Relazione Consenso Bizantino

- **Il problema:**

In questo laboratorio abbiamo stimato la traccia del prodotto di una matrice 300x300 per la sua trasposta iterando un algoritmo di tipo Monte Carlo 100 volte per ogni M, con M numero di campioni. Abbiamo poi calcolato la norma di Frobenius, la varianza campionaria della stima e infine confrontato la traccia stimata con quella reale, con la traccia reale ± sigma m e confrontato la varianza campionaria della stima con due volte la norma di Frobenius elevata alla seconda fratto il numero dei campioni.

- **Il codice:**

Il codice si occupa, attraverso la funzione *generaMatrice()* di riempire una matrice 300x300 con numeri float campionati nell'intervallo [0, 1], calcolarne la trasposta con l'analoga funzione e moltiplicarla per la matrice originale ottenendo così la matrice A. A questo punto calcola la traccia di A attraverso la funzione *traccia()* sommando gli elementi sulla diagonale e calcola la varianza della media campionaria attraverso la formula:

$$\frac{4}{M}\sum_{i=1}^{n}\sum_{r\leq i} A_{ir}^2$$

Dopo di che viene iterato per 100 volte il seguente algoritmo:

Genero un vettore di Rademacher (un vettore di dimensione uguale ad A contenente con ugual probabilità uni e meno uni), moltiplico A per tale vettore trasposto e il risultato di nuovo per il vettore iniziale, salvo il risultato X, il quale sarà un numero, e stimo la traccia nel seguente modo:

$$\langle X\rangle_m = \langle X\rangle_{m-1} + (X_m - \langle X\rangle_{m-1})/m$$

Ora calcolo la traccia stimata media e la media delle varianze campionarie delle stime che ho ottenuto.

Infine stampo sul terminale i risultati ottenuti, la norma di Frobenius prima elevata al quadrato e poi elevata al quadrato, raddoppiata e divisa per M e genero gli istogrammi.

- **Considerazioni finali:**

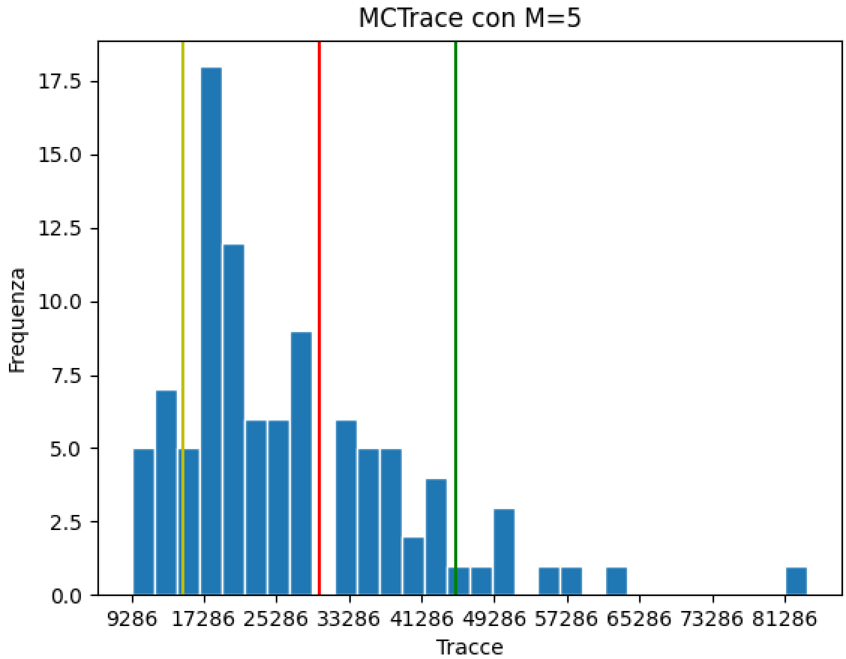
```
--- La traccia effettiva della matrice A è: 29977.1 ---

Con M = 5:
La varianza della media campionaria è: 2.01609e+08
La traccia stimata media è: 26837.9
Il quadrato della norma di Frobenius è: 5.07029e+08
La varianza campionaria media della stima è: 7.22537e+06
Due volte il quadrato della norma di Frobenius fratto M equivale a: 2.02812e+08
--------------------------------------------------
Con M = 10:
La varianza della media campionaria è: 1.00805e+08
La traccia stimata media è: 29936.2
Il quadrato della norma di Frobenius è: 5.07029e+08
La varianza campionaria media della stima è: 7.24627e+06
Due volte il quadrato della norma di Frobenius fratto M equivale a: 1.01406e+08
--------------------------------------------------
Con M = 25:
La varianza della media campionaria è: 4.03218e+07
La traccia stimata media è: 30299.7
Il quadrato della norma di Frobenius è: 5.07029e+08
La varianza campionaria media della stima è: 5.05066e+06
Due volte il quadrato della norma di Frobenius fratto M equivale a: 4.05623e+07
--------------------------------------------------
Con M = 100:
La varianza della media campionaria è: 1.00805e+07
La traccia stimata media è: 29716
Il quadrato della norma di Frobenius è: 5.07029e+08
La varianza campionaria media della stima è: 1.2176e+07
Due volte il quadrato della norma di Frobenius fratto M equivale a: 1.01406e+07
```

