MONTECARLO TRACE

SAMUELE CREA

Montecarlo Trace è un algoritmo, chiaramente randomizzato e di tipo montecarlo, che ci permette di calcolare la traccia di una matrice, o meglio, stimarla non essendo affidabile al 100%.

Questa stima dovrebbe essere sempre più precisa all'aumentare di M (numero di vettori di rademacher) che prima sarà 5,poi 10,25 e 100.

Il calcolo della traccia di una matrice è assolutamente molto semplice;

Basterebbe infatti semplicemente sommare tutti gli elementi sulla diagonale della nostra matrice n x n per trovarla come da definizione.

Tuttavia lo scopo del nostro algoritmo montecarlo sta proprio nel trovare la traccia senza accedere direttamente alla matrice, dando quindi una "stima".

Questo è possibile solamente ipotizzando l'esistenza di un "oracolo" che prende in ingresso la nostra matrice e un vettore di n elementi che sono variabili di rademacher (variabili che possono assumere solo 1 e -1 con probabilità ½).

L'output dell'oracolo sarà il valore derivato dall'operazione u^T*A*u.

Questo valore potrebbe sembrare qualcosa di inutile ma in realtà noi sappiamo per certo che $E[u^TAu] = Tr(A)$.

La componente "randomizzata" del codice quindi è proprio la scelta completamente casuale del vettore formato da variabili di rademacher.

Il mio codice consiste in due file: un file .cpp che rappresenta l'algoritmo stesso con calcolo di ogni cosa richiesta e che restituisce i valori di media campionaria, norma di frobenius e varianza per tutti gli M da 5 a 100.

In più il file .cpp restituisce un file .txt che comprende tutte le misurazione della stima della traccia della matrice.

L'altro file utilizzato è uno script in pyton chiamato plot.py che ci permette prendendo in input il file .txt di creare degli istogrammi attraverso la libreria matplotlib.

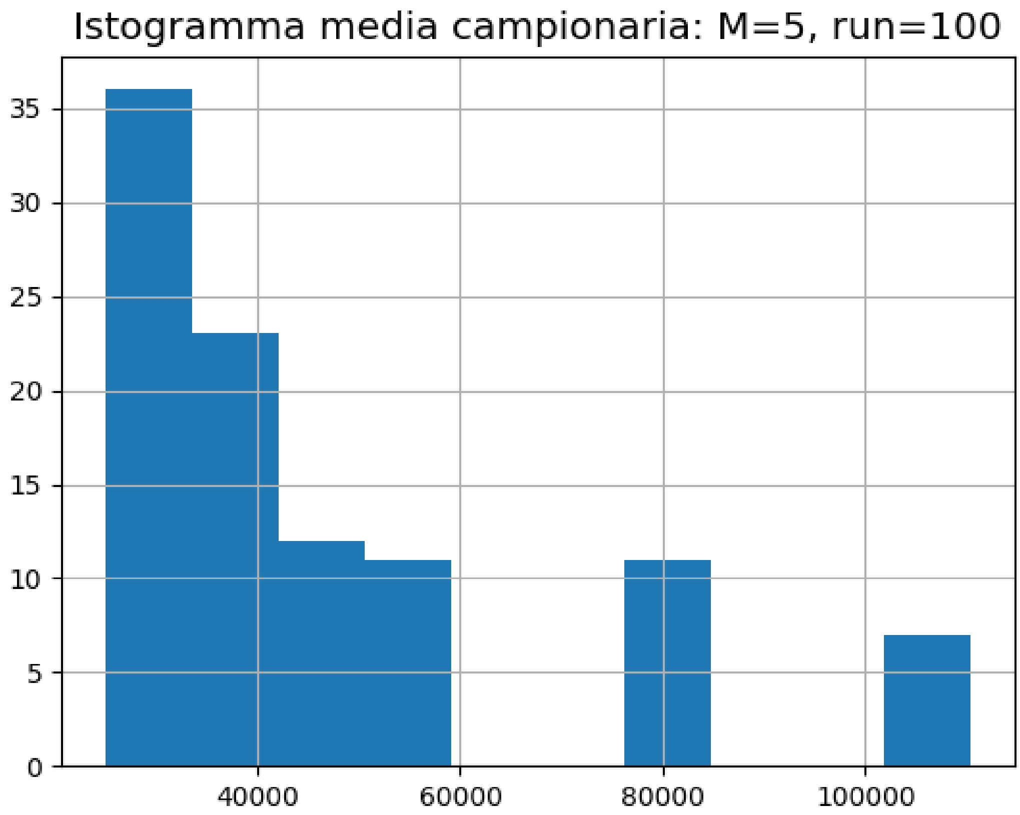
Quello che si dovrebbe notare dal nostro esperimento con M sempre più grande e cioè con il numero di vettori di rademacher sempre più grande è che la stima della traccia della matrice diventa sempre più precisa e l'intervallo dei valori ottenuti diventa sempre più vicino a quello della traccia effettiva.

