

Università di Trieste

Laurea in ingegneria elettronica e informatica

Enrico Piccin - Corso di Analisi matematica II - Prof. Franco Obersnel

Anno Accademico 2022/2023 - 3 Ottobre 2022

Indice

1	Introduzione	3
2	Serie numerica	3
2.1	Convergenza, divergenza e indeterminatezza di una serie	3
2.1.1	Convergenza di una serie	4
2.1.2	Divergenza di una serie	4
2.1.3	Indeterminatezza di una serie	5
2.2	Serie geometrica	6
2.3	Teorema del confronto per le serie	8
2.4	Serie armonica	10
2.4.1	Serie armonica generalizzata	12
2.5	Serie a termini (reali) positivi	14
2.6	Teorema dell'Aut-Aut per le serie a termini (reali) positivi	15
2.7	Criterio dell'ordine di infinitesimo per le serie a termini positivi	15
2.8	Criterio del rapporto	19
2.9	Criterio della radice n -esima	20
2.10	Serie a termini qualsiasi	22
2.10.1	Serie assolutamente convergente	22
2.10.2	Serie semplicemente convergente	24
2.11	Limiti di successioni in \mathbb{C}	24
2.11.1	Convergenza di Re e Im	24
2.12	Serie semplicemente convergenti	27
2.12.1	Criterio di Leibniz per le serie a termini alterni	27
2.13	Successione di Cauchy	32
2.13.1	Teorema di completezza dello spazio \mathbb{C} (o \mathbb{R})	32
2.13.2	Criterio di Cauchy per la convergenza di una serie	33
2.13.3	Applicazioni del criterio di Cauchy	33
3	Successioni e serie di funzioni	35
3.1	Successioni di funzioni	35
3.1.1	Limite puntuale di una successione di funzioni	35
3.1.2	Limite uniforme di una successione di funzioni	37
3.2	Teorema di inversione di due limiti	39
3.3	Teorema di integrabilità	41
3.4	Teorema sulla derivata del limite	43
3.5	Serie di funzioni	45
3.5.1	Criterio di convergenza uniforme di una serie di funzioni - M-test di Weierstrass	45
3.6	Teorema di proprietà dell'insieme di convergenza delle serie	49
3.7	Raggio di convergenza	50
3.7.1	Proprietà caratteristiche del raggio di convergenza	50
3.8	Proprietà delle serie di potenze	51
3.9	Derivabilità	52

3.10	Primo criterio di sviluppabilità	55
3.10.1	Serie binomiale	57
3.11	Funzioni in \mathbb{C}	58
4	Topologia di \mathbb{R}^n	60
4.1	Prodotto scalare	60
4.1.1	Norma di un vettore	61
4.1.2	Disuguaglianza di Bumcokowski-Cauchy-Schwarz	61
4.2	Distanza (metrica)	63
4.3	Spazio metrico	64
4.4	Vettori ortogonali	64
4.5	Palla-aperta	64
4.6	Intorno	65
4.7	Proprietà di un intorno	65
4.8	Punto interno ad un insieme	66
4.9	Punto isolato	66
4.10	Corrispondenza tra palla aperta e insieme aperto	66
4.11	Caratterizzazione di un insieme chiuso	67
4.12	Punto di frontiera	67
4.13	Frontiera di un insieme	68
4.14	Insieme denso	68
4.15	Insieme limitato	68
4.16	Diametro di un insieme	68
4.17	Proprietà di insiemi aperti e chiusi	69
4.18	Geometria di \mathbb{R}^n	70
4.18.1	Retta nel piano \mathbb{R}^2	70
4.19	Curva piana	71
4.19.1	Sostegno di una curva	72
4.20	Superficie parametrica in \mathbb{R}^3	72
4.20.1	Retta in \mathbb{R}^2 in forma parametrica	73
4.20.2	Piano in \mathbb{R}^3 in forma parametrica	74
4.20.3	Sfera	74
4.21	Rappresentazione grafica in \mathbb{R}^n	76
4.22	Insieme di livello	77
5	Funzioni tra spazi metrici	78
5.1	Limite di una funzione	78
5.2	Continuità della norma	78
5.3	Limite delle componenti	79
5.4	Successione in \mathbb{R}^n	79
5.5	Caratterizzazione del limite di una funzione usando le successioni	80
5.6	Teorema sui limiti e sulle funzioni continue	83
5.6.1	Teorema di unicità del limite	83
5.6.2	Teorema sul limite delle restrizioni	83
5.6.3	Teorema sul limite della funzione composta	84
5.6.4	Teorema sul limite della combinazione lineare di funzioni	84
5.7	Trasformazioni coordinate	86
5.8	Intervallo e insieme compatto	87
5.8.1	Insieme compatto	87

3 Ottobre 2022

1 Introduzione

Considerando un foglio di carta, dividendolo in due metà esatte, si ottiene $\frac{1}{2}$ del profilo quadrato di partenza. Considerando una delle due metà, e suddividendola ancora in due, si ottiene $\frac{1}{4}$ del profilo quadrato di partenza. Ripetendo questo procedimento, si otterranno le seguenti frazioni del profilo quadrato originario: $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$. Sommando tutte le frazioni di profilo quadrato, alla fine si otterrà il profilo quadrato di partenza, ossia la frazione 1. Ecco quindi che, contrariamente a quanto voleva sostenere **Parmenide**, **Zenone** scoprì che

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

Ciò non risulta essere banale: una somma di **infinite quantità positive** produce una quantità finita. Quello che si è ottenuto è una **serie (numerica) geometrica di ragione $\frac{1}{2}$** .

2 Serie numerica

Di seguito si espone la definizione di **serie numerica**:

SERIE NUMERICA

Data una successione $(a_n)_n$ con valori nel campo complesso $a_n \in \mathbb{C}$. Si consideri una nuova successione $(s_n)_n$ definita **per ricorrenza** come segue

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \quad \text{posto} \quad s_0 = a_0$$

Ciò significa che

- $s_0 = a_0$
- $s_1 = a_0 + a_1$
- $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$
- e via di seguito...

La serie $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ è la **coppia ordinata** delle due successioni, come mostrato di seguito

$$((a_n)_n, (s_n)_n)$$

ove la successione $(a_n)_n$ prende il nome **successioni dei termini generali**, mentre la successione $(s_n)_n$ si chiama successione delle **ridotte** o delle **somme parziali** della serie.

Esempio: Posto $a_1 = \frac{1}{2}$ e il termine generale $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, la ridotta sarà

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

osservando bene di partire da $n = 1$ e non da 0.

2.1 Convergenza, divergenza e indeterminatezza di una serie

Data una serie, ossia data una coppia di successioni, è possibile ora andare a studiare il comportamento della successione delle ridotte.

2.1.1 Convergenza di una serie

Di seguito si espone la definizione di **convergenza di una serie**:

CONVERGENZA DI UNA SERIE

Se la successione delle ridotte di una serie è convergente, si dice che la serie è convergente e il limite della successione delle ridotte prende il nome di **somma della serie**.

In altre parole, se **esiste finito** il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s \in \mathbb{C}$$

allora la serie si dice **convergente** e il limite s si dice **somma della serie** e si scrive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s$$

Attenzione: Molto spesso si utilizza la notazione sopra esposta per indicare sia la serie stessa, sia la sua somma, per cui può essere fuorviante. Lo si può capire dal contesto: una serie potrebbe non essere convergente, e quindi non avere una somma.

Esempio: Se si considera $a_n = 1, \forall n$, per cui

$$1 + 1 + 1 + \dots = \sum_{n=0}^n 1$$

allora la somma parziale è $s_n = n + 1$, ovvero una successione divergente a $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$$

Ciò significa che la serie non converge, ma è **divergente**, per cui non ha nemmeno una somma.

Osservazione: Si osservi che la divergenza a $+\infty$ di una serie ha significato solamente quando i termini generali sono sul campo reale: se una serie ha termine generico nel campo complesso, non può essere divergente a $+\infty$, in quanto non esiste un limite infinito nel campo complesso (a meno che non si consideri il modulo).

2.1.2 Divergenza di una serie

Di seguito si espone la definizione di **divergenza di una serie**:

DIVERGENZA DI UNA SERIE

Se la successione delle ridotte di una serie (a termine generale reale) è divergente, si dice che la serie è divergente; in questo caso, la serie non presenta una somma.

In altre parole, se data $a_n \in \mathbb{R}, \forall n$, e posto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty \text{ o } -\infty$$

la serie si dice **divergente**.

Esempio: Se $a_n = a \in \mathbb{R}$ **costante**, allora la serie con termine generale a_n

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

è necessariamente

- divergente a $+\infty$ se $a > 0$
- divergente a $-\infty$ se $a < 0$
- convergente, con somma 0, se $a = 0$

Attenzione: se $a \neq 0$, ma $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, si dice semplicemente che la serie **non converge** (non ha senso parlare di divergenza).

2.1.3 Indeterminatezza di una serie

Di seguito si espone la definizione di **serie indeterminata**:

SERIE INDETERMINATA

Una serie si dice **indeterminata** se non converge e non diverge.

Esempio 1: Per quello che si è visto, una serie a termine generale costante, complesso e non reale, è indeterminata.

Esempio 2: Un esempio di serie a termini reali, ma indeterminata, è la **serie di Grandi**, definita così:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

per cui $s_0 = (-1)^0 = 1$ e $s_1 = a_0 + a_1 = 1 + (-1)^1 = 0$. Pertanto si ha che

- $s_n = 1$ se n è pari
- $s_n = 0$ se n è dispari

Per cui si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = ? \text{ non esiste}$$

E per dimostrare che non esiste, si può semplicemente dimostrare che due sotto-successioni della successione delle somme parziali convergono a limiti diversi (ossia la sotto-successioni degli indici pari e quella dei dispari); infatti:

- $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_{2k} = 1$
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_{2k+1} = 0$

per cui sono state ottenute due sotto-successioni che presentano limite differente: per il teorema dell'unicità del limite e il teorema del limite delle sotto-successioni di una successione, si conclude che la successione delle somme parziali è indeterminata.

Osservazione: La serie di Grandi è una serie che può essere usata per dimostrare l'esistenza di Dio, in quanto commutando fra di loro i differenti termini può essere fatta convergere a qualsiasi (o quasi) numero finito.

Se, infatti, si considerano le somme

- $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$
- $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1$
- $(1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) = 2$

si ottengono serie che convergono a qualunque valore (tranne uno). In generale, infatti, se una serie è indeterminata, si possono commutare gli addendi della stessa e ottenere la convergenza a qualunque numero.

2.2 Serie geometrica

Si è osservato che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

per cui è ovvio che partendo con $n = 0$, si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

Più in generale, si fornisce di seguito la definizione di **serie geometrica**:

SERIE GEOMETRICA

Si dice **serie geometrica** di ragione $z \in \mathbb{C}$ la serie del tipo

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

che, tuttavia, palesa un problema di fondo: se si sceglie $z = 0$, naturalmente si incorre nell'ambiguità

$$0^0 + 0^1 + \dots$$

ma 0^0 è una scrittura che non ha significato. Tuttavia, in questo particolare caso, si considera $0^0 = 1$, in modo tale da essere coerenti con la scrittura $1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ impiegata in precedenza.

Osservazione: Data la serie seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

per cui la ridotta è

$$s_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$$

che può anche essere riscritto come

$$s_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = 1 + z \cdot (1 + z + \dots + z^{n-1})$$

dove $1 + z + \dots + z^{n-1} = s_{n-1}$. Da cui si evince che, sommando e sottraendo per la medesima quantità z^n , si ottiene

$$s_n = 1 + z \cdot \left(\underbrace{1 + z + \dots + z^{n-1} + z^n}_{s_n} - z^n \right)$$

che diviene, quindi:

$$s_n = 1 + z \cdot s_n - z^{n+1} \quad \rightarrow \quad s_n - z \cdot s_n = 1 - z^{n+1} \quad \rightarrow \quad s_n \cdot (1 - z) = 1 - z^{n+1} \quad \rightarrow \quad s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

posto $z \neq 1$ (ma il caso $z = 1$ è facilmente risolvibile, per quanto osservato nel caso di una serie a termine generale costante).

Di seguito si espone, quindi, il comportamento della serie geometrica a seconda della sua ragione z :

COMPORTAMENTO DELLA SERIE GEOMETRICA

Per quanto osservato in precedenza, si ha che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

posto $z \neq 1$, che diviene

- $\frac{1}{1-z}$ se $|z| < 1$.
- non converge se $|z| > 1$, tuttavia, si può dire che
 - se $z \in \mathbb{R}$ e $z \geq 1$, diverge a $+\infty$
 - se $z \in \mathbb{C}$ e $|z| \geq 1$ (ovvero può essere anche un numero negativo), posto $z \notin]1, +\infty[$ (ossia diverso dal caso precedente), nel caso di n pari si sommano quantità positive, nel caso di n dispari si sommano quantità negative, per cui la serie oscilla e quindi è indeterminata.

Osservazione: Si osservi che la serie geometrica è l'unica per cui si riesce a calcolare la somma, in quanto è l'unica di cui è possibile esprimere la ridotta in modo generale. Altrimenti, gestire le ridotte diviene molto complesso.

Esempio: Si consideri la seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \cos^n(1)$$

che è una serie geometrica di ragione $\cos(1)$, ove $|\cos(1)| < 1$, per cui converge. La somma di tale serie, quindi, è facilmente determinabile secondo quanto visto in precedenza, tenendo conto che n parte da 2, per cui bisogna sottrarre $\cos^0(1) = 1$ e $\cos^1(1) = \cos(1)$. Da ciò si evince che la serie converge a

$$\frac{1}{1 - \cos(1)} - 1 - \cos(1) = \frac{1 - 1 + \cos(1) - \cos(1) + \cos^2(1)}{1 - \cos(1)} = \frac{\cos^2(1)}{1 - \cos(1)}$$

Osservazione: La somma della serie geometrica di ragione $z \in \mathbb{C}$ è indeterminata se $|z| > 1$, per quanto già visto.

Inoltre si ha che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2i+x}{4} \right)^n$$

è convergente se

$$\left| \frac{2i+x}{4} \right| < 1$$

ma ricordando come si calcola il modulo di un numero complesso si ottiene

$$|2i+x| = \sqrt{4+x^2}$$

e quindi

$$\sqrt{4+x^2} < 4 \quad \rightarrow \quad 4+x^2 < 16 \quad \rightarrow \quad x^2 < 12 \quad \rightarrow \quad |x| < \sqrt{12} \quad \rightarrow \quad |x| < 2\sqrt{3}$$

E poi, ovviamente, la serie di Grandi è il tipico esempio di serie indeterminata, per cui la sua somma non può essere definita.

5 Ottobre 2022

Una serie è costituita da 2 successioni: la successione dei termini generali e la successione delle ridotte o somme parziali: quando si opera con le serie, risulta fondamentale distinguere le due successioni.

Una tra le serie più note è la serie geometrica, di ragione $z \in \mathbb{C}$, la quale converge se il modulo della ragione è minore di 1. Non converge in caso contrario, ma in particolare

- se la ragione z è un numero reale, $z \in \mathbb{R}$, e $z \geq 1$, allora la serie diverge a $+\infty$;
- se la ragione z è un numero complesso, con $|z| \geq 1$ e $z \notin]1, +\infty[$, allora la serie è indeterminata.

In generale, non si può parlare di divergenza a $+\infty$ o $-\infty$ in campo complesso, in quanto in esso è **assente la relazione d'ordine** e quindi non esiste un limite infinito.

Esempio: Si consideri l'esempio seguente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{2^n}$$

Tale serie presenta come termine generale

$$a_n = \frac{\cos(n)}{2^n}$$

ma è vero che $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, per cui

$$-\frac{1}{2^n} \leq a_n \leq \frac{1}{2^n}$$

Per dimostrare che anche la serie in esame converge, è sufficiente considerare s_n^- e s_n^+ , rispettivamente la ridotta n -esima della serie geometrica di ragione $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, come segue

$$s_n^- = -1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad s_n^+ = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

per cui

$$s_n^- \leq s_n \leq s_n^+$$

e per il **teorema del confronto esiste finito** il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \in \mathbb{R}$$

e quindi la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{2^n}$$

converge.

2.3 Teorema del confronto per le serie

Di seguito si espone il fondamentale **teorema del confronto per le serie**:

Teorema 2.1 Teorema del confronto per le serie

Siano $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tali che $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n$ (anche se sarebbe sufficiente richiedere che ciò sia vero **definitivamente**, ossia $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che la disuguaglianza di cui sopra è valida $\forall n \geq n_0$). Siano convergenti le serie

$$\sum a_n \quad \text{e} \quad \sum c_n$$

allora è convergente anche la serie

$$\sum b_n$$

ed è tale la stima della somma della serie:

$$\sum a_n \leq \sum b_n \leq c_n$$

che è una stima valida $\forall n$, oppure $\forall n \geq n_0$ (a seconda che sia stato richiesto $\forall n$, oppure definitivamente).

