Tre grafici a confronto

$m = n \ln n$

$\mu = \ln n$ $\qquad a = s \ln n$

Markov:

$$\forall a > 0,\ Pr\{X \geq a\} \leq \frac{E[X]}{a} \quad E[X] = \mu = \ln n \quad a = s \ln n$$

$$Pr\{X > s \ln n\} = \frac{\cancel{\ln n}}{s \cancel{\ln n}} = \frac{1}{s}$$

Chebyshev:

Per una variabile casuale X con valore atteso μ e varianza σ^2 finiti si ha:

$$\forall \epsilon > 0,\ Pr\{|X - \mu| \geq \epsilon\} \leq \frac{\sigma^{2*}}{\epsilon^2} \quad \epsilon = 4 \ln n$$

$$\sigma^2 = m \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{m}{n}$$

$$* \ \sigma^2 \leq \frac{\cancel{n} \ln n}{\cancel{n}} = \ln n$$

$$Pr\{X \geq \ln n + 4 \ln n\} \leq \frac{\cancel{\ln n}}{16 \ln^2 n} = \frac{1}{16 \ln n}$$

Chernoff

Con $\epsilon = 4$

$$\forall \epsilon > 0,\ Pr\{X \geq (1+\epsilon)\mu\} \leq \left(\frac{e^\epsilon}{(1+\epsilon)^{1+\epsilon}}\right)^\mu$$

$$Pr\{X \geq (1+4) \ln n\} \leq \left(\frac{e^4}{5^5}\right)^{\ln n} < \left(\frac{e^4}{e^8}\right)^{\ln n} = \frac{1}{n^4}$$

$$\left(\frac{e^4}{e^8}\right)^{\ln n} < \left(\frac{e^4}{5^5}\right)^{\ln n} < \left(\frac{e^4}{e^8}\right)^{\ln n}$$

Possiamo notare che la disuguaglianza di Chernoff ha una probabilità minore rispetto alle altre di variare in modo notevole dal valore atteso.