallo finito definisce un funzionale lineare continuo su $D(\mathbb{R})$ (ovvero lo spazio più piccolo di funzioni test che abbiamo definito; questo perché la $f(x)$ può fare in generale quello che vuole all'infinito), tramite la formula

$$f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \varphi(x) = \langle f, \varphi \rangle . \quad (1.66)$$

Se $f(x)$ poi diverge al più come una potenza per $|x| \rightarrow \infty$, essa definisce un funzionale lineare continuo su $S(\mathbb{R})$. Ma questi tipi di funzionali lineari, detti “*distribuzioni regolari*”, non sono gli unici esempi di funzionali lineari continui che si possono definire. Per esempio il funzionale $\delta_{x_0}(\varphi) \equiv \varphi(x_0)$ è un funzionale lineare continuo, che non può essere messo, se non in modo simbolico, nella forma di “prodotto scalare” $\langle f, \varphi \rangle$ (cosa invece possibile per le distribuzioni regolari). Per trattarlo allo stesso modo delle distribuzioni regolari, Dirac ha introdotto la cosiddetta “funzione” $\delta(x - x_0)$ nulla ovunque tranne che per $x = x_0$ dove è infinita e tale che $\int_a^b dx \delta(x - x_0) = 1$ per $x_0 \in [a, b]$. In tal modo, al funzionale $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$ si associa la “funzione” $\delta(x - x_0)$ tale che

$$\varphi(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) \varphi(x) .$$

Ripetiamo che si tratta di un modo del tutto simbolico, ancorché utile di definire il funzionale δ_{x_0} . Chiameremo *distribuzione* un funzionale lineare continuo su \mathcal{T} , e chiameremo *distribuzioni singolari* quei funzionali lineari continui ai quali non corrisponde una funzione integrabile.

OPERAZIONI CON LE DISTRIBUZIONI

A differenza di ciò che accade per le funzioni, non è possibile, invece, definire il prodotto ordinario di due distribuzioni: è possibile però definire il prodotto di una distribuzione per una funzione regolare, secondo la regola

$$(\alpha T)(\varphi) = T(\alpha\varphi) = (\text{formalmente}) \int_{-\infty}^{+\infty} dx T(x) \alpha(x) \varphi(x) .$$

Si vede dalla precedente definizione che in realtà è possibile definire tanto il prodotto di due distribuzioni regolari, quanto il prodotto di una distribuzione regolare per una singolare (quello che non è sempre definito è il prodotto di due distribuzioni singolari; un motivo è che esso può dare risultati diversi a seconda della classe di distribuzioni regolari che si scelgono per approssimare le due distribuzioni singolari).

Si possono anche definire *derivate di qualsiasi ordine* (vale a dire che le distribuzioni su \mathcal{T} sono indennitivamente derivabili) estendendo la regola valida per le distribuzioni regolari (una integrazione per parti)

$$T'(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx T'(x) \varphi(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx T(x) \varphi'(x) = -T(\varphi') .$$

In generale si ha per definizione

$$T^{(n)}(\varphi) = (-1)^n T(\varphi^{(n)}) .$$

Vogliamo adesso calcolare la derivata di $\ln|x|$, considerata come distribuzione. Per definizione

$$\begin{aligned} (\ln|x|)'(\varphi) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ln|x| \varphi'(x) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} dx \ln|x| f'(x) + \int_{\epsilon}^{+\infty} dx \ln|x| f'(x) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[(f(\epsilon) - f(-\epsilon)) \ln \epsilon + \int_{-\infty}^{-\epsilon} dx \frac{f(x)}{x} + \int_{\epsilon}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x} \right] . \end{aligned}$$

Ora per il teorema di Rolle/Lagrange (“quello che è” cit. Testa) $\exists \xi$;

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (f(\epsilon) - f(-\epsilon)) \ln \epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2\epsilon f'(\xi) \ln \epsilon = 0 ,$$

cosicchè

$$(\ln|x|)'(\varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} dx \frac{f(x)}{x} + \int_{\epsilon}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x|>\epsilon} dx \frac{f(x)}{x} = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x}.$$

Abbiamo quindi trovato che

$$(\ln|x|)' = \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right),$$

dove con $\mathcal{P}(1/x)$ si intende che la funzione $1/x$ va usata sotto integrale insieme con la prescrizione della “parte principale”. Dalla definizione stessa di $\mathcal{P}(1/x)$, è facile quindi convincersi anche che, in generale, la moltiplicazione di due distribuzioni non è consentita. Infatti la regolarizzazione della parte principale della funzione singolare $1/x$ richiede la cancellazione della singolarità nell’intervallo simmetrico $(-\epsilon, \epsilon)$. Il prodotto di $\mathcal{P}(1/x)$ e $\theta(x)$ è pertanto senza senso.

$$\theta(x) \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\epsilon}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x} \right] \rightarrow \infty.$$

Questo è importante perché sono gli infiniti tipici che compaiono in teoria dei campi quando usiamo il T-prodotto: $\langle 0 | T(O(x) O(y)) | 0 \rangle = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | O(x) O(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | O(y) O(x) | 0 \rangle$ dopo infatti si vedrà come è facilmente intuibile, che i campi sono distribuzioni a valori operatoriali; nel T-prodotto stiamo deliberatamente moltiplicando due distribuzioni singolari nello stesso punto $O(x) O(y)$ e la $\theta(x^0 - y^0)$. Tuttavia la fisica è collegata proprio con i T-prodotti quindi in qualche modo dobbiamo cavarsela (andando a vedere che tipo di singolarità hanno il prodotto degli operatori).

DISTRIBUZIONI TEMPERATE

Il problema principale che si pone se si sceglie come spazio delle funzioni test lo spazio $D(\mathbb{R})$ è che la trasformata di Fourier di $f \in D(\mathbb{R})$

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} f(x),$$

non è in generale una funzione a supporto compatto ovvero $\tilde{f} \notin D(\mathbb{R})$. Quello che possiamo dire però è che è a *decrescita rapida* ovvero quando $k \rightarrow \pm\infty$, $\tilde{f}(k) \rightarrow 0$ più velocemente di una qualunque potenza di k . Se invece partiamo da una funzione a decrescita rapida la trasformata di Fourier è ancora a decrescita rapida. Per le trasformate di Fourier esiste quindi una varietà lineare *invariante*: essa è costituita dallo spazio S delle funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$ che si annullano per $|x| \rightarrow \infty$ più rapidamente d’ogni potenza insieme a tutte le loro derivate. Consideriamo lo spazio duale S^* , cioè l’insieme di funzionali lineari continui su S , detto anche spazio delle *distribuzioni temperate*. Per le distribuzioni temperate si può definire una trasformata di Fourier, e lo spazio trasformato \tilde{S}^* gode di proprietà analoghe a S^* . Trascriviamo qua per non sbagliarci le equazioni che definiscono trasformata e antitrasformata di Fourier

$$\begin{cases} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k) \\ \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} f(x). \end{cases}$$

Nei testi si trovano varie definizioni diverse per le trasformate di Fourier delle distribuzioni temperate. Noi adotteremo (attenzione! esprimeremo la trasformata di Fourier della funzione prova nella variabile x e l’antitrasformata nella variabile k , scambiate!)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(x) \tilde{f}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}(k) f(k) dk,$$

ovvero la distribuzione trasformata è quella che agendo su una funzione di prova mi dà lo stesso valore della distribuzione originaria fatta sulla trasformata di Fourier della distribuzione di prova. Matematicamente

$$\tilde{D}(\varphi) = D(\tilde{\varphi}). \quad (1.67)$$

Questa relazione equivale a definire la trasformata di Fourier di una distribuzione in questo modo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}(k) f(k) dk = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{T}(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{ixk} \tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \tilde{f}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{T}(k) e^{ikx}$$

cioè

$$T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{T}(k) e^{ikx}$$

cioè esattamente la stessa definizione delle funzioni senza nessun cambiamento di segno e nessuna costante mancante.

1.6.2 Operatori Locali come Distribuzioni

Partendo da una teoria classica abbiamo imposto delle regole di quantizzazione, quelle canoniche. Abbiamo poi osservato come le funzioni di Wightman siano singolari quando calcolate nello stesso punto; ancora peggio accade per il T-prodotto per il quale le funzioni di Wightman sono moltiplicate per funzioni θ singolari nello stesso punto. Il vero problema è che non siamo sicuri che le regole di quantizzazione canoniche siano consistenti (e che lo dici ora??). Anzi ora andremo ad esporre qualche argomento per far far vedere che in realtà *non* sono consistenti (tacci tua...).

Iniziamo con campo libero. In MQR avevamo visto come le regole di quantizzazione canonica a tempi uguali funzionassero bene e non davano alcun problema

$$\left\{ \begin{array}{l} [\Phi(x), \Phi(y)]|_{x^0=y^0} = 0 \\ [\dot{\Phi}(x), \dot{\Phi}(y)]|_{x^0=y^0} = [\pi(x), \pi(x)]|_{x^0=y^0} = 0 \\ [\dot{\Phi}(x), \Phi(y)]|_{x^0=y^0} = [\pi(x), \Phi(y)]|_{x^0=y^0} = -i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \end{array} \right. \quad (1.68)$$

A differenza della meccanica quantistica ordinaria nella quale il commutatore $[p_i, q_j] = -i\delta_{ij}$ (ovvero un numero complesso) nella meccanica quantistica relativistica questo commutatore è una funzione singolare ovvero una *distribuzione*. In altre parole non possiamo interpretare i campi $\Phi(x)$ come dei semplici operatori (come in meccanica quantistica) ma come delle *distribuzioni a valori operatoriali* (ovvero quando li applico ad una funzione di prova ottengo un operatore). In altre parole non sono degli operatori perché hanno delle singolarità, ma sono degli operatori se li applico ad una funzione di prova con dominio in \mathbb{R}^3

$$\Phi_f(x^0) \equiv \int d\mathbf{x} \Phi(\mathbf{x}, x^0) f(\mathbf{x}) . \quad (1.69)$$

Le funzioni di prova devono essere a dominio in \mathbb{R}^3 per poter definire il commutatore a tempi uguali

$$[\dot{\Phi}_f(x^0), \Phi_g(y^0)]|_{x^0=y^0} = -i \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) , \quad (1.70)$$

che diventa pertanto un numero. Fisicamente l'operazione (1.69) (denominata in inglese “smearing”) corrisponde all'operazione di misurazione del campo che non avviene mai in un preciso punto, ma, piuttosto, in una regione finita dello spazio. Le stesse considerazioni potrebbero suggerire, tuttavia, che anche uno “smearing” sul tempo sia necessario $\int d^4x \Phi(x) f(x)$ (e ciò sarebbe ancora più fisico in quanto la misura non avviene mai in un istante di tempo preciso). Se fosse così ovviamente il formalismo canonico non avrebbe più senso. Per quanto riguarda il campo libero sappiamo già che il formalismo canonico funziona e quindi solo uno smearing sullo spazio è necessario; ma per quanto riguarda i campi in interazione sono anche loro delle distribuzioni a valori operatoriali in 3 variabili oppure sono obbligato a considerarli come distribuzioni che agiscono su funzioni test a 4 variabili e quindi rinunciare al formalismo canonico? Quello che andremo a vedere ora è come il formalismo canonico debba essere abbandonato.

Per fare ciò dobbiamo studiare meglio, come anticipato in precedenza, che tipo di singolarità hanno il prodotto di due campi; iniziamo con il prendere la funzione di Wightman a due punti

$$\langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle = \sum_n |\langle 0 | \varphi(0) | n \rangle|^2 e^{-ip_n(x-y)} , \quad (1.71)$$

e consideriamo l'effetto dello smearing tridimensionale

$$\begin{aligned} W_{fg}(x^0 - y^0) &\equiv \langle 0 | \varphi_f(x^0) \varphi_g(y^0) | 0 \rangle = \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle \\ &= \sum_n |\langle 0 | \varphi(0) | n \rangle|^2 e^{-iE_n(x^0 - y^0)} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) e^{-ip_n^i(x_i - y_i)} \\ &= \sum_n |\langle 0 | \varphi(0) | n \rangle|^2 e^{-iE_n(x^0 - y^0)} \tilde{f}(\mathbf{p}_n) \tilde{g}(-\mathbf{p}_n). \end{aligned} \quad (1.72)$$

Il problema è decidere se la quantità $W_{fg}(x^0 - y^0)$ è regolare o singolare quando $x^0 \rightarrow y^0$, ovvero quando il fattore oscillante nel tempo $e^{-iE_n(x^0 - y^0)}$, che è un fattore di convergenza, è pari ad 1. Poiché $\tilde{f}(\mathbf{p}_n)$ e $\tilde{g}(-\mathbf{p}_n)$, sono le trasformate di Fourier di funzioni a decrescita rapida, sono loro stesse a decrescita rapida del loro argomento. Questo significa che forniscono un cut-off sul momento spaziale totale degli stati n che possono intervenire nella somma. Tuttavia, se n contiene *più di una particella*, anche se il momento totale ha un forte cut-off, l'energia totale di n non è limitata. Pertanto, nell'equazione

$$W_{fg}(0) = \sum_n |\langle 0 | \varphi(0) | n \rangle|^2 \tilde{f}(\mathbf{p}_n) \tilde{g}(-\mathbf{p}_n), \quad (1.73)$$

la somma su n è potenzialmente divergente perché, sebbene il momento spaziale totale sia limitato, l'energia non lo è (ad esempio per due particelle con impulso totale $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \simeq 0$ hanno una energia $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_1^2} + \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_2^2} = 2\omega_{\mathbf{p}_1}$ che può crescere quanto vuole: le due particelle nel baricentro possono avere energia alta quanto vogliamo).

Questo ci suggerisce che uno smearing a tre dimensioni può non essere sufficiente. Consideriamo ora l'effetto di uno smearing a quattro dimensioni. In questo caso l'equazione (1.72) è rimpiazzata da

$$W_{fg} \equiv \langle 0 | \varphi_f \varphi_g | 0 \rangle = \sum_n |\langle 0 | \varphi(0) | n \rangle|^2 \tilde{f}(p_n) \tilde{g}(-p_n). \quad (1.74)$$

Nell'equazione (1.74) anche l'energia di uno stato ad n particelle ha un cut-off, così che la somma in (1.74) ha molte più chances di esistere.

Questo argomento inoltre spiega perché i campi liberi *solo* distribuzioni a valori operatoriali soltanto in tre variabili e quindi è sufficiente uno smearing tridimensionale: infatti se $\varphi(x)$ è un campo libero, gli stati intermedi n sono limitati ad una particella (per $n > 1$ i termini $\langle 0 | \varphi(0) | n \rangle$ sono tutti nulli) e, pertanto, il cut-off sul momento spaziale totale risulta essere anche un cut-off sull'energia totale. Tuttavia per operatori molto più complicati, anche costruiti a partire dai campi liberi, come, ad esempio : $\Phi^2(x)$: i quali possono connettere gli stati intermedi contenenti 2 particelle, richiedono uno smearing quadridimensionale.

Siamo quindi costretti ad eliminare il metodo di quantizzazione canonica. Ma niente paura, riusciremo ad introdurre la dinamica con un metodo di quantizzazione basato sull'integrale funzionale di Feynman.

1.7 T-prodotti

Come anticipato in precedenza, quando consideriamo i T-prodotti, eseguiamo una operazione illegale in quanto questi contengono il prodotto di due distribuzioni, che non è un oggetto ben definito. Siccome tutta la nostra dinamica sarà basata sul calcolo dei T-prodotti dobbiamo preoccuparci della questione della singolarità in $x^0 = y^0$. Il primo problema tecnico che si origina è che i T-prodotti non sono invarianti di Lorentz. Intuitivamente: se effettuiamo una trasformazione di Lorentz Λ che non cambia l'ordine dei tempi allora non c'è problema ovvero se φ è ad esempio uno scalare dovrà valere $\langle 0 | T(\varphi(x) \varphi(y)) | 0 \rangle = \langle 0 | T(\varphi(\Lambda x) \varphi(\Lambda y)) | 0 \rangle$; se facciamo una trasformazione di Lorentz che cambia l'ordinamento dei tempi invece questo è in contrasto con la definizione del T-prodotto. Tuttavia se c'è un cambiamento di tempi vuol dire che $x \sim y$ e quindi i due operatori commutano $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x)$ e quindi non c'è nessun problema per il T-prodotto. Nel caso del campo libero ricorda che il propagatore di Feynman era manifestamente invariante (grazie alla misura invariante).

Mettiamoci quindi seriamente a studiare il problema della covarianza dei T-prodotti; iniziamo dalla funzione di Wightman. La covarianza di Lorentz e la natura scalare degli operatori A e B mostra che

$$\begin{aligned} W_{AB}(x) &= \langle 0 | A(x) B(0) | 0 \rangle = \langle 0 | U(\Lambda) A(x) B(0) U^\dagger(\Lambda) | 0 \rangle = \langle 0 | U(\Lambda) A(x) U^\dagger(\Lambda) B(0) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | A(\Lambda x) B(0) | 0 \rangle = W_{AB}(\Lambda x) \end{aligned} \quad (1.75)$$

che mostra la natura invariante di $W_{AB}(x)$. Voglio trasformare per comodità questa condizione di invarianza in una condizione differenziale. Questa invarianza vale per tutte le trasformazioni di Lorentz (escluso il solito time reversal in cui dovrei applicare un operatore antiunitario) e in particolare vale per le trasformazioni di Lorentz proprie ovvero quelle raggiungibili a partire dall'identità \mathbb{I} mediante una successione di trasformazioni infinitesime (rivedi pag 17 bibbia MQR)

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu &\approx \delta^\mu{}_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu \\ \epsilon^{\mu\nu} &\equiv \epsilon^\mu{}_\rho g^{\rho\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Abbiamo 6 parametri indipendenti (3 rotazioni spaziali e 3 boost). Abbiamo quindi

$$W_{AB}(\Lambda x) \approx W_{AB}(x^\mu + \epsilon^{\mu\nu} x_\nu) \approx W_{AB}(x) + \partial_\mu W_{AB}(x) \epsilon^{\mu\nu} x_\nu. \quad (1.77)$$

Pertanto le condizioni di invarianza di Lorentz sono equivalenti alla condizione differenziale cercata

$$(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) W_{AB}(x) = 0, \quad \mu \neq \nu. \quad (1.78)$$

Verifichiamo l'invarianza di Lorentz del T-prodotto $T_{AB}(x) = \langle 0 | T(A(x)B(0)) | 0 \rangle$

$$(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) T_{AB}(x) = (x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) [\theta(x^0) \langle 0 | A(x) B(0) | 0 \rangle + \theta(-x^0) \langle 0 | B(0) A(x) | 0 \rangle].$$

L'invarianza rotazionale è ovvia

$$(x_i \partial_j - x_j \partial_i) T_{AB}(x) = 0, \quad (1.79)$$

in quanto l'operatore differenziale $(x_i \partial_j - x_j \partial_i)$ va ad agire direttamente sulla funzione di Wightman che è invariante per rotazioni grazie all'equazione (1.78) con indici spaziali (difatto l'unico caso interessante dell'invarianza è quando posso cambiare l'ordinamento temporale dei miei eventi). Per i boost di Lorentz la situazione è meno banale e otteniamo

$$\begin{aligned} (x^0 \partial^i - x^i \partial^0) T_{AB}(x) &= -\langle 0 | A(x) B(0) | 0 \rangle x^i \partial^0 [\theta(x^0)] - \langle 0 | B(0) A(x) | 0 \rangle x^i \partial^0 [\theta(-x^0)] \\ &= -\langle 0 | A(x) B(0) | 0 \rangle x^i \delta(x^0) + \langle 0 | B(0) A(x) | 0 \rangle x^i \delta(x^0) \\ &= -x^i \delta(x^0) \langle 0 | [A(x), B(0)]|_{x_0=0} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (1.80)$$

Ovvero l'invarianza di Lorentz viene riportata alla commutatività locale della A e della B calcolati in due eventi x e 0 che sono contemporanei ovvero sono a distanza di tipo spazio per $\mathbf{x} \neq 0$. Quindi questo oggetto dovrebbe essere 0 in tutti i punti $\mathbf{x} \neq 0$; per $\mathbf{x} = 0$ invece se il commutatore fosse una funzione continua dovrebbe essere zero anche lì. Quindi l'argomento non era completamente infondato; il problema è che non teneva conto del fatto che A e B possono essere degli oggetti singolari, più di una funzione ordinaria in quanto sono distribuzioni. Il problema è che nello spazio delle distribuzioni vi sono infiniti elementi che hanno supporto compatto nell'origine. Prendiamo il caso di campi scalari. Potremmo avere ad esempio

$$\langle 0 | [A(x), B(0)]|_{x_0=0} | 0 \rangle = \alpha \delta(\mathbf{x}), \quad (1.81)$$

che stabilisce l'invarianza di Lorentz del T-prodotto in questo caso

$$(x^0 \partial^i - x^i \partial^0) T_{AB}(x) = -\alpha x^i \delta(x^0) \delta(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.82)$$

poichè il prodotto $x^i \delta(\mathbf{x})$ fa zero su qualsiasi funzione di prova. Se invece avessimo avuto delle derivate della delta (poichè sono operatori scalari il commutatore deve essere invariante per rotazioni; la prima cosa che ci può essere è il laplaciano)

$$\langle 0 | [A(x), B(0)]|_{x_0=0} | 0 \rangle = \beta \Delta \delta(\mathbf{x}), \quad (1.83)$$

dove $\Delta = \partial^i \partial^i = -\partial_i \partial^i$ è il laplaciano tridimensionale, avremmo

$$(x^0 \partial^i - x^i \partial^0) T_{AB}(x) = -\beta x^i \delta(x^0) \Delta \delta(\mathbf{x}). \quad (1.84)$$

In generale ci potranno essere infiniti termini (laplaciano quadro ... ecc): sono tutte distribuzioni che soddisfano il principio di località; tuttavia non danno identicamente 0 per il commutatore, ma un commutatore che è concentrato in $\mathbf{x} = 0$. Andiamolo a verificare per il termine con il solo laplaciano quadro. Partendo dall'identità

$$x^i \delta(\mathbf{x}) = 0 \implies 0 = \Delta(x^i \delta(\mathbf{x})) = -\partial^k (\delta^i_k \delta(\mathbf{x}) + x^i \partial_k \delta(\mathbf{x})) = -2 \partial^i \delta(\mathbf{x}) + x^i \Delta \delta(\mathbf{x}) \quad (1.85)$$

da cui

$$(x^0 \partial^i - x^i \partial^0) T_{AB}(x) = -2\beta \delta(x^0) \partial^i \delta(\mathbf{x}). \quad (1.86)$$

che mostra come in questo caso il T-prodotto non è invariante (quando lo integriamo su una funzione di prova). Il problema qui è ancora più grande: ho ipotizzato che il commutatore a tempi uguali esista; in realtà ora sappiamo anche che i campi sono distribuzioni a valori operatoriali in 4 dimensioni quindi i commutatori a tempi uguali neanche esisteranno. Mi aspetto quindi che possa succedere anche che questi α e β (proprio perché sto trattando i commutatori come distribuzioni a valori operatoriali in 3 dimensioni!) siano addirittura infiniti (richiedono l'introduzione di un cut-off per essere trattati: di questo ce ne occuperemo dopo quando affronteremo la rinormalizzazione). Siccome dai T-prodotti contengono tutta la fisica (per ora sappiamo solo che i poli danno informazione sulle masse fisiche, in seguito vedremo come le formule di riduzione li colleghino con le ampiezze di scattering) dobbiamo assicurarci di curare queste anomalie senza che la fisica ne risenta. Il problema ovviamente si può risolvere in quanto questa mancata covarianza è localizzata in punto, $x = 0$ (non è "diffusa" in quanto per $x \neq 0$ il T-prodotto è 0). Pertanto basta una correzione localizzata in $x = 0$ (una aggiunta di un cosiddetto *termine di contatto*) che ci permette di curare la singolarità. Definisco un T^* -prodotto

$$\langle 0 | T^*(A(x)B(0)) | 0 \rangle \equiv T_{AB}^*(x) \equiv T_{AB}(x) + \gamma \delta(\mathbf{x}) \delta'(x^0). \quad (1.87)$$

La distribuzione $\gamma \delta(\mathbf{x}) \delta'(x^0)$ è tale che, aggiustando il coefficiente γ , rende covariante sotto Lorentz il T^* -prodotto (se il coefficiente β inoltre è infinito si può pensare di riuscire ad aggiustare γ in egual modo). Per trovare il coefficiente γ applichiamo l'operatore $(x^0 \partial^i - x^i \partial^0)$ al T^* -prodotto (con 2 indici spaziali è al solito banale, verificalo)

$$\begin{aligned} (x^0 \partial^i - x^i \partial^0) T_{AB}^*(x) &= -2\beta \delta(x^0) \partial^i \delta(\mathbf{x}) + \gamma x^0 \partial^i \delta(\mathbf{x}) \delta'(x^0) - \gamma x^i \delta(\mathbf{x}) \delta^0 \delta'(x^0) \\ &= -2\beta \delta(x^0) \partial^i \delta(\mathbf{x}) - \gamma \partial^i \delta(\mathbf{x}) \delta(x^0), \end{aligned} \quad (1.88)$$

avendo usato l'identità $x^0 \delta'(x^0) = -\delta(x^0)$ ottenuta applicando il primo membro ad una funzione di prova e svolgendo i conti. Otteniamo pertanto che con

$$\gamma = -2\beta. \quad (1.89)$$

il T^* -prodotto supera il test della covarianza. Si può dimostrare che tutta l'altra sequenza di termini che posso avere (laplaciano quadro, ...) si può curare allo stesso modo con l'aggiunta di altri termini di contatto. L'aggiunta dei termini di contatto e quindi il nuovo T-prodotto è innocuo dal punto di vista fisico. Infatti la ridefinizione locale nell'equazione (1.87) consiste nell'aggiunta di un polinomio alla trasformata di Fourier di $T_{AB}(x)$, il che non cambia né la posizione delle singolarità, né i corrispondenti residui, all'interno dei quali risiede tutta la fisica.

$$\text{FT} \{ \langle 0 | T^*(A(x)B(0)) | 0 \rangle \} = \text{FT} \{ \langle 0 | T(A(x)B(0)) | 0 \rangle \} + 2i\beta k^0 \quad (1.90)$$

in quanto $\tilde{\delta}(\mathbf{x}) = 1$ e $\tilde{\delta}'(k^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 e^{-ik^0 x^0} \delta'(x^0) = -ik^0$. Notare una cosa interessante: il T^* -prodotto non è un oggetto univocamente definito in quanto possiamo aggiungere qualsiasi *somma finita* di potenze del dalambertiano

$$\langle 0 | T^*(A(x)B(0)) | 0 \rangle + \sum_{n=1}^{<\infty} a_n \square^n \delta^4(x) \quad (1.91)$$

senza cambiare la fisica in quanto il termine aggiuntivo trasformato in Fourier contribuisce come $\sum_{n=1}^{<\infty} c_n q^{2n}$ ovvero un polinomio finito. La finitezza della serie serve per non avere problemi di località.

1.8 Teorema del Limite Asintotico

Vogliamo cominciare a vedere in che modo conoscendo tutti i T-prodotti tra gli operatori locali possiamo risalire agli elementi della matrice S , che in definitiva sono ciò che noi richiediamo dalla teoria. Per fare questo è essenziale il *teorema del limite asintotico*.

In fisica classica se abbiamo il problema di una equazione di Klein-Gordon con una sorgente esterna

$$(\square + m^2) \varphi(x) = j(x) \quad (1.92)$$

la soluzione del problema sarebbe facile se la sorgente esterna non è cambiata dal campo φ stesso (esattamente come in elettrodinamica). La soluzione è

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \int d^4y G(x-y) j(y) \quad (1.93)$$

con $(\square + m^2) \varphi_0(x) = 0$ e una funzione di Green cioè tale che $(\square_x + m^2) G(x-y) = \delta^4(x-y)$. Sappiamo che nel caso di Klein Gordon posso costruire 4 funzioni di Green (T-prodotto, anti T-prodotto, ritardata e avanzata). Posso prendere la funzione di Green che mi pare in quanto se ne scelgo un'altra la differenza tra di esse sarà una soluzione dell'omogenea associata. Però “esteticamente” può essere elegante quella ritardata

$$G_{rit}(x-y) = 0 \quad \text{se } x^0 < y^0. \quad (1.94)$$

Fisicamente quando $x^0 \rightarrow -\infty$ ovvero prima che accendiamo la nostra sorgente esterna la funzione di Green ritardata sarà nulla (in generale quando x^0 è minore di tutte le y^0 del supporto di $J(y)$). Quindi è evidente che la nostra φ_0 è quella che classicamente chiameremmo φ_{in} ovvero il campo che esiste nel nostro spazio-tempo prima che la nostra sorgente esterna abbia agito

$$\lim_{x^0 \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = \varphi_{in}(x). \quad (1.95)$$

Quantisticamente ci piacerebbe che il campo fondamentale $\varphi(x)$ della nostra teoria scalare soddisfi una condizione analoga. Il problema è che le particelle ai tempi asintotici non sono libere ma quasi libere in quanto autointeragiscono. In teoria dei campi infatti la questione dello scattering è complicata perché l'interazione che genera il processo di diffusione fra particelle è la stessa che determina le proprietà intrinseche di queste ultime (in poche parole la sorgente è un operatore che dipende dal campo φ). Nel caso delle teorie che abbiamo preso in considerazione ovvero quelle senza particelle a massa nulla (quelle dannose!) si parla del cosiddetto *spegnimento adiabatico*, ovvero l'annullamento all'infinito delle costanti di accoppiamento. L'autointerazione tuttavia non scompare mai.

Il teorema del limite asintotico dice la cosa seguente. Prendiamo l'operatore $O(x)$ dalla lista degli operatori locali che è associato ad una particella fisica nel senso che

$$\langle 0 | O(x) | \tilde{p} \rangle = \frac{\sqrt{Z_O}}{(2\pi)^{3/2}} \neq 0 \quad (1.96)$$

Prendiamo ora una soluzione $f(x)$ dell'equazione di Klein-Gordon con la massa fisica della particella $(\square + m^2) f(x) = 0$ (vedremo che questa f sarà collegata alla funzione d'onda della particella vera) e costruiamo la quantità

$$O^f(x^0) \equiv (f^*(x), O(x)) = i \int d\mathbf{x} f(x) \partial^0 O(x). \quad (1.97)$$

Se $O^f(x^0)$ è una funzione che soddisfa l'equazione di Klein-Gordon libera allora è indipendente da x^0 (ricordarsi, vedi MQR pag 3, che il prodotto scalare indotto dall'equazione di Klein-Gordon è indipendente dal tempo solo se gli argomenti sono soluzioni della stessa). In generale però la dipendenza c'è. Se però ne faccio il limite per $x \rightarrow \mp\infty$

$$\lim_{x^0 \rightarrow \mp\infty} O^f(x^0) = C \varphi_{in/out}^f. \quad (1.98)$$

ottengo una cosa indipendente dal tempo ancora soluzione di Klein-Gordon in quanto i campi IN e OUT la soddisfano.

Se O^f fosse una funzione numerica potrei banalmente verificare l'egualanza. Il problema è che questi sono operatori. L'analisi funzionale ci avverte di essere cauti quando sono coinvolti spazi vettoriali ad infinite dimensioni: bisogna distinguere tra diversi tipi di convergenza. Supponiamo di avere uno spazio vettoriale e di avere una successione infinita di vettori \mathbf{v}_n . Il limite di questa successione di vettori è uguale ad un certo \mathbf{v}_∞ . Quando è che dico che questo limite esiste e che questa successione converge a \mathbf{v}_∞ ? È equivalente a dire che $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_\infty) = 0$. Come definisco la convergenza a 0? Supponiamo di essere in uno spazio in d dimensioni e quindi $\mathbf{v}_n = (v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(d)})$. Posso definire due tipi di convergenza

- Convergenza per componenti: $\forall i$ succede che $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^{(i)} = 0$;
- Convergenza in norma: $|\mathbf{v}_n| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

In entrambi i casi ho riportato la nozione di limite di una successione alla nozione di limite su successioni numeriche. Questi due concetti sono analoghi (uno implica l'altro e viceversa) se lo spazio è finito dimensionale. Tuttavia noi non siamo in uno spazio finito dimensionale. Esistono in questo caso due criteri di convergenza

- Criterio di Convergenza debole: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}_n = 0$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^{(i)} = 0$ per ogni i componente di \mathbf{v}_n ;
- Criterio di Convergenza forte: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}_n = 0$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_n\| = 0$.

Per far vedere che i due criteri non sono analoghi in spazi ad infinite dimensioni basta trovare un esempio. Possiamo prendere come successione di vettori $\mathbf{v}_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ la cui n -esima entrata è 1. Il limite debole della successione è il vettore nullo. Il limite forte invece no in quanto la norma per ogni n è pari ad 1. Ritorniamo al problema di nostro interesse. La convergenza forte nel nostro caso non è indicata perché la dinamica del mio campo è invariante per traslazioni (l'interazione non si spegne mai). Una volta per fare il limite pulito nell'equazione di Dyson per dire che ad un certo punto le particelle diventano libere si introduce quello che si chiama *spegnimento adiabatico*: prendo una Lagrangiana somma di una parte libera più una in interazione (ad esempio φ^4)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + g(t) \varphi^4 \quad (1.99)$$

e si dà alla costante di accoppiamento g una dipendenza dal tempo fittizia tale che a $t \rightarrow \pm\infty$ l'interazione si spegne. Lo spegnimento deve essere molto ma molto lento. In questo caso il campo φ a $\pm\infty$ diventa libero in quanto spegniamo l'interazione. Tuttavia la dinamica vera non la possiamo fare così. Prendiamo ad esempio una teoria in cui abbiamo stati legati. Se spegniamo la costante di accoppiamento, a $\pm\infty$ gli stati legati si sciolgono. Quindi se siamo interessati ad una dinamica di stati legati, questa cosa non si può fare. Naturalmente la fisica non è fatta così e la costante di accoppiamento è indipendente dal tempo: quindi l'autointerazione del campo e quella con altri campi non si spegne ai tempi asintotici. Si può spegnere solo tra particelle che si allontanano fra di loro; tuttavia le particelle continuano ad interagire con se stesse per creare particelle fisiche. La convergenza forte

$$\lim_{x^0 \rightarrow \mp\infty} O^f(x^0) |\alpha\rangle = C \varphi_{\text{in/out}}^f |\alpha\rangle. \quad (1.100)$$

corrisponde a situazioni in cui qualsiasi operatore O tende effettivamente ad un campo libero come operatore. Questa non è la risposta corretta: devo quindi avere un limite debole; ovvero se prendo due stati $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ allora il limite dell'elemento di matrice

$$\lim_{x^0 \rightarrow \mp\infty} \langle \beta | O^f(x^0) | \alpha \rangle = C_{\text{in/out}} \langle \beta | \varphi_{\text{in/out}}^f | \alpha \rangle. \quad (1.101)$$

Questo quindi afferma il teorema del limite asintotico. Vediamo ora che la costante C è la stessa sia per IN che per OUT e vale

$$C = \sqrt{Z_O}.$$

Scegliamo come $\langle \beta | = \langle 0 |$ e $|\alpha\rangle = |\widetilde{p}\rangle$, in quanto l'enunciato del teorema asintotico deve valere per ogni stato e quindi per quelli scelti in particolare

$$\langle 0 | O^f(x^0) |\widetilde{p}\rangle = i \int dx \, f(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}^0 \langle 0 | O(x) |\widetilde{p}\rangle. \quad (1.102)$$

Poichè $\langle 0 | O(x) | \widetilde{p} \rangle = \langle 0 | e^{ipx} O(0) e^{-ipx} | \widetilde{p} \rangle = e^{-ipx} \langle 0 | O(0) | \widetilde{p} \rangle = e^{-ipx} \frac{\sqrt{Z_O}}{(2\pi)^{3/2}}$, abbiamo

$$\langle 0 | O^f(x^0) | \widetilde{p} \rangle = \frac{i\sqrt{Z_O}}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{x} f(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial^0} e^{-ipx}. \quad (1.103)$$

Notare quindi che, nonostante l'operatore locale $O(x)$ in generale non soddisfi l'equazione di Klein-Gordon, l'elemento di matrice $\langle 0 | O(x) | \widetilde{p} \rangle$ soddisfa l'equazione di Klein-Gordon in quanto e^{-ipx} è un'onda piana che rappresenta una particella di massa m . D'altra parte il secondo membro (prendiamo il caso IN)

$$C \langle 0 | \varphi_{in}^f | \widetilde{p} \rangle = iC \int d\mathbf{x} f(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial^0} \langle 0 | \varphi_{in}(x) | \widetilde{p} \rangle = iC \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{x} f(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial^0} \frac{e^{-ikx}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \langle 0 | a_{in}(\mathbf{k}) | \widetilde{p} \rangle,$$

e, poichè $\langle 0 | a_{in}(\mathbf{k}) | \widetilde{p} \rangle = \sqrt{2\omega_p} \langle 0 | a_{in}(\mathbf{k}) | p \rangle = \sqrt{2\omega_p} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p})$, abbiamo

$$C \langle 0 | \varphi_{in}^f | \widetilde{p} \rangle = \frac{iC}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{x} f(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial^0} e^{-ipx}. \quad (1.104)$$

Confrontando i due membri si vede che la costante C svolge il ruolo di $\sqrt{Z_O}$ ovvero il residuo al polo della funzione di Schwinger a punti. È sorprendente che tutti gli operatori locali tendano debolmente allo stesso limite in quanto gli operatori locali possono essere molto diversi. Se funziona il teorema del limite asintotico allora è vero che questa Z_O è universale ed è proprio quella che è collegata al fatto che la O sia un buon *campo interpolante* per la particella ovvero che applicato al vuoto crea degli stati che non sono ortogonali agli stati di singola particella stabile.

PER UNA ALTRA TRATTAZIONE (MIGLIORE): Vedi Greiner pag 272-274.

1.9 Formule di Riduzione

Andiamo a vedere ora come si applica il teorema del limite asintotico per esprimere le ampiezze di scattering tramite i prodotti tempo ordinati della lista degli operatori locali. Supponiamo di voler calcolare le ampiezze di scattering del processo $p_1 + p_2 \rightarrow q_1 + q_2$ con $p_1, p_2 \neq q_1, q_2$. Useremo inoltre dei pacchetti d'onda centrati sugli impulsi, come si fa negli esperimenti reali, per poter sfruttare la loro localizzazione. Le nostre incertezze sperimentalistiche non devono scendere al di sotto del principio di indeterminazione. Avremo quindi un pacchetto d'onda che noi approssimiamo con un'onda piana; a questo pacchetto d'onda gli diamo in media un impulso p . Dobbiamo calcolare l'elemento di matrice

$$S_{fi} = \langle q_1 q_2, \text{out} | p_1 p_2, \text{in} \rangle. \quad (1.105)$$

Ricordiamo che

$$\begin{aligned} \varphi_{in/out}(x) &= \int d\mathbf{x} (f_{\mathbf{p}}(x) a_{in/out}(\mathbf{p}) + \text{h.c.}) \\ a_{in}(\mathbf{p}) &= (f_{\mathbf{p}}, \varphi_{in}) = i \int d\mathbf{x} f_{\mathbf{p}}^*(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \varphi_{in}(x) \\ a_{in}^\dagger(\mathbf{p}) &= (f_{\mathbf{p}}^*, \varphi_{in}) = -i \int d\mathbf{x} f_{\mathbf{p}}(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0 \varphi_{in}(x) \end{aligned} \quad (1.106)$$

dove $f_{\mathbf{p}}(x) = \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \langle q_1 q_2, \text{out} | p_1 p_2, \text{in} \rangle &= \langle q_1 q_2, \text{out} | a_{in}^\dagger(\mathbf{p}_1) | p_2, \text{in} \rangle - \langle q_1 q_2, \text{out} | a_{out}^\dagger(\mathbf{p}_1) | p_2, \text{in} \rangle \\ &= i \int d\mathbf{x} f_{\mathbf{p}_1}(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{x_0} \langle q_1 q_2, \text{out} | (\varphi_{in}(x) - \varphi_{out}(x)) | p_2, \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Applichiamo ora il teorema del limite asintotico

$$\begin{aligned}\langle q_1 q_2, \text{out} | p_1 p_2, \text{in} \rangle &= \frac{i}{\sqrt{Z_O}} \left(\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \right) \int d\mathbf{x} f_{\mathbf{p}_1}(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{x_0} \langle q_1 q_2, \text{out} | O(x) | p_2, \text{in} \rangle \\ &= \frac{i}{\sqrt{Z_O}} \int d^4x \partial_{x_0} \left(f_{\mathbf{p}_1}(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{x_0} \langle q_1 q_2, \text{out} | O(x) | p_2, \text{in} \rangle \right).\end{aligned}\quad (1.108)$$

Abbiamo ottenuto una ulteriore integrazione in x^0 ; attenzione però che in quanto dobbiamo ricordarci che in questo caso i contributi al bordo forniscono tutto il contributo dell'integrale temporale e dunque non possiamo più eliminarli quando integriamo per parti come facciamo solitamente. Ora $\partial_{x_0}(A \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{x_0} B) = \partial_{x_0}(A \partial_{x_0} B - B \partial_{x_0} A) = A \partial_{x_0}^2 B - B \partial_0^2 A$ e poiché $f_{\mathbf{p}_1}(x)$ soddisfa dell'equazione di Klein-Gordon $\partial_{x_0}^2 f_{\mathbf{p}_1}(x) = (\Delta_x - m^2) f_{\mathbf{p}_1}(x)$ quindi

$$\begin{aligned}\langle q_1 q_2, \text{out} | p_1 p_2, \text{in} \rangle &= \frac{i}{\sqrt{Z_O}} \int d^4x (f_{\mathbf{p}_1}(x) \partial_{x_0}^2 - (\partial_{x_0}^2 f_{\mathbf{p}_1}(x))) \langle q_1 q_2, \text{out} | O(x) | p_2, \text{in} \rangle \\ &= \frac{i}{\sqrt{Z_O}} \int d^4x (f_{\mathbf{p}_1}(x) \partial_{x_0}^2 - (\Delta_x - m^2) f_{\mathbf{p}_1}(x)) \langle q_1 q_2, \text{out} | O(x) | p_2, \text{in} \rangle \\ &= \frac{i}{\sqrt{Z_O}} \int d^4x f_{\mathbf{p}_1}(x) (\square_x + m^2) \langle q_1 q_2, \text{out} | O(x) | p_2, \text{in} \rangle \\ &= \frac{i}{\sqrt{Z_O}} \int d^4x f_{\mathbf{p}_1}(x) K_x \langle q_1 q_2, \text{out} | O(x) | p_2, \text{in} \rangle\end{aligned}\quad (1.109)$$

Notare che se avessimo integrato per parti senza avere sostituito $\partial_{x_0}^2 f_{\mathbf{p}_1}(x) = (\Delta_x - m^2) f_{\mathbf{p}_1}(x)$ ed eliminando come siamo soliti i contributi al bordo, avremmo ottenuto zero! Invece effettuando tale sostituzione possiamo integrare per parti tranquillamente in quanto l'operatore laplaciano coinvolge soltanto le derivate spaziali. Non ho contributo al bordo in quanto il pacchetto d'onda $f_{\mathbf{p}_1}(x)$ è ben localizzata e i suoi contributi all'infinito sono zero. Il risultato di questi conti è stato quello di eliminare una particella dello stato iniziale inserendo un operatore locale $O(x)$ che può essere uno qualsiasi della lista purchè abbia uno $Z_O \neq 0$. Notare che quindi c'è una grossa ridondanza in tutto ciò: gli operatori locali della lista possono essere molto diversi tra di loro e conseguentemente il loro elemento di matrice può essere molto differente. Tuttavia nell'ampiezza di scattering che ho calcolato le differenze sono compensate dalla presenza della costante $\sqrt{Z_O}$ (dipendente dall'interazione) a denominatore. Notare ancora che non posso integrare per parti dimenticandomi dei termini al bordo: in quel caso l'operatore di Klein-Gordon andrebbe ad agire su $f_{\mathbf{p}_1}(x)$ e il risultato sarebbe zero. Ora dobbiamo proseguire con le riduzioni successive partendo direttamente dall'elemento di matrice $\langle q_1 q_2, \text{out} | O(x) | p_2, \text{in} \rangle$ e tralasciando per il momento il resto dell'integrale

$$\langle q_1 q_2, \text{out} | O(x) | p_2, \text{in} \rangle = \langle q_2, \text{out} | a_{\text{out}}(\mathbf{q}_1) O(x) | p_2, \text{in} \rangle - \langle q_2, \text{out} | O(x) a_{\text{in}}(\mathbf{q}_1) | p_2, \text{in} \rangle \quad (1.110)$$

Notare che non posso far agire $a_{\text{in}}(\mathbf{q}_1)$ alla sinistra di $O(x)$ in quanto in generale questi due operatori non commutano. Ora faccio uso della decomposizione degli operatori di distruzione tramite il prodotto scalare di Klein-Gordon e il teorema del limite asintotico

$$a_{\text{out}}(\mathbf{q}_1) = (f_{\mathbf{q}_1}, \varphi_{\text{out}}) = i \int d\mathbf{y} f_{\mathbf{q}_1}^*(y) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{y_0} \varphi_{\text{out}}(y) = \varphi_{\text{out}}^{f_{\mathbf{q}_1}^*} = \frac{1}{\sqrt{Z_O}} \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} O^{f_{\mathbf{q}_1}^*}(y_0), \quad (1.111)$$

ottenendo

$$\begin{aligned}\langle q_1 q_2, \text{out} | O(x) | p_2, \text{in} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{Z_O}} \left\{ \lim_{y_0 \rightarrow +\infty} \langle q_2, \text{out} | O^{f_{\mathbf{q}_1}^*}(y_0) O(x) | p_2, \text{in} \rangle - \lim_{y_0 \rightarrow -\infty} \langle q_2, \text{out} | O(x) O^{f_{\mathbf{q}_1}^*}(y_0) | p_2, \text{in} \rangle \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z_O}} \left(\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} - \lim_{y_0 \rightarrow -\infty} \right) \langle q_2, \text{out} | T(O^{f_{\mathbf{q}_1}^*}(y_0) O(x)) | p_2, \text{in} \rangle.\end{aligned}$$

Abbiamo inserito il T-prodotto per ovvi motivi. In generale avrei potuto inserire una qualsiasi funzione (magari anche continua!) che asintoticamente si comporta in questo modo: l'espressione che avrei ottenuto sarebbe stata esattamente la stessa. Perchè però scegliere il T-prodotto, che, come sappiamo è singolare? La

dinamica che studieremo (introdotta attraverso gli integrali funzionali) mi formula naturalmente la teoria con i T-prodotti. Mi conviene curare successivamente le singolarità dovute alle θ (cosa possibile) e mantenere la dinamica inalterata piuttosto che fare il contrario in quanto non saprei come formulare la dinamica in un altro modo. Partiamo quindi dal presupposto che poi verificheremo, che la parte singolare del T-prodotto non contribuisce alla matrice S . In altre parole potremo inserire in queste stesse formule anzichè il T-prodotto il T^* -prodotto senza modificare alcunchè. Ora possiamo eseguire gli stessi passaggi effettuati in precedenza

$$\begin{aligned} \langle q_1 q_2, \text{out} | O(x) | p_2, \text{in} \rangle &= \frac{i}{\sqrt{Z_O}} \int d^4y \partial_{y_0} \left[f_{\mathbf{q}_1}^*(y) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{y_0} \langle q_2, \text{out} | T(O(y) O(x)) | p_2, \text{in} \rangle \right] \\ &= \frac{i}{\sqrt{Z_O}} \int d^4y [f_{\mathbf{q}_1}^*(y) \partial_{y_0}^2 - (\partial_{y_0}^2 f_{\mathbf{q}_1}^*(y))] \langle q_2, \text{out} | T(O(y) O(x)) | p_2, \text{in} \rangle \\ &= \frac{i}{\sqrt{Z_O}} \int d^4y f_{\mathbf{q}_1}(y) K_y \langle q_2, \text{out} | T(O(y) O(x)) | p_2, \text{in} \rangle . \end{aligned} \quad (1.112)$$

Iterando il procedimento otteniamo

$$\begin{aligned} \langle q_1 q_2, \text{out} | p_1 p_2, \text{in} \rangle &= \left(\frac{i}{\sqrt{Z_O}} \right)^4 \int d^4x_1 \dots d^4x_4 \\ &\cdot f_{\mathbf{p}_1}(x_1) \dots f_{\mathbf{q}_2}^*(x_4) K_{x_1} \dots K_{x_4} \underbrace{\langle 0 | T(O(x_1) \dots O(x_4)) | 0 \rangle}_{\text{Funzione di Green } G^{(4)}(x_1, \dots, x_4)} \end{aligned} \quad (1.113)$$

Queste sono le *formule di riduzione LSZ* (Lehmann, Symanzik e Zimmermann) che in generale, per un processo del tipo $q_1 + \dots + q_m \rightarrow p_1 + \dots + p_n$ e per particelle di spin 0 assume la forma

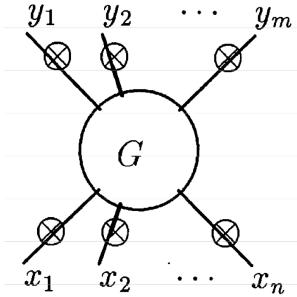


Figura 1.1: The multi-particle Green's function with amputated external legs.

$$\begin{aligned} \langle q_1 \dots q_m, \text{out} | p_1 \dots p_n, \text{in} \rangle &= \left(\frac{i}{\sqrt{Z_O}} \right)^{n+m} \int d^4y_1 \dots d^4y_m d^4x_1 \dots d^4x_n \\ &\cdot f_{\mathbf{q}_1}^*(x_1) \dots f_{\mathbf{q}_n}^*(x_n) f_{\mathbf{p}_1}(y_1) \dots f_{\mathbf{p}_m}(y_n) K_{x_1} \dots K_{x_n} K_{y_1} \dots K_{y_m} \\ &\underbrace{\langle 0 | T(O(x_1) \dots O(y_m)) | 0 \rangle}_{\text{Funzione di Green } G^{(n+m)}(x_1, \dots, y_m)} \end{aligned}$$

The Green's function does not "know" about the incoming and outgoing particles and about their momenta. This connection is made by applying the Klein-Gordon operators and projecting on the plane waves. Symbolically, this equation can be represented as in Fig.(1.1). Here the central circle represents the $(n+m)$ -particle Green's function and the crosses appended to the external boson lines stand for the Klein-Gordon operators. Since the differential operator $(\square + m^2)$ is the inverse of the boson propagator its action in this equation is called the *amputation of the external boson lines*.

Inoltre ora possiamo capire perché se ci mettiamo un T^* -prodotto ovvero un T-prodotto deformato con dei termini di contatto non cambia nulla in questa espressione. A questi termini aggiuntivi possiamo eseguire una integrazione per parti: tuttavia termini al bordo non ne abbiamo perché questi termini sono localizzati in punti uguali; inoltre siccome le f soddisfano le equazioni di Klein-Gordon il contributo totale dei termini di contatto è nullo.

Capitolo 2

Quantization with Path Integrals

Thirty-one years ago, Dick Feynman told me about his 'sum over histories' version of quantum mechanics. The electron does anything it likes, he said. 'It goes in any direction at any speed, forward or backward in time, however it likes, and then you add up the amplitudes and it gives you the wave-function.' I said to him, 'You're crazy'. But he wasn't.

F.J. Dyson

Up to now we have exclusively dealt with the canonical method of field quantization. Field operators have been introduced which act in the Hilbert space of "second quantization" and canonical commutation rules have been postulated.

As it turns out, this is not the only way to proceed. There is an alternative approach to the problem of field quantization, which is phrased in a very different language. The method of path integrals does not speak about operators at all; instead a special kind of highly dimensional integral over classical fields is employed. The quantum properties of a system come into play because the motion of a particle between two points can proceed on a large (infinite) variety of classical trajectories and each of these alternatives makes its coherent contribution to the transition amplitude. This results in a path integral from which, at least in principle, all properties of a system can be deduced by using functional techniques. In the remainder we will learn the basic properties and uses of the path-integral method, first addressing ordinary quantum mechanics and subsequently quantum field theory. The path-integral formalism leads to the same results as obtained by canonical quantization; both formulations of quantum field theory are equivalent. For some systems, however, the canonical method is quite awkward to formulate and to use. This holds true for the quantization of fields with constraints, a problem one regularly encounters with gauge theories. Because (nonabelian) gauge fields are the backbone of modern theoretical physics, and also because of its formal elegance and appeal, the path-integration formalism nowadays is the preferred route to field quantization.

2.1 Path Integrals in Nonrelativistic Quantum Mechanics

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \prod_{n=0}^{N-1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \left(p_n \frac{q_{n+1} - q_n}{\varepsilon} - H(p_n, \bar{q}_n) \right) \right] \quad (2.1)$$
$$\varepsilon = \frac{t' - t}{N}$$

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau (p\dot{q} - H(p, q)) \right] \quad (2.2)$$
$$q(t) = q, \quad q(t') = q'$$

2.1.1 Feynman's Path Integral

$$\begin{aligned}
H &= \frac{p^2}{2m} + V(q) \\
\langle q', t' | q, t \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{-N/2} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \exp \left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{m}{2} \dot{q}_n^2 - V(\bar{q}_n) \right) \right] \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right) \right] \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(q, \dot{q}) \right]
\end{aligned} \tag{2.3}$$

2.1.2 The Time-Ordered Product and n -Point Functions

Trattiamo per semplicità il caso che useremo sempre, ovvero quello di una Hamiltoniana che dipende quadraticamente dagli impulsi.

$$\langle q', t' | T(q(t_1) \dots q(t_n)) | q, t \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q q(t_1) \dots q(t_n) \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(q, \dot{q}) \right] \tag{2.4}$$

Notare che la costante \mathcal{N} è la stessa e si elide tra numeratore e denominatore

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T(q(t_1) \dots q(t_n)) | 0 \rangle &= \lim_{t' \rightarrow \infty, t \rightarrow -\infty} \frac{\langle q', t' | T(q(t_1) \dots q(t_n)) | q, t \rangle}{\langle q', t' | q, t \rangle} \\
&= \frac{\int \mathcal{D}q q(t_1) \dots q(t_n) \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(q, \dot{q}) \right]}{\int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(q, \dot{q}) \right]} = \langle q(t_1) \dots q(t_n) \rangle
\end{aligned} \tag{2.5}$$

2.1.3 The Vacuum Persistence Amplitude

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \frac{\int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (L(q, \dot{q}) + J(t)q) \right]}{\int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt L(q, \dot{q}) \right]} = \frac{\mathcal{Z}(J)}{\mathcal{Z}(0)} \\
\langle 0 | T(q(t_1) \dots q(t_n)) | 0 \rangle &= \left(\frac{\hbar}{i} \right)^n \frac{\partial^n Z[J]}{\partial J(t_1) \dots \partial J(t_n)} \Big|_{J=0}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2 The Path integral For Scalar Quantum Fields

$$\begin{aligned}
\langle q', t' | q, t \rangle &= \int \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\pi \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau \int d\mathbf{x} (\pi \partial_0 \varphi - \mathcal{H}(p, q)) \right] \\
\varphi(\mathbf{x}, t') &= \varphi(\mathbf{x}), \quad q(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{2.7}$$

e nel caso di Hamiltoniana dipendente quadraticamente dagli impulsi

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int_t^{t'} d\tau \int d\mathbf{x} \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) \right] \tag{2.8}$$

$$\langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(t_1) \dots \varphi(t_n) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) \right]}{\int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) \right]} \tag{2.9}$$

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) + J\varphi) \right]}{\int \mathcal{D}\varphi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x L(\varphi, \dot{\varphi}) \right]} = \frac{\mathcal{Z}(J)}{\mathcal{Z}(0)} \quad (2.10)$$

$$\langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) | 0 \rangle = \left(\frac{\hbar}{i} \right)^n \frac{\partial^n Z[J]}{\partial J(x_1) \dots \partial J(x_n)} \Big|_{J=0}$$

2.2.1 Euclidean Field Theory

Con la rotazione a tempi immaginari la metrica diventa Euclidea

$$\begin{aligned} x_E^0 &= ix_M^0 \\ \mathbf{x}_E &= \mathbf{x}_M \\ x_E^2 &= x_4^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -x_0^2 + \mathbf{x}^2 = -x_M^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nel caso dei momenti per convenzione (in modo tale da mantenere invariato il prodotto scalare $p_\mu x^\mu$) si adotta

$$\begin{aligned} p_E^0 &= -ip_M^0 \\ \mathbf{p}_E &= \mathbf{p}_M \\ p_E^2 &= p_4^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = -p_0^2 + \mathbf{p}^2 = -p_M^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Quindi

$$\begin{aligned} d^4x &= -id^4x_E \\ d^4p &= id^4p_E \end{aligned} \quad (2.13)$$

Supponendo di avere una trasformata di Fourier $\tilde{f}(p^2)$ dipendente solo dal quadrato del quadrimomento minkoskiano. La sua antitrasformata nello spazio euclideo sarà connessa a quella nello spazio minkowskiano da

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \tilde{f}(p^2) = i \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} e^{-i(p_4x_4 - \mathbf{p}_E \cdot \mathbf{x}_E)} \tilde{f}(-p_E^2) \\ &= i \int \frac{d^4p'_E}{(2\pi)^4} e^{-i(p'_4x_4 + \mathbf{p}_E \cdot \mathbf{x}_E)} \tilde{f}(-p'^2_E) = i \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} e^{-ip_Ex_E} \tilde{f}(-p_E^2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

In the second step we inverted the spatial momentum vector $\mathbf{p}'_E = -\mathbf{p}_E$, and subsequently renamed the integration variable back to p_E .

