Università di Trieste

Laurea in ingegneria elettronica e informatica

Enrico Piccin - Corso di Analisi matematica II - Prof. Franco Obersnel

Anno Accademico 2022/2023 - 3 Ottobre 2022

Indice

3 Ottobre 2022

1 Introduzione

Considerando un foglio di carta, dividendolo in due metà esatte, si ottiene $\frac{1}{2}$ del profilo quadrato di partenza. Considerando una delle due metà, e suddividendola ancora in due, si ottiene $\frac{1}{4}$ del profilo quadrato di partenza. Ripetendo questo procedimento, si otterranno le seguenti frazioni del profilo quadrato originario: $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, ...$. Sommando tutte le frazioni di profilo quadrato, alla fine si otterrà il profilo quadrato di partenza, ossia la frazione 1. Ecco quindi che, contrariamente a quanto voleva sostenere **Parmenide**, **Zenone** scoprì che

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + ... = 1 \to \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1}$$

Ciò non risulta essere banale: una somma di **infinite quantità positive** produce una quantità finita. Quello che si è ottenuto è una **serie (numerica) geometrica di ragione** $\frac{1}{2}$.

2 Serie numerica

Di seguito si espone la definizione di **serie numerica**:

SERIE NUMERICA

Data una successione $(a_n)_n$ con valori nel campo complesso $a_n \in \mathbb{C}$. Si consideri una nuova successione $(s_n)_n$ definita **per ricorrenza** come segue

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \qquad \text{posto} \qquad s_0 = a_0$$

Ciò significa che

- $s_0 = a_0$
- $s_1 = a_0 + a_1$
- $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$
- e via di seguito...

La serie $a_0 + a_1 + a_2 + ...$ è la **coppia ordinata** delle due successioni, come mostrato di seguito

$$((a_n)_n, (s_n)_n)$$

ove la successione $(a_n)_n$ prende il nome **successioni dei termini generali**, mentre la successione $(s_n)_n$ si chiama successione delle **ridotte** o delle **somme parziali** della serie.

Esempio: Posto $a_1 = \frac{1}{2}$ e il termine generale $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, la ridotta sarà

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}$$

osservando bene di partire da $n = 1$ e non da 0.

2.1 Convergenza, divergenza e indeterminatezza di una serie

Data una serie, ossia data una coppia di successioni, è possibile ora andare a studiare il comportamento della successione delle ridotte.

2.1.1 Convergenza di una serie

Di seguito si espone la definizione di **convergenza di una serie**:

CONVERGENZA DI UNA SERIE

Se la successione delle ridotte di una serie è convergente, si dice che la serie è convergente e il limite della successione delle ridotte prende il nome di **somma della serie**.
In altre parole, se **esiste finito** il

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{C}$$

allora la serie si dice **convergente** e il limite s si dice **somma della serie** e si scrive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s$$

Attenzione: Molto spesso si utilizza la notazione sopra esposta per indicare sia la serie stessa, sia la sua somma, per cui può essere fuorviante. Lo si può capire dal contesto: una serie potrebbe non essere convergente, e quindi non avere una somma.

Esempio: Se si considera $a_n = 1, \forall n$, per cui

$$1 + 1 + 1 + ... = \sum_{n=0}^{n} 1$$

allora la somma parziale è $s_n = n + 1$, ovvero una successione divergente a $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$$

Ciò significa che la serie non converge, ma è **divergente**, per cui non ha nemmeno una somma.

Osservazione: Si osservi che la divergenza a $+\infty$ di una serie ha significato solamente quando i termini generali sono sul campo reale: se una serie ha termine generico nel campo complesso, non può essere divergente a $+\infty$, in quanto non esiste un limite infinito nel campo complesso (a meno che non si consideri il modulo).

2.1.2 Divergenza di una serie

Di seguito si espone la definizione di **divergenza di una serie**:

DIVERGENZA DI UNA SERIE

Se la successione delle ridotte di una serie (a termine generale reale) è divergente, si dice che la serie è divergente; in questo caso, la serie non presenta una somma.
In altre parole, se data $a_n \in \mathbb{R}, \forall n$, e posto

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty \text{ o } -\infty$$

la serie si dice **divergente**.

Esempio: Se $a_n = a \in \mathbb{R}$ **costante**, allora la serie con termine generale a_n

$$a_0 + a_1 + a_2 + ...$$

è necessariamente

- divergente a $+\infty$ se $a > 0$
- divergente a $-\infty$ se $a < 0$
- convergente, con somma 0, se $a = 0$

Attenzione: se $a \neq 0$, ma $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, si dice semplicemente che la serie **non converge** (non ha senso parlare di divergenza).

2.1.3 Indeterminatezza di una serie

Di seguito si espone la definizione di **serie indeterminata**:

SERIE INDETERMINATA

Una serie si dice **indeterminata** se non converge e non diverge.

Esempio 1: Per quello che si è visto, una serie a termine generale costante, complesso e non reale, è indeterminata.

Esempio 2: Un esempio di serie a termini reali, ma indeterminata, è la **serie di Grandi**, definita così:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$$

per cui $s_0 = (-1)^0 = 1$ e $s_1 = a_0 + a_1 = 1 + (-1)^1 = 0$. Pertanto si ha che

- $s_n = 1$ se n è pari
- $s_n = 0$ se n è dispari

Per cui si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} s_0 = ? \text{ non esiste}$$

E per dimostrare che non esiste, si può semplicemente dimostrare che due sotto-successioni della successione delle somme parziali convergono a limiti diversi (ossia la sotto-successioni degli indici pari e quella dei dispari); infatti:

- $\lim\limits_{k\to+\infty} s_{2k} = 1$
- $\lim\limits_{k\to+\infty} s_{2k+1} = 0$

per cui sono state ottenute due sotto-successioni che presentano limite differente: per il teorema dell'unicità del limite e il teorema del limite delle sotto-successioni di una successione, si conclude che la successione delle somme parziali è indeterminata.