Osservazione: Si osservi il caso particolare per cui $a_n = 0, \forall n$ (ossia il caso in cui la serie con termine generale b_n è a termini positivi, cioè una serie per cui tutti i termini della successione dei termini generali sono positivi), allora è sufficiente che la serie con termine generale c_n converga per concludere la convergenza.

Similmente, se $c_n = 0, \forall n$ (ossia la serie con termine generale b_n è a termini negativi, vale a dire una serie per cui tutti i termini della successione dei termini generali sono negativi), è sufficiente che la serie con termine generale a_n converga per concludere la convergenza.

In questi casi, infatti, è sufficiente considerare un limitazione superiore (o inferiore, rispettivamente) per concludere la convergenza.

Osservazione: È facile capire che **il carattere di una serie non dipende da quello che accade su un numero finito di termini**, in quanto

$$\sum_{n=k}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

differiscono solamente per k termini, ove k è una **costante**.

Esempio: Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} e^{100-n^2}$$

Si può facilmente capire che

$$e^{100-n^2} \leq 1 \quad \text{se} \quad n \geq 10$$

per cui

$$\frac{1}{2^n} e^{100-n^2} \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{se} \quad n \geq 10$$

Pertanto, essendo essa a termini positivi e maggiorata definitivamente, la serie di partenza converge per il teorema del confronto. Tuttavia, la stima seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} e^{100-n^2} \leq 2$$

ove 2 è la somma della serie geometrica, è vera solamente definitivamente, per $n \geq 10$. Per avere una stima della somma più accurata, naturalmente, è possibile considerare quello che accade per i primi 9 termini, per cui:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} e^{100-n^2} < a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + 2$$

dove $a_0 + a_1 + \cdots + a_9$ sono i primi 9 termini della serie stessa. Ma per migliorare la stima è possibile anche considerare i primi 9 termini della serie geometrica, da cui

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} e^{100-n^2} < a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + \left(2 - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{2^9}\right)$$

Esempio: Si consideri la serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

Essa naturalmente diverge, in quanto il limite per $n \rightarrow +\infty$ del suo termine generale è

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

ossia, per n molto grande, nella serie si somma sempre 1, per cui diverge. Infatti, affinché una serie converga, il suo termine generale deve essere infinitesimo.

Teorema 2.2 *Condizione necessaria per la convergenza*

Sia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

una serie **convergente** (in generale a termini complessi), allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ossia la successione dei termini generali è **infinitesima**.

DIMOSTRAZIONE: Si consideri la ridotta di indice $n + 1$, ossia

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \quad \text{tale per cui} \quad a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

Siccome la serie è convergente per ipotesi (s_{n+1} e s_n convergono allo stesso limite), per la linearità del limite, il limite della differenza è uguale alla differenza dei limiti, per cui:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = s_{n+1} - s_n = 0$$

Osservazione: Si osservi che la condizione per la convergenza esposta in precedenza è necessaria, ma non sufficiente. Infatti, esistono delle serie

$$\sum a_n$$

non convergenti, dove il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

per questo si parla di condizione necessaria, e non sufficiente. Infatti è importante definire con quale velocità la successione dei termini generali vada a 0: se è troppo lenta, nonostante sia infinitesima, la serie associata divergerà.

2.4 Serie armonica

Si consideri la serie seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che prende il nome di **serie armonica**. Per studiarne il comportamento, è sufficiente capire che **ogni serie può essere considerata come un integrale generalizzato**. Infatti, per definizione di integrale generalizzato di una funzione definita su una semiretta reale localmente integrabile:

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

allora se si considera la serie $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, si definisce una funzione f dipendente dalla serie stessa:

$$f : [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$$

nel modo seguente: essendo una successione una funzione (definita sui numeri naturali), la funzione f deve interpolare i valori della successione dei termini generali, assumendo il valore costante a_n quando $x \in [n, n+1[$, come nel seguito:

$$f(x) = a_n \quad \text{se} \quad x \in [n, n+1[, \quad \forall n \geq 1$$

ottenendo una funzione che rappresenta la successione degli a_n sotto forma di funzione.

Se f è la successione degli a_n , la serie con termine generale a_n non è altro che l'integrale generalizzato di tale funzione. Infatti, si ha che

$$\int_n^{n+1} f(x) dx = a_n \cdot (n+1 - n) = a_n$$

per cui è ovvio che

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \int_1^{n+1} f(x) dx$$

Se la funzione f è integrabile (ossia esiste il limite dell'integrale di cui sopra), allora

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx$$

e per quanto appena osservato,

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \int_1^{n+1} f(x) dx \quad \text{allora} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} f(x) dx$$

per cui, per il teorema del limite delle successioni, ogni successione in cui n tende a $+\infty$, avrà lo stesso limite della funzione f , ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} f(x) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

Pertanto, se la funzione f così definita è integrabile e l'integrale ha un valore finito, allora la serie è convergente e la somma della serie è il valore di tale integrale.

Osservazione: Si osservi che se la serie converge, per cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} f(x) dx = s$$

è anche vero che f è integrabile, ovvero

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = s$$

Ciò è vero in quanto la serie converge, e per la condizione necessaria vista in precedenza,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Pertanto, studiando l'integrale

$$\int_1^b f(x) dx$$

presa la parte intera di b , ossia $[b] = n$, essendo $b < n+1$ (in quanto la sua parte intera è n), si evince che

$$\int_1^b f(x) dx = \int_1^n f(x) dx + \int_n^b f(x) dx$$

Dovendo studiare il limite per $b \rightarrow +\infty$ di tale integrale, è molto utile scomporlo in questo modo. Così facendo, siccome la serie converge, si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx = s$$

mentre

$$\left| \int_n^b f(x) dx \right| = |a_n \cdot (b - n)| \leq |a_n|$$

in quanto $b < n + 1$, per cui $b - n < 1$, essendo $[b] = n$. Ma siccome la serie converge, allora il limite del termine generale è 0, quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^b f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

per cui, per la linearità del limite, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^b f(x) dx = s + 0 = s$$

come esposto da teorema seguente:

Teorema 2.3 Sia $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ una serie e sia f la funzione associata definita come

$$f(x) = a_n \quad \text{se} \quad x \in [n, n+1[, \quad \forall n \geq 1$$

allora f è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $[1, +\infty[$ **se e solo se** la serie converge. In questo caso si ha che la somma della serie è uguale al valore dell'integrale generalizzato, per cui

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

Osservazione: Tale risultato è fondamentale per studiare il carattere della serie armonica. Infatti, se si considera la funzione

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

essa non è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $[1, +\infty[$. Allora, presa $f(x)$ la funzione definita a tratti rispetto alla serie armonica, è facile capire che

$$g(x) \leq f(x), \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

Dal momento che $g(x)$ non è integrabile, non lo è nemmeno la f (per il teorema del confronto degli integrali generalizzati).

Ma siccome, per il teorema precedentemente esposto, è noto che una serie converge se e solo se la funzione f ad essa associata converge, si capisce immediatamente che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

non converge. Essendo una serie a termini positivi, per l'aut-aut si vedrà immediatamente che, non convergendo, dovrà necessariamente essere divergente a $+\infty$.

2.4.1 Serie armonica generalizzata

È noto che la serie armonica non converge. Non sorprende, però, sapere che tale serie è divergente a $+\infty$, ovvero

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

come conseguenza diretta dell'aut-aut. Pertanto, se si considera

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

è evidente capire che

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1$$

per cui, per il teorema del confronto, diverge a $+\infty$. Ciò risulta vero per ogni

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1 \quad \text{se } 0 < \alpha \leq 1$$

Nel caso $\alpha > 1$, invece, è possibile studiare l'integrale generalizzato associato, da cui:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{1}{-\alpha+1} \cdot x^{-\alpha+1} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1}$$

Tuttavia, ciò non risulta essere sufficiente per dimostrare che la serie converge. Infatti, in questo caso, si è studiato l'integrale generalizzato di una funzione $g(x)$, ben diversa dalla funzione f definita a tratti in precedenza.

Se ora si impiegasse la funzione f definita in precedenza (da n a $n+1$), siccome essa sarà inevitabilmente maggiore della funzione g (di cui è nota l'integrabilità), ovvero $f(x) \geq g(x)$, non è possibile stabilire se essa sia integrabile o meno tramite il criterio del confronto per l'integrale generalizzato. Per tale ragione si definisce

$$h(x) = a_n \quad \text{se } x \in]n-1, n]$$

tale per cui $h(x) \leq g(x)$, $\forall n \geq 1$. Allora è noto che

$$\int_{n-1}^n h(x) dx = a_n$$

Da ciò segue che

$$\int_1^{+\infty} h(x) dx = a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n$$

che parte da $n = 2$, per come è stata definita $h(x)$. Pertanto, si ha che

$$\int_1^{+\infty} h(x) dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1}$$

e quindi, per il teorema del confronto dell'integrale generalizzato, la funzione h è integrabile. Inoltre, per il teorema precedentemente esposto, siccome la funzione h associata alla serie è integrabile, la serie armonica generalizzata converge; non solo, la somma della serie è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} + 1$$

COMPORTAMENTO DELLA SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

La serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

con $\alpha > 0$ è

- divergente a $+\infty$ se $\alpha \in]0, 1]$
- convergente se $\alpha > 1$ con somma

$$s \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

dal momento che l'integrale

$$\int_1^{+\infty} h(x) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{in particolare} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \geq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

e siccome parte da $n = 2$, è necessario aggiungere 1, da cui la disuguaglianza esposta.

Esercizio 1: Si consideri la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log(n)}$$

che, ovviamente, diverge in quanto

$$\frac{1}{\log(n)} \geq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq e$$

e siccome $\frac{1}{n}$ diverge, per il teorema del confronto, diverge anche $\frac{1}{\log(n)}$.

Esercizio 2: Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (\log(n))^\alpha}$$

Per capire se essa diverga o meno, si considera l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (\log(n))^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{n \cdot (\log(n))^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-\alpha + 1} \log^{-\alpha+1}(x) \right]_1^b$$

in cui

- se $\alpha > 1$, allora la funzione non è integrabile in senso generalizzato;
- se $\alpha = 1$, l'integrale è nullo e la funzione è integrabile in senso generalizzato.

Esercizio 3: Si consideri la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\arctan(n^2)}{n \cdot \sqrt{n}}$$

È ovvio che il numeratore è limitato, in quanto

$$\arctan(n^2) \leq \frac{\pi}{2}, \quad \forall n$$

e quindi si evince che

$$\left| \frac{\arctan(n^2)}{n \cdot \sqrt{n}} \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}}$$

ove

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}}$$

è una serie armonica generalizzata di ragione $\frac{3}{2} > 1$ che converge. Per il criterio del confronto per le serie, anche la serie di partenza converge.

2.5 Serie a termini (reali) positivi

Si consideri una serie a termini (reali) positivi, tale che $a_n \geq 0, \forall n$ (anche se sarebbe sufficiente **definitivamente**, ossia da un certo n in poi).

Allora, per il **teorema dell'Aut-Aut**, tale serie o converge, o diverge, ma non può essere indeterminata.

Ciò spiega perché la serie armonica diverga a $+\infty$, in quanto si è dimostrato che non converge ed è una serie a termini (reali) positivi; naturalmente, il teorema dell'Aut-Aut si aggiunge al teorema del confronto.

Un altro importante criterio è l'ordine di infinitesimo che, tuttavia, non risulta efficace quando si considerano serie il cui termine generale presenta un ordine infrareale, ossia maggiore di α , ma più piccolo di $\alpha + \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$.

7 Ottobre 2022

Dopo aver analizzato la condizione necessaria per la convergenza, è stato anche considerato il fatto che una serie può essere sempre considerata come un integrale generalizzato. Un esempio fondamentale di serie che può essere considerata come termine di confronto è anche la serie armonica. Di seguito, inoltre, si espongono alcuni teoremi fondamentali per decretare la convergenza/divergenza di una serie, specialmente se le serie sono a **termini (reali) positivi**.

2.6 Teorema dell'Aut-Aut per le serie a termini (reali) positivi

Si supponga che la serie

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

abbia termini positivi ($a_n > 0$) o al più non negativi ($a_n \geq 0$), questo, in generale, $\forall n$, ma è sufficiente richiedere che valga definitivamente. Allora essa converge o diverge; in altre parole, una serie a termini non negativi non può essere indeterminata.

DIMOSTRAZIONE: Supposto $a_n \geq 0, \forall n$ (anche se sarebbe sufficiente richiederlo definitivamente), la successione delle ridotte è **monotona crescente (anche in senso debole)**, ovvero sia

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

Per il **teorema di esistenza del limite delle successioni monotone**, la successione delle ridotte ammette limite, ed esso è

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sup \{s_n : n \in \mathbb{N}^+\}$$

Pertanto

- se la successione delle ridotte $(s_n)_n$ è superiormente limitata, ovvero $\sup \{s_n\} \in \mathbb{R}$, la serie è ovviamente convergente.
- se la successione delle ridotte $(s_n)_n$ è superiormente illimitata, per cui $\sup \{s_n\} = +\infty$, la serie diverge a $+\infty$.

In ogni caso, però, **la serie non può essere indeterminata**.

Osservazione 1: Naturalmente la stessa cosa vale anche per successioni a termini negativi. L'importante è che sia verificata la condizione $a_n \geq 0$ oppure $a_n \leq 0$ definitivamente.

Osservazione 2: Il criterio dell'aut-aut è molto potente, in quanto, data una serie a termini positivi, come la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

dimostrato che essa non converge, è immediato evincere che essa diverge per l'aut-aut.

2.7 Criterio dell'ordine di infinitesimo per le serie a termini positivi

Il teorema dell'Aut-Aut permette di dimostrare anche un altro importante criterio, il **criterio dell'ordine di infinitesimo per le serie a termini positivi**, che permette di desumere il carattere di una serie in modo molto veloce:

Teorema 2.4 *Criterio dell'ordine di infinitesimo per le serie a termini positivi*

Sia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

una serie a termini positivi ($a_n \geq 0, \forall n$) con termine generale infinitesimo, ovvero sia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

allora

- se esiste $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$ tale che **ord** $a_n \geq \alpha$, la serie converge;
- se **ord** $a_n \leq 1$, la serie diverge.

DIMOSTRAZIONE 1: Supposto che il termine generale a_n abbia come ordine di infinitesimo α , con $\alpha > 1$, ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n \cdot n^\alpha| = l \quad \text{posto} \quad l \in \mathbb{R} - \{0\}$$

allora, per definizione stessa di limite,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n > n_\epsilon \quad \text{si ha che} \quad |a_n \cdot n^\alpha - l| < \epsilon$$

Scritta in modo esplicito la disuguaglianza, è facile capire

$$l - \epsilon < a_n \cdot n^\alpha < l + \epsilon$$

Per comodità, si sceglie $\epsilon = 1$, da cui, per la definizione di limite, si perviene a

$$a_n \cdot n^\alpha < l + 1$$

Ciò consente di affermare che $\forall n > n_\epsilon$ si ha che

$$0 \leq a_n \leq (l + 1) \cdot \frac{1}{n^\alpha}$$

In questo modo si sta confrontando il termine generale a_n con il termine generale della serie armonica generalizzata. Per il criterio del confronto, siccome definitivamente (ossia $\forall n > n_\epsilon$)

$$a_n \leq (l + 1) \cdot \frac{1}{n^\alpha}$$

e la serie armonica generalizzata converge, in quanto la ragione $\alpha > 1$. Allora, per il criterio del confronto, la serie con termine generale a_n

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

converge.

DIMOSTRAZIONE 2: Si supponga, ora che **ord** $a_n \leq 1$, si dimostri che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

diverge. Il fatto che **ord** $a_n \leq 1$, significa che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n \cdot n| = l$$

per cui se $l \in \mathbb{R} - \{0\}$ significa che **ord** $a_n = 1$, se $l = +\infty$, allora **ord** $a_n < 1$. Nell'ipotesi in cui $l \in \mathbb{R} - \{0\}$, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot a_n = l \quad \text{con} \quad l \in \mathbb{R} - \{0\}$$

per la definizione stessa di limite, si può affermare che

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \text{si ha che} \quad |a_n \cdot n - l| < \epsilon$$

Scelto, per comodità, $\epsilon = \frac{l}{2}$, si ha in particolare che, definitivamente

$$l - \frac{l}{2} < a_n \cdot n < l + \frac{l}{2}$$

Ma quindi si è ottenuto che definitivamente (ossia $\forall n > n_\epsilon$)

$$\frac{l}{2} \cdot \frac{1}{n} < a_n$$

e la serie armonica diverge. Allora, per il criterio del confronto, la serie con termine generale a_n

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

diverge.

Osservazione: In particolare, se $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$, e si ha

- $\text{ord } a_n \geq \alpha$, la serie converge;
- $\text{ord } a_n \leq 1$, la serie diverge.