Capitolo 3

Metodo dell'integrale Funzionale in Teoria dei Campi

3.1 Funzionale Generatore e passaggio all'Euclideo

Vogliamo ora descrivere la dinamica. Avremo una teoria specifica: per le considerazioni che faremo basterà pensare ad una teoria classica la cui azione è

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right). \quad (3.1)$$

Le equazioni del moto si ottengono effettuando la variazione dell'azione

$$(\square + m^2) \varphi + \lambda \varphi^3 = 0. \quad (3.2)$$

Per passare alla teoria quantistica dovremmo far diventare le φ degli operatori, risolvere le equazioni del moto imponendo le regole di quantizzazione canonica. Questo è un problema molto complicato anche perché i campi sono distribuzioni a valori operatoriali: nell'equazione del moto appena ricavata viene richiesto di calcolare i campi nello stesso punto (quell'oggetto porterà dietro degli infiniti). Per il momento procediamo in maniera formale e di non esserci accorti dell'esistenza di questi problemi. Risolvere l'equazione del moto è qualcosa tuttavia che non siamo in grado di fare. Tuttavia non ci interessa dopotutto risolverla in quanto abbiamo bisogno di sapere soltanto i T-prodotti di un numero arbitrario di campi, perché in questi è concentrata tutta la fisica. Se c'è una dinamica che ci dà informazioni su questi T-prodotti siamo, quindi, a posto. Come sappiamo, è conveniente inglobare tutte le informazioni sulle funzioni di Green all'interno di un oggetto chiamato *funzionale generatore*

$$Z(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) | 0 \rangle J(x_1) \dots J(x_n) \quad (3.3)$$

Questo è uno sviluppo di Taylor in infinite variabili centrato intorno a $J = 0$

$$\left. \frac{\partial^n Z(J)}{\partial J(x_1) \dots \partial J(x_n)} \right|_{J=0} = i^n \langle 0 | T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) | 0 \rangle. \quad (3.4)$$

La conoscenza di questo funzionale equivale quindi alla conoscenza della dinamica della teoria. Naturalmente questo trucco di rappresentare le funzioni di Green mediante il funzionale generatore non può funzionare in egual modo, ad esempio, per le funzioni di Wightman. Questo perché il teorema di Schwartz sulla simmetria per scambio delle derivate multiple (che si estende anche al caso infinito dimensionale) ci dice che possiamo scambiare l'ordine delle derivate a piacimento, senza che il risultato cambi. Questo è consistente con le proprietà di simmetria per scambio del T-prodotto. Possiamo scrivere delle equazioni del moto per i T-prodotti (per semplicità prendiamoli a due punti) nel caso interagente

$$(\square_x + m^2) \langle 0 | T(\varphi(x) \varphi(y)) | 0 \rangle = -\lambda \langle 0 | T(\varphi^3(x) \varphi(y)) | 0 \rangle - i\hbar \delta^4(x - y) \quad (3.5)$$

Il primo termine a secondo membro viene dalle equazioni del moto, mentre il secondo è un termine libero (che viene fuori dalle derivate nel tempo delle θ , per il conto vedi bibbia MQR pag 21). In MQR avevamo risolto l'equazione in quanto il primo termine non c'era (era facile risolverla in quanto questa relazione ci diceva che il T-prodotto era una funzione di Green per l'operatore di Klein-Gordon); nel caso interagente (con interazione φ^4) la cosa non è più vera e il tutto è molto più complicato. Qui abbiamo infinite equazioni accoppiate: dovrà infatti conoscere anche l'espressione della funzione di Green a 4 punti e così via (queste sono l'analogo, nel Minkowskiano, delle equazioni di Dyson-Schwinger che ti ha spiegato Crisanti). L'integrale funzionale è una maniera di risolvere tutte queste equazioni accoppiate. Scrivo il funzionale generatore (e quindi la soluzione al nostro problema) in questo modo

$$Z(J) = \frac{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS(\varphi) + i \int d^4x J(x)\varphi(x)}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS(\varphi)}} = \frac{\mathcal{Z}(J)}{\mathcal{Z}(0)} \quad (3.6)$$

dove con $\mathcal{D}\varphi = \prod_x \mathcal{D}\varphi(x)$ è, formalmente, la misura; possiamo interpretare tutto ciò pensando in primo luogo ad una funzione a 4 variabili $\varphi(\mathbf{x}, t)$; facciamo con questa un path integral ovvero sommiamo su tutte le funzioni tra $t' = -\infty$ e $t = +\infty$ con valori al bordo fissati. Fin qui nulla di nuovo. Tuttavia in ogni punto dello spazio-tempo abbiamo un campo scalare (funzione a 4 variabili): quello che si fa è quindi effettuare un path integral *per ogni* punto dello spazio-tempo. La produttoria è quindi formalmente una produttoria continua. In altre parole abbiamo un integrale funzionale per ogni punto dello spazio-tempo.

Per manipolare questo oggetto mi servirà qualche proprietà formale. L'unica cosa che richiedo è che valga l'integrazione per parti solita (il termine all'infinito si annulla). Vogliamo convincerci ora che l'integrazione per parti è equivalente ad una proprietà di questo integrale di essere invariante per traslazioni. Supponiamo di avere una funzione $f(x)$ che decade rapidamente all'infinito; avremo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) dx = 0, \quad (3.7)$$

da cui segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} (f(x)g(x)) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] = 0 \quad (3.8)$$

e quindi possiamo usare la formula di integrazione per parti solita. Quindi la condizione che l'integrale sia invariante per traslazioni mi garantisce che sia vera la formula di integrazione per parti solita (se la funzione decade rapidamente all'infinito). Quindi procedendo per analogia con i funzionali

$$\int \mathcal{D}\varphi F(\varphi) = \int \mathcal{D}\varphi F(\varphi + \varphi_0) = \int \mathcal{D}\varphi \frac{\partial F}{\partial \varphi(x)}(\varphi) = 0 \quad (3.9)$$

con φ_0 funzione arbitraria fissata. Questo implica che possiamo effettuare l'integrazione per parti. Una equazione sicuramente soddisfatta per una Z che ha questa forma è

$$\int \mathcal{D}\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(e^{iS(\varphi) + i \int d^4x j(x)\varphi(x)} \right) = 0 = i \int \mathcal{D}\varphi e^{iS(\varphi) + i \int d^4x j(x)\varphi(x)} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi(x)} + J(x) \right) \quad (3.10)$$

che, sviluppata, è

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{iS(\varphi) + i \int d^4x j(x)\varphi(x)} [(\square_x + m^2) \varphi(x) + \lambda \varphi^3(x) + J(x)] = 0. \quad (3.11)$$

Poiché l'operatore differenziale di Klein-Gordon agisce soltanto sulle x può essere portato fuori dall'integrale funzionale

$$(\square_x + m^2) \int \mathcal{D}\varphi e^{iS(\varphi) + i \int d^4x j(x)\varphi(x)} \varphi(x) = \frac{1}{i} (\square_x + m^2) \frac{\partial}{\partial J(x)} W(J). \quad (3.12)$$

Scrivendo anche gli altri termini in un modo analogo, troviamo l'equazione lineare nelle derivate funzionali del funzionale generatore

$$\frac{1}{i} (\square_x + m^2) \frac{\partial}{\partial J(x)} W(J) + \frac{\lambda}{i^3} \frac{\partial}{\partial J^3(x)} W(J) + J(x)W(J) = 0 \quad (3.13)$$

Ora deriviamo in $J(y)$ e poi poniamo $J = 0$

$$\frac{1}{i} (\square_x + m^2) \left. \frac{\partial^2 Z}{\partial J(x) \partial J(y)} \right|_{J=0} + \frac{\lambda}{i^3} \left. \frac{\partial^4 Z}{\partial J^3(x) \partial J(y)} \right|_{J=0} + \delta^4(x - y) Z(0) = 0 \quad (3.14)$$

Se sostituiamo l'espressione dei T-prodotti e osserviamo che $Z(0) = 1$ ovvero che il funzionale generatore sia normalizzato otteniamo l'equazione del moto (3.5) a cui devono soddisfare i T-prodotti. Naturalmente l'integrale funzionale con cui abbiamo a che fare a due principali difficoltà.

- Convergenza dell'integrale: l'integrando è un fattore di fase e quindi oscilla anche all'infinito;
- La misura: come abbiamo accennato in precedenza vi è, in primo luogo, un problema di definizione in quanto abbiamo infinite variabili che variano con continuità e devo integrarci sopra.

Nelle prossime sezioni cercheremo di risolvere questi due problemi.

3.1.1 Rotazione di Wick e passaggio all'Euclideo

Iniziamo con il primo. Consideriamo un esempio semplice: supponiamo di voler calcolare l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ix^2}$. Possiamo pensare di utilizzare la solita formula dell'integrazione gaussiana e di dare come risultato $\sqrt{\pi/i}$. Tuttavia la radice di un numero complesso ha due determinazioni, in questo caso $\sqrt{i} = \pm e^{i\pi/4}$. Il problema si risolve effettuando il solito (dovresti già saperlo dopo aver studiato il Greiner) prolungamento analitico. Si parte da una espressione che ha sicuramente senso ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (3.15)$$

con $a > 0$. Ora continuo analiticamente in campo complesso l'integrando ponendo $a \in \mathbb{C}$; questa funzione ha quindi un punto di diramazione di ordine 2 in $a = 0$. In altre parole quello che stiamo facendo è partire dall'asse reale e dare successivamente ad a una fase ϕ : $a = \rho e^{i\phi}$. Voglio ora determinare la radice di a in campo complesso: $\sqrt{a} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\phi}{2}}$, $\sqrt{\rho} e^{i\frac{\phi}{2}} e^{i\pi}$. Per capire quale dei due risultati mi interessa impongo che per $a \in \mathbb{R}$ e positivo ovvero per $\phi \rightarrow 0^+$ questa diventi la radice aritmetica di a . È quindi evidente che vogliamo $\sqrt{a} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\phi}{2}} \rightarrow \sqrt{\rho}$; quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \frac{1}{e^{\phi/2}}. \quad (3.16)$$

La fase ϕ ci permette di eseguire qualsiasi integrale. Quindi ad esempio l'integrale che avevamo scritto in precedenza $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ix^2} = \sqrt{\pi/e^{i\pi/4}}$. La continuazione analitica è quindi il modo giusto per definire bene questi integrali. Nel caso dei nostri integrali funzionali continuiamo analiticamente il tempo; effettueremo il *passaggio all'euclideo* passando a tempi immaginari puri (rotazione di Wick) ottenendo degli integrali funzionali ben definiti; successivamente effettueremo una rotazione di Wick al contrario per riottenere quello che ci interessa. Prendiamo una funzione di Green a due punti; supponiamo $x^0 > y^0$ e inseriamo una identità rispetto all'energia

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\varphi(x) \varphi(y)) | 0 \rangle &= \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle = \sum_n \langle 0 | \varphi(x) | E_n \rangle \langle E_n | \varphi(y) | 0 \rangle \\ &= \sum_n \langle 0 | e^{iHx^0} \varphi(\mathbf{x}, 0) e^{-iHx^0} | E_n \rangle \langle E_n | e^{iHy^0} \varphi(\mathbf{y}, 0) e^{-iHy^0} | 0 \rangle \\ &= \sum_n \langle 0 | \varphi(\mathbf{x}, 0) | E_n \rangle \langle E_n | \varphi(\mathbf{y}, 0) | 0 \rangle e^{-iE_n(x^0 - y^0)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nel caso $y^0 > x^0$, avrei ottenuto $e^{-iE_n(y^0 - x^0)}$ ovvero il termine tra parentesi tonde all'esponenziale sarebbe stato sempre positivo. Ora posso studiare il prolungamento analitico in campo complesso con la sostituzione $x^0 \rightarrow x^0 e^{i\theta}$ e $y^0 \rightarrow y^0 e^{i\theta}$

$$e^{-iE_n(x^0 - y^0)e^{i\theta}} = e^{-iE_n(x^0 - y^0) \cos \theta + E_n(x^0 - y^0) \sin \theta}. \quad (3.18)$$

Voglio che l'esponenziale reale sia decrescente all'infinito. Per questo motivo (poichè $E_n > 0$ per ogni n ricorda le ipotesi che abbiamo formulato per lo spettro di massa della nostra teoria) devo scegliere $\theta < 0$. Possiamo scegliere θ in modo arbitrario; perciò poniamo $\theta = -\pi/2$

$$\langle 0 | T(\varphi(x)\varphi(y)) | 0 \rangle = \sum_n \langle 0 | \varphi(\mathbf{x}, 0) | E_n \rangle \langle E_n | \varphi(\mathbf{y}, 0) | 0 \rangle e^{-E_n(x^0-y^0)}. \quad (3.19)$$

Vediamo come funziona questo trucco nella teoria libera, della quale sappiamo già tutto. Se usassi per il T-prodotto

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\Phi(x)\Phi(y)) | 0 \rangle &= \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \Phi(x)\Phi(y) | 0 \rangle + \Theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \Phi(y)\Phi(x) | 0 \rangle \\ &= \Theta(x^0 - y^0) \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} + \Theta(y^0 - x^0) \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

tutto andrebbe bene nella continuazione analitica e potrei procedere analogamente a prima con la sostituzione $x^0 \rightarrow x^0 e^{i\theta}$ e $y^0 \rightarrow y^0 e^{i\theta}$. Possiamo però fare anche in un altro modo attraverso

$$\Delta_F(x-y) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2 - m^2} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{q} e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int_{\mathcal{C}} dq^0 \frac{e^{iq^0(x^0-y^0)}}{q^2 - m^2}, \quad (3.21)$$

in cui, differentemente da prima q^0 va da $-\infty$ a $+\infty$. Tuttavia in questo caso se facessi la sostituzione $e^{iq^0(x^0-y^0)} \rightarrow e^{iq^0(x^0-y^0)e^{i\theta}}$ avrei un problema in quanto $e^{i\theta}$ dà contributo alla parte oscillante con un $\cos \theta$ e alla parte reale con un $i \sin \theta$ che dà origine ad un termine $e^{-q^0(x^0-y^0)}$ che esplode a $q^0 \rightarrow -\infty$. Questo accade indipendentemente dal segno che diamo all'angolo θ . Tutto ciò sembrerebbe essere in contrasto con quanto visto prima. Ci siamo scordati, tuttavia che quando ruoto l'asse inserendo un θ , devo anche cambiare cammino di integrazione \mathcal{C} in uno, che chiameremo \mathcal{C}_θ , che lasci invariato l'esponenziale (e mantenga quindi il suo argomento immaginario puro). In poche parole dovrò integrare il q^0 su un cammino \mathcal{C}_θ che ha come fase $e^{-i\theta}$ che compensa quella opposta di x^0 . Se fosse $\theta > 0$ il giochino non sarebbe possibile in quanto il cammino potrebbe intersecare i due poli situati in $p^0 = \pm i\omega_{\mathbf{p}}$ sull'asse reale. Se $\theta < 0$, invece, i poli non li posso mai incontrare e tutto va bene. Ricordando la (2.14), abbiamo immediatamente che il propagatore nell'eulideo avrà la forma

$$i\Delta_F(x-y) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{ip(x-y)}}{p^2 - m^2} = \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_E(x-y)_E}}{p_E^2 + m^2}. \quad (3.22)$$

Mentre nel Minkowskiano avevamo 4 funzioni di Green (T-prodotto, anti T-prodotto, propagatore ritardato e avanzato), nell'eulideo ne abbiamo una sola che rappresenta il prolungamento analitico del T-prodotto. Naturalmente quando siamo nell'eulideo il propagatore è diverso, quindi non possiamo interpretare i diagrammi di Feynman come scattering di particelle. Il funzionale generatore eulideo si scriverà in questo modo

$$Z_E(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle J(x_1) \dots J(x_n), \quad (3.23)$$

dove $\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle$ è la funzione di Green ad n punti nell'eulideo. Analogamente a prima abbiamo

$$\left. \frac{\partial^n Z_E(J)}{\partial J(x_1) \dots \partial J(x_n)} \right|_{J=0} = \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle. \quad (3.24)$$

Poichè $x_E^0 = ix_M^0$ e quindi $\frac{\partial}{\partial x_M^0} = i \frac{\partial}{\partial x_E^0}$ abbiamo che la lagrangiana si trasforma nel seguente modo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \\ \mathcal{L}_E &= - \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right] = - \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

bastava ricordarsi che, a meno di un segno meno, il prodotto scalare diventa, per l'appunto, euclideo. Abbiamo ottenuto

$$\begin{cases} Z_M(J) = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right) + i \int d^4x J(x) \varphi(x) \right\}}{\int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right) \right\}} \\ Z_E(J) = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right) + \int d^4x J(x) \varphi(x) \right\}}{\int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right) \right\}}. \end{cases} \quad (3.26)$$

In modo più compatto (eliminando il fastidioso segno meno alla lagrangiana)

$$\begin{cases} Z_M(J) = \frac{\int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_M(x) + J(x)\varphi(x))}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x \mathcal{L}_M(x)}} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi e^{i S_M(\varphi) + i \int d^4x J(x)\varphi(x)}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{i S_M(\varphi)}} = \frac{\mathcal{Z}_M(J)}{\mathcal{Z}_M(0)} \\ Z_E(J) = \frac{\int \mathcal{D}\varphi e^{- \int d^4x (\mathcal{L}_E(x) - J(x)\varphi(x))}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{- \int d^4x \mathcal{L}_E(x)}} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi e^{-S_E(\varphi) + \int d^4x J(x)\varphi(x)}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{-S_E(\varphi)}} = \frac{\mathcal{Z}_E(J)}{\mathcal{Z}_E(0)}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Anche se ancora non sappiamo perfettamente con che oggetto abbiamo a che fare abbiamo guadagnato in tutto questo discorso una migliore convergenza (l'integrandi è un esponenziale reale decrescente all'infinito). Da questa formula capiamo anche che $\lambda > 0$ (cosa non chiara nel caso del funzionale generatore minkowskiano). Questa informazione poteva essere guadagnata anche esaminando l'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \int dx \left(\dot{\Phi}^2 - |\nabla \Phi|^2 + m^2 \Phi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right) \quad (3.28)$$

dove se $\lambda < 0$ non avremmo un'estremo inferiore all'energia. Questa cosa apparentemente banale ci dice una cosa molto interessante. Infatti ci fa capire che la serie perturbativa di Z_E in λ è sicuramente divergente. Questo perché la Z_E non è una funzione analitica intorno a $\lambda = 0$. Infatti se lo fosse avrebbe un raggio di convergenza intorno a $\lambda = 0$, all'interno del quale la serie sarebbe sempre convergente: i $\lambda > 0$ o $\lambda < 0$ sarebbero sempre all'interno della palla dove la serie è convergente. Ma abbiamo appena visto che quanto $\lambda < 0$ l'integrale è sicuramente divergente. Quindi concludiamo che la W_E come funzione di λ ha una *singolarità essenziale* in $\lambda = 0$. Pertanto la serie perturbativa è sicuramente divergente, poi si discuterà sulla natura di queste divergenze. Perchè funziona bene, però, numericamente? Perchè il meglio che può capitare (ma nessuno lo ha ancora dimostrato) è che la serie sia asintotica. Queste sono serie che possono anche essere divergenti; tuttavia per un ordine di espansione alto abbiamo una buona precisione.

3.1.2 Discretizzazione, cut-off e limite del continuo

Cerchiamo ora di chiarire il secondo problema. Interpretiamo questi integrali infinito dimensionali come il limite di integrali finito dimensionali. Come abbiamo detto in precedenza abbiamo un integrale per ogni punto dello spazio tempo. Pertanto discretizziamo lo spazio-tempo in un ipercubo (per semplicità: uno in generale vuole che il limite al continuo sia indipendente dal reticolo scelto, ma nessuno è ancora stato in grado di dimostrarlo!). Abbiamo quindi a che fare con un reticolo di passo reticolare a e scriviamo tutti i punti del reticolo prendendo una quadrupla di numeri interi positivi e non nulli $x_n = a(n_1, \dots, n_4)$. I campi diventeranno $\varphi(x) \rightarrow \varphi(n)$ e quindi la misura diventerà $\mathcal{D}\varphi \rightarrow \prod_n d\varphi(n)$. La situazione è migliorata in quanto le variabili di integrazione anzichè essere continue ora sono discrete. Tuttavia sono sempre infinite. Quello che posso fare quindi è inserire lo spazio-tempo in una scatola quadridimensionale di volume V . Ora ho un numero finito di punti e l'integrale è finito dimensionale. Quello che dovrò fare dopo è mandare $a \rightarrow 0$ e $V \rightarrow \infty$ e mi dovrò preoccupare anche quale sia l'ordine giusto dei limiti (non commuteranno sicuramente).

Ora $\prod_n d\varphi(n)$ è effettivamente diventata una misura (Lebesgue, Riemann..). Il numeratore del funzionale generatore assume quindi la forma

$$\mathcal{Z}(J) = \int \prod_{n \in V} d\varphi(x_n) \exp \left\{ - \sum_{n \in V} a^4 \left[\frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + \frac{m^2}{2} \varphi^2(x_n) + \frac{\lambda}{4} \varphi^4(x_n) + J(x_n) \varphi(x_n) \right] \right\}, \quad (3.29)$$

dove $\nabla \varphi(x_n) = \frac{\varphi(x_n + \hat{\mu}) - \varphi(x_n)}{a}$. Notare che le discretizzazioni della derivata sono infinite; tuttavia ci aspettiamo che la fisica sia indipendente dalla discretizzazione adottata. Questo integrale esiste ed è finito. Una volta che ho calcolato questo integrale, mi dovrò preoccupare di eliminare a e V attraverso

$$\begin{cases} a \rightarrow 0 & \text{limite ultravioletto} \\ V \rightarrow \infty & \text{limite infrarosso} \end{cases} \quad (3.30)$$

a rappresenta una distanza microscopica (che potrebbe anche esserci); tuttavia immaginiamo sempre di esplorare il mondo a distanze $\xi \gg a$ e quindi tutto ci sembra continuo (nella nostra teoria supponiamo che vi sia un disaccoppiamento delle scale, cosa che è correlato con la rinormalizzabilità della mia teoria). La presenza di a può essere vista come un cut-off ultravioletto; se infatti la variabile spaziale x è discretizzata di passo a , la sua trasformata di Fourier p sarà definita in un campatto $-\pi/a \leq p \leq \pi/a$. Intuitivamente la teoria deve essere prima definita su un continuo e *poi* su un volume infinito (in meccanica statistica andrebbe bene anche fare prima il limite di volume infinito in quanto la teoria microscopica è effettivamente definita su un reticolo). Quindi *prima* effettuerò il limite ultravioletto e in seguito quello infrarosso. Quando andiamo a fare un esperimento in laboratorio e abbiamo delle divergenze infrarosse, queste possono essere regolarizzate dal volume finito del laboratorio in cui l'esperimento è in atto. L'integrale discretizzato è ovviamente complicato da calcolare analiticamente, tuttavia possiamo utilizzare l'analisi numerica al computer; il problema principale risiede nelle dimensioni elevate di questi integrali (cosa che si può risolvere, ovviamente, con un Montecarlo).

3.2 Teoria Libera nel formalismo Funzionale

Nel caso della teoria libera il funzionale generatore (nel caso euclideo) assume la forma

$$Z_0(J) = \frac{\int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi^2) + \int d^4x J(x) \Phi(x) \right\}}{\int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi^2) \right\}} \quad (3.31)$$

Ricordiamo che il denominatore di questa espressione è chiamato $\mathcal{Z}(0)$ (e sottointenderemo tutti i calcoli che faremo a numeratore anche a denominatore). Scritto così ovviamente l'oggetto è formale quindi dovrò discretizzarlo. Vediamo per esempio un vero integrale finito dimensionale Gaussiano

$$Z_0(J) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^n x e^{-\frac{1}{2} x A x + J x} \quad (3.32)$$

dove $x A x \equiv x_i A_{ij} x_j$ e $J x \equiv J_i x_i$. A è una matrice reale simmetrica (se non lo fosse comunque la sua parte antisimmetrica non conterebbe); A ovviamente può essere diagonalizzata e i suoi autovalori λ sono reali (la matrice è hermitiana) e strettamente maggiori di zero: $\lambda_i > 0$. Questo assicura la convergenza dell'integrale. Con queste poche informazioni siamo in grado di calcolarci tutte le funzioni di correlazione ovvero tutti i momenti di questa distribuzione di probabilità che sono l'analogo delle funzioni di Green nella teoria dei campi. Vediamo ora come si eseguono questo tipo di integrali. O si usa la formula nota per gli integrali Gaussiani

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^n x e^{-\frac{1}{2} x A x + J x} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{(\det A^{-1})^{1/2}} e^{\frac{1}{2} J A^{-1} J} \quad (3.33)$$

da cui

$$Z_0(J) = e^{\frac{1}{2} J A^{-1} J}, \quad (3.34)$$

oppure si fanno i seguenti calcoli. Iniziamo trovando il minimo dell'esponente dell'esponenziale

$$-A\bar{x} + J = 0 \implies \bar{x} = A^{-1}J \quad (3.35)$$

La matrice inversa di A esiste in quanto gli autovalori sono tutti positivi (e quindi $\det A \neq 0$). Ora scriviamo $x = \bar{x} + \xi$ (nota che \bar{x} dipende da J e l'integrale è invariante per traslazioni). Sostituendo otteniamo

$$Z_0(J) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^n \xi e^{-\frac{1}{2}(\bar{x}+\xi)A(\bar{x}+\xi)+J(\bar{x}+\xi)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\bar{x}A\bar{x}+J\bar{x}}}{\mathcal{Z}} \int d^n \xi e^{-\frac{1}{2}\xi A\xi}. \quad (3.36)$$

L'espansione intorno al minimo ci fa perdere i termini lineari (verifichiamolo usando la simmetria della matrice A : $-\frac{1}{2}\bar{x}A\xi - \frac{1}{2}\xi A\bar{x} + J\xi = -\xi A\bar{x} + \xi J = 0$). Ora notiamo che l'integrale nella (3.36) va a cancellarsi con il denominatore \mathcal{Z} che non contiene termini in J ; otteniamo così

$$Z_0(J) = e^{-\frac{1}{2}\bar{x}A\bar{x}+J\bar{x}} = \exp \left\{ -\frac{1}{2}JA^{-1}AA^{-1}J + JA^{-1}J \right\} = e^{\frac{1}{2}JA^{-1}J} = e^{\frac{1}{2}J\bar{x}}. \quad (3.37)$$

Questa procedura vale per un numero arbitrario di dimensioni, a limite infinito (anche se l'integrale va regolarizzato; nel caso del campo libero tuttavia non ci sono problemi). Procediamo formalmente come per il caso finito dimensionale andando a cercare l'estremo dell'esponente. Questo si traduce, nel caso infinito dimensionale nell'effettuare la variazione del campo Φ

$$-\int d^4x (\partial_\mu \Phi \partial_\mu \delta\Phi + m^2 \Phi \delta\Phi) + \int d^4x J \delta\Phi = \int d^4x (\Delta\Phi - m^2\Phi + J) \delta\Phi = 0 \quad (3.38)$$

dove abbiamo utilizzato una integrazione per parti e dove $\Delta = \partial_\mu \partial_\mu$ è il laplaciano quadridimensionale (è l'analogo del D'Alambertiano nel caso minkowskiano). Il punto di stazionarietà $\bar{\Phi}(x)$ dovrà soddisfare l'equazione

$$(\Delta_x - m^2) \bar{\Phi}(x) + J(x) = 0. \quad (3.39)$$

La soluzione di questo problema si riduce alla ricerca di una funzione di Green (l'inverso dell'operatore differenziale) tale che

$$(\Delta_x - m^2) G(x-y) = -\delta^4(x-y) \quad (3.40)$$

in quanto la soluzione $\bar{\Phi}(x)$ si scrive in questo modo

$$\bar{\Phi}(x) = \int d^4y G(x-y) J(y). \quad (3.41)$$

Notare che nell'integrale generale non ho inserito la soluzione dell'omogenea associata (cosa che avrei dovuto invece inserire nel caso minkowskiano in cui avrei avuto l'operatore differenziale $\square_x + m^2$: questa corrisponderebbe alla propagazione libera in un campo di Klein-Gordon di massa m). In generale una equazione alle derivate parziale lineare del secondo ordine

$$Lu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \text{termini di ordine inferiore} = 0 \quad (3.42)$$

può essere classificata come *parabolica*, *iperbolica* e *ellittica*. La classificazione dipende dalla segnatura degli autovalori della matrice a_{ij}

- Ellittica: tutti gli autovalori sono o tutti positivi o tutti negativi;
- Parabolica: gli autovalori sono tutti positivi o tutti negativi eccetto uno che è pari a zero;
- Iperbolica: Esiste uno autovalore negativo e gli altri sono positivi, oppure vi è solo un autovalore positivo e gli altri sono negativi.

Da questo evinciamo che

$$\begin{aligned} \text{Minkowskiano: } & (\square_x + m^2) \rightarrow \text{Iperbolica} \\ \text{Euclideo: } & (\Delta_x - m^2) \rightarrow \text{Ellittica}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Il problema che era iperbolico nel minkowskiano (e che quindi ammette soluzioni di onde che si propagano) è diventato ellittico nell'europeo (ha esattamente la stessa forma dei problemi dell'elettrostatica). Se andiamo a cercare in un problema ellittico la soluzione omogenea, questa sarà soltanto quella banale identicamente nulla (non ha soluzione). Infatti se il termine di massa fosse zero avremmo come soluzione una funzione armonica in 4 variabili in tutto lo spazio; queste possono al più lineari in x ; se aggiungiamo il constraint che all'infinito si comportano bene le riduciamo a costanti in tutto lo spazio. In questo caso con il termine di massa sia le costanti che le funzioni che crescono in x non sono più soluzioni di questa equazione. In generale esiste una regola analoga a quella di Cramer per i sistemi lineari: se il determinante dei coefficienti è diverso da 0 (ovvero esiste l'operatore inverso, la funzione di Green), allora la soluzione del problema è unica; se viceversa non esiste l'inverso vuol dire che la soluzione generale sarà una soluzione particolare del sistema più la soluzione generale dell'omogenea che è non banale. Tutti i problemi lineari hanno questa struttura. La funzione di Green che andremo a trovare avrà la stessa forma del propagatore euclideo trovato in precedenza semplicemente da quello minkowskiano applicando le regole del cap 2. Trasformando in Fourier abbiamo

$$(\Delta_x - m^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) e^{-ip(x-y)} = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) [p^2 + m^2] e^{-ip(x-y)} = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}$$

da cui

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad (3.44)$$

e

$$G(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 + m^2} \implies \bar{\Phi}(x) = \int d^4 y G(x-y) J(y). \quad (3.45)$$

Notare che le funzioni di Green libere sono invarianti per scambio dei vertici (sono pari) in quanto anche la sua trasformata è pari (se si scambiano x e y si può fare il cambio di variabile $p' = -p$). Ora cambio variabile $\Phi(x) = \bar{\Phi}(x) + \xi(x)$ ottenendo

$$\begin{aligned} Z_0(J) &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\frac{1}{2} \int d^4 x [\partial_\mu (\bar{\Phi} + \xi) \partial^\mu (\bar{\Phi} + \xi) + m^2 (\bar{\Phi} + \xi)^2] + \int d^4 x J(x) (\bar{\Phi} + \xi)} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2} \int d^4 x [\partial_\mu \bar{\Phi} \partial_\mu \bar{\Phi} + m^2 \bar{\Phi}^2] + \int d^4 x J \bar{\Phi}}}{\mathcal{Z}} \int d^n \xi e^{-\frac{1}{2} \int d^4 x (\partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + m^2 \xi^2)} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4 x \bar{\Phi} [\Delta_x - m^2] \bar{\Phi} + \int d^4 x J \bar{\Phi} \right\}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Grazie alla (3.39) otteniamo

$$Z_0(J) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4 x J(x) \bar{\Phi}(x) \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) G_0(x-y) J(y) \right\}. \quad (3.47)$$

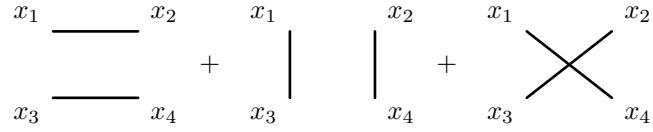
Questo è l'integrale funzionale euclideo della teoria libera. Le funzioni di Green si ottengono derivando il funzionale generatore. Ad esempio la funzione di Green a due punti è

$$\frac{1}{\mathcal{Z}_0(0)} \frac{\partial^2 \mathcal{Z}_0(J)}{\partial J(x) \partial J(y)} \Big|_{J=0} = G(x-y). \quad (3.48)$$

Più in generale in questa teoria otteniamo per le funzioni di Green a 2 punti

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle_0 &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0(0)} \frac{\partial^n \mathcal{Z}_0(J)}{\partial J(x_1) \dots \partial J(x_n)} \Big|_{J=0} = 0, \quad \text{se } n \text{ è dispari} \\ \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle_0 &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0(0)} \frac{\partial^n \mathcal{Z}_0(J)}{\partial J(x_1) \dots \partial J(x_n)} \Big|_{J=0} \rightarrow \text{Teorema di Wick}, \quad \text{se } n \text{ è pari}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Notare che se n è pari la funzione ad n punti sarà costituita da $(n - 1)!!$ termini. Questo perchè il primo vertice va accoppiato con i restanti $n - 1$, il secondo vertice può essere accoppiato con i restanti $n - 3$ e così via. Possiamo ovviamente dare a tutto ciò una rappresentazione grafica. Ad esempio nel caso di $n = 2$ abbiamo



Capitolo 4

Rinormalizzazione

4.1 Idea di Base

In questo capitolo dobbiamo capire che cosa dobbiamo fare con tutto questo formalismo che abbiamo costruito. In generale vogliamo calcolarci il funzionale generatore completo di una teoria interagente, ad esempio la teoria $\lambda\varphi^4$

$$Z(J) = \frac{\mathcal{Z}(J)}{\mathcal{Z}(0)} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4 \right) + \int d^4x J(x) \varphi(x) \right\}}{\int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4 \right) \right\}} \quad (4.1)$$

dove m_0 è un parametro contenuto all'interno della Lagrangiana (visto che non abbiamo il campo libero non può essere la massa fisica della particella) e g_0 è la costante di accoppiamento. Abbiamo una teoria che dipende da due parametri m_0 e g_0 (i quali non hanno per ora un significato fisico diretto); se qualcuno mi dà questi parametri in qualche modo siamo in grado di calcolarci qualcosa. Una volta passati all'euclideo abbiamo regolarizzato l'integrale funzionale ponendo il nostro sistema in un reticolo di passo reticolare a e all'interno di un volume finito V . È chiaro che se ci fosse un passo reticolare nello spazio-tempo molto più piccolo della risoluzione sperimentale potrei dire che la mia teoria vive su un reticolo e non accorgermene, però, a livello sperimentale. Posso quindi immaginare come dicevamo in precedenza, di aver un *cut-off ultravioletto* a o, se preferiamo un *cut-off* in *energia* $\Lambda = 1/a$ ovvero faccio esperimenti con energie e impulsi E , $p \ll \Lambda$ ($l \gg a$). Ci conviene lavorare a cut-off fissato sopra del quale non possiamo andare. In questo caso l'integrale è finito e quindi posso calcolarmi tutte le mie grandezze fisiche (misurate sperimentalmente) in termini dei parametri m_0 , g_0 con Λ fissato. Visto che ho due parametri, posso quindi aggiustare due grandezze fisiche Φ_1 e Φ_2

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_1(m_0, g_0; \Lambda) \\ \Phi_2 = \Phi_2(m_0, g_0; \Lambda) . \end{cases} \quad (4.2)$$

Fatto questo, se la teoria è buona, tutto è predetto: ovvero posso calcolarmi una grandezza fisica qualsiasi Φ_3 in funzione delle precedenti due. Infatti le precedenti relazioni possono essere invertite

$$\begin{cases} m_0 = m_0(\Phi_1, \Phi_2; \Lambda) \\ g_0 = g_0(\Phi_1, \Phi_2; \Lambda) . \end{cases} \quad (4.3)$$

in modo tale da avere

$$\Phi_3 = \Phi_3(\Phi_1, \Phi_2; \Lambda) . \quad (4.4)$$

Queste predizioni immagino che siano buone, se esse stesse riguardano esperimenti che coinvolgono scale di energie molto minori del cut-off Λ . Se il cut-off mi dà fastidio posso aumentare la scala di energia aumentando Λ . Le grandezze fisiche ovviamente *non cambiano* quando aumentiamo Λ . Quello che cambierà sarà il valore dei due parametri m_0 e g_0 come si può vedere facilmente dalle equazioni (4.3). Ora voglio vedere se per $\Lambda \rightarrow \infty$, Φ_3 ha un limite per Φ_1 e Φ_2 fissati; non mi interessa fissare m_0 e g_0 ! Questi nel limite possono andare tranquillamente ad infinito; nel caso in cui m_0 e g_0 hanno un limite avrò una teoria

che descrive la fisica per tutte le scale di energie; in caso contrario la teoria avrà validità solo entro un certo range di energie o risoluzioni spaziali (un esempio ne è la QED per la quale tuttavia la scala di energia è molto elevata). Comunque sia il limite che mi interessa è quello per cui vogliamo rendere Λ il più grande possibile (eventualmente infinito) tenendo fisso un numero di quantità fisiche pari al numero di parametri che compaiono all'interno della Lagrangiana. Quando Φ_3 ha un limite per $\Lambda \rightarrow \infty$ siamo in presenza di una teoria *rinormalizzabile* (o perturbativa o non, anche se non sappiamo quasi fare nessuna considerazione non perturbativa). Questa è l'essenza della rinormalizzazione.

Le teorie rinormalizzabili hanno “un qualcosa in più”. Come abbiamo detto, se idealmente conoscessi la teoria di tutti gli operatori locali da costruire tramite questo schema (con il limite di $\Lambda \rightarrow \infty$ già eseguito) potrei esprimere le mie grandezze fisiche in termini delle funzioni di Green (lo spettro di massa dalla funzione di Green a due punti, e le ampiezze di scattering tramite le formule di riduzione). Tuttavia le funzioni di Green non sono direttamente osservabili, quindi in generale è possibile che le funzioni di Green $\langle 0 | T(\Phi(x_1) \dots \Phi(x_n)) | \Phi_1, \Phi_2; \Lambda \rangle$ non esistano per $\Lambda \rightarrow \infty$. Vedremo che nelle teorie rinormalizzabili, non soltanto le relazioni tra le quantità fisiche sono finite, ma posso riscalare tutti i campi dello stesso genere all'interno delle funzioni di Green (nei casi esaminati abbiamo avuto sempre un campo) con una costante $c(\Phi_1, \Phi_2; \Lambda)$ in modo tale che per $\Lambda \rightarrow \infty$ anche le funzioni di Green riscalate hanno un limite finito. Per far questo dovremo quindi rinormalizzare i campi.

4.2 Espansione Perturbativa

La teoria delle perturbazioni è uno strumento analitico essenziale (uno dei pochi) in grado di studiare la teoria interagente. Come accennato in precedenza dalla teoria delle perturbazioni vengono fuori degli infiniti: questi si originano dal fatto che i campi sono distribuzioni a valori operatoriali e dal fatto che per scrivere una azione (che è locale per motivi relativistici) dobbiamo fare i prodotti dei campi nello stesso punto. Vi è quindi un problema indotto dalla richiesta di località e dal prodotto degli operatori nello stesso punto. Se la teoria è rinormalizzabile è possibile “eliminare” questi infiniti attraverso la procedura di rinormalizzazione. Immaginiamo di avere introdotto un cut-off in qualche maniera, ovvero di avere *regolarizzato* la nostra teoria (vi sono molti modi di farlo). La teoria diventa finita: questo ovviamente introduce degli aspetti non fisici in quanto la rappresentazione di Kallen-Lehmann ci dice che la teoria in interazione non può mai essere meno singolare di quella libera. Poichè sappiamo risolvere la teoria con $g_0 = 0$ possiamo fare lo sviluppo per g_0 sufficientemente piccolo del numeratore del funzionale generatore

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(J) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{g_0}{4!} \right)^n \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + m_0^2 \varphi^2) + \int d^4x J(x) \varphi(x)} \left(\int d^4x \varphi^4(x) \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{g_0}{4!} \right)^n \int d^4x_1 \dots d^4x_n \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_0(\varphi) + \int d^4x J(x) \varphi(x)} \varphi^4(x_1) \dots \varphi^4(x_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{g_0}{4!} \right)^n \int d^4x_1 \dots d^4x_n \frac{\partial}{\partial J^4(x_1)} \dots \frac{\partial}{\partial J^4(x_n)} Z_0(J) = \left[e^{-g_0/4! \int d^4x \partial/\partial J^4(x)} \right] Z_0(J) \end{aligned} \quad (4.5)$$

dove con $S_0(\varphi)$ si è indicata l'azione del campo libero. Il funzionale generatore quindi sarà

$$Z(J) = \frac{\mathcal{Z}(J)}{\mathcal{Z}(0)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{g_0}{4!} \right)^n \int d^4x_1 \dots d^4x_n \frac{\partial}{\partial J^4(x_1)} \dots \frac{\partial}{\partial J^4(x_n)} Z_0(J)}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{g_0}{4!} \right)^n \int d^4x_1 \dots d^4x_n \frac{\partial}{\partial J^4(x_1)} \dots \frac{\partial}{\partial J^4(x_n)} Z_0(J)} \Big|_{J=0}. \quad (4.6)$$

Quella che si è ottenuta è esattamente la formula di Dyson (nell'europeo): infatti il termine

$$\frac{\partial}{\partial J^4(x_1)} \dots \frac{\partial}{\partial J^4(x_n)} Z_0(J)$$

rappresenta il valore medio nel vuoto del T-prodotto di tante Hamiltoniane di interazione di tipo φ^4 . Ad MQR avevamo faticato per ottenere questa formula nello schema di interazione; qui invece, viene immediata.

Notare anche come nella seconda riga di calcolo emerga una trasformata di Laplace. Questa espressione è facilmente rappresentabile attraverso i diagrammi di Feynman. Ora che abbiamo l'espressione completa del funzionale generatore in funzione di derivate delle Z_0 Gaussiane possiamo derivare nuovamente n volte e trovare le funzioni di Green eucleede ad n punti

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle &= \frac{1}{Z(0)} \frac{\partial^n Z(J)}{\partial J(x_1) \dots \partial J(x_n)} \Big|_{J=0} \\
&= \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4 \right) \right\} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)}{\int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4 \right) \right\}} \\
&= \frac{1}{Z(0)} \frac{\partial}{\partial J(x_1)} \dots \frac{\partial}{\partial J(x_n)} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4 \right) + \int d^4x J(x) \varphi(x) \right\} \Big|_{J=0} \\
&= \frac{1}{Z(0)} \frac{\partial}{\partial J(x_1)} \dots \frac{\partial}{\partial J(x_n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{g_0}{4!} \right)^k \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_0(\varphi) + \int d^4x J(x) \varphi(x)} \left(\int d^4y \varphi^4(y) \right)^k \Big|_{J=0} \\
&= \frac{1}{Z(0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{g_0}{4!} \right)^k \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_0(\varphi)} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \left(\int d^4y \varphi^4(y) \right)^k \\
&= \frac{Z_0(0)}{Z(0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{g_0}{4!} \right)^k \left\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \left(\int d^4y \varphi^4(y) \right)^k \right\rangle_0
\end{aligned}$$

e quindi otteniamo che

$$\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{g_0}{4!} \right)^k \left\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \left(\int d^4y \varphi^4(y) \right)^k \right\rangle_0}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{g_0}{4!} \right)^k \left\langle \left(\int d^4y \varphi^4(y) \right)^k \right\rangle_0}. \quad (4.7)$$

Limitandoci a $n = 2$ (funzione di correlazione a 2 punti) e al primo ordine perturbativo $k = 1$ abbiamo

$$\langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle = \frac{\langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle_0 - \frac{g_0}{4!} \int d^4y_1 \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi^4(y_1) \rangle_0}{1 - \frac{g_0}{4!} \int d^4y_1 \langle \varphi^4(y_1) \rangle_0}. \quad (4.8)$$

Diagrammaticamente abbiamo che i diagrammi vuoti-vuoto (non ha gambe esterne) sconnessi si eliminano con i diagrammi presenti nel denominatore

$$\frac{\text{---} + \text{---} + \text{---}}{1 + \text{---}} = \text{---} + \text{---}$$

Con

$$\text{---} = -\frac{g_0}{4!} 4 \cdot 3 \int d^4y_1 G(x_1 - y_1) G(y_1 - x_2) G_0(0) = -\frac{g_0}{2} \int d^4y_1 G(x_1 - y_1) G(y_1 - x_2) G(0).$$

Abbiamo un propagatore che si chiude su se stesso: $G_0(0)$. Questa quantità proprio perchè è il propagatore calcolato nello stesso punto genera un infinito quadraticamente divergente. Questo è normale che spunti fuori dal nostro calcolo, in quanto l'interazione è locale e per la natura singolare stessa dei campi (che, come abbiamo discusso sono distribuzioni a valori operatoriali). Quello che possiamo fare è *regolarizzare* la teoria. I modi di regolarizzare la teoria sono molteplici.

- quello che noi faremo è regolarizzare il propagatore euclideo

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{p^2 + m_0^2 + p^4/\Lambda^2 + p^6/\Lambda^4 + \dots}. \quad (4.9)$$

In questo modo ho introdotto il solito cut-off Λ in modo tale da avere termini tutti della stessa dimensione a denominatore e che per $\Lambda \rightarrow \infty$ vanno a 0 (riottenendo il vecchio propagatore). Possiamo aggiungere un numero arbitrario di potenze di p in modo tale da rendere convergente (per valori alti dell'impulso p) l'integrale: nel nostro caso $G(0)$ risulta essere convergente con l'aggiunta dei primi due termini (il primo non basta perché sarebbe logaritmicamente divergente). Chiamiamo $G_\Lambda(0)$ il termine divergente opportunamente regolarizzato in questo modo. Qualsiasi modifica che facciamo, che vada a 0 per $\Lambda \rightarrow \infty$ va bene. Per fare ciò tuttavia, devo trovare una teoria che mi dia questo come propagatore. Ciò non è difficile: la funzione di Green deve soddisfare

$$\left(\Delta_x - m_0^2 - \frac{\Delta_x^2}{\Lambda^2} + \frac{\Delta_x^3}{\Lambda^4}\right) G(x-y) = -\delta^4(x-y) \quad (4.10)$$

infatti

$$\left(\Delta_x - m_0^2 - \frac{\Delta_x^2}{\Lambda^2} + \frac{\Delta_x^3}{\Lambda^4}\right) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) e^{-ip(x-y)} = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) \left[p^2 + m_0^2 + \frac{p^4}{\Lambda^2} + \frac{p^6}{\Lambda^4}\right] e^{-ip(x-y)}$$

da cui otteniamo che la nuova Lagrangiana libera dovrà essere (in quanto l'integrale rimane Gaussiano)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0(0) &= \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4x \Phi \left[\Delta_x - m_0^2 - \frac{\Delta_x^2}{\Lambda^2} + \frac{\Delta_x^3}{\Lambda^4} \right] \Phi \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \left[\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + m_0^2 \varphi^2 + \frac{1}{\Lambda^2} (\Delta_x \Phi)^2 + \frac{1}{\Lambda^4} (\partial_\mu \Delta_x \Phi) (\partial^\mu \Delta_x \Phi) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Tuttavia come sappiamo già, la teoria con il cut-off è una teoria “malata” in quanto riduce il grado di singolarità di una teoria (cosa che è in contrasto con la rappresentazione di Kallen-Lehmann). Inoltre quando andiamo a vedere lo spettro di massa della nostra nuova teoria libera (poli della trasformata di Fourier del propagatore), avremo una decomposizione del tipo

$$\int d^4p \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 + m_0^2 + p^4/\Lambda^2 + p^6/\Lambda^4} \rightarrow \frac{R_1}{p^2 + m_1^2} + \frac{R_2}{p^2 + m_2^2} = 0. \quad (4.12)$$

Il secondo membro si annulla in quanto i termini p^4 e p^6 danno una convergenza migliore. Questa somma è uguale a zero solo se i due residui hanno uno un segno positivo e uno negativo (mentre nella rappresentazione di Kallen-Lehmann i poli avevano dei moduli quadri come residuo e che quindi erano sicuramente maggiori di 0). Quindi introducendo il cut-off Λ , abbiamo risolto il problema degli infiniti, ma abbiamo introdotto un altro problema: la teoria così com'è non è fisica. Come ci preoccupiamo di questi gradi di libertà non fisici? In teoria delle perturbazioni le teorie rinormalizzabili ammettono un limite per $\Lambda \rightarrow \infty$ quindi una volta rimosso il cut-off questo tipo di problema non c'è più. In teoria non perturbativa nessuno sa se esista questo oggetto.

- Vi sono mille altri modi di effettuare la regolarizzazione come ad esempio quella di Pauli-Villard e la regolarizzazione dimensionale (funziona molto bene per i calcoli ma si capisce molto poco quello che si sta facendo). Per questi tipi diversi di regolarizzazioni (la seconda delle quali dovresti conoscerla se hai studiato Parisi con la “rappresentazione di Schwinger”) vedi il Cap 8 di Kleinert.

4.3 Rinormalizzazione al primo ordine per la teoria $\lambda\varphi^4$

Vogliamo ora mandare $\Lambda \rightarrow \infty$. Vi è un teorema il quale dice che data una teoria rinormalizzabile è possibile renderla finita facendo il limite di cut-off infinito tenendo fissi non i parametri che sono dentro la lagrangiana ma tenendo fisse delle quantità fisiche oppure, siccome so che alla fine tutto dovrà essere finito, posso trovare un riscalamento dei campi c tale che, aggiustando opportunamente c , m_0 e g_0 posso rendere finita la teoria. Questo è un teorema difficile da dimostrare, ma relativamente facile da applicare. In altre parole non sono obbligato a calcolare quantità fisiche, al loro posto posso calcolare le funzioni di Green che voglio e so che tutte avranno un limite finito per $\Lambda \rightarrow \infty$. Impongo sulla funzione di Green *rinormalizzata* $c^2 \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle = \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_R$

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_R = c^2 \left(G(x-y) - \frac{g_0}{2} G_\Lambda(0) \int d^4x_1 G(x-x_1) G(y-x_1) \right) \quad (4.13)$$

opportune condizioni di finitezza indipendenti tante quante sono i parametri che sono obbligato ad introdurre c , m_0 e g_0 . Le condizioni di finitezza sono assolutamente arbitrarie: posso scegliermele in modo tale le cose siano più semplici. Una cosa che conviene sicuramente fare è lavorare nello spazio di Fourier (anche la trasformata di Fourier della funzione di Green rinormalizzata dovrà essere finita). Si può vedere immediatamente utilizzando il teorema di convoluzione che

$$\Delta_R(q^2) \equiv \text{FT} \{ \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_R \} = \int e^{iqx} \langle \varphi(x) \varphi(0) \rangle_R d^4x = c^2 \left[\frac{1}{q^2 + m_0^2} - \frac{g_0}{2} \frac{G_\Lambda(0)}{(q^2 + m_0^2)^2} \right]. \quad (4.14)$$

Se non ti fidi ti puoi fare i conti

$$\begin{aligned} \int d^4x_1 G(x-x_1) G(y-x_1) &= \int d^4x_1 \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq_1(x-x_1)}}{q_1^2 + m_0^2} \frac{e^{-iq_1(y-x_1)}}{q_2^2 + m_0^2} \\ &= \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{\delta^4(q_1+q_2) e^{-iq_1x} e^{-iq_2y}}{(q_1^2 + m_0^2)(q_2^2 + m_0^2)} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(x-y)}}{(q^2 + m_0^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Le condizioni di finitezza che posso imporre sono arbitrarie. Una idea che può venire per una prima condizione è quella di imporre una condizione di finitezza alla Δ_R in qualche punto, ad esempio $q^2 = 0$. Se la particella che stiamo descrivendo non è a massa nulla a $q^2 = 0$ questo oggetto sarà regolare (cioè finito: è una quantità in altre parole che non dipende dal cut-off). È la prima quantità che terrò fissa quando farò il limite $\Lambda \rightarrow \infty$. Il calcolo è più facile se si prende in considerazione il reciproco della trasformata di Fourier. Solitamente questa funzione viene chiamata nei libri simbolicamente come $\Gamma(q^2) = \Delta_R^{-1}(q^2)$ e con il nome di *azione effettiva o funzionale generatore dei vertici propri*. Una funzione di correlazione irriducibile ad una particella spogliata delle sue linee esterne è chiamata un *vertice proprio*. Si può vedere (vedi Le Bellac) che il funzionale generatore dei vertici propri $\Gamma(p^2)$ è la trasformata di Legendre del funzionale generatore delle funzioni di correlazioni connesse (energia libera!) $\ln(Z(j)/Z(0))$. Prendere una condizione di finitezza che riguardi la Δ_R^{-1} equivale quindi a limitarsi ai diagrammi irriducibili ad una particella (ricorda infatti che $\Gamma(q^2) = q^2 + m_0^2 - \Sigma(q^2)$ dove $\Sigma(q^2)$ è la *self energy*). Imponiamo quindi

$$\boxed{\Delta_R^{-1}(0) = M^2} \quad (4.16)$$

dove M è una quantità che ha le dimensioni di una massa; tuttavia non è la massa di nulla. Possiamo vederlo esprimendo esplicitamente usando la rappresentazione di Kallen-Lehmann per la $\Delta_R^{-1}(q^2)$ (ricordandoci di essere nell'euclideo)

$$\Delta_R(q^2) = \frac{Z_\varphi}{q^2 + m^2} + \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{\rho(\mu^2)}{q^2 + \mu^2} d\mu^2 \quad (4.17)$$

dove m è la massa fisica della particella. Da questa equazione ricaviamo

$$\Delta_R^{-1}(0) = \frac{1}{\frac{Z_\varphi}{m^2} + \int_{4m^2}^{+\infty} \frac{\rho(\mu^2)}{\mu^2} d\mu^2} = M^2 \quad (4.18)$$

questo M ovviamente non ha niente a che fare con la massa fisica m della particella. Se ρ fosse 0 e Z_φ fosse 1 allora $M = m$, ma in generale questo non è vero. Questo nuovo parametro M servirà però in generale a calcolarsi la massa fisica della particella. Al primo ordine in teoria delle perturbazioni abbiamo

$$\Delta_R^{-1}(0) = \frac{1}{c^2} \frac{q^2 + m_0^2}{1 - \frac{g_0}{2} \frac{G_\Lambda(0)}{q^2 + m_0^2}} = \frac{1}{c^2} (q^2 + m_0^2) \left(1 + \frac{g_0}{2} \frac{G_\Lambda(0)}{q^2 + m_0^2} \right) = \frac{1}{c^2} \left[q^2 + m_0^2 + \underbrace{\frac{g_0}{2} G_\Lambda(0)}_{-\Sigma(q^2)} \right]. \quad (4.19)$$

Notare che $G_\Lambda(0) = \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) = \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m_0^2}$. Ho ottenuto che, al primo ordine la prima condizione di finitezza equivale a dire che

$$\frac{1}{c^2} \left(m_0^2 + \frac{g_0}{2} G_\Lambda(0) \right) = M^2, \quad (4.20)$$

con M fissato quando $\Lambda \rightarrow \infty$. Ora mi servono altre due relazioni. Una di queste potrebbe essere trovata seguendo il seguente ragionamento: se $\Delta_R^{-1}(q^2)$ calcolata in $q^2 = 0$ è finito allora anche la sua derivata rispetto a q^2 (quantità adimensionale) calcolata a $q^2 = 0$ sarà finita. La nostra seconda condizione di finitezza sarà, pertanto

$$\left. \frac{d\Delta_R^{-1}(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0} = \alpha = 1.$$

(4.21)

Uno può pensare che fissando $\alpha = 1$ perdo un parametro. Tuttavia ciò non è vero. Infatti il campo φ è definito sempre a meno di una *costante moltiplicativa* qualsiasi: infatti nelle formule di riduzione che collegano le funzioni di Green con gli elementi di matrice S i campi sono sempre rinormalizzati ad 1 quando vanno a finire sul mass shell della particella (si vede in modo palese dalle formule di riduzione e dalla definizione della costante $\sqrt{Z_O}$: se riscaliamo un campo O per una costante c , anche la costante $\sqrt{Z_O}$ a denominatore delle formule di riduzione viene moltiplicata per c). Quello che voglio dire quindi è che la fisica (gli elementi di matrice S) rimane la stessa se le funzioni di Green sono modificate secondo

$$G_n(x_1, \dots, x_n) \rightarrow c^n G_n(x_1, \dots, x_n). \quad (4.22)$$

La costante c non è una quantità fisica, è una quantità che definisce il riscalamento dei campi, quindi per la finitezza sarà altrettanto buono riscalare i campi per $3c$ o per $c/\sqrt{\alpha}$: in altre parole posso usare questa libertà per dire che $\alpha = 1$. Da questa seconda condizione di finitezza otteniamo che

$$\frac{1}{c^2} = 1 \implies c = 1 \quad (4.23)$$

(in poche parole il discorso di prima vuol dire che posso regolare c in modo tale che $\frac{1}{c^2} = \alpha$). Da ciò segue immediatamente che

$$\left(m_0^2 + \frac{g_0}{2} G_\Lambda(0) \right) = M^2. \quad (4.24)$$

Non abbiamo ancora concluso il processo di rinormalizzazione perché abbiamo 3 costanti da aggiustare (c , m_0 e g_0), mentre abbiamo solo imposto due condizioni di finitezza. Tuttavia al primo ordine il calcolo della funzione di Green a due punti queste due condizioni sono state sufficienti per renderla finita. Infatti per le due condizioni precedenti abbiamo che

$$\Delta_R^{-1}(q^2) = q^2 + M^2. \quad (4.25)$$

Se torniamo nel Minkowskiano abbiamo quindi che M è la massa fisica della particella, ma è un accidente perchè questo non sarà vero al prossimo ordine, come avremo modo di vedere. Dobbiamo però trovare una terza condizione di finitezza perchè dovremo usarle a tutti gli ordini. Le condizioni in altre parole sono *universali* e sarebbero le stesse che io imporre in una teoria calcolata in forma non perturbativa (ad esempio numericamente). La prossima condizione che devo imporre è su g_0 .