Osservazione: La serie di Grandi è una serie che può essere usata per dimostrare l'esistenza di Dio, in quanto commutando fra di loro i differenti termini può essere fatta convergere a qualsiasi (o quasi) numero finito.
Se, infatti, si considerano le somme

- $(1-1)+(1-1)+(1-1)+... = 0$
- $1+(-1+1)+(-1+1)+... = 1$
- $(1+1)+(-1+1)+(-1+1) = 2$

si ottengono serie che convergono a qualunque valore (tranne uno). In generale, infatti, se una serie è indeterminata, si possono commutare gli addendi della stessa e ottenere la convergenza a qualunque numero.

2.2 Serie geometrica

Si è osservato che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

per cui è ovvio che partendo con $n = 0$, si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

Più in generale, si fornisce di seguito la definizione di **serie geometrica**:

SERIE GEOMETRICA

Si dice **serie geometrica** di ragione $z \in \mathbb{C}$ la serie del tipo

$$1 + z + z^2 + z^3 + ... \to \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

che, tuttavia, palesa un problema di fondo: se si sceglie $z = 0$, naturalmente si incorre nell'ambiguità

$$0^0 + 0^1 + ...$$

ma 0^0 è una scrittura che non ha significato. Tuttavia, in questo particolare caso, si considera $0^0 = 1$, in modo tale da essere coerenti con la scrittura $1 + z + z^2 + z^3 + ...$ impiegata in precedenza.

Osservazione: Data la serie seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

per cui la ridotta è

$$s_n = 1 + z + z^2 + ... + z^n$$

che può anche essere riscritto come

$$s_n = 1 + z + z^2 + ... + z^n = 1 + z \cdot \left(1 + z + ... + z^{n-1}\right)$$

dove $1 + z + ... + z^{n-1} = s_{n-1}$. Da cui si evince che, sommando e sottraendo per la medesima quantità z^n, si ottiene

$$s_n = 1 + z \cdot \left(\underbrace{1 + z + ... + z^{n-1} + z^n}_{s_n} - z^n \right)$$

che diviene, quindi:

$$s_n = 1 + z \cdot s_n - z^{n+1} \quad \to \quad s_n - z \cdot s_n = 1 - z^{n+1} \quad \to \quad s_n \cdot (1 - z) = 1 - z^{n+1} \quad \to \quad s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

posto $z \neq 1$ (ma il caso $z = 1$ è facilmente risolubile, per quanto osservato nel caso di una serie a termine generale costante).
Di seguito si espone, quindi, il comportamento della serie geometrica a seconda della sua ragione z:

COMPORTAMENTO DELLA SERIE GEOMETRICA

Per quanto osservato in precedenza, si ha che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

posto $z \neq 1$, che diviene

- $\dfrac{1}{1-z}$ se $|z| < 1$.
- non converge se $|z| > 1$, tuttavia, si può dire che
  - se $z \in \mathbb{R}$ e $z \geq 1$, diverge a $+\infty$
  - se $z \in \mathbb{C}$ e $|z| \geq 1$ (ovvero può essere anche un numero negativo), posto $z \notin]1, +\infty[$ (ossia diverso dal caso precedente), nel caso di n pari si sommano quantità positive, nel caso di n dispari si sommano quantità negative, per cui la serie oscilla e quindi è indeterminata.

Osservazione: Si osservi che la serie geometrica è l'unica per cui si riesce a calcolare la somma, in quanto è l'unica di cui è possibile esprimere la ridotta in modo generale.
Altrimenti, gestire le ridotte diviene molto complesso.

Esempio: Si consideri la seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \cos^n(1)$$

che è una serie geometrica di ragione $\cos(1)$, ove $|\cos(1)| < 1$, per cui converge. La somma di tale serie, quindi, è facilmente determinabile secondo quanto visto in precedenza, tenendo conto che n parte da 2, per cui bisogna sottrarre $\cos^0(1) = 1$ e $\cos^1(1) = \cos(1)$. Da ciò si evince che la serie converge a

$$\frac{1}{1-\cos(1)} - 1 - \cos(1) = \frac{1 - 1 + \cos(1) - \cos(1) + \cos^2(1)}{1-\cos(1)} = \frac{\cos^2(1)}{1-\cos(1)}$$

Osservazione: La somma della serie geometrica di ragione $z \in \mathbb{C}$ è indeterminata se $|z| > 1$, per quanto già visto.
Inoltre si ha che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2i+x}{4}\right)^n$$

è convergente se

$$\left|\frac{2i+x}{4}\right| < 1$$

ma ricordando come si calcola il modulo di un numero complesso si ottiene

$$|2i + x| = \sqrt{4+x^2}$$

e quindi

$$\sqrt{4+x^2} < 4 \quad\to\quad 4 + x^2 < 16 \quad\to\quad x^2 < 12 \quad\to\quad |x| < \sqrt{12} \quad\to\quad |x| < 2\sqrt{3}$$

E poi, ovviamente, la serie di Grandi è il tipico esempio di serie indeterminata, per cui la sua somma non può essere definita.