Tuttavia, è fondamentale capire che dire che $\text{ord } a_n \geq \alpha$ è differente dal dire che $\text{ord } a_n > 1$. Infatti, quest'ultima informazione non è sufficiente ad affermare la convergenza, in quanto è possibile considerare anche ordini infrareali che non sono inclusi nelle casistiche di tale teorema. Infatti, per quanto riguarda la serie

$$\sum \frac{1}{n \log(n)}$$

presenta un termine generale di $\text{ord } a_n > 1$; tuttavia, è anche vero che $a_n < 1 + \epsilon, \forall \epsilon > 0$: pertanto, non esistendo un numero reale maggiore di 1 e più piccolo di tutti i numeri reali più piccoli di 1, non è possibile attribuire un ordine reale a tale termine generale. Tuttavia, se tale serie diverge (calcolabile tramite l'integrale generalizzato), la serie

$$\sum \frac{1}{n \log^2(n)}$$

pur avendo ordine infrareale, esattamente come la serie precedente, converge (sempre tramite l'integrale).

Esercizio 1: La serie

$$\sum \frac{5n + \cos(n)}{3 + 2n^3}$$

è ovviamente convergente, in quanto $\text{ord } a_n = 2 > 1$. In realtà bisogna stare attenti al fatto che $\cos(n)$ non è sempre positivo, però è ovvio che

$$\left| \frac{5n + \cos(n)}{3 + 2n^3} \right| < \frac{5n + 1}{3 + 2n^3}$$

e siccome

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n + 1}{3 + 2n^3} \cdot n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 \cdot \left(5 + \frac{1}{n}\right)}{n^3 \cdot \left(2 + \frac{3}{n^3}\right)} = \frac{5}{2} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

per confronto con una serie convergente, la serie di partenza converge.

Esercizio 2: La serie

$$\sum \frac{2\sqrt{n}}{n^2 + n + 1}$$

è a termini positivi e ovviamente convergente, in quanto $\text{ord } a_n = \frac{3}{2} > 1$.

Esercizio 3: La serie

$$\sum \log \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

non converge. Attenzione, però, che la serie è a termini negativi, tuttavia si può fare

$$-\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\log \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

per cui ord $a_n = 1$.

Esercizio 4: La serie

$$\sum 1 - \cos \left(\frac{1}{n} \right)$$

è ovviamente convergente, in quanto ord $a_n = 2 > 1$.

Esercizio 5: La serie

$$\sum \frac{2^n}{(\log(n))^n} = \sum \left(\frac{2}{\log(n)} \right)^n$$

è ovviamente convergente, in quanto

$$\frac{2}{\log(n)} < \frac{2}{3} \rightarrow \log(n) > 3$$

per $n > e^3$, ma l'importante è che accada definitivamente, per cui la serie converge per confronto con la serie geometrica.

Esercizio 6: La serie

$$\sum \frac{\sqrt{n} + 1}{n \cdot (n - 10\pi)}$$

non è una serie a termini positivi, in generale, ma lo è quando $n - 10\pi > 0 \rightarrow n > 10\pi$, ossia definitivamente. Posta tale condizione, la serie è ovviamente convergente, in quanto ord $a_n = \frac{3}{2} > 1$.

Esercizio 7: La serie

$$\sum \frac{n^n}{(n!)^2}$$

è difficile da studiare, in quanto analizzare la differenza di velocità con cui le due successioni tendono all'infinito non è banale. Tuttavia, sfruttando il criterio del rapporto, si può osservare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cdot (n+1)^n}{(n+1)^2 \cdot (n!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n}$$

Semplificando ulteriormente si arriva alla forma finale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 0$$

ed essendo $0 < 1$ la serie converge. Convergenza la serie, è anche immediato evincere che il termine generale sia infinitesimo.

2.8 Criterio del rapporto

Presi una serie a termini positivi, ma non nulli (in quanto bisogna dividere per il termine a_n), per cui $a_n > 0, \forall n$ (anche se sarebbe sufficiente definitivamente), come la seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

tale per cui

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$

Allora

- se $k < 1$ la serie converge
- se $k > 1$ la serie diverge
- se $k = 1$ non è possibile dire nulla in merito al carattere della serie

DIMOSTRAZIONE 1: Si consideri

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$

con $k < 1$. Allora, per la definizione di limite

$$\exists \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq n_\epsilon, \text{ si ha che } k - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < k + \epsilon$$

Allora, preso un ϵ sufficientemente piccolo tale che $k + \epsilon < 1$ (in altre parole, si sceglie $0 < \epsilon < 1 - k$, essendo $k < 1$ per ipotesi), si ottiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < k + \epsilon < 1 \quad \rightarrow \quad a_{n+1} < (k + \epsilon) \cdot a_n$$

E avendo supposto $a_n > 0$, si ottiene la catena di disuguaglianze seguente

$$0 < a_n < a_{n-1} \cdot (k + \epsilon) < a_{n-2} \cdot (k + \epsilon)^2 < \dots$$

Senza perdita di generalità (in quanto si richiederebbe $\forall n \geq n_\epsilon$), è possibile supporre che

$$a_{n+1} < (k + \epsilon) \cdot a_n$$

vale $\forall n$. Per induzione, si ottiene che

$$\begin{aligned} a_1 &< (k + \epsilon) \cdot a_0 \\ a_2 &< (k + \epsilon) \cdot a_1 < (k + \epsilon)^2 \cdot a_0 \\ &\dots \\ a_n &< (k + \epsilon)^n \cdot a_0 \end{aligned}$$

per cui

$$a_n < (k + \epsilon)^n \cdot a_0$$

e, quindi, essendo a_0 costante e $(k + \epsilon)^n$ il termine generale della serie geometrica di ragione $k + \epsilon$, con $|k + \epsilon| < 1$ per costruzione, si può concludere, per il teorema del confronto, che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

converge.

DIMOSTRAZIONE 2: Si consideri

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$

con $k > 1$. Allora, per la definizione di limite

$$\exists \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq n_\epsilon, \text{ si ha che } k - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < k + \epsilon$$

Allora, preso un ϵ sufficientemente piccolo tale che $k - \epsilon > 1$ (in altre parole, si sceglie $0 < \epsilon < k - 1$, essendo $k > 1$ per ipotesi), si ottiene

$$1 < k - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \rightarrow \quad a_{n+1} > a_n$$

Ciò significa che la successione $(a_n)_n$ è definitivamente strettamente crescente. Pertanto, la successione a_n **non può essere infinitesima**, essendo positiva crescente, pertanto la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

diverge, per l'aut-aut.

Esempio: Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

Allora, applicando il teorema del rapporto, si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cdot (n+1)^n}{(n+1)^2 \cdot (n!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n}$$

Semplificando ulteriormente si arriva alla forma finale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0$$

ed essendo $0 < 1$ la serie converge. Convergenza la serie, è anche immediato evincere che il termine generale sia infinitesimo.

2.9 Criterio della radice n -esima

Sia data una serie a termini positivi, con $a_n \geq 0, \forall n$ (anche se sarebbe sufficiente richiederlo definitivamente), come la seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Supposto che esista

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{a_n}) = l$$

Allora si considerano le seguenti casistiche

- se $l > 1$ la serie diverge
- se $l < 1$ la serie converge
- se $l = 1$ non si può dire nulla sul carattere della serie

DIMOSTRAZIONE 1: Si consideri il caso in cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{a_n}) = l$$

con $l > 1$, per la definizione di limite

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n > n_\epsilon, \text{ si ha che } |\sqrt[n]{a_n} - l| < \epsilon$$

Per cui, per $n \geq n_\epsilon$ si ha che

$$l - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \epsilon$$

Pertanto, essendo $l > 1$ per ipotesi, si sceglie ϵ sufficientemente piccolo tale che $\epsilon < l - 1$, per cui $l - \epsilon > 1$. Ciò significa che

$$\sqrt[n]{a_n} > l - \epsilon > 1$$

Definitivamente, quindi, $a_n > 1$ (cioè non è infinitesimo), pertanto la serie non può convergere. Essendo una serie a termini positivi, per l'aut-aut, diverge.

DIMOSTRAZIONE 2: Si consideri il caso in cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{a_n}) = l$$

con $l < 1$. Allora, per la definizione di limite

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n > n_\epsilon, \text{ si ha che } |\sqrt[n]{a_n} - l| < \epsilon$$

Per cui, per $n \geq n_\epsilon$ si ha che

$$l - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \epsilon$$

Pertanto, essendo $l < 1$ per ipotesi, si considera ϵ sufficientemente piccolo tale che $0 < \epsilon < 1 - l$, ossia $l + \epsilon < 1$. Ciò permette di concludere che

$$\sqrt[n]{a_n} < l + \epsilon < 1 \quad \rightarrow \quad a_n < (l + \epsilon)^n$$

e siccome si è preso $|l + \epsilon| < 1$, per confronto con la serie geometrica, la serie di partenza converge.

Osservazione 1: Si consideri la serie armonica generalizzata con $\alpha = 2$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Per studiarne il carattere, si applica il criterio del rapporto e si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

per cui per tale criterio non è possibile dire nulla, ma è noto che la serie converge. Analogamente si ha che il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

non può essere determinato con il criterio del rapporto, in quanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

ma è noto che tale serie diverge. Per cui il criterio del rapporto, quando si ottiene $k = 1$ non fornisce alcuna informazione in merito al carattere della serie studiata.

Osservazione 2: Si consideri la serie armonica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Allora, applicando il criterio della radice n -esima, si calcola il limite seguente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \cdot \log\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\log(n)}{n}} = 1$$

Similmente accadrebbe con la serie armonica generalizzata di ragione $\alpha = 2$.

2.10 Serie a termini qualsiasi

Se si considera una serie a termine generale qualsiasi

$$\sum a_n, \quad \text{con} \quad a_n \in \mathbb{C}$$

non è possibile dire molto sul suo carattere. Tuttavia, ad essa è possibile associare la serie

$$\sum |a_n|$$

che è una serie a termine generale positivo, a cui è possibile applicare i criteri noti.

2.10.1 Serie assolutamente convergente

Di seguito viene esposta la definizione di **serie assolutamente convergente**:

SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

Una serie

$$\sum a_n$$

si dice **assolutamente convergente**, se è convergente la serie dei suoi moduli seguente

$$\sum |a_n|$$

Teorema 2.5 *Una serie assolutamente convergente è convergente. Tuttavia, non è vero il vice-versa.*

DIMOSTRAZIONE 1: Si consideri il caso in cui $a_n \in \mathbb{R}$, allora, per definizione di parte positiva e parte negativa si ha, rispettivamente:

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{se } a_n < 0 \\ 0 & \text{se } a_n \geq 0 \end{cases}$$

ma ciò significa che la parte positiva e negativa di un reale è sempre ≥ 0 . Pertanto si può affermare che

$$a_n = a_n^+ - a_n^- \quad \text{e} \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

Quindi, in particolare, si ha che

$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$$

$$0 \leq a_n^- \leq |a_n|$$

Per il criterio del confronto, quindi, se la serie dei valori assoluti

$$\sum |a_n|$$

è convergente, anche le serie di parte positiva e parte negativa

$$\sum a_n^+ \quad \text{e} \quad \sum a_n^-$$

convergono. Pertanto la serie di partenza

$$\sum a_n^+ - a_n^- = \sum a_n$$

è convergente.

DIMOSTRAZIONE 2: Si consideri il caso in cui $z_n \in \mathbb{C}$ e si supponga che

$$\sum |z_n|$$

sia convergente. Allora, posto

$$z_n = x_n + i \cdot y_n$$

e, per definizione di modulo di un numero complesso, si ha

$$|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

è immediato evincere che

- $|x_n| \leq |z_n|$
- $|y_n| \leq |z_n|$

in cui $|x_n|$ e $|y_n|$ sono valori assoluti, mentre $|z_n|$ è un modulo. Per le disuguaglianze di cui sopra, si evince che le serie

$$\sum |x_n| \quad \text{e} \quad \sum |y_n|$$

convergono. Ma ciò significa che la serie con termine generale x_n converge assolutamente, così come quella con termine generale y_n .

Siccome x_n rappresenta la parte reale di z_n e y_n rappresenta la parte immaginaria di z_n , per il teorema successivamente esposto sulla convergenza di una serie di numeri complessi, si conclude che la serie

$$\sum z_n$$

converge.

Osservazione: Tuttavia, non è vero il viceversa: una serie convergente non è detto sia assolutamente convergente.

Si consideri, a tal proposito, la **serie di Leibniz** seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

che, per il criterio di Leibniz, risulta convergente. Tuttavia, la corrispondente serie dei moduli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

non è convergente, in quanto è la serie armonica. Questo è il tipico esempio di una serie convergente, ma non assolutamente convergente.

2.10.2 Serie semplicemente convergente

Di seguito viene esposta la definizione di **serie semplicemente convergente**:

SERIE SEMPLICEMENTE CONVERGENTE

Una serie convergente, ma non assolutamente convergente, si dice **semplicemente convergente**.

2.11 Limiti di successioni in \mathbb{C}

Sia $(z_n)_n$ una successione in \mathbb{C} , con $\gamma \in \mathbb{C}$. Allora si dirà che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \gamma$$

se

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq n_\epsilon \text{ si ha che } |z_n - \gamma| < \epsilon$$

in cui è da intendersi $|\dots|$ come modulo di un numero complesso che è da intendersi come “distanza dall’origine”; preso un numero complesso z_0 , si ha che

$$\mathcal{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

2.11.1 Convergenza di Re e Im

Com’è noto, un numero complesso può essere descritto in forma cartesiana come $z = x + i \cdot y$, con $z, y \in \mathbb{R}$: esiste una relazione tra la successione di un numero complesso e la successione della sua parte reale e immaginaria, esposta dal seguente teorema:

Teorema 2.6 *La successione $(z_n)_n$, posto $z_n = x_n + i \cdot y_n$, converge a $\gamma = \alpha + i \cdot \beta$ se e solo se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \beta$$

DIMOSTRAZIONE 1: Dato $z_n = x_n + i \cdot y_n$ e $\gamma = \alpha + i \cdot \beta$, è evidente come

$$z_n - \gamma = x_n + i \cdot y_n - (\alpha + i \cdot \beta) = x_n - \alpha + i \cdot (y_n - \beta)$$

Dalla definizione di modulo, si ha, quindi, che

$$|z_n - \gamma| = \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2}$$

Da ciò appare evidente che

$$|x_n - \alpha| \leq |z_n - \gamma|$$

$$|y_n - \beta| \leq |z_n - \gamma|$$

Pertanto, siccome per ipotesi si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \gamma$$

ovvero

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq n_\epsilon \text{ si ha che } |z_n - \gamma| < \epsilon$$

è immediato capire che definitivamente, per $n \geq n_\epsilon$, anche

$$|x_n - \alpha| \leq |z_n - \gamma| < \epsilon$$

$$|y_n - \beta| \leq |z_n - \gamma| < \epsilon$$

DIMOSTRAZIONE 2: Sia, per ipotesi, che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \beta$$

per cui

$$\forall \epsilon_1 > 0, \exists n_{\epsilon_1} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq n_{\epsilon_1} \text{ si ha che } |x_n - \alpha| < \epsilon_1$$

e, analogamente

$$\forall \epsilon_2 > 0, \exists n_{\epsilon_2} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq n_{\epsilon_2} \text{ si ha che } |y_n - \beta| < \epsilon_2$$

Pertanto, posto $n_\epsilon = \max\{n_{\epsilon_1}, n_{\epsilon_2}\}$ e $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ si ha che, definitivamente, per $n \geq n_\epsilon$

$$|x_n - \alpha| < \epsilon$$

$$|y_n - \beta| < \epsilon$$

Ma dal momento che

$$|z_n - \gamma| = \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} < \sqrt{(\epsilon)^2 + (\epsilon)^2} = \sqrt{2}\epsilon^2$$

che, chiaramente, può essere resa piccola quanto si vuole.

Osservazione: Dal momento che le serie sono particolari successioni, i risultati visti per le successioni si applicano in modo identico anche alle serie: una serie a termini complessi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$$

converge **se e solo se** convergono le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(z_n) \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(z_n)$$

e si ha che la somma della serie z_n è data dalla somma delle somme della parte reale e immaginaria, come esposto di seguito:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(z_n) + i \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(z_n)$$

Esercizio 1: Si consideri la seguente serie

$$\sum \left(2i^n - \frac{3i}{5^n} \right)$$

Allora, ovviamente, il termine generale non è infinitesimo, per cui la serie non converge.

Esercizio 2: Si consideri la seguente serie

$$\sum \left(\frac{\sin(n)}{n^2 \cdot i} + \frac{n}{\sin(n) + 3n^3} \right)$$

Dal momento che si ha che

$$\frac{1}{i} = -i$$

è facile capire che la serie di partenza diviene

$$\sum \left(-\frac{\sin(n)}{n^2} \cdot i + \frac{n}{\sin(n) + 3n^3} \right)$$

Allora il termine generale è infinitesimo e, in particolare, si osserva che

$$\left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

e siccome la serie armonica generalizzata di ragione 2 converge, per il criterio del confronto, converge assolutamente anche la parte immaginaria della serie di partenza e, quindi, anche la parte immaginaria stessa.