La teoria φ^4 che abbiamo tra le mani ha una simmetria discreta del tipo $\varphi \rightarrow -\varphi$; da questo segue immediatamente che le funzioni di Green sono non nulle solo per un numero pari di campi (se applico la simmetria alle funzioni di Green queste devono rimanere invariate! nel caso di un numero di campi dispari l'unico modo per cui ciò accada è che si annullino identicamente). Pertanto dopo la funzione a due punti, posso analizzare la funzione a quattro punti. Limitandoci al primo ordine avrò i seguenti tipi di diagrammi

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \varphi(z) \varphi(w) \rangle = \text{---} + \text{---} + \text{---} \quad (4.26)$$

con, ovviamente, tutte le possibili permutazioni delle linee che connettono i vertici esterni (che non stiamo qui a contare). I diagrammi che contengono fluttuazioni del vuoto sono stati ovviamente eliminati perché vengono cancellati con i diagrammi del denominatore. I primi due diagrammi sono sconnessi; questo vuol dire che si fattorizzano nel prodotto di funzioni di Green a due punti

$$\text{---} + \text{---} = \text{---} [\text{---} + \text{---}] \quad (4.27)$$

Nelle condizioni di finitezza però è irrilevante inserire questi diagrammi in quanto quelli che sono presenti tra parentesi quadre rappresentano i contributi al primo ordine della funzione di Green a due punti. Questi sono già stati resi finiti in precedenza. Per fare il minor numero di calcoli possibili imporrà la terza condizione di finitezza sulla parte connessa (diagrammi non separabili in un prodotto di diagrammi di funzioni di Green a due punti) della funzione di Green a 4 punti. L'unico diagramma che conta quindi sarà

$$\text{---} = -g_0 \int d^4x_1 G(x - x_1) G(y - x_1) G(z - x_1) G(w - x_1) \quad (4.28)$$

Ora possiamo farne la trasformata di Fourier ottenendo

$$\text{---} = -g_0 \frac{1}{p_1^2 + m_0^2} \frac{1}{p_2^2 + m_0^2} \frac{1}{p_3^2 + m_0^2} \frac{1}{p_4^2 + m_0^2} \quad (4.29)$$

avendo fissato $p_4 = -p_1 - p_2 - p_3$ tramite la $\delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$ che rappresenta la conservazione del quadriimpulso e che deriva dall'integrazione sul vertice interno x_1 . Ora, se la funzione a 4 punti connessa è finita, lo sarà anche la funzione connessa moltiplicata per l'inverso dei propagatori esterni. In altre parole prendo la funzione di Green a 4 punti, la trasformo in Fourier e rinormalizzo i campi (ovvero $\Delta_4(p_1, \dots, p_4) \rightarrow c^4 \Delta_4(p_1, \dots, p_4)$). Questa quantità, per il teorema della rinormalizzabilità deve essere finita. Ora se divido questa quantità per il prodotto dei 4 propagatori rinormalizzati a due punti (quantità finita) devo ottenere sempre una quantità finita

$$\boxed{\Gamma_{4,R}(0) = \left. \frac{\Delta_{4,R}(p_1, \dots, p_4)}{\Delta_R(p_1^2) \Delta_R(p_2^2) \Delta_R(p_3^2) \Delta_R(p_4^2)} \right|_{p=0} = \left. \frac{1}{c^4} \frac{\Delta_4(p_1, \dots, p_4)}{\Delta(p_1^2) \Delta(p_2^2) \Delta(p_3^2) \Delta(p_4^2)} \right|_{p=0} = \left. \frac{1}{c^4} \Gamma_4(0) \right|_{p=0} = -g} \quad (4.30)$$

Questa divisione corrisponde, analogamente a prima, al considerare solo i contributi, alla funzione di Green a 4 punti, dei diagrammi irriducibili ad una particella denudati delle linee esterne (ossia stiamo considerando solo i vertici propri). Da questa ultima condizione di finitezza ho

$$-\frac{g_0}{c^4} = -g \implies g_0 = g \quad (4.31)$$

Ripeto che le condizioni di finitezza sono assolutamente arbitrarie, ma con queste condizioni abbiamo da calcolare il minor numero possibile di diagrammi.

4.4 Teorema di Rinormalizzabilità

Tutto questo vale perché vale il seguente *teorema di rinormalizzabilità*: una teoria è rinormalizzabile se e solo se (CNS) tutti i parametri che compaiono nella sua azione (nel nostro caso m_0 e g_0) hanno dimensioni (ricorda che siamo in un sistema di unità naturali con $\hbar = c = 1$) positive o nulle in potenze di energia e sono tutti i possibili accoppiamenti compatibili con le simmetrie del problema. Questa ultima affermazione significa che non avremmo potuto aggiungere un termine $g_3 \varphi^3$ in quanto non possiedono la simmetria di φ in

$-\varphi$ che posseggono gli altri termini. In altre parole questi termini non sono necessari per la rinormalizzabilità della teoria; posso aggiungerceli, tuttavia se non lo faccio non perdo niente in quanto quelli che rimangono sono tutti i possibili accoppiamenti compatibili con la simmetria $\varphi \rightarrow -\varphi$. Verifichiamo quindi che la teoria $\lambda\varphi^4$ che stiamo esaminando è effettivamente rinormalizzabile. Per trovare le dimensioni dei nostri parametri m_0 e g_0 dobbiamo per prima cosa trovare le dimensioni del nostro campo φ . Poichè l'azione è una quantità adimensionale, ogni termine della lagrangiana deve avere le dimensioni di a^{-4} o di E^4 . Consideriamo il termine $(\partial_\mu\varphi)^2$: imponendo che il campo φ abbia delle dimensioni pari a a^{x_φ} abbiamo la condizione che $a^{-2}a^{2x_\varphi} = a^{-4}$ ovvero che

$$[\varphi] = a^{-1} \quad (4.32)$$

ovvero il campo φ ha le dimensioni di una energia. Da questo segue che m_0 ha le dimensioni di una energia (come era prevedibile) e che g_0 è adimensionale. Le dimensioni di questi parametri ovviamente dipendono dalle dimensioni dello spazio-tempo. In generale infatti il campo φ avrà le dimensioni di $a^{-2}a^{2x_\varphi} = a^{-D}$ e quindi

$$[\varphi] = a^{1-D/2}, \quad (4.33)$$

da cui segue che le dimensioni delle costanti di accoppiamento (chiamando solo per ora $m_0 = g_2$, $g_0 = g_4$ come casi speciali di un disegno enormemente più grande → corso di Parisi) saranno pari a

$$[g_m] = a^{mD/2-m-D} = a^{\delta_m}. \quad (4.34)$$

Da questa relazione evinciamo che m_0 ha le dimensioni di una energia qualunque dimensione D attribuiamo allo spazio-tempo. Tuttavia la costante di accoppiamento g_0 , che è adimensionale per $D_s^{(m)} = 4$, la cosiddetta *dimensione critica superiore*, non lo è più al di sopra o al di sotto di $D_s^{(m)}$. In particolare

$$[g_0] = a^{D-4} = E^{4-D} = \begin{cases} \text{dimensioni positive o nulle in energia,} & \text{se } D \leq D_s^{(m)} = 4 \\ \text{dimensioni negative in energia,} & \text{se } D > D_s^{(m)} = 4 \end{cases} \quad (4.35)$$

Pertanto solo nel primo caso la teoria è rinormalizzabile per il teorema di rinormalizzabilità. Il teorema inoltre aggiunge che è possibile rendere finiti non soltanto le grandezze fisiche e cioè stabilire un andamento di m_0 e g_0 in funzione di Λ per $\Lambda \rightarrow \infty$, ma posso rendere finite anche le funzioni di Green pur di riscalarle per una costante c^n , una c (in generale diversa) per ogni tipo di campo che ho tra le mani.

4.5 Rinormalizzazione al secondo ordine per la teoria $\lambda\varphi^4$

Le condizioni (ripeto: completamente arbitrarie!) che abbiamo imposto sono

$$\boxed{\begin{cases} \Gamma_R(0) = \frac{\Gamma(0)}{c^2} = M^2 \\ \left. \frac{d\Gamma_R(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0} = 1 \\ \Gamma_{4,R}(0) = \frac{\Gamma_4(0)}{c^4} = -g \end{cases}} \quad (4.36)$$

4.5.1 Espansione perturbativa al secondo ordine per la funzione generatrice a due punti dei vertici propri

Al secondo ordine avremo che daranno contributo alla funzione di Green a due punti i seguenti diagrammi

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} \quad (4.37)$$

Il terzo dei diagrammi va scartato in quanto è riducibile ad una particella e non contribuisce alla self-energia. La nostra funzione generatrice a due punti espansa al secondo ordine perturbativa sarà

$$\Gamma(p^2) = \Delta^{-1}(p^2) = p^2 + m_0^2 - \Sigma(p^2). \quad (4.38)$$

Ora la self-energia è la somma dei seguenti contributi

$$\Sigma(p^2) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} = -\frac{g_0}{2} G_\Lambda(0) + \frac{g_0^2}{4} G_\Lambda^2(0) + \frac{g_0^2}{6} \int_\Lambda \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k_1) \tilde{G}(k_2) \tilde{G}(p - k_1 - k_2)$$

dove, ricordiamolo ancora una volta, che $G_\Lambda(0) = \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) = \int_\Lambda \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m_0^2}$. In altre parole per scrivere i diagrammi di Feynman nello spazio dei momenti si associa ad ogni vertice un fattore $-g_0$ e al diagramma un fattore di simmetria; per ogni linea si associa un propagatore $\tilde{G}(p)$; inoltre bisogna imporre che la somma di tutti i momenti entranti meno quelli uscenti da un vertice sia pari a zero (conservazione del quadriimpulso e delta di Dirac!). A questo punto si introducono tante integrazioni sui momenti quanti sono i loop indipendenti (in altre parole: integriamo su ogni linea interna, ma aggiungendo una delta di Dirac dovuta alla conservazione del quadriimpulso). A questo punto abbiamo

$$\begin{aligned} \Gamma(p^2) &= p^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2} G_\Lambda(0) + g_0^2 \left[-\frac{1}{4} G_\Lambda^2(0) - \frac{1}{6} \int_\Lambda \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k_1) \tilde{G}(k_2) \tilde{G}(p - k_1 - k_2) \right] \\ &= p^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2} G_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(p^2), \end{aligned} \quad (4.39)$$

avendo definito

$$\Pi_\Lambda(p^2) = -\frac{1}{4} G_\Lambda^2(0) - \frac{1}{6} \int_\Lambda \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k_1) \tilde{G}(k_2) \tilde{G}(p - k_1 - k_2), \quad (4.40)$$

che diverge quadraticamente per $\Lambda \rightarrow \infty$. La prima e la seconda condizione di finitezza assumono quindi la forma

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \left[m_0^2 + \frac{g_0}{2} G_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(0) \right] = M^2 \\ \frac{1}{c^2} [1 + g_0^2 \Pi'_\Lambda(0)] = 1 \end{cases} \quad (4.41)$$

4.5.2 Espansione perturbativa al secondo ordine per la funzione generatrice a quattro punti dei vertici propri

Per la funzione di Green a quattro punti abbiamo i seguenti contributi (non considerando le permutazioni delle linee tra vertici esterni) fino al secondo ordine

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \varphi(z) \varphi(w) \rangle = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} \quad (4.42)$$

Vediamo ora quali diagrammi contribuiscono alla funzione generatrice dei vertici propri a quattro punti. I primi due tipi di diagrammi è inutile considerarli, come già detto in precedenza (se la procedura di rinormalizzazione è stata eseguita correttamente questi termini, in quanto prodotto di funzioni di Green a due punti, danno un contributo finito). Il quarto diagramma è riducibile ad una particella e quindi va eliminato. Gli unici che contribuiscono saranno, pertanto, il terzo e il quinto. Quest'ultimo in realtà contribuisce tre volte in quanto vi sono 3 diagrammi topologicamente equivalenti per scambio di vertici esterni

$$\text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} \quad (4.43)$$

Ora calcoliamoci l'espressione del diagramma amputato. Questo vale

$$\text{Diagram} = \frac{g_0^2}{2} I_\Lambda(p_1 + p_2) = \frac{g_0^2}{2} \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k) \tilde{G}(p_1 + p_2 - k) = \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_1 + p_2 - k)^2 + m_0^2}$$

Notare che quanto $\Lambda \rightarrow \infty$ le nostre I_Λ divergono logaritmicamente. Ora possiamo scriverci la $\Gamma_{4,R}$. Questa sarà uguale a

$$\Gamma_{4,R}(p_1, \dots, p_4) = \frac{1}{c^4} \left[-g_0 + \frac{g_0^2}{2} (I_\Lambda(p_1 + p_2) + I_\Lambda(p_1 + p_3) + I_\Lambda(p_1 + p_4)) \right]. \quad (4.44)$$

La terza condizione di finitezza si scriverà pertanto come

$$\frac{1}{c^4} \left(-g_0 + \frac{3}{2} g_0^2 I_\Lambda(0) \right) = -g. \quad (4.45)$$

4.5.3 Risultato

Scriviamo assieme le tre condizioni di finitezza

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \left[m_0^2 + \frac{g_0}{2} G_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(0) \right] = M^2 \\ \frac{1}{c^2} [1 + g_0^2 \Pi'_\Lambda(0)] = 1 \\ \frac{1}{c^4} \left(-g_0 + \frac{3}{2} g_0^2 I_\Lambda(0) \right) = -g. \end{cases} \quad (4.46)$$

Dalla seconda equazione otteniamo, sviluppando in serie fino al secondo ordine

$$c^2 = 1 + g_0^2 \Pi'_\Lambda(0) \implies c = 1 + \frac{g_0^2}{2} \Pi'_\Lambda(0). \quad (4.47)$$

Ricordati sempre che nel limite di $\Lambda \rightarrow \infty$ dovremo tenere fissi m_0 e g_0 (e "1" presente nella seconda condizione di finitezza) *ma non c.* Scrivendo

$$\frac{1}{c^4} = \frac{1}{(1 + g_0^2 \Pi'_\Lambda(0))^2} = \frac{1}{1 + 2g_0^2 \Pi'_\Lambda(0)} = 1 - 2g_0^2 \Pi'_\Lambda(0) \quad (4.48)$$

vediamo che non conta nella terza condizione di finitezza. Abbiamo semplificato condensato tutto in due equazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \left[m_0^2 + \frac{g_0}{2} G_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(0) \right] = M^2 \\ \left(-g_0 + \frac{3}{2} g_0^2 I_\Lambda(0) \right) = -g. \end{cases} \quad (4.49)$$

Dalla prima equazione notiamo che $m_0^2 \simeq M^2 + O(g_0)$ e quindi all'interno dei termini di tipo $I_\Lambda(0)$ e $\Pi_\Lambda(0)$ (presenti in entrambe queste equazioni) posso sostituire $m_0^2 \rightarrow M^2$. La $\Delta_R^{-1}(q^2)$ deve avere un limite per $\Lambda \rightarrow \infty$ (e pertanto lo avrà anche la funzione di Green a due punti). Adesso voglio solo verificare che questa davvero abbia un limite

$$\begin{aligned} \Delta_R^{-1}(q^2) &= \frac{1}{c^2} \left(q^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2} G_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(q^2) \right) \\ &= \frac{q^2}{c^2} + \frac{1}{c^2} \left(m_0^2 + \frac{g_0}{2} G_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(q^2) - g_0^2 \Pi_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(0) \right) \\ &= \frac{q^2}{c^2} + M^2 + \frac{g_0^2}{c^2} (\Pi_\Lambda(q^2) - \Pi_\Lambda(0)) = q^2 (1 - g_0^2 \Pi'_\Lambda(0)) + M^2 + g_0^2 (\Pi_\Lambda(q^2) - \Pi_\Lambda(0)) \\ &= q^2 + M^2 + g_0^2 (\Pi_\Lambda(q^2) - \Pi_\Lambda(0) - q^2 \Pi'_\Lambda(0)). \end{aligned}$$

La seconda equazione ci dice che la differenza tra g_0 e g è di ordine g_0^2 . Il che significa che $g_0^2 \simeq g$. Quindi

$$\Delta_R^{-1}(q^2) = q^2 + M^2 + g^2 (\Pi_\Lambda(q^2) - \Pi_\Lambda(0) - q^2 \Pi'_\Lambda(0)). \quad (4.50)$$

Questa quantità è palesemente finita quando $\Lambda \rightarrow \infty$: infatti M^2 e g sono fissati; inoltre il termine $-\Pi_\Lambda(0)$ sottrae a $\Pi_\Lambda(q^2)$ il primo termine del suo sviluppo di Taylor in $q^2 = 0$ (pari a $\frac{1}{4}G_\Lambda^2(0)$) eliminando la divergenza quadratica e lasciandone soltanto una logaritmica; quest'ultima divergenza viene rimossa dal termine $-q^2 \Pi'_\Lambda(0)$ che costituisce il primo ordine del suo sviluppo di Taylor. Dobbiamo ora calcolare la funzione a quattro punti Γ_4 e verificare che anch'essa rimanga finita. Usando il fatto che $g_0 = g + \frac{3}{2}g^2 I_\Lambda(0)$

$$\begin{aligned} \Gamma_{4,R} &= -g_0 + \frac{g_0^2}{2} (I_\Lambda(p_1 + p_2) + I_\Lambda(p_1 + p_3) + I_\Lambda(p_1 + p_4)) \\ &= -g - \frac{3}{2}g^2 I_\Lambda(0) + \frac{g^2}{2} \left[I_\Lambda(p_1 + p_2) + I_\Lambda(p_1 + p_3) + I_\Lambda(p_1 + p_4) \right] \\ &= -g + \frac{g^2}{2} \left[(I_\Lambda(p_1 + p_2) - I_\Lambda(0)) + (I_\Lambda(p_1 + p_3) - I_\Lambda(0)) + (I_\Lambda(p_1 + p_4) - I_\Lambda(0)) \right]. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Ora questa quantità risulta finita in quanto g è fisso, e le differenze del tipo $I_\Lambda(p_1 + p_2) - I_\Lambda(0)$ sono finite: $I_\Lambda(0)$ elimina la divergenza logaritmica di $I_\Lambda(p_1 + p_2)$ (entrambi i termini si comportano allo stesso modo per $\Lambda \rightarrow \infty$). Infatti sottraiamo il primo ordine di Taylor ottenendo

$$\begin{aligned} I_\Lambda(p_1 + p_2) - I_\Lambda(0) &= \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2 + M^2} \frac{1}{(p_1 + p_2 - k)^2 + M^2} - \frac{1}{(k^2 + M^2)^2} \right] \\ &= \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{k^2 - (p_1 + p_2 - k)^2}{((p_1 + p_2 - k)^2 + M^2)(k^2 + M^2)^2} \right] \\ &= \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{2k(p_1 + p_2) - (p_1 + p_2)^2}{((p_1 + p_2 - k)^2 + M^2)(k^2 + M^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (4.52)$$

ovvero una quantità finita. In questa maniera abbiamo dimostrato (fino al secondo ordine) che la procedura di rinormalizzazione funziona. Questo vale ordine per ordine e il risultato è assicurato dal teorema di rinormalizzabilità.

4.5.4 Problema dei grandi logaritmi

La finitezza ha avuto, tuttavia, un prezzo. Infatti nonostante le divergenze si cancellino per $\Lambda \rightarrow \infty$, l'integrale diventa comunque grande quanto più $p_1 + p_2$ cresce. In altre parole i due termini

$$I_\Lambda(p_1 + p_2) - I_\Lambda(0) = \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{k^2 + M^2} \frac{1}{(p_1 + p_2 - k)^2 + M^2} - \frac{1}{(k^2 + M^2)^2} \right] \quad (4.53)$$

si discostano asintoticamente man mano che cresce $p_1 + p_2$. Questa differenza aumenta logarmicamente in $p_1 + p_2$. Vediamolo facendo un esempio analogo. L'integrale, con $\alpha > 0$

$$\int_0^\Lambda \frac{dx}{x + \alpha} = \ln \left(\frac{\Lambda + \alpha}{\alpha} \right), \quad (4.54)$$

diverge logariticamente quando $\Lambda \rightarrow \infty$. A questo integrale gli sottraiamo il suo valore in $\bar{\alpha}$

$$\int_0^\Lambda \frac{dx}{x + \alpha} - \int_0^\Lambda \frac{dx}{x + \bar{\alpha}} = \ln \left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \right), \quad (4.55)$$

quindi è finito per $\Lambda \rightarrow \infty$. Tuttavia se ho $\bar{\alpha} \gg \alpha$ questa differenza di integrali cresce logariticamente.

Il fatto che $I_\Lambda(p_1 + p_2)$ diverga logaritmicamente per grandi impulsi è un problema; infatti ricordiamo che stiamo in teoria delle perturbazioni: g (la costante di accoppiamento *fissata*) è molto piccola, cosicché $g^2 \ll g$; tuttavia, se, come accade nella (4.51) abbiamo come coefficiente del secondo ordine, una quantità molto grande, la teoria delle perturbazioni non dà più un risultato accurato. La rinormalizzazione ha funzionato; tuttavia non è chiaro come si applichi la teoria delle perturbazioni per il calcolo delle funzioni di Green per grandi quadriimpulsi (è vero che è tutto finito, ma $I_\Lambda(p_1 + p_2) - I_\Lambda(0)$ cresce logaritmicamente negli impulsi in input $p_1 + p_2$, quindi anche se $g^2 \ll g$ ad un certo punto per impulsi sufficientemente grandi il termine del secondo ordine diventerà più grande di quello del primo). Questo è quello che si chiama il *problema dei grandi logaritmi* nella teoria delle perturbazioni. Non si può quindi calcolare tutto perturbativamente: se mi interessa sapere a grandi impulsi per ora non so cosa fare. In alcuni casi questo problema è puramente teorico: prima di arrivare ad un impulso tale che il secondo ordine diventa comparabile con il primo ordine dovrei arrivare ad energie che sono comparabili con la massa dell'universo (questo è il caso della QED). Nell'elettrodinamica la costante di accoppiamento è molto piccola ($g = 1/137$) e il termine del secondo ordine cresce solo logaritmicamente con il quadriimpulso. Però se la teoria ha una costante di accoppiamento più alta ci possono essere dei problemi.

Questo problema si risolve soltanto nella metà dei casi. In realtà questo problema non si ripropone non soltanto nell'ultravioletto (ovvero per i grandi impulsi) ma anche per piccoli impulsi (*divergenza infrarossa*) per teorie di massa nulla. In entrambi i casi questi grandi logaritmi vanno risommati. Le teorie si dividono pertanto in due grandi classi, quelle *asintoticamente libere nell'ultravioletto* e quelle *asintoticamente libere nell'infrarosso* in cui si può estendere la teoria delle perturbazioni, nonostante i grandi logaritmi, in una sola delle due regioni (o si domina la regione a grandi oppure quella a piccoli impulsi, ma non insieme).

4.6 Divergenze Infrarosse

Abbiamo visto che la teoria delle perturbazioni non è uniformemente applicabile nello spazio degli impulsi (e quindi anche in quello delle coordinate). Abbiamo accennato anche che esiste anche una altra situazione che porta al problema dei grandi logaritmi.

Finora abbiamo avuto a che fare con una teoria $\lambda\varphi^4$ con una certa massa. La massa si può trovare tornando nel minkowskiano e andando a guardare il polo della $\Delta_R^{(M)}(q^2)$. La massa così sarà una funzione $m = h(M, g) = Mf(g)$ (il secondo passaggio segue dal fatto che g è adimensionale). Come sappiamo M non è la massa della particella (lo abbiamo verificato attraverso la rappresentazione di Kallen-Lehmann). C'è un caso in cui, tuttavia, lo è. Supponiamo di essere in un mondo in cui la particella della teoria $\lambda\varphi^4$ abbia massa nulla. In questo caso (e solo in questo), $M = 0$ coincide esattamente con la massa della particella perché questo è l'unico modo per assicurarsi che il propagatore abbia un polo in zero (si vedano le prime due condizioni di finitezza). I parametri che abbiamo nella teoria $\lambda\varphi^4$ sono due: m_0 e g_0 ; fissato Λ posso identificarli indipendentemente. Poi naturalmente se voglio mandare $\Lambda \rightarrow \infty$ li dovrò cambiare opportunamente tenendo fisse le quantità fisiche (procedura di rinormalizzazione). Le classi di universi in cui la teoria è sempre $\lambda\varphi^4$ ma la particella scalare ha massa nulla sono di numero ∞^1 ; in altre parole abbiamo solo un parametro indipendente (e non due come prima) in quanto un parametro me lo gioco imponendo che la massa della particella sia nulla. Dovrò quindi aggiustare m_0 in modo che la massa della particella sia nulla

$$m_0 = \tilde{h}(g_0, \Lambda) = \tilde{f}(g_0)\Lambda. \quad (4.56)$$

dove il secondo passaggio segue sempre per argomenti dimensionali. L'unico parametro che mi è rimasto è quindi g_0 (abbiamo ripetuto ∞^1 teorie possibili che dipendono solo dalla forza di interazione). Questo è un prototipo molto semplificato di quello che succede nelle teorie di Gauge non abeliane in cui abbiamo una sola costante di accoppiamento; la massa non c'è in quanto il bosone (mesoni vettoriali) di Gauge hanno massa nulla. Questa teoria è ovviamente rinormalizzabile. Tuttavia abbiamo ora dei problemi con la scelta delle condizioni di finitezza. Infatti se $M^2 = 0$, la $\Gamma_{4,R}$ è divergente logaritmicamente *anche* se imponiamo un cut-off (che limita gli impulsi ad essere minori di Λ)

$$\frac{g_0^2}{2} I_\Lambda(p) = \frac{g_0^2}{2} \int_\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4}. \quad (4.57)$$

Questo tipo di divergenza è detta di tipo *infrarosso* (piccoli quadriimpulsi). Questa non la possiamo "rinormalizzare" in quanto è una divergenza fisica; se facciamo un esperimento con fotoni ad esempio, il nostro

apparato sperimentale non è in grado di distinguere tra assenza totale di fotoni dalla presenza di *fotoni soffici* ovvero fotoni aventi impulsi minori della risoluzione sperimentale. Capiamo ora ci troviamo in una sorta di “imbarazzo” con le precedenti condizione di finitezza: esse sono state imposte in *punti di sottrazione* tali che la funzione di Green non ha motivi di essere infinita. Nel caso di teorie a massa nulla, però il punto di sottrazione “0”, scelto in precedenza non va più bene perché in esso le funzioni di Green divergono. Il problema può essere risolto semplicemente cambiando il punto di sottrazione che era stato deciso in modo completamente arbitrario. Le nuove condizioni di finitezza, pertanto saranno

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_R(0) = \frac{\Gamma(0)}{c^2} = 0 \\ \frac{d\Gamma_R(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=\mu^2} = 1 \\ \Gamma_{4,R}(\mu^2) = \frac{\Gamma_4(\mu^2)}{c^4} = -g \end{array} \right. \quad (4.58)$$

Ora ci chiediamo come scegliere μ . Per motivi pratici ed estetici nel dire che si sceglie come punto di sottrazione μ si intende, a proposito della funzione a quattro punti, la scelta del cosiddetto punto simmetrico: le condizioni di finitezza sono valutate per $\mu^2 = p_1^2 = p_2^2 = p_3^2$. Siccome voglio anche che $\mu^2 = p_4^2$ e $p_4 = -p_1 - p_2 - p_3$ segue che

$$\mu^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 2p_1 \cdot p_2 + 2p_1 \cdot p_3 + 2p_2 \cdot p_3 = 3\mu^2 + 6p_1 \cdot p_2 \implies p_1 \cdot p_2 = -\frac{1}{3}\mu^2, \quad (4.59)$$

dove nella seconda identità ci siamo messi in un punto tale che tutti i prodotti scalari siano uguali. Anche se possiamo scegliere arbitrariamente il punto di sottrazione μ dobbiamo stare comunque attenti. Nel caso della $\Gamma_{4,R}$ avevamo

$$\Gamma_{4,R} = -g + \frac{g^2}{2} \left[(I_\Lambda(p_1 + p_2) - I_\Lambda(\mu)) + (I_\Lambda(p_1 + p_3) - I_\Lambda(\mu)) + (I_\Lambda(p_1 + p_4) - I_\Lambda(\mu)) \right]; \quad (4.60)$$

quindi se prendiamo p_1 molto diverso da p_2 avremo che $I_\Lambda(p_1 + p_2) - I_\Lambda(\mu^2)$ svilupperà dei grandi logaritmi. In altre parole possiamo usare il punto di sottrazione che vogliamo, pur di coinvolgere impulsi tutti dello stesso ordine di grandezza (altrimenti i logaritmi ci uccidono: vi sono situazioni, infatti, in cui $p_1 + p_2 \simeq \mu$ ma $p_1 + p_3$ è piccolo e $p_1 + p_4$ è grande rispetto a μ). Questa idea di cambiare il punto di sottrazione ha un altro importante beneficio: potenzialmente può curare anche il problema dei grandi logaritmi per teorie di massa non nulla. I grandi logaritmi per teorie di massa non nulla infatti si sviluppano quando $p_1 + p_2 \gg 0$. Se io voglio andare a vedere cosa succede per grandi impulsi p , mi conviene imporre delle condizioni di rinormalizzazione non in 0, ma in μ^2 in maniera tale che, quando $p^2 = \mu^2$ allora $I_\Lambda(p^2) - I_\Lambda(\mu) = 0$ e nell'intorno, per continuità resta piccola. Quindi il cambio del punto di sottrazione mi porta due benefici

- in primo luogo mi permette di risolvere i problemi delle teorie di massa nulla, dove i logaritmi diventano grandi nell'infrarosso;
- in secondo luogo risolve i problemi delle teorie di massa non nulla, dove i logaritmi diventano grandi nell'ultravioletto.

Bisogna sempre stare attenti, però, quando cambiamo punto di sottrazione. Non abbiamo tenuto in conto che, se cambiamo punto di sottrazione lasciando inalterati i parametri M e g , significa di fatto cambiare universi: diversi parametri fisici, diverse masse, diverse sezioni d'urto... Quindi possiamo cambiare punto di sottrazione, a patto di cambiare anche i parametri M e g : solo così posso avere speranze di restare nella stessa teoria di prima.

4.7 Equazioni di Callan-Symanzik

Vogliamo ora capire come devono dipendere i parametri liberi M e g dal punto di sottrazione μ^2 in maniera da non far cambiare la fenomenologia. In altre parole vogliamo trovare una equazione che ci permetta di

determinare l'andamento dei parametri della teoria in funzione della scala di energia alla quale vogliamo studiarla.

Limitiamoci, per ora, ad un discorso per le teorie a massa nulla (quindi come abbiamo visto $M = 0$). Abbiamo visto che, con l'integrale funzionale riusciamo a calcolarci tutto, in particolare le funzioni di Green ad n punti $G_n(x_1, \dots, x_n; \Lambda, g_0) \equiv G_n(x; \Lambda, g_0)$. Abbiamo visto anche che, quando mandiamo $\Lambda \rightarrow \infty$ a g_0 fissato questa quantità non può avere un limite finito. Successivamente abbiamo introdotto delle condizioni di rinormalizzazione che ci hanno permesso di risolvere questo problema. In particolare la terza condizione di finitezza $\Gamma_4^{(R)}(\mu) = -g$ mi dice come è fatta g in funzione di Λ , g_0 e μ

$$g = g(\Lambda, g_0, \mu) = g(g_0, \Lambda/\mu); \quad (4.61)$$

la seconda identità segue da argomenti dimensionali (g e g_0 sono adimensionali). Convenzionalmente si pone la costante con cui abbiamo riscalato i campi (che è anch'essa una quantità adimensionale) con

$$c(g_0, \Lambda/\mu) = \frac{1}{\sqrt{Z(g_0, \Lambda/\mu)}}.$$

La rinormalizzazione ci dice che, se la teoria è rinormalizzabile

$$\lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{Z^n(g_0(g, \Lambda/\mu), \Lambda/\mu)}} G_n(x; \Lambda, g_0(g, \Lambda/\mu)) = G_n^{(R)}(x; g, \mu), \quad g, \mu \text{ fissati} \quad (4.62)$$

Questa affermazione è vera perturbativamente e immagino che lo sia anche non perturbativamente. Se la nostra teoria avesse avuto una massa, avremmo dovuto tenere fisso anche il parametro M . Adesso vogliamo trasformare questa condizione di rinormalizzabilità in un set infinito di equazioni differenziali chiamate *equazioni di Callan-Symanzik*. La rinormalizzabilità della teoria ci dice che il limite (4.62) esiste; invece di fare il limite, prendiamo un Λ molto grande (scala di Planck o massa dell'universo ad esempio). La quantità sotto il segno di limite differirà quindi dal secondo membro per un termine piccolo (la differenza tra queste due quantità tipicamente tende a 0 come un logaritmo $1/\ln \Lambda$)

$$G_n(x; \Lambda, g_0(g, \Lambda/\mu)) \simeq \sqrt{Z^n(g, \Lambda/\mu)} G_n^{(R)}(x; \mu, g) \quad (4.63)$$

dove abbiamo usato lo stesso simbolo Z per chiamare la costante di riscalamento dei campi in funzione di g anzichè g_0 (sarebbe più corretto chiamarla in un altro modo visto che la funzione è diversa). Questa teoria con il cut-off riproduce la teoria fisica per valori o di distanze molto maggiori di $1/\Lambda$ oppure per impulsi molto minori di Λ , se la teoria è rinormalizzabile. L'equazione (4.63) ci suggerisce che, se fissiamo Λ e g_0 il primo membro non dipende dal punto di sottrazione μ . In altre parole

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} G_n(x; \Lambda, g_0) \Big|_{\Lambda, g_0} = 0, \quad (4.64)$$

dove il fattore μ è stato introdotto per motivi dimensionali (non vogliamo introdurre scale di energie). Questo vuol dire che la dipendenza da μ si deve cancellarsi tra i due termini presenti nel secondo membro della (4.63). Ora applichiamo $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$ al secondo membro della (4.63) ricordandoci che quando fissiamo Λ e g_0 , la nostra g diventa funzione solamente di μ (vedi la 4.61)

$$\frac{n}{2} Z^{n/2-1} \mu \frac{\partial Z}{\partial \mu} \Big|_{\Lambda, g_0} G_n^{(R)}(x; \mu, g) + Z^{n/2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} G_n^{(R)}(x; \mu, g) \Big|_{\Lambda, g_0} + Z^{n/2} \mu \frac{\partial}{\partial g} G_n^{(R)}(x; \mu, g) \frac{\partial g}{\partial \mu} \Big|_{\Lambda, g_0} = 0.$$

Ora dividiamo per $Z^{n/2}$

$$\frac{n}{2} \mu \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \Big|_{\Lambda, g_0} G_n^{(R)}(x; \mu, g) + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} G_n^{(R)}(x; \mu, g) \Big|_{\Lambda, g_0} + \mu \frac{\partial}{\partial g} G_n^{(R)}(x; \mu, g) \frac{\partial g}{\partial \mu} \Big|_{\Lambda, g_0} = 0. \quad (4.65)$$

Definiamo ora

- $\frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z(g_0, \Lambda/\mu)\Big|_{\Lambda, g_0} = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\sqrt{Z(g_0, \Lambda/\mu)}\Big|_{\Lambda, g_0} \equiv \gamma(g, \Lambda/\mu)$
- $\mu\frac{\partial g}{\partial\mu}\Big|_{\Lambda, g_0} \equiv \beta(g, \Lambda/\mu).$

Abbiamo inserito nelle nuove funzioni una dipendenza da g e non da g_0 perchè ci servirà nel seguito quando andremo a fare il limite per $\Lambda \rightarrow +\infty$. Sostituendo troviamo

$$n\gamma(g, \Lambda/\mu)G_n^{(R)}(x; \mu, g) + \mu\frac{\partial}{\partial\mu}G_n^{(R)}(x; \mu, g)\Big|_{\Lambda, g_0} + \beta(g, \Lambda/\mu)\frac{\partial}{\partial g}G_n^{(R)}(x; \mu, g) \simeq 0. \quad (4.66)$$

Abbiamo scritto $\simeq 0$ perchè il limite $\Lambda \rightarrow \infty$ ancora non è stato fatto (ricorda che ci sono termini che vanno come $1/\ln\Lambda$). Ora vogliamo eseguire il limite per $\Lambda \rightarrow \infty$ a g e μ fissati: questo esiste se le funzioni β e γ hanno un limite a g e μ fissati. Quelle che abbiamo trovato sono un sistema infinito di equazioni differenziali (una per ogni valore di n). Se consideriamo le prime due $n = 2$ e $n = 4$, otteniamo un sistema di due equazioni lineari in due incognite β e γ . Risolvendo il sistema esprimiamo β e γ in funzione di quantità che hanno un limite finito per $\Lambda \rightarrow \infty$ a g e μ fissati; da questo segue che anche β e γ devono avere un limite finito per Λ a g e μ fissati. In definitiva possiamo togliere il cut-off dalle equazioni precedenti

$$n\gamma(g)G_n^{(R)}(x; \mu, g) + \mu\frac{\partial}{\partial\mu}G_n^{(R)}(x; \mu, g) + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}G_n^{(R)}(x; \mu, g) = 0.$$

(4.67)

ottenendo le *equazioni di Callan-Symanzik*. Questa è una condizione analitica della rinormalizzabilità di una teoria. Queste equazioni (per ogni n abbiamo una equazione differenziale lineare alle derivate parziali) possono essere risolte e ci danno come risultato la dipendenza delle funzioni di Green da μ e da g (e non dagli argomenti spazio-temporali!). Vediamo ora come si risolvono. Per prima cosa mi fa comodo eliminare il termine $n\gamma(g)$. Per farlo basta cambiare il nome della funzione incognita

$$G_n^{(R)}(x; \mu, g) = \exp\left\{-n\int_{\bar{g}}^g \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg'\right\} \Phi_n(x; \mu, g). \quad (4.68)$$

dove abbiamo introdotto $\bar{\mu}$ e \bar{g} come i valori corrispondenti ad un certo punto di sottrazione relativi ad un mondo che interessa a me (sapendo questi due valori posso calcolare tutta la fisica che voglio). Poi possiamo cambiare $\bar{\mu}$ e \bar{g} astutamente in maniera tale da cambiare punto di sottrazione ma da restare all'interno dello stesso universo (se cambio uno solo dei due l'universo cambia sicuramente). Abbiamo a che fare, ripetiamo, con una classe di ∞^1 teorie e non di ∞^2 teorie in quanto il punto di sottrazione è una mia scelta. Riscrivendo le equazioni di Callan-Symanzik in funzione delle Φ_n il termine $n\gamma(g)$ viene eliminato

$$\mu\frac{\partial\Phi_n}{\partial\mu} + \beta(g)\frac{\partial\Phi_n}{\partial g} = 0. \quad (4.69)$$

Questa è una equazione alle derivate parziali del primo ordine e si risolve con il *metodo delle caratteristiche*. Questo metodo funziona, in generale per equazioni con un numero arbitrario di argomenti (e quindi per un somma arbitraria di derivate parziali prime). In poche parole, il metodo consiste nel trasformare una equazione lineare alle derivate parziali in un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Le curve lungo le quali un'equazione differenziale alle derivate parziali di primo grado si comporta come un'equazione ordinaria vengono chiamate *curve caratteristiche*. Questo risultato può essere ottenuto se si scrive la (4.69) come un differenziale totale di $\Phi_n(x; \mu, g)$

$$\frac{d\Phi_n}{ds} = \frac{d\mu}{ds}\frac{\partial\Phi_n}{\partial\mu} + \frac{dg}{ds}\frac{\partial\Phi_n}{\partial g} = 0. \quad (4.70)$$

Confrontando le due ultime equazioni vediamo che

$$\begin{cases} \frac{d\mu}{ds} = \mu \\ \frac{dg}{ds} = \beta(g). \end{cases} \quad (4.71)$$

Confrontando queste due equazioni si possono ricavare le equazioni delle curve caratteristiche (chiamate *equazioni di Lagrange-Charpit*)

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{dg}{\beta(g)} \implies \mu \frac{dg}{d\mu} = \beta(g). \quad (4.72)$$

Abbiamo ottenuto una equazione differenziale che lega le quantità μ e g . Questa equazione differenziale possiede un integrale primo: esso sarà la costante di integrazione perché questa è costante lungo le soluzioni dell'equazione differenziale. Infatti se integriamo la prima delle (4.72) otteniamo

$$\ln \frac{\mu}{\bar{\mu}} = \int_{\bar{g}}^g \frac{dg'}{\beta(g')} + C \quad (4.73)$$

da cui

$$C(g, \mu) = \ln \frac{\mu}{\bar{\mu}} - \int_{\bar{g}}^g \frac{dg'}{\beta(g')}. \quad (4.74)$$

Ora la teoria di queste equazioni ci dice che $\Phi_n(x; g, \mu) = F_n(x; C(g, \mu))$ ovvero è funzione di *un solo* argomento (la dipendenza da g e μ sta in un solo argomento funzionale). In generale per più di due argomenti la soluzione sarà una funzione arbitraria di tutti gli integrali primi del sistema di equazioni differenziali ordinarie. Ci si può convincere che questa sia la soluzione andando a sostituire

$$\mu \frac{\partial \Phi_n}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial \Phi_n}{\partial g} = F'_n(x; C(g, \mu)) - F'_n(x; C(g, \mu)) = 0, \quad (4.75)$$

dove F'_n è la derivata di F_n rispetto al suo unico argomento C . La soluzione dell'equazione di Callan-Symanzik pertanto è

$$G_n^{(R)}(x; \mu, g) = \exp \left\{ -n \int_{\bar{g}}^g \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg' \right\} F_n \left(x; \ln \frac{\mu}{\bar{\mu}} - \int_{\bar{g}}^g \frac{dg'}{\beta(g')} \right). \quad (4.76)$$

Questa equazione è molto restrittiva e si può usare ordine per ordine perturbativo per fare il check che i fatto vengono effettivamente da una teoria rinormalizzabile. Noi la useremo in maniera diversa: la useremo cercando di superare alcuni problemi della teoria delle perturbazioni; in realtà è uno strumento utile anche nella teoria delle perturbazioni stessa. Nonostante si possa pensare che non abbiamo risolto alcunché (in quanto vi è ancora la funzione F_n incognita), tuttavia questa equazione mi sta facendo vedere una cosa molto interessante. Siamo partiti da una teoria in cui abbiamo fissato il punto di sottrazione $\bar{\mu}$ e \bar{g} . Se adesso cambio $\bar{\mu} \rightarrow \mu$, quale g devo scegliere perché il mio universo rimanga lo stesso? Questa equazione mi permette di risolvere questo problema. Partiamo da $\bar{\mu}$ e \bar{g} , le nostre $G_n^{(R)}$ varranno

$$G_n^{(R)}(x; \bar{\mu}, \bar{g}) = F_n(x; 0). \quad (4.77)$$

Il mio universo fisico è descritto da queste funzioni di Green. Adesso, se cambiamo g e μ abbiamo come funzioni di Green quelle descritte dalla (4.76). Quindi se l'argomento della F_n è diverso da 0 cambiamo universo e quindi cambia anche la fisica. Quindi se mi voglio muovere sullo stesso universo basta scegliere una $g(\mu)$ tale che l'argomento della F_n rimanga pari a 0. Muovendosi lungo questa traiettoria le funzioni di Green, infatti, cambiano solo per una costante

$$G_n^{(R)}(x; g(\mu)) = \left(\exp \left\{ - \int_{\bar{g}}^{g(\mu)} \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg' \right\} \right)^n F_n(x; 0). \quad (4.78)$$

Come abbiamo visto in precedenza, se riscaliamo i campi per una costante (elevata alla n) la fisica non cambia. L'unica cosa che cambia è il residuo al polo che viene moltiplicato per un fattore c^n . I poli non vengono toccati, e neppure le ampiezze di scattering (vedi il discorso delle formule di riduzione fatto in precedenza). Pertanto i due mondi, quello con $\bar{\mu}$ e \bar{g} e quello con μ e $g(\mu)$ sono esattamente lo stesso universo e hanno esattamente la stessa fisica.

4.7.1 Libertà Asintotica

Vediamo ora come si pone il problema dei grandi logaritmi. Lo sviluppo perturbativo

$$G_n^{(R)}(p; \bar{\mu}, \bar{g}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(p, \bar{\mu}) \bar{g}^k(\mu). \quad (4.79)$$

Per $p \rightarrow \infty$ (o se vogliamo $p/\bar{\mu} \rightarrow \infty$) e $p \rightarrow 0$ (o $p/\bar{\mu} \rightarrow \infty$) per teorie di massa nulla il coefficiente $c_k(p, \bar{\mu})$ sviluppa i grandi logaritmi (diventa logaritmicamente grande). Quando $p = \bar{\mu}$ questo coefficiente è identicamente nullo. Possiamo quindi scegliere un punto di sottrazione μ che sia dello stesso ordine del p che vogliamo calcolare. Questo lo possiamo fare a patto che sostituiamo \bar{g} con $g(\mu)$ soluzione di

$$\ln \frac{\mu}{\bar{\mu}} = \int_{\bar{g}}^{g(\mu)} \frac{dg'}{\beta(g')}, \quad (4.80)$$

in modo tale da restare nello stesso universo fisico. Questo, come si può ben capire, non è detto che funzioni! È vero sì, che il coefficiente $c_k(p, \mu)$ ora è piccolo, ma nel frattempo la costante di accoppiamento $g(\mu)$ potrebbe essere cresciuta o decresciuta. Se è diminuita allora abbiamo vinto, perché abbiamo eliminato i grandi logaritmi e abbiamo una costante di accoppiamento che è ancora più piccola rispetto a quella per cui valeva lo sviluppo perturbativo. Se al contrario cresce, abbiamo perso. Vedremo come le teorie si distinguono in due grandi classi: le teorie in cui la costante di accoppiamento cresce aumentando il punto di sottrazione in energia e quindi decresce diminuendolo (asintoticamente libere nell'infrarosso) e le teorie la cui costante di accoppiamento diminuisce quando aumentiamo il punto di sottrazione in energia (asintoticamente libere nell'ultravioletto). Quindi nelle prime possiamo calcolare quantità a basse energie; nelle seconde quantità ad alte energie. Questa è l'idea di base che andiamo a vedere più nel dettaglio ora.

Chiamiamo ora \bar{p} il valore di p uguale a $\bar{\mu}$. Come già detto in precedenza, per p in un intorno di $\bar{\mu}$ non abbiamo problemi. Ora vogliamo studiare cosa succede ad impulsi $p = \lambda \bar{p}$

$$G_n^{(R)}(\lambda \bar{p}; \bar{\mu}, \bar{g}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda \bar{p}, \bar{\mu}) \bar{g}^k. \quad (4.81)$$

con λ che può essere mandato a 0 (zona *infrarossa*) o a $+\infty$ (zona *ultravioletta*): in queste zone si sviluppano i grandi logaritmi. Quello che voglio fare ora è quindi cambiare punto di sottrazione. L'equazione (4.78) ci dice su quale traiettoria dobbiamo muoverci senza cambiare universo

$$G_n^{(R)}(p; \bar{\mu}, \bar{g}) = \exp \left\{ n \int_{\bar{g}}^{g(\mu)} \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg' \right\} G_n^{(R)}(p; \mu, g(\mu)). \quad (4.82)$$

Supponiamo ora di voler calcolare questo oggetto in $\lambda \bar{p}$

$$G_n^{(R)}(\lambda \bar{p}; \bar{\mu}, \bar{g}) = \exp \left\{ n \int_{\bar{g}}^{g(\mu)} \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg' \right\} G_n^{(R)}(\lambda \bar{p}; \mu, g(\mu)). \quad (4.83)$$

Ora però μ è arbitrario! Quindi mi conviene prendere $\mu = \lambda \bar{\mu}$. Il corrispondente valore di g verrà chiamato $g(\lambda \bar{\mu}) \equiv g_\lambda$. Otteniamo

$$G_n^{(R)}(\lambda \bar{p}; \bar{\mu}, \bar{g}) = \exp \left\{ n \int_{\bar{g}}^{g_\lambda} \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg' \right\} G_n^{(R)}(\lambda \bar{p}; \lambda \bar{\mu}, g_\lambda). \quad (4.84)$$

Ora ci chiediamo che dimensioni hanno queste funzioni di Green nello spazio degli impulsi. Le funzioni di Green nello spazio delle x , di un campo scalare $G_n(x, \dots, x_n) = \langle \Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n) \rangle$ ha dimensioni $D_n^{(x)} = n$ in energia (il campo scalare ha dimensione 1 in energia). Quando faccio la trasformata di Fourier (più precisamente devo fare $(n-1)$ trasformate di Fourier e quindi $D(n-1)$ integrali dove D è la dimensionalità del nostro spazio-tempo, nel nostro caso pari a 4) abbiamo che

$$D_n^{(p)} = n - 4(n-1) = 4 - 3n.$$

La mia funzione di Green rinormalizzata ad n punti, a causa dell'analisi dimensionale, si può scrivere come il prodotto di una costante avente come dimensione una energia (*per esempio* μ) elevato alla D_n (se guardiamo nello spazio degli impulsi sarà $D_n^{(p)}$, se guardiamo nello spazio delle coordinate sarà $D_n^{(x)}$), moltiplicata per una funzione adimensionale f

$$G_n^{(R)}(p; \mu, g) = \mu^{D_n} f(p/\mu; g) \quad (4.85)$$

ovvero è una *funzione omogenea di grado* D_n (ricorda la definizione: Se $\alpha, k \in \mathbb{R}$, una funzione $f(x_1, \dots, x_n)$ si dice omogenea di grado k se per ogni scelta di variabili x_1, \dots, x_n si ha $f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n)$ per ogni α). Naturalmente ho messo μ come costante avente dimensioni di una energia, ma avrei potuto utilizzare una qualsiasi delle componenti di p . Pertanto

$$G_n^{(R)}(\lambda \bar{p}; \lambda \bar{\mu}, g_\lambda) = (\lambda \bar{\mu})^{D_n} f(\bar{p}/\bar{\mu}, g_\lambda) = \lambda^{D_n} G_n^{(R)}(\bar{p}; \bar{\mu}, g_\lambda), \quad (4.86)$$

in questo modo la (4.84) diventa

$$G_n^{(R)}(\lambda \bar{p}; \bar{\mu}, \bar{g}) = \lambda^{D_n} \exp \left\{ n \int_{\bar{g}}^{g_\lambda} \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg' \right\} G_n^{(R)}(\bar{p}; \bar{\mu}, g_\lambda). \quad (4.87)$$

Notare che a secondo membro stiamo calcolando una funzione di Green in un universo diverso in quanto abbiamo come argomenti $\bar{\mu}$ e $g_\lambda = g(\lambda \bar{\mu})$ (e non $\bar{g} = g(\bar{\mu})$). Tuttavia questa funzione di Green è collegata con quella che voglio calcolare, ovvero $G_n^{(R)}(\lambda \bar{p}; \bar{\mu}, \bar{g})$. La funzione di Green $G_n^{(R)}(\bar{p}; \bar{\mu}, g_\lambda)$ quando viene espansa in serie di potenze ha i coefficienti che sono quelli che *non hanno* i grandi logaritmi (ricorda la definizione di \bar{p})

$$G_n^{(R)}(\bar{p}; \bar{\mu}, g_\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\bar{p}, \bar{\mu}) \bar{g}_\lambda^k. \quad (4.88)$$

Naturalmente però ho g_λ quindi quello che può succedere è che g_λ o cresca o decresca quando mando $\lambda \rightarrow \infty$ o $\lambda \rightarrow 0$. Quindi ora tutto si riduce a capire quali tipi di teorie sono tali che quando λ cresce o decresce, $g_\lambda \equiv g(\lambda \bar{\mu})$ cresce o decresce. Data una teoria io quindi so calcolare o l'infrarosso o l'ultravioletto in relazione al comportamento di g . L'equazione di evoluzione della costante di accoppiamento in funzione del punto di sottrazione $\mu = \lambda \bar{\mu}$ è data da

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \beta(g). \quad (4.89)$$

Si distinguono allora due casi a seconda del segno della funzione $\beta(g)$

- $\beta(g) > 0$: g è crescente, ovvero g cresce per $\lambda \rightarrow \infty$ e decresce per $\lambda \rightarrow 0$. Parliamo di teorie *asintoticamente libere nell'infrarosso*;
- $\beta(g) < 0$: g è decrescente, ovvero g decresce per $\lambda \rightarrow \infty$ e cresce per $\lambda \rightarrow 0$. Parliamo di teorie *asintoticamente libere nell'ultravioletto*.

