

Tre grafici a confronto

Pezzano Enrico

→ Riproduci e commenta le maggiorazioni delle disuguaglianze di Markov, Chebyshev e Chernoff...

...ipotizzando che un contenitore riceva 5u palline e definiamo $m = n \cdot \ln n$, $\mu = \ln n$

• Dis. di Markov:

con $a = 5 \cdot \ln n$ si ha che...

$$\forall a > 0, \Pr\{X \geq a\} \leq \frac{E[X]}{a} = \frac{\mu}{5 \cdot \ln n}$$

$$\Pr\{X \geq 5 \ln n\} = \frac{\ln n}{5 \ln n} = \frac{1}{5}$$

• Dis. di Chebyshev:

Per una variabile casuale X con valore atteso μ e varianza σ^2 finiti si ha che:

$$\forall \epsilon > 0, \Pr\{|X - \mu| \geq \epsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \rightarrow \frac{\sigma^2 \leq \frac{n \cdot \ln n}{n}}{4 \ln n} = \frac{\ln n}{4 \ln n}$$

$$\Pr\{X \geq \ln + 4 \ln n\} \leq \frac{\ln n}{16 \ln^2 n} = \frac{1}{16 \ln n}$$

• Dis. di Chernoff:

Con $\epsilon = 4$ la disuguaglianza diventa...

$$\forall \epsilon > 0, \Pr\{X \geq (1+\epsilon)\mu\} \leq \left(\frac{e^\epsilon}{(1+\epsilon)^{1+\epsilon}}\right)^\mu$$

$$\Pr\{X \geq (1+4)\ln n\} \leq \left(\frac{e^4}{5^5}\right)^{\ln n} < \left(\frac{e^4}{e^8}\right)^{\ln n} = \frac{1}{n^4}$$

$$\hookrightarrow \frac{(e^4)^{\ln n}}{(e^9)^{\ln n}} < \left(\frac{e^4}{5^5}\right)^{\ln n} < \left(\frac{e^4}{e^8}\right)^{\ln n}$$

→ Possiamo notare che, delle tre disuguaglianze, quella di Chernoff ha minore probabilità di variare notevolmente dal valore atteso.