Similmente è possibile affermare che

$$\frac{n}{\sin(n) + 3n^3}$$

è infinitesima di ord $2 \geq \alpha > 1$, per cui è convergente per il criterio dell'ordine di infinitesimo.

Esercizio 3: Si consideri la seguente serie

$$\sum \frac{3n + i}{n^3 + n \cdot i}$$

Un modo immediato per semplificare l'espressione del termine generale è moltiplicare e dividere per il coniugato del denominatore, da cui

$$\frac{3n + i}{n^3 + n \cdot i} \cdot \frac{n^3 - n \cdot i}{n^3 - n \cdot i} = \frac{3n^4 + n}{n^6 + n^2} + \frac{n^3 - 3n^2}{n^6 + n^2} \cdot i$$

In questo modo è facile capire che tanto la parte immaginaria, quanto la parte reale del termine generale di partenza sono infinitesime, la prima di ord 2, la seconda di ord 3. Per il criterio dell'ordine di infinitesimo, convergono.

Un altro modo per studiare tale successione è quello di considerare il modulo del termine generale. Pertanto:

$$\left| \frac{3n + i}{n^3 + n \cdot i} \right| = \frac{|3n + i|}{|n^3 + n \cdot i|} = \frac{\sqrt{9n^2 + 1}}{\sqrt{n^6 + n^2}} = \frac{|n| \cdot \sqrt{9 + \frac{1}{n^2}}}{|n^3| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}}$$

Ancora una volta, il termine generale è infinitesimo di ord 2, per cui la serie converge assolutamente e quindi è convergente.

10 Ottobre 2022

Le serie numeriche sono delle coppie di successioni: una è la successione dei termini generali, l'altra è la successione delle somme parziali.

Se una successione è convergente, allora il suo termine generale è infinitesimo. Una serie può essere sempre pensata come un integrale generalizzato.

Le serie a termini (reali) positivi sono le serie più facili da studiare, in forza del teorema dell'aut-aut che afferma che una serie di questo tipo o converge o diverge.

Il criterio di convergenza più importante è il criterio dell'ordine di infinitesimo, a cui si aggiunge il criterio del rapporto e il criterio della radice n -esima.

Tuttavia, se una serie non è a termini (reali) positivi, si può associare ad essa la serie dei suoi moduli, che è a termini positivi, quindi più facile da studiare: una serie si dice assolutamente convergente se la serie dei suoi moduli è convergente; in particolare, una serie assolutamente convergente è anche convergente, ma non è vero il viceversa.

2.12 Serie semplicemente convergenti

Serie non assolutamente convergenti vengono chiamate serie **semplicemente convergenti** e sono le più difficili da studiare. Di seguito vengono esposti alcuni criteri che possono essere impiegati per studiare la convergenza semplice di tali serie.

2.12.1 Criterio di Leibniz per le serie a termini alterni

Di seguito si espone il **criterio di Leibniz per le serie a termini alterni**:

CRITERIO DI LEIBNIZ PER LE SERIE A TERMINI ALTERNI

Si consideri $(a_n)_n$ una successione a termini reali, con $a_n \in \mathbb{R}$, tale che

- $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- il termine a_n deve essere infinitesimo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Allora la serie costruita come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

converge. Inoltre, detta s la somma della serie, si ha che

$$\forall n \quad |s_n - s| \leq a_{n+1}$$

secondo la cosiddetta **formula di approssimazione**.

DIMOSTRAZIONE 1: Si consideri la ridotta n -esima s_n . Posto $k \in \mathbb{N}$ tale per cui $k \geq 0$, allora studiando la sottosuccessione dei termini pari e quella dei termini dispari, si ha

1. Per i termini pari

$$s_{2k+2} = s_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} = s_{2k} - \underbrace{(a_{2k+1} - a_{2k+2})}_{\geq 0} \leq s_{2k}$$

Infatti, per ipotesi, $a_{n+1} \leq a_n$, e quindi si ha che $a_{2k+1} - a_{2k+2} \geq 0$.

Per tale ragione, tale sottosuccessione è **monotona decrescente**.

2. Per i termini dispari

$$s_{2k+3} = s_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3} = s_{2k+1} + \underbrace{(a_{2k+2} - a_{2k+3})}_{\geq 0} \geq s_{2k+1}$$

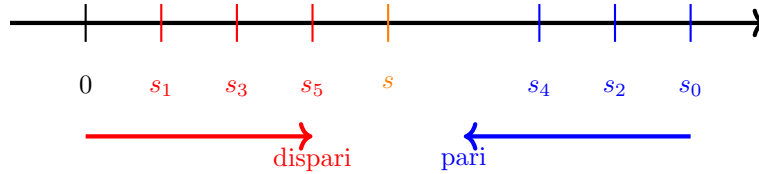
Infatti, per ipotesi, $a_{n+1} \leq a_n$, e quindi si ha che $a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0$.

Per tale ragione, tale sottosuccessione è **monotona crescente**.

È noto, per ipotesi, che

$$s_{2k+1} - s_{2k} = (-1)^{2k+1} \cdot a_{2k+1} = -a_{2k+1} \leq 0 \quad \text{e quindi} \quad s_{2k+1} \leq s_{2k}, \quad \forall k \geq 0$$

ciò significa che, per ogni n , la ridotta pari è maggiore della ridotta dispari (ma la prima è decrescente, la seconda è crescente), rimbalzando progressivamente attorno al limite delle due sottosuccessioni:



Dalle disuguaglianze di cui sopra si ha che

$$\begin{aligned} s_{2k} &\geq s_{2k+1} \geq s_1 = a_0 - a_1 \quad \forall k > 0 \\ s_{2k+1} &\leq s_{2k} \leq s_2 = a_0 - a_1 + a_2 \quad \forall k > 0 \end{aligned}$$

ovverosia la **sottosuccessione degli indici pari**, **decrescente**, è **limitata dal basso**; similmente, la **sottosuccessione degli indici dispari**, **crescente**, è **limitata dall'alto**. Ciò permette di affermare che **esiste** per entrambe un **limite finito**:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_{2k} = \beta \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{2k+1} = \alpha$$

e, per il **teorema del confronto dei limiti**, si ha che $\alpha \leq \beta$.

Essendo il termine a_n infinitesimo, si ha che

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} s_{2k} - s_{2k+1} = \alpha - \beta = 0$$

Dal momento che le **sottosuccessioni sono complementari**, la serie di partenza converge.

DIMOSTRAZIONE 2: La formula di approssimazione del criterio di Leibniz

$$\forall n \quad |s_n - s| \leq a_{n+1}$$

funziona in quanto

- se n è dispari ($n = 2k + 1$)

$$|s_{2k+1} - s| = s - s_{2k+1}$$

in quanto la successione dei dispari è crescente e sempre minore di quella dei pari, per cui $s \geq s_{2k+1}$. Allora si ha che

$$s - s_{2k+1} \leq s_{2k+2} - s_{2k+1}$$

in quanto $s \leq s_{2k+2}$. Ma siccome $s_{2k+2} = s_{2k+1} + a_{2k+2}$ è facile capire che

$$s_{2k+2} - s_{2k+1} = a_{2k+2} = a_{(2k+1)+1} = a_{n+1}$$

- se n è pari ($n = 2k$)

$$|s_{2k} - s| = s_{2k+1} - s$$

in quanto la successione dei pari è decrescente e sempre maggiore di quella dei dispari, per cui $s_{2k} \geq s$. Allora si ha che

$$s_{2k} - s \leq s_{2k} - s_{2k+1}$$

in quanto $s \geq s_{2k+1}$. Ma siccome $s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1}$ è facile capire che

$$s_{2k} - s_{2k+1} = a_{2k+1} = a_{n+1}$$

Esempio: Si consideri la serie di Leibniz:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = s$$

Allora tale serie converge per il criterio di Leibniz, essendo a_n positivo, decrescente e infinitesimo. Dalla formula di approssimazione si ha che

$$|s_n - s| < \frac{1}{n+1}$$

Allora, per conoscere la somma della serie con un errore di $\frac{1}{10}$, è sufficiente considerare

$$s_9 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{9}$$

Esercizio 1: Si consideri la serie seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{\log_{10}(n)}{n}$$

Si controlli se sono verificate le condizioni di Leibniz seguenti:

- Il termine a_n non è strettamente maggiore di zero per ogni n . Tuttavia è vero che

$$\frac{\log_{10}(n)}{n} > 0 \quad \forall n \geq 2$$

che è sufficiente, in quanto basta che sia verificata la condizione definitivamente.

- Si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_{10}(n)}{n} = 0$$

per cui il termine a_n è infinitesimo.

- La successione

$$\frac{\log_{10}(n)}{n}$$

è decrescente $\forall n$? Basterebbe verificare che lo sia definitivamente.

Per verificare l'ultimo punto, si considera la funzione

$$f(x) = \frac{\log_{10}(x)}{x}$$

e se ne calcola la derivata (cosa che non è possibile fare con una successione), da cui

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x \cdot \log(10)} \cdot x - \log_{10}(x) \cdot 1}{x^2}$$

Se ne studia il segno, che dipende solamente dal numeratore, da cui

$$\frac{1}{x \cdot \log(10)} \cdot x - \log_{10}(x) \cdot 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \log_{10}(x) < \frac{1}{\log(10)} \quad \rightarrow \quad x < 10^{\frac{1}{\log(10)}}$$

Per cui per $x > 10^{\frac{1}{\log(10)}}$, la funzione è decrescente. Essendo soddisfatte tutte e tre le condizioni del criterio di Leibniz, la serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\log_{10}(n)}{n}$$

converge ad s .

Osservazione: Si osservi che nell'esempio precedente, non è possibile applicare la formula di approssimazione del criterio di Leibniz, in quanto le condizioni di Leibniz non sono soddisfatte per tutti gli n (infatti i primi termine della serie potrebbero andare ad alterare il valore della somma finale). Se la serie partisse da $n = n_\epsilon$ con $n_\epsilon > 10^{\frac{1}{\log(10)}}$, allora si potrebbe applicare la stima dell'errore di Leibniz.

Esercizio 2: Si consideri la serie seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot (1 + 3n)\right)}{1 + 3n}$$

che, in prima approssimazione, sembra non essere assolutamente convergente, in quanto il suo comportamento asintotico risulta essere simile a quello della serie armonica.

Per verificare se essa sia convergente semplicemente, si verifica se essa soddisfa le tre condizioni di Leibniz; riscrivendo il numeratore del termine generale si ha

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot (1 + 3n)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ecco, quindi, che la serie può essere riscritta come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 3n}}_{a_n}$$

Osservazione: Si presti particolare attenzione che, in questo ultimo caso, è stato fondamentale riscrivere il termine generale, mettendo in evidenza il fattore $(-1)^n$, in quanto per verificare le 3 ipotesi del criterio di Leibniz, bisogna studiare il termine

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 3n}$$

che risulta essere

1. a termini positivi
2. infinitesimo
3. decrescente

Se ne evince che la serie di partenza è convergente per il criterio di Leibniz.

Esercizio: Si consideri la seguente serie, posto $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n + (-5)^n}{5^n} \cdot \sin\left(\pi + \frac{1}{n}\right)$$

Analizzando il termine generale, è immediato osservare che in esso può essere eseguita la semplificazione seguente:

$$\sin\left(\pi + \frac{1}{n}\right) = -\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Pertanto si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\alpha^n + (-5)^n}{5^n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Tuttavia, si può osservare immediatamente che se $|\alpha| > 5$, la serie non converge, in quanto il termine generale non è infinitesimo.

Se $\alpha = -5$, si ottiene il termine generale

$$-\frac{2 \cdot (-1)^n \cdot 5^n}{5^n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = -2 \cdot (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

in cui il termine

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

soddisfa le 3 condizioni del criterio di Leibniz, in quanto sempre positivo, infinitesimo e decrescente, quindi la serie di partenza converge.

Nel caso in cui $\alpha = 5$, si ottiene il termine generale

$$-\frac{5^n + (-1)^n \cdot 5^n}{5^n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = -\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

È immediato evincere che il secondo addendo converge per il criterio di Leibniz per quanto già osservato; tuttavia, il primo addendo non converge, in quanto infinitesimo di ordine 1. Ciò porta a formulare le considerazioni seguenti:

- se una serie presenta un termine generale che può essere scritto come somma di più termini e ciascuno di tali addendi, preso singolarmente, porta alla convergenza del proprio “pezzo” di serie, allora anche la serie di partenza converge.
- se una serie presenta un termine generale che può essere scritto come somma di più termini, ma alcuni convergono e altri non convergono (ma divergono tutti a $+\infty$ o $-\infty$) allora la serie di partenza non può convergere. Questo perché se essa convergesse, la somma dei termini divergenti potrebbe essere ottenuta come differenza tra la somma finita delle serie principale e dei “pezzi” convergenti, che è assurdo.

Nel caso in cui $|\alpha| < 5$, spezzando il termine generale si ottiene

$$\left(\frac{\alpha}{5}\right)^n \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) + (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

in cui il primo addendo porta alla convergenza della serie corrispondente, in base al confronto con la geometrica, in quanto:

$$\left|\left(\frac{\alpha}{5}\right)^n \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right| \leq \left(\frac{\alpha}{5}\right)^n \quad \text{siccome} \quad \left|\frac{\alpha}{5}\right| < 1 \quad \text{converge assolutamente e quindi semplicemente.}$$

Convergendo anche il secondo addendo per il criterio di Leibniz, si evince che la serie di partenza converge (semplicemente, e non assolutamente, in quanto solo uno dei due termini converge assolutamente).

2.13 Successione di Cauchy

Di seguito si espone la definizione di **successione di Cauchy**:

SUCCESSIONE DI CAUCHY

Sia $(z_n)_n$ una successione in \mathbb{C} ; si dirà che $(z_n)_n$ è una successione di Cauchy (o soddisfa il criterio di Cauchy) se

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq n_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N} \rightarrow |z_{n+p} - z_n| < \epsilon$$

in cui è da intendersi $|\cdot|$ come modulo, essendo in \mathbb{C} . Tale definizione rassomiglia quella di limite, ma il vantaggio è che non c'è il limite.

Teorema 2.7 *Se esiste finito*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l$$

allora la successione è di Cauchy.

DIMOSTRAZIONE: Se esiste finito

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = l$$

allora, per la definizione di limite, fissato $\epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\epsilon$, si ha che

$$|z_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

Allora, $\forall n \geq n_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N}$, si ottiene

$$|z_{n+p} - z_n| \leq \underbrace{|z_{n+p} - l|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|l - z_n|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

2.13.1 Teorema di completezza dello spazio \mathbb{C} (o \mathbb{R})

Si espone di seguito il **teorema di completezza dello spazio \mathbb{C} (o \mathbb{R})**:

Teorema 2.8 *Ogni successione di Cauchy in \mathbb{C} (o in \mathbb{R}) è convergente.*

Osservazione 1: Si osservi che la convenienza nel dimostrare che una successione è di Cauchy in luogo del fatto che sia convergente è che non si richiede, nel primo caso, di conoscere quale sia il limite.

Tale teorema, però, non vale in \mathbb{Q} in quanto una successione di razionali che tende ad un razionale è ovviamente di Cauchy, in quanto lo è in \mathbb{R} , ma non è convergente, in quanto tende ad un irrazionale.

Osservazione 2: Tale teorema si applica anche alle serie. Per esse, infatti, dire che la successione delle ridotte $(s_n)_n$ è di Cauchy significa che

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq n_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N} \rightarrow |s_{n+p} - s_n| < \epsilon$$

ma esplicitando i termini s_{n+p} e s_n si ottiene:

$$\left| \sum_{k=0}^{n+p} a_k - \sum_{k=0}^n a_k \right| < \epsilon \quad \rightarrow \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon$$

in cui per le serie a termini positivi, può essere rimosso il modulo.

2.13.2 Criterio di Cauchy per la convergenza di una serie

Di seguito si espone il **criterio di Cauchy per la convergenza di una serie**:

CRITERIO DI CAUCHY PER LA CONVERGENZA DELLE SERIE

Una serie

$$\sum a_n$$

converge **se e solo se** $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\epsilon$ e $\forall p \in \mathbb{N}$ vale

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon$$

2.13.3 Applicazioni del criterio di Cauchy

Concetto 1: Si applichi il criterio di Cauchy per dimostrare che se una serie è assolutamente convergente, allora lo è anche semplicemente:

DIMOSTRAZIONE 1: Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

allora si dirà che la serie converge assolutamente se la serie dei moduli è convergente, ossia la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

è convergente.