Il primo caso è quello della teoria φ^4 (calcoleremo la funzione β) e per la QED: in questo tipo di teorie è sotto controllo la fisica di basse energie (ovvero lunghe distanze) e in particolare ho sotto controllo lo *spettro di massa* il quale mi aspetto che sia una piccola deformazione dello spettro di massa della teoria libera ($g = 0$). In elettrodinamica quantistica mi aspetto di trovare elettroni positroni e fotoni perché queste sono piccole deformazioni della teoria libera. Nel secondo caso, quello delle teorie asintoticamente libere nell'ultravioletto, abbiamo sotto controllo (ovvero lo sviluppo perturbativo è sensato) la fisica di alte energie (piccole distanze). In queste teorie lo spettro di massa non è sotto controllo perturbativo. Questa è, probabilmente (e anzi, quasi sicuramente), la situazione per le teorie di *Gauge non abeliane*. Queste sono le uniche teorie che hanno una $\beta(g) < 0$ in quattro dimensioni, con un numero non troppo elevato di fermioni. In particolare ne fanno parte la QCD che è una teoria di *quarks* (particelle di carica frazionaria) e *gluoni* (particelle con gradi di libertà cosiddetto di *colore* che non viene osservato). Poiché lo spettro di massa può essere controllato a basse energie, non posso conoscerlo in queste teorie, in quanto la regione di basse energie è fuori dallo sviluppo perturbativo. Questo è compatibile con quello che osservo ovvero lo spettro di massa è completamente diverso da quello che vedo nella teoria. A piccoli valori degli impulsi la teoria delle perturbazioni mi predirebbe di avere uno spettro di massa con 8 mesoni vettoriali di massa nulla che portano un numero quantico di colore (che non osservo) e dei quarks di carica frazionaria (che non osservo).

4.7.2 Calcolo della funzione $\beta(g)$ nel caso della teoria $\lambda\varphi^4$

Partiamo dalla definizione della β

$$\beta(g, \Lambda/\mu) \equiv \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \Big|_{\Lambda, g_0}, \quad \text{con } g = g(g_0, \Lambda/\mu).$$

La g si calcolava dalla terza condizione di finitezza: $\Gamma_{4,R}(\mu) = -g$ ed avevamo

$$g = g_0 - \frac{3g_0^2}{2} I_\Lambda(\mu). \quad (4.90)$$

Per calcolarmi la β devo esplicitare la forma di $I_\Lambda(\mu)$. Ricordandoci che sto effettuando la teoria di massa nulla abbiamo

$$I_\Lambda(p) = \int_\Lambda \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2} \frac{1}{(p-l)^2} \quad (4.91)$$

Non abbiamo più problemi in $k \simeq 0$ in quanto abbiamo imposto un punto di sottrazione pari a $\mu \neq 0$ (come invece accadeva in precedenza). Siamo nell'euclideo (la misura è compatta). Se fossimo stati nel minkowskiano infatti in coordinate polari avremmo $d^4 l = l^3 dl d\Omega$: l'angolo solido Ω nel minkowskiano non è una variabile compatta in quanto se ci limitiamo ad integrare a $l_0^2 - l^2 = \text{cost}$, le quattro variabili possono assumere valori arbitrariamente grandi (il volume dell'iperboloide è infinito). Nell'euclideo invece $l^2 = \text{cost}$ limita il valore di tutte e quattro le componenti di l tra 0 e la cost. Se siamo nell'euclideo, pertanto, possiamo passare tranquillamente in coordinate polari quadridimensionali. Abbiamo pertanto

$$I_\Lambda(\mu) = \int_0^\Lambda \frac{dl d\Omega}{(2\pi)^4} \frac{l}{(\mu-l)^2} = \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4} \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \text{quantità finita} \quad (4.92)$$

dove Ω_4 è l'angolo solido in 4 dimensioni. Abbiamo reso l'argomento del logaritmo adimensionale con l'unica quantità che avesse le dimensioni di Λ , ovvero μ . Si potrebbe obiettare che avrei potuto inserire pertanto una qualsiasi quantità proporzionale a μ . Tuttavia a causa del logaritmo questa quantità si rivelerebbe una costante additiva che, ai fini della derivata che dovremo effettuare in μ , è irrilevante. Questo è un artefatto che viene fuori dal fatto che stiamo avendo a che fare con un teoria con divergenze logaritmiche ad un loop (se guardassi già due loop la cosa sarebbe più complicata). Ora dobbiamo calcolare quanto vale l'angolo solido in 4 dimensioni

$$(\sqrt{\pi})^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 x e^{-x^2} = \Omega_4 \int_0^{+\infty} dr r^3 e^{-r^2} = \frac{\Omega_4}{2} \int_0^{+\infty} dr^2 r^2 e^{-r^2} = \frac{\Omega_4}{2} \int_0^{+\infty} dt t e^{-t} = \frac{\Omega_4}{2} \Gamma(2) = \frac{\Omega_4}{2}$$

e quindi $\Omega_4 = 2\pi^2$ (ricorda che in generale $\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$). Riassumendo abbiamo

$$g = g_0 - \frac{3g_0^2}{2} \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \ln \frac{\Lambda}{\mu} = g_0 - \frac{3g_0^2}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu}. \quad (4.93)$$

La funzione $\beta(g)$ sarà

$$\boxed{\beta(g) \equiv \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \Big|_{\Lambda, g_0} = \frac{3g^2}{16\pi^2}}$$

(4.94)

dove abbiamo sostituito g_0 con g . Poiché $\beta(g) > 0$, la teoria $\lambda\varphi^4$ è asintoticamente libera nell'infrarosso. Naturalmente, per capire se una teoria è asintoticamente libera nell'infrarosso o nell'ultravioletto, basta l'ordine più basso della teoria delle perturbazioni (in quanto i termini di ordine successivo saranno di ordine superiore e pertanto il segno viene determinato dal primo termine dell'espansione perturbativa). Questa proprietà della β , come accennato prima vale anche per teorie come la QED, ma non per le teorie di gauge non abeliane con un numero non troppo elevato di fermioni o di campi di materia (in altre parole la presenza di campi scalari o fermionici rovina la libertà asintotica nell'ultravioletto).

4.7.3 Argomento di Landau

Vediamo ora che forma ha la traiettoria del gruppo di rinormalizzazione quando lo ho questo modello per la $\beta(g) = \beta_0 g^2$ con $\beta_0 = 3/16\pi^2$. Per vederlo dobbiamo risolvere l'equazione del gruppo di rinormalizzazione ovvero la (4.80)

$$\ln \frac{\mu}{\bar{\mu}} = \frac{1}{\beta_0} \int_{\bar{g}}^{g(\mu)} \frac{dg'}{g'^2} \implies \frac{1}{g(\mu)} - \frac{1}{\bar{g}} = -\beta_0 \ln \frac{\mu}{\bar{\mu}}, \quad (4.95)$$

ovvero

$$g(\mu) = \frac{\bar{g}}{1 - \bar{g}\beta_0 \ln \mu/\bar{\mu}}. \quad (4.96)$$

Ovviamente per $\mu = \bar{\mu}$ abbiamo $g(\mu) = \bar{g}$. Se $\beta_0 > 0$ possiamo vedere subito che, quando μ decresce il logaritmo è negativo decrescente e la costante di accoppiamento g cresce; quando μ cresce, il logaritmo è sempre positivo, la g sta crescendo; in questo ultimo caso la g cresce fin quando il denominatore non si annulla. Lo zero del denominatore è detto *polo di Landau*. Se $\beta_0 < 0$ avremmo

$$g(\mu) = \frac{\bar{g}}{1 + \bar{g}|\beta_0| \ln \mu/\bar{\mu}}, \quad (4.97)$$

quando μ cresce la g decresce, mentre quando μ decresce g cresce fino al polo di Landau (il polo di Landau è presente nella zona infrarossa). Questa formula è *non-perturbativa* in quanto la costante di accoppiamento è presente anche al denominatore. Se sviluppiamo la (4.96) in serie di potenze (è una serie geometrica) abbiamo

$$g(\mu) = \bar{g} \left(1 + \bar{g}\beta_0 \ln \frac{\mu}{\bar{\mu}} + \bar{g}^2\beta_0^2 \ln^2 \frac{\mu}{\bar{\mu}} + \dots \right) = \bar{g} + \bar{g}^2\beta_0 \ln \frac{\mu}{\bar{\mu}} + \bar{g}^3\beta_0^2 \ln^2 \frac{\mu}{\bar{\mu}} + \dots \quad (4.98)$$

Questi termini non sono la risommazione esatta della serie dei diagrammi; sono la risommazione di quelli che si chiamano *logaritmi leading*. In altri termini, non siamo in grado di calcolare ad ogni ordine tutti i diagrammi irriducibili ad una particella con le gambe esterne tagliate, ma siamo in grado di calcolare quelli che si comportano per grandi valori degli impulsi come un logaritmo alla massima potenza. Quindi fare questa approssimazione della β equivale a prendere diagrammi molto complicati ad ogni ordine e prendere ad ogni ordine quelli che sono più grandi di tutti gli altri e dire che la somma di quelli più grandi dà il contributo più grande alla somma, cosa che detta così non è molto convincente. Infatti in generale non è vero analiticamente: se noi abbiamo una serie perturbativa di cui conosciamo la somma non è detto che il termine dominante nella somma sia la somma dei termini dominanti. In questo caso abbiamo un armamentario abbastanza complesso che ci garantisce che potrebbe essere plausibile che questo avvenga. Pertanto l'oggetto in (4.98) è una risommazione di logaritmi leading: i logaritmi che compaiono in questa serie sono ordine per ordine i logaritmi leading che otteniamo dai diagrammi di Feynman.

Ora sono interessato a studiare il limite di $\Lambda \rightarrow \infty$ della mia teoria. Vogliamo capire, con gli strumenti del gruppo di rinormalizzazione, se siamo in grado di decidere se la teoria per $\Lambda \rightarrow \infty$ esiste o no. Il problema è molto ambizioso: vogliamo prendere una teoria qualsiasi ($\lambda\varphi^4$, QED, teorie di gauge non abeliane) e capire se, per $\Lambda \rightarrow \infty$, possono avere un senso non-perturbativo o no. Per farlo, devo andare a vedere la relazione che mi dice come è fatta la $g = g(g_0, \Lambda/\mu)$, o, invertendo $g_0 = g(g, \Lambda/\mu)$. Supponiamo che sappia come è fatta questa funzione. Un modello di questa curva (chiamato *modello di Landau*) è dato da

$$g = \frac{g_0}{1 + g_0\beta_0 \ln \Lambda/\mu}, \quad (4.99)$$

e serve per decidere quale g_0 dobbiamo mettere nel nostro integrale funzionale quando usiamo una teoria con cut-off Λ per riottenere una fisica di basse energie in cui la $g(\mu)$ al punto di sottrazione μ valga g . Sviluppando questa relazione abbiamo

$$g = g_0 \left(1 - g_0\beta_0 \ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_0^2\beta_0^2 \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + \dots \right) = g_0 - g_0^2\beta_0 \ln \frac{\Lambda}{\mu} + g_0^3\beta_0^2 \ln^2 \frac{\Lambda}{\mu} + \dots \quad (4.100)$$

notare che i primi due termini sono esattamente uguali a quelli trovati in precedenza dai diagrammi. Questa condizione di rinormalizzazione, nello spirito dei leading-log la possiamo prolungare andando a guardare

tutti i vari diagrammi all'ordine leading-log: risommando ci esce questa serie (questa sarebbe un accenno alla dimostrazione che non facciamo). La (4.101) è il prototipo non-perturbativo di quello che noi abbiamo trovato in teoria delle perturbazioni. Quando $g_0 = 0$ abbiamo $g = 0$ giustamente (teoria libera). In generale abbiamo una curva nel piano g , g_0 che dipende dal parametro Λ . Cosa succede se cambio Λ ? La curva cambierà e di conseguenza risaliremo ad un diverso valore di g_0 (avendo fissato precedentemente un g). Con una successione di queste curve possiamo ottenere il limite per $\Lambda \rightarrow \infty$ a g fissato. Ora, nel nostro caso, se $\beta_0 > 0$, g ha un asintoto orizzontale; nel modello di Landau se prendiamo la successione delle curve l'asintoto decresce e tende a zero per $\Lambda \rightarrow \infty$, e riotterremo una teoria libera, senza il termine di interazione che scompare. Se prendo un Λ fissato, non posso dare alla teoria una costante di accoppiamento rinormalizzata g che sia al di fuori di un certo intervallo. Se mando $\Lambda \rightarrow \infty$ non esiste nessun valore di g_0 tale che $g \neq 0$: per $\Lambda \rightarrow \infty$ l'unica teoria che esiste è quella libera. Questo se ci pensiamo un attimo non è sorprendente. Guardiamo alla teoria classica dell'elettrone. Consideriamo l'elettrone puntiforme: esso ha pertanto una self energia infinita (cioè il potenziale Coulombiano calcolato nel punto dell'elettrone diverge in $r = 0$ come $1/r$). Quindi ha una massa efficace relativistica infinita. Come facciamo a curare questa divergenza (grave e analoga a quella che c'è per la teoria quantistica dell'elettrone puntiforme)? Beh, introduciamo il solito cut-off: l'elettrone ha una certa struttura interna e non può essere considerato come puntiforme; lo immaginiamo perciò come una sferetta con raggio finito. A questo punto la self energia Coulombiana della sferetta è finita e quindi anche quella della particella. Adesso mi interessa sapere se questa teoria esiste quando il cut-off, ovvero il raggio della sferetta tende a 0. Cosa succede mano a mano che diminuisce il raggio della sferetta? La repulsione Coulombiana tra i vari punti della sferetta aumenta: per tenere insieme questa sferetta bisogna postulare l'esistenza di qualche forza che la tenga insieme (altro esempio: per tenere insieme un nucleo serve una forza di corto raggio molto intensa per poter vincere la repulsione Coulombiana). Pertanto a meno che non introduciamo un'altra forza (ma non sarebbe più elettrodinamica) l'elettrone non esisterebbe più in questo schema. In altre parole non ci aspettiamo che l'elettrodinamica da sola e un elettrone puntiforme possa esistere (perchè chi lo tiene insieme l'elettrone?). Questo a meno che la teoria non sia immersa in un'altra teoria più completa o ci sia un cut-off. Analogamente nel nostro caso, quando mandiamo il cut-off all'infinito, la carica elettrica fisica dell'elettrone cioè la costante di accoppiamento g deve decrescere con Λ , fino ad arrivare a 0 logaritmicamente, ovvero in assenza di altre forze l'unica teoria fisica possibile è quella libera. Questo ovviamente non è fondato a livello matematico, ma da punto di vista fisico è ragionevole. Naturalmente se le altre forze che tengono insieme l'elettrone si manifestano a scale di energia molto più elevate, e abbiamo un cut-off Λ che sta molto al di sotto dei risultati sperimentali che otteniamo (e di queste scale), niente ci vieta che questa teoria abbia un certo range di energie nelle quali fornisca il risultato corretto. Questo funziona per le teorie che sono asintoticamente libere nell'infrarosso. Per teorie asintoticamente libere nell'ultravioletto ($\beta_0 < 0$), l'argomento di Landau viene ribaltato. In questo caso

$$g = \frac{g_0}{1 - g_0 |\beta_0| \ln \Lambda / \mu}, \quad (4.101)$$

l'asintoto è verticale. Pertanto per qualunque valore io dia per la costante di accoppiamento rinormalizzata g io troverò sempre un valore g_0 che lo realizza. Se mandiamo $\Lambda \rightarrow \infty$ l'asintoto si schiaccia verso l'asse verticale. Sembra che io possa fare il limite per $\Lambda \rightarrow \infty$. Questo tipo di considerazioni mi porta a dire che *probabilmente* le teorie che sono asintoticamente libere nell'infrarosso non hanno un limite per $\Lambda \rightarrow \infty$ se sono da sole; quelle asintoticamente libere nell'ultravioletto apparentemente *potrebbero* esistere come teorie *isolate* in tutto l'universo (esempio: la QCD e basta! situazione che ovviamente non è fisica perchè poi ci sarebbe la gravità ecc...). Landau aveva visto all'inizio degli anni '50 che l'elettrodinamica diventava libera per $\Lambda \rightarrow \infty$ e concluse che la teoria doveva essere inconsistente (e lasciò perdere per sempre la teoria dei campi). Lui probabilmente aveva ragione (l'elettrodinamica da sola non è consistente), ma questo non ha molta importanza perchè non abbiamo bisogno di una teoria fisica che descriva tutte le scale di energia; a noi ci basta descrivere una teoria fisica all'interno di un certo range di scale. La QED questo lavoro lo fa egregiamente. Poi man mano che raggiungiamo scale più elevate la teoria fisica si allargherà e comprenderà nuove interazioni; questo è quello che sta succedendo attualmente: oltre la scala della QED si apre la scala del Modello Standard, che comprende la QED ma insieme ad altre interazioni. Anche il Modello Standard soffre di questo "vizio di trivialità" (banalità). Questo vuol dire che salendo in energia (anche se all'LHC nulla di nuovo si vede) si dovrebbe vedere qualcosa. Ma prima o poi qualcosa di nuovo ci sarà perchè quanto meno quando si arriverà alla scala di Planck ci sarà la gravità. Quello che succederà ad un certo punto (se mai ci si riuscirà) è che ci sarà una nuova fisica, il modello si aprirà e darà luogo ad una energia di cut-off

più elevata e ciò permetterà di andare ad esplorare energie più elevate. Solo nel caso delle teorie che siano asintoticamente libere nell'ultravioletto ci possiamo aspettare, per curiosità matematica, che queste teorie possano esistere da sole in un universo in cui c'è soltanto la QCD (che, ripeto, non è molto fisico in quanto se l'energia è molto grande lo spazio si incurva e c'è quanto meno la gravità da tenere in conto).

4.7.4 Invarianza di Scala

Vogliamo ora vedere come l'equazione di Callan-Symanzik è collegata con la cosiddetta *invarianza di scala*. Iniziamo discutendo il *Teorema di Eulero*. Supponiamo di avere a che se abbiamo una funzione F in un numero arbitrario di variabili $x_1, \dots, x_n \equiv x$. Il teorema di Eulero ci dice che, condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione F sia omogenea di grado D (ovvero che $F(\lambda x) = \lambda^D F(x)$) è che valga

$$x^i \frac{\partial F(x)}{\partial x^i} = DF(x), \quad (4.102)$$

dove abbiamo sottointeso come sempre la somma su indici ripetuti. La condizione necessaria è ovvia; chiamando infatti $x' = \lambda x$ e differenziando $F(x')$ rispetto ad λ abbiamo

$$\frac{\partial F(x')}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial \lambda} = x_i \frac{\partial F(x')}{\partial x'_i} = D \lambda^{D-1} F(x),$$

che è valida per ogni $\lambda > 0$; ponendo $\lambda = 1$ si ha la tesi. La dimostrazione sufficiente è poco più complicata e non la faremo. Questo teorema è importante perché, come abbiamo ben visto, la funzione di Green $G_n^{(R)}(\cdot; \mu, g)$ è una funzione omogenea di grado D_n ($D_n^{(x)}$ o $D_n^{(p)}$ a seconda se siamo nello spazio delle coordinate o degli impulsi). Limitiamoci per semplicità alla funzione di Green nello spazio delle coordinate per la quale $D_n^{(x)} = n$, ovvero abbiamo a che fare con una funzione omogenea di grado n in *energia*. Attenzione ovviamente: g è adimensionale e non dobbiamo riscalarlo; tuttavia dobbiamo riscalare sia le variabili x (dimensioni di una lunghezza cioè un inverso di una energia) e μ (dimensioni di una energia). Pertanto la funzione di Green soddisfa l'equazione

$$\mu \frac{\partial G_n^{(R)}}{\partial \mu} - x^i \frac{\partial G_n^{(R)}}{\partial x^i} = n G_n^{(R)} \quad (4.103)$$

il segno meno deriva dal fatto che dobbiamo riscalare le quantità che hanno dimensione di una energia con un fattore λ mentre le quantità che hanno dimensioni di un inverso di una energia di un fattore $1/\lambda$. In altre parole $1/x^i \frac{\partial G_n^{(R)}}{\partial 1/x^i} = -x^i \frac{\partial G_n^{(R)}}{\partial x^i}$. Questa equazione può essere inserita nell'equazione di Callan-Symanzik (4.67) ottenendo

$$x^i \frac{\partial G_n^{(R)}}{\partial x^i} = -n (1 + \gamma(g)) G_n^{(R)} - \beta(g) \frac{\partial G_n^{(R)}}{\partial g}. \quad (4.104)$$

Vediamo ora il significato dei vari termini.

- Iniziamo immaginando che $\gamma = \beta = 0$. L'equazione precedente si riduce a

$$x^i \frac{\partial G_n^{(R)}}{\partial x^i} = -n G_n^{(R)}.$$

Questo ci dice che le funzioni di Green ad n punti è una funzione omogenea di grado $-n$ delle posizioni. Questo ci dice che è una funzione che dipende solamente dai rapporti delle x^i con davanti una potenza opportuna. Per chiarire la cosa, prendiamo per semplicità la funzione di Green a due punti

$$G_2^{(R)}(x) = \frac{c}{x^2} F(x^1/x^2) = \frac{c}{x^2},$$

la dipendenza non può che essere da x^2 , che è quello che succede per la teoria libera. Non abbiamo una massa e la teoria è invariante di scala;

- $\beta = 0$. Abbiamo

$$x^i \frac{\partial G_n^{(R)}}{\partial x^i} = -n(1 + \gamma(g)) G_n^{(R)}.$$

Le funzioni di Green sono funzioni omogenee delle x di grado $-n(1 + \gamma)$: per questo la γ viene detta *dimensione anomala* del campo. Come è possibile questo (sembrerebbe violare l'analisi dimensionale in quanto le dimensioni di $G_n^{(R)}(x)$ valgono $1/x^n$ e non $1/x^{n(1+\gamma(g))}$)? Nel caso della funzione di Green a due punti avremmo $G_2^{(R)}(x) = c/x^{2(1+\gamma(g))}$. Questa espressione non ha più le dimensioni giuste in x . In realtà ci siamo scordati di un ulteriore parametro da cui dipende la $G_2^{(R)}(x)$, ovvero μ . In realtà quindi io la posso scrivere come funzione omogenea senza violare l'analisi dimensionale. Nel caso della funzione di Green a due punti quindi abbiamo

$$G_2^{(R)}(x) = \frac{1}{x^2 (\mu x)^{2\gamma(g)}},$$

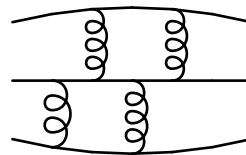
quindi se scalo solo la x ho una funzione omogenea di grado $-2(1 + \gamma(g))$, mentre se scalo sia la x che la μ i termini tra parentesi si compensano e abbiamo una funzione omogenea di grado -2 . Il termine γ , come dice il nome di dimensione anomala, rappresenta delle dimensioni aggiuntive che possiamo mettere dentro l'interazione;

- Se anche $\beta \neq 0$ l'invarianza di scala si perde completamente. Infatti il pezzo $-\beta(g) \frac{\partial G_n^{(R)}}{\partial g}$ nell'equazione (4.104) non lo posso interpretare con l'analisi di scala in nessun modo, a meno che la nostra costante di accoppiamento sieda esattamente su un valore che è la $\sqrt{\beta}$. In questo caso effettivamente abbiamo recuperato l'invarianza di scala con la dimensione anomala; questo è quello che succede con le transizioni di fase del secondo ordine. Tuttavia non c'è nessuna evidenza in una teoria di campo in 4 dimensioni che ci siano degli zeri della $\beta(g)$ (i cosiddetti punti fissi) con cui recuperare l'invarianza di scala.

L'equazione di Callan-Symanzik ci dice che l'invarianza di scala è brutalmente violata dal termine $-\beta(g) \frac{\partial G_n^{(R)}}{\partial g}$. Perchè è violata? Classicamente una teoria invariante di scala è una teoria in cui nell'azione non ci sono parametri dimensionali. Ad esempio una teoria scalare invariante di scala ha una azione

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{g_0}{4!} \varphi^4 \right) \quad (4.105)$$

Tutti i termini qui sono adimensionali (la g_0 è adimensionale). Questa teoria classicamente ha senso ed è invariante di scala: la soluzione riscalata è ancora una soluzione. Quantisticamente ciò non è vero perché per poter definire questa teoria avrei dovuto introdurre un cut-off e quest'ultimo viola l'invarianza di scala. Quando mandiamo $\Lambda \rightarrow \infty$ la scala indotta da Λ rimane sempre importante e si manifesta nella presenza del termine $-\beta(g) \frac{\partial G_n^{(R)}}{\partial g}$. Mentre quindi classicamente ciò ha senso (tramite una particella di massa nulla), quantisticamente non è possibile (bisogna aggiungere un termine di massa nella lagrangiana $m_0^2/2\varphi^2$ da aggiustare in maniera tale che questa particella resti a massa nulla). Quindi questa teoria viola l'invarianza di scala e questo si manifesta dal fatto che l'equazione di Eulero viene sostituita dall'equazione di Callan-Symanzik. La simmetria per invarianza di scala fu considerata negli anni '70 come una possibile simmetria approssimata della natura ma poi in realtà l'equazione di Callan-Symanzik ha eliminato queste considerazioni e queste possibilità.



Capitolo 5

Teorie di Gauge

Per arrivare a quantizzare le teorie di Gauge dobbiamo prima introdurre alcuni concetti fondamentali sui campi fermionici.

5.1 Campi Fermionici

Fino al momento in cui quantizziamo teorie di campo bosoniche la prescrizione è semplice: prendiamo l'azione classica $S(\Phi)$, passiamo all'europeo $S_E(\Phi)$ e poi possiamo introdurre il funzionale generatore $Z(J)$ associando al campo Φ una sorgente J ; derivando il funzionale generatore possiamo ottenere tutte le funzioni di Green (europee). Queste funzioni di Green sono il prolungamento analitico nell'europeo dei T-prodotti dei campi. Queste quantità sono simmetriche nello scambio di due dei loro argomenti (non importa l'ordine con cui facciamo le derivate del funzionale generatore).

Quando introduciamo i fermioni, per motivi di covarianza di Lorentz, i T-prodotti si devono definire come quantità antisimmetriche. Ad esempio se abbiamo due operatori fermionici $\psi_a(x)$, $\bar{\psi}_b(x)$ e dobbiamo fare il T-prodotto della loro moltiplicazione abbiamo che

$$\langle 0 | T(\psi_a(x) \bar{\psi}_b(x)) | 0 \rangle = -\langle 0 | T(\bar{\psi}_b(x) \psi_a(x)) | 0 \rangle \quad (5.1)$$

dove a e b sono indici di Lorentz. Il funzionale generatore, pertanto non si può introdurre in maniera analoga al caso dei bosoni. Per definire un funzionale generatore fermionario dovremo introdurre due sorgenti $\eta(x)$, $\bar{\eta}(x)$ (ognuna che ha 4 valori, contraddistinti da un indice di Dirac a, b) e fare

$$\begin{aligned} Z(\eta, \bar{\eta}) &= \langle 0 | T \exp \left\{ i \int d^4x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right\} | 0 \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \langle 0 | T [(\bar{\eta}(x_1)\psi(x_1) + \bar{\psi}(x_1)\eta(x_1)) \dots (\bar{\eta}(x_n)\psi(x_n) + \bar{\psi}(x_n)\eta(x_n))] | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ad esempio per $n = 2$ abbiamo

$$\begin{aligned} &\int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)_{x_1} (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)_{x_2} | 0 \rangle \\ &= \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T(\bar{\eta}(x_1)\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)\eta(x_2) + \bar{\psi}(x_1)\eta(x_1) \bar{\eta}(x_2)\psi(x_2)) | 0 \rangle \\ &= \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | T(\bar{\eta}(x_1)\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)\eta(x_2) + \bar{\psi}(x_2)\eta(x_2) \bar{\eta}(x_1)\psi(x_1)) | 0 \rangle \end{aligned}$$

in quanto il prodotto $\psi(x_1)\psi(x_2)$ genera stati con carica +2 che è ortogonale al vuoto. Gli unici termini che sopravvivono sono pertanto quelli con carica nulla. Nell'ultimo passaggio abbiamo notato che possiamo rinnominare gli indici. Ora se le sorgenti $\eta, \bar{\eta}$ fossero delle sorgenti bosoniche normali potrei mettere in evidenza il

prodotto $\bar{\eta}(x_1) \eta(x_2)$ e moltiplicare per $\langle 0 | T(\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) + \bar{\psi}(x_2) \psi(x_1)) | 0 \rangle$ che è zero per l'antisimmetria del T-prodotto. La soluzione di questo problema è quello di considerare le $\eta, \bar{\eta}$ non come sorgenti numeriche bosoniche, ma come sorgenti numeriche anticommutanti. Per poter mettere in evidenza devo quindi scambiare le sorgenti e quindi riottengo un segno meno. Per definire un funzionale generatore pertanto, per non avere cose banali, siamo costretti a considerare $\eta, \bar{\eta}$ come sorgenti numeriche il cui anticommutatore è 0 in ogni punto dello spazio tempo; sono quelle che si chiamano *algebra di Clifford*. Ora devo imparare a fare derivate e integrali funzionali rispetto a queste variabili anticommutanti.

5.1.1 Integrazione e derivazione per funzioni di 1 o 2 variabili di Grassmann

Partiamo dall'analisi di una variabile C numerica anticommutante (*variabile di Grassmann*)

$$\{C, C\} = 0 \implies C^2 = 0.$$

Pertanto ogni funzione $f(C)$ è un polinomio di primo grado $f(C) = \alpha + \beta C$ dove α, β possono essere numeri reali o complessi. La sua derivata sarà definita in questo modo

$$\frac{df(C)}{dC} = \beta.$$

Vogliamo ora definire l'integrale nel senso di integrale definito non indefinito (non ha senso che mettiamo degli estremi)! L'integrale dovrà essere un funzionale lineare che data una funziona $f(C)$, mi restituisce un numero reale o complesso.

$$\int dC f(C) = \int dC (\alpha + \beta C) = \alpha \int dC + \beta \int dC C.$$

Attenzione ovviamente a mantenere sempre l'ordine della variabile C con il suo differenziale. Per definire come è fatto l'integrale dovrò dire quanto fanno gli ultimi due membri. Vogliamo che anche il nuovo tipo di integrazione soddisfi il fatto che l'integrale di una derivata faccia zero. Nel caso bosonico ricordiamo infatti che $\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) dx = 0$ (notare che nel caso fermionico non ci stanno questi estremi, ma supponiamo che l'integrale sia fatto comunque su tutto il range su cui corrono queste variabili). Questa proprietà era quella che ci permetteva di fare l'integrazione per parti con gli integrali funzionali. Questa proprietà è cruciale e la voglio mantenere anche in questo caso qui. Definiamo quindi

$$\int \frac{df(C)}{dC} dC = \alpha \int dC \equiv 0. \quad (5.3)$$

Per quanto riguarda il secondo termine imponiamo che

$$+ \beta \int dC C \equiv \beta. \quad (5.4)$$

Notare che $\frac{d^2 f(C)}{dC^2} = 0$ ovvero tutte le derivate sono zero. Nel caso di due variabili C_1, C_2 anticommutative (quadrati nilpotenti $C_1^2 = 0, C_2^2 = 0$ e $C_1 C_2 = -C_2 C_1$). Una funzione generica di queste due variabili può essere solo del tipo

$$f(C_1, C_2) = \alpha + \beta C_1 + \gamma C_2 + \delta C_1 C_2$$

Per le derivate parziali prime avremo $\frac{\partial f}{\partial C_1} = \beta + \delta C_2$ e $\frac{\partial f}{\partial C_2} = \gamma - \delta C_1$ (la regola imposta è quella che si aggiunga un segno meno quando “scavalchiamo” C_1 per portare a contatto la derivata con C_2); per quanto riguarda le derivate seconde miste invece $\frac{\partial^2 f}{\partial C_2 \partial C_1} = \delta$, $\frac{\partial^2 f}{\partial C_1 \partial C_2} = -\delta$. Su queste variabili il teorema di Schwarz sullo scambio delle derivate seconde è valido a meno di un segno meno. Per quanto riguarda l'integrazione abbiamo

$$\int dC_1 dC_2 f(C_1, C_2) = \alpha \int dC_1 dC_2 + \delta \int dC_1 dC_2 C_1 C_2 = -\delta \int dC_1 C_1 dC_2 C_2 = -\delta.$$

dove abbiamo ricordato che sappiamo fare l'integrale quando la C è attaccata al corrispondente differenziale dC da destra.

5.1.2 Integrazione Gaussiana

Per variabili bosoniche sappiamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^n dx_i e^{-\sum_{ij} x_i A_{ij} x_j} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}$$

dove A è una matrice simmetrica (se non lo fosse comunque sia la sua parte antisimmetrica svanirebbe quando facciamo la somma all'esponenziale in quanto il prodotto $x_i x_j$ è simmetrico). Ora voglio calcolarmi l'analogo per delle variabili Grassmanniane. Facciamo il caso semplice a due variabili

$$\int dC_1 dC_2 e^{\sum_{ij}^2 C_i B_{ij} C_j}.$$

In questo caso la matrice B deve essere antisimmetrica perché il prodotto $C_1 C_2$ è antisimmetrico. Espandendo in serie l'esponenziale (sopravvivono solo i termini fino al primo ordine) abbiamo

$$\int dC_1 dC_2 [1 + C_1 B_{12} C_2 + C_2 B_{21} C_1] = 2 \int dC_1 dC_2 C_1 B_{12} C_2 = -2B_{12} = -2\sqrt{\det B}.$$

La costante -2 non ci interessa in quanto gli integrali funzionali saranno normalizzati. Quello che è importante e che ci servirà è la dipendenza dalla matrice che mettiamo all'esponente. Come si può notare la dipendenza è invertita tra caso bosonico e caso fermionico. Questa corrispondenza è vera per qualunque numero pari di variabili Grassmanniane. In altri termini

$$\int dC_1 \dots dC_n e^{\sum_{ij} C_i A_{ij} C_j} = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ \propto \sqrt{\det A} & n \text{ pari} \end{cases} \quad (5.5)$$

Se n è dispari il risultato è 0 in quanto tutti i termini dell'espansione hanno un numero pari di C_i : quindi esisterà qualche dC_j che non viene accompagnato dal suo corrispettivo C_j . Se n è pari otteniamo qualcosa di proporzionale alla radice di un determinante. Allora noi potremmo dire ma come è possibile? Questo è un polinomio in A , dove viene fuori la radice? Questa matrice $A_{ij} = -A_{ji}$ è antisimmetrica. Esiste un teorema che dice che il determinante di una matrice antisimmetrica è il quadrato (perfetto) di una quantità che si chiama *Pfaffiano*

$$\det A = (\text{Pf } A)^2.$$

Lo Pfaffiano è una espressione che non contiene radici; è semplicemente un polinomio negli elementi di matrice di A e il determinante è il quadrato di un polinomio; la radice quadrata del determinante è quindi effettivamente un polinomio, lo Pfaffiano.

5.1.3 Integrazione su variabili complesse

Nel caso bosonico o possiamo separare il contributo dei campi in $\Phi_1 + i\Phi_2$ oppure, per fare una cosa più raffinata introduciamo due campi indipendenti Φ e $\bar{\Phi}$ su cui facciamo l'integrazione funzionale

$$\int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Phi} e^{-\int [\partial\bar{\Phi}\partial\Phi + m^2\bar{\Phi}\Phi + \frac{g}{4!}(\bar{\Phi}\Phi)^2] + \int \bar{J}\Phi + \bar{\Phi}J}$$

Successivamente possiamo fare derivate funzionali rispetto a J , \bar{J} e quando andremo a fare l'integrale questo sarà definito come un integrale fatto su Φ_1 e Φ_2 (ovvero un integrale fatto su parte reale e parte immaginaria). Inizio comunque sia definendo

$$\int dz d\bar{z} e^{-\alpha\bar{z}z} = \int dx dy e^{-\alpha(x^2+y^2)} = \frac{\pi}{\alpha}$$

e in generale

$$\int \prod_{i=1}^n dz_i d\bar{z}_i e^{-\sum_{ij} \bar{z}_i A_{ij} z_j} = \frac{\pi^n}{\det A}.$$

Nel caso di variabili Grassmanniano non esiste una operazione di coniugio. Prendiamo in esempio il caso ad una variabile (complessa). Possiamo rinominare $C_1 = C$ e $C_2 = \bar{C}$. Vogliamo fare pertanto

$$\int dC d\bar{C} e^{\bar{C}\alpha C} = \alpha \int dC d\bar{C} \bar{C} C = \alpha$$

in generale avremo

$$\int dC_1 \dots dC_n d\bar{C}_1 \dots \bar{C}_n e^{\sum_{ik} \bar{C}_i B_{ik} C_k} \propto \det B.$$

In parole povere tutto quello che abbiamo detto in questi ultimi due paragrafi è che

	Bosoni	Fermioni
Caso Reale:	$\int d^n x e^{-x A x} = \frac{1}{\sqrt{\det A}}$	$\int d^n C e^{C B C} = \sqrt{\det B}$
Caso Complesso:	$\int d^n z d^n \bar{z} e^{-\bar{z} A z} = \frac{1}{\det A}$	$\int d^n C d^n \bar{C} e^{\bar{C} B C} = \det B$

avendo considerato nel caso fermionico n pari. Questa banalità ha delle conseguenze fisiche. Vedremo che la differenza tra \det e $1/\det$ è esattamente la regola determinata dal fattore -1 che dobbiamo aggiungere ad ogni loop fermionario chiuso.

5.1.4 Integrale funzionale fermionario

Possiamo ora definire il nostro funzionale generatore fermionario nel caso minkowskiano come

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i \int d^4 x (\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + i \int d^4 x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta))}. \quad (5.6)$$

Notare che non abbiamo problemi di convergenza in quanto abbiamo a che fare con variabili fermioniche (non abbiamo degli estremi all'integrale, è tutto puramente algebrico). Vogliamo ora calcolarci quanto vale

$$\left. \frac{\partial^2 Z(\eta, \bar{\eta})}{\partial \bar{\eta}_l(y) \partial \eta_k(x)} \right|_{\eta=\bar{\eta}=0}$$

Nel caso bosonico avrei una inserzione di $\psi, \bar{\psi}$; nel caso fermionario però dobbiamo vedere bene in quale ordine queste inserzioni compaiono. Quello che potremmo fare ovviamente è discretizzare lo spazio-tempo e chiuderlo in un ipervolume V (in questo modo l'integrale diventa finito-dimensionale ovvero abbiamo una integrazione per ogni sito del reticolato e un numero finito di siti). A questo punto potremmo sviluppare il termine (da discretizzare) $e^{i \int d^4 x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)}$ in un polinomio finito di grado tanto più elevato quanti più punti ho in questo ipervolume e poi usare le regole di integrazione che abbiamo usato prima. Questa è la procedura che farei al computer. Notare che in $e^{i \int d^4 x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)}$ i blocchi che coinvolgono il prodotto delle η e ψ sono blocchi bosonici (coppie di variabili fermioniche). In altre parole le posso spostare come mi pare e posso sviluppare questo oggetto come se fossero degli oggetti numerici. Abbiamo

$$e^{i \int d^4 x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)} = 1 + i \int d^4 x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) + \frac{i^2}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)_{x_1} (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)_{x_2} + \dots$$

Abbiamo sviluppato fino al secondo ordine non perchè gli altri termini siano nulli, ma perchè voglio eseguire una operazione in cui eliminerò una η , una $\bar{\eta}$ e poi li pongo a 0. Quindi se ho troppi η (più di 2) non ne taglio abbastanza con le derivate e avrò 0; Ovviamente anche i termini di primo e di ordine zero non conteranno ai fini della derivata. Andiamo ora a sviluppare il termine del secondo ordine e facciamone la derivata in $\eta_k(x)$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta_k(x)} \int d^4 x_1 d^4 x_2 (\bar{\eta}(x_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \eta(x_2) + \bar{\psi}(x_1) \eta(x_1) \bar{\eta}(x_2) \psi(x_2)) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \{-\delta^4(x_2 - x) \bar{\psi}_k(x_2) \bar{\eta}(x_1) \psi(x_1) - \delta^4(x_1 - x) \bar{\psi}_k(x_1) \bar{\eta}(x_2) \psi(x_2)\} \\ &= \int d^4 x_1 (\bar{\psi}_k(x) \bar{\eta}(x_1) \psi(x_1)) \end{aligned}$$

avendo ricordato che $\frac{\partial \eta_l(x)}{\partial \eta_m(y)} = \delta^4(x-y) \delta_{lm}$ e che scambiare la derivata con le η o le ψ porta un segno meno. Abbiamo quindi che

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_l(y)} \int d^4x_1 (\bar{\psi}_k(x) \bar{\eta}(x_1) \psi(x_1)) = -\bar{\psi}_k(x) \psi_l(y) = \psi_l(y) \bar{\psi}_k(x).$$

Abbiamo trovato pertanto che

$$\frac{1}{Z(0,0)} \left. \frac{\partial^2 Z(\eta, \bar{\eta})}{\partial \bar{\eta}_l(y) \partial \eta_k(x)} \right|_{\eta=\bar{\eta}=0} = \langle 0 | T (\psi_l(y) \bar{\psi}_k(x)) | 0 \rangle \quad (5.7)$$

nel Minkowskiano. Questa proprietà ovviamente vale per derivate di qualsiasi ordine. Ora adesso andiamo a fare tutti i passaggi che avevamo eseguito in precedenza con l'integrale funzionale bosonico. La prima cosa che abbiamo fatto è passare all'euclideo. Si procede in maniera formale

$$ix_M = x_E \implies d^4x_M = -id^4x_E.$$

andiamo ora a sondare bene la dipendenza dal tempo nell'azione di Dirac

$$\bar{\psi} \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi = \bar{\psi} \left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x_M^0} + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - m \right) \psi = \bar{\psi} \left(i(i\gamma^0) \frac{\partial}{\partial x_E^0} + i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} - m \right) \psi. \quad (5.8)$$

Quello che conviene fare quando passiamo all'euclideo è definire $\gamma_E^0 = i\gamma_M^0$ (questa è una convenzione possibile). In questo caso tutte e quattro le γ^μ diventano antihermitiane. Ricorda invece che nel caso di Klein-Gordon avevo la derivata seconda nel tempo che cambiava segno. Il funzionale generatore euclideo nella teoria libera sarà quindi

$$Z_E(\eta, \bar{\eta}) = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{\int d^4x_E \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + \int d^4x_E (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)}. \quad (5.9)$$

dove lo "slash" adesso è eseguito con le gamma euclidee.

5.1.5 Propagatore Fermionico Libero

I fermioni hanno una peculiarità, che adesso vedremo, che nelle teorie rinormalizzabili in 4 dimensioni possono essere integrate esattamente in quanto l'integrazione è sempre gaussiana. Prendiamo ora una teoria con una densità Lagrangiana (euclidea) che contenga un campo bosonico scalare Φ , un campo fermionario ψ e la loro interazione

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + c\Phi + \frac{1}{2}\mu_0^2\Phi^2 + \rho\Phi^3 + \lambda\Phi^4 + \frac{g}{3}\bar{\psi}\psi\Phi \quad (5.10)$$

Nel costruire la densità Lagrangiana abbiamo tenuto in conto delle seguenti cose. In primo luogo la Lagrangiana è uno scalare, quindi non può contenere un numero dispari di campi fermionici (se c'è ψ deve esserci anche $\bar{\psi}$, insieme si comportano come uno scalare di Lorentz). In secondo luogo i campi ψ di Dirac hanno dimensione 3/2 in energia; pertanto il termine $\bar{\psi}\psi$ ha dimensione 3. Se io volessi inserire un termine con 4 fermioni e quindi del tipo $(\bar{\psi}\psi)^2$ questo avrebbe dimensione 6. Questo significa che la costante di accoppiamento G che ci devo mettere davanti ha dimensioni in energia (affichè l'azione sia adimensionale!) -2, il che significa che la teoria non sarebbe rinormalizzabile. In dimensioni più alte (di $D=6$) si possono fare teorie rinormalizzabili che contengono nella densità di lagrangiana termini a 4 fermioni. Ma in $D=4$ i campi fermionici possono comparire al più quadraticamente il che significa che l'integrale funzionale sui gradi di libertà fermionici sarà Gaussiano e potrà essere calcolato esattamente. Il termine di interazione $\frac{g}{3}\bar{\psi}\psi\Phi$ è buono ai fini della rinormalizzabilità della teoria (la costante di accoppiamento g ha dimensione nulla). Ora dobbiamo chiederci se abbiamo inserito tutti i termini compatibili con le simmetrie del problema con costanti di accoppiamento di dimensioni maggiori o uguali a 0 in energia. Rispetto alla teoria libera abbiamo perso una simmetria di $\Phi \rightarrow -\Phi$ in quanto il termine di interazione appena discusso è lineare in Φ . Se consideriamo il campo Φ come un campo scalare allora il termine di interazione è invariante sotto parità (in quanto $\bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}\psi$ e il campo ψ è uno scalare $\Phi'(x') = \Phi(x)$). In questo modo si giustificano anche tutti i termini di autointerazione di Φ fino alla potenza quarta $\lambda\Phi^4$ è invariante sotto parità ed ha

una costante di accoppiamento λ adimensionale (sarebbe invariante anche se Φ fosse uno pseudoscalare). In totale avrei 6 parametri liberi. Però potrei considerare il campo Φ come uno psudoscalare e avere come densità Lagrangiana la seguente quantità

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\partial - m) \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{1}{2} \mu_0^2 \Phi^2 + \lambda \Phi^4 + g \bar{\psi} \gamma^5 \psi \Phi \quad (5.11)$$

Il nuovo termine di interazione è invariante sotto parità in quanto il termine $\bar{\psi} \gamma^5 \psi$ si trasforma come uno pseudoscalare. I termini lineari e cubici in Φ (ovvero $c\Phi$ e $\rho\Phi^3$) posso aggiungerli se voglio ma non sono obbligato; se non ce li ho questa teoria rimane invariante sotto parità; se invece ce li aggiungo la parità viene violata, ma non succede niente (sarebbero invece necessari se il campo Φ fosse scalare). (PERCHÈ ALLORA L'ACCOPPIAMENTO HA UN GAMMA5?) Pertanto se l'accoppiamento ha un γ^5 , la teoria risulta essere rinormalizzabile. Anche in questo caso i fermioni compaiono quadraticamente. Andiamo quindi a calcolarci il funzionale generatore

$$Z_E(J, \eta, \bar{\eta}) = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\Phi e^{-S_E(\Phi, \psi, \bar{\psi}) + \int d^4x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J\Phi)} . \quad (5.12)$$

dove $S_E(\Phi, \eta, \bar{\eta}) = \int d^4x (-\bar{\psi} (i\partial - m) \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{1}{2} \mu_0^2 \Phi^2 + \lambda \Phi^4 + g \bar{\psi} \gamma^5 \psi \Phi)$. Naturalmente per il funzionale generatore vero e proprio dobbiamo dividere per $Z_E(0, 0, 0)$. Adesso quello che facciamo è estrarre la dipendenza dai campi fermionici ed eseguire l'integrazione Grassmanniana

$$Z_E(J, \eta, \bar{\eta}) = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_0(\Phi) - \lambda \int d^4x \Phi^4 + \int d^4x J\Phi} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{\int d^4x \bar{\psi}(iD(\Phi) - m)\psi + \int d^4x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)} \quad (5.13)$$

dove con $D(\Phi) = \partial + ig\gamma^5\Phi$ è un operatore differenziale del primo ordine che ha dipendenza da un Φ generico. Se siamo interessati alla teoria libera dei fermioni dobbiamo inserire $\Phi = 0$. Notare che quando faccio l'integrale fermionario dovrei specificare la misura (il prodotto $\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}$) in quanto se scambio questi due elementi di misura cambia un segno. Tuttavia visto che sto normalizzando ad 1, se mantengo lo stesso ordinamento sopra e sotto questo problema diventa irrilevante (non conta l'ordine). Per calcolare l'integrale gaussiano fermionario, mi devo calcolare il punto di stazionarietà dell'esponenziale rispetto a ψ e $\bar{\psi}$ (sono variabili indipendenti). Una volta calcolato l'estremo lo userò come punto di origine per l'integrazione: la parte lineare se ne andrà e la parte quadratica vedremo che darà origine a qualcosa di interessante. Facciamo le due variazioni (la prima rispetto a $\bar{\psi}$ e la seconda rispetto a ψ)

$$\begin{cases} (iD(\Phi) - m) \tilde{\psi}(x) + \eta(x) = 0 \\ \tilde{\bar{\psi}}(x) \left(i\overleftarrow{D}(\Phi) - m \right) + \bar{\eta}(x) = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

notare come nella seconda equazione il cambio di segno è ininfluente (ogni termine avrebbe un meno perché va scambiata la variazione una volta). La seconda equazione è più elaborata: quando andiamo a fare la variazione otteniamo $\int d^4x [\bar{\psi}(iD(\Phi) - m) + \bar{\eta}] \delta\psi$; ora per fare agire ∂ su $\bar{\psi}$ bisogna effettuare una integrazione per parti; pertanto abbiamo un cambio di segno per ∂ e simbolicamente $\overleftarrow{\bar{\psi} D(\Phi)} = (-\partial + ig\gamma^5\Phi) \bar{\psi}$. Le (5.14) sono due equazioni lineari a coefficienti non costanti (sono difficili da risolvere). Prendiamo la prima delle due e risolviamola formalmente con il metodo delle funzioni di Green

$$(iD(\Phi) - m) S_F(x, y, \Phi) = -\delta^4(x - y) . \quad (5.15)$$

Qui ci sono due cose in più rispetto alla teoria libera dei propagatori: questi sappiamo bene che non dipendono da Φ (non c'è dipendenza da Φ nelle equazioni del moto); in più i propagatori liberi dipendono, per l'invarianza per traslazioni dalla differenza $x - y$. Qui naturalmente a causa della dipendenza dalla Φ l'invarianza per traslazioni è violata. Risolvere quest'ultima equazione non è possibile ed è praticamente come risolvere una equazione di Dirac o di Schrödinger in presenza di un qualsiasi potenziale esterno Φ . Una volta trovata questa funzione di Green la $\tilde{\psi}(x)$ si esprime in questo modo

$$\tilde{\psi}(x) = \int d^4y S_F(x, y, \Phi) \eta(y) . \quad (5.16)$$

Anche per $\tilde{\psi}(x)$ esisterà una analoga espressione in termini di una funzione di Green aggiunta e di $\bar{\eta}$; tuttavia per fortuna non serve. Ora posso scrivere

$$\begin{cases} \psi(x) = \tilde{\psi}(x) + \xi(x) \\ \bar{\psi}(x) = \tilde{\bar{\psi}}(x) + \bar{\xi}(x) \end{cases} \quad (5.17)$$

dove $\xi(x)$ (e $\bar{\xi}(x)$) sono altre 4 variabili Grassmaniane. Il mio integrale sarà

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\bar{\xi} e^{\int d^4x (\tilde{\psi} + \bar{\xi})(iD(\Phi) - m)(\tilde{\psi} + \bar{\xi}) + \int d^4x (\bar{\eta}\tilde{\psi} + \tilde{\bar{\psi}}\eta + \bar{\eta}\xi + \bar{\xi}\eta)} \\ &= e^{\int d^4x \tilde{\psi}(iD(\Phi) - m)\bar{\psi} + \int d^4x (\bar{\eta}\tilde{\psi} + \tilde{\bar{\psi}}\eta)} \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\bar{\xi} e^{\int d^4x \bar{\xi}(iD(\Phi) - m)\tilde{\xi}} = e^{\int d^4x \bar{\eta}\tilde{\psi}} \det(iD(\Phi) - m) \\ &= e^{\int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x, y, \Phi) \eta(y)} \det(iD(\Phi) - m) \end{aligned} \quad (5.18)$$

ricorda che in virtù della stazionarietà i termini lineari in ξ e $\bar{\xi}$ nell'integrale se ne vanno. Nota che questo oggetto non può essere normalizzato (in realtà abbiamo eliminato solamente le costanti di proporzionalità del determinante) in quanto quello che viene normalizzato è l'integrale complessivo (dobbiamo anche integrare su Φ). Questo determinante è un oggetto non banale in quanto dipende da Φ : quando dovrò integrare su Φ mi dovrò preoccupare della cosa.

Vogliamo ora risolvere la teoria libera fermionica, ovvero quella con $\Phi = 0$. In questo caso posso buttare il determinante in quanto si elimina con il denominatore. In questo caso la (5.15) assume la forma

$$(i\cancel{\partial}_x - m) S_F(x - y) = -\delta^4(x - y) \quad (5.19)$$

avendo usato il fatto che per $\Phi = 0$ la teoria è invariante per traslazioni. Questa equazione si risolve con il metodo della trasformata di Fourier.

$$(i\cancel{\partial}_x - m) S_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (\cancel{p} - m) \tilde{S}_F(p) e^{-ip(x-y)} = -\delta^4(x - y) \quad (5.20)$$

da cui

$$\tilde{S}(p) = -\frac{1}{\cancel{p} - m}. \quad (5.21)$$

Non facciamoci ingannare con la somiglianza di questo oggetto con l'analogo Minkowskiano; in realtà questo è molto diverso: infatti se razionalizziamo il denominatore moltiplicando e dividendo per $\cancel{p} + m$ questo risulta essere pari a

$$-\frac{\cancel{p} + m}{\cancel{p}^2 - m^2} = -\frac{\cancel{p} + m}{-\cancel{p}_E^2 - m^2} = \frac{\cancel{p} + m}{\cancel{p}_E^2 + m^2} \quad (5.22)$$

poichè in $(\cancel{p})^2$ vi sono 4 matrici antihermitiane. Ricordiamo infatti che nel caso Minkowskiano $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, con il prodotto scalare minkowskiano

$$\cancel{p}_M^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = p_M^2 \quad (5.23)$$

Nel caso euclideo, invece, poichè le matrici sono tutte e quattro antihermitiane abbiamo che $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} = -2\mathbb{I}$, e pertanto avremo

$$\cancel{p}_E^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -p_\mu p_\mu = -p_E^2 \quad (5.24)$$

Deduciamo che il propagatore fermionario euclideo non ha (come quello bosonico) i poli sull'asse reale di p^0 . I poli vengono ovviamente recuperati quando faccio l'antirotazione di Wick (e li dovrò aggirare nel verso giusto). Abbiamo trovato

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = e^{\int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y)} \quad (5.25)$$

con

$$S_F(x-y) = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p-m}. \quad (5.26)$$

Ora il teorema di Wick ci dice che quando facciamo le derivate rispetto a η , $\bar{\eta}$ costruiamo funzioni di Green che contengono tante ψ e tante $\bar{\psi}$ prendendo le sorgenti pari a 0. Quindi otterremo tutte le possibili combinazioni a coppie delle contrazioni delle varie coppie di ψ e $\bar{\psi}$ con i giusti segni (perchè queste η sono anticommutanti).

5.1.6 Propagatore Fermionico nel caso interagente

Ora ci interessa sapere cosa succede quando teniamo anche la Φ . Il funzionale generatore sarà fatto in questo modo

$$Z(J, \eta, \bar{\eta}) = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_0(\Phi) - \lambda \int d^4x \Phi^4 + \int d^4x J\Phi} e^{\int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x, y, \Phi) \eta(y)} \det(iD(\Phi) - m) \quad (5.27)$$

La situazione si complica: la $S_F(x, y, \Phi)$ non è nota e dovrei saper fare un determinante infinito dimensionale che non ho proprio idea di cosa sia. Ovviamente dovremo dividere $Z(J, \eta, \bar{\eta})$ per $Z(0, 0, 0)$ che conterrà tutti i diagrammi sconnessi vuoto-vuoto.