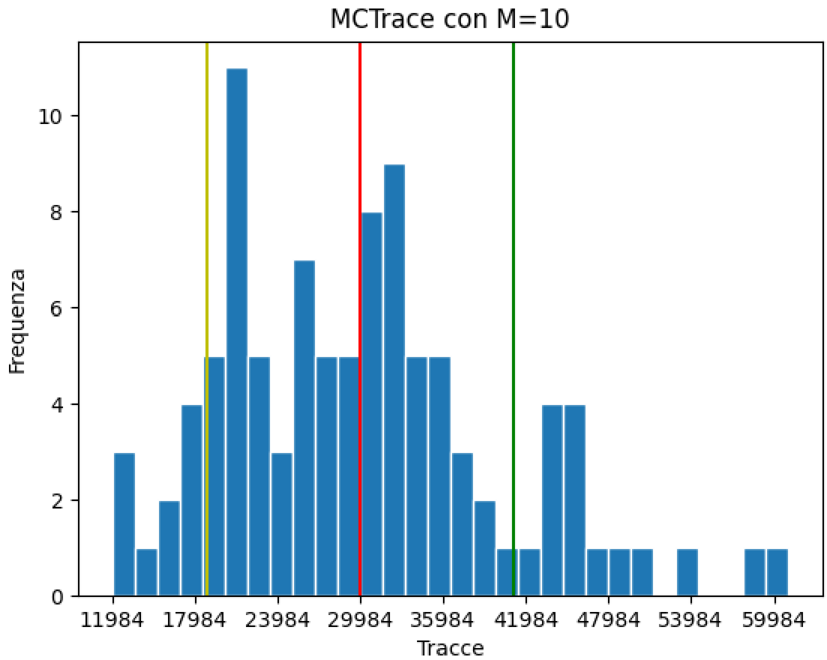
Considerando il seguente risultato possiamo osservare che la stima della traccia all’aumentare di M si avvicina sempre di più al valore reale ma dalla disuguaglianza di Chebyshev si vede che M dipende da $1/\varepsilon^2$ e che quindi per ottenere una stima molto precisa servirà un numero di M molto grande.