Se una serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

converge assolutamente, allora la serie dei moduli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

è di Cauchy (per il teorema esposto in precedenza), ossia, secondo la definizione del criterio Cauchy, si ha che

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n \geq n_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N} \quad \text{si ha che} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \epsilon$$

Per dimostrare che anche la serie di partenza (priva del modulo) è di Cauchy, in quanto è noto che una serie è convergente se e solo se è di Cauchy, si sfrutta la disuguaglianza triangolare (ossia il modulo della somma è minore della somma dei moduli), per cui

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \epsilon$$

e quindi, essendo la serie degli a_k di Cauchy, è convergente.

Concetto 2: Si dimostri, tramite il criterio di Cauchy, che la serie armonica è divergente a $+\infty$.

DIMOSTRAZIONE 2: Considerando la ridotta n -esima della serie armonica, si ha

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

che, per come è stata costruita, è positiva e crescente, per cui, per il **teorema di esistenza del limite delle successioni monotone**, si può affermare che

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

finito o infinito (che è praticamente l'aut-aut, essendo una serie a termini positivi). Supponendo, ora, per assurdo, che la serie armonica sia convergente, si dimostri che la serie non può essere di Cauchy, ovvero che sia verificata

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n \geq n_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N} \quad \text{si ha che} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} < \epsilon$$

Allora, posto $n \geq n_\epsilon$ e p qualsiasi, si ha, per la disuguaglianza appena esposta che

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p}}_{p \text{ elementi}} < \epsilon$$

in cui è facile capire che il numero di addendi sommati è pari a p , in quanto $(n+p) - (n+1) + 1 = p$. Dal momento che la definizione di Cauchy richiede qualsiasi valore di p naturale, sia fissato $p = n$, per cui

$$\frac{1}{n+p} = \frac{1}{2n} \quad \rightarrow \quad \epsilon > \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{> \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{> \frac{1}{2n}} + \cdots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ elementi}}$$

ma essendo n addendi, si ottiene che

$$\frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2} < \epsilon$$

Ma siccome tale ragionamento vale qualunque sia ϵ , se si fosse fissato, all'inizio della dimostrazione, $\epsilon > 0$, come $\epsilon = \frac{1}{10}$, sarebbe stato ottenuto l'assurdo cercato.

3 Successioni e serie di funzioni

Di seguito si introduce l'importante tema delle successioni e delle serie di funzioni, in cui a ogni indice n naturale viene associata una funzione.

3.1 Successioni di funzioni

Se, per esempio, si introduce una successione di funzioni come la seguente

$$f_n(x) = x^n$$

si ottiene, per diversi n , che

$$f_0(x) = 1 \quad f_1(x) = x \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = x^3 \quad \text{etc.}\dots$$

o ancora, nel caso della successione di funzioni

$$f_n(x) = \cos(nx)$$

si ottiene

$$f_0(x) = \cos(0) = 1 \quad f_1(x) = \cos(x) \quad f_2(x) = \cos(2x) \quad f_3(x) = \cos(3x) \quad \text{etc.}\dots$$

o ancora, nel caso della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n}$$

si ottiene

$$f_0(x) = \frac{1}{x^2} \quad f_1(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2 + 2} \quad f_3(x) = \frac{1}{x^2 + 3} \quad \text{etc.}\dots$$

3.1.1 Limite puntuale di una successione di funzioni

Di seguito si espone la definizione di **limite puntuale di una successione di funzioni**:

LIMITE PUNTUALE DI UNA SUCCESSIONE DI FUNZIONI

Siano

$$f_n : E \mapsto \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f : E \mapsto \mathbb{R}$$

Si dice che la successione $(f_n)_n$ **converge puntualmente** a f se, $\forall x \in E$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Esempio 1: Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \cos(nx)$$

allora tale successione ammette limite 0 se $x = 0$, non esiste altrimenti.

Esempio 2: Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n}$$

tale per cui, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + n} = 0$$

Esempio 3: Si consideri la successione di funzioni

$$f_n : [0, 1] \mapsto \mathbb{R} \quad \text{con} \quad f_n(x) = x^n$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Esempio 4: Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx^2 + 1}$$

allora si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

11 Ottobre 2022

Il criterio di Leibniz è un criterio fondamentale per capire la convergenza semplice di una serie a termini alternativamente positivi e negativi. Dopodiché sono state introdotte le successioni di Cauchy e il criterio di Cauchy associato, il quale consente di capire se esiste un limite, senza conoscere il valore del limite, il che risulta fondamentale per decretare la convergenza di una serie.

3.1.2 Limite uniforme di una successione di funzioni

Si consideri la successione di funzioni

$$f_n : [0, 1[\quad \text{definita come } f_n(x) = x^n$$

Allora $\forall x \in [0, 1[$, si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$$

e, per la definizione di limite, si ha

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad \text{si ha che} \quad |x^n| < \epsilon$$

Per determinare n_ϵ tale per cui $\forall n \geq n_\epsilon, |x^n| < \epsilon$, si osserva che

$$x^n < \epsilon \quad \rightarrow \quad e^{n \cdot \log(x)} < e^{\log(\epsilon)} \quad \rightarrow \quad n \cdot \log(x) < \log(\epsilon)$$

Ma essendo $\log(x) < 0$ in quanto $x \in [0, 1[$, quando si divide per $\log(x)$ negativo, cambia il segno della disuguaglianza. Allora sarà sufficiente considerare n che soddisfa la proprietà

$$n > \frac{\log(\epsilon)}{\log(x)}$$

Fissato $\epsilon = e^{-10}$ e $x = \frac{1}{2}$, allora l' n_ϵ cercato è

$$n_\epsilon = \frac{\log(e^{-10})}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{10}{\log(2)} \cong 33$$

Per cui sarà necessario considerare una potenza $n > 33$ al fine di vedere soddisfatta la proprietà

$$\frac{1}{2}^n < e^{-10}$$

In particolare si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log(\epsilon)}{\log(x)} = +\infty$$

che significa che più ci si avvicina con x a 1, maggiore dovrà essere considerata la potenza di n per vedere soddisfatta la disuguaglianza del limite.

In altre parole, n **dipende fortemente da** x : più x tende a 1 da sinistra, più n deve essere grande al fine di soddisfare il limite di partenza:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$$

Questo perché 0 è limite puntuale e non uniforme per la successione f_n . Ciò porta alla definizione di **limite uniforme per una successione di funzioni**:

LIMITE UNIFORME

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni, con

$$f_n : E \mapsto \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f : E \mapsto \mathbb{R}$$

Si dirà che f è limite uniforme della successione $(f_n)_n$, e si scriverà

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$$

uniforme, se

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n \geq n_\epsilon, \boxed{\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}} \quad \text{si ha che} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Osservazione: Nel caso di **limite puntuale**, invece, si ha che

$$\boxed{\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}}, \forall \epsilon > 0, \exists n_{\epsilon, x} \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n \geq n_{\epsilon, x}, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

ovvero il $\forall x$ è posto all'inizio della definizione. Ciò implica la forte dipendenza da x (per questo si scrive $n_{\epsilon, x}$) nel caso di limite puntuale, cosa che invece non accade nel caso di un limite uniforme, in cui n_ϵ si mantiene costante e lo stesso, indipendentemente dalla scelta di x .

Osservazione: Sia data la successione di funzioni seguente

$$f_n(x) = \frac{1}{n + x^2}$$

È facile capire che posto $x = 0$ si ottiene il valore massimo della successione, ovvero $\frac{1}{n}$. Ciò significa che, per n sufficientemente grande, tutto il grafico della funzione è interamente contenuto nella fascia $< \frac{1}{n}$: pertanto la successione converge uniformemente, in quanto

$$|f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n} < \epsilon$$

Ciò significa che, fissato ϵ , basterà scegliere $n > \frac{1}{\epsilon}$ e il grafico di tutte le funzioni in dipendenza da n sarà contenuto all'interno di una fascia di ampiezza 2ϵ (a causa della presenza del valore assoluto) da avvolgere intorno al limite, dovendo essere $l - \epsilon < f_n(x) < l + \epsilon$.

Esercizio 1: Si consideri la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{n}{x^2 + n}$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$$

Naturalmente si ha convergenza puntuale, ma non uniforme. Infatti, se fosse uniforme, fissato $\epsilon = \frac{1}{100}$ dovrebbe esistere $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\epsilon, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{n}{x^2 + n} - 1 \right| < \frac{1}{100}$$

Per dimostrare che ciò non è possibile $\forall x \in \mathbb{R}$, si sviluppa, ottenendo

$$\left| \frac{n - x^2 - n}{x^2 + n} \right| = \frac{x^2}{x^2 + n}$$

allora basta scegliere $x = \sqrt{n}$, per ottenere l'assurdo

$$\frac{n}{n + n} = \frac{1}{2} < \frac{1}{100}$$

Esercizio 2: Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx^2 + 1}$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$$

che è una convergenza puntuale, ma non uniforme, in quanto, fissato $\epsilon = \frac{1}{100}$ dovrebbe esistere $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\epsilon, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{nx}{nx^2 + 1} - \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{100}$$

e sviluppando si ottiene

$$\frac{1}{x \cdot (nx^2 + 1)} < \frac{1}{100}$$

Ora, al fine di contraddire tale disuguaglianza, è fondamentale scegliere un x piccolo al fine di ottenere una quantità molto grande che ovviamente non può essere maggiorata da ϵ . Allora basta scegliere $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, ottenendo

$$\frac{\sqrt{n}}{2} < \frac{1}{100}$$

che, ovviamente, non è vero $\forall n \in \mathbb{N}$.

Osservazione: Si osservi che se il limite di una successione di funzioni non è continuo (come nel caso del limite $\frac{1}{x}$), allora la successione di funzioni non converge uniformemente. Tuttavia, se il limite è continuo, come nel caso di una costante, allora non si può dire nulla sulla tipologia di convergenza della successione di funzioni.

3.2 Teorema di inversione di due limiti

Si consideri il seguente **teorema di inversione di due limiti**:

TEOREMA DI INVERSIONE DI DUE LIMITI

Sia $f(n)_n$ una successione di funzioni

$$f_n : E \mapsto \mathbb{R}$$

tale che $(f_n)_n$ **converge uniformemente** a

$$f : E \mapsto \mathbb{R}$$

con x_0 punto di accumulazione per E . Si supponga, inoltre, che $\forall n$ esista

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n$$

Allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = l \quad \text{e} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

pertanto si può affermare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$$

Osservazione: Si osservi che il teorema appena esposto vale solamente per successioni di funzioni con convergenza uniforme, non puntuale. Infatti, date

$$f_n : [0, 1] \mapsto \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$$

con $f_n = x^n$, si ottiene l'inesattezza seguente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 1} x^n \right) = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \right)$$

DIMOSTRAZIONE 1: Per la dimostrazione si considera il criterio di Cauchy, fondamentale per dimostrare l'esistenza del limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n$$

senza conoscerlo. Bisogna, dunque, dimostrare che la successione $(l_n)_n$ è di Cauchy, ossia che

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n \geq n_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N} \quad \text{si ha che} \quad |l_{n+p} - l_n| < \epsilon$$

In particolare, $\forall x \in E$, il valore assoluto di cui sopra può essere riscritto aggiungendo e sottraendo le quantità $f_{n+p}(x)$ e $f_n(x)$ come segue:

$$|l_{n+p} - l_n| = |l_{n+p} - l_n - f_{n+p}(x) + f_{n+p}(x) - f_n(x) + f_n(x)|$$

Sfruttando la disuguaglianza triangolare, si può maggiorare tale valore assoluto come

$$\leq |l_{n+p} - f_{n+p}(x)| + |f_{n+p}(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n|$$

Ora bisogna dimostrare che ogni singolo addendo è $< \frac{\epsilon}{3}$. Si procede per osservazioni successive:

1. Siccome $(f_n)_n$ è uniformemente convergente, in particolare è una successione di Cauchy. Ciò significa che

$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall n \geq n_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N} \text{ e } \boxed{\forall x \in E} \quad \text{si ha che} \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

in cui è fondamentale osservare che ciò vale $\forall x \in E$, in cui n_ϵ considerato dipende solamente da n e non da x .

2. a

Fissato $\hat{n} \geq n_\epsilon$ e un qualsiasi $q \in \mathbb{N}$, è noto che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_{\hat{n}}(x) = l_{\hat{n}} \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} f_{\hat{n}+p}(x) = l_{\hat{n}+p}$$

Allora, dalla definizione di limite si ha che

$$\exists \delta_{\hat{n}+p} > 0, \delta_{\hat{n}} > 0 \mid \forall x \in E, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta_{\hat{n}+p} \text{ e } \forall x \in E, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta_{\hat{n}} \quad \text{si ha} \quad |f_{\hat{n}}(x) - l_{\hat{n}}| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{e} \quad |f_{\hat{n}+p}(x) - l_{\hat{n}+p}| < \frac{\epsilon}{3}$$

Ma ciò consente di affermare che, preso il δ più piccolo di entrambi $\delta_{\hat{n}+p}$ e $\delta_{\hat{n}}$:

$$|l_{\hat{n}+p} - l_{\hat{n}}| \leq |l_{\hat{n}+p} - f_{\hat{n}+p}(x)| + |f_{\hat{n}+p}(x) - f_{\hat{n}}(x)| + |f_{\hat{n}}(x) - l_{\hat{n}}| < \epsilon$$

Ciò, quindi, consente di affermare che

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = l \rightarrow |l_{n+p} - l_n| < \epsilon$$

DIMOSTRAZIONE 2: Ripetendo la dimostrazione per

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

si ha che

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - l + l_n + f_n(x) - f_n(x)| \leq |(f_n(n) - f(x))| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l| < \epsilon$$

Infatti, è noto che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = l$$

Pertanto esiste n_ϵ^1 tale che $\forall n \geq n_\epsilon^1$ si ha

$$|l_n - l| < \frac{1}{3}\epsilon$$

Inoltre, poiché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$$

uniforme, esiste $n_\epsilon^2 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\epsilon^2$, si ha

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall x \in E$$

Fissato, quindi, $\hat{n} \geq \max\{n_\epsilon^1, n_\epsilon^2\}$. Per questo \hat{n} , siccome

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_{\hat{n}}(x) = l_{\hat{n}}$$

si ha che $\exists \delta_\epsilon > 0$ tale che $\forall x \in E, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta_\epsilon$

$$|f_{\hat{n}}(x) - l_{\hat{n}}| < \frac{\epsilon}{3}$$

Ricapitolando: Bisogna dimostrare che

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_n(x)|$$

... continua ...

Corollario 3.0.1 *Si osservi che se*

$$f_n : E \mapsto \mathbb{R}$$

è continua $\forall n$ e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$$

uniforme. Allora f è continua.

DIMOSTRAZIONE: Ciò è immediatamente evidente in quanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

Osservazione: Si osservi che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

uniforme, lo è anche puntuale.

3.3 Teorema di integrabilità

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un **intervallo compatto** (ovvero con misura finita) e sia

$$f_n : I \mapsto \mathbb{R}$$

integrabile $\forall n$; sia, inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$$

uniforme, con

$$f : I \mapsto \mathbb{R}$$

allora f è integrabile e si ha che

$$\int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(x) \, dx$$

DIMOSTRAZIONE: Parlando di integrale di Riemann, si dimostra che

$$\left| \int_I f_n(x) \, dx - \int_I f(x) \, dx \right| \leq \int_I |f_n(x) - f(x)| \, dx < \epsilon \cdot m(I)$$

in quanto $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x$ se $n \geq n_{\epsilon}$ per la convergenza uniforme.

Dimostrazione: Si consideri la seguente successione di funzioni

$$f_n : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$$

in cui

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \{0\} \cup \left] \frac{1}{n+1}, 1 \right] \\ n & \text{se } x \in \left] 0, \frac{1}{n} \right] \end{cases}$$

in cui appare evidente come

$$\int_{[0, 1]} f(x) \, dx = 1, \forall n$$

e, ovviamente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0, 1]} f_n(x) \, dx = 1$$

mentre

$$\int_{[0, 1]} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) \, dx = \int_{[0, 1]} 0 \, dx = 0$$

12 Ottobre 2022

È molto importante tenere in considerazione la differenza di definizione di convergenza puntuale e uniforme di una successione di funzioni. Infatti

- se $f_n \rightarrow f$ puntualmente. Allora, $\forall x, \forall \epsilon > 0, \exists n_{\epsilon, x} \in \mathbb{N}$ tale per cui $\forall n \geq n_{\epsilon, x}$ si ottiene

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

- se $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Allora $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale per cui $\forall n \geq n_\epsilon, \forall x$, si ottiene

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

In cui è fondamentale capire la differenza di collocamento di $\forall x$: se posto all'inizio, l' n_ϵ dipende anche da x , se posto alla fine no.

Non solo, ma è noto che l'uniforme convergenza implica la puntuale convergenza. Non solo, ma se una successione di funzioni continue converge uniformemente ad una funzione f , allora essa è continua.