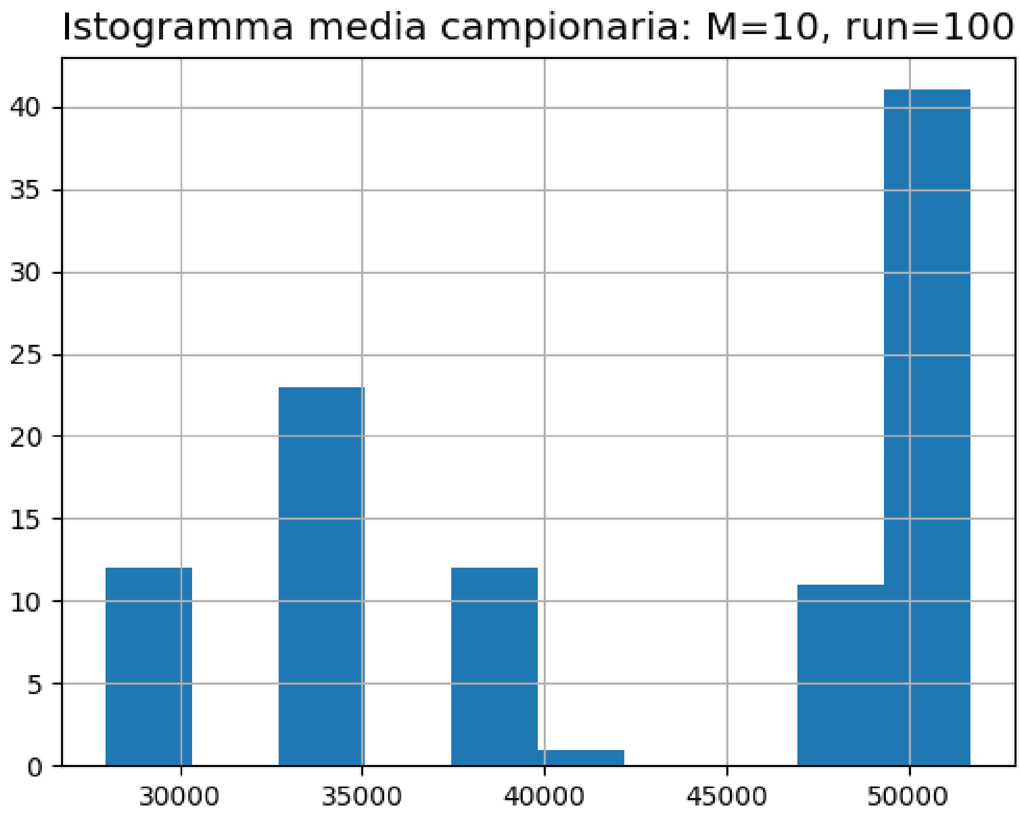
```
uni@uni-VirtualBox:~/Desktop/MCTrace$ g++ *.cpp
uni@uni-VirtualBox:~/Desktop/MCTrace$ ./a.out
Norma di Frobenius: 22807
Traccia effettiva: 45086

Media campionaria(M = 5): 47660.9
Varianza: 5.81308e+08
2*Frobenius/M: 2.08064e+08

Media campionaria(M = 10): 42049.4
Varianza: 7.39959e+07
2*Frobenius/M: 1.04032e+08

Media campionaria(M = 25): 41666.8
Varianza: 2.19506e+07
2*Frobenius/M: 4.16127e+07

Media campionaria(M = 100): 45727.2
Varianza: 1.13982e+07
2*Frobenius/M: 5.20159e+06
uni@uni-VirtualBox:~/Desktop/MCTrace$
```

