Laurea Triennale in Informatica
Algebra Lineare e Analisi Numerica

Autovalori
(esercizi facoltativi da svolgere in Matlab)

Attenzione: i dati dell'esercizio 1 variano da gruppo a gruppo, come descritto di seguito. In fase di consegna, la relazione dovrà indicare chiaramente i componenti del gruppo in ordine alfabetico e i rispettivi numeri di matricola. *Qualunque discrepanza rispetto ai dati effettivamente usati comporterà una penalizzazione.*

1. Sia n fissato nel modo seguente: si consideri il numero di matricola dell'ultimo componente, in ordine alfabetico, del gruppo; si indichi con d_0 e d_1, rispettivamente, l'ultima e la penultima cifra di tale numero di matricola; si ponga $n = 10(d_1 + 1) + d_0$.
   Si consideri la matrice A (blocco di Jordan $n \times n$) ottenuta con il comando seguente
$$A = diag(ones(1, n-1), 1) + eye(n)\,.$$

Si consideri la matrice perturbata B t.c. $B = A + E$, con E matrice con elementi tutti nulli escluso $E(n, 1) = 2^{-n}$.

   a) Calcolare gli autovalori di A e B. Confrontarli puntualmente e in norma per mezzo dei comandi $VA = eig(A)$, $VB = eig(B)$, $norm(B - A)/norm(A)$ e $norm(VB - VA)/norm(VA)$
   b) Si ripeta l'esercizio per la coppia di matrici A^tA e B^tB .

2. Dato un grafo con n nodi, la matrice A di dimensione $n \times n$ tale che $(A)_{i,j} = 1$ se il nodo j è connesso al nodo i, e $(A)_{i,j} = 0$ se il nodo j non è connesso al nodo i, viene detta matrice di adiacenza del grafo.
   a) Costruire la matrice di adiacenza A relativa all'esempio delle ferrovie lombarde riportato in figura.
   b) Sia $D = \mathrm{diag}(g_1, \ldots, g_n)$, dove g_j è il numero di archi uscenti dal nodo j. Calcolare la matrice $G := A \cdot D^{-1}$, i suoi autovalori e i suoi autovettori.
   c) Si verifichi, dall'output del punto b), quanto segue:
   — un autovalore di G è uguale a 1 e tutti gli altri hanno modulo minore di 1;
   — esiste un autovettore x relativo a 1 le cui componenti sono tutte comprese tra 0 e 1;
   — per ogni altro autovalore, il corrispondente autovettore ha componenti sia positive che negative.

   In fase di relazione, si metta in corrispondenza ogni componente m dell'autovettore x con una stima intuitiva "dell'importanza" della stazione ferroviaria associata al nodo m. Tale costruzione è alla base del procedimento con cui vengono ordinati i risultati dai più comuni motori di ricerca in Internet.

3. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 6 & -3 & 6 \end{pmatrix} .$$
   a) Applicare alla matrice il metodo delle potenze, usando $(1, 1, 1)^t$ e $(3, 10, 4)^t$ come vettori iniziali, osservando il diverso comportamento.
   b) Approssimare l'autovalore di massimo modulo anche con il metodo delle potenze inverse, utilizzando una qualunque stima dell'autovalore stesso; confrontare la velocità di convergenza rispetto al punto a).

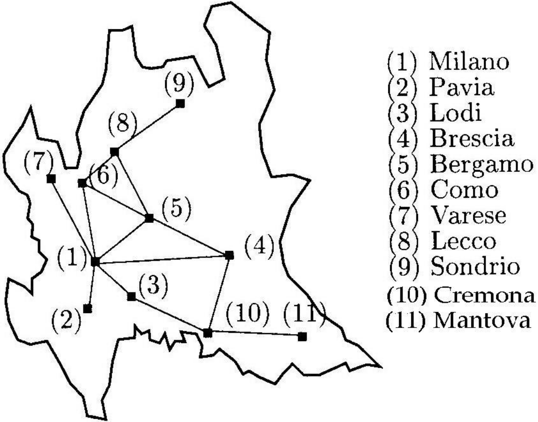

Fig. 6.2. Rappresentazione schematica delle connessioni ferroviarie per la sola Lombardia