3.4 Teorema sulla derivata del limite

Di seguito si espone l'enunciato del **teorema sulla derivata del limite**:

Teorema 3.1 *Siano $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, posto C^1 , ossia continua con derivata continua. Sia*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

puntuale e sia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n = g$$

Allora f è derivabile e $f' = g$

DIMOSTRAZIONE: Sia $x_0 \in E$ e sia E un intervallo (o un'unione finita di intervalli). Dal teorema fondamentale del calcolo si ha che

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_{n}(t) dt$$

Ma allora si può scrivere

$$f(x) = f_{x_0} + \int_{x_0}^x g(t) dt$$

ma g è continua perché limite uniforme di una funzione continua, per il teorema fondamentale del calcolo.

Esempio: Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

allora è evidente che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = |x|$$

ed è una convergenza uniforme, in quanto

$$\left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|}$$

Allora se si sceglie $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ si ottiene

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{n}$$

che ovviamente può essere reso piccolo quanto si vuole, da cui la convergenza uniforme. Tuttavia, si ha che

$$f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}$$

mentre il limite non è derivabile.

Osservazione: L'ipotesi del teorema richiede che

$$f_n(x) \rightarrow f(x)$$

puntualmente. Tuttavia, il teorema permette di affermare che

$$f'_n(x) \rightarrow f'(x)$$

uniformemente. Allora si può concludere che la successione converge a f uniformemente? No, e il controesempio è

$$f_n(x) = \frac{n}{n+x^2}$$

la quale è una successione che converge puntualmente a 1, ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$$

ma non in modo uniforme. Tuttavia, si ha che

$$f'_n(x) = \frac{-2nx}{(n+x^2)^2}$$

in cui si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n = 0$$

uniformemente. Per dimostrarlo si ottiene che

$$|f'_n(x) - 0| = \frac{2nx}{(n+x^2)^2} = g_n(x)$$

Per trovare una maggiorazione di $g_n(x)$, si considera il massimo della funzione, tramite la derivata della g_n stessa, ovvero

$$g'_n(x) = \frac{2n \cdot (n+x^2)^2 - 4nx \cdot (n+x^2) \cdot 2x}{(n+x^2)^3} = \frac{n-3x^2}{(n+x^2)^3}$$

È facile capire che per

$$x^2 = \frac{n}{3} \rightarrow g'_n(x) = 0$$

Essendo la g_n una funzione dispari, $x = \sqrt{\frac{n}{3}}$ è un punto di massimo per la funzione f'_n . Da ciò si evince che ... continua ...

Ciò dimostra che una successione di funzioni può presentare una convergenza puntuale, mentre la sua derivata presenta una convergenza puntuale.

3.5 Serie di funzioni

Si consideri la serie di funzioni seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

e sia

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad \text{se} \quad s_n(x) \rightarrow s(x)$$

in cui $s(x)$ si dice somma della serie (che, ovviamente, è una funzione). Dal momento che una successione di funzioni può convergere in modo puntuale, oppure uniforme.

Osservazione 1: Sia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = s(x)$$

una serie convergente in modo uniforme. Naturalmente, per la condizione necessaria della convergenza, si sa che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

ed è una convergenza uniforme, in quanto è ovvio che

$$f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x)$$

e siccome entrambe le somme parziali convergono a $s(x)$ in modo uniforme, allora anche $f(x)$ converge a 0 uniformemente.

Esempio: Si consideri la seguente serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

in quanto si è richiesto che $|x| < 1$. Tuttavia, tale convergenza non è uniforme in quanto, ovviamente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$$

in modo puntuale.

3.5.1 Criterio di convergenza uniforme di una serie di funzioni - M-test di Weierstrass

Di seguito si espone il fondamentale criterio per la convergenza uniforme di una serie di funzioni:

Teorema 3.2 Sia $f_n : A \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ ed esista una successione numerica $(a_n)_n$, tale per cui $s_n \in \mathbb{R}$, con $a_n \geq 0, \forall n$ (anche se sarebbe sufficiente richiederlo definitivamente) tale per cui

$$1. \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(z)| \leq a_n, \forall z \in A$$

$$2. \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ è convergente}$$

allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge assolutamente e uniformemente.

DIMOSTRAZIONE: Usando il criterio di Cauchy, si ha che $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon$ tale che $\forall n \geq n_\epsilon$ e $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \epsilon$$

Ciò è vero, infatti

$$\left| \sum_{k=}$$

Osservazione: Data una serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

- per provare la convergenza uniforme
 - si adotta il **test di Weierstrass**
 - si adotta la definizione, cercando la maggiorazione con qualcosa
 - si impiega il criterio di Cauchy
- per provare la non convergenza uniforme
 - si verifica se $f_n(x)$ converge a 0 in modo uniforme.
 - si usa la definizione per assurdo, scegliendo oculatamente x in funzione di n
 - si impiega il criterio di Cauchy, scrivendo

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \frac{1}{1000}$$

scegliendo opportunamente p e x

Esercizio 1: La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

è uniformemente convergente sull'intervallo $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Infatti, è sufficiente considerare il test di Weierstrass e osservare che

$$|x^n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Esercizio 2: La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$$

è uniformemente convergente, in quanto, per il test di Weierstrass, in quanto

$$\left| \frac{\sin(nx)}{x} \right| < \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

per cui è uniformemente convergente.

Esercizio 3: La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{3^n}$$

è sufficiente applicare il test di Weierstrass e osservare che

$$\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{3^n} < \frac{1}{3}$$

per cui è convergente.

Esercizio 4: Si consideri la serie seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\arctan(nx)}{n}$$

Studiandola per $x > 0$, si evince che la serie diventa di Leibniz. Il termine generale soddisfa le condizioni di Leibniz, ma per quanto riguarda la stima dell'errore si osserva

$$s_n(x) - s(x) \leq a_n \quad \rightarrow \quad ||$$

Esercizio 5: Si consideri la serie seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

Allora si può verificare che il termine generale converge uniformemente a 0. Per farlo si studia la successione di funzioni

$$f_n = \frac{x}{n^2 + x^2}$$

e se ne calcola la derivata, ossia

$$f'_n(x) = \frac{n^2 + x^2 - 2x^2}{(n^2 + x^2)^2}$$

e si evince facilmente che tale derivata si annulla in $|x| = n$, per cui $x_0 = n$ è punto di massimo. Allora posto $x = n$ si ottiene che

$$\frac{n}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2n} < \epsilon, \forall \epsilon$$

Quindi il termine generale è infinitesimo uniformemente. La serie converge sicuramente puntualmente, in quanto

$$\left| \frac{x}{n^2 + x^2} \right| \leq |x| \frac{1}{n}$$

ma tale maggiorazione dipende da x . Se la serie convergesse uniformemente, dovrebbe essere vero che $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \epsilon, \quad \forall x$$

Se fosse vero, ponendo $\epsilon = \frac{1}{1000}$, fissato $n \geq n_\epsilon$, ponendo $p = n$

$$\frac{1}{1000} > \sum_{k=n}^{2n} \frac{x}{n^2 + x^2} = \frac{x}{n^2 + x^2} + \frac{x}{(n+1)^2 + x^2} + \frac{x}{(n+2)^2 + x^2} + \cdots + \frac{x}{(2n)^2 + x^2} \geq \frac{n^2}{(2n)^2 + n^2} = \frac{n^2}{5n^2} = \frac{1}{5}$$

che, ovviamente, è assurdo.

14 Ottobre 2022

Uno dei test più importanti da adottare per dimostrare che una serie di funzioni è convergente uniformemente (e, quindi, assolutamente) è il test di Weierstrass. Se ciò non funziona, si può provare con il criterio di Cauchy.

Similmente, per dimostrare che una serie non è uniformemente convergente si prova a vedere se il termine generale non è infinitesimo.

Se lo è, la dimostrazione diviene più complessa ed è necessario, a questo stadio utilizzare ancora Cauchy.

Le serie di funzioni sono fondamentali per costruire funzioni più complesse. Infatti, dato uno spazio vettoriale come \mathbb{R}^n , è possibile costruire ogni elemento dello spazio come combinazione lineare dei vettori della base.

Si consideri, per esempio, la somma parziale seguente:

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot \cos(kx)$$

in cui

$$\alpha_k = \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Il grafico di tale somma parziale è un triangolo non derivabile in $x = 0$. Per ottenere un triangolo perfetto si deve fare tendere $n \rightarrow +\infty$.

Si può considerare, in generale, l'insieme

$$\Phi_n = \{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$$

in cui ϕ_n è una generica successione di funzioni. In generale, pertanto, dato $I \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ si dice che ... continua ... se esiste una successione di funzioni $(\alpha_n)_n$ in \mathbb{C} tale che

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cdot \phi_n(x)$$

Ciò, naturalmente, a livello generale. Invece si ha che, ... continua ..., si dice sviluppabile in serie di centro z_0 , se esiste una successione di funzioni $(\alpha_n)_n$ in \mathbb{C} tale che

$$\phi(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cdot (z - z_0)^n$$

Osservazione: Si consideri, a tal proposito, la serie seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cdot \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1-z}$$

con $\alpha_n = 1, \forall n$. Allora si ha che tale ... continua ...

Esempio: Si consideri, in \mathbb{R} , la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$$

deve essere definita sull'insieme di convergenza $[-1, 1[$, in quanto per $x = 1$ è la serie armonica, mentre per $x = -1$ è una serie di Leibniz e quindi converge.

Osservazione: Si chiama insieme di convergenza l'insieme in cui la serie converge.

Esempio: Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n \cdot x^n$$

È chiaro che la serie non è convergente. L'unica possibilità è che $x = 0$. In particolare, quindi, l'insieme di convergenza è $E = \{0\}$. È un intervallo, ma è degenere.

Osservazione: Si osservi che la serie di partenza

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cdot (z - z_0)^n$$

è sempre definita in $z = z_0$ e il valore di convergenza è α_0 .

Esempio: Una serie che presenta come insieme di convergenza tutto \mathbb{R} è, proprio

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \cdot x^n$$

3.6 Teorema di proprietà dell'insieme di convergenza delle serie

Si consideri la serie di potenze di seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cdot (z - z_0)^n$$

1. Si supponga che $\exists z_1 \in \mathbb{C}$, tale che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cdot (z_1 - z_0)^n$$

converge, allora

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{se} \quad |z - z_0| < |z_1 - z_0|$$

si ha che la serie di potenze di partenza converge assolutamente al numero z .

2. Su ogni palla chiusa compatta $\overline{\mathcal{B}(z_0, r)} \subset \mathcal{B}(z_0, |z_1 - z_0|)$ la convergenza è uniforme. Nella palla aperta, invece, si ha convergenza puntuale.

DIMOSTRAZIONE 1: Per ipotesi è noto che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \cdot (z_1 - z_0)^k$$

è convergente. Per la condizione necessaria per la convergenza di una serie, la successione dei termini generale è infinitesima, ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \cdot (z_1 - z_0)^n = 0$$

Siccome la successione

$$(\alpha_n \cdot (z_1 - z_0)^n)_n$$

ammette limite, essa è limitata, ovvero sia

$$\forall N \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} \text{ tale che } \forall n > M, |\alpha_n \cdot (z_1 - z_0)^n| < N$$

Ma è possibile affermare che

$$|\alpha_n \cdot (z_1 - z_0)^n| = |\alpha_n| \cdot |z_1 - z_0|^n < N$$

Ma siccome ... continua...

Ciò significa che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} N \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n$$

è convertente, in quanto la serie geometrica è convertente. Per il criterio del confronto, la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cdot (z - z_0)^n$$

converge assolutamente.

DIMOSTRAZIONE 2: Si consideri la palla $\overline{\mathcal{B}(z_0, r)} \subset \mathcal{B}(z_0, |z_1 - z_0|)$. Allora si ha che

$$\forall z \in \overline{\mathcal{B}(z_0, r)} \rightarrow |z - z_0| \leq r < |z_1 - z_0| \rightarrow \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| \leq \frac{r}{|z_1 - z_0|} < 1$$

in cui è fondamentale osservare come

$$\frac{r}{|z_1 - z_0|}$$

non dipende più da z . È noto che

$$|\alpha_n \cdot (z - z_0)^n| \leq M \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{r}{z_1 - z_0} \right|^n$$

Se si pone

$$K = \left| \frac{r}{z_1 - z_0} \right|$$

si ottiene che

$$|\alpha_n \cdot (z - z_0)^n| \leq M \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| \leq M \cdot K^n$$

Se ora si considera la successione $(b_n)_n$ dove $b_n = MK^n$ si è già dimostrato che ... continua ..

3.7 Raggio di convergenza

Si consideri la definizione di **raggio di convergenza** seguente:

RAGGIO DI CONVERGENZA

Sia $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ una serie di potenze. Sia E l'insieme di convergenza della serie. Se $E = \{z_0\}$ si pone $\rho = 0$; se $E = \mathbb{C}$ si pone $\rho = +\infty$, altrimenti si pone

$$\rho = \sup\{|z - z_0| \in \mathbb{R} : z \in E\}$$

allora ρ si dice **raggio di convergenza**.

3.7.1 Proprietà caratteristiche del raggio di convergenza

Si espongono di seguito le proprietà caratteristiche del raggio di convergenza.

Sia $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$, con E insieme di convergenza, posto $E \neq \{z_0\}$ e $E \neq \mathbb{C}$. Allora $\rho \in \mathbb{R}^+$ è il raggio di convergenza della serie **se e solo se**

1. $\forall z \in \mathbb{C}$, se $|z - z_0| < \rho$, allora $z \in E$
2. $\forall z \in \mathbb{C}$, se $|z - z_0| > \rho$, allora $z \notin E$

DIMOSTRAZIONE 1: Sia r il raggio di convergenza, ossia

$$r = \sup\{|z - z_0| : z \in E\}$$

per cui vale la 2 proprietà: infatti, se $|z - z_0| > M$ allora $x \notin E$.

Non solo, ma vale anche la 1 proprietà: infatti, sia $|z - z_0| < M$, allora esiste $z_1 \in E$ tale che

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0| < \dots$$

per il teorema precedentemente esposto e, quindi, $z \in E$.

DIMOSTRAZIONE 2: Sia ρ che verifica la 1 e la 2 proprietà. Allora sicuramente ρ è un maggiore $\{|z - z_0| : z \in E\}$.

Per dimostrare che è il minimo fra i maggioranti, si ponga $\rho_1 < \rho$, per cui esiste z_1 tale che

$$\rho_1 < |z_1 - z_0| < \rho$$

tale per cui $z_1 \in E$. Quindi ρ_1 non è un maggiorante di $\{|z - z_0| : z \in E\}$. Tale considerazione significa che

$$\rho = \sup\{|z - z_0| \text{ tale che } z \in E\}$$

Osservazione: Si osservi che se E è un insieme di convergenza e si pone

$$I =]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$$

come intervallo di convergenza. Allora, in generale è vero che

$$I \subseteq E \subseteq \bar{I}$$

dove \bar{I} è la chiusura di I . Ciò perché sul bordo dell'intervallo di convergenza non è sempre garantita la convergenza.

3.8 Proprietà delle serie di potenze

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in cui I è l'intervallo di convergenza, tale che

$$I =]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\quad \text{oppure} \quad I = \mathbb{R}$$

escludendo il caso in cui $\rho = 0$. Posto

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

ovverosia

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

si ha che

1. $\forall x \in I$ si ha che

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

2. Posto $f \in C^\infty(I)$ per cui, in particolare, f è continua. Allora si ha che

- $f'(x) = a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$
- $f''(x) = 2a_2 + \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}$
- \dots
- $f^{(k)}(x) = k! a_k + \sum_{n=k+1}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k}$

DIMOSTRAZIONE 1: Sia $x \in I$, si consideri $[a, b] \subset I$ tale che $x, x_0 \in [a, b]$. La serie

$$a_0 + \sum a_n (x - x_0)^n$$

converge uniformemente su $[a, b]$, ovvero

$$s_n(x) \rightarrow s(x)$$

uniformemente. Ma allora, per il teorema sull'integrale del limite uniforme si ha che $s(x)$ è integrabile e, in particolare,

$$\int_{x_0}^x s(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x s_n(t) dt$$

ma quindi

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x \left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot (x - x_0)^k \right) dt$$

ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[a_0 \cdot (x - x_0) + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \frac{1}{k+1} (x - x_0)^{k+1} \right]$$

Osservazione: La continuità di f è immediata con ragionamento analogo. Tuttavia, è fondamentale capire che bisogna ragionare sui compatti contenuti nell'intervallo di convergenza. Ciò non garantisce che la funzione sia continua sul bordo, anche se questo risulta comunque vero per il **lemma di Abel**.

3.9 Derivabilità

Si consideri la ridotta s_n

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot (x - x_0)^k$$

che è la ridotta di una serie di potenze

$$a_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

Tuttavia, non è possibile affermare a priori che $s'_n(x) = a_1 + \sum_{k=2}^n k a_k (x - x_0)^{k-1}$ in quanto non è detto che ... continua ...

Quindi, detto I' l'intervallo di convergenza della serie

$$a_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

si ha che in ogni compatto $[a, b] \subset I' \cap I$ (in cui è fondamentale chiedere $I' \cap I$ in quanto devono essere finite entrambe le serie), la serie delle derivate è la derivata della serie. Per concludere la dimostrazione, si deve provare che $I' = I$, ossia che $\rho' = \rho$, ossia i due raggi di convergenza coincidono.