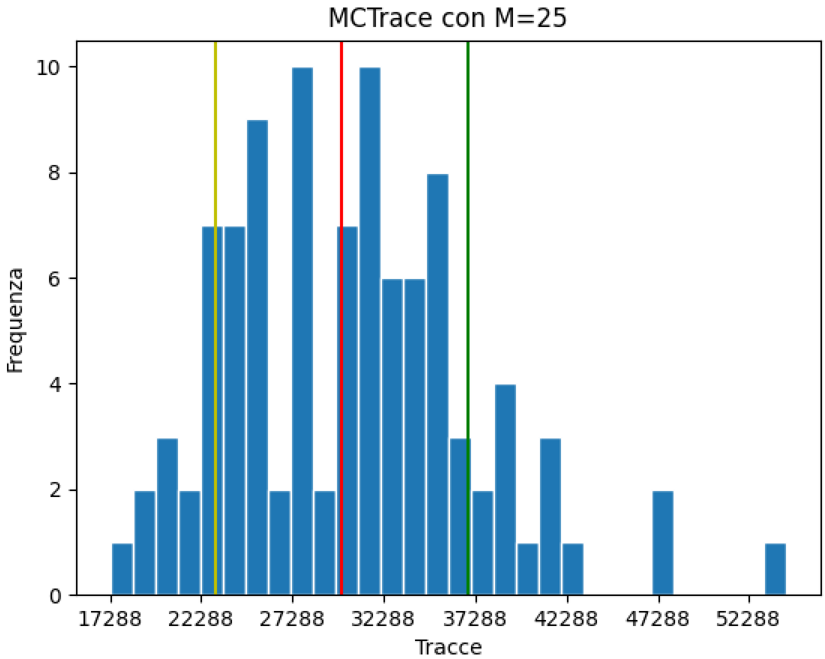
La traccia della matrice rimane ad ogni esecuzione del programma intorno a 30000.

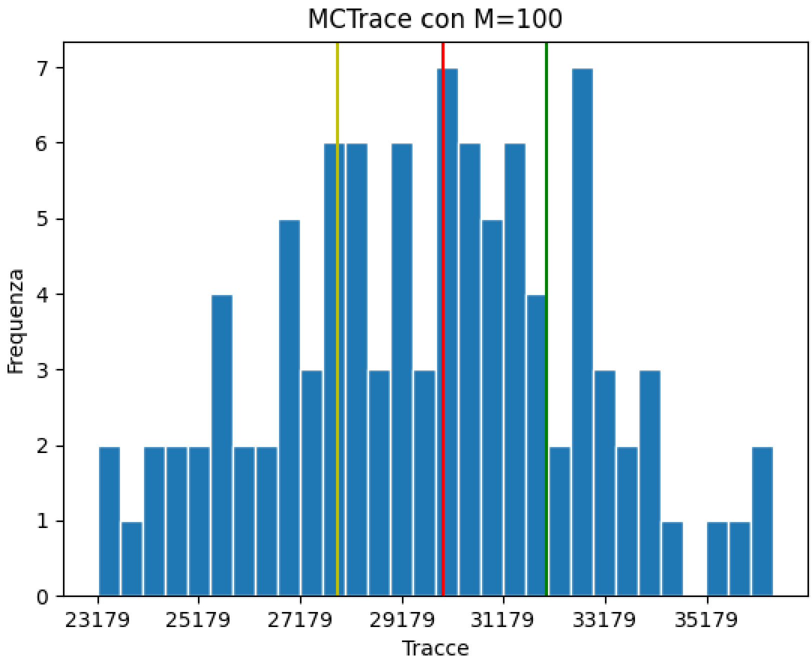
La varianza della media campionaria e la varianza campionaria media della stima risultano essere sempre minori o uguali del doppio della norma di Frobenius al quadrato fratto M.

Ora analizziamo gli istogrammi ottenuti:


MCTrace con M=5
Frequenza
Tracce
17.5
15.0
12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
9286
17286
25286
33286
41286
49286
57286
65286
73286
81286


MCTrace con M=10
Frequenza
Tracce
10
8
6
4
2
0
11984
17984
23984
29984
35984
41984
47984
53984
59984





Le linee gialle e verdi sono rispettivamente Tr(***A***) - σ_M e Tr(***A***) + σ_M mentre quella rossa è la traccia reale di A.

Si può notare dai grafici che all'aumentare di M le stime della traccia di A vicine alla traccia reale si ripetono più volte e che le tracce stimate con maggior frequenza stanno all'interno delle righe gialle e verdi.