Ferrari Luca 54784543 Tre grafici a confronto

Metti nel caso in cui $m = n \ln n$ per cui il valore atteso di palline ricevute da ogni contenitore è $\mu = \ln n$. Riproduci e commenta le maggiorazioni delle disuguaglianze di Markov, Chebyshev e Chernoff rispetto alla probabilità che un contenitore riceva 5μ palline

Markov: $\forall a > 0, \Pr\{X \geq a\} \leq \frac{E[X]}{a}$

Chebyshev: $\forall \varepsilon > 0, \Pr\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

Chernoff: $\forall \varepsilon > 0, \Pr\{X \geq (1+\varepsilon)\mu\} \leq \left(\frac{e^{\varepsilon}}{(1+\varepsilon)^{1+\varepsilon}}\right)^{\mu}$

Markov

$\mu = \ln n \quad a = 5 \ln n$

$\Pr\{X > 5 \ln n\} = \frac{\ln n}{5 \ln n} = \frac{1}{5}$

Chebyshev

Calcolo varianza al quadrato $\sigma^2 = m\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{m}{n}$

$\sigma^2 = \frac{n \ln n}{n} = \ln n$

$a = \epsilon^2$ ~~xxxxx~~

$\Pr\{X \geq \ln n + 4 \ln n\} \leq \frac{\ln n}{16 \ln^2 n} = \frac{1}{16 \ln n}$

Chernoff con $\varepsilon=4$ la disuguaglianza diventa

$$Pr\{X \geq (1+4)\ln n\} < \left(\frac{e^4}{5^5}\right)^{\ln n} < \left(\frac{e^4}{e^8}\right)^{\ln n} = \frac{1}{n^4}$$

La disuguaglianza di Chernoff è molto più potente e mostra come la probabilità di grandi variazioni dal valore atteso decresce più velocemente