DIMOSTRAZIONE 1: Siano

- ρ il raggio di convergenza della serie $f(x)$
- ρ' il raggio di convergenza della serie delle derivate

$$a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1}$$

Si provi che $\rho = \rho'$. Sia x tale che $|x - x_0| < \rho$ e si provi che

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1}$$

converge. Se ciò è vero, converge anche la serie di partenza ... continua ...

Si osserva, allora, che

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = (x - x_0) \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (x - x_0)^{n-1}$$

Sia $|x - x_0| < \rho$. Esiste, allora, x_1 tale che

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0| < \rho$$

Allora la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n \cdot (x_1 - x_0)^{n-1}|$$

converge. Quindi la successione $|a_n \cdot (x - x_0)^n|$ è limitata, per cui $\exists M$ tale che

$$|a_n \cdot (x_1 - x_0)^n| < M, \forall n$$

Pertanto

$$|na_n(x - x_0)^{n-1}| = |a_n \cdot (x_n - x_0)^n| \cdot n \cdot \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right| < M \cdot n \cdot K^{n-1}$$

posto

$$K = \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right| < 1$$

È facile capire che la serie

$$\sum_{n \cdot K^{n-1}}$$

converge, per il criterio del rapporto

$$\frac{(n+1) \cdot K^n}{n \cdot K^{n-1}} \rightarrow K < 1$$

per cui, per il criterio del confronto, la serie

$$\sum n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1}$$

converge.

Quindi, dove converge la serie di partenza, anche la serie delle derivate è convergente.

DIMOSTRAZIONE 2: Siano, allora, $|x - x_0| > \rho$. La serie

$$\sum |a_n \cdot (x - x_0)^{n-1}|$$

non converge. Ma allora è facile osservare che

$$|na_n(x - x_0)^{n-1}| \geq |a_n \cdot (x - x_0)^{n-1}|$$

quindi la serie

$$\sum |na_n(x - x_0)^{n-1}|$$

non converge.

Osservazione 1: Si conclude, quindi, che

$$\frac{d}{dx} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \right) = a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$$

Osservazione 2: Si consideri la funzione seguente

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

allora

- $f(x_0) = a_0$
- $f'(x_0) = a_1$
- $f''(x_0) = 2a_2$
- \dots
- $f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$

Più in generale, si ottiene che

$$f'(x_0) = a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

per cui

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

che prende il nome di serie di Taylor.

Osservazione: Se la f è sviluppabile in serie di potenze, allora

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$$

in cui $P_n(x)$ è il polinomio di Taylor di grado n :

$$\mathbb{P}_n(x) = f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x) - P_n(x)) = 0$$

in cui $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Osservazione: Si osservi che si dice che una funzione è analitica una funzione sviluppabile in serie di potenze, con $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Si osservi che se f è analitica, allora f è C^∞ .

Tuttavia, in \mathbb{R} , se una funzione è C^∞ , non è analitica. Un esempio chiave è la funzione seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Calcolandone la derivata si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot (2x^{-3}) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Tuttavia la serie di Taylor di f è

$$f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$$

e quindi non coincide con la funzione stessa, ovvero

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Osservazione: Si osservi che un modo per decretare l'analiticità di una funzione è calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) - P_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n(x) = 0$$

Per descrivere il resto della formula di Taylor si può utilizzare il resto nella formula di Lagrange:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

con $|\xi - x_0| < |x - x_0|$

3.10 Primo criterio di sviluppabilità

Sia $f \in C^\infty(I)$ ed esista $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f^{(n)}(x)| \leq M^n, \forall n \in I$ DIMOSTRAZIONE: È sufficiente

dimostrare che

$$|E_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

... continua ...

Esempio: Si consideri la funzione $\cos(x)$, allora la serie di Taylor corrispondente è

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

e analogamente per il $\sin(x)$ si ottiene

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Per verificare, tuttavia, che tali funzioni sono sviluppabili come serie di potenze, è sufficiente dimostrare che

...continua...

Esempio: Si consideri la serie di Taylor di e^x seguente

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Tuttavia, in questo caso, non è vero che

$$|e^x| M^n, \quad \forall n, \forall x$$

Tuttavia, è possibile restringere e^x nell'intervallo $[-b, b]$ in cui

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^b \leq (e^b)^n = M^n$$

e preso tale intervallo arbitrariamente grande, è possibile considerare tutto R , per cui è sviluppabile come serie di potenze.

17 Ottobre 2022

Ovviamente, non è vero che ogni funzione può essere sviluppata come serie di potenze. Infatti, non è sufficiente che una funzione sia $C^{+\infty}$; una funzione sviluppabile come serie di potenze presenta un intervallo di convergenza che è sempre un intervallo. Tuttavia, è fondamentale tenere in considerazione anche il controllo sulla derivata.

Esempio 1: Naturalmente, data la funzione e^{-x} , essa può essere sviluppata come

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

Se, ovviamente, si considera il seno iperbolico e il coseno iperbolico, il loro sviluppo è una combinazione lineare di e^x e e^{-x} .

Esempio 2: Se si considera la funzione $\log(1+n)$, si può considerare la sua derivata prima

$$\frac{1}{1+n}$$

in modo tale da ottenere lo sviluppo della serie armonica. Da ciò si evince che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x 1 + \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{1+n} \cdot x^{n+1}$$

ottenendo il suo sviluppo, che può essere scritto in forma analoga

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} x^n$$

Analogamente per $\log(1-x)$ si ottiene

$$\log(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (-1)^n x^n$$

rispettando sempre la condizione $|x| < 1$.

Esempio 3: Si consideri il caso seguente

Allora la risoluzione prevede di considerare con il criterio del rapporto e calcolare il limite seguente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty}$$

Il criterio del rapporto afferma che ...continua...

Esempio 4: Si consideri la serie seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n-1}$$

Dal momento che

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

allora, derivando tale funzione si ottiene

$$D\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n-1}$$

si può moltiplicare per la medesima quantità, ottenendo

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$$

Esempio 5: Si calcoli la somma delle seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

allora, sfruttando la teoria della serie di potenze, si può considerare la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$$

in cui basta imporre $x = \frac{1}{2}$ e si calcola la somma. In precedenza si era ottenuto che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Per ottenere, però, n^2 si ottiene che

$$D \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}$$

per cui, per ottenere n come esponente, si moltiplica per x , da cui

$$x \cdot D \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$$

ponendo $x = \frac{1}{2}$ si ottiene come somma 6.

3.10.1 Serie binomiale

Posto $\alpha \in \mathbb{R}$ si ottiene che

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$$

in cui

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - n + 1)}{n!}$$

Tale risultato è tale, in quanto

$$f'(x) = \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1} \tag{1}$$

$$\dots \tag{2}$$

Tale serie risulta importante in quanto è possibile assegnare ad α un qualsiasi valore reale. Ovviamente, se $\alpha = m \in \mathbb{N}$ si ottiene il binomio di Newton, da cui

$$\binom{m}{n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-k+1)}{n!}$$

in cui se $m = n$ si ottiene come risultato 1, da cui

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} x^n$$

Se, invece, si pone $\alpha = \frac{1}{2}$ si ottiene lo sviluppo in serie della radice di $1+x$, ovvero

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$$

e per $\alpha = -\frac{1}{2}$ si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n$$

Considerando x^2 al posto di x si ottiene la derivata dell' $\arcsin(x)$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n}$$

Per ricostruire l' $\arcsin(x)$ è sufficiente calcolare

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n t^{2n} \right] dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$$

... continua ...

3.11 Funzioni in \mathbb{C}

Si consideri l'esponenziale sul campo complesso, come mostrato di seguito:

$$e^z \quad \text{con} \quad z \in \mathbb{C}$$

per cui, se $z = x + i \cdot y$, per la **formula di Eulero** si ottiene

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos(x) + i \cdot \sin(y))$$

Tuttavia, per definire l'esponenziale nel campo complesso, si ha che

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Per il criterio del rapporto si ha che

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right| \cdot \left| \frac{n!}{z^n} \right| = |z| \cdot \frac{1}{n+1}$$

che converge a 0 per ogni z .

Esempio 1: La definizione del $\sin(z)$ in campo complesso è la seguente

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Esempio 2: Per dimostrare la formula di Eulero, si considera lo sviluppo seguente

$$e^{i \cdot y} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot (i \cdot y)^n$$

in cui è evidente capire come, dal momento che

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 4k \\ i & \text{se } n = 4k + 1 \\ -1 & \text{se } n = 4k + 2 \\ -i & \text{se } n = 4k + 3 \end{cases}$$

è possibile spezzare la sommatoria di cui sopra in 4 sommatorie a seconda del valore di i^n , ottenendo

$$\sum_{n=4k}^{+\infty} \frac{1}{(4k)!} \cdot y^{4k} + \sum_{n=4k+1}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)!} \cdot i \cdot y^{4k+1} + \sum_{n=4k+2}^{+\infty} \frac{1}{(4k+2)!} \cdot -y^{4k+2} + \sum_{n=4k+3}^{+\infty} \frac{1}{(4k+3)!} \cdot -i \cdot y^{4k+3}$$

Allora posto $n = 2m$, per il primo addendo si ottiene

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m)!} \cdot y^{2m}$$

per il secondo addendo si ottiene

$$i \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} \cdot y^{2m+1}$$

per il terzo addendo si ottiene

$$\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{(2m+2)!} \cdot y^{2m+2}$$

e infine, per il quarto addendo si ottiene

$$-i \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+3)!} \cdot y^{2m+3}$$

4 Topologia di \mathbb{R}^n

Il campo \mathbb{R}^n , con $n > 1$, non eredita la relazione d'ordine del campo \mathbb{R} . In particolare, però, \mathbb{R}^n è uno spazio

- vettoriale
- metrico (ovvero vi si può operare ad una certa distanza)

Per esempio, un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è sempre un **vettore colonna** della forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

e si considererà una matrice di riga nella forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

Per le proprietà che lo caratterizzano, \mathbb{R}^n è uno **spazio di Hilbert**.

4.1 Prodotto scalare

Sia X uno spazio vettoriale; allora un prodotto scalare in X è una funzione bilineare

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \mapsto \mathbb{R}$$

che presenta le seguenti proprietà

- La simmetria: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- La positività e non generalità: $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in X$ e, in particolare,

$$\langle x, x \rangle = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = 0$$

- La bilinearità: $\langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R},$ posto $x, y \in X$
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

In particolare, in \mathbb{R}^n , si definisce il prodotto scalare come un banale prodotto righe per colonne, ovvero

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k$$

Osservazione: Un prodotto scalare non definito su \mathbb{R}^n , ma definito sullo spazio vettoriale

$$C^0([a, b]) = \{\phi : [a, b] \mapsto \mathbb{R}, \text{ continua}\}$$

allora

$$\int_a^b \phi(x) \cdot \psi(x) dx$$

4.1.1 Norma di un vettore

Sia X uno spazio vettoriale su cui è definito un prodotto scalare. Allora si definisce norma di un vettore $x \in X$ come

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

La norma gode delle seguenti proprietà

- $||x|| \geq 0$, $\forall x \in X$ e, in particolare, $||x|| = 0$ **se e solo se** $x = 0$
- $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in X$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ chiamata disuguaglianza triangolare.

DIMOSTRAZIONE 1: Tale dimostrazione è immediata dalla definizione di norma

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

DIMOSTRAZIONE 2: Dalla definizione di norma si ha che

$$\sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \langle x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \cdot ||x||$$

DIMOSTRAZIONE 3: La disuguaglianza triangolare si può dimostrare dalla definizione di norma, ovvero

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} =$$

...continua...

Osservazione: Si osservi che se X è uno spazio vettoriale dotato di una norma $||\cdot||$, si può definire la distanza come

$$d(x, y) = ||x - y||$$

che consente di parlare di intorni, intervalli aperti e chiusi e, di conseguenza, anche di limiti.

4.1.2 Disuguaglianza di Bumcokowski-Cauchy-Schwarz

Sia X uno spazio vettoriale con prodotto scalare, allora $\forall x, y \in X$. Allora si ha che

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Inoltre, vale l'uguaglianza **se e solo se** x e y sono **linearmente dipendenti**.

DIMOSTRAZIONE: Si dimostri che $\forall x, y \in X$ si ha che

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$$

Si distinguono i casi seguenti

- Nel caso in cui $y = 0$, si ha che

$$\langle x, y \rangle = 0, \forall x, \|y\| = 0$$

- Nel caso in cui $y \neq 0$ e $x \neq 0$, si introduce, $\forall t \in \mathbb{R}$, il polinomio seguente

$$0 \leq \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t \cdot \langle x, y \rangle + t^2 \cdot \|y\|^2$$

Considerando tale polinomio in funzione di t , si osserva che $f(t) \geq 0, \forall t$ **se e solo se** $\Delta \leq 0$.
Ma siccome il Δ del polinomio si ottiene come

$$4 \cdot (\langle x, y \rangle)^2 - 4 \cdot \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

si deve dimostrare che

$$4 \cdot (\langle x, y \rangle)^2 - 4 \cdot \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0$$

che può essere riscritto come

$$(\langle x, y \rangle)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

che è una disuguaglianza sempre verificata.

Per dimostrare che la disuguaglianza di Bumcokowski-Cauchy-Schwarz vale **se e solo se** i vettori considerati sono linearmente dipendenti. Dire che sono linearmente dipendenti significa che $\exists \tilde{t} \in \mathbb{R}$ tale che $f(\tilde{t}) = 0$, ovvero che

$$\|x + \tilde{t}y\|^2 = 0$$

Ma ciò è vero solamente quando $x + \tilde{t}y$ per la definizione di norma, ovvero $x = -\tilde{t}y$, che significa che i vettori x e y sono linearmente dipendenti

18 Ottobre 2022

Lo spazio \mathbb{R}^n è uno spazio vettoriale, in cui i suoi elementi sono delle matrici colonna, non proprio dei vettori.

\mathbb{R}^n è uno spazio di Hilbert, in cui è possibile definire un **prodotto scalare** come segue

$$X \text{ spazio vettoriale con } \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \mapsto \mathbb{R}$$

Se in uno spazio vettoriale viene definito un prodotto scalare, automaticamente viene definita una **norma indotta**

$$\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}$$

definita come

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Tuttavia, esistono anche spazi vettoriali su cui è definita una norma, senza che vi sia definito uno spazio vettoriale, come quella esposta di seguito, definita come **norma 1**:

- $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$, posto

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

- Nel caso di una norma indotta si ha che, $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
Nel caso di un vettore, si ha la corrispondenza

$$\|\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n)^T\|_1 = \|(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n)^T\|_1 = |\alpha \cdot x_1| + |\alpha \cdot x_2| + \dots + |\alpha \cdot x_n| = |\alpha| \cdot \|x\|_1$$

- La disuguaglianza triangolare...

Osservazione: L'unica norma che risulta essere indotta da un prodotto scalare è la norma 2

Ciò che risulta essere fondamentale è lo spazio di funzioni del tipo

$$X = C([a, b])$$

in cui viene considerato il prodotto scalare

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{[a, b]} \phi(t) \cdot \psi(t)$$

4.2 Distanza (metrica)

Di seguito si espone la definizione di **distanza (metrica)**:

DISTANZA (METRICA)

Dato X un **insieme vuoto**, si chiama **distanza (metrica)** su X una funzione d definita come

$$d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$$

che soddisfa le proprietà seguenti:

- $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
Inoltre si ha che

$$d(x, x) = 0 \text{ se e solo se } x = y$$

- la proprietà simmetrica $d(x, y) = d(y, x)$, che non è sempre verificata per distanze semi-metriche
- la disuguaglianza triangolare $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Osservazioni: Si osservi che un prodotto scalare induce una norma, una norma induce una distanza e una distanza induce una topologia.

4.3 Spazio metrico

Di seguito si espone la definizione di **spazio metrico**

SPAZIO METRICO

Si dice spazio metrico un insieme in cui è definita una distanza.

Esempio 1: Si consideri uno spazio X (non necessariamente uno spazio vettoriale). È sempre possibile definire la **distanza banale** seguente:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Esempio 2: Si consideri uno spazio $X = \mathbb{R}^n$, allora si definisce distanza euclidea come:

Esempio 3: Si consideri uno spazio $X = C([0, 2\pi])$, allora si definisce la distanza come

$$(\phi, \psi) = \|\phi - \psi\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} (\phi(t) - \psi(t))^2 dt}$$

Allora si ha che

$$d(\sin(t), \cos(t)) = \sqrt{2\pi}$$

4.4 Vettori ortogonali

Due vettori x, y si dicono ortogonali se

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Nello spazio dell'esempio precedente, $\sin(t)$ e $\cos(t)$ sono ortogonali, in quanto

$$\int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt = 0$$

4.5 Palla-aperta

Sia X, d uno spazio metrico. Si chiama palla-aperta di centro $x_0 \in X$ e raggio $r \in \mathbb{R}^+$ l'insieme così definita

$$\mathcal{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

mentre si chiama palla chiusa

$$\mathcal{B}_{\text{chiusa}}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

Esempio 1: Si consideri uno spazio vettoriale \mathbb{R}^2 con la norma $\|\cdot\|_2$ in cui si ha che

$$d((x_1, x_2), (0, 0)) = |x_1| + |x_2|$$

Allora la palla $\mathcal{B}(0, 1)$ è un quadrato ruotato con i vertici sugli assi.