Supponiamo ora di volerci calcolare le funzioni di Green

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_m(y) \psi_l(x) \rangle &= \frac{1}{Z(0, 0, 0)} \frac{\partial^2 Z(J, \eta, \bar{\eta})}{\partial \eta_m(y) \partial \bar{\eta}_l(x)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=J=0} \\ &= \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_0(\Phi) - \lambda \int d^4x \Phi^4} S_F(x, y, \Phi) \det(iD(\Phi) - m) \end{aligned} \quad (5.28)$$

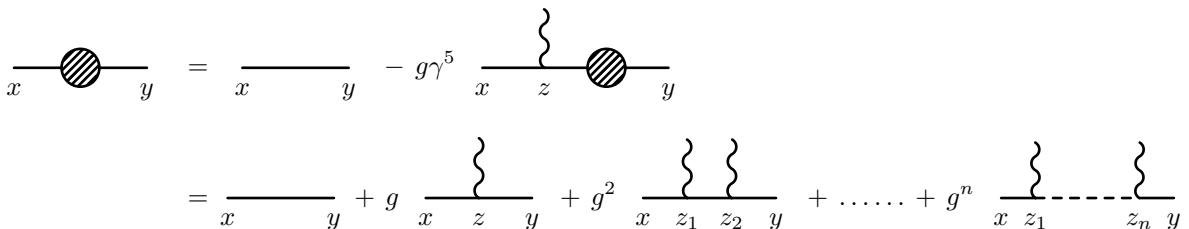
Ora l'idea è ricavare la $S_F(x, y, \Phi)$ in serie perturbativa in g ; a $g = 0$ la so risolvere, è quella libera; adesso quindi andiamo a vedere come sono fatti i diagrammi di Feynman che contribuiscono a questo pezzo dell'oggetto che stiamo calcolando. Naturalmente avrei potuto fare qualcosa di molto più semplice: ovvero potevo eseguire una teoria delle perturbazioni *fin da subito* rispetto all'inserzione di λ e di g e analizzare i diagrammi di Feynman. Tuttavia voglio farlo così in quanto in questo modo posso andare a vedere quali blocchi di diagrammi di Feynman vanno a finire dentro $S_F(x, y, \Phi)$ e quali dentro $\det(iD(\Phi) - m)$. Messi insieme saranno i diagrammi di Feynman che avrei ottenuto se avessi fatto l'espansione fino all'ordine che mi interessava in λ e g (nel nostro caso λ è scritta esplicitamente nell'esponenziale, mentre g è contenuta implicitamente all'interno di $S_F(x, y, \Phi)$). Sto guardando un problema di riordinamento della serie perturbativa. Questi integrali possono essere calcolati numericamente; ora andremo a vedere il caso analitico. Iniziamo con l'espandere in serie di g il nostro $S_F(x, y, \Phi)$ (l'espansione in λ è molto più semplice); ricordando che $D(\Phi) = \not{D} + ig\gamma^5\Phi$, abbiamo

$$(i\not{D}_x - m) S_F(x, y, \Phi) = -\delta^4(x-y) + g\gamma^5\Phi(x) S_F(x, y, \Phi). \quad (5.29)$$

Adesso io posso trasformare questa equazione differenziale in una integrale semplicemente moltiplicandola per l'inverso dell'operatore libero ($i\not{D}_x - m$). Otteniamo

$$S_F(x, y, \Phi) = S_0(x-y) - g\gamma^5 \int d^4z S_0(x-z) S_F(z, y, \Phi) \Phi(z) \quad (5.30)$$

come si può facilmente verificare riapplicando a destra e sinistra ($i\not{D}_x - m$). Ora posso iterare l'equazione. La cosa è molto più facile da vedere diagrammaticamente



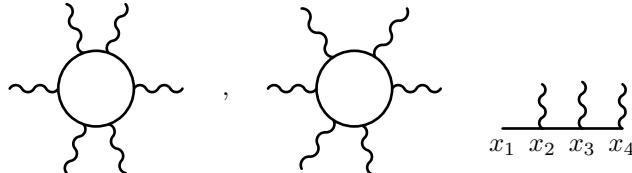
dove con ζ_z si è indicato il campo Φ che “esce” da z . All’ordine n abbiamo una “emissione” di n campi bosonici (ho un polinomio nelle Φ). Ho lasciato implicito il fatto che ogni vertice porta un fattore $-\gamma^5$. Abbiamo pertanto che, espandendo in serie di potenze di λ e trascurando il determinante, troviamo

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}(y) \psi(x) \rangle &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_0(\Phi)} \left(x \frac{}{y} + g \frac{\zeta}{x \ z \ y} + g^2 \frac{\zeta \ \zeta}{x \ z_1 \ z_2 \ y} + \dots \right) \lambda^k \left(\int d^4 w \Phi^4(w) \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_0(\Phi)} \left(x \frac{}{y} + g \frac{\zeta}{x \ z \ y} + \frac{\zeta \ \zeta}{x \ z_1 \ z_2 \ y} + \dots \right) \lambda^k \left(\text{wavy line } w \right)^k. \end{aligned}$$

Ogni ordine perturbativo in λ corrisponde all’insierire un vertice w con 4 zampe ondulate (a 4 bosoni). L’integrale complessivo sulle Φ è Gaussiano. Il risultato si otterrà effettuando il match di tutte le zampette bosoniche (quelle dei fermioni sono già state tirate fuori). Ad esempio possiamo ottenere i diagrammi

$$x \frac{}{y} + g^2 \lambda \frac{w}{x \ z_1 \ z_2 \ y} + g^4 \lambda \frac{w}{x \ z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ y} + g^2 \lambda^2 \left(\frac{w_1 \ w_2}{x \ z_1 \ z_2 \ y} + \frac{w_1 \ w_2}{x \ z_1 \ z_2 \ y} \right).$$

Possiamo immaginarcici un inferno di diagrammi. Naturalmente tutti i diagrammi sconnessi vuoto-vuoto vengono cancellati dalla normalizzazione. Ora ci dobbiamo chiedere quali sono i diagrammi che sono generati dal termine con il determinante e che qui non compaiono. Quello che non possiamo creare con questi diagrammi sono i *loop fermionici*: nei diagrammi analizzati infatti i vertici fermionici compaiono sempre in una forma non chiusa. Questo ci suggerisce che il determinante crei l’insieme di tutti i diagrammi con uno o più loop fermionici in un campo esterno Φ .



Il determinante pertanto conterrà un numero arbitrario di loop fermionici. Se non ce lo mettiamo i loop fermionici vengono persi (ma sappiamo con certezza che ci devono essere). Ora vediamo come si “tratta” il determinante. Ci sono vari modi per definire un determinante per matrici infinito dimensionali (non sappiamo come definirlo combinatorialmente similmente nel caso di matrici finito-dimensionali). Uno di questi è quello di definirlo tramite il prodotto degli autovalori (avendo preventivamente diagonalizzato la matrice, ovvero nel caso infinito dimensionale, trovato lo spettro). Andiamo a vedere cosa succede pertanto per un operatore differenziale. Facciamo un primo esempio tramite un operatore con uno spettro noto: $-\frac{d^2}{dx^2}$ definito su uno spazio di funzioni ψ limitate ad un segmento $[0, L]$ con condizioni al bordo nulle agli estremi $\psi(0) = \psi(L) = 0$. Il problema agli autovalori

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} = \lambda\psi,$$

è facile da risolvere: infatti questa equazione ha come soluzione i seni e i coseni. Poiché la funzione ψ si annulla in 0, la soluzione può essere solo un seno e quindi è della forma

$$\psi = A \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Ora dobbiamo imporre che questa funzione soddisfi anche la seconda condizione al bordo $\psi(L) = 0$. Abbiamo $\sqrt{\lambda}L = n\pi$ con n intero e quindi gli autovalori di questo operatore sono

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2.$$

$n = 0$ non è ovviamente un autovalore perché $\lambda_0 = 0$ e l'autofunzione sarebbe identicamente nulla e la soluzione sarebbe banale (il problema degli autovalori ha senso solo quando il problema associato non ha soluzione unica e non banali). Inoltre mi restringo solo agli n positivi in quanto quelli negativi danno origine allo spesso autovalore con una autofunzione che cambia semplicemente di segno. Le autofunzioni corrispondenti all'autovalore λ_n sono

$$\psi_n = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Questo ovviamente è lo spettro di una particella libera in un segmento. Definisco ora il determinante di questo operatore differenziale come

$$\det\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right) \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2. \quad (5.31)$$

Questa produttoria da un risultato infinito. C'è qualche problema: un operatore differenziale ha uno spettro che può essere in generale limitato superiormente o inferioremente. In questo caso ci siamo ritrovati uno spettro limitato inferiormente ma illimitato superiormente (e, più in generale un operatore di Shroedinger può dare origine a stati stabili ma l'energia cinetica e potenziale della particella può essere grande a piacimento). Questa definizione per un operatore differenziale pertanto funziona male. Tuttavia a noi ci interessa non tanto il determinante nella sua interezza di questo oggetto ($iD(\Phi) - m$), quanto la sua dipendenza da Φ . Supponiamo ora di considerare l'operatore $-\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2$ (abbiamo aggiunto un campo esterno). Lo spettro è banale ed è pari a $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \omega^2$. Adesso di nuovo

$$\det\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \omega^2\right) \rightarrow \infty. \quad (5.32)$$

Se io volessi esaminare la dipendenza da ω a me basterebbe sapere quale è il rapporto

$$\frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \omega^2\right)}{\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2}{L^2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{n^2\pi^2}\right); \quad (5.33)$$

ora questo rapporto non è più così ovvio che faccia infinito. È un prodotto di termini che sono asintoticamente vicini ad 1 al crescere di n . Come si fa a decidere se un prodotto è infinito o no? Basta eseguire i seguenti passaggi

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{n^2\pi^2}\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{n^2\pi^2}\right)\right)$$

Per $n \rightarrow \infty$ il logaritmo si comporta come $\frac{\omega^2 L^2}{n^2\pi^2}$ e quindi la produttoria è convergente visto che la serie è convergente. Questa produttoria è una notevole e si trova in molte tavole numeriche; essa ha a che fare con seni e coseni iperbolici e con la teoria dell'oscillatore armonico fatto con l'integrale funzionale. Vediamo ora nel nostro caso come si applica questo discorso: è naturale identificare il corrispettivo di $\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ con $i\partial_x - m$ (ricordiamo che $D(\Phi) = \partial + ig\gamma^5\Phi$). Per prima cosa dobbiamo far corrispondere al nostro operatore differenziale una matrice (abbiamo già una matrice negli indici di Dirac, ma non ce l'abbiamo per gli indici spaziali x e y). Per farlo basta moltiplicare il nostro operatore per $\delta^4(x - y)$

$$K(x - y) = (i\partial_x - m - g\gamma^5\Phi(x)) \delta^4(x - y). \quad (5.34)$$

Questo operatore integrale infatti è tale che la sua applicazione $\int d^4y K(x - y) \psi(y)$ riproduce l'azione di $iD(\Phi) - m = i\partial - m - g\gamma^5\Phi$ sullo spinore $\psi(y)$. Abbiamo a che fare con una matrice con indici discreti di Dirac di riga e di colonna sia indici continui x, y relativi alla Φ di righe e di colonna. Quello che voglio fare ora è prendere questo operatore integrale e fattorizzare il pezzo che ha un determinante sicuramente infinito ovvero il pezzo libero $i\partial_x - m$ (esattamente come era infinito il pezzo $\frac{n^2\pi^2}{L^2}$)

$$\det [(i\cancel{\partial}_x - m - g\gamma^5 \Phi(x)) \delta^4(x-y)] = \det [(i\cancel{\partial}_x - m) (\delta^4(x-y) + g S_F(x-y)\gamma^5 \Phi(x))] \quad (5.35)$$

Notare l'ordine di $S_F(x-y)$ e γ^5 . D'altra parte ora nel nostro integrale funzionale abbiamo come normalizzazione quella con sorgenti nulle. Se fossero matrici finito-dimensionali si potrebbe usare il teorema di Binet per fattorizzare il secondo membro in un prodotto di determinanti; in secondo luogo il primo determinante (costante infinita) verrebbe eliminato perché lo stesso termine è contenuto a denominatore. Il secondo membro è la quantità interessante (notare che questa comincia con un operatore identità, la delta di Dirac, sia negli indici di Dirac, che negli indici continui x e y). Se abbiamo qualche dubbio è comunque possibile regolarizzare il reticolo e tutti i passaggi che abbiamo fatto sono leciti. Ora possiamo usare il fatto che $\det A = e^{\text{Tr} \ln A}$ e trovare che

$$\det (\delta^4(x-y) - g S_F(x-y)\gamma^5 \Phi(x)) = e^{\text{Tr} \ln(\delta^4(x-y) - g S_F(x-y)\gamma^5 \Phi(x))} \quad (5.36)$$

che è del tipo $e^{\text{Tr} \ln(\mathbb{I} + gA)}$. Abbiamo normalizzato il tutto in modo tale che per $g = 0$ il determinante sia pari ad 1. A questo punto questa espressione è “fatta apposta” per essere espansa in g . Quindi

$$\ln(\mathbb{I} + gA) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} g^n A^n \implies \det(\mathbb{I} + gA) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} g^n \text{Tr} A^n \right) \quad (5.37)$$

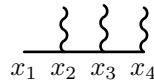
con

$$A = -S_F(x-y)\gamma^5 \Phi(x) = -S_F(y-x)\gamma^5 \Phi(x). \quad (5.38)$$

Questo esponenziale può essere nuovamente espanso in serie di Taylor di g . Vediamo ora come è fatta la struttura del termine all'esponenziale. Prendiamo ad esempio il termine al terzo ordine (senza la traccia)

$$g^3 \frac{(-1)^3}{n} \int d^4x_2 d^4x_3 S_F(x_1 - x_2) \gamma^5 \Phi(x_2) S_F(x_2 - x_3) \gamma^5 \Phi(x_3) S_F(x_3 - x_4) \gamma^5 \Phi(x_4) \quad (5.39)$$

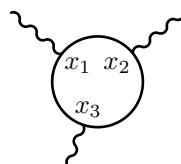
Notare che nell'effettuare il prodotto operatoriale A^n si deve fare il prodotto righe per colonne sugli indici continui x_i (come ben evidenziato dalla presenza degli integrali) e sugli indici di Dirac (sottointesi). È utile rappresentare graficamente questa ultima equazione



Ora faccio la traccia (sempre sugli indici continui e sugli indici di Dirac) e ottengo

$$g^3 \frac{(-1)^3}{n} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 S_F(x_1 - x_2) \gamma^5 \Phi(x_2) S_F(x_2 - x_3) \gamma^5 \Phi(x_3) S_F(x_3 - x_1) \gamma^5 \Phi(x_1) \quad (5.40)$$

Quando facciamo la traccia poniamo $x_1 = x_4$ e integriamo su x_1 e quindi effettivamente abbiamo un diagramma ad un loop fermionico con tre campi esterni



In generale abbiamo

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{I} + gA) &= \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n} \int d^4x_1 \dots d^4x_n S_F(x_1 - x_2) \gamma^5 \Phi(x_2) \dots S_F(x_n - x_1) \gamma^5 \Phi(x_1) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n} \left[\dots \left(\text{loop with } x_1, x_n \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Quindi il determinante è l'esponenziale dei diagrammi con 1 loop fermionico (con un numero arbitrario n di campi esterni). Se avessi trattato questi fermioni come bosoni il determinante sarebbe andato a denominatore e in questa formula all'esponenziale ci sarebbe stato un $+$. Quindi fra i diagrammi ad un loop trattati come fermioni o bosoni c'è un segno meno di differenza. Naturalmente quando vado ad espandere questo esponenziale ottengo combinazioni di loop fermionici ognuno in generale con un numero diverso di gambe esterne. Tutte le gambe di questi diagrammi vanno saturati con le zampette di tutti i diagrammi che discutevamo in precedenza, provenienti dalla $S_F(x, y, \Phi)$ e dall'espansione $\lambda\Phi^4$.

5.2 Teorie di Gauge Classiche

Una teoria di Gauge è una teoria che ha una invarianza sotto una simmetria interna e locale ovvero con parametri che dipendono in maniera arbitraria dallo spazio-tempo. Dato un gruppo $SU(N)$ come faccio a costruire una teoria di Gauge non abeliana? Costruisco una teoria in cui ci sono dei campi vettoriali $A_\mu(x)$ dipendenti dallo spazio-tempo che appartengono alla rappresentazione aggiunta di $SU(N)$. Questo significa che possiamo identificare $A_\mu(x)$ come una matrice $N \times N$ hermitiana a traccia nulla. Questa si trasforma in questo modo

$$A'_\mu = U A_\mu U^\dagger, \quad (5.42)$$

dove U è la rappresentazione del gruppo $SU(N)$. Se preferiamo possiamo immaginare questa matrice A_μ hermitiana a traccia nulla come una combinazione lineare di coefficienti $A_\mu^a(x)$ (sono l'analogo delle w^a dell'appendice A) per le λ_a

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)\lambda_a. \quad (5.43)$$

Quindi abbiamo a che fare o con matrici $N \times N$ hermitiane a traccia nulla o con $N^2 - 1$ quantità reali. La trasformazione globale finita sotto U è facile da esprimere così ma è complicata da esprimere attraverso le A_μ^a

$$U A_\mu(x) U^\dagger = A_\mu^a(x) U \lambda_a U^\dagger \quad (5.44)$$

quindi dovrei sapere come si trasformano sotto U arbitrarie queste λ_a e questo non è molto facile. Nel caso di trasformazioni infinitesime invece si può fare. Detto questo si può dimostrare che queste trasformazioni sono costanti nello spazio-tempo. Si dimostra che c'è una sola maniera di estendere questa U per fare una teoria invariante sotto trasformazioni $U(x)$; questa si fa costruendo l'analogo del tensore di Maxwell

$$G_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x) + i [A_\mu(x), A_\nu(x)]. \quad (5.45)$$

Questa G è anch'essa una matrice $N^2 - 1$ hermitiana a traccia nulla per ogni valore di μ e ν . Pertanto possiamo esprimere la funzione dei generatori del gruppo $SU(N)$

$$G_{\mu\nu}^a(x)\lambda_a = (\partial_\nu A_\mu^a(x) - \partial_\mu A_\nu^a(x))\lambda_a - A_\mu^b(x)A_\nu^c(x)f^{abc}\lambda_a, \quad (5.46)$$

dove le f^{abc} sono totalmente antisimmetriche e per esse vale la proprietà di ciclicità (posso scambiare in parole povere l'indice a con l'indice c). Poiché le λ_a sono matrici indipendenti ortogonali sotto traccia ($\text{Tr} [\lambda_a \lambda_b] = \frac{1}{2}\delta_{ab}$) possiamo isolare i singoli termini

$$G_{\mu\nu}^a(x) = (\partial_\nu A_\mu^a(x) - \partial_\mu A_\nu^a(x)) - A_\mu^b(x)A_\nu^c(x)f^{abc}. \quad (5.47)$$

Queste G sono quindi l'analogo del tensore di Maxwell: nel caso abeliano (ovvero $A_\mu(x)$ commuta con $A_\nu(x)$), G si riduce ai primi due termini; notare infatti che nel caso abeliano (il caso della QED) l'unica possibilità è che A_μ appartenga alla rappresentazione aggiunta di $SU(1)$ ovvero sia un oggetto ad una sola componente. La grossa differenza rispetto al caso non abeliano è che mentre $F_{\mu\nu}$ è osservabile perché composto di campi elettrici e magnetici, che sono invarianti di Gauge, questa $G_{\mu\nu}$ non è invariante di Gauge. Una trasformazione di Gauge è una trasformazione che estende le trasformazioni globali a trasformazioni locali. Si può far vedere che è possibile avere una teoria consistente soltanto se la trasformazione è fatta in questo modo

$$A_\mu^U(x) = U(x)A_\mu U^\dagger(x) + iU(x)\partial_\mu U^\dagger(x); \quad (5.48)$$

se U è costante naturalmente il secondo termine non c'è. In generale però questa trasformazione è *non omogenea* in quanto una $A_\mu = 0$ si trasforma in una $A_\mu^U(x) \neq 0$. Sotto questo tipo di trasformazione la G si trasforma in questo modo

$$G_{\mu\nu}^U(x) = U(x) G_{\mu\nu}(x) U^\dagger(x) \quad (5.49)$$

questa legge di trasformazione mi permette di scrivere facilmente gli invarianti di Gauge che mi servono per scrivere una lagrangiana. Se infatti scriviamo il prodotto di due matrici G nello stesso punto abbiamo la legge di trasformazione

$$G_{\mu\nu}^U(x) G_{\rho\sigma}^U(x) = U(x) G_{\mu\nu}(x) G_{\rho\sigma}(x) U^\dagger(x).$$

Pertanto l'oggetto

$$\text{Tr} (G_{\mu\nu}(x) G^{\mu\nu}(x)) , \quad (5.50)$$

è un invariante di Gauge (notare che in questa espressione abbiamo una somma di matrici e la traccia è eseguita sugli indici del gruppo). In generale anche la traccia di un prodotto di matrici G (anche più di 2) nello stesso punto dello spazio-tempo è un invariante di Gauge. Si definisce *Lagrangiana di Yang-Mills*

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2} \text{Tr} (G_{\mu\nu}(x) G^{\mu\nu}(x)) \quad (5.51)$$

dove il fattore $-1/2$ è convenzionale e discende dal fatto che

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2} \text{Tr} (G_{\mu\nu}(x) G^{\mu\nu}(x)) = -\frac{1}{2} \text{Tr} (\lambda_a \lambda^b) G_{\mu\nu}^a(x) G_b^{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(x) G_a^{\mu\nu}(x) , \quad (5.52)$$

ovvero è analoga alla normalizzazione dei campi di Gauge abeliani (campo del fotone). Poi possiamo introdurre con le derivate covarianti l'interazione con i campi di materia (fermioni) che non vedremo. Queste sono le teorie di *Gauge classiche*. Ora dobbiamo quantizzare.

5.3 Quantizzazione delle teorie di Gauge

La quantizzazione avviene attraverso l'integrale funzionale; qui abbiamo dei problemi naturalmente. Prendiamo per semplicità una teoria con soli campi di Gauge e nessun campo di materia. Vogliamo introdurre un funzionale generatore $Z(J)$ o se vogliamo definire il valore medio di un operatore Gauge invariante

$$\langle O \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A e^{iS(A)} O(A)}{\int \mathcal{D}A e^{iS(A)}} \quad (5.53)$$

dove gli integrali sono eseguiti su tutte le configurazioni del campo di Gauge A . Naturalmente l'osservabile O è un invariante di Gauge $O(A^U) = O(A)$. Le trasformazioni di Gauge sono delicate in quanto se abbiamo una qualsiasi configurazione solo pensando di fare ad un certo punto una trasformazione di Gauge cambiamo i valori dei nostri operatori che non sono Gauge invarianti. Quindi le quantità non invarianti di Gauge non possono corrispondere a quantità osservabili. Abbiamo due problemi fondamentali

- Passaggio all'europeo $i x_M^0 = x_E^0$. In questo caso però abbiamo una ulteriore complicazione ovvero che anche A^μ porta con sé un indice 0. Allora anche la quarta componente di A

$$i A_M^0 = A_E^0 . \quad (5.54)$$

Pertanto dobbiamo trasformare la quarta componente di x , ma anche quella di A . Facendo questo $e^{iS_M(A)} \rightarrow e^{-S_E(A)}$ dove l'azione ha la stessa forma con i campi euclidei di quella che aveva con i campi minkowskiani. Nonostante i conti rognosi, che noi non facciamo, il prolungamento analitico non presenta sorprese;

- La seconda difficoltà è che l'integrale fatto su A è eseguito sulle sue configurazioni e su tutte le sue trasformazioni di Gauge anche. Quindi noi contiamo ogni configurazione fisica viene contata infinite volte! Facciamo riferimento alla Fig.(5.1). Il piano del foglio rappresenta lo spazio di tutte le configurazioni $A_\mu^a(x)$. Ogni punto del piano del foglio è una configurazione intera per tutti gli a e i μ di

$A_\mu^a(x)$ ($\infty^{4(N^2-1)}$ valori). Quindi l'integrazione nell'integrale funzionale è estesa a tutto il foglio ovvero a tutti gli A senza restrizioni. Data una certa A_μ^a iniziale, applicando tutte le possibili trasformazioni di Gauge (che saranno tante) abbiamo che questo punto si muove sul piano del foglio lungo quella che si chiama una *orbita di Gauge*. Una orbita di Gauge è quindi semplicemente l'insieme di tutte le configurazioni che otteniamo da una configurazione data $A_\mu^a(x)$ e applicando su di essa tutte le possibili trasformazioni di Gauge.

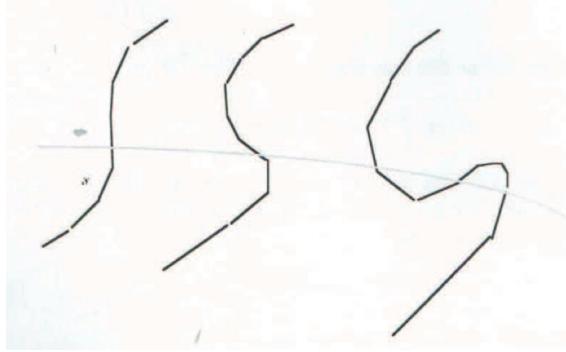


Figura 5.1: Struttura delle Orbite di Gauge

Se partiamo da due configurazioni A_1 e A_2 abbiamo due orbite di Gauge che passano per A_1 e A_2 . Due orbite di Gauge non possono mai toccarsi. Se si toccassero infatti potrei passare con una trasformazione di Gauge alle configurazioni dell'altra orbita e quindi l'orbita sarebbe unica. Tutte queste configurazioni sono configurazioni in cui la fisica non se ne accorge che stiamo facendo una trasformazione di Gauge. Le nostre osservabili O non dipendono infatti dai punti dell'orbita in quanto sono Gauge invarianti ($O(A^U) = O(A)$)! Ogni punto dell'orbita noi scegliamo per calcolarci O lascia invariato il valore di O . Questo significa che l'integrale funzionale è mal definito in quanto ha dentro di sè un volume del gruppo di Gauge che è infinito. Quindi non basta passare all'europeo per risolvere i nostri problemi. Stiamo integrando infinite volte sulle stesse configurazioni fisiche. Se vogliamo quantizzare una teoria di Gauge, necessariamente dobbiamo risolvere questo problema. Il *metodo di Faddeev-Popov* è quello che ha permesso di rendere operativi tutti i calcoli sulle teorie di Gauge.

5.3.1 Misura invariante su un gruppo

Prima di occuparci del metodo di Faddeev-Popov ci manca ancora una nozione sulla teoria dei gruppi che è la nozione di *misura invariante su un gruppo*. Abbiamo detto che un gruppo \mathcal{G} è in generale un gruppo astratto; tuttavia lo possiamo realizzare mediante matrici e quindi corrispondenze numeriche. Un gruppo di Lie per definizione è *localmente isomorfo* ad un intorno di uno spazio euclideo ad N dimensioni, dove N è la dimensione del gruppo. Questo significa che dato un elemento del gruppo possiamo usare un sistema di coordinate che ci rendono la conoscenza di questo \mathcal{G} numerica. Un gruppo pertanto è un oggetto geometrico astratto ma anche una *varietà differenziabile* (differenziabile perché la corrispondenza tra gli elementi del gruppo e le coordinate deve soddisfare certi requisiti di continuità che non ci interessano). Questo corrisponde a dire che possiamo parametrizzare gli elementi del gruppo $SU(N)$ tramite

$$U = e^{ig^a \lambda_a} \quad (5.55)$$

dove g^a sono $N^2 - 1$ parametri reali ovvero le coordinate *locali* sul gruppo. Quindi adesso io posso considerare una *funzione su un gruppo*: dato un elemento del gruppo posso fargli corrispondere un numero attraverso una funzione $f(g)$; se poi passiamo in coordinate (questo è garantito dal fatto che il gruppo è di Lie) questa $f(g)$ diventa funzione delle g^a

$$f(g) \rightarrow f(g^a).$$

Essendo il gruppo “anche” una varietà differenziabile (avendo introdotto le coordinate) possiamo considerare l'integrale sul gruppo. In altri termini possiamo integrare questa funzione $f(g^a)$ su un dominio di definizione

su cui variano le g (su tutto il gruppo) con una misura $d^n g$. Ora la misura $d^n g$ prodotto degli $N^2 - 1$ differenziali dg^a , non è un oggetto interessante perché dipende dalle coordinate che ho scelto per parametrizzare il gruppo. Un oggetto invece molto interessante è invece quella che si chiama *misura invariante*. Questa misura $d\mu(g) = \mu(g)d^n g$ è definita in modo tale che

$$\int_{\mathcal{G}} f(g) \mu(g) d^n g = \int_{\mathcal{G}} f(\bar{g} \cdot g) \mu(g) d^n g \quad (5.56)$$

ovvero se faccio l'integrale della $f(g)$ oppure di un'altra funzione collegata alla f con quella che si chiama *traslazione su un gruppo*¹ sulla misura $d\mu(g)$ ottengo lo stesso risultato. In altre parole l'integrale su tutto il gruppo di due funzioni traslate su un gruppo deve essere lo stesso per tutte le f possibili. Chi mi dice che questa $\mu(g)$ esista?

Facciamo un esempio con il gruppo delle traslazioni. Ogni elemento del gruppo è determinato da un parametro a . Una funzione sul gruppo è $f(a)$. Una composizione del gruppo di due traslazioni a_1 e a_2 è la somma $a_1 + a_2$ (nel caso delle traslazioni il prodotto del gruppo · è una somma!). Pertanto la misura invariante per il gruppo delle traslazioni è definita da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \mu(a) da = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{a} + a) \mu(a) da. \quad (5.57)$$

Vediamo subito che una buona misura invariante è $\mu(a)$ pari ad una costante; infatti se cambio variabile $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\bar{a} + a) da = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) da$. In generale per gruppi più complicati la $\mu(g)$ è complicata, ma si può dimostrare che questa *esiste sempre*. In teoria dovremmo differenziare tra le misure invarianti a sinistra e a destra, a seconda dell'ordine con cui usiamo il prodotto $\bar{g} \cdot g$. Tuttavia per i gruppi compatti² (di cui ci occupiamo: $SU(N)$ è compatto) le due definizioni coincidono.

Partendo dalla definizione vogliamo trovare una condizione che ci permetta di stabilire se una data misura è invariante, dunque cambiamo coordinate nel membro di destra³: $g \rightarrow g' = \bar{g} \cdot g$. La trasformazione tra g e g' (per definizione stessa di gruppo) è globalmente invertibile (non solo localmente perché sono elementi di un gruppo): $g = \bar{g}^{-1} \cdot g'$, e nell'integrale dovremo inserire il suo jacobiano

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}} f(g) \mu(g) d^n g &= \int_{\mathcal{G}} f(\bar{g} \cdot g) \mu(g) d^n g = \int_{\mathcal{G}} f(g') \mu(\bar{g}^{-1} \cdot g') \left| \frac{\partial (\bar{g}^{-1} \cdot g')}{\partial g'} \right| d^n g' \\ &= \int_{\mathcal{G}} f(g) \mu(\bar{g}^{-1} \cdot g) \left| \frac{\partial (\bar{g}^{-1} \cdot g)}{\partial g} \right| d^n g, \end{aligned} \quad (5.58)$$

avendo usato il fatto che anche g' corre esattamente sul gruppo \mathcal{G} in quanto g corre su \mathcal{G} . Poiché l'egualanza deve essere valida per ogni funzione $f(g)$, otteniamo, ponendo inoltre $\bar{g} = g$ poiché \bar{g} è arbitrario,

$$\mu(g) = \mu(0) \left| \frac{\partial (\bar{g}^{-1} \cdot g)}{\partial g} \right|_{\bar{g}=g} \quad (5.59)$$

dove 0 è l'elemento neutro del gruppo (tale che $g \cdot 0 = 0 \cdot g = g$ e $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 0$). Quindi la misura invariante esiste sempre; l'espressione esplicita non ci servirà. La misura invariante ha anche questa ulteriore proprietà che non dimostreremo ma che ci servirà

$$\int_{\mathcal{G}} d\mu(g) f(g) = \int_{\mathcal{G}} d\mu(g) f(g^{-1}). \quad (5.60)$$

(forse per me è intuibile).

¹Guardo la f calcolata nella composizione $\bar{g} \cdot g$ dove \bar{g} è un elemento del gruppo arbitrario

²Ricorda che un gruppo di Lie si dice compatto se i parametri appartengono ad un insieme compatto

³La relazione: $\bar{g} \cdot g = e^{i\bar{g}^a \lambda_a} \cdot e^{ig^a \lambda_a} = g' = e^{ig'^a \lambda_a}$ definisce g' come funzione di \bar{g} e g . Naturalmente questa g' esiste sempre ma è complicato trovarla in quanto non possiamo semplicemente sommare gli esponenti degli esponenziali perché i due oggetti in generale non commutano.

5.3.2 Metodo di Faddeev-Popov

Abbiamo visto che l'azione di Yang-Mills per un campo di gauge è

$$S = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Tr} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = -\frac{1}{4g^2} \int d^4x F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a, \quad (5.61)$$

Per un motivo che sarà chiaro in seguito la costante di accoppiamento non l'abbiamo inserita dentro le F ; riscalando i campi (lo vedremo dopo) la costante g al denominatore sarà essere pari proprio alla costante di accoppiamento. Il problema è che quando facciamo un integrale funzionale integriamo infinite volte la stessa traiettoria fisica perché l'integrale è fatto su tutte le traiettorie fisiche comprese le loro trasformazioni di Gauge. Nel caso dell'elettrodinamica è chiaro del perché sorge il problema. Prendiamo l'elettrodinamica libera che è una teoria di Gauge abeliana (non c'è il termine non-lineare del commutatore). In questo caso l'integrale funzionale è

$$\int \mathcal{D}A e^{-\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}. \quad (5.62)$$

Anche in questo caso, come nel caso non abeliano possiamo effettuare una trasformazione di Gauge $\bar{A}_\mu \rightarrow \bar{A}_\mu + \partial_\mu \Lambda$; queste infinite replicate portano l'integrale ad essere infinito anche se siamo nell'euclideo e non sono ovviamente rimosse dalla regolarizzazione. Come possiamo risolvere questo problema? La soluzione è molto semplice. Noi vogliamo integrare non su tutte le orbite, ma per ogni orbita dobbiamo prendere un punto rappresentativo (la cui scelta non ha rilevanza in quanto la fisica deve essere indipendente dal punto che scegliamo). In altre parole dobbiamo trovare una ipersuperficie che attraversi tutte le orbite possibilmente una e una sola volta. In che forma la parametrizziamo questa ipersuperficie? Certamente non in forma parametrica ($x^i = x^i(t_1, \dots, t_n)$) perché abbiamo a che fare con una superficie infinito dimensionale. Pertanto la possiamo rappresentare in forma implicita (della forma $F(\mathbf{x}) = 0$). Questa ipersuperficie $f(A) = 0$ deve essere tale che se noi diamo una configurazione A che non sta su questa ipersuperficie, con una trasformazione di Gauge io posso trovare un punto che sta su questa ipersuperficie. Questo deve succedere per tutti i punti che io ho nel mio iperspazio funzionale complicatissimo. In altre parole se io parto da una configurazione qualsiasi, devo poter trovare una e *possibilmente una sola* trasformazione di Gauge che mi porta sulla nostra ipersuperficie (chiamata anche *superficie di Gauge fixing*). Quindi se io ho una configurazione A tale che non è sulla superficie di Gauge fixing, devo comunque sia trovare una trasformazione U di Gauge (possibilmente unica) tale che $f(A^U) = 0$. Questa equazione, dati i parametri A , mi deve determinare ∞^{N^2-1} variabili. Quindi ci devono essere ∞^{N^2-1} equazioni; poiché inoltre la $U(x)$ dipende da x ci deve essere una f indipendente per ogni valore x dello spazio e del tempo; in parole povere dobbiamo a che fare con un sistema di $N^2 - 1$ equazioni (indice a) per ogni punto dello spazio ovvero ∞^{N^2-1} equazioni

$$f_a(A^U, x) = 0. \quad (5.63)$$

In realtà questo problema è insolubile: qualunque condizione di Gauge fixing noi troviamo in realtà non sarà tale che l'intersezione sia unica per tutte le orbite (vi saranno sempre delle orbite con intersezioni multiple, vedi anche la Fig.(5.1)). Questo in realtà non è molto grave (ne parleremo dopo). Supponiamo per ora che sia possibile trovare una superficie di Gauge fixing che interseca solo una volta tutte le orbite di Gauge. Facciamo un esempio: il caso abeliano. In questo caso, noi diamo una A che non soddisfa la condizione di Gauge fixing e devo trovare una trasformazione di Gauge U tale che A^U la soddisfi. Nel caso abeliano abbiamo $N = 1$ quindi deve esserci soltanto una equazione. Generalmente nel caso abeliano si sceglie come condizione di Gauge fixing

$$\partial^\mu (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) = 0. \quad (5.64)$$

Ovviamente non è detto che la dipendenza da x debba essere attraverso una dipendenza da x di A : potrebbe essere in generale molto più complicata. Tuttavia di solito si fa una scelta di questo genere per motivi di mantenimento della località in forma esplicita. Come faccio a decidere se va bene o no? Devo verificare se funziona: in altri termini data A che non soddisfa $\partial^\mu A_\mu = 0$, devo riuscire a trovare una unica Λ tale che (5.64) è verificata. Ricordiamo che siamo nell'euclideo e quindi $\partial^\mu \partial_\mu = \Delta_4$

$$\Delta_4 \Lambda = -\partial^\mu A_\mu. \quad (5.65)$$

Siamo fortunati: questa equazione la so risolvere; l'inverso di questo operatore infatti non è nient'altro che il propagatore di una particella scalare di massa nulla euclidea. Abbiamo quindi

$$\Lambda(x) = \int G_0(x - y) \partial_\mu A_\mu(y) d^4y, \quad (5.66)$$

con

$$\Delta_x G_0(x - y) = -\delta^4(x - y), \quad (5.67)$$

la solita funzione di Green del laplaciano a massa nulla. Quindi questo è un buon Gauge fixing. Vediamo ora se questa scelta funziona anche nel caso non abeliano in cui

$$A_\mu^U(x) = A_\mu^U(x) = U(x) A_\mu U^\dagger(x) + iU(x) \partial_\mu U^\dagger(x) \implies \partial^\mu A_\mu^U(x) = 0. \quad (5.68)$$

Qui adesso non so se funziona. Vedremo poi in teoria delle perturbazioni che questa scelta di Gauge fixing (chiamata *Gauge fixing di Lorentz*) funziona anche nel caso non abeliano. Se vogliamo dimostrarlo rigorosamente tuttavia il problema è molto complicato: dovrei dimostrare che qualunque configurazione A_μ ho, esiste una trasformazione $U(x)$ (matrice unitaria e a determinante 1) tale che la (5.68) è verificata. Supponiamo ora di aver risolto questo problema. Cosa faccio ora? Una idea sarebbe quella di restringere l'integrazione a tutti i termini della superficie di Gauge fixing. Una maniera "naturale" di farlo è quello di inserire per definizione nel mio integrale funzionale una $\delta[f(A)]$ (ad infinite dimensioni in quanto contiene il prodotto di funzioni delta di Dirac su tutti i punti dello spazio-tempo e su tutti i possibili valori di a). Questo è sbagliato. Se l'operatore O è Gauge invariante, infatti questo risultato non deve dipendere dalla scelta della Gauge fixing. Invece questa scelta di inserire la δ mi dà un valor medio della O che dipende da f e quindi non va bene. Invece di verificare che non va bene vediamo quale è quella che va bene e vedremo che è diversa da questa semplicemente. Qui entra in gioco la tecnica inventata da Faddeev-Popov prima dei quali la gente non sapeva come si quantizzavano le teorie di Gauge non abeliane. Questo metodo ha aperto la strada al Modello Standard e alla QCD. Invece di farlo come prima, io adesso integro $\delta[f(A)]$ ad A fissato su tutte le possibili trasformazioni di Gauge U

$$\int \mathcal{D}U \delta[f(A^U)]. \quad (5.69)$$

Ho scritto questa \mathcal{D} perchè queste trasformazioni di Gauge sono un gruppo; sono il gruppo $SU(N)$ punto per punto nello spazio-tempo, quindi $\mathcal{D}U$ è un prodotto infinito diretto di gruppi uno per ogni punto dello spazio-tempo euclideo. Questa misura $\mathcal{D}U$ non rappresenta il prodotto cartesiano dei parametri da cui dipende g , ma la misura invariante su questo gruppo; questo significa che è il prodotto della misura invariante punto per punto nello spazio-tempo su questo gruppo $SU(N)$ che esiste punto per punto nello spazio-tempo. In altre parole

$$\mathcal{D}U = \prod_x \mu(g(x)) d^{N^2-1}g(x). \quad (5.70)$$

Immagino di saper fare questo integrale. Verrà fuori una quantità che varrà da A . Questa quantità la chiamo $1/\Delta_f(A)$

$$\int \mathcal{D}U \delta[f(A^U)] = \frac{1}{\Delta_f(A)} \quad (5.71)$$

Ho inserito una f come pedice a Δ per ricordarmi che questo oggetto *dipende* dalla superficie di Gauge fixing. Questo oggetto è difficile da calcolare. Tuttavia ha una proprietà: nonostante sia dipendente dalla Gauge fixing però lui stesso è Gauge invariante

$$\Delta_f(A^{\bar{U}}) = \Delta_f(A) \quad (5.72)$$

ovvero *non dipende dal punto dell'orbita su cui ci troviamo*. Questo discende dalla proprietà semplice della misura invariante sul gruppo. Infatti per definizione

$$\Delta_f(A^{\bar{U}}) \int \mathcal{D}U \delta[f(A^{\bar{U}})] = 1. \quad (5.73)$$

Ora usiamo il fatto che le trasformazioni di Gauge si compongono: $f(A^{\bar{U}U})$ significa fare un'unica trasformazione di Gauge $\bar{U}U$. Quindi per definizione di misura invariante (5.56), (in questo caso è una misura invariante a sinistra) l'integrale nella precedente equazione non dipende da \bar{U} . Abbiamo pertanto

$$\Delta_f(A^{\bar{U}}) \int \mathcal{D}U \delta [f(A^{\bar{U}U})] = \Delta_f(A^{\bar{U}}) \int \mathcal{D}U \delta [f(A^U)] = \frac{\Delta_f(A^{\bar{U}})}{\Delta_f(A^U)} = 1. \quad (5.74)$$

da cui la condizione di invarianza di Gauge della $\Delta_f(A)$. Pertanto $\Delta_f(A)$ è dipendente dalla Gauge fixing ma è Gauge invariante ovvero dipende solo dall'orbita su cui lo sto calcolando. Ora voglio trovare una definizione per il valor medio di O . Scrivo pertanto, lasciando implicita la normalizzazione

$$\begin{aligned} \langle O \rangle_f &= \int \mathcal{D}A e^{-S(A)} O(A) = \int \mathcal{D}A e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \int \mathcal{D}U \delta [f(A^U)] \\ &= \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \delta [f(A^U)] \end{aligned} \quad (5.75)$$

dove non abbiamo fatto altro che inserire una identità e scambiare l'ordine di integrazione. Quindi faccio l'integrale in $\mathcal{D}A$ ottenendo un funzionale di U e questo funzionale andrà poi a sua volta integrato. Quello che adesso vedremo è che per le ipotesi che abbiamo fatto sulla Gauge invarianza e della struttura della teoria, questo primo integrale in $\mathcal{D}A$ che proviamo a fare, in realtà non dipende da U . Quindi se non dipende da U l'integrale in $\mathcal{D}U$ è proprio il volume infinito del gruppo di Gauge che voglio eliminare. Lo eliminerò con il denominatore e prenderò questa come definizione di quantizzazione della teoria di Gauge. Dimostriamo ora che l'integrandino non dipende da U . Basta fare un cambio di variabile

$$A \rightarrow A' = A^U \quad (5.76)$$

La misura di integrazione non cambia in questa trasformazione: questo perchè la trasformazione di Gauge del campo A (si veda la (5.48)) ha il pezzo non omogeneo costante (in quanto gli integrali funzionali che consideriamo hanno sempre la proprietà che sono invarianti sotto traslazioni dell'argomento per qualsiasi valore) e il primo pezzo che consiste in una rotazione ortogonale complessa (unitaria); il determinante di questa rotazione è 1. Quindi la misura è una misura invariante (nel senso che lo Jacobiano è unitario): al posto di $\mathcal{D}A$ posso metterci $\mathcal{D}A'$ e non succede nulla. Poi $S(A)$ è Gauge invariante e posso inserire $S(A')$ in quanto la differenza tra A e A' è una trasformazione di Gauge. Allo stesso modo anche l'osservabile O e $\Delta_f(A)$ sono Gauge invarianti. La δ invece non è Gauge invariante, ma è già espressa in funzione di A' . Otteniamo quindi

$$\langle O \rangle_f = \frac{\int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A' e^{-S(A')} O(A') \Delta_f(A') \delta [f(A')]}{\int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A' e^{-S(A')} \Delta_f(A') \delta [f(A')]} = \frac{\int \mathcal{D}A' e^{-S(A')} O(A') \Delta_f(A') \delta [f(A')]}{\int \mathcal{D}A' e^{-S(A')} \Delta_f(A') \delta [f(A')]} \quad (5.77)$$

e l'integrazione su \mathcal{U} è scomparsa. Facendo le somme quello che abbiamo fatto è un cambiamento di variabili. Abbiamo ottenuto un integrale ristretto alla superficie di Gauge fixing con in più un fattore $\Delta_f(A)$ che rappresenta lo jacobiano della trasformazione di coordinate infinito dimensionale che ci porta dalle variabili iniziali A_μ a quelle sulla Gauge fixing. L'integrale in U di può buttare via; se la soluzione $\Delta_f(A)$ è unica per ogni orbita quello che abbiamo fatto è stato restringere in maniera sensata l'integrale sulla superficie di Gauge fixing. Adesso se prendiamo questa espressione come la definizione del valor medio di O questa è indipendente dalla Gauge fixing f che ho scelto. Immagino ora di aver fatto un'altra condizione di Gauge fixing $g(A) = 0$. Abbiamo pertanto (trascuro la normalizzazione, ma i passaggi che facciamo sono gli stessi)

$$\langle O \rangle_g = \int \mathcal{D}A e^{-S(A)} O(A) \Delta_g(A) \delta [g(A)], \quad (5.78)$$

con

$$\Delta_g(A) \int \mathcal{D}U \delta [g(A^U)] = 1. \quad (5.79)$$

Ora inserisco una identità e scambio gli integrali

$$\begin{aligned} \langle O \rangle_g &= \int \mathcal{D}A e^{-S(A)} O(A) \Delta_g(A) \delta [g(A)] \Delta_f(A) \int \mathcal{D}U \delta [f(A^U)] \\ &= \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A e^{-S(A)} O(A) \Delta_g(A) \delta [g(A)] \Delta_f(A) \delta [f(A^U)], \end{aligned} \quad (5.80)$$

ora faccio il cambio di variabili $A' = A^U$

$$\langle O \rangle_g = \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A' e^{-S(A')} O(A') \Delta_g(A') \delta \left[g \left(A'^{U^{-1}} \right) \right] \Delta_f(A') \delta [f(A')] . \quad (5.81)$$

Nulla in questa espressione dipende da U tranne che per $\delta \left[g \left(A'^{U^{-1}} \right) \right]$. Tuttavia questo termine qua è integrato su U . Sfruttando la (5.60) otteniamo

$$\begin{aligned} \langle O \rangle_g &= \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A' e^{-S(A')} O(A') \Delta_g(A') \delta [g(A'^U)] \Delta_f(A') \delta [f(A')] \\ &= \int \mathcal{D}A' e^{-S(A')} O(A') \Delta_f(A') \delta [f(A')] \left\{ \Delta_g(A') \int \mathcal{D}U \delta [g(A'^U)] \right\} \\ &= \int \mathcal{D}A' e^{-S(A')} O(A') \Delta_f(A') \delta [f(A')] = \langle O \rangle_f . \end{aligned} \quad (5.82)$$

5.3.3 Caso Abeliano

Vediamo ora tutto questo marchingegno come funziona in alcuni casi. Facciamo l'esempio del caso abeliano (l'elettrodinamica). Prendiamo la teoria abeliana con solo campi di Gauge (teoria dei fotoni liberi). La teoria di Gauge non abeliana anche senza campi di materia interagisce perché ha termini non lineari (immagino si riferisca al termine con il commutatore). Le particelle vettoriali infatti interagiscono con la carica di Gauge e loro stesse sono portatrici della carica e quindi interagiscono anche con sé stesse. Il fotone non interagisce con sé stesso in quanto interagisce con particelle cariche ma il fotone non è carico (quindi non ha interazioni non-lineari). Supponiamo di voler calcolare l'integrale funzionale nel caso abeliano. La superficie di Gauge fixing è definita dalla condizione

$$\partial_\mu A_\mu = 0 , \quad (5.83)$$

e la trasformazione di Gauge è del tipo $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ (nota da qui il fatto che il gruppo delle trasformazioni Λ è abeliano!). Abbiamo visto che

$$\langle O \rangle = \int \mathcal{D}A e^{-\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} O(A) \Delta_{\delta A}(A) \delta [\partial_\mu A_\mu] . \quad (5.84)$$

Nel caso abeliano il *fattore di Faddeev-Popov* è una costante e quindi non dà fastidio. Nel caso abeliano la (5.71) diventa

$$\Delta_{\delta A}(A) \int \mathcal{D}\Lambda \delta [\partial_\mu A_\mu + \Delta_4 \Lambda] = 1 . \quad (5.85)$$

Sfruttando le proprietà della delta di Dirac $\delta [A \cdot X + X] = \frac{1}{|\det A|} \delta [X + A^{-1}X]$ abbiamo

$$\frac{\Delta_{\delta A}(A)}{|\det \Delta_4|} \int \mathcal{D}\Lambda \delta \left[\Lambda - \int d^4y G(x-y) \partial_\mu A_\mu(y) \right] = 1 . \quad (5.86)$$

Qualunque cosa sia il determinante del laplaciano quadridimensionale è una quantità costante, che non dipende dai campi. D'altra parte l'integrale con la $\delta(\Lambda - \bar{\Lambda})$ fa 1, indipendentemente dal valore di $\bar{\Lambda}$. Quindi nel caso abeliano la $\Delta_{\delta A}(A)$ è una costante (e la possiamo cancellare con il denominatore). Scriviamo il funzionale generatore

$$Z(J) = \int \mathcal{D}A e^{-\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \int d^4x J_\mu A_\mu} \delta [\partial_\mu A_\mu] \quad (5.87)$$

che non è un oggetto Gauge invariante in quanto il valor medio dei prodotti di A nel vuoto non lo sono. Tuttavia una volta che abbiamo il funzionale generatore siamo in grado di costruirsi qualsiasi operatore Gauge invariante facendo derivate funzionali opportune rispetto a J . Normalmente questo sarebbe un integrale Gaussiano (c'è un esponenziale quadratico e lineare nelle A_μ) se non fosse per la δ che è necessaria tuttavia per la convergenza dell'integrale. Se ci fosse un campo scalare qui ci sarebbe un oggetto che non è Gauge invariante e non ci sarebbe la δ . Qui abbiamo a che fare con un integrale Gaussiano con una condizione di Gauge fixing che dobbiamo imparare a manipolare. Facciamo calcoli euristici ma che possono

come al solito resi rigorosi se noi regolarizziamo opportunamente l'integrale discretizzando lo spazio tempo e ponendoci in un volume finito. Abbiamo

$$Z(J) = \int \mathcal{D}A e^{-\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) + \int d^4x J_\mu A_\mu} \delta[\partial_\mu A_\mu]. \quad (5.88)$$

Ho quattro termini all'esponente. Il termine del doppio prodotto può essere integrato per parti due volte

$$\int d^4x \partial_\nu A_\mu \partial_\mu A_\nu = \int d^4x (\partial_\mu A_\mu)^2 \quad (5.89)$$

e quindi dà contributo nullo nell'esponenziale a causa della $\delta[\partial_\mu A_\mu]$. Ci rimangono soltanto i quadrati. I quadrati sono identici per scambio di indici: $(\partial_\mu A_\nu)^2 = (\partial_\nu A_\mu)^2$. Abbiamo

$$Z(J) = \int \mathcal{D}A e^{-\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu)^2 + \int d^4x J_\mu A_\mu} \delta[\partial_\mu A_\mu]. \quad (5.90)$$

Ora introduco una rappresentazione della δ (ricorda che $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{ipx}$)

$$\delta[\partial_\mu A_\mu] = \int \mathcal{D}\lambda e^{i \int d^4x \lambda(x) \partial_\mu A_\mu(x)}, \quad (5.91)$$

avendo eliminato il fattore 2π per semplicità in quanto se ne andrà con il denominatore. Quindi

$$Z(J) = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\lambda e^{-\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\nu A_\mu)^2 + \int d^4x (J_\mu A_\mu + i\lambda(x) \partial_\mu A_\mu(x))}. \quad (5.92)$$

Ora scambio gli indici nel primo fattore all'esponenziale e integro per parti il terzo ottenendo

$$Z(J) = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\lambda e^{-\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\nu A_\mu)^2 + \int d^4x (J_\mu A_\mu - i\partial_\mu \lambda(x) A_\mu(x))}. \quad (5.93)$$

La parte che contiene A è la somma di 4 integrali Gaussiani su 4 campi come se fossero scalari indipendenti per ogni componente A_μ

$$\begin{aligned} Z(J) &= \prod_{\mu=0}^3 \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\lambda e^{-\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\nu A_\mu)^2 + \int d^4x (J_\mu - i\partial_\mu \lambda(x)) A_\mu} \\ &= \int \mathcal{D}\lambda \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dx dy (J_\mu(y) - i\partial_\mu \lambda(x)) G(x-y) (J_\mu(y) - i\partial_\mu \lambda(y)) \right\}, \end{aligned} \quad (5.94)$$

ma con sorgente esterna pari a $J_\mu - i\partial_\mu \lambda$ (nota che la somma su μ nell'esponenziale è stata sottointesa nella seconda identità). Come al solito $G(x-y)$ è la funzione di Green del laplaciano (massa nulla)

$$G(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2}. \quad (5.95)$$

Ora l'integrale in λ non è complicato: è anche lui Gaussiano. C'è una piccola complicazione. È vero che l'integrale su λ è invariante per traslazioni; ma traslando λ al più riesco ad ammazzare una componente di J_μ non tutte e quattro (perchè J_μ non è il gradiente di qualcosa). Sfruttando la simmetria della $G(x-y)$ nello scambio di x e y e una integrazione per parti otteniamo

$$Z(J) = e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J_\mu(x) G(x-y) J_\mu(y)} \int \mathcal{D}\lambda e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \lambda^2(x) + i \int dx dy \lambda(x) \partial_\mu^x G(x-y) J_\mu(y)} \quad (5.96)$$

avendo utilizzato il fatto che

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \partial_\mu^x \lambda(x) G(x-y) \partial_\mu^y \lambda(y) &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \lambda(x) \partial_\mu^y \partial_\mu^x G(x-y) \lambda(y) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \lambda(x) \Delta_4 G(x-y) \lambda(y) = -\frac{1}{2} \int d^4x \lambda^2(x). \end{aligned} \quad (5.97)$$

Dalla variazione dell'esponente troviamo

$$\bar{\lambda}(x) = i \int \partial_\mu^x G(x-y) J_\mu(y) d^4y, \quad (5.98)$$

e quindi

$$Z(J) = e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J_\mu(x) G(x-y) J_\mu(y)} e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y d^4z \partial_\mu^x G(x-y) J_\mu(y) \partial_\nu^x G(x-z) J_\nu(z)}. \quad (5.99)$$

Nel secondo esponenziale abbiamo

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4y d^4z \partial_\mu^x G(x-y) J_\mu(y) \partial_\nu^x G(x-z) J_\nu(z) \\ &= \int d^4x d^4y d^4z \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq_1(x-y)}}{q_1^2} (-iq_1^\mu) J_\mu(y) \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq_2(x-z)}}{q_2^2} (-iq_2^\nu) J_\nu(z) \\ &= - \int d^4y d^4z \left[\int d^4x e^{-i(q_1+q_2)x} \right] \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq_1y}}{q_1^2} \frac{e^{iq_2z}}{q_2^2} (q_1^\mu q_2^\nu) J_\mu(y) J_\nu(z) \\ &= \int d^4y d^4z \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq(y-z)}}{q^4} (q^\mu q^\nu) J_\mu(y) J_\nu(z) = \int d^4x d^4y \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq(x-y)}}{q^4} (q^\mu q^\nu) J_\mu(x) J_\nu(y) \\ &= \int \tilde{G}_{\mu\nu}(x-y) J^\mu(x) J^\nu(y) d^4x d^4y. \end{aligned}$$

Abbiamo definito

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{q^\mu q^\nu}{q^4} e^{iq(x-y)} \quad (5.100)$$

In totale otteniamo

$$\begin{aligned} Z(J) &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J_\mu(x) G(x-y) J_\mu(y) - \frac{1}{2} \int \tilde{G}_{\mu\nu}(x-y) J^\mu(x) J^\nu(y) d^4x d^4y \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \left[\delta_{\mu\nu} G(x-y) - \tilde{G}_{\mu\nu}(x-y) \right] J^\mu(x) J^\nu(y) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int G_{\mu\nu}(x-y) J^\mu(x) J^\nu(y) d^4x d^4y \right\} \end{aligned} \quad (5.101)$$

dove abbiamo definito

$$G_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right] \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2}. \quad (5.102)$$

Questo è proprio il *propagatore trasverso* del bosone di Gauge, come si può dedurre facilmente calcolando la funzione a due punti $\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle = G_{\mu\nu}(x-y)$. Si dice trasverso perché se facciamo la derivata rispetto a μ o ν questa si annulla (il calcolo è banale).