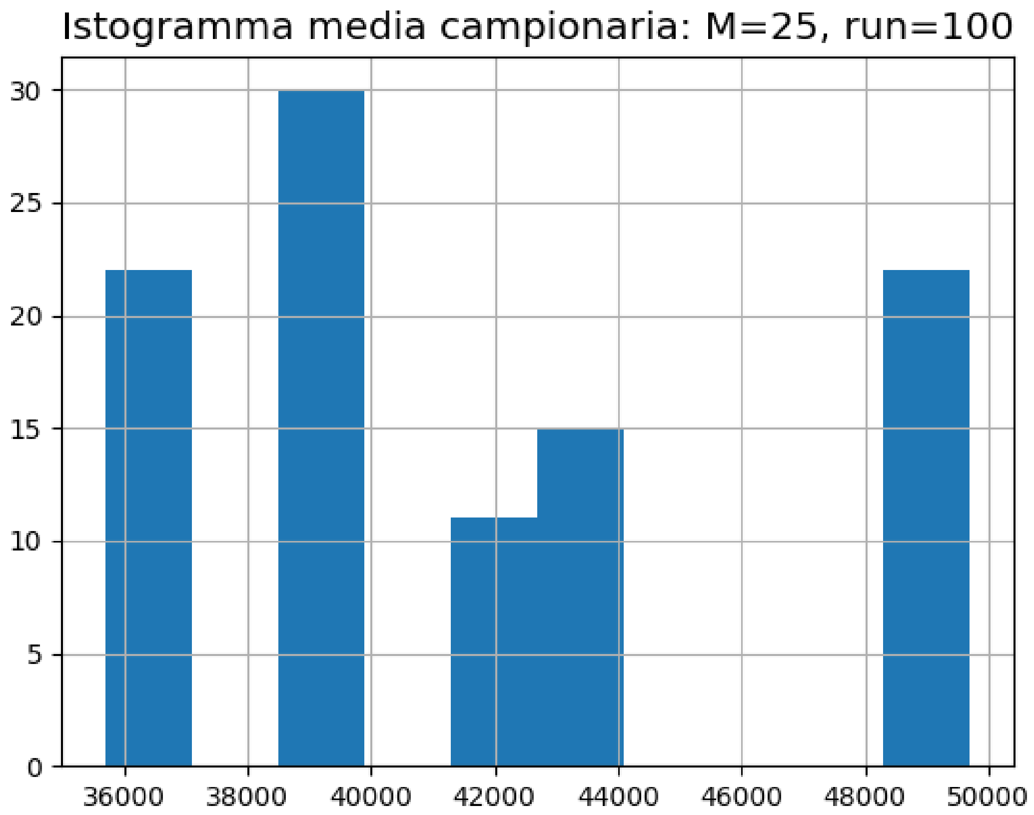
Come possiamo notare dall’output del programma all’aumentare di M tutti i valori diventano sempre più precisi diminuendo notevolmente e avvicinandosi sempre di più ai valori calcolati con la precisione effettiva andando a guardare la matrice.