Esempio 2: Se si considera, invece, la norma indotta

$$\|x\|_{\infty} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

è esattamente un quadrato di lato 1 + 1

4.6 Intorno

Di seguito si espone la definizione di **intorno**:

INTORNO

Sia X, d uno spazio metrico, con $x_0 \in X$. Si dice intorno di x_0 qualunque insieme $U \subseteq X$ tale che esiste $r > 0$ affinché

$$\mathcal{B}(x_0, r) \subseteq U$$

4.7 Proprietà di un intorno

Sia \mathcal{N}_x una famiglia di intorni di x , allora

1. sia $U \in \mathcal{N}_x$, allora $x \in U$
2. siano $U, V \in \mathcal{N}_x$, allora $U \cap V \in \mathcal{N}_x$
3. Siano $U \in \mathcal{N}_x$ e $V \subseteq X$. Se $U \subset V$, allora $V \in \mathcal{N}_x$
4. Proprietà di separazione di Hausdorff: siano $x \neq y$; allora esiste $U \in \mathcal{N}_x$ e $V \in \mathcal{N}_y$ tale che $U \cap V = \emptyset$.

DIMOSTRAZIONE 1: Dal momento che $U \in \mathcal{N}_x$, allora $\exists \mathcal{B}(x, t) \subset U$, per cui ovviamente $x \in U$

DIMOSTRAZIONE 2: Dal momento che $U \in \mathcal{N}_x$, allora $\exists \mathcal{B}(x, r_1) \subset U$.

Dal momento che $V \in \mathcal{N}_x$, allora $\exists \mathcal{B}(x, r_2) \subset V$.

Si considera il minimo raggio tra r_1 e r_2 , ovvero $r = \min\{r_1, r_2\}$. Allora, ovviamente, si ha che

$$\mathcal{B}(x, r) \subset U \cap V$$

e, ovviamente, ciò significa che $U \cap V \in \mathcal{N}_x$ per definizione di intorno.

DIMOSTRAZIONE 3: Sia $U \in \mathcal{N}_x$, allora $\exists \mathcal{B}(x, r) \subset U$; ma siccome $U \subset V$ quindi $\mathcal{B}(x, r) \subset V$ e ciò significa che $V \in \mathcal{N}_x$.

DIMOSTRAZIONE 4: Si considerino x e y due numeri reali disgiunti. Allora, per la proprietà della distanza, si ha che la loro distanza è strettamente positiva

$$r = d(x, y) > 0$$

Al fine di avere due palle disgiunte, si considerano due raggi minori della metà della distanza tra x e y ; per esempio

$$r_1 = \frac{r}{4} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{r}{4}$$

Ciò comporta che

$$\mathcal{B}(x, r_1) \cap \mathcal{B}(y, r_2) = \emptyset$$

Si proceda per assurdo, considerando $p \in \mathcal{B}(x, r_1) \cap \mathcal{B}(y, r_2)$.

Allora si ha che

$$r = d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y) < 2 \cdot \frac{r}{4}$$

che è assurdo.

4.8 Punto interno ad un insieme

Si fornisce di seguito la definizione di **punto interno ad un insieme**:

PUNTO INTERNO AD UN INSIEME

Un punto x si dice **punto interno** di un insieme U se U è un intorno di x , ovvero esiste $\mathcal{B}(x, r) \subseteq U$.

Osservazione: Si osservi che chiedere che un punto sia interno ad un insieme è più forte che chiedere che il punto appartenga ad un insieme. Infatti, se $U = [a, b]$, allora $a \in U$, ma a non è interno ad U .

Un insieme $A \subseteq X$ è **aperto** se per ogni $x \in A$, x è interno ad A .

4.9 Punto isolato

Si fornisce di seguito la definizione di **punto isolato**:

PUNTO ISOLATO

Un punto $x \in X$ si dice **isolato** in $E \subseteq X$ se $x \in E$ ed esiste $\mathcal{B}(x, r)$ tale che $\mathcal{B}(x, r) \cap E = \{x\}$.

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

Sia $E \subseteq X$. Un punto $x \in X$ si dice **punto di accumulazione** di E se per ogni intorno U di x esiste $y \in U \cap E$, $y \neq x$.

CHIUSURA DI UN INSIEME

Sia $E \subseteq X$, si chiama **chiusura** di E l'insieme

$$\overline{E} = E \cup \{\text{punto di accumulazione di } E\}$$

Osservazione: Sia X un insieme, allora X e \emptyset sono sia aperti che chiusi. Tuttavia, in \mathbb{R} , per esempio, esistono insiemi che non sono né aperti né chiusi, come $]a, b]$.

Esercizio: Si consideri la serie seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+i}{3^n - n \cdot i}$$

Tale serie può essere studiata andando a calcolare la corrispondente serie dei moduli, ottenendo

$$\left| \frac{2n+i}{3^n - n \cdot i} \right| = \frac{|2n+i|}{|3^n - n \cdot i|} = \frac{\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{9^n+n^2}}$$

Appare immediatamente evidente che tale termine abbia ordine di infinitesimo soprareale, per cui è necessariamente convergente.

Oppure può essere considerato anche il criterio del rapporto, per cui

4.10 Corrispondenza tra palla aperta e insieme aperto

Una palla aperta è un insieme aperto.

DIMOSTRAZIONE: Si consideri uno spazio metrico generale X, d . Sia, allora, una palla aperta $\mathcal{B}(x_0, r)$ di centro x_0 e raggio $r \in \mathbb{R}^+$.

Si vuole dimostrare che $\forall x_1 \in \mathcal{B}(x_0, r) \quad \exists \mathcal{B}_1(x_1, \rho) \subseteq \mathcal{B}(x_0, r)$.

Dal momento che $r - d(x_1, x_0) > 0$, si definisce $\rho > 0$ che presenta la seguente proprietà $\rho < r - d(x_1, x_0)$. Si verifichi, ora, che $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$, ovvero dato $x \in \mathcal{B}_1$ deve essere che $x \in \mathcal{B}$.

Per quanto assunto in precedenza, si ha che $d(x, x_1) < \rho < r - d(x_1, x_0)$. Allora si ha che

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) < r - d(x_1, x_0) + d(x_1, x_0) = r$$

4.11 Caratterizzazione di un insieme chiuso

$E \subseteq X$ è un insieme chiuso **se e solo** se l'insieme complementare $X - E$ è aperto in X .

DIMOSTRAZIONE 1: Sia E un insieme chiuso e si consideri $x_0 \in X - E$. Ovviamente $x_0 \notin E$, per cui non può essere un punto di accumulazione per E , in quanto esso è un insieme chiuso e, quindi, contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Se x_0 fosse un punto di accumulazione, per definizione, $\forall U$ intorno di x_0 , dovrebbe $\exists y \neq x_0$ tale che $y \in U \cap E$.

Pertanto, non essendo x_0 punto di accumulazione per E , significa che $\exists \mathcal{B}(x_0, \epsilon)$, con $\epsilon > 0$ tale che $\mathcal{B} \subset X - E$.

DIMOSTRAZIONE 2: Sia $X - E$ un insieme aperto, si dimostri che E è chiuso.

Siccome $X - E$ è aperto, si ha che

$$\forall x_1 \in X - E, \quad \exists \mathcal{B}(x, \epsilon) \text{ con } \epsilon > 0 \text{ tale che } \mathcal{B} \subset X - E$$

Siccome $\mathcal{B} \cap E = \emptyset$, x non è punto di accumulazione per E e, siccome ciò significa che E contiene tutti i suoi punti di accumulazione, E è chiuso.

Esercizio: Si provi che ogni insieme del tipo $]a, b[\times]c, d[$ con $a < b$ è aperto in \mathbb{R}^n .

DIMOSTRAZIONE: Si consideri $A =]a, b[$ e $B =]c, d[$, per cui

$$C = A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } x \in A, y \in B\}$$

Si vuole dimostrare che $\forall (x, y) \in C, \exists r > 0$ tale che

$$\mathcal{B}((x, y), r) \subset C$$

Allora si considera un punto di coordinate (x, y) , con $a < x < b$ e $c < y < d$, allora si può prendere $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tale che

$$a < x - r_1 < x < x + r_1 < b \quad \text{e} \quad c < y - r_2 < y < y + r_2 < d$$

Si considera, poi $r = \min(r_1, r_2)$, affinché si possa costruire un quadrato di lato $l = 2r$.

... continua ...

4.12 Punto di frontiera

Si espone di seguito la definizione di **punto di frontiera**:

PUNTO DI FRONTIERA

Sia $E \subseteq X$; allora, preso $x \in X$, si dice punto di frontiera di E se per ogni intorno U di x esiste

$$y_1 \in U \cap E \quad \text{e} \quad y_2 \in U - E$$

4.13 Frontiera di un insieme

Si espone di seguito la definizione di **frontiera di un insieme**:

FRONTIERA DI UN INSIEME

Si chiama frontiera di E l'insieme dei punti di frontiera di E .

4.14 Insieme denso

Si espone di seguito la definizione di **insieme denso**:

INSIEME DENSO

4.15 Insieme limitato

Si espone di seguito la definizione di **insieme limitato**:

INSIEME LIMITATO

Sia $E \subseteq X$. Allora E si dice **limitato** se esiste $\mathcal{B}(x_0, r) \subseteq X$ tale che $E \subseteq \mathcal{B}(x_0, r)$.

4.16 Diametro di un insieme

Si espone di seguito la definizione di **diametro di un insieme**:

DIAMETRO DI UN INSIEME

Sia $E \subseteq X$. Allora si chiama diametro di E

$$\dim E = \sup\{d(x, y), x, y \in E\}$$

Osservazione: Un insieme E è limitato **se e solo se** $\dim E$ è finito.

19 Ottobre 2022

Dopo aver introdotto la topologia in \mathbb{R}^n , sono stati introdotti dei concetti che sono validi per qualsiasi spazio metrico, quali il concetto di **palla** e di **intorno** che consente di introdurre la definizione di limite, in qualsiasi spazio vettoriale.

4.17 Proprietà di insiemi aperti e chiusi

Si espongono di seguito le proprietà di insiemi aperti e chiusi:

PROPRIETÀ DI INSIEMI APERTI E CHIUSI

Gli insiemi aperti e chiusi soddisfano le proprietà seguenti:

1. L'unione di insiemi aperti è aperta
2. L'intersezione di insiemi aperti è aperta
3. L'unione di insiemi chiusi è chiusa
4. L'intersezione di insiemi chiusi è chiusa

DIMOSTRAZIONE 1: Sia

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

con I insiemi di indici arbitrari tale che A è aperto. Allora si osserva che

$$\forall x \in A, \exists i \in I \text{ tale che } x \in A_i$$

quindi

$$\exists r > 0 \text{ tale che } \mathcal{B}(x, r) \subset A_i \subset A$$

DIMOSTRAZIONE 2: Sia

$$A = A_1 \cap A_2$$

con A_1 e A_2 aperti. Allora $\forall x \in A$ si ha che $x \in A_1$ e $x \in A_2$.

Visto che $x \in A_1$

$$\exists r_1 > 0 \text{ tale che } \mathcal{B}(x, r_1) \subset A_1$$

Similmente, visto che $x \in A_2$

$$\exists r_2 > 0 \text{ tale che } \mathcal{B}(x, r_2) \subset A_2$$

Sarà ora sufficiente considerare $r = \min\{r_1, r_2\}$ per evincere che

$$\mathcal{B}(x, r) \subset A$$

per cui A è aperto.

Osservazione: Nel caso di un numero infinito di insiemi, non può essere utilizzata tale dimostrazione, in quanto non è detto che esista il minimo dei raggi.

DIMOSTRAZIONE 3: Sia

$$C = \bigcap_{i \in I} C_i$$

con C_i aperto. Allora è ovvio che

$$X - C = \bigcup_{i \in I} X - C_i$$

che è ovviamente chiuso. ... continua ...

Esercizio 1: Si dimostri che esiste l'intersezione di aperti che non è aperto. È infatti possibile considerare

$$\left(\mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \right)_n$$

che corrisponde a

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) = \{x\}$$

Esercizio 2: È noto che \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} , in quanto $\overline{\mathbb{Q}}$. Si deve provare che

$$\overline{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

ovvero che ogni insieme aperto di \mathbb{R}^2 contiene un punto $(p, q)^T$ con $p, q \in \mathbb{Q}$

DIMOSTRAZIONE: Sia dato un insieme A è aperto. Allora si ha che

$$\forall (x, y)^T \in A, \exists r > 0 \text{ tale che } \mathcal{B}((x, y)^T, r) \subset A$$

per definizione stessa di aperto. Si consideri allora il quadrato inscritto nella palla presa in considerazione, i cui vertici sono a e b , con $a < b$ e c e d , con $c < d$. Ma per il teorema di densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} è noto che $\exists q \in]a, b[\cap \mathbb{Q}$ e, similmente, $\exists p \in]c, d[\cap \mathbb{Q}$.

Ciò dimostra che se un insieme D è denso in \mathbb{R} , ovvero $\overline{D} = \mathbb{R}$, allora anche il prodotto cartesiano $D \times D$ è denso in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ovvero $\overline{D \times D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

4.18 Geometria di \mathbb{R}^n

Si considerino di seguito alcune osservazioni in merito alla geometria in \mathbb{R}^n .

4.18.1 Retta nel piano \mathbb{R}^2

È noto che una forma per rappresentare una retta in \mathbb{R}^2 è la seguente

$$ax + by + c = 0$$

Tuttavia, in forma generale si ottiene che

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$

che può essere interpretata come

$$\langle (a, b)^T, (x - x_0, y - y_0)^T \rangle = 0$$

che equivale ad affermare che

$$(a, b)^T \perp (x - x_0, y - y_0)^T$$

Esempio: Si consideri un campo scalare del tipo

$$F(x, y) = a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0)$$

allora una retta è l'insieme degli zeri di tale campo scalare, ovvero

$$Z_r = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } F(x, y) = 0\}$$

In generale, tuttavia, l'insieme degli zeri di un campo scalare è una curva. Infatti, dato un campo scalare

$$F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

in cui l'insieme degli zeri sono

$$Z_r = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } F(x, y) = 0\}$$

e se

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

allora l'insieme degli 0 è una circonferenza. Se il campo scalare è da \mathbb{R}^3 in \mathbb{R} e si considera

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$$

allora questo è l'insieme vuoto \emptyset .

Data una retta in forma esplicita:

$$ax + by + c = 0$$

se si chiede $b \neq 0$ si può ottenere

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

che rappresenta una funzione

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

in cui l'insieme delle soluzioni è il grafico della funzione f :

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x))^T : x \in \mathbb{R}\}$$

Se si considera, ora, un campo scalare su \mathbb{R}^3 , quale è il seguente

$$F(x, y, z) = ax + by + cz + d$$

in cui l'insieme delle soluzioni è

$$Z_F = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$$

per cui se $c \neq 0$ si può considerare

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

definita come

$$f(x, y) = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c}$$

che, ovviamente, è un piano ... continua ...

4.19 Curva piana

Per quanto esposto in precedenza, è possibile considerare una curva piana

- come insieme degli zeri di un campo scalare da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} , della forma

$$F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

- come grafico di una funzione

$$f : E \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

- in forma parametrica, della forma

$$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$$

L'ultima modalità permette di fornire la definizione di **curva**:

CURVA	
Si chiama curva in \mathbb{R}^n una funzione continua	
$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$	
con I un intervallo.	

Esempio: La classica curva

$$\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$$

con

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$$

è la circonferenza.

4.19.1 Sostegno di una curva

L'insieme $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ si dice sostegno della curva, ovvero l'insieme immagine.

Esempio: La curva seguente

$$\gamma : [0, 4\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$$

definita come

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)^T$$

è un'elica.

Osservazione: Si osservi che curve diverse possono presentare il medesimo sostegno. Per esempio

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \mapsto \mathbb{R}^3 \quad \text{con} \quad f(t) = \left(\frac{1}{t^2}, 1\right)^T$$

e

$$g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3 \quad \text{con} \quad g(t) = (e^t, 1)^T$$

presentano il medesimo sostegno.

4.20 Superficie parametrica in \mathbb{R}^3

Per quanto esposto in precedenza, è possibile considerare una superficie piana

- come insieme degli zeri di un campo scalare da \mathbb{R}^3 in \mathbb{R} , della forma

$$F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

- come grafico di una funzione

$$f