5.3.4 Caso non Abeliano

L'ultima cosa che ci è rimasta da capire (sappiamo fare tutti i calcoli in teoria delle perturbazioni) che cosa è esattamente $\Delta_f(A)$ e come si rappresenta anche nel caso non abeliano. Come sappiamo questo oggetto dipende dalla particolare scelta della Gauge fixing come evidenziato dal pedice f . Mettiamoci nella Gauge fixing di Lorentz $\partial_\mu A_\mu^a = 0$. Uno dovrebbe dimostrare che data una A che non soddisfa la Gauge fixing, esiste una trasformazione U tale che $\partial_\mu A_\mu^U = 0$. Questo è un problema molto complicato e la cui soluzione non è unica. È stato infatti dimostrato da coloro che si occupano di geometria algebrica che quasi qualunque condizione di Gauge io metta per un campo di Gauge non abeliano porta necessariamente a quelle che si chiamano *coppie di Gribov*. In poche parole si dimostra che alcune orbite hanno delle intersezioni multiple. Facciamo finta che questo problema non esista (anche perché come vedremo dopo in teoria delle perturbazioni non ci si deve fare problemi), e quindi procediamo formalmente. Abbiamo un campo di Gauge A_μ e una trasformazione di Gauge

$$A_\mu^U(x) = U(x) A_\mu U^\dagger(x) + iU(x) \partial_\mu U^\dagger(x).$$

con U matrice unitaria che dipende dallo spazio-tempo. Il fattore di Faddeev-Popov si può ricavare dalla relazione

$$\Delta_{\delta A}(A) \int \mathcal{D}U \delta [\partial_\mu A_\mu^U] = 1. \quad (5.103)$$

Questa nel caso abeliano non è più una equazione semplice come nel caso abeliano nel quale abbiamo una equazione lineare. Questa è una equazione non lineare con coefficienti che dipendono dalla x (sono i coefficienti $A_\mu(x)$). Tuttavia se ci interessa la $\Delta_f(A)$ sulla superficie di Gauge fixing e vi è solo una intersezione di ogni orbita con la superficie, allora le cose cambiano. A me infatti interessa calcolare questo integrale

$$\int \mathcal{D}U \delta [\partial_\mu A_\mu^U] \quad (5.104)$$

per una configurazione che già soddisfa $\partial_\mu A_\mu = 0$. Quindi vuol dire che la delta di Dirac mi restringe la U ad essere infinitesima (deve differire dall'identità per un infinitesimo). Infatti per $U = \mathbb{I}$ è soddisfatta e io posso fare l'integrale intorno a $U = \mathbb{I}$ (sto prendendo grazie alla delta una A_μ che sta sulla superficie di Gauge fixing). Questo vale purchè ci sia soltanto una sola orbita. Sappiamo che $U = e^{ig^a \lambda_a}$; espandendo troviamo

$$U \simeq \mathbb{I} + ig^a \lambda_a = \mathbb{I} + ig\lambda \quad (5.105)$$

dove g^a sono $N^2 - 1$ parametri reali infinitesimi in questo caso. Per quanto riguarda A_μ abbiamo (gli indici di gruppo alti o bassi non hanno alcun significato)

$$A_\mu^U \simeq A_\mu + i [g, A_\mu] + \partial_\mu g = A_\mu^a \lambda_a + ig^a A_\mu^b [\lambda_a, \lambda_b] + \partial_\mu g^a \lambda_a = A_\mu^a \lambda_a - f_{abc} g^a A_\mu^b \lambda^c + \partial_\mu g^a \lambda_a \quad (5.106)$$

e quindi sfruttando l'invarianza ciclica della f abbiamo

$$(A_\mu^U)^a \simeq A_\mu^a - f_{abc} g^b A_\mu^c + \partial_\mu g^a = A_\mu^a + \mathcal{D}_\mu^{ab}(A) g_b \quad (5.107)$$

dove abbiamo definito la *derivata covariante nell'aggiunta* in presenza del campo A

$$\mathcal{D}_\mu^{ab}(A) = \delta_{ab} \partial_\mu - f_{abc} A_\mu^c \quad (5.108)$$

In forma compatta $A_\mu^U \simeq A_\mu + \mathcal{D}_\mu(A) g$. Calcoliamoci ora l'integrale

$$\int \mathcal{D}U \delta [\partial_\mu (A_\mu + \mathcal{D}_\mu(A) g)] = \int \mathcal{D}U \delta [\partial_\mu \mathcal{D}_\mu(A) g] = \int \prod_x \mu(g_x) d^n g(x) \delta [\partial_\mu \mathcal{D}_\mu(A) g] \quad (5.109)$$

Già sappiamo che la soluzione di questa equazione è unica perchè abbiamo supposto che ci sia solo una soluzione. L'argomento della delta è la variazione dalla superficie di Gauge fixing. Se noi diamo una A che soddisfa già la condizione di Gauge fixing la soluzione avremmo $g = 0$ e va bene. Il fattore di peso $\mu(g_x)$ della misura invariante è irrilevante perchè viene calcolata sulle soluzioni della delta cioè per $g = 0$ e quindi naturalmente è una costante che si semplificherà con la corrispondente al denominatore. Ora possiamo sfruttare la proprietà nota della delta: se B è un operatore lineare allora $\int d^n x \delta[Bx] = \frac{1}{|\det B|}$ abbiamo pertanto

$$\int \mathcal{D}U \delta [\partial_\mu A_\mu^U] = \frac{1}{|\det(\partial_\mu \mathcal{D}_\mu(A))|} \implies \Delta_{\delta A}(A) = |\det(\partial_\mu \mathcal{D}_\mu(A))|. \quad (5.110)$$

La $\Delta_f(A)$ per questo motivo si chiama anche *determinante di Faddeev-Popov*. Ricordare che abbiamo già definito che cosa è il determinante di un operatore differenziale ($e^{\text{Tr } \ln}$); notare che questa espressione è simile al determinante di un operatore differenziale bosonico. Andiamo ora a vedere bene come è fatto questo oggetto. Nel caso in cui non ci siano intersezioni multiple questo determinante qui non si annulla mai. Al variare di A ovvero dell'orbita si potrebbe annullare infatti in qualche punto. Ammesso che non si annulli mai (lo dimostriamo tra poco), questo determinante non cambia mai di segno, quindi posso cambiare segno di modulo dal determinante (se ho un segno meno si cancella comunque sia con il denominatore). Abbiamo, poichè siamo nell'europeo

$$(\partial_\mu \mathcal{D}_\mu(A))^{ab} = \delta^{ab} \Delta_4^x - f_{abc} A_\mu^c \partial_\mu \quad (5.111)$$

Abbiamo scambiato A_μ^c con ∂_μ in quanto $\partial_\mu A_\mu^c = 0$ e ∂_μ va applicata anche alla g su cui la matrice $(\partial_\mu \mathcal{D}_\mu(A))^{ab}$ agisce. Per calcolare il determinante di questo operatore differenziale bisogna applicarlo ad una $\delta^4(x - y)$ (in a, b è già una matrice) in modo tale da renderlo un operatore integrale (che agisce sulla variabile x). Una volta fatto questo possiamo fare $e^{\text{Tr} \ln}$. Il determinante è zero se c'è un modo nullo in questo operatore differenziale. Esisterà quindi un autovettore \bar{g} tale che

$$\partial_\mu \mathcal{D}_\mu(A) \bar{g} = 0 \quad (5.112)$$

ovvero esiste un autovalore nullo. Questa \bar{g} può essere usata per scriverci una trasformazione di Gauge infinitesima. Se prendiamo A_μ sulla superficie di Gauge fixing allora

$$A_\mu^U \simeq A_\mu + \mathcal{D}_\mu(A) \bar{g} \implies \partial_\mu A_\mu^U = \partial_\mu \mathcal{D}_\mu(A) \bar{g} = 0, \quad (5.113)$$

ovvero se $\partial_\mu A_\mu = 0$ allora necessariamente anche la trasformazione di Gauge secondo *barg* deve essere tale che $\partial_\mu A_\mu^U = 0$. Questo significa che se io mi sposto infinitamente poco lungo l'orbita rimango sulla superficie di gauge fixing in quanto sia A_μ che A_μ^U la soddisfano. In altri termini l'orbita è tangente alla superficie di Gauge fixing. Questo è, in forma infinitesima, il dire che ho delle intersezioni multiple. Quindi se dico che vi sono solo intersezioni singole allora questo implica che non vi sono modi nulli e il determinante non si annulla mai. Detto questo mi devo calcolare questo determinante. Ricordiamo che la formula di Faddeev-Popov aveva questa forma

$$\langle O \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A e^{-S_{YM}(A)} O(A) \Delta_{\delta A}(A) \delta[\partial_\mu A_\mu]}{\int \mathcal{D}A e^{-S_{YM}(A)} \Delta_{\delta A}(A) \delta[\partial_\mu A_\mu]}. \quad (5.114)$$

Posso ora introdurre un integrale funzionale Gaussiano su variabili complesse di Grassmann (fermioniche)

$$\Delta_{\delta A}(A) = \det(\partial_\mu \mathcal{D}_\mu(A)) \propto \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} e^{\int d^4x \bar{c}^a \partial_\mu \mathcal{D}_\mu^{ab}(A) c^b}. \quad (5.115)$$

la costante di proporzionalità non ci interessa perché tanto si eliminano con la normalizzazione. È importante quindi aver eliminato il modulo sennò non avrei mai potuto fare questo passaggio. Abbiamo pertanto (sottointendendo la normalizzazione)

$$\langle O \rangle = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} e^{-S_{YM}(A) + \int d^4x \bar{c}^a \partial_\mu \mathcal{D}_\mu^{ab}(A) c^b} O(A) \delta[\partial_\mu A_\mu]. \quad (5.116)$$

ora

$$\begin{aligned} \int d^4x \bar{c}^a \partial_\mu \mathcal{D}_\mu^{ab}(A) c^b &= \int d^4x \bar{c}^a \delta^{ab} \Delta_4^x c^b - \int d^4x \bar{c}^a f_{abe} A_\mu^e \partial_\mu c^b \\ &= - \int d^4x \partial_\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + \int d^4x \partial_\mu \bar{c}^a f_{abe} A_\mu^e c^b. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} e^{-S_{YM}(A) - \int d^4x \partial_\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + \int d^4x \partial_\mu \bar{c}^a f_{abe} A_\mu^e c^b} O(A) \delta[\partial_\mu A_\mu] \\ &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} e^{-S_{YM}(A) - S_{ghost}(c, \bar{c}, A)} O(A) \delta[\partial_\mu A_\mu]. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Ho introdotto quindi $N^2 - 1$ campi scalari (non hanno nessun indice vettoriale o spinoriale) quantizzandoli con gli anticommutatori. Pertanto sono oggetti che *non possono esistere* in natura (violano il teorema di spin-statistica: particelle scalari e quindi di spin zero dovrebbero essere dei bosoni). Per questo motivo si chiamano *ghost* di Faddeev-Popov. I ghost esistono per cancellare cose che non ci devono essere. Quando quantizziamo le teorie di Gauge abeliane o non, quantizziamo una teoria che un campo vettoriale a 4 componenti. Questo campo vettoriale a massa nulla sembrerebbe avere 4 gradi di libertà (uno per ogni componente μ); in realtà sappiamo, ad esempio per i fotoni che sono solo due fisici. Se noi li guardiamo in termini di una Gauge covariante (non come ad MQR che avevamo usato la Gauge di Coulomb), ad esempio quella che abbiamo esaminato ora con la Gauge di Lorentz, abbiamo 4 campi di Gauge interagenti con la

materia e due di questi sono non fisici. Nel caso abeliano non ci sono problemi, ovvero si dimostra che le componenti longitudinale e temporale (le altre due sono quelle trasverse al moto, i “veri” fotoni) che sono non fisiche, si cancellano tra di loro nelle ampiezze fisiche. Nel caso non abeliano questa cancellazione è incompleta. I ghost sono lì per finire questa cancellazione e togliere di mezzo le quantità non fisiche. Alla fine i gradi di libertà sono solo quelli trasversi, come nella Gauge di Coulomb. Però nel formalismo covariante ci sono tutti e 4 e tutti questi termini che abbiamo qui servono ad eliminare gradi di libertà non fisici che altrimenti darebbero sezioni d’urto negative⁴ che non ci possono essere naturalmente. Storicamente il primo che si accorse di questo fatto fu Feynman con un calcolo ad un loop di una teoria di Gauge non abeliana: si accorse che se non ci metto un termine (che lui ci ha messo a mano e alla fine coincideva proprio con il determinante di Faddeev-Popov) la teoria era inconsistente. Lui non arrivò alla soluzione al problema ma due anni più tardi Faddeev e Popov ci riuscirono. Questo risolse il problema a tutti gli ordini della teoria delle perturbazioni. Notare che nell’azione di Yang-Mills originariamente non avevamo (apparentemente) la costante di accoppiamento. Avevamo inserito a mano un fattore g^2 a denominatore

$$S_{YM} = -\frac{1}{4g^2} \int d^4x F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a. \quad (5.119)$$

Possiamo riscalare i campi attraverso $\frac{1}{g} A_\mu^a = A_\mu^{a'}$ per ogni a . Guardando solo la struttura di $F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a$ e effettuando questo cambio di variabile (lo jacobiano è una costante e si elimina con il denominatore) abbiamo

$$-\frac{1}{g^2} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + f A A)^2 = -\frac{1}{g^2} \int d^4x (g \partial_\mu A'_\nu - g \partial_\nu A'_\mu + F A' A' g^2)^2 \quad (5.120)$$

Quindi non abbiamo nessuna costante di accoppiamento davanti ai termini che portano un quadrato delle A' ; abbiamo un fattore g davanti ai termini cubici nelle A' e g^2 davanti ai termini quartici nelle A' . Per i ghost è la stessa cosa

$$\partial_\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + \int d^4x \partial_\mu \bar{c}^a f_{abe} A_\mu^e c^b = \partial_\mu \bar{c}^a \partial_\mu c^a + g \int d^4x \partial_\mu \bar{c}^a f_{abe} A'_\mu^e c^b \quad (5.121)$$

compare una g ; per $g = 0$ possiamo fare la teoria libera dei ghost; per $g \neq 0$ invece possiamo utilizzare una teoria delle perturbazioni. A $g = 0$, la teoria diventa abeliana (abbiamo $N^2 - 1$ repliche di teorie abeline senza interazioni). La soluzione con $g = 0$, il problema di Gribov non ce l’ha (il caso abeliano non ha coppie di Gribov); quindi ad ogni ordine della teoria delle perturbazioni, essendo g infinitesimo, il problema non c’è. Quindi in teoria delle perturbazioni questo problema è irrilevante (in altre parole espandendo intorno a $g = 0$ gli effetti delle intersezioni multiple si incontrano ad ordini molto grandi). Le cose che possono contribuire alle coppie di Gribov sono valori medi di osservabili che hanno sviluppo perturbativo identicamente nullo. Ci possono essere infatti dei termini che hanno uno sviluppo di Taylor identicamente nullo. Un esempio è $f(g) = e^{-1/g^2}$: è una funzione tale che ha ogni termine della serie di Taylor nullo (singolarità essenziale). Questi oggetti qui sono tipicamente non perturbativi ovvero si possono vedere solo se facciamo un calcolo numerico nell’integrale funzionale. Asintoticamente in g questi termini si annullano, ma poiché g è piccola ma finita, può essere che questi termini siano importanti e quindi ad un certo punto entriamo nel range non perturbativo. L’unico modo di controllare questi termini sono con delle approssimazioni numeriche al computer (discretizzare e calcolare l’integrale funzionale). Per fare la teoria delle perturbazioni, quindi introduciamo una costante di accoppiamento in modo tale che vada a finire sui termini che non sono quadratici nelle A ; quindi a $g = 0$ abbiamo una teoria solo con i termini quadratici: abbiamo il propagatore per i ghost e il propagatore del campo di Yang-Mills calcolato sul Gauge fixing. Vediamo ora come questa restrizione in realtà non è necessaria e si può rilasciare (ottenendo risultati identici per operatori Gauge invarianti). Ci sono anche condizioni di Gauge fixing più adatte per fare i calcoli (anche meglio della Gauge fixing di Lorentz). La soluzione migliore è la seguente

$$\partial_\mu A_\mu^a(x) = \Lambda^a(x). \quad (5.122)$$

dove $\Lambda^a(x)$ sono $N^2 - 1$ funzioni arbitrarie reali e fissate. È una Gauge pazzesca questa da scegliere in quanto rompiamo l’invarianza di Lorentz e l’invarianza per traslazioni. Tuttavia siccome alla fine ci integreremo

⁴Testa ha nominato che in questo caso ci sarebbero metriche negative nello spazio-tempo oppure metriche abeliane nello spazio di Hilbert degli stati

sopra questo Λ , in realtà tutti questi svantaggi scompariranno (e inoltre posso scegliere la Gauge che mi pare). Se voglio fare la teoria delle perturbazioni però devo garantire che nel caso abeliano questa abbia soluzione; questa ce l'ha facilmente (è uguale al calcolo che abbiamo fatto nel caso abeliano). Naturalmente il valor medio di O poichè è Gauge invariante è tale da rimanere lo stesso se cambiamo la Gauge. Rifacciamo gli stessi passaggi iniziali. Il fattore di Faddeev-Popov si ottiene da

$$\Delta_f(A) \int \mathcal{D}U \delta[f(A^U)] = \Delta_{\delta A=\Lambda}(A) \int \mathcal{D}U \delta[\partial_\mu A_\mu^U - \Lambda] = 1. \quad (5.123)$$

Poichè $A_\mu^U \simeq A_\mu + \mathcal{D}_\mu(A)g$ e dobbiamo calcolare il fattore di Faddeev-Popov sulla Gauge fixing abbiamo che $\partial_\mu A_\mu^U - \Lambda = \partial_\mu A_\mu - \Lambda + \mathcal{D}_\mu(A)g = \mathcal{D}_\mu(A)g$. Sembrerebbe che il determinante da calcolare e che viene fuori dalla solita (5.71), è il determinante dello stesso operatore anche se abbiamo cambiato Gauge fixing. In realtà è completamente diverso in quanto in un caso A soddisfaceva la Gauge fixing di Lorentz, mentre adesso soddisfa quella nuova. Ha solo la stessa forma funzionale ma calcolata su Gauge fixing diverse (infatti il determinante di Faddeev-Popov dipende dalla Gauge fixing!). Abbiamo quindi che

$$\langle O \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A e^{-S_{YM}(A)} O(A) \det(\partial_\mu \mathcal{D}_\mu(A)) \delta[\partial_\mu A_\mu - \Lambda]}{\int \mathcal{D}A e^{-S_{YM}(A)} \det(\partial_\mu \mathcal{D}_\mu(A)) \delta[\partial_\mu A_\mu - \Lambda]}. \quad (5.124)$$

Questo integrale funzionale qui è indipendente da Λ ; infatti se cambiamo Λ è come se cambiassimo Gauge fixing, ma sappiamo che $\langle O \rangle$ non può dipendere dalla Gauge fixing. Allora posso sfruttare questo fatto in questa maniera. Introduco un integrale su Λ con un fattore di convergenza che mi fa piacere $\frac{1}{2\alpha}$. Trascurando la normalizzazione (su cui opero tuttavia lo stesso passaggio!) abbiamo

$$\langle O \rangle = \int \mathcal{D}\Lambda e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x \Lambda^\alpha \Lambda_\alpha} \int \mathcal{D}A e^{-S_{YM}(A)} O(A) \det(\partial_\mu \mathcal{D}_\mu(A)) \delta[\partial_\mu A_\mu - \Lambda] \quad (5.125)$$

dove come al solito $\int \mathcal{D}\Lambda$ indica l'integrale su tutti gli $N^2 - 1$ valori assunti dai termini Λ^α . Adesso scambio l'ordine di integrazione tra Λ e A e sfrutto la δ sostituendo al posto di $\Lambda \rightarrow \partial_\mu A_\mu$. Abbiamo

$$\langle O \rangle = \int \mathcal{D}A e^{-S_{YM}(A)} O(A) \det(\partial_\mu \mathcal{D}_\mu(A)) e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x (\partial_\mu A_\mu^\alpha)^2}. \quad (5.126)$$

Questo valor medio calcolato così è identico a quello calcolato prima. Quello che ho fatto è cambiare teoria perchè ho eliminato la delta (sto integrando su tutte le configurazioni A non ristrette da alcun vincolo). Naturalmente però ho un fattore di convergenza nella direzione in cui $\partial_\mu A_\mu$ sta cambiando cioè quando esco dalla superficie di Gauge fixing. Però adesso l'integrale non è più ristretto alla superficie di Gauge fixing: ho solo un peso differente a seconda di quanto più lontano sono da essa. Quando poniamo $\alpha = 1$ viene fuori quella che si chiama la *Gauge di Feynman* cioè il propagatore libero di questa teoria è quello fatto con $g^{\mu\nu}/q^2$. In generale abbiamo in questa teoria un propagatore che dipende da α e questo ovviamente è un parametro arbitrario (di Gauge). Possiamo scegliere pertanto un α opportuno che ci semplifichi i calcoli (il risultato per le quantità fisiche è indipendente da α). Il propagatore che è una quantità non fisica dipende invece da α . La parte dei ghost è la stessa in quanto il determinante lo posso scrivere nello stesso modo.

Capitolo 6

Simmetrie

Nei corsi elementari viene detto che quanto c'è una simmetria nella Lagrangiana classica vi è una quantità conservata. Questa simmetria si traduce nel caso quantistico semplicemente interpretando gli come operatori. Già sappiamo che ci possono essere delle cose che possono andare storte in quanto quando interpretiamo degli oggetti classici come degli operatori abbiamo spesso problemi di ordinamento da risolvere e non è detto che questi problemi possano essere risolti in favore dell'esistenza della simmetria a livello quantistico. Quello che adesso faremo è vedere come si imposta questo problema dal punto di vista dell'integrale funzionale e quindi come si può decidere se la simmetria classica può permanere o no nel caso quantistico. Faremo la teoria delle simmetrie pertanto "fatta bene" ovvero non ricorrendo all'analogia classica ma ricorrendo ad una formulazione tramite l'integrale funzionale.

6.1 Teorema della Noether

Prima di fare questo ripassiamoci un attimo il teorema della Noether nella forma che ci servirà. La mia teoria è definita dalla presenza di una azione funzionale dei campi Φ

$$S(\Phi) = \int d^4x \mathcal{L}(x). \quad (6.1)$$

Supponiamo adesso che ci sia una trasformazione *continua* dei campi, tale che l'azione rimanga invariata. Allora la variazione dei campi (siccome le trasformazioni sono continue) le posso restringere a trasformazioni infinitesime. Su questo si concentra il teorema di Noether. Queste trasformazioni dei campi, se ci restringiamo al caso lineare, saranno della forma

$$\delta\Phi_i = \alpha^a R_{ik}^a \Phi_k \quad (6.2)$$

dove α^a è un certo parametro infinitesimo. Per il caso generale la trasformazione sarebbe $\delta\Phi^a = \alpha^a F^a(\Phi)$. Per ipotesi l'azione è invariante sotto questa variazione dei campi e quindi $\delta S = 0$ (non sto usando le equazioni del moto questo è vero per l'azione). Consideriamo ora una trasformazione infinitesima che abbia questa forma ma in cui $\alpha^a = \alpha^a(x)$ dipende da x . Siccome non è una teoria di Gauge, quando faccio questo la mia azione non è invariante sotto $\delta\Phi = \alpha^a(x) F^a(\Phi)$ (la simmetria è *globale* e non locale). La variazione dell'azione sarà fatta in un modo tale che si riduce a zero quando α è costante; questo ci suggerisce che deve dipendere dalle derivate di α

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu \alpha^a(x) J_a^\mu(x). \quad (6.3)$$

Adesso io non ho usato le equazioni del moto. Ma le equazioni del moto cosa mi dicono? Mi dicono che se io prendo una soluzione dell'equazione del moto Φ , queste mi rendono l'azione stazionaria per una variazione infinitesima intorno ad esse. Quindi se noi calcoliamo questa variazione usando le equazioni del moto allora $\delta S = 0$. Ora prendo una α che sia diversa da 0 in una regione finita dello spazio-tempo e si annulli con tutte le sue derivate al di fuori di un certo supporto compatto. Questo significa che posso integrare per parti

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu \alpha^a(x) J_a^\mu(x) \Big|_{\text{eq moto}} = \int d^4x \alpha^a(x) \partial_\mu J_a^\mu(x) \Big|_{\text{eq moto}} = 0, \quad (6.4)$$

e quindi qualunque sia α (a supporto compatto) abbiamo che

$$\partial_\mu J_a^\mu(x) = 0. \quad (6.5)$$

In questo modo io ho calcolato anche quanto sono le correnti $J_a^\mu(x)$ e ho dimostrato che sono correnti conservative. Ho un numero di quadricorrenti pari al numero di parametri indipendenti a delle trasformazioni che stiamo guardando. Questa è la versione del teorema della Noether che tradurremo nel caso quantistico più tardi.

6.2 Simmetrie $\text{SO}(N)$

Prendiamo una teoria scalare con N campi reali. La teoria libera sarà descritta da una densità lagrangiana del tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - \frac{m}{2} \Phi_i \Phi_i. \quad (6.6)$$

Questa teoria libera è invariante sotto trasformazioni *ortogonal* (gruppo $\text{SO}(N)$)

$$\Phi'_i = O_{ij} \Phi_j \quad O^T O = \mathbb{I} \quad (6.7)$$

con O indipendenti da x . Se voglio una teoria più interessante non libera che sia invariante sotto lo stesso gruppo basta aggiungere un termine ad esempio $-g(\Phi_i \Phi_i)^2$ ma ne possiamo immaginare anche altri. Questa teoria se la trasportiamo al caso quantistico è una teoria rinormalizzabile perché ha tutte le costanti di accoppiamento di dimensioni maggiori o uguali a 0 in potenze di energia. In generale dobbiamo inserire tutti i termini possibili con costanti di accoppiamento di dimensioni positive o nulle in energia compatibili con una simmetria del problema. È rinormalizzabile se ovviamente rendiamo finite le funzioni di Green riscalando i campi Φ di una costante Z (in generale una Z per ogni campo Φ indipendente; in realtà siccome le funzioni di Green, come vedremo, soddisfano l'identità di simmetria sotto trasformazioni $\text{O}(N)$, ne basta uno solo per ogni multipletto di campi irriducibili, ovvero basta un'unica Z per tutte le funzioni di Green). Quindi vedremo, è sufficiente rinormalizzare la massa, la costante di accoppiamento e avere un'unica costante di rinormalizzazione comune per tutti i campi per avere le funzioni di Green tutte finite. Vediamo ora quali sono le conseguenze della simmetria di questa teoria. Per calcolarci le correnti di Noether dobbiamo calcolarci le trasformazioni infinitesime di queste matrici ortogonali. Una matrice ortogonale a determinante 1 la posso sempre scrivere come

$$O = e^\alpha \simeq \mathbb{I} + \alpha, \quad (6.8)$$

dove α è una matrice antisimmetrica $\alpha^T = -\alpha$ (sto infatti usando matrici unitarie in spazio reale) e il secondo passaggio vale perché siamo interessati a trasformazioni infinitesime. Per verificarlo comunque basta vedere che, espandendo in serie di Taylor $(e^g)^T = e^{-g}$ da cui $OO^T = O^T O = e^\alpha e^{-\alpha} = \mathbb{I}$ e che $\det O = e^{\text{Tr } \ln O} = e^{\text{Tr } \alpha} = 1$. Naturalmente questa matrice antisimmetrica g possiamo esprimere in una base

$$\alpha = \alpha^a \lambda_a \quad (6.9)$$

delle matrici antisimmetriche. Quindi le λ_a sono matrici reali ma antisimmetriche

$$\lambda_a^* = \lambda_a, \quad \lambda_a^T = -\lambda_a. \quad (6.10)$$

L'uguaglianza $O = e^g$ costituisce una parametrizzazione delle matrici $\text{SO}(N)$ e ci domandiamo quindi quante siano le matrici antisimmetriche di ordine N linearmente indipendenti tali che ogni matrice antisimmetrica α possa essere espressa come loro combinazione lineare. Abbiamo che il numero di matrici antisimmetriche indipendenti di ordine N coincide con il numero di elementi indipendenti di tali matrici. Poiché in una matrice antisimmetrica gli elementi sulla diagonale sono sempre nulli e gli elementi simmetrici sono sempre mutuamente opposti, concludiamo che il numero di elementi indipendenti delle matrici antisimmetriche sono tutti e soli gli elementi sopra o sotto la diagonale principale. Il numero di tali elementi, chiamato *dimensione* del gruppo $\text{SO}(N)$ (proprio perché le matrici ortogonali sono tante quante sono le matrici antisimmetriche), è pari a $N(N - 1)/2$. Se fissiamo dunque $N(N - 1)/2$ matrici antisimmetriche indipendenti, denominate *generatori* del gruppo $\text{SO}(N)$, abbiamo che ogni matrice antisimmetrica risulta una combinazione lineare di

tali generatori con opportuni coefficienti, i quali costituiscono quindi, come detto, i parametri della rotazione O scritta come esponenziale della combinazione lineare considerata. Poiché quindi gli elementi del gruppo $SO(N)$ dipendono con continuità da dei parametri reali, concludiamo che il gruppo $SO(N)$ è un gruppo di Lie di dimensione $N(N - 1)/2$. Per il teorema di Noether questo significa che esistono $N(N - 1)/2$ correnti conservate relative a questa simmetria. Costruiamole. La variazione dei campi è fatta in questo modo

$$\Phi'_i = \Phi_i + \alpha_a \lambda_{ik}^a \Phi_k \implies \delta\Phi = \alpha_a \lambda^a \Phi. \quad (6.11)$$

Ovviamente se facciamo questa trasformazione la Lagrangiana rimane invariata (è invariante sotto $SO(N)$). Ora prendiamo $\alpha = \alpha(x)$ che dipende da x

$$\delta\Phi = \alpha_a(x) \lambda^a \Phi \quad (6.12)$$

e la Lagrangiana non è più invariante. Ovviamente non tutti i pezzi non sono invarianti: i pezzi nella Lagrangiana che non contengono derivate dei campi (le derivate sono oggetti locali) non si accorgono se ho preso un α costante o no e quindi questi pezzi rimangono invariati (la variazione è 0). Abbiamo quindi

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \delta\Phi_i = \partial_\mu \Phi_i \partial^\mu (\alpha_a(x)) \lambda_{ik}^a \Phi_k + \partial_\mu \Phi_i \alpha_a(x) \lambda_{ik}^a \partial^\mu \Phi_k \quad (6.13)$$

Per gli stessi motivi di prima il secondo addendo non contribuisce alla variazione perché non si accorge se α è costante o no. Pertanto la variazione dell'azione lungo le equazioni del moto

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu \Phi_i \partial^\mu (\alpha_a(x)) \lambda_{ik}^a \Phi_k \Big|_{\text{eq moto}} = \int d^4x \alpha_a(x) \partial^\mu ((\partial_\mu \Phi_i) \lambda_{ik}^a \Phi_k) \Big|_{\text{eq moto}} = 0. \quad (6.14)$$

dà come corrente conservata

$$J_\mu^a(x) = (\partial_\mu \Phi_i) \lambda_{ik}^a \Phi_k. \quad (6.15)$$

Sono conservate se uso le equazioni del moto che seguono da questa Lagrangiana. Poi faccio il ∂^μ della corrente $J_\mu^a(x)$

$$\partial_\mu J_\mu^a(x) = (\square \Phi_i) \lambda_{ik}^a \Phi_k \quad (6.16)$$

dove il secondo termine si annulla perché le λ_a sono antisimmetriche. Se usiamo ora le equazioni del moto si può vedere che le correnti sono conservate. Dal punto di vista canonico qui non ci sono problemi di ordinamento. Infatti $\partial_\mu \Phi$ commuta con Φ : se prendo μ spaziale commutano perché i campi sono calcolati in punti uguali dello spazio-tempo (le Φ commutano a tempi uguali e quindi in particolare in punti uguali); a $\mu = 0$ ci potrebbero essere dei problemi perché il $\partial_0 \Phi$ non commuta con Φ . Tuttavia le λ_a sono antisimmetriche quindi il $\partial_0 \Phi_i$ compare sempre con un'altra Φ_j con $j \neq i$ sempre in quanto gli elementi diagonali di λ^a sono 0. È un pò quello che accade in meccanica quantistica con il momento angolare $x \wedge p$ in cui compaiono sempre componenti con gradi di libertà diversi (questo a causa del tensore completamente antisimmetrico di Levi-Civita; un esempio può essere $x_1 p_2 - p_2 x_1$) e quindi il problema dell'ordinamento non c'è. Ora che abbiamo fatto questo, possiamo associare ad ogni corrente conservata una carica conservata (usando come al solito il teorema della divergenza)

$$Q^a = \int d\mathbf{x} J_0^a(x) = \int d\mathbf{x} \dot{\Phi}_i \lambda_{ik}^a \Phi_k = \int d\mathbf{x} \pi_i(x) \lambda_{ik}^a \Phi_k(x). \quad (6.17)$$

A causa del fatto che $[\lambda_a, \lambda_b] = if_{abc}\lambda^c$ si può far vedere che

$$[Q_a, Q_b] = if_{abc}Q^c \quad (6.18)$$

avendo usato i commutatori canonici (intuibile dal fatto che deve essere i volte un operatore hermitiano). Bisogna verificare il segno; se venisse un meno basta cambiare segno a tutte le Q_a e otterrei comunque sia questa formula. In parole povere i generatori generati dalle simmetrie di Noether possono essere normalizzati in moto tale da soddisfare le regole di commutazione dell'algebra del gruppo di Lie.

Vogliamo ora enunciare (non lo dimostreremo) una importante proprietà di una teoria di campo locale: il *clustering*. Questa, ripeto, è la proprietà di una teoria di campo relativistica locale (ciò significa che le

osservabili che consideriamo sono operatori locali che commutano a distanza di tipo spazio). Prendiamo una qualsiasi funzione di Wightman (cioè il valor medio nel vuoto di prodotti di operatori locali), ad esempio

$$\langle 0 | O(x_1) O(x_2) O(x_3) O(x_4) | 0 \rangle . \quad (6.19)$$

Adesso prendo un sottoinsieme di questi eventi x_1, x_2, x_3, x_4 , ad esempio x_2 e x_3 e li allontano a distanza di tipo spazio da x_1 e x_4 . Questo vuol dire che

$$O(x_2) \rightarrow O(x_2 + \lambda a) \equiv O_\lambda(x_2), \quad O(x_3) \rightarrow O(x_3 + \lambda a) \equiv O_\lambda(x_3), \quad (6.20)$$

dove a è un quadrirettore di tipo spazio ($a^2 = -1$) e λ è un parametro reale. Sto spostando i punti x_2 e x_3 a distanza di tipo spazio dagli altri due tanto quanto voglio (posso anche prendere $\lambda \rightarrow \infty$). Questo significa che ad un certo punto, data comunque una successione di punti fissata, il gruppo di punti traslati sarà a distanza di tipo spazio (usciranno dai coni luce dei) dai punti che sono rimasti fermi. Quando faccio il limite $\lambda \rightarrow \infty$ la funzione di Wightman si fattorizza nel prodotto

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle 0 | O(x_1) O_\lambda(x_2) O_\lambda(x_3) O(x_4) | 0 \rangle = \langle 0 | O(x_1) O(x_4) | 0 \rangle \langle 0 | O(x_2) O(x_3) | 0 \rangle \quad (6.21)$$

ovvero nel prodotto delle funzioni di Wightman degli operatori che sono rimasti fermi e degli operatori che se ne sono andati all'infinito. Naturalmente per l'invarianza per traslazioni la funzione di Wightman degli operatori che si sono mossi non dipendono più da λa . Questo è il teorema del *cluster decomposition*. Questo teorema non ci dice soltanto questo. Ci dice anche che la differenza tra la funzione iniziale e il suo limite, per λ molto grande, decresce esponenzialmente se c'è un mass gap. Se non ci sono particelle di massa nulla il raggiungimento di questo limite è esponenzialmente rapido, altrimenti a potenza (ricorda le transizioni di fase e la funzione di correlazione *connessa!*). Questa proprietà non è vera se abbiamo più di un vuoto, perchè ad un certo punto quello che succede nella dimostrazione è che questi due gruppi possono essere scambiati, commutano perchè i traslati sono a distanza di tipo spazio dagli altri, in mezzo ci metto una somma su stati intermedi e solo lo stato che ha quadriimpulso nullo può contribuire: quindi se c'è un vuoto torna questa formula sennò una decomposizione più complicata (una somma di prodotti con i vari vuoti possibili in mezzo). Perchè non ci piace che quell'oggetto non si fattorizza in questo modo se c'è più di un vuoto? Il motivo è semplice. Immaginiamo di fare un esperimento di scattering di una teoria ragionevole. Siamo siamo in un laboratorio e facciamo uno scattering $a + b \rightarrow c + d$; più o meno nello stesso periodo di tempo in un laboratorio lontano facciamo un altro esperimento di scattering $e + f \rightarrow g + h$. Se il tempo in cui avvengono le due esperienze sono tali che questi due laboratori sono fuori dal cono di luce dell'altro, non ci possono essere influenze da parte di un esperimento sull'altro. Questo significa che io potrei considerare un'unica esperienza di scattering con uno stato iniziale che è $a + b + e + f$ che va a finire in $c + d + g + h$. Mi aspetto che la matrice S si fattorizzi in un prodotto di due matrici S per i due esperimenti separati. Se un esperimento potesse essere influenza da tutto quello che succede intorno (e lo è effettivamente ed è quello che si chiama il *background*, anche se può essere sottratto), nulla avrebbe senso (se io faccio un esperimento al CERN un altro esperimento al Fermi Lab e i due esperimenti interferiscono pur non essendo uno nel cono luce dell'altro vuol dire che a quel punto non si capisce più niente). Fisicamente ci aspettiamo che la matrice S si debba fattorizzare. Questa fattorizzazione è garantita dal teorema del clustering. Perchè? Prendiamo la situazione in cui abbiamo 4 particelle nello stato iniziale $a + b + e + f$. Usando le formule di riduzione l'elemento di matrice S è fatto da

$$\langle cdgh, \text{Out} | abef, \text{In} \rangle = \int d^4x_1 \dots d^4x_8 f_a(x_1) \dots f_h(x_8) K_{x_1} \dots K_{x_8} \langle 0 | T(O(x_1) \dots O(x_8)) | 0 \rangle \quad (6.22)$$

dove abbiamo un numero di integrali tanti quante sono le particelle iniziali e finali e $f_k(x)$ è la funzione d'onda per la particella k e i K_x sono gli operatori di Klein-Gordon. Il fatto che i due esperimenti siano separati da distanze di tipo spazio significa che i supporti delle funzioni d'onda delle particelle incidenti e di quelle uscenti sono separati a distanze di tipo spazio. In altri termini le variabili x_1, x_2, x_3 e x_4 delle particelle iniziali sono divisi in due gruppi: quelle che sono nel laboratorio 1 e quelle nel laboratorio 2. Quindi questa funzione di Green si spezza, tramite il teorema di clustering nel prodotto di due funzioni di Green una relativa al primo laboratorio e una al secondo e quindi la matrice S è diventata il prodotto delle matrici S . Se non fosse vero il teorema di clustering (ovvero abbiamo a disposizione più di un vuoto) potremmo avere a distanze di tipo spazio delle interferenze misurabili che non posso avere. Il vuoto deve quindi essere

unico in una teoria affinchè abbia un senso. Quando si dice nel caso di rottura spontanea di simmetria “c’è più di un vuoto” in realtà non è vero; in realtà è sempre unico anche in questo caso (è un modo di dire che può essere fuorviante).

Torniamo ora alle simmetrie. Come facciamo a tirare fuori in maniera sistematica tutte le conseguenze di una simmetria? Le conseguenze di una simmetria le guardo sulle funzioni di Wightman o di Green. Io voglio sapere qual’è la conseguenza generale della simmetria su una qualsiasi funzione di Wightman

$$\langle 0 | \Phi_i(x_1) \Phi_j(x_2) \dots | 0 \rangle . \quad (6.23)$$

Anzichè considerare questa funzione di Green consideriamo

$$\langle 0 | [Q_a, \Phi_i(x_1) \Phi_j(x_2) \dots] | 0 \rangle . \quad (6.24)$$

Se il vuoto è invariante questa quantità è nulla. Se il vuoto è invariante sotto trasformazioni di simmetria infatti i generatori sono tali che $Q_a |0\rangle = 0$. Ma fa 0 Q_a applicato al vuoto? In meccanica quantistica (numero finito di gradi di libertà) c’è un teorema che dice che lo stato fondamentale non è mai degenere, ovvero è unico. Se è unico quando faccio la trasformazione di simmetria rimane sè stesso e quindi i generatore agisce in modo banale sullo stato. Cosa succede nel caso di infiniti gradi di libertà? Prendiamo lo stato di vuoto e appliciamogli Q_a

$$Q^a |0\rangle = \int d\mathbf{x} J_0^a(x) |0\rangle . \quad (6.25)$$

Vogliamo dimostrare che, per una teoria con mass gap¹ (ovvero senza particelle a massa nulla)

$$Q^a |0\rangle = 0 . \quad (6.26)$$

Per prima cosa vediamo che la corrente conservata commuta con il quadriimpulso

$$[p^\mu, Q_a] = 0 . \quad (6.27)$$

Per la componente temporale è ovvio in quanto p^0 è l’Hamiltoniana e la corrente è conservata ($[H, p^0] = 0$). Per quanto riguarda la parte spaziale è analogo in quanto vi è l’invarianza per traslazioni. Se applichiamo infatti l’operatore di traslazione spaziale (quella temporale abbiamo già visto che non conta) a $Q_a |p\rangle$ otteniamo

$$\begin{aligned} e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} Q^a |p\rangle &= e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} \int d\mathbf{x} J_0^a(x) |p\rangle = e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} \int d\mathbf{x} J_0^a(x) e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} |p\rangle \\ &= \int d\mathbf{x} J_0^a(x^0, \mathbf{x} + \mathbf{a}) e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} |p\rangle = e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} \int d\mathbf{x} J_0^a(x) |p\rangle = e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} Q^a |p\rangle , \end{aligned} \quad (6.28)$$

e quindi è vero anche per le parti spaziali (avendo notato che integrando in \mathbf{x} perdo la dipendenza da a semplicemente cambiando variabili). Quindi poichè il vuoto è uno stato a quadriimpulso nullo, quando andiamo ad applicare Q_a al vuoto possono succedere due cose, o fa 0 (e allora abbiamo dimostrato quello che volevamo cioè che il vuoto è invariante), oppure potrebbe essere diverso da 0. Se è diverso da 0 quindi, può essere solo della forma

$$Q_a |0\rangle = c_a |0\rangle \implies p^\mu Q_a |0\rangle = 0 \quad (6.29)$$

poichè sappiamo che il quadriimpulso e Q^a commutano e quindi $Q^a |0\rangle$ è un autostato a quadriimpulso nullo. A questo punto dobbiamo dimostrare solo che la costante c_a è nulla. Infatti abbiamo

$$\langle 0 | Q_a | 0 \rangle = c_a \quad (6.30)$$

la c_a risulta essere il valor medio nel vuoto di questa carica Q_a . Ma per l’invarianza di Lorentz il valor medio di una carica deve essere nullo, perchè è la quarta componente di un quadrivettore. Si può mostrare che

$$\langle 0 | J_\mu^a(0) | 0 \rangle = \langle 0 | \Lambda^\nu_\mu J_\nu^a(0) | 0 \rangle \quad (6.31)$$

¹Nel caso di una teoria a massa nulla il ragionamento seguente potrà solo concludere che Q^a applicato al vuoto restituisce uno stato a quadriimpulso nullo

e un quadrivettore con questa proprietà non può essere altri che il quadrivettore nullo. Abbiamo appena dimostrato una forma rudimentale del *teorema di Goldstone*: se non ci sono particelle a massa nulla il vuoto è invariante sotto trasformazioni di simmetria. Al contrario, è logicamente equivalente dire che se il vuoto non è invariante allora ci devono essere particelle di massa nulla.

Ritorniamo ora al commutatore e esaminiamo il caso in cui vi siano solo due campi

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0 | \{Q_a \Phi_i(x_1) \Phi_j(x_2) - \Phi_i(x_1) \Phi_j(x_2) Q_a\} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \{Q_a \Phi_i(x_1) \Phi_j(x_2) - \Phi_i(x_1) Q_a \Phi_j(x_2)\} | 0 \rangle + \langle 0 | \{\Phi_i(x_1) Q_a \Phi_j(x_2) - \Phi_i(x_1) \Phi_j(x_2) Q_a\} | 0 \rangle \quad (6.32) \\ &= \langle 0 | [Q_a, \Phi_i(x_1)] \Phi_j(x_2) | 0 \rangle + \langle 0 | \Phi_i(x_1) [Q_a, \Phi_j(x_2)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

Ora ricordando che $Q^a = \int d\mathbf{x} \dot{\Phi}_i(x) \lambda_{ik}^a \Phi_k(x)$ abbiamo

$$[Q_a, \Phi_j(y)] = -i \int d\mathbf{x} \lambda_{ik}^a \Phi_k(x) \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -i \lambda_{jk}^a \Phi_k(y). \quad (6.33)$$

La carica infatti la possiamo calcolare al tempo che vogliamo (è conservata) e in particolare la calcoliamo al tempo in cui calcoliamo Φ_j , così abbiamo i commutatori canonici a tempi uguali. Naturalmente sappiamo che i commutatori a tempi uguali non esistono e tutto quello che sto dicendo è euristico. Il commutatore che abbiamo trovato riproduce a meno di un fattore $-i$ la variazione infinitesima che ha generato il teorema di Noether. Proseguendo con i calcoli

$$0 = \lambda_{ik}^a \langle 0 | \Phi_k(x_1) \Phi_j(x_2) | 0 \rangle + \lambda_{jk}^a \langle 0 | \Phi_i(x_1) \Phi_k(x_2) | 0 \rangle = \lambda^a \Delta(x_1 - x_2) - \Delta(x_1 - x_2) \lambda^a \quad (6.34)$$

avendo introdotto la matrice

$$\langle 0 | \Phi_i(x) \Phi_j(y) | 0 \rangle = \Delta_{ij}(x - y). \quad (6.35)$$

Abbiamo ottenuto pertanto

$$[\Delta(x - y), \lambda^a] = 0. \quad (6.36)$$

Questa relazione mi dice che la matrice $\Delta(x - y)$, commuta con tutte le matrici λ^a della rappresentazione fondamentale del gruppo. Questa rappresentazione è una irriducibile, quindi posso applicare il *Lemma di Shur*: ogni matrice che commuta con tutte le matrici della rappresentazione (in questo caso quella infinitesima) deve essere multiplo dell'identità

$$\Delta_{ij}(x - y) = \delta_{ij} \Delta(x - y). \quad (6.37)$$

Lo abbiamo fatto per le funzioni di Wightman, ma se fossero stati i T-prodotti sarebbe stato lo stesso (se metto le θ non succede niente). Quindi vuol dire che se abbiamo in queste funzioni di Green un polo, lo abbiamo ugualmente in tutte quante queste funzioni di Green; non solo hanno lo stesso polo, hanno anche lo stesso residuo Z al polo in quanto questa matrice è il multiplo dell'identità. Si può vedere ovviamente facendo la trasformata di Fourier

$$\tilde{\Delta}_{ij}(q) = \delta_{ij} \Delta(q). \quad (6.38)$$

Se abbiamo una realizzazione della simmetria fatta in questa maniera in cui il vuoto è invariante, allora le particelle si distribuiscono in multipletti, ogni multipletto ha la stessa massa e anche le costanti di rinormalizzazione sono le stesse. Quindi ci basta riscalare i campi per una sola costante uguale per tutti e abbiamo risolto il nostro problema in quanto risolviamo con un colpo solo tutti i nostri problemi di riscalamento. Ovviamente noi abbiamo visto solo il caso con il numero di campi $n = 2$; in generale c'è una gerarchia di infinite conseguenze di questa simmetria. Queste conseguenze della simmetria le posso ricavare come conseguenza delle cosiddette *identità di Ward*. Queste potranno essere ricavate direttamente dall'integrale funzionale senza fare i commutatori canonici. Questo ci dirà anche quando è possibile o quando non è possibile che la simmetria classica diventa una simmetria quantistica.

6.3 Identità di Ward

Immaginiamo di costruire la seguente quantità

$$\langle 0 | T(\Phi_i(x) \Phi_j(y) J_a^\mu(z)) | 0 \rangle \quad (6.39)$$

Sappiamo che i T-prodotti sono singolari e che i commutatori canonici a tempi uguali non hanno senso. Il motivo per cui funzionano le identità di Ward è che l'ambiguità del T-prodotto e l'ambiguità dei tempi uguali si compensano dove la simmetria. Abbiamo fatto solo 2 inserzioni di campi in realtà posso farlo con un numero arbitrario di campi (le identità di Ward sono infinite!). Ricordiamoci che

$$[J_a^0(z), \Phi_j(x)]|_{z^0=x^0} = -i\lambda_{jk}^a \Phi_k(z) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \quad (6.40)$$

notare che abbiamo specificato a tempi uguali. Questa relazione integrata dà origine a quella che avevamo prima. Vogliamo sfruttare la conservazione della corrente. Ora deriviamo in ∂_μ^z il T-prodotto di prima. Se non ci fosse il T-prodotto la derivata sarebbe zero perché la corrente è conservata; tuttavia con il T-prodotto bisognerebbe scrivere il prodotto delle funzioni θ per tutti i possibili ordinamenti (6 in totale). Quando andiamo ad applicare la derivata succede che la sua parte spaziale va subito ad agire sulle J_i , mentre la parte temporale può agire sia sulla J_0 (e fa 0 quando è sommata a $\partial_i J_a^i$) oppure sulle θ . La regola è semplice

$$\begin{aligned} \partial_\mu^z \langle 0 | T(\Phi_i(x) \Phi_j(y) J_a^\mu(z)) | 0 \rangle &= \langle 0 | T([J_a^0(z), \Phi_i(x)] \Phi_j(y)) | 0 \rangle \delta(x^0 - z^0) \\ &\quad + \langle 0 | T([J_a^0(z), \Phi_j(y)] \Phi_i(x)) | 0 \rangle \delta(z^0 - y^0) \end{aligned} \quad (6.41)$$

il commutatore è fatto sempre a tempi uguali perché è sempre accompagnato da una delta corrispondente. Il commutatore per motivi di località (anche se qui compare sotto forma di motivi canonici), è diverso da zero soltanto quando i punti sono uguali (vedi anche l'espressione esplicita (6.39)) in quanto i due punti sono sempre calcolati a tempi uguali e quindi se le parti spaziali sono diverse sono a distanza di tipo spazio. Il supporto dei due commutatori deve essere per forza di cose un punto. Abbiamo

$$\begin{aligned} \partial_\mu^z \langle 0 | T(\Phi_i(x) \Phi_j(y) J_a^\mu(z)) | 0 \rangle &= -i\lambda_{il}^a \langle 0 | T(\Phi_l(z) \Phi_j(y)) | 0 \rangle \delta^4(x - z) \\ &\quad - i\lambda_{jl}^a \langle 0 | T(\Phi_l(z) \Phi_i(x)) | 0 \rangle \delta^4(z - y). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Queste identità di Ward sono importanti perché inglobano in maniera completa l'informazione che avevamo prima, quella in cui le cariche annichilavano il vuoto. In quel caso le cariche annichilavano il vuoto nel caso in cui non c'è rottura spontanea (il vuoto non è invariante sotto simmetria). Le identità di Ward al contrario comunque sia realizzata la simmetria. Queste identità quindi non dipendono dal fatto che ci sia o no rottura spontanea.

Vediamo ora come nel caso in cui il vuoto sia invariante, recuperiamo le informazioni di prima. Quella che abbiamo ricavato è una quadridivergenza. Proviamo a farne l'integrale in d^4z esteso a tutto lo spazio-tempo. Per il momento siamo Minkowskiani. Vogliamo mostrare che è 0. Qui però bisogna stare molto attenti in quanto l'integrale della quadridivergenza dipenderà da come l'integrando si comporta a grandi valori di z ; potrebbe andare quindi a zero esponenzialmente (ci servirà il clustering) e i termini di bordo saranno trascurabili, oppure potrebbe andare a zero a potenza se ci sono particelle a massa nulla e in questo caso un termine sopravviverebbe.

$$\int d^4z \partial_\mu^z \langle 0 | T(\Phi_i(x) \Phi_j(y) J_a^\mu(z)) | 0 \rangle \quad (6.43)$$

Concentriamoci ora sulla parte spaziale $\int d^4z \partial_k^z F^k(z, x, y)$. In questo caso si applica il teorema di Gauss tridimensionale: l'integrale in $d\mathbf{z}$ fa il flusso della funzione $F^k(z, x, y)$ sulla superficie all'infinito spaziale. Sto mandando z all'infinito rispetto a x e y che sono fissati. Posso usare il clustering. Otteniamo il prodotto dei valori medi nel vuoto $\langle 0 | T(\Phi_i(x) \Phi_j(y)) | 0 \rangle \langle 0 | J_a^k(z) | 0 \rangle$, in cui l'ultimo termine è zero. Tuttavia non basta questo affinché il flusso sia zero (hai un termine sommato in più dovuto a come il limite viene raggiunto velocemente: ricorda l'andamento delle funzioni di correlazioni connesse: siccome z è inizialmente grande ma finito, devi fare anche l'integrale dell'esponenziale o della potenza, insomma della funzione che decade a 0 e che ti dà informazioni sulla velocità con cui il clustering è ottenuto); questa deve tendere a 0 più rapidamente di r^{-2} (raggio del volume di integrazione). Se c'è un mass gap nella teoria abbiamo detto che il clustering viene raggiunto in forma esponenzialmente rapida con la distanza (r). Quindi questo integrale all'infinito è trascurabile. Se ci sono particelle di massa nulla non è detto perché il clustering viene raggiunto a potenza inversa e allora l'integrale di superficie potrebbe compensare nel caso del teorema di Gauss lo zero che si ottiene nelle singole componenti. Riduciamoci al caso di mass gap. Guardiamo ora l'indice temporale otteniamo la differenza tra l'integrando calcolato a $+\infty$ e quello a $-\infty$

$$\int d^3\mathbf{z} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_0 \partial_0^z \langle 0 | T(\Phi_i(x) \Phi_j(y) J_a^0(z)) | 0 \rangle = \int d^3\mathbf{z} \langle 0 | T(\Phi_i(x) \Phi_j(y) J_a^0(\pm\infty, \mathbf{z})) | 0 \rangle \quad (6.44)$$

Se usiamo ora le proprietà del T-prodotto, nel caso $+\infty$ la J_a^0 va spostata tutta a sinistra mentre nel caso $-\infty$ abbiamo già l'ordinamento naturale. Tuttavia l'integrale in $d\mathbf{z}$ a qualsiasi tempo è la carica Q^a che, quando agisce sul vuoto (a destra o a sinistra), dà come risultato 0, perché abbiamo detto che c'è massa gap e il vuoto è invariante. Integrando ora il secondo membro eliminiamo le delte e otteniamo, sfruttando l'antisimmetria di λ^a

$$\lambda_{il}^a \langle 0 | T(\Phi_l(x) \Phi_j(y)) | 0 \rangle + \lambda_{jl}^a \langle 0 | T(\Phi_l(y) \Phi_i(x)) | 0 \rangle = \lambda_{il}^a \Delta_{lj}(x-y) - \Delta_{il}(x-y) \lambda_{lj}^a = 0 \quad (6.45)$$

ovvero abbiamo ottenuto lo stesso risultato precedente ovvero che

$$[\Delta(x-y), \lambda^a] = 0. \quad (6.46)$$

Finora abbiamo fatto tutto in maniera formale ovvero con l'uso dei T-prodotti e i commutatori a tempi uguali che sappiamo che non esistono. Vogliamo trovare un modo di derivare le identità di Ward dall'integrale funzionale.

6.3.1 Derivazione dall'integrale funzionale

Partiamo dal funzionale generatore nell'europeo regolarizzato attraverso un cut-off Λ

$$Z(\rho) = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_\Lambda(\Phi) + \int d^4x \rho_j(x) \Phi_j(x)}. \quad (6.47)$$

Tutto quello che sto per dire ora funziona soltanto se esiste un regolatore che rispetta la stessa simmetria che stiamo studiando classicamente. Questo è il criterio con cui la simmetria può essere tradotta nel caso quantistico. Se la teoria può essere regolarizzata in questo modo allora la simmetria si traduce nel caso quantistico senza colpo ferire. Altrimenti non è detto che non si possa fare, ma bisogna decidere caso per caso e non c'è un criterio generale. Ovviamente il regolatore può esserci (e magari non siamo tanto bravi nel trovare proprio quello giusto) o non esserci. Immagino che l'azione regolarizzata continui ad essere invariante sotto trasformazioni classiche. Questo è essenziale per andare avanti

$$\delta S_\Lambda = 0 \quad \text{per trasformazioni della forma} \quad \delta \Phi_i = \alpha^a \lambda_{ik}^a \Phi_k \quad (6.48)$$

Per questo tipo di simmetria non è difficile trovare una azione regolarizzata che sia invariante. Questa teoria come si dice non ha *anomalie* sicuramente. La simmetria classica va a finire in una simmetria quantistica senza problemi. Voglio ora fare un cambiamento di variabile collegato con le trasformazioni di simmetria

$$\Phi_i(x) = \Phi'_i(x) + \alpha^a \lambda_{ik}^a \Phi'_k(x). \quad (6.49)$$

Ora però voglio fare questo cambio di variabili con un set di parametri $\alpha^a = \alpha^a(x)$ che dipendono da x

$$\Phi_i(x) = \Phi'_i(x) + \alpha^a(x) \lambda_{ik}^a \Phi'_k(x). \quad (6.50)$$

È chiaro che questa è una rotazione ortogonale delle mie variabili punto per punto nello spazio-tempo. Pertanto lo jacobiano di passaggio dalle Φ alle Φ' è 1. Richiamo poi Φ' come Φ

$$Z(\rho) = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_\Lambda(\Phi + \alpha \lambda \Phi) + \int d^4x \rho(\Phi + \alpha \lambda \Phi)}. \quad (6.51)$$

Ora, visto che ho preso un α infinitesimo, posso sviluppare questi oggetti fino al primo ordine (la simmetria era fatta in modo tale da trascurare i termini di ordine α^2 nella variazione del campo). Sappiamo che l'azione regolarizzata rimane invariante sotto simmetria e quindi

$$\delta S_\Lambda(\Phi) = \int d^4x \partial^\mu \alpha_a(x) J_\mu^a(x) \implies S_\Lambda(\Phi + \alpha \lambda \Phi) \simeq S_\Lambda(\Phi) + \int d^4x \partial^\mu \alpha_a(x) J_\mu^a(x) \quad (6.52)$$

dove $J_\mu^a(x)$ naturalmente dipende da Λ ovvero deve essere la corrente di Noether generata dall'azione S_Λ regolarizzata. Sto usando in pratica il teorema della Noether sulla teoria regolarizzata. Otteniamo

$$\begin{aligned} Z(\rho) &= \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_\Lambda(\Phi) - \int d^4x \partial^\mu \alpha_a(x) J_\mu^a(x) + \int d^4x \rho \Phi + \int d^4x \alpha_a \lambda^a \Phi} \\ &= \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_\Lambda(\Phi) + \int d^4x \rho \Phi} \left(1 - \int d^4x \partial^\mu \alpha_a J_\mu^a(x) + \int d^4x \alpha_a(x) \rho(x) \lambda^a \Phi(x) \right) \end{aligned} \quad (6.53)$$

Il termine con 1 è uguale proprio a $Z(j)$. Utilizzando ora una integrazione per parti abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_\Lambda(\Phi) + \int d^4x \rho \Phi} \left(\int d^4x \alpha_a(x) \partial^\mu J_\mu^a(x) + \int d^4x \alpha_a(x) \rho(x) \lambda^a \Phi(x) \right) \\ &= \int d^4x \alpha_a(x) \left\{ \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_\Lambda(\Phi) + \int d^4x \rho \Phi} (\partial^\mu J_\mu^a(x) + \rho(x) \lambda^a \Phi(x)) \right\} \end{aligned} \quad (6.54)$$

Poichè $\alpha_a(x)$ è arbitrario posso buttarlo e con lui l'integrale in d^4x . Se non ci fosse la sorgente $\rho(x)$ all'esponenziale, questa espressione sarebbe un valor medio nel vuoto dei due operatori tra parentesi tonde. Questa teoria non è quindi invariante per traslazioni perchè abbiamo questa sorgente $\rho(x)$ che dipende da x . È violata sia l'invarianza per traslazioni che l'invarianza di Lorentz (perchè abbiamo un campo esterno fissato). Abbiamo quindi, indicando con $\langle \dots \rangle_\rho$ questi valori medi, che deve valere

$$\partial_x^\mu \langle J_\mu^a(x) \rangle_\rho + \rho_i(x) \lambda_{ik}^a \langle \Phi_k(x) \rangle_\rho = 0. \quad (6.55)$$

L'esistenza di una simmetria continua sotto cui l'azione regolarizzata è un invariante, mi ha portato a scrivere una identità funzionale. Questa identità vedremo che è equivalente ad infinite identità sulle funzioni di Green che sono esattamente le identità di Ward. Ovviamente questa è la teoria regolarizzata ma non ancora rinormalizzata (la discuteremo più tardi). Se la teoria regolarizzata è simmetrica sotto la stessa simmetria classica che stiamo esaminando non soltanto le identità di Ward vengono le stesse ma la corrente J_μ (che dipende da Λ) che genera questa simmetria ha un limite per $\Lambda \rightarrow \infty$ senza rinormalizzarla. Questo limite è proprio la corrente rinormalizzata che genera in senso operatoriale le identità di Ward. Quella che abbiamo ottenuto è una equazione funzionale in quanto dipende ancora dalle ρ . Possiamo prendere un numero arbitrario di derivate funzionali rispetto a ρ e poi porre $\rho = 0$; questo genererà delle identità tra funzioni di Green della mia teoria vera in cui la mia sorgente esterna è assente. Vediamone alcune

- Cominciamo con il prendere $\rho = 0$; questo è banale in quanto ottengo

$$\partial_x^\mu \langle J_\mu^a(x) \rangle_{\rho=0} = 0. \quad (6.56)$$

Infatti $\langle J_\mu^a(x) \rangle_{\rho=0}$ è un quadrivettore che è invariante per traslazioni (non dipende da x) e la sua derivata rispetto ad x è perciò nulla.

- Possiamo prendere la derivata prima e poi porre $\rho = 0$. Ogni derivata funzionale rispetto a $\rho_l(y)$ in un valor medio $\langle \dots \rangle_\rho$ mi tira giù un fattore $\Phi_l(y)$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_l(y)} \partial_x^\mu \langle J_\mu^a(x) \rangle_\rho = \partial_x^\mu \langle J_\mu^a(x) \Phi_l(y) \rangle_\rho = -\delta^4(x-y) \lambda_{lk}^a \langle \Phi_k(x) \rangle_\rho - \rho_i(x) \lambda_{ik}^a \langle \Phi_k(x) \Phi_l(y) \rangle_\rho \quad (6.57)$$

Indichiamo con $\langle \dots \rangle_{\rho=0} = \langle \dots \rangle$. Ponendo $\rho = 0$ abbiamo quindi

$$\partial_x^\mu \langle J_\mu^a(x) \Phi_l(y) \rangle = -\delta^4(x-y) \lambda_{lk}^a \langle \Phi_k(x) \rangle \quad (6.58)$$

Abbiamo ottenuto una identità di Ward. Di fatto il membro di sinistra è un T-prodotto. Quindi quando ne facciamo la derivata ∂_μ^x otteniamo la quadridivergenza della corrente che fa 0, più i commutatori a tempi uguali quando $\rho = 0$. I commutatori a tempi uguali sono le variazioni dei campi.

- Procediamo con la derivata seconda $\frac{\partial^2}{\partial \rho_m(z) \partial \rho_l(y)}$; otteniamo

$$\partial_x^\mu \langle J_\mu^a(x) \Phi_l(y) \Phi_m(z) \rangle = -\delta^4(x-y) \lambda_{lk}^a \langle \Phi_k(x) \Phi_m(z) \rangle - \delta^4(x-z) \lambda_{mk}^a \langle \Phi_k(x) \Phi_l(y) \rangle. \quad (6.59)$$

Questa è proprio l'identità di Ward trovata in precedenza (dovrei sostituire al posto di -1 , i e tenere conto che non cambia niente se assorbiamo un -1 all'interno della corrente).

Qui non abbiamo mai usato né i T-prodotti come θ né i commutatori canonici a tempi uguali. Tuttavia abbiamo ottenuto lo stesso risultato direttamente nell'europeo. Questa singola identità funzionale (6.55) è equivalente a tutta la gerarchia di identità di Ward che abbiamo scritto. Integrando l'ultima equazione trovata otteniamo quindi quello che abbiamo detto prima ovvero che per teorie con mass gap il T-prodotto commuta con tutte le matrici λ^a e quindi per il lemma di Shur il T-prodotto è multiplo dell'identità. Tutti i propagatori sono quindi uguali. Aggiungiamo una nota molto intuitiva per rivedere il clustering (che fa sì che l'integrale in d^4x della quadridivergenza del T-prodotto faccia 0). Per una teoria euclidea

$$\langle O(x) O(y) \rangle = \sum_n \langle 0 | O(0, \mathbf{x}) | E_n \rangle \langle E_n | O(0, \mathbf{y}) | 0 \rangle e^{-E_n(x^0 - y^0)} \quad (6.60)$$

abbiamo sempre degli esponenziali decrescenti; se E_n ha un mass gap, l'esponenziale può andare ad 1 come minimo a $e^{-m(x^0 - y^0)}$ e quindi il limite viene raggiunto esponenzialmente. Se ci sono particelle di massa nulla questa energia può arrivare a 0 e quindi non è più chiara la situazione (in generale decade a potenza). In generale se c'è un estremo inferiore nell'energia di una singola particella, che è la massa, questo oggetto va giù esponenzialmente comunque io vada all'infinito con x e y .

6.3.2 Rinormalizzazione

Queste identità di Ward hanno anche una conseguenza importante e sorprendente sulla natura delle correnti di simmetria. Queste identità sono state costruite, non ce lo dimentichiamo, a Λ finito. Ci manca ancora da discutere la rinormalizzazione. Queste identità che abbiamo ricavato valgono per ogni Λ , ma non è detto che quando mando $\Lambda \rightarrow \infty$ questi termini separatamente abbiano un limite. Ora vediamo come queste identità stesse provvedono la seguente risposta. Nel processo di rinormalizzazione quello che succederà è che questi termini, opportunamente rimaneggiati, saranno separatamente finiti quando mando $\Lambda \rightarrow \infty$. Quindi questa identità vale anche per funzioni di Green rinormalizzate per operatori che adesso dovrò definire. In altre parole il correlatore ai primi membri delle identità di Ward avrà un limite per $\Lambda \rightarrow \infty$ senza fare nessuna operazione sulle J_μ^a (facendo qualche operazione sulle Φ però). Facciamo prima una piccola parentesi su come si costruiscono in generale operatori locali finiti composti; in altre parole come si fa a costruire dei prodotti di operatori nello stesso punto per costruire degli operatori locali. Gli operatori locali sono stati definiti in maniera molto vaga come prodotti dei campi fondamentali Φ (quelli che sono dentro la Lagrangiana) moltiplicati nello stesso punto dopo aver fatto su ogni termine un numero arbitrario di derivate. Abbiamo visto che questa operazione è singolare. Quindi come si definiscono *veramente* questi oggetti (altrimenti quando andiamo a fare i conti diventa tutto infinito)? La risposta è abbastanza semplice. Supponiamo di avere una teoria rinormalizzabile ad esempio $g\varphi^4$. Voglio definire l'operatore $\varphi^2(x)$ (operatore divergente anche nel caso del campo libero). Quello che faccio è mettere un cut-off $\varphi_\Lambda(x)$; questo è il valore calcolato con l'integrale funzionale. Posso inserire altri operatori elementari ad esempio $\langle \varphi^2(x) \varphi(y) \varphi(z) \rangle_\Lambda$. Io sto guardando adesso l'inserzione di un operatore composto $(\varphi^2(x))$ con una stringa di operatori elementari. Se vogliamo vedere tanti operatori composti vi è una ulteriore operazione da fare ma che non ci servirà. La prima cosa da fare è rinormalizzare questi campi (quelli elementari della stringa) con $c = 1/\sqrt{Z}$: $\langle \varphi^2(x) c\varphi(y) c\varphi(z) \rangle_\Lambda$. Questo non basta a rendere finito questo oggetto. Poi devo curare la divergenza di questo $\varphi^2(x)$. Per farlo devo modificare la definizione del prodotto. Mi costruisco la lista di tutti gli operatori che hanno dimensione due o inferiore di due in energia (l'operatore $\varphi^2(x)$ ha dimensione 2) e che hanno le stesse proprietà di simmetria. In questo caso posso avere solo φ^2 stesso e l'identità \mathbb{I} . Si definisce il nuovo $\tilde{\varphi}^2$ (che dovrà diventare finito) in questo modo

$$\tilde{\varphi}^2 = Z_1(\Lambda) \varphi^2 + Z_2(\Lambda) \mathbb{I} \quad (6.61)$$

Gli ho messo una tilde sopra perché non sarà proprio il vecchio φ^2 perché quest'ultimo non è finito. Abbiamo inserito due costanti $Z_1(\Lambda)$ e $Z_2(\Lambda)$ dipendenti dal cut-off. Ora c'è un teorema combinatorio che ci dice che aggiustando opportunamente $Z_1(\Lambda)$ e $Z_2(\Lambda)$ posso ottenere che l'inserzione di un solo operatore $\tilde{\varphi}^2$ inserito con tanti operatori rinormalizzati (la teoria sottostante deve essere rinormalizzata, massa costante di accoppiamento e funzione d'onda) elementari (infinte funzioni di Green!) abbia un limite per $\Lambda \rightarrow \infty$. Naturalmente questa procedura ci dice che la definizione di $\tilde{\varphi}^2$ non è unica: possiamo aggiungergli una qualsiasi costante e $\tilde{\varphi}^2$ continua a restare finito. Inoltre il nuovo operatore composto è reso finito senza inserire termini che non possiedono la simmetria dell'operatore originale (li posso aggiungere ma l'operatore

è già stato reso finito, è un pò come il teorema della rinormalizzazione). Come mi calcolo queste $Z_1(\Lambda)$ e $Z_2(\Lambda)$? Impongo due condizioni di finitezza in questo caso. Facciamo degli esempi un pochino più complicati

- $\tilde{\varphi}^3$: dovrò predere

$$\tilde{\varphi}^3 = \alpha_1 \varphi^3 + \alpha_2 \varphi + \alpha_3 \square \varphi \quad (6.62)$$

notare che $\square \varphi$ è un operatore a dimensione 3 in energia. Questo potrei anche non mettercelo in realtà ma non ci interessa questo dettagliuzzo.

- $\tilde{\varphi}^4$: dovrò predere combinazioni di φ^4 , φ^2 , \mathbb{I} e $\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$ dove gli indici sono saturati perché deve essere invariante per rotazioni.

- $\widetilde{\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi}$: avrei la stessa lista degli operatori scritti prima. Questo vuol dire che ci sono almeno due combinazioni indipendenti una che corrisponde ad un $\tilde{\varphi}^4$ e l'altra a $\widetilde{\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi}$. Possiamo quindi definire, con diverse condizioni di rinormalizzazione, diversi operatori che attingono alla stessa lista. Chi chiameremo quello o questo è opzionale; questo non è tanto importante in quanto saranno condizioni fisiche che ci diranno quale è l'operatore da identificare con uno e quale con l'altro.

Vediamo ora come funziona la teoria libera. Per definire φ^2 nella teoria libera devo effettuare la combinazione $Z_1 \varphi^2 + Z_2 \mathbb{I}$. D'altra parte nella teoria libera avevamo visto che era possibile rendere finito φ^2 semplicemente con il buon ordinamento. Pertanto il buon ordinamento è una delle (infinite) prescrizioni che possiamo avere. Questo perchè il buon ordinamento spostiamo gli operatori di creazione a sinistra e di distruzione a destra. Facendo questo partiamo da φ^2 e gli aggiungiamo un termine che al più ha un commutatore di due operatori di creazione e annichilazione, quindi è un numero. In formule

$$:\varphi^2: \rightarrow \varphi^2 + c\mathbb{I}, \quad (6.63)$$

ovvero rientra in questa regola. Per quanto riguarda il buon ordinamento di φ^3 abbiamo

$$:\varphi^3: = \varphi^3 + c'\varphi \quad (6.64)$$

poichè quando andiamo a spostare gli operatori di creazione e annichilazione togliamo un termine che è proporzionale a φ perchè il commutatore di due operatori fa una costante e ci rimane un φ spaiato.

Adesso andiamo a vedere come questo teorema si “sposa” con le identità di Ward. Il nostro problema era rendere finita una identità tipica, un prototipo come (6.59). Per prima cosa quindi rinormalizzerò la massa, la costante di accoppiamento, e, per rendere finite anche le funzioni di Green moltiplico per c (per fortuna lo stesso perchè abbiamo visto che c'è la simmetria che mi dice che posso scegliere la stessa c per tutti quanti) tutti gli operatori. Per rendere finito il secondo membro quindi è facile, basta moltiplicare tutta l'identità per c^2 . Quindi anche il membro di sinistra ha un limite per $\Lambda \rightarrow \infty$, per forza. Tuttavia non mi basta dire che il $\partial_x^\mu \langle J_\mu^a(x) \Phi_l(y) \Phi_m(z) \rangle$ sia finito, io voglio che questa funzione di Green $\langle J_\mu^a(x) \Phi_l(y) \Phi_m(z) \rangle$ sia finita. Come faccio quindi a rendere finita la corrente J_μ^a ? Ma questo oggetto è proprio un operatore composto con dimensione 3 in quanto in questa teoria era fatto in questo modo

$$J_\mu^a(x) = (\partial_\mu \Phi_i) \lambda_{ik}^a \Phi_k. \quad (6.65)$$

Se fosse stata una teoria spinoriale sarebbe stata $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ e quindi sempre a dimensione 3 in 4 dimensioni spazio-temporali (i campi spinoriali hanno dimensione 3/2). Ora devo trovare tutti gli operatori vettoriali di dimensione 3 o inferiori.

$$Z_1(\Lambda) J_\mu^a(x) + Z_2(\Lambda) O_\mu^a \quad (6.66)$$

ma questo operatore O_μ^a non può esistere². Quindi se moltiplichiamo la $J_\mu^a(x)$ per una Z_1 dipendente dal cut-off, roviniamo l'identità di Ward; pertanto $Z_1(\Lambda) = 1$. C'è una eccezione importante, per esempio nella QED, cioè una teoria in cui ci sono anche dei campi vettoriali di Gauge; questa corrente J_μ^a è la corrente di Gauge (è quello che succede nel caso della QED nel caso della carica elettrica). In questo caso il teorema non vale. Vediamo perchè. Non vale perchè posso immaginare un operatore di dimensione 3 che non rovina l'identità

²Perchè?

di Ward, perchè è identicamente conservato, ed è fatto così (nella mia teoria ho il campo dell'elettrone e del fotone)

$$\tilde{J}_\mu^a = J_\mu + c(\Lambda) (\square A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A_\nu) . \quad (6.67)$$

Questo operatore ha la proprietà di essere identicamente nullo se ne facciamo il ∂^μ . Questo operatore c'è nella lista in quanto ha dimensione 3 (il campo del fotone ha dimensione 1 in energia). La carica dell'elettrone viene rinormalizzata dall'interazione. Quindi la vera carica non è la carica e_0 che sta dentro la Lagrangiana, ma è la carica rinormalizzata. Tuttavia e_0 è la carica che attribuiamo fin dall'inizio all'elettrone. Dove è andata a finire la carica mancante? Poi rinormalizziamo con le interazioni e otteniamo $e = \sqrt{Z_3}e_0$ (si trova con un calcolo ad un loop). C'è una carica che si è persa. Ricordiamoci che il vuoto in elettrodinamica è un dielettrico; quindi un elettrone messo nel vuoto polarizza il vuoto (formato da coppie di elettroni e positroni) attirando a se i positroni e respingendo gli elettroni. In altre parole scherma la propria carica, proprio come un dielettrico. In un dielettrico quindi dove va a finire la carica mancante? Va a finire sulla superficie esterna del dielettrico che in questo caso è all'infinito. Qui la carica mancante per polarizzazione del vuoto va a finire all'infinito; la carica totale, quella dell'elettrone rinormalizzato più la carica mancante che è andata a finire all'infinito, farebbe sempre zero. La corrente totale quindi, quella finita tanto per intenderci, non è J_μ^a , ma J_μ^a più una costante infinita di rinormalizzazione che è il termine evidenziato e che rappresenta proprio la polarizzazione del vuoto. Parte della carica va a finire all'infinito, quella che rimane è la carica rinormalizzata dell'elettrone che rimane finita quando rimuovo il cut-off. Quindi la corrente $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ della QED fa eccezione a questo teorema e non è finita perchè c'è un campo di Gauge. Posso renderla finita aggiungendo a questa corrente J_μ^a la combinazione scritta in precedenza con una scelta opportuna di c . Questo è vero anche nel caso non-abeliano. Le correnti globali (il teorema di Noether nel caso non abeliano vale solo per la parte globale del gruppo, la parte locale non implica nessuna conservazione aggiuntiva) in realtà non sono finite: a questa bisogna aggiungere combinazioni opportune di campi di Yang-Mills non abeliani che le possono rendere finite.

6.4 Teorema di Goldstone

Adesso vediamo velocemente come si dimostra il teorema di Goldstone, così impariamo a usare gli operatori antilineari, cosa utile nella vita. Vedremo una dimostrazione diversa da quella in IED, e vedremo come anche dalle identità di Ward esca il teorema di Goldstone. Vedremo anche l'inverso del teorema di Goldstone. In altri termini: il teorema di Goldstone implica che se c'è una simmetria rotta spontaneamente (ovvero in cui il vuoto non è invariante), automaticamente ci sono particelle di massa nulla. Supponiamo adesso di avere una teoria in cui c'è una simmetria e ci sono particelle di massa nulla. Questa simmetria è rotta spontaneamente o no? Riusciremo a rispondere a questa domanda.

Il teorema di Goldstone ci dice che *in assenza di campi di Gauge* (perchè altrimenti scatta il fenomeno di Higgs), cioè se la mia teoria non ha invarianza di Gauge, allora la rottura spontanea di simmetria, ovvero la non invarianza del vuoto sotto trasformazioni di simmetria $Q^a |0\rangle \neq 0$ (ma l'invarianza della Lagrangiana), implica che ci sono particelle di massa nulla che sono dei bosoni a spin 0. Il teorema vale anche in materia condensata: in quel caso però non c'è invarianza relativistica; però ci dice che ci sono delle eccitazioni della nostra materia condensata la cui energia tende a 0 con il vettore d'onda. Questo vuol dire che se avessimo particelle relativistiche l'energia di riposo è nulla. L'energia $E(k)$ in generale può avere una forma molto complicata. Devo definire quello che è un *parametro d'ordine*, cioè un insieme di campi locali $O_i(x)$ tali che si trasformano sotto trasformazione di simmetria come

$$[Q_a, O_i(x)] = iR_{ik}^a O_k(x) . \quad (6.68)$$

Ho preso tutto hermitiano per semplicità; $Q_a, O_i(x)$ hermitiani, R_{ik}^a sono delle matrici reali, la i c'è perchè il commutatore di due operatori hermitiani è antihermitiano. R_{ik}^a più in dettaglio è una rappresentazione dell'algebra del gruppo di simmetria che stiamo considerando. Il gruppo di simmetria implica l'esistenza di correnti vettoriali conservative $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$ (è una delle rare volte che lavoriamo nel Minkowskiano; quando faremo la versione con le identità di Ward vedremo che si può lavorare direttamente nell'euclideo) e abbiamo pure visto come si costruiscono. Le cariche conservative sono $Q^a = \int dx J_0^a(x)$. Questa R_{ik}^a deve essere una rappresentazione possibilmente irriducibile. Perchè io metterò come condizione di rottura spontanea il fatto che il valor medio

$$\langle 0 | [Q^a, O_i(x)] | 0 \rangle = iR_{ik}^a \langle 0 | O_k(x) | 0 \rangle \neq 0 . \quad (6.69)$$

Da questo segue che il vuoto non è invariante sotto trasformazioni di simmetria ovvero che $Q^a |0\rangle \neq 0$. Se la R è riducibile (sarà una somma diretta di rappresentazioni irriducibili) e contiene una sottorappresentazione che è l'identità c'è il rischio che avere qualcuna delle O diversa da 0 nel vuoto, e questo potrebbe non segnalare la rottura spontanea. Facciamo un esempio. Prendiamo una simmetria di tipo $O(N)$; posso costruire l'operatore $\Phi_i \lambda_{ik}^a \Phi_k$. Questi operatori si trasformano sotto l'aggiunta (sono operatori scalari e non hanno indici μ) e sono una rappresentazione irriducibile (le matrici λ sono antisimmetriche). Se io guardo il valor medio nel vuoto di questo oggetto e dico che è diverso da 0, questo sta segnalando che la simmetria è rottura. Se io però avessi scritto direttamente

$$\langle 0 | \Phi_i \Phi_k | 0 \rangle = c \delta_{ik} \neq 0, \quad (6.70)$$

$\Phi_i \Phi_k$ non è irriducibile perché nel prodotto di campi fondamentali sappiamo che c'è un singoletto (cioè la rappresentazione identica, collegata con la traccia diversa da zero) e l'aggiunta; qui dentro ci sono anche dei termini che tengono conto del singoletto ($i = k$ sommato). Questo oggetto qui non viola nessuna simmetria perché è invariante (ci sta segnalando che questo oggetto qui è diverso da zero per quanto riguarda la componente che ha la traccia). È importante che la rappresentazione R di questi O o sia una rappresentazione irriducibile non banale oppure anche se non è irriducibile bisogna che non ci siano sottocomponenti banali per cui il valor medio di O si va ad infilare proprio nella componente banale di questo e mi dà un valor medio di O diverso da zero senza garantirmi che la simmetria sia rottura spontaneamente. Quindi per levare di mezzo ogni dubbio R è una rappresentazione irriducibile non banale. Se tutte le R annichilassero un particolare multipletto di questi valori vorrebbe dire che questo qua è un vettore che rimane invariante sotto la trasformazione e quindi è un vettore non banale invariante e questo non è possibile. Se $\langle 0 | \Phi_i \Phi_k | 0 \rangle$ è diverso da zero non basta per dirci che c'è rottura spontanea cioè che il vuoto non è invariante. Infatti se questo è pari a $c \delta_{ik}$, questa cosa qui non viola nulla in quanto δ_{ik} è la parte di singoletto di questo operatore e quindi non viola la simmetria. E il commutatore di Q^a con questa componente fa zero cioè il vuoto è invariante.

$$[Q_a, \Phi_i \Phi_k] = \lambda_{il}^a \Phi_l \Phi_k - \Phi_i \Phi_l \lambda_{lk}^a. \quad (6.71)$$

Se adesso al posto di $\Phi_l \Phi_k$ ci mettiamo un δ_{lk} questo è il commutatore delle λ con la matrice identità e quindi fa zero. Nonostante ho un valor medio nel vuoto di questi operatori diverso da zero, il commutatore di Q_a con la sottorappresentazione banale fa zero (e similmente con la rappresentazione aggiunta) e quindi questo ci dice che $Q_a |0\rangle = 0$ il che ci dice che non c'è rottura spontanea di simmetria perché il vuoto è invariante.

Ora si prende $\langle 0 | J_a^\mu(x) O_i(0) | 0 \rangle$ e si usa l'invarianza per traslazioni spazio-temporali

$$\begin{aligned} \langle 0 | J_a^\mu(x) O_i(0) | 0 \rangle &= \sum_n \langle 0 | J_a^\mu(x) |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n} | O_i(0) | 0 \rangle = \sum_n \langle 0 | e^{ipx} J_a^\mu(0) e^{-ipx} |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n} | O_i(0) | 0 \rangle \\ &= \sum_n \langle 0 | J_a^\mu(0) |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n} | O_i(0) | 0 \rangle e^{-ip_n x} = \int d^4 q e^{-iqx} \sum_n \langle 0 | J_a^\mu(0) |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n} | O_i(0) | 0 \rangle \delta^4(q - p_n) \\ &= \int d^4 q e^{-iqx} \rho_{a,i}^\mu(q) \end{aligned}$$

e quindi ho trovato una espressione per la trasformata di Fourier di questo correlatore. Abbiamo introdotto quindi la funzione spettrale

$$\rho_{a,i}^\mu(q) = \sum_n \langle 0 | J_a^\mu(0) |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n} | O_i(0) | 0 \rangle \delta^4(q - p_n). \quad (6.72)$$

Queste funzioni sono tali che il loro supporto è contenuto all'interno dello spettro degli stati fisici (perchè la delta ci dice che se q non è uno dei p_n possibili stati di quadriimpulso questo oggetto si annulla; naturalmente questo non significa che se q è uno di questi l'oggetto è diverso da zero in quanto ci sono anche gli elementi di matrice). Questo oggetto quindi sarà zero se $q^0 < 0$ oppure se $q^2 < 0$ in quanto non ci sono stati con quadriimpulso p_n tali che la lora quarta componente sia negativa (il vuoto è lo stato di energia minima) oppure che siano di tipo spazio. Poi abbiamo un'altra richiesta ovvero la covarianza di Lorentz. Se Λ è una trasformazione di Lorentz propria per semplicità, allora la $\rho_{a,i}^\mu(q)$ si trasforma come una corrente

$$\rho_{a,i}^\mu(\Lambda q) = \Lambda^\mu_\nu \rho_{a,i}^\nu(q). \quad (6.73)$$

Questo implica che l'indice μ di questa ρ è portato dal quadrivettore q . La mia ρ deve essere fatta così

$$\rho_{a,i}^\mu(q) = \frac{\theta(q^0)}{(2\pi)^3} \rho_{a,i}(q^2) q^\mu. \quad (6.74)$$

L'ultima cosa da imporre ora su questo correlatore è la conservazione della corrente

$$\partial_\mu^x \langle 0 | J_a^\mu(x) O_i(0) | 0 \rangle = -i \int d^4q e^{-iqx} q_\mu \rho_{a,i}^\mu(q) = 0 \quad (6.75)$$

da cui

$$q_\mu \rho_{a,i}^\mu(q) = \frac{\theta(q^0)}{(2\pi)^3} \rho_{a,i}(q^2) q^2 = 0 \implies \rho_{a,i}(q^2) q^2 = 0. \quad (6.76)$$

Se la ρ fosse una funzione continua questo implicherebbe che la $\rho_{a,i}(q^2)$ sia nulla. Siccome la ρ è una distribuzione esistono delle soluzioni non banali. Ad esempio se abbiamo l'equazione $x D(x) = 0$ la distribuzione $D(x) = \delta(x)$ soddisfa l'equazione. Quindi questo ci dice che

$$\rho_{a,i}(q^2) = c_{a,i} \delta(q^2). \quad (6.77)$$

Abbiamo quindi che

$$\langle 0 | J_a^\mu(x) O_i(0) | 0 \rangle = c_{a,i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} e^{-iqx} \theta(q^0) \delta(q^2) q^\mu. \quad (6.78)$$

Questa relazione mi dice che in questa $\rho_{a,i}^\mu(q)$, possono contribuire soltanto stati che hanno $q^2 = 0$. Questo viene dalla conservazione della corrente. Questo non ci dice ancora che abbiamo dimostrato il teorema di Goldstone perché non sappiamo se questi coefficienti $c_{a,i}$ sono zero o no. Infatti non abbiamo ancora imposto che la simmetria sia rotta spontaneamente. Ci manca insomma la condizione che $\langle 0 | O_i(x) | 0 \rangle \neq 0$ sia diverso da zero. Per vedere questa condizione dobbiamo vederci il commutatore $\langle 0 | [J_a^\mu(x), O_i(x)] | 0 \rangle$. Per farlo mi serve il correlatore fatto nell'altro verso ovvero $\langle 0 | O_i(x) J_a^\mu(x) | 0 \rangle$. Siccome questi oggetti sono operatori hermitiani, lo potrei ottenere semplicemente facendo il complesso coniugato di $\langle 0 | J_a^\mu(x) O_i(x) | 0 \rangle$; però non mi basta perché non so cosa sia la $c_{a,i}$ (reale, complesso?). Quando questo calcolo era stato fatto a IED avevamo usato l'argomento della località: questo commutatore è un commutatore di due variabili locali; quando x è a distanza di tipo spazio da 0, voglio che sia zero. Questo fissava il fatto che $c_{a,i}$ debba essere un numero immaginario puro. Adesso facciamo una cosa leggermente diversa usando il teorema TCP. Per farlo dobbiamo imparare ad usare, attraverso una piccola digressione, gli operatori antiunitari (antilineari) in una teoria quantistica. In particolare gli unici operatori antiumitari che sono rilevanti sono il time-reversal e TCP. Il time-reversal sappiamo che non è una buona simmetria della natura in quanto alcuni decadimenti del K violano CP e il time-reversal. Mentre invece CPT è una simmetria di tutte le interazioni locali relativisticamente invarianti che posso costruire. Quindi è una simmetria molto importante perché richiede solo l'invarianza sotto il gruppo di Lorentz proprio e la località. Se una teoria locale è invariante sotto trasformazioni di Lorentz proprie automaticamente c'è una simmetria discreta che è la riflessione totale sotto cui rimane invariante. L'unico problema è che questa simmetria è realizzata secondo il teorema di Wigner con operatori antilineari (antiunitari). Notare che solo una *simmetria discreta* può essere realizzata in modo antilineare perché se la simmetria fosse continua e con continuità si raggiunge l'identità (che è un operatore unitario), anche le trasformazioni infinitesime dovrebbero essere unitarie. Conviene abbandonare la notazione di Dirac per i prodotti scalari (con i bra e i ket in questo formalismo si tende a fare molta confusione). Gli stati sono rappresentati come elementi di uno spazio vettoriale ψ_1, ψ_2 con dei coefficienti c_1 e c_2 : $c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$. Un operatore θ si dice antilineare se

$$\theta(c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) = c_1^* \theta \psi_1 + c_2^* \theta \psi_2. \quad (6.79)$$

Adesso dobbiamo definire gli operatori antiunitari e devo ricorrere alla definizione del prodotto scalare. Se A è un operatore, l'aggiunto è definito da

$$(\psi_2, A\psi_1) = (A^\dagger \psi_2, \psi_1) \quad (6.80)$$

per ogni coppia ψ_1, ψ_2 . Per gli operatori antilineari l'operazione di aggiunto non la posso definire in questi termini. Vediamo perché. Il prodotto scalare è lineare nel suo primo argomento (quello a destra) e antilineare nel secondo (quello a sinistra)

$$\begin{cases} (\varphi, c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1(\varphi, \psi_1) + c_2(\varphi, \psi_2) \\ (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, \psi) = c_1^*(\varphi_1, \psi) + c_2^*(\varphi_2, \psi). \end{cases} \quad (6.81)$$

Questo rimane vero anche se metto un operatore lineare all'interno di ogni argomento del prodotto scalare. Se però l'operatore θ è antilineare, il primo blocco diventa antilineare e il secondo lineare (si scambiano). Nel caso di un operatore antilineari la vecchia definizione di aggiunto è impossibile da soddisfare e quindi bisogna cambiare definizione di aggiunto

$$(\psi_2, \theta\psi_1) = (\theta^\dagger\psi_2, \psi_1)^*. \quad (6.82)$$

Ora un operatore antilineare si dice antiunitario se $\theta^\dagger\theta = \mathbb{I}$. Il teorema TCP dice la cosa seguente: se abbiamo una teoria invariante sotto il gruppo di Lorentz proprio e locale (l'azione è l'integrale di una quantità locale) allora sebbene in questa teoria non ci siano a priori delle simmetrie discrete, c'è sicuramente una simmetria discreta conservata (commuta con l'Hamiltoniana) che è l'inversione totale TCP. TCP è il prodotto della parità, coniugazione di carica e time-reversal. Il time-reversal è una trasformazione antiunitaria; questo rende l'operatore TCP un operatore antiunitario. La cosa importante da capire è che anche in teorie che non sono invarianti né sotto P, né C, né T, sono comunque invarianti sotto TCP. Questo implica che per qualsiasi teoria locale la massa delle particelle e delle antiparticelle sono uguali perché la proprietà di $\theta = \text{PCT}$ è di trasformare particella in antiparticella; siccome θ commuta con l'Hamiltoniana queste hanno la stessa energia. Si può dimostrare quindi che oltre alle masse uguali, anche le larghezze di decadimento per particelle instabili sono uguali. Finora questo teorema è sempre stato confermato dai dati sperimentali. Le proprietà di trasformazione degli operatori locali di una teoria sotto trasformazioni TCP (almeno per quanto riguarda le grandezze che sono scalari, vettoriali o tensoriali, quindi escludendo quelle spinoriali) sono molto semplici. Qualsiasi osservabile locale $O(x)$ autoaggiunta (cioè hermitiana) si trasforma in questo modo

$$\theta^\dagger O(x)\theta = O(-x). \quad (6.83)$$

Se $O(x)$ non è hermitiano allora lo possiamo scrivere come una somma di un operatore hermitiano e di uno antihermitiano

$$O(x) = O_1(x) + iO_2(x) \quad (6.84)$$

dove O_1 e O_2 sono due operatori hermitiani. Pertanto la proprietà di trasformazione si può dedurre da quella per gli operatori hermitiani

$$\theta^\dagger O(x)\theta = \theta^\dagger O_1(x)\theta + \theta^\dagger iO_2(x)\theta = O_1(-x) - iO_2(-x) = O^\dagger(-x), \quad (6.85)$$

in quanto l'operatore θ^\dagger è antilineare e quindi quando passa attraverso la i le fa cambiare segno. Si può dimostrare che questo fatto è la proprietà che garantisce che l'operatore θ è conservato in qualsiasi teoria locale, in quanto la Lagrangiana è uno scalare di Lorentz hermitiano e quindi vuol dire che commuta con l'operatore θ . Abbiamo quindi "dimostrato" il teorema TCP. Ci interessa sapere anche come trasformano i vettori e i tensori. Un vettore hermitiano $J_a^\mu(x)$ si trasforma

$$\theta^\dagger J_a^\mu(x)\theta = -J_a^\mu(-x). \quad (6.86)$$

In generale un tensore doppio con il $+$ davanti, un tensore triplo con -1 . In poche parole un tensore ad n indici (rango n) si trasforma con un $(-1)^n$ davanti. Se J_a^μ fosse non hermitiano si possono fare lo stesso tipo di considerazioni fatte nel caso scalare.

Detto questo, vogliamo collegare l'elemento di matrice $\langle 0 | J_a^\mu(x) O_i(0) | 0 \rangle$ con $\langle 0 | O_i(0) J_a^\mu(x) | 0 \rangle$. Per prima cosa quindi lo traduco nel formalismo del prodotto scalare che si usa per gli operatori antilineari. Chiamando ψ_Ω il vettore che rappresenta il vuoto abbiamo

$$\langle 0 | J_a^\mu(x) O_i(0) | 0 \rangle = (\psi_\Omega, J_a^\mu(x) O_i(0) \psi_\Omega) = (\psi_\Omega, \theta^\dagger \theta J_a^\mu(x) O_i(0) \psi_\Omega) = (\theta\psi_\Omega, \theta J_a^\mu(x) O_i(0) \psi_\Omega)^*. \quad (6.87)$$

Il vuoto è invariante sotto trasformazioni TCP quindi

$$\begin{aligned}\langle 0 | J_a^\mu(x) O_i(0) | 0 \rangle &= (\psi_\Omega, \theta J_a^\mu(x) \theta^\dagger \theta O_i(0) \theta^\dagger \theta \psi_\Omega)^* = -(\psi_\Omega, J_a^\mu(-x) O_i(0) \psi_\Omega)^* \\ &= -(J_a^\mu(-x) O_i(0) \psi_\Omega, \psi_\Omega) = -(\psi_\Omega, O_i(0) J_a^\mu(-x) \psi_\Omega)\end{aligned}\quad (6.88)$$

Avendo usato il fatto che $J_a^\mu(-x)$ e $O_i(0)$ sono operatori autoaggiunti. Abbiamo trovato che

$$\langle 0 | J_a^\mu(x) O_i(0) | 0 \rangle = -\langle 0 | O_i(0) J_a^\mu(-x) | 0 \rangle \implies \langle 0 | O_i(0) J_a^\mu(x) | 0 \rangle = -\langle 0 | J_a^\mu(-x) O_i(0) | 0 \rangle \quad (6.89)$$

e quindi

$$\langle 0 | O_i(0) J_a^\mu(x) | 0 \rangle = -c_{a,i} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} e^{iqx} \theta(q^0) \delta(q^2) q^\mu. \quad (6.90)$$

Una teoria locale deve avere per forza TCP quindi TCP alla fine è equivalente alla località (ricorda che un altro modo di dimostrare questa cosa è con la località e lo abbiamo fatto ad IED). Abbiamo ora l'espressione per il commutatore

$$\langle 0 | [J_a^\mu(x) O_i(0)] | 0 \rangle = c_{a,i} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \theta(q^0) \delta(q^2) q^\mu [e^{-iqx} + e^{iqx}] \quad (6.91)$$

Ricordo ora che tutto sto po po di roba è perchè dovevamo dimostrare che i coefficienti $c_{a,i}$ sono diversi da zero. Una volta dimostrato questo il teorema di Goldstone è dimostrato. Che i coefficienti siano diversi da zero vogliamo sfruttare la condizione (6.69). Per fare questo dobbiamo integrare in $d\mathbf{x}$ la componente temporale della corrente di Noether. Prima di integrare facciamo ancora qualche passaggio ponendo $x^0 = 0$ (visto che nella (6.69) il commutatore va effettuato a tempi uguali)

$$\begin{aligned}\langle 0 | [J_a^0(\mathbf{x}, 0) O_i(0)] | 0 \rangle &= c_{a,i} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \theta(q^0) \delta(q^2) q^0 [e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} + e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}] \\ &= c_{a,i} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \frac{\theta(q^0) q^0}{2|q|} (\delta(q^0 - |q|) + \delta(q^0 + |q|)) [e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} + e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}] \\ &= \frac{c_{a,i}}{2} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} (\theta(|q|) + \theta(-|q|)) [e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} + e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}] \\ &= \frac{c_{a,i}}{2} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} [e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} + e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}] = \frac{c_{a,i}}{2} 2\delta(\mathbf{x}) = c_{a,i}\delta(\mathbf{x}).\end{aligned}\quad (6.92)$$

Ora integrare su \mathbf{x} è facile

$$\langle 0 | [Q^a, O_i(x)] | 0 \rangle = \int d\mathbf{x} \langle 0 | [J_a^0(\mathbf{x}, 0) O_i(0)] | 0 \rangle = c_{a,i} = iR_{ik}^a \langle 0 | O_k(x) | 0 \rangle \neq 0, \quad (6.93)$$

Siccome per ipotesi $iR_{ik}^a \langle 0 | O_k(x) | 0 \rangle \neq 0$, i coefficienti $c_{a,i}$ sono non nulli. Abbiamo quindi dimostrato il teorema di Goldstone ovvero che in condizioni di rottura spontanea di simmetria (vuoto non invariante $Q_a | 0 \rangle \neq 0$) ci sono nella teoria stati di massa nulla.

Vogliamo discutere ora l'inverso del teorema di Goldstone. Supponiamo di avere una teoria che ha un certo gruppo di simmetria continuo; abbiamo delle correnti conservate J_a^μ . Supponiamo di avere un questa teoria delle particelle a massa nulla. Ci chiediamo se questa teoria descrive una teoria con una rottura spontanea di simmetria o no. Il criterio è molto semplice. Voglio vedere se queste particelle a massa nulla generano rottura spontanea o no. Quello che possiamo fare è costruire lo stato $|p\rangle$ a quadriimpulso nullo e vedere se l'elemento di matrice (funzione solo della componente spaziale \mathbf{p})

$$\langle 0 | J_a^\mu(0) | p \rangle = F_a^\mu(\mathbf{p}) \quad (6.94)$$

è diverso da 0 o no. Se $F_a^\mu \neq 0$, allora questo stato $|p\rangle$ è un bosone di Goldstone che rompe questa simmetria. L'invarianza di Lorentz della teoria, unita alla proprietà di trasformazione della corrente J_a^μ dà

$$U^\dagger(\Lambda) J_a^\mu(0) U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu J_a^\nu(0). \quad (6.95)$$

Se prendiamo questa relazione e la mettiamo in un $\langle 0 |$ e un $\widetilde{|p\rangle}$ abbiamo

$$\langle 0 | J_a^\mu(0) \widetilde{|\Lambda p\rangle} = \Lambda^\mu_\nu \langle 0 | J_a^\mu(0) \widetilde{|p\rangle} \implies F_a^\mu(\Lambda p) = \Lambda^\mu_\nu F_a^\nu(p). \quad (6.96)$$

Questo significa che la dipendenza di F_a^μ da μ deve essere per forza portata dal quadrivettore p^μ . La mia F_a^μ deve essere fatta in questo modo

$$F_a^\mu(p) = f_a p^\mu, \quad (6.97)$$

dove f_a è una funzione che rimane invariata quando faccio la trasformazione di Lorentz. Capiamo bene che siccome la $F_a^\mu(p)$ dipende solo da p , l'unico invariante che c'è è p^2 ; tuttavia $p^2 = 0$, quindi f_a è una costante. Il criterio di rottura spontanea è che, quando calcolo questo elemento di matrice, questa costante f deve essere diversa da zero. Se $f \neq 0$, infatti, posso fare la dimostrazione del teorema di Goldstone al contrario. Vediamolo rapidamente. Prendiamo il valor medio nel vuoto di $\langle 0 | J_a^\mu(x) O(0) | 0 \rangle$, faccio tutti i passaggi arrivando a dire che

$$\langle 0 | J_a^\mu(x) O(0) | 0 \rangle = \int d^4q e^{-iqx} \sum_n \langle 0 | J_a^\mu(0) \widetilde{|n\rangle} \widetilde{\langle n|} O(0) | 0 \rangle \delta^4(q - p_n). \quad (6.98)$$

Ora in questa somma su stati intermedi vado a focalizzarmi sullo stato $\widetilde{|p\rangle}$ che riguarda le particelle di massa nulla e voglio vedere se questo può contribuire qua dentro. Sicuramente questo $\langle 0 | J_a^\mu(0) \widetilde{|p\rangle}$ contribuisce perché l'ho preso diverso da 0. Il secondo $\langle \widetilde{|p\rangle} O(0) | 0 \rangle$ ci dà una arbitrarietà enorme! Possiamo prendere infatti un qualsiasi operatore locale O , volete che non ce ne sia nessuno che abbia un elemento di matrice non nullo tra il vuoto e lo stato $\widetilde{|p\rangle}$? Non è possibile che non ce ne sia nessuno perchè vorrebbe dire che stiamo guardando un insieme non completo di operatori. Gli operatori della mia teoria infatti devono essere tali che, elevati ad una opportuna potenza, riproducano tutti gli stati della mia teoria. Mi basta trovare un solo di questi operatori che abbia quell'elemento di matrice non nullo e automaticamente questo correlatore commuterà con il generatore della simmetria

$$\langle 0 | [Q_a, O(0)] | 0 \rangle = c \neq 0 \quad (6.99)$$

perchè lo avevamo trovato prima. In altre parole questo operatore O non può essere mai un singoletto della simmetria (sennò commuterebbe!) e giocherà il ruolo di parametro d'ordine. Quindi la simmetria in questo caso è rottta. La cosa importante comunque è che la corrente accoppia il vuoto allo stato del bosone di Goldstone.

6.4.1 Deduzione dalle identità di Ward

Adesso vediamo in 2 righe come dalle identità di Ward possiamo ricavare il teorema di Goldstone. Le identità di Ward contengono tutta l'informazione sulla simmetria e quindi in particolare devono contenere anche il caso di rottura spontanea. La forma delle identità non dipende da se c'è rottura spontanea o no, ma sono saturate in maniera diversa a seconda che ci sia rottura spontanea o meno. Vediamo un esempio molto semplice prendendo il correlatore prolungato nell'europeo $\langle J_a^\mu(x) O_i(0) \rangle$. La differenza tra Minkowskiano e europeo quando facciamo il ∂_μ^x di questa espressione è che non ci sono dei fattori i (fallo con l'integrale funzionale europeo o vedi la (6.58))

$$\partial_\mu \langle J_a^\mu(x) O_i(0) \rangle = \delta^4(x) R_{ik}^a \langle O_k(0) \rangle \neq 0 \quad (6.100)$$

Quindi abbiamo per ipotesi un parametro d'ordine. Il diverso da zero quindi è realizzato se, come al solito, la R^a è irriducibile e almeno uno degli O_k deve essere diverso da zero; in questo caso abbiamo rottura spontanea di simmetria. Ci deve venire fuori pertanto che c'è un bosone di Goldstone. Visto che la nostra teoria è europea, il gruppo di Lorentz diventa una simmetria di tipo $O(4)$. Il termine $\langle J_a^\mu(x) O_i(0) \rangle$ deve essere quindi invariante secondo il gruppo $O(4)$ e ha pertanto la seguente forma

$$\langle J_a^\mu(x) O_i(0) \rangle = x^\mu F_{a,i}(x^2) = \partial^\mu G_{a,i}(x^2) \quad (6.101)$$

x^μ dà il carattere vettoriale; $F(x^2)$ è una arbitraria funzione invariante per rotazioni. La seconda egualanza è sempre possibile effettuarla. Se andiamo a sostituirlo dentro l'identità di Ward vediamo che

$$\Delta_4^x G_{a,i}(x) = \delta^4(x) R_{ik}^a \langle O_k(0) \rangle. \quad (6.102)$$

Questa equazione può essere risolta con il metodo della trasformata di Fourier. Infatti si vede che questa $G_{a,i}(x)$ deve essere proporzionale ad una funzione di Green del Laplaciano quadridimensionale

$$G_{a,i}(x) = -R_{ik}^a \langle O_k(0) \rangle \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iqx}}{q^2}. \quad (6.103)$$

Quindi vediamo che se adesso guardiamo ∂_μ di questo correlatore

$$\partial_\mu G_{a,i}(x) = -i R_{ik}^a \langle O_k(0) \rangle \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^\mu}{q^2} e^{iqx} = \partial_\mu \langle J_a^\mu(x) O_i(0) \rangle = \delta^4(x) R_{ik}^a \langle O_k(0) \rangle. \quad (6.104)$$

Questo correlatore ha una trasformata di Fourier, che ha un polo a $q^2 = 0$, questo rivela la presenza del bosone di Goldstone, visto che la posizione dei poli rimane invariata passando da euclideo a minkowskiano.

6.4.2 Un apparente paradosso

Sappiamo che il nostro parametro d'ordine

$$\langle O_i(0) \rangle = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S(\Phi)} O_i(0). \quad (6.105)$$

Prediamo per semplicità dei campi scalari (ma in realtà l'argomento vale in generale). Adesso facciamo un cambiamento di variabile qui dentro $\Phi = \Phi'_x(x) + \alpha^a \lambda_{ik}^a \Phi'_k$ (stessa trasformazione che abbiamo fatto quando abbiamo studiato le identità di Ward, l'unica differenza è che ora prendiamo α^a costante; notare pure che le λ^a ruotano i campi le R^a gli operatori). Questa è, come sappiamo, proprio una trasformazione di simmetria fatta sulle variabili Φ' . L'azione è invariante sotto questa trasformazione; ma O no. Facendo il cambio di variabili e eliminando il ' abbiamo

$$\langle O_i(0) \rangle = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S(\Phi)} (O_i(0) + \alpha^a R_{ik}^a O_k(0)). \quad (6.106)$$

La trasformazione dei campi induce sugli operatori O che si trasformano per definizione secondo R la trasformazione infinitesima scritta. Da questo segue che

$$R_{ik}^a \langle O_k(0) \rangle = 0 \quad (6.107)$$

Ovvero che non c'è rottura spontanea di simmetria mai!!!! Quale è il problema? Abbiamo fatto una operazione illecita. Si vede meglio se vediamo il caso di un magnete. Il problema come sai molto bene sta nel fatto che i limiti $h \rightarrow 0$, $V \rightarrow \infty$ non commutano. Quello che ho fatto in questi passaggi è stato fare la media su *tutte* le possibili configurazioni di questo sistema. Nel caso di rottura spontanea devo fare una operazione analoga a quella che faccio con i magneti. In poche parole devo violare esplicitamente la simmetria (un campo magnetico esterno), mandare il volume all'infinito e poi il campo magnetico a 0. Adesso dobbiamo fare la stessa cosa in teoria dei campi per una teoria scalare invariante sotto $SO(N)$. Dobbiamo quindi rompere esplicitamente la simmetria attraverso un parametro ϵ_i infinitesimo e un oggetto che non è invariante, ad esempio gli stessi O

$$S_0(\Phi) \rightarrow S_0(\Phi) + \epsilon_i \int O(x) d^4x, \quad (6.108)$$

quindi $S_0(\Phi)$ è invariante, ma questo oggetto qui $O(x)$ si trasforma secondo le R^a . Analogamente per l'Hamiltoniana

$$H_0 \rightarrow H = H_0 - \epsilon_i \int O(x) d^4x, \quad (6.109)$$

Il bosone di Goldstone della teoria con $\epsilon \neq 0$ acquisterà una massa, seppur piccola (dobbiamo verificare quale ordine in ϵ corrisponde). Questo è un tipo di esempio di teoria delle perturbazioni (che però da un risultato esatto). La teoria delle perturbazioni che abbiamo studiato vale per livelli discreti. Se chiamo con $|\mathbf{p}\rangle$ lo stato con un bosone di Goldstone, lo spettro degli stati di Goldstone è il seguente

$$H_0 |\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{p}| |\mathbf{p}\rangle, \quad \langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (6.110)$$

Quindi quello che posso fare è chiudere il mio sistema in un volume finito con PBC (questo rende tutto lo spettro della mia teoria discreto). Lo spettro dell'impulso quando poniamo il sistema in un volume finito è $\mathbf{p}_n = \frac{2\pi \mathbf{n}}{L}$ dove \mathbf{n} è una terna di interi. Avremo una normalizzazione $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle_V = \delta_{pp'}$. Come sappiamo gli stati veri (a $V \rightarrow \infty$) saranno

$$|\mathbf{p}\rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} |\mathbf{p}\rangle_V. \quad (6.111)$$

Infatti la relazione fra le due normalizzazioni, con delta di Dirac e delta di Kronecker, è la seguente

$$\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d\mathbf{x} e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{V \delta_{pp'}}{(2\pi)^3}. \quad (6.112)$$

La variazione di energia degli stati perturbati al primo ordine è data da

$$\Delta E_{\mathbf{p}} = -\epsilon_i \langle \mathbf{p} | \int_V d\mathbf{x} O_i(x) | \mathbf{p} \rangle = -\epsilon_i \int_V d\mathbf{x} \langle \mathbf{p} | e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} O_i(0) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} | \mathbf{p} \rangle = -V \epsilon_i \langle \mathbf{p} | O_i(0) | \mathbf{p} \rangle. \quad (6.113)$$

dove abbiamo usato l'invarianza per traslazioni (questa non è rottata nonostante il volume finito). Il livello di energia cambia perché il bosone di Goldstone acquista una massa m (invece l'impulso spaziale non è cambiato dalla perturbazione)

$$\Delta E_{\mathbf{p}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} - |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}| \sqrt{1 + \frac{m^2}{\mathbf{p}^2}} - |\mathbf{p}| \simeq |\mathbf{p}| \left(1 + \frac{m^2}{2|\mathbf{p}|^2} \right) - |\mathbf{p}| = \frac{m^2}{2|\mathbf{p}|^2}. \quad (6.114)$$

Ora riscrivendoci l'espressione per $\Delta E_{\mathbf{p}}$ e passando al limite infinito abbiamo

$$m^2 = -2 \lim_{V \rightarrow \infty} |\mathbf{p}| \frac{V}{(2\pi)^3} \epsilon_i \langle \mathbf{p} | O_i(0) | \mathbf{p} \rangle_V (2\pi)^3 = -2 |\mathbf{p}| (2\pi)^3 \epsilon_i \langle \mathbf{p} | O_i(0) | \mathbf{p} \rangle = -(2\pi)^3 \epsilon_i \langle \widetilde{\mathbf{p}} | O_i(0) | \widetilde{\mathbf{p}} \rangle,$$

Essendo O_i uno scalare, il prodotto $\langle \widetilde{\mathbf{p}} | O_i(0) | \widetilde{\mathbf{p}} \rangle = \langle \widetilde{\Lambda \mathbf{p}} | O_i(0) | \widetilde{\Lambda \mathbf{p}} \rangle$ non dipende dall'impulso ma è una costante (a causa dell'invarianza di Lorentz). Abbiamo dunque ottenuto il valore della massa assunta dal bosone di Goldstone e scoperto che m va a zero con la radice di ϵ .

6.4.3 Calcolo con l'inserzione di rottura spontanea esplicita

Prendiamo la solita teoria

$$S_E(\Phi, \bar{\Phi}) = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\Phi} \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \bar{\Phi} \Phi + \frac{\lambda}{4} (\bar{\Phi} \Phi)^2 \right] \quad (6.115)$$

Nota: ho inserito un $-$ al termine di massa affinché ci sia rottura spontanea di simmetria (supponendo $m^2 > 0$). Questa teoria ha una simmetria interna globale

$$\begin{cases} \Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi \\ \bar{\Phi} \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\Phi}. \end{cases} \quad (6.116)$$

Questo ci porta al teorema di Noether e ad una corrente conservata. Quando facciamo la scelta del segno della massa quadra il minimo classico diventa degenere (cappello messicano). Se io faccio l'integrale su tutte le configurazioni per calcolarmi il valor medio di Φ

$$\langle \Phi \rangle = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Phi} e^{-S(\Phi, \bar{\Phi})} \Phi \quad (6.117)$$

è zero in quanto integro su tutte le possibili rotazioni $e^{i\alpha}$ (media su tutte le possibili fasi)! La stessa cosa vale per $\bar{\Phi}$. Nel caso in cui invece integro $\Phi \bar{\Phi}$ non c'è alcun problema perché le rotazioni $e^{i\alpha} e^{-i\alpha}$ si cancellano. Questo porta ad un problema con il clustering: facciamo un esperimento di scattering con una particella $\bar{\Phi}$ e tre particelle di tipo Φ (valor medio nullo) e un altro con una particella Φ e tre particelle di tipo $\bar{\Phi}$ (valor

medio nullo). Tuttavia il valor medio con tutte e quattro le Φ e le $\bar{\Phi}$, non è zero. Se ora allontano questi due esperimenti uno dall'altro, il clustering dovrebbe garantire che la matrice S si fattorizzi. Tuttavia le matrici S fattorizzate hanno un numero di Φ e $\bar{\Phi}$ diverso e quindi danno banalmente zero. La funzione di Green è diversa da zero, ma a grandi distanze è zero. Quindi il clustering è violato. Se non ci fosse rottura spontanea ovviamente il problema non ci sarebbe (il valor medio zero di suo). Prendiamo ora per semplicità una teoria scalare hermitiana

$$S_E(\Phi) = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - \frac{1}{2} m^2 \Phi_i \Phi_i + \frac{\lambda}{4} (\Phi_i \Phi_i)^2 \right]. \quad (6.118)$$

Per evitare questo paradosso abbiamo visto che dobbiamo rompere esplicitamente la simmetria (e con essa rompo l'invarianza per traslazioni: il valor medio dipende da $x!$). Prendiamo ad esempio un possibile parametro d'ordine ovvero

$$\langle \Phi_i(x) \rangle = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S(\Phi)-\epsilon_i \int d^4x O_i(x)} \Phi_i. \quad (6.119)$$

dove O_i sono degli operatori (prodotti locali di Φ) che si trasformano in maniera non banale sotto l'azione del gruppo di simmetria

$$O_i(x) = O'_i(x) + \alpha^a R_{ik}^a O_k(x). \quad (6.120)$$

Notare che quindi questi O sono non invarianti sotto trasformazioni di simmetria e rompono esplicitamente la simmetria. Se adesso facciamo il cambio di variabili solito

$$\Phi_i(x) = \Phi'_i(x) + \alpha^a \lambda_{ik}^a \Phi'_k(x), \quad (6.121)$$

abbiamo

$$\langle \Phi_i(x) \rangle = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S(\Phi)-\epsilon_l \int d^4x (O_l + \alpha^a R_{lm}^a O_m)} (\Phi_i + \alpha^a \lambda_{ik}^a \Phi_k). \quad (6.122)$$

Espandendo in serie

$$\langle \Phi_i(x) \rangle = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S(\Phi)-\epsilon_l \int d^4x O_l} \left(1 - \epsilon_l \alpha^a R_{lm}^a \int d^4y O_m(y) \right) (\Phi_i(x) + \alpha^a \lambda_{ik}^a \Phi_k(x)) \quad (6.123)$$

notiamo che ci riduciamo (mantenendo i termini fino all'ordine di infinitesimo $\epsilon_l \alpha^a$) a

$$\int \mathcal{D}\Phi e^{-S(\Phi)-\epsilon_l \int d^4x O_l} \left(-\epsilon_l \alpha^a R_{lm}^a \int d^4y O_m(y) \Phi_i(x) + \alpha^a \lambda_{ik}^a \Phi_k(x) \right) = 0, \quad (6.124)$$

ovvero

$$-\epsilon_l \alpha^a R_{lm}^a \int d^4y \langle O_m(y) \Phi_i(0) \rangle_\epsilon + \alpha^a \lambda_{ik}^a \langle \Phi_k(x) \rangle_\epsilon = 0. \quad (6.125)$$

Notare come precedentemente (senza il termine di rottura spontanea esplicita) il primo termine non era presente. Adesso faccio il limite di volume infinito e poi mando $\epsilon_l \rightarrow 0$. Vediamo ora come facendo questa operazione il primo termine acquista un polo che cancella l'ordine ϵ_l . Il primo termine infatti è il prolungamento euclideo di

$$\int d^4y \langle O_m(y) \Phi_i(0) \rangle_\epsilon = i \int d^4y \langle 0 | T(O_m(y) \Phi_i(0)) | 0 \rangle, \quad (6.126)$$

che è la trasformata di Fourier a momento nullo del T-prodotto, a meno di fattori i che non ci interessano. Questo T-prodotto ora ha una decomposizione spettrale: vi sono stati di singola particella scalari. Lo stato che per noi è importante è lo stato del quasi-bosone di Goldstone. Usando la formula di decomposizione spettrale (1.62) per il T-prodotto e trasformando in Fourier a momento zero abbiamo

$$i \int d^4y \langle 0 | T(O_m(y) \Phi_i(0)) | 0 \rangle = - \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho(\mu^2)}{-\mu^2 + i\epsilon}. \quad (6.127)$$

Adesso a noi interessa sapere fra questi stati se c'è una particella stabile. Quindi in questo caso dobbiamo prendere $\rho_{1p}(\mu^2) = Z_O \delta(\mu^2 - m^2)$ (notare che $Z_O = \sqrt{Z_{O_m} Z_{\Phi_i}}$ e che, a meno di costanti, un fattore $\sqrt{Z_{O_m}}$

viene da $\langle 0 | O_m | p \rangle$ e l'altro Z_{Φ_i} da $\langle 0 | \Phi_i(0) | 0 \rangle$ dove $|p\rangle$ è lo stato corrispondente di particella stabile di nostro interesse). Questo oggetto qui contribuisce all'integrale

$$-\int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho(\mu^2)}{-\mu^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{\langle 0 | O_m | p \rangle \langle 0 | \Phi_i(0) | p \rangle}{m^2} \quad (6.128)$$

Gli unici termini che possono contribuire sono quelli in cui quando $\epsilon \rightarrow 0$ allora la $m^2 \rightarrow 0$. Se c'è rottura spontanea (altrimenti il valor medio di Φ banalmente è zero e sono contento lo stesso) so che c'è questo stato e la $m^2 \propto \epsilon_i \langle \mathbf{p} | O_i(0) | \mathbf{p} \rangle$. Visto che i due ϵ a numeratore e denominatore hanno indici diversi posso chiamare $\epsilon_i = t \tilde{\epsilon}_i$ e fare il limite per $t \rightarrow 0$. Otteniamo quindi una cancellazione delle t e quindi il parametro d'ordine è diverso da zero. Nel caso di rottura di simmetria $O(N)$ abbiamo infinite teorie diverse, una per ogni punto di minimo.

6.5 Loop expansion

Abbiamo accennato che esiste una seconda espansione di tipo perturbativo. Nel caso delle teorie di Gauge abbiamo introdotto l'azione

$$S = -\frac{1}{4g^2} \int d^4x F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a, \quad (6.129)$$

con la costante di accoppiamento g al denominatore (che avevamo riscalato nella Lagrangiana). Conviene adesso imparare a fare l'espansione in g anche quando g è a denominatore per un motivo molto semplice. In queste teorie del tipo $\frac{1}{2}\partial_\mu \bar{\Phi} \partial^\mu \Phi + \frac{1}{2}m^2 \bar{\Phi} \Phi + \frac{g}{4}(\bar{\Phi} \Phi)^2$ l'espansione in g non la posso fare in quanto a $g = 0$ ho una teoria "malata" (perchè ho un $m^2 < 0$). Quindi in questi casi come si fa? Mi ricordo in parole povere che nell'integrale funzionale ho un parametro che gioca il ruolo di \hbar ; quando $\hbar \rightarrow 0$ abbiamo la teoria classica. L'argomento si fa di solito nel Minkowskiano ma è uguale nell'europeo (quando $\hbar \rightarrow 0$ ho un fattore di fase rapidamente oscillante e contano le configurazioni in cui il fattore oscilla di meno e che sono quelle in cui manca il termine lineare e l'azione è stazionaria). Adesso andiamo a vedere come si fa l'espansione in \hbar invece che in g . Le due ovviamente sono collegate; ci sono delle situazioni (ad esempio non c'è rottura spontanea) in cui posso fare entrambe le espansioni. Noi ci metteremo in un caso di questo tipo in modo tale da vedere la relazione tra le due. Ci sono altri casi (tipicamente il caso di rottura spontanea), in cui l'espansione in g non si può fare e facciamo solo l'espansione in \hbar . Vedremo ora che la nuova espansione è semplicemente un riordinamento della stessa serie perturbativa. Per prima cosa dobbiamo fare una piccola parentesi su quello che si intende con funzioni di Green connesse, sia con funzioni di Green irriducibili ad una particella (in forma non-perturbativa). Poniamoci nell'europeo. Definisco il funzionale generatore delle funzioni di Green connesse come

$$W(J) = \ln Z(J). \quad (6.130)$$

Si verifica semplicemente facendo le derivate funzionali. La derivata prima

$$\left. \frac{\partial W(J)}{\partial J(x)} \right|_{J=0} = \frac{1}{Z(J)} \left. \frac{\partial Z(J)}{\partial J(x)} \right|_{J=0} = \langle \Phi(x) \rangle \quad (6.131)$$

è palesemente connessa. La derivata seconda

$$\left. \frac{\partial^2 W(J)}{\partial J(x) \partial J(y)} \right|_{J=0} = \langle \Phi(x) \Phi(y) \rangle - \langle \Phi(x) \rangle \langle \Phi(y) \rangle. \quad (6.132)$$

Se continuiamo per induzione capiamo bene che questa è la buona definizione non-perturbativa della funzione di Green connessa. La cosa comunque si capisce meglio pensando alla funzione a 4 punti. Definiamo ora la funzione di Green irriducibile ad una particella. Sappiamo che in presenza di una sorgente esterna abbiamo una teoria non invariante per traslazioni

$$\left. \frac{\partial W(J)}{\partial J(x)} \right|_{J=0} = \langle \Phi(x) \rangle_J = \varphi(x). \quad (6.133)$$

Voglio adesso passare ad una nuova funzione generatrice che non sia funzione della J ma della φ . Questa è esattamente l'operazione che facciamo in meccanica analitica quando passiamo dalle \dot{q} alle p : $H(p, q) = p_i q_i - L(q, \dot{q})$ ($p \rightarrow \varphi$, $\dot{q} \rightarrow J$ e $L \rightarrow W$). Definiamo quindi *azione effettiva*

$$\Gamma(\varphi) = W(J) - \int d^4y J(y) \varphi(y). \quad (6.134)$$

Ricorda che per convincersi della trasformata di Legendre (sempre ostica da ricordare) è semplice convincersi che la nuova funzione non dipende da J , quindi basta derivare in J e vedere che il risultato è nullo. Naturalmente in questa equazione bisogna sostituire la posto di J la sua relazione in funzione di φ . Questo funzionale è tale che le sue derivate funzionali generano le funzioni di Green irriducibili ad una particella. C'è un solo problema: il funzionale Z o W generano le rispettive funzioni di Green quando $J = 0$; nel caso di Γ dobbiamo capire dove dobbiamo calcolarlo. Dalla definizione di φ , $\varphi(x) = \frac{\partial W(J)}{\partial J(x)}$, quando $J \rightarrow 0$, la $\varphi(x) = \bar{\varphi}$ cioè è costante perché recupero l'invarianza per traslazioni. Di questo funzionale vogliamo imparare a calcolarne le derivate rispetto a φ

$$\frac{\partial \Gamma(\varphi)}{\partial \varphi(x)} = \int d^4y \frac{\partial W}{\partial J(y)} \frac{\partial J(y)}{\partial \varphi(x)} - \int d^4y \frac{\partial J(y)}{\partial \varphi(x)} \varphi(y) - J(x) = -J(x). \quad (6.135)$$

Questa equazione è importante perchè ci dice quale valore deve assumere $\bar{\varphi}$. Questo $\bar{\varphi}$ deve essere tale da risolvere l'equazione

$$\left. \frac{\partial \Gamma(\varphi)}{\partial \varphi(x)} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}} = 0. \quad (6.136)$$

Io ho chiamato Γ l'azione effettiva. Questa è esattamente l'equazione che andiamo a risolvere nel caso in cui abbiamo rottura spontanea: questa $\bar{\varphi}$ è quindi il valore per cui l'azione effettiva è minima. Adesso deriviamo prima rispetto a $\varphi(x)$ e poi rispetto a $J(y)$

$$-\delta^4(x-y) = \frac{\partial^2 \Gamma(\varphi)}{\partial J(y) \partial \varphi(x)} = \int d^4z \frac{\partial^2 \Gamma(\varphi)}{\partial \varphi(x) \partial \varphi(z)} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial J(y)} = \int d^4z \frac{\partial^2 \Gamma(\varphi)}{\partial \varphi(x) \partial \varphi(z)} \Delta_J(z, y), \quad (6.137)$$

Scopriamo che il kernel integrale $\frac{\partial^2 \Gamma(\varphi)}{\partial \varphi(x) \partial \varphi(z)}$ è l'inverso dell'operatore $\Delta_J(z, y) = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial J(y)} = \frac{\partial^2 W(J)}{\partial J(z) \partial J(y)}$

$$\varphi(z) = \frac{1}{Z(0)} \int \mathcal{D}\Phi e^{-S(\Phi)+\int J\Phi} \Phi(z) \implies \Delta_J(z, y) = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial J(y)} = \langle \Phi(z) \Phi(y) \rangle_J \quad (6.138)$$

che corrisponde al propagatore (connesso!) in presenza della sorgente J . Adesso poniamo $J = 0$ e $\varphi = \bar{\varphi}$

$$\int d^4z \left. \frac{\partial^2 \Gamma(\varphi)}{\partial \varphi(x) \partial \varphi(z)} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}} \Delta(z, y) = -\delta^4(x-y), \quad (6.139)$$

Ora per l'invarianza per traslazioni (lo si vede dal fatto che l'oggetto al primo membro dipende in realtà dalla differenza dei due argomenti, come si può notare a secondo membro), e scriviamo

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \Gamma(\varphi)}{\partial \varphi(x) \partial \varphi(z)} \right|_{\varphi=\bar{\varphi}} &= \int d^4q e^{-iq \cdot (x-z)} \tilde{\Gamma}_2(q) \\ \Delta(z, y) &= \int d^4p e^{-ip \cdot (z-y)} \tilde{\Delta}(p) \end{aligned} \quad (6.140)$$

otteniamo che

$$\tilde{\Gamma}_2(q) \tilde{\Delta}(p) = -1 \quad (6.141)$$

ovvero che le due trasformate di Fourier sono una l'inverso dell'altra apparte il segno meno³ (come prevedibile). Se ci ricordiamo la definizione di Self-Energia

$$\tilde{\Delta}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + \Sigma(p^2)} \quad (6.142)$$

³Che palle. Perchè i fisici non si mettono d'accordo. Allora è meglio usare una definizione con il segno meno nella trasformata di Legendre (come peraltro si fa in meccanica analitica) e il segno meno non ci dovrebbe essere più. Così poi torna anche bene che $\tilde{\Gamma}_2(q) = q^2 + m^2 + \Sigma(q^2)$

otteniamo che

$$\tilde{\Gamma}_2(q) = -q^2 + m^2 - \Sigma(q^2) \quad (6.143)$$

ovvero è la somma dei diagrammi irriducibili ad una particella. Quindi abbiamo verificato la cosa fino alla derivata seconda. In generale però bisogna ricorrere ad un metodo grafico perché sennò si diventa pazzi. Iniziamo anche sottointendendo l'integrale su argomenti ripetuti. Partiamo inizialmente dalla relazione

$$\frac{\partial^2 \Gamma(\varphi)}{\partial \varphi(x) \partial \varphi(z)} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial J(y)} = \frac{\partial^2 \Gamma(\varphi)}{\partial \varphi(x) \partial \varphi(z)} \frac{\partial^2 W(J)}{\partial J(z) \partial J(y)} = -\delta^4(x-y). \quad (6.144)$$

Ora deriviamo in $J(w)$

$$\frac{\partial^2 \Gamma(\varphi)}{\partial \varphi(x) \partial \varphi(z)} \frac{\partial^3 W(J)}{\partial J(z) \partial J(y) \partial J(w)} + \frac{\partial^3 \Gamma(\varphi)}{\partial \varphi(x) \partial \varphi(z) \partial \varphi(t)} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial J(w)} \frac{\partial^2 W(J)}{\partial J(z) \partial J(y)} = 0 \quad (6.145)$$

Ora rappresentiamo

$$\frac{\partial^3 W(J)}{\partial J(z) \partial J(y) \partial J(w)} = \begin{array}{c} y \\ \diagup \\ \text{W} \\ \diagdown \\ z \end{array} \quad , \quad \frac{\partial^3 \Gamma(\varphi)}{\partial \varphi(x) \partial \varphi(z) \partial \varphi(t)} = \begin{array}{c} z \\ \diagup \\ \text{shaded circle} \\ \diagdown \\ t \end{array}$$

Ad ogni linea che esce dal pallucco associamo un argomento. Notare che quando fondiamo colleghiamo due palloncini con una linea integrando su quell'argomento. L'equazione (6.137) si scrive pertanto in questo modo (d'ora in poi tralascio i segni!)

$$\begin{array}{c} y \\ \diagup \\ \text{W} \\ \diagdown \\ z \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{shaded circle} \\ \diagup \\ x \end{array} = \delta^4(x-y)$$

Ora l'equazione (6.145) si rappresenta graficamente in questo modo

$$\begin{array}{c} x \\ \diagup \\ \text{shaded circle} \\ \diagdown \\ z \end{array} \quad \begin{array}{c} w \\ \diagup \\ \text{W} \\ \diagdown \\ y \end{array} = \begin{array}{c} x \\ \diagup \\ \text{shaded circle} \\ \diagdown \\ z \end{array} \quad \begin{array}{c} w \\ \diagup \\ \text{W} \\ \diagdown \\ t \\ \diagup \\ y \end{array}$$

Ora moltiplichiamo a destra e a sinistra per $\frac{\partial^2 W(J)}{\partial J(x) \partial J(h)}$ (integrando sugli indici ripetuti) in modo da sfruttare la (6.137). Otteniamo

$$\begin{array}{c} h \\ \diagup \\ \text{W} \\ \diagdown \\ w \\ \diagup \\ y \end{array} = \begin{array}{c} h \\ \diagup \\ \text{W} \\ \diagdown \\ x \\ \diagup \\ \text{shaded circle} \\ \diagdown \\ z \\ \diagup \\ t \\ \diagdown \\ y \end{array}$$

Se ora iteriamo la procedura, derivando ancora una volta in J (ometto gli indici) abbiamo

$$\begin{array}{c} \text{W} \\ \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \text{W} \\ \diagup \\ \text{shaded circle} \\ \diagdown \\ \text{W} \\ \diagup \\ \text{W} \end{array} + \text{permutazioni} + \begin{array}{c} \text{W} \\ \diagup \\ \text{shaded circle} \\ \diagdown \\ \text{W} \\ \diagup \\ \text{W} \\ \diagdown \\ \text{W} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \text{W} \\ \diagup \\ \text{shaded circle} \\ \diagdown \\ \text{W} \\ \diagup \\ \text{W} \\ \diagdown \\ \text{W} \\ \diagup \\ \text{W} \end{array} + \text{permutazioni} + \begin{array}{c} \text{W} \\ \diagup \\ \text{shaded circle} \\ \diagdown \\ \text{W} \\ \diagup \\ \text{W} \\ \diagdown \\ \text{W} \\ \diagup \\ \text{W} \end{array}$$

È evidente pertanto che anche a questo ordine la Γ genera i diagrammi ad una particella irriducibili: questa espressione ci dice che la funzione di Green connessa a 4 punti si trova sommando tutti i diagrammi riducibili ad una particella (3 permutazioni) con una parte irriducibile.

Vediamo adesso lo sviluppo in \hbar . Prendiamo una teoria semplice per fare un esempio

$$S_E(\Phi) = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \frac{g}{4} \Phi^4 \right]. \quad (6.146)$$

Io mi voglio calcolare il funzionale generatore

$$Z(J) = \frac{1}{\mathcal{Z}(0)} \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} \left(-S(\Phi) + \int d^4x J\Phi \right) \right\}. \quad (6.147)$$

Voglio fare l'espansione perturbativa non in g ma in \hbar . Voglio calcolare cosa succede in questo oggetto quando io faccio il limite per $\hbar \rightarrow 0$: in questo caso dominerà la configurazione che massimizza (gli altri termini infatti vanno più rapidamente a 0 in \hbar). Tra tutte le configurazioni contribuiscono soltanto le piccole oscillazioni intorno al punto che rende stazionario questo esponenziale

$$\delta \left(S(\Phi) - \int d^4x J\Phi \right) = 0, \implies \left. \frac{\partial S}{\partial \Phi} \right|_{\Phi_J} = J. \quad (6.148)$$

Questa darà origine alle equazioni del moto classiche (euclidee). Abbiamo

$$(-\Delta_4 + m^2) \Phi(x) + g \Phi^3(x) = J(x). \quad (6.149)$$

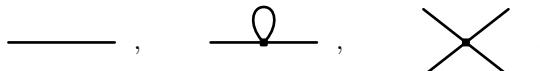
Questa equazione mi da un $\Phi_J(x)$ come soluzione. Quando $J = 0$, abbiamo un fattore all'esponenziale che è sempre negativo, pertanto il contributo maggiore lo si ottiene ponendo $\Phi_0(x) = 0$. Ora devo considerare anche le fluttuazioni (quadratiche) intorno al punto di massimo ponendo $\Phi(x) = \Phi_J(x) + \xi(x)$. Non avremo pertanto in questa espansione i termini lineari in ξ (ovvero quelli di derivata prima)

$$\begin{aligned} Z(J) &\simeq \frac{e^{-\frac{1}{\hbar}(S(\Phi_J) - \int J\Phi_J)}}{\mathcal{Z}(0)} \int \mathcal{D}\xi \exp \left\{ - \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} m^2 \xi^2 + \frac{3g}{2} \Phi_J^2(x) \xi^2 \right] \right\} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{\hbar}(S(\Phi_J) - \int J\Phi_J)}}{\mathcal{Z}(0)} \int \mathcal{D}\xi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \xi [-\Delta_4 + m^2 + 3g \Phi_J^2(x)] \xi \right\} \\ &= e^{-\frac{1}{\hbar}(S(\Phi_J) - \int J\Phi_J)} \sqrt{\frac{\det(-\Delta_4 + m^2)}{\det(-\Delta_4 + m^2 + 3g \Phi_J^2(x))}} \end{aligned} \quad (6.150)$$

Ora dobbiamo calcolare $W(J)$; per non avere \hbar al denominatore, posso riscalare $W(J)$ di una costante. Sfruttando l'identità $\det = e^{\text{Tr} \ln}$ abbiamo

$$\begin{aligned} W(J) &= \hbar \ln Z(J) = -S(\Phi_J) + \int d^4x J\Phi_J - \frac{\hbar}{2} [\ln \det (-\Delta_4 + m^2 + 3g \Phi_J^2(x)) - \ln \det (-\Delta_4 + m^2)] \\ &= -S(\Phi_J) + \int d^4x J\Phi_J - \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \left[\ln \left(\frac{-\Delta_4 + m^2 + 3g \Phi_J^2(x)}{-\Delta_4 + m^2} \right) \right] \\ &= -S(\Phi_J) + \int d^4x J\Phi_J - \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \left[\ln \left(1 + 3g \int d^4z G_0(x-z) \Phi_J^2(z) \right) \right] \end{aligned}$$

avendo ricordato che $(\Delta_4 - m^2) G_0(x-y) = -\delta^4(x-y)$. Ho calcolato i primi due ordini perturbativi in \hbar (in cui quello di ordine zero è il contributo classico). Questo è molto diverso dalla teoria delle perturbazioni solita in g . Infatti in quel caso avevamo, per le funzioni di Green connesse a 2 e a 4 punti fino al primo ordine



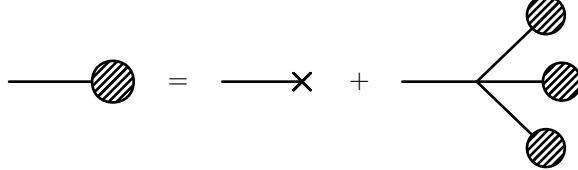
Nel caso dell'espansione in \hbar le cose sono molto più complicate. Ci sono molte più funzioni di Green non banali. Iniziamolo a vedere prendendo $\hbar = 0$, cioè esaminando il termine classico. Vogliamo vedere che tipo di funzioni di Green genera. All'ordine zero in \hbar abbiamo

$$\frac{\partial W(J)}{\partial J(x)} = - \int d^4y \left. \frac{\partial S}{\partial \Phi(y)} \right|_{\Phi_J} \frac{\partial \Phi_J(y)}{\partial J(x)} + \Phi_J(x) + \int d^4y J(y) \frac{\partial \Phi_J(y)}{\partial J(x)} = \Phi_J(x) \quad (6.151)$$

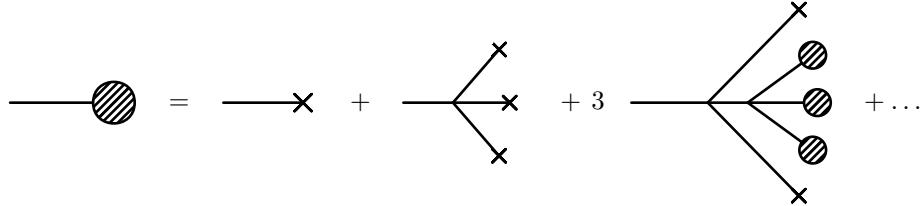
Ora sappiamo che l'equazione per Φ_J è $(-\Delta_4 + m^2) \Phi_J(x) = J(x) - g \Phi_J^3(x)$. Visto che le derivate di $W(J)$ sono sempre calcolate a $J = 0$, mi interessa l'espressione di Φ_J per J piccolo. Visto che Φ_J si annulla per J nullo (è di ordine J) possiamo espandere in J l'equazione da lui soddisfatta (notare come l'ultimo termine del secondo membro è un termine di ordine J^3). Trasformiamo l'equazione differenziale in forma integrale

$$\Phi_J(x) = \int d^4y G_0(x-y) J(y) - g \int d^4y G_0(x-y) \Phi_J^3(y) \quad (6.152)$$

Rappresentiamo questa equazione in un modo più comodo diagrammatico



Se iteriamo l'equazione una volta abbiamo



e così via. Quando deriviamo una volta in J è chiaro che la "x" ai diagrammi scompare (perchè eliminiamo una J). Quindi per la funzione di Green connessa a due punti troviamo il propagatore libero. Se iteriamo il processo, tutte le funzioni di Green che contribuiscono sono ad *albero* (non ci sono mai loop). I diagrammi ad un loop invece, vengono fuori dal termine che abbiamo trascurato ponendo $\hbar = 0$, ossia il termine con la $\text{Tr} \ln$. Dai loop in generale escono fuori un numero di gambe arbitrario e in ognuno dei punti può uscire un albero. Notare come gli alberi sono di ordine 0 in \hbar (ma con un numero arbitrario di ordini in $g!$), invece i loop sono del primo ordine in \hbar . Questo di nuovo ci conferma che l'espansione è diversa. Ora dobbiamo calcolarci Γ . Dobbiamo quindi calcolarci al primo ordine in \hbar

$$\frac{\partial W(J)}{\partial J(x)} = \Phi(x) = \Phi_J(x) + \hbar \Delta_J(x) \quad (6.153)$$

dove con $\Delta_J(x)$ abbiamo indicato la derivata funzionale in $J(x)$ del termine con la $\text{Tr} \ln$. È un oggetto complicato, mostruoso (è non locale) che per fortuna non ci serve. L'importante è che di ordine \hbar . Chiamiamo

$$\text{Tr} \left[\ln \left(1 + 3g \int d^4z G_0(x-z) \Phi_J^2(z) \right) \right] \equiv \ln \det(\Phi_J) . \quad (6.154)$$

Ora possiamo calcolarci

$$\Gamma(\Phi) = W(J) - \int J\Phi = -S(\Phi_J) + \int d^4x J\Phi_J - \frac{\hbar}{2} \ln \det(\Phi_J) - \int J\Phi \quad (6.155)$$

Siccome la differenza tra Φ_J e Φ è di ordine \hbar , posso sostituire a $\ln \det(\Phi_J) \rightarrow \ln \det(\Phi)$

$$\begin{aligned} \Gamma(\Phi) &= -S(\Phi - \hbar \Delta_J) - \hbar \int J\Delta_J - \frac{\hbar}{2} \ln \det(\Phi) \\ &= -S(\Phi) - \int \frac{\partial S}{\partial \Phi} (-\hbar \Delta_J) - \hbar \int J\Delta_J - \frac{\hbar}{2} \ln \det(\Phi) = -S(\Phi) - \frac{\hbar}{2} \ln \det(\Phi) . \end{aligned} \quad (6.156)$$

Otteniamo l'azione della teoria classica più i contributi ad un loop. Abbiamo quindi un loop di prima, su cui in ogni punti escono fuori dei Φ^2 , tanti quanti ne vogliamo. Gli alberi di prima non ci possono essere in quanto sono riducibili ad una particella. Mentre nell'espansione in g dà una espansione nei vertici interni, l'espansione $\ln \hbar$ dà una espansione in loop (per W abbiamo all'ordine zero gli alberi, all'ordine uno un loop

con degli alberi attaccati; per Γ abbiamo solo loop con coppie di campi attaccati). La cosa interessante di queste espansioni è che una volta che abbiamo trovato una espansione o due espansioni, la rinormalizzabilità vale in entrambi i casi, cioè sia che consideriamo funzioni di Green ad un certo ordine g sia che consideriamo funzioni di Green con un numero finito di loop. La rinormalizzabilità vale ordine per ordine anche nel numero di loop. Questo è importante perché in teorie in cui c'è rottura spontanea, ovvero in cui il minimo di Φ_0 non è 0, ma è un valore che può stare su un minimo degenere, in quel caso non si può effettuare l'espansione in g (nel caso di rottura spontanea non esiste il limite di $g \rightarrow 0$). L'espansione in \hbar è pertanto l'unica che possiamo usare. L'espansione in \hbar c'è sempre mentre potrebbe non esserci anche non in g . Notare che i loop sono le tipiche correzioni quantistiche (l'azione quantistica Γ si ottiene dall'azione classica più termini ad un loop). Fisicamente i loop vengono dalle piccole fluttuazioni intorno alla soluzione classica.

FINE

Appendice A

Gruppi e Rappresentazioni

A.1 Definizione di Gruppi e sottogruppi, sottogruppi normali, prodotto diretto di gruppi, omeomorfismi e isomorfismi

Un insieme di elementi $\mathcal{G} = \{g\}$ e' un gruppo se i seguenti assiomi di gruppo sono soddisfatti:

- Esiste un'operazione che associa ad ogni coppia g_1, g_2 di elementi di \mathcal{G} un altro elemento g_3 ancora di \mathcal{G} , la moltiplicazione $g_1 \cdot g_2 = g_3$.
- La legge di moltiplicazione e' associativa

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$$

- Esiste l'elemento identità e contenuto in G tale che per ogni elemento g di \mathcal{G}

$$g \cdot e = e \cdot g = g$$

- Per ogni elemento g contenuto in \mathcal{G} esiste un elemento inverso g^{-1} anch'esso contenuto in \mathcal{G} tale che $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$

Un gruppo *abeliano* è tale che la legge di moltiplicazione risulta commutativa

$$g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$$

altrimenti il gruppo si dice non abeliano. Un sottoinsieme \mathcal{H} del gruppo \mathcal{G} e' detto *sottogruppo* se l'insieme dei suoi elementi è un gruppo con la stessa legge di composizione di \mathcal{G} . Si dice inoltre che H è *invariante* (o *normale*) se $\forall h \in \mathcal{H}$ e $\forall g \in \mathcal{G}$ si ha

$$g \cdot h \cdot g^{-1} = h' \in \mathcal{H}$$

Un gruppo si chiama *semplice* se non ha sottogruppi invarianti non banali (ovvero apparte l'identità e il gruppo stesso). È detto *semisemplice* se non ha sottogruppi invarianti abeliani, ma può averne non abeliani. Quindi ogni gruppo semplice è anche semisemplice (non è vero il viceversa). A partire da due gruppi \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 è possibile definire il gruppo prodotto diretto

$$\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$$

costituito da tutte le coppie ordinate (g_1, g_2) che verifica le proprieta' gruppali (ovvero $\forall g_1, h_1 \in \mathcal{G}_1$ e $\forall g_2, h_2 \in \mathcal{G}_2$ allora $(g_1, g_2) \cdot (h_1, h_2) = (g_1 \cdot h_1, g_2 \cdot h_2)$). Siano \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 gruppi con operazioni binarie rispettivamente \cdot e $*$. Una applicazione

$$f : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$$

tale che $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{G}_1$,

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) * f(g_2), \quad (\text{A.1})$$

(cioè se f “conserva” l’operazione) si dice *omeomorfismo* (o *omomorfismo*) fra \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 . In generale un omeomorfismo è un’applicazione tra due strutture algebriche dello stesso tipo che conserva le operazioni in esse definite. Se l’omeomorfismo è biunivoco, cioè esiste una relazione uno a uno tra gli elementi di \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 , si chiama *isomorfismo* (e si indica $\mathcal{G}_1 \simeq \mathcal{G}_2$). Se l’applicazione f è tale che $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$, allora un omeomorfismo diventa un *endomorfismo* e un isomorfismo un *automorfismo*.

ESEMPI NOTEVOLI

- Il *gruppo lineare generale* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ è il gruppo di tutte le matrici invertibili $n \times n$ a valori in un campo K , dove n è un numero intero positivo. Il *gruppo lineare speciale* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ è il sottogruppo delle matrici aventi determinante uguale a $+1$. L’insieme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ forma un gruppo con l’operazione di moltiplicazione fra matrici. Questo è anche l’insieme di tutte le matrici aventi determinante diverso da zero. Per il teorema di Binet, la funzione

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \rightarrow K^*; \quad A \mapsto \det(A)$$

che associa ad una matrice A in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ il suo determinante, è un omomorfismo da $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ in K^* , cioè K meno lo zero (che forma un gruppo con l’operazione prodotto). Il sottogruppo normale $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ è il nucleo di questo omomorfismo. In altre parole, è il sottogruppo delle matrici con determinante $+1$.

- La stessa discussione fatta per l’insieme delle matrici invertibili si può fare anche per l’insieme delle applicazioni lineari. Sia V uno spazio vettoriale. Una applicazione lineare (ovvero un omomorfismo di spazi vettoriali) da V in V è detta endomorfismo. Se l’endomorfismo è biettivo allora si dice automorfismo. L’insieme di tutti gli automorfismi di V forma un gruppo, il *gruppo generale lineare* di V , chiamato $\mathrm{Aut}(V)$ o $\mathrm{GL}(V)$. Il gruppo degli automorfismi di V è isomorfo al gruppo lineare generale $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ di tutte le matrici $n \times n$ invertibili a valori in \mathbb{K} .
- $\mathrm{SU}(N)$ è il gruppo delle matrici $N \times N$ unitarie ($U^\dagger U = \mathbb{I}$) a determinante unitario ($\det U = 1$). Formano un gruppo perchè il prodotto di due matrici unitarie a determinante 1 è ancora una matrice unitaria e a determinante 1. Possono essere parametrizzate come

$$U(g) = e^{ig} \tag{A.2}$$

dove g è una matrice hermitiana (affichè U sia hermitiana) e a traccia nulla (in quanto $\det U = e^{\mathrm{Tr} \ln U} = e^{i\mathrm{Tr} g} = 1$). Il risultato è che possiamo parametrizzare (almeno localmente) queste matrici unitarie con delle matrici hermitiane a traccia nulla. Ora ci chiediamo quanti parametri identificano le matrici hermitiane. Sulla diagonale abbiamo N numeri reali indipendenti, fuori diagonale abbiamo dei numeri complessi ma per l’unitarietà il blocco triangolare inferiore è il complesso coniugato di quello superiore. Pertanto il numero totale di parametri reali indipendenti che identificano una matrice hermitiana è

$$2 \frac{N^2 - N}{2} + N = N^2.$$

Il numero di parametri reali indipendenti che identificano una matrice hermitiana a traccia nulla (un elemento della diagonale è identificato univocamente in funzione degli altri $N - 1$) è $N^2 - 1$ ($\mathrm{SU}(2)$ che è quello del momento angolare ha infatti 3 parametri indipendenti; $\mathrm{SU}(3)$ che è un gruppo importante in fisica delle alte energie è un gruppo ad 8 parametri).

A.2 Rappresentazione di un gruppo

Siano \mathcal{G} gruppo e V spazio vettoriale. Una *rappresentazione* di \mathcal{G} è un omeomorfismo del gruppo \mathcal{G} nel gruppo $\mathrm{GL}(V)$ delle trasformazioni lineari di V in se stesso (automorfismi),

$$\mathcal{R} : \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{GL}(V).$$

Si dice che la \mathcal{R} rappresenta l'azione del gruppo. Spesso si dice semplicemente che lo spazio V è la rappresentazione del gruppo, qualora sia chiara l'azione di \mathcal{G} su $\text{GL}(V)$. V è detto lo *spazio base* della rappresentazione \mathcal{R} . Poichè ogni operatore lineare da V in V lo posso associare ad una matrice non singolare (determinante diverso da zero e quindi invertibile), allora, sostanzialmente, una rappresentazione è un omomorfismo

$$\mathcal{R} : \mathcal{G} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C}) ; \quad g \mapsto \mathcal{R}(g) .$$

Il numero n è detto *dimensione della rappresentazione*, che ovviamente coincide con la dimensione di V . Se esiste una corrispondenza biunivoca tra matrici ed elementi del gruppo allora si parla di *rappresentazione fedele* (l'omomorfismo è un isomorfismo). Quindi tutte le proprietà del gruppo sono realizzate esplicitamente dalle matrici della rappresentazione. Si può fare anche la definizione inversa: queste matrici possono essere pensate come operatori che agiscono su uno spazio vettoriale V la cui dimensione è detta dimensione della rappresentazione. Se $\forall g \in \mathcal{G}$ la matrice $\mathcal{R}(g)$ è una matrice unitaria, la rappresentazione si dice *unitaria*. Date due rappresentazioni $\mathcal{R}^{(1)}(g)$ e $\mathcal{R}^{(2)}(g)$, se esiste una trasformazione unitaria U indipendente da g tale che

$$\mathcal{R}^{(2)}(g) = U\mathcal{R}^{(1)}(g)U^\dagger \quad (\text{A.3})$$

allora le due rappresentazioni si dicono *equivalenti*. Questa trasformazione da $\mathcal{R}^{(1)}(g)$ a $\mathcal{R}^{(2)}(g)$ rappresenta semplicemente un cambio di base nello spazio vettoriale V e le matrici delle diverse rappresentazioni equivalenti identificano lo stesso operatore lineare espresso nelle rispettive basi. Un gruppo \mathcal{G} puo' avere molte (infinite) rappresentazioni. La rappresentazione *fondamentale* di un gruppo è la rappresentazione fedele con le dimensioni più piccole.

A.2.1 Rappresentazioni riducibili e completamente riducibili

Un sottospazio $V' \subseteq V$ è detto essere invariante (o proprio) per la rappresentazione \mathcal{R} se,

$$\forall g \in \mathcal{G} \quad \mathcal{R}(g)V' \subseteq V'$$

cioè se $\forall g \in \mathcal{G}$ e $\forall v \in V'$, si ha $\mathcal{R}(g)v \in V'$. Notare che ciò non significa che $\mathcal{R}(g)$ (che è effettivamente una matrice) lascia invariato V' vettore per vettore, ma solo che manda V' in se stesso! Se $\mathcal{R}(g)$ ammette sottospazi invarianti non banali (cioè eccetto $\{0\}$ e V stesso) si dice *riducibile*. Si dice *irriducibile* nel caso contrario. Sia $V' \subseteq V$ sottospazio invariante per la rappresentazione \mathcal{R} e sia $n_1 = \dim(V')$. Allora posso scegliere una base $\{b_1, \dots, b_{n_1}, b_{n_1+1}, \dots, b_n\}$ di V tale che $\{b_1, \dots, b_{n_1}\}$ sia base per V' . In questo modo, per ogni $g \in \mathcal{G}$ posso scrivere $\mathcal{R}(g)$ come

$$\mathcal{R}(g) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1(g) & S \\ 0 & \mathcal{R}_2(g) \end{pmatrix}$$

con $\mathcal{R}_1(g)$ matrice $n - n_1$. Se poi $S = 0$, cioè anche V'' (sottospazio complementare, $\dim(V'') = n - n_1$) è invariante sotto l'azione di \mathcal{R} , allora ogni matrice $\mathcal{R}(g)$ è a blocchi e la rappresentazione \mathcal{R} si dice *completamente riducibile*. In altre parole una rappresentazione si dice completamente riducibile se e' equivalente ad una rappresentazione le cui matrici sono diagonali a blocchi (ovvero esiste una trasformazione unitaria tale che $U\mathcal{R}(g)U^\dagger$ è una matrice diagonale a blocchi¹). In questo caso, \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 costituiscono due rappresentazioni di \mathcal{G} (con spazio base V' e V'' , rispettivamente) di dimensione n_1 e n_2 , rispettivamente. Si scrive allora $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$ e si dice che \mathcal{R} è somma diretta di \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 (così come $V = V' \oplus V''$).

A.2.2 Prodotto diretto di Rappresentazioni

Una volta che abbiamo varie rappresentazioni le possiamo comporre (esattamente come si compongono i momenti angolari) attraverso il prodotto diretto (o tensoriale). Prendiamo due rappresentazioni $\mathcal{R}_1(g)$ e

¹Ricorda che $A' = UAU^{-1}$ è la formula del cambiamento di base. Il termine "unitariamente equivalenti" o semplicemente "equivalenti" è molto interessante. Cercando mi imbatto nella frase ad effetto che le matrici hermitiane sono unitariamente equivalenti alle matrici diagonali reali; questo condensa in poche righe l'enunciato del teorema spettrale. Tuttavia fai attenzione, che cercando ho scoperto che il teorema spettrale vale solo per gli operatori autoaggiuntivi, che evidentemente hanno una differenza (centra qualcosa la limitatezza degli operatori) con il termine hermitiano. Cercando (visto che Presilla mai ci ha insegnato niente) ho visto anche che un operatore autoaggiunto è hermitiano, ma il viceversa non è necessariamente vero. Il se e solo se vale quando l'operatore è limitato; quindi: un operatore hermitiano limitato è anche autoaggiunto

$\mathcal{R}_2(g)$ è uno spazio ψ_{ij} (che è il prodotto tensoriale degli spazi vettoriali) su cui agisce il prodotto diretto della rappresentazione. Notare che questo spazio possiede due indici; su uno agisce $\mathcal{R}_1(g)$, mentre sull'altro $\mathcal{R}_2(g)$: $(\mathcal{R}_1(g))_{li} (\mathcal{R}_2(g))_{mj}$. Non ci sono quindi problemi di commutatività in quanto questi due oggetti agiscono su due spazi differenti. Il prodotto diretto di due rappresentazioni è essa stessa una rappresentazione in quanto se ne applichiamo due di seguito (una calcolata in g_1 e una in g_2) ognuno dei termini si compone per conto suo nello spazio degli indici su cui opera e, valendo la proprietà di gruppo otteniamo l'asserto. Infatti

$$(\mathcal{R}_1(g_1))_{li} (\mathcal{R}_2(g_1))_{mj} (\mathcal{R}_1(g_2))_{ih} (\mathcal{R}_2(g_2))_{jo} = (\mathcal{R}_1(g_1 \cdot g_2))_{lh} (\mathcal{R}_2(g_1 \cdot g_2))_{m0}$$

e abbiamo dimostrato che $f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) * f(g_2)$, con $*$ prodotto matriciale. Abbiamo quindi dimostrato che $\mathcal{R}_1(g) \otimes \mathcal{R}_2(g)$ è anch'essa una rappresentazione del gruppo \mathcal{G} . Questa è una operazione che abbiamo già incontrato in meccanica quantistica fatta sul gruppo delle rotazioni (sul momento angolare quindi) per ricavare la composizione dei momenti angolari. Questa nuova rappresentazione in generale non è irriducibile: pertanto decomporre un prodotto tensoriale in una somma diretta di rappresentazioni irriducibili è un problema fondamentale (teoria di Clebsch-Gordan).

In meccanica quantistica avevamo preso due momenti angolari l_1 e l_2 e li abbiamo composti tensorialmente $l_1 \otimes l_2$ nel senso che la funzione d'onda viveva nei due spazi dei due momenti angolari. Noi sappiamo che quando facciamo la composizione di due momenti angolari questo non è un momento angolare definito ma ha vari momenti angolari che vanno da $l_1 + l_2$ fino a $|l_1 - l_2|$ scendendo di 1. Questa è la decomposizione del prodotto tensoriale di due rappresentazioni irriducibili in una somma diretta di rappresentazioni irriducibili. Data una rappresentazione $\mathcal{R}_{ik}(g)$ che agisce su un certo spazio ψ_k come matrice, posso definire una rappresentazione coniugata che è semplicemente $\mathcal{R}_{ik}^*(g)$. Questa è una rappresentazione in quanto

$$\mathcal{R}_{ik}^*(g_1) \mathcal{R}_{kj}^*(g_2) = (\mathcal{R}_{ik}(g_1) \mathcal{R}_{kj}(g_2))^* = \mathcal{R}_{ij}^*(g_1 \cdot g_2).$$

In generale la rappresentazione coniugata $\mathcal{R}^*(g)$ non è equivalente a $\mathcal{R}(g)$.

ESEMPIO Nel caso di $SU(2)^2$ la rappresentazione *fondamentale* del gruppo è semplicemente quella data dalle matrici $U 2 \times 2$ unitarie a determinante uno. Abbiamo visto che possiamo parametrizzare queste matrici tramite la (A.2) dove g è una matrice a traccia nulla. Sappiamo che una base di matrici 2×2 unitarie sono date dalle 3 matrici di Pauli σ_a e dall'identità. Tuttavia l'identità non è a traccia nulla, quindi il gruppo (come giustamente trovato prima) ha 3 parametri e questi sono le matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le matrici di Pauli hanno le seguenti proprietà

$$\text{Tr } \sigma_a = 0, \quad \sigma_a^2 = \mathbb{I}, \quad \sigma_a^\dagger = \sigma_a, \quad \{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab} \mathbb{I}, \quad [\sigma_a, \sigma_b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma_c, \quad (\text{A.4})$$

dove ϵ_{abc} è il tensore di Levi-Civita. $SU(2)$ è quindi un gruppo continuo a 3 parametri. Questi parametri come sappiamo sono i *generatori* del gruppo di Lie. Possiamo quindi scrivere i generatori del gruppo $SU(2)$ come

$$g = g^a \frac{\sigma_a}{2} \quad (\text{A.5})$$

dove il fattore $1/2$ mantiene l'esatta algebra del momento angolare ordinario ($SU(2)$) e' omeomorfo al gruppo speciale ortogonale delle rotazioni $SO(3)$ che ha come generatori 8 matrici 3×3 , mentre le loro algebre sono isomorfe³). Abbiamo pertanto le espressioni della rappresentazione fondamentale di $SU(2)$ e della sua coniugata

$$\begin{cases} U(g) = e^{ig^a \frac{\sigma_a}{2}} \\ U^*(g) = e^{-ig^a \frac{\sigma_a^*}{2}}. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

²Sarebbe meglio per comprendere più a fondo, leggersi l'appendice B

³Quando le algebre di due gruppi sono isomorfe allora questi si dicono *localmente isomorfi*. Pertanto $SU(2)$ è localmente isomorfo a $SO(3)$

La matrice $U^*(g)$ è ovviamente diversa da $U(g)$ perché $\sigma_1^* = \sigma_1$ e $\sigma_3^* = \sigma_3$. Tuttavia le due rappresentazioni sono equivalenti: la trasformazione unitaria è proprio σ_2

$$\sigma_2 U^*(g) \sigma_2 = \sigma_2 \exp \left\{ -ig^1 \frac{\sigma_1}{2} + ig^2 \frac{\sigma_2}{2} - ig^3 \frac{\sigma_3}{2} \right\} \sigma_2 = \exp \left\{ ig^1 \frac{\sigma_1}{2} + ig^2 \frac{\sigma_2}{2} + ig^3 \frac{\sigma_3}{2} \right\} = U(g), \quad (\text{A.7})$$

perchè σ_2 anticommuta con σ_1 e σ_3 (basta poi espandere in serie di Taylor l'esponenziale). Nel linguaggio della meccanica quantistica (se ci riferiamo al gruppo delle rotazioni $SU(2)$) la matrice $U(g)$ di partenza definisce una trasformazione sulla funzione d'onda di una particella di spin $1/2$. La $U^*(g)$ sembrerebbe essere una rappresentazione diversa sempre di spin $1/2$ (dovremmo chiamarla $\overline{1/2}$). In realtà abbiamo dimostrato che le due rappresentazioni sono equivalenti e quindi non c'è esiste una $1/2$ e una $\overline{1/2}$, ma solo $1/2$. Questo è vero solo per $SU(2)$; per $SU(3)$ la rappresentazione coniugata non è equivalente a quella di partenza e lo stesso è vero per gli altri gruppi $SU(N)$ con $N \geq 3$. Possiamo generalizzare la (A.5) per $SU(N)$ con $N \geq 3$

$$g = g^a \frac{\lambda_a}{2}, \quad (\text{A.8})$$

dove λ_a sono le cosiddette *matrici di Gell-Mann* che soddisfano proprietà analoghe a quelle delle matrici di Pauli (vedi prossimo paragrafo). Le matrici di Gell-Mann sono i generatori del gruppo di Lie $SU(N)$.

A.2.3 Rappresentazione Aggiunta

Supponiamo di avere una rappresentazione U del gruppo $SU(N)$ e la sua coniugata U^* . Ne vogliamo fare il prodotto tensoriale $U \otimes U^*$ (che chiamiamo anche $N \otimes \overline{N}$). Le due rappresentazioni e il loro prodotto tensoriale agiscono

$$\begin{cases} U_{li} v_i \\ U_{mk}^* v_k^* \end{cases} \implies U_{li} U_{mk}^* v_{ik}. \quad (\text{A.9})$$

Voglio ora scoprire se ci sono dei sottospazi lineari che restano invarianti sotto l'azione di questa trasformazione. Per vederlo, conviene tradurre questa notazione in una di matrici; introduciamo una matrice w quadrata di dimensione N^2 : l'azione di questa U e di questa U^* su questa w la posso vedere come

$$w'_{lm} = U_{li} U_{mk}^* w_{ik} = U_{li} (U^T)_{km}^* w_{ik} \implies w' = U w U^\dagger$$

nell'ultimo membro la U agisce sulla w righe per colonne e analogamente la w su $(U^T)^* = U^\dagger$. Scritta in questo modo mi accorgo subito che esistono dei sottospazi invarianti. Se infatti prendo w proporzionale alla matrice identità $w = \alpha \mathbb{I}$ cioè per le componenti $w_{ik} = \alpha \delta_{ik}$, allora $w' = w$ rimane sè stessa. Abbiamo identificato un sottospazio invariante non banale. Un altro sottospazio invariante non banale risulta essere il sottospazio delle matrici w a traccia nulla⁴: infatti $\text{Tr } w; \text{Tr } w' = \text{Tr } w$ ovvero la traccia è invariante rispetto a trasformazioni unitarie. Si può poi vedere che non ce ne sono altri. Ora come posso decomporre questa matrice w in modo tale da scrivere il prodotto tensoriale di queste due rappresentazioni come somma diretta di rappresentazioni irriducibili? Posso scrivere

$$w = c\mathbb{I} + (w - c\mathbb{I}) \quad (\text{A.10})$$

da cui prendendo la traccia $\text{Tr } w = cN + \text{Tr } (w - c\mathbb{I}) = c_N$ e quindi

$$w = \frac{\text{Tr } w}{N} \mathbb{I} + \left(w - \frac{\text{Tr } w}{N} \mathbb{I} \right). \quad (\text{A.11})$$

In questo modo ogni vettore dello spazio w è decomponibile in una somma di vettori appartenenti a sottospazi invarianti. Il primo termine rappresenta il sottospazio proporzionale all'identità, il secondo quello complementare (a traccia nulla) detto anche *rappresentazione aggiunta*, entrambi rappresentazioni irriducibili di $SU(N)$. La dimensione della rappresentazione aggiunta è la stessa del gruppo: $N^2 - 1$. Abbiamo quindi trovato che

$$N \otimes \overline{N} = 1 \oplus (N^2 - 1) \quad (\text{A.12})$$

⁴Nota che l'insieme delle matrici a traccia nulla è un sottospazio delle matrici $N \times N$: infatti la combinazione lineare di matrici a traccia nulla è ancora a traccia nulla

La rappresentazione aggiunta è realizzata mediante matrici hermitiane⁵ a traccia nulla.

Ho scelto una particolare base per scrivere le matrici; ne posso scegliere un'altra. Posso introdurre per fare ciò le *matrici di Gell-Mann* λ_a tali che

$$\text{Tr } \lambda_a = 0, \quad \lambda_a^\dagger = \lambda_a, \quad \text{Tr } (\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}, \quad [\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c, \quad (\text{A.13})$$

dove al posto del simbolo di Levi-Civita, abbiamo delle nuove *costanti di struttura* del gruppo f_{abc} totalmente antisimmetriche. Come abbiamo visto le matrici λ_a sono i generatori del gruppo $SU(N)$. Nel caso di $SU(2)$ $\lambda_a = \sigma_a$. Una rappresentazione w aggiunta la posso identificare o con le matrici hermitiane a traccia nulla oppure riscrivendosi $w = w^a \lambda_a$ ($a = 1, \dots, N^2 - 1$) con w^a che sono $N^2 - 1$ numeri reali. Questo è quello che molto spesso si fa con le teorie di Gauge.

Nota che le regole di commutazione delle λ_a si possono scrivere anche così: $[\lambda_a, \lambda_b] = if_{abc}\lambda_c$ a patto di identificare, nel caso $SU(2)$ $\lambda_a = \sigma_a/2$.

⁵Se prendo il sottospazio delle matrici hermitiane $w = w^\dagger$ la matrice trasformata $w' = UwU^\dagger$ è ancora hermitiana.

Appendice B

Gruppi ed Algebre di Lie

Vedi Capitolo 2 Iacopo Borsi