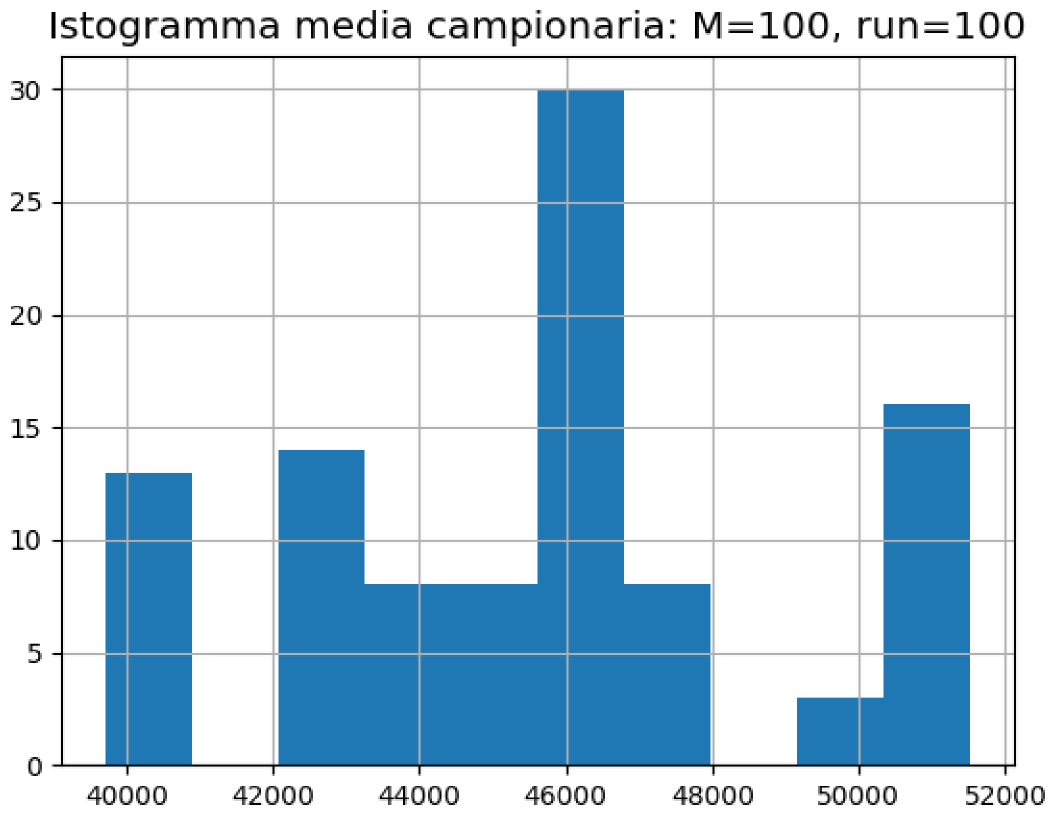
In più anche controllando i valori sui grafici possiamo notare come all’aumentare di M il range dei valori ottenuti diventa sempre più ristretto e di conseguenza più preciso.

Di seguito i grafici che rappresentano tutti i casi da M=5 fino a quello M=100:


Istogramma media campionaria: M=5, run=100
0
5
10
15
20
25
30
35
40000
60000
80000
100000


Istogramma media campionaria: M=10, run=100
0
5
10
15
20
25
30
35
40
30000
35000
40000
45000
50000


Istogramma media campionaria: M=25, run=100
0
5
10
15
20
25
30
36000
38000
40000
42000
44000
46000
48000
50000


Istogramma media campionaria: M=100, run=100
0
5
10
15
20
25
30
40000
42000
44000
46000
48000
50000
52000

Come previsto i valori tendono a “restringersi” diventando sempre più precisi con l’aumentare di M.
Tuttavia i risultati ottenuti sembrano piuttosto “frammentati” anche se, tutto sommato, rispecchiano quello che doveva essere il risultato finale ovvero notare il “restringimento” dell’area con una maggiore precisione su quella che è la traccia effettiva calcolata.
Infine,è interessante notare che la stima è effettivamente controllata superiormente dal quadrato della norma di Frobenius, che risulta sempre maggiore della varianza. Inoltre la varianza diminuisce con l’aumentare di M, ipotizzo per l’aumento della precisione che porta il range della stima a diminuire.