Celeste Bazzi:S4840738　　**Luca Comparini:S4184885**　　**Eugenio Pallestrini:S4878184**

ALGEBRA LINEARE E ANALISI NUMERICA

RELAZIONE LABORATORIO 3

Esercizio 1

Nel seguente esercizio procediamo alla costruzione della matrice blocco di Jordan nxn dove, nel caso del nostro gruppo, n=10(8+1)+4.

Ciò avviene tramite il comando consigliato: A = diag(ones(1,n−1),1)+eye(n)

Successivamente creiamo la matrice perturbata B=A+E con E matrice di elementi tutti nulli escluso E(n,1)=2^{-n}.

A seguire l'operazione di calcolo degli autovalori

```
syms lambda; %necessita l'aggiunta Symbolic Math Toolbox
SA = double(solve(det(A-lambda*eye(n))==0, lambda));
SB = double(solve(det(B-lambda*eye(n))==0, lambda));
```

Dopodiché estraiamo da A e B i vettori di autovalori per mezzo del comando suggerito eig()

```
VA = eig(A)
VB = eig(B)
```

Infine procediamo al confronto:

- Puntualmente tramite comando isequal(SA,VA), abbiamo verificato che gli autovalori fossero uguali per A ma non per B.
- In norma n1 = norm(B-A)/norm(A)=2.5247e-29 e n2 = norm(VB-VA)/norm(VA)=0.

Abbiamo ripetuto l'esercizio per A^tA e B^tB ottenendo:

- Il confronto degli autovalori, uguali per A^tA ma non per B^tB
- n3 = norm (At-A)/norm(A) = 0.9996
- n4 = norm (VAt-VA)/norm(VA) = 0
- n5 = norm (Bt-B)/norm(B) = 0.9996
- n6 = norm (VBt-VB)/norm(VB) = 0

Esercizio 2

Preliminarmente alle operazioni richieste in questo esercizio abbiamo costruito due vettori s e t con uguale numero di elementi, i quali rappresentano i nodi della mappa e presi a coppie ordinate indicano un connessione tra due nodi.

In questo modo abbiamo potuto sfruttare la funzione graph(,) per costruire un grafo che preso in input dalla funzione adjacency() crea un matrice di adiacenza. A questo punto è bastato completare gli elementi nulli tramite la funzione full() per arrivare alla matrice di adiacenza richiesta dal testo.

```
A = full(adjacency(graph(s,t)))
```

Quindi tramite un ciclo andiamo a costruire il vettore V contenente il numero di adiacenze di ogni nodo per poi costruire la matrice D tramite `diag(V); e di conseguenza otteniamo G    G = A*inv(D)`

Infine salviamo gli autovalori in una matrice diagonale "autovalori" e salviamo una matrice "autovettori" dove le colonne sono i corrispondenti autovettori in modo che G*autovettori = autovettori*autovalori

Procedendo con i controlli richiesti verifichiamo che:

- il primo autovalore di G è uguale a 1 e gli altri sono tutti minori di 1: 0.7640, 0.5774, 0.2241, -0.8824, -0.7255, -0.5774, -0.3802, -0.0000, 0.0000, -0.0000.
- moltiplicando l'autovettore relativo a 1 per -1 avremmo che le componenti sono tutte comprese tra 0 e 1.
- Eseguendo l'operazione di moltiplicazione per -1 dell'autovettore relativo a 1 allora ci ritroveremmo nella situazione richiesta: per ogni autovalore, il suo autovettore ha componenti sia positive che negative.

Parlando dell'importanza delle stazioni possiamo sfruttare la matrice G; infatti le colonne di G ci mostrano quanta importanza una stazione dà alle altre mentre guardando le righe di G si può vedere quanta importanza una stazione riceve dalle altre.

Forti di questa osservazione possiamo concludere che la stazione più importante è Milano mentre le stazioni meno importanti sono Pavia e Lecco.

Esercizio 3

Il metodo delle potenze è un metodo iterativo per il calcolo dell'autovalore di massimo modulo di una matrice e il corrispondente autovettore.

Consiste nel fissare un vettore iniziale x(0) e calcolare la successione di vettore il cui termine k -esimo è x(k) = Akx(0). La digona-lizzabilità di A implica l'esistenza di n autovettori x(i) (i = 1, · · · , n) linearmente indipendenti.

Andando a eseguire il metodo delle potenza abbiamo ottenuto i seguenti risultati:

- Per il vettore $(1,1,1)^t$ con 46 iterazioni, autovettore y = {0.2033, 0.6505, 0.7318}, autovalore lambda1 = 5.0000.
- Per il vettore $(3,10,4)^t$ con 23 iterazioni, autovettore y = {0.1374, 0.8242, 0.5494}, autovalore lambda2 = 3.0000.

Successivamente studiamo la convergenza che si verifica quando:

1. A è diagonalizzabile
2. Il vettore iniziale ha una componente non nulla lungo l'autovettore v_1 corrispondente a λ_1
3. L'autovettore di modulo massimo è separato dagli altri, ovvero $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, i = 2,…,n

Calcoliamo quindi la velocità di convergenza del metodo delle potenze:

$$\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^k \text{ con } |\lambda_1| > |\lambda_2|$$

$$\left(\frac{|3|}{|5|}\right)^k = \frac{3^k}{5^k} = (0.6)^k$$

Trovati i risultati tramite metodo delle potenze procediamo ad applicare il metodo delle potenze inverse ovvero una variante particolarmente interessante del metodo delle potenze utile nel caso in cui A sia una matrice quadrata con n autovettori linearmente e si decida di calcolare l'autovalore più piccolo in modulo.

Modificando il parametro μ della matrice (A - μI) svolgiamo due test:

1. Usiamo μ = 4 con 1001 iterazioni troviamo l'autovalore lambda3 = 4.0604
2. usiamo μ = 4.5 con 54 iterazioni troviamo l'autovalore lambda4 = 5.0000

A seguire il calcolo della velocità di convergenza del metodo delle potenze inverse:

$$|u| = \frac{1}{\lambda - \mu} \quad \left(\frac{|u_2|}{|u_1|}\right)^k \text{ con } |u_1| > |u_2|$$

$$|u_1| = \frac{1}{4.0604 - 4} = 16.5562914$$

$$|u_2| = \frac{1}{5 - 4.5} = 2$$

$$\left(\frac{|2|}{|16.5562914|}\right)^k = (0.1208)^k$$

Confrontando i risultati della convergenza si può vedere che a parità di k il metodo delle potenze inverse converge più lentamente.

Nella cartella di consegna del laboratori di cui sopra sono contenuti tre diversi file di testo contenenti rispettivamente gli output dei 3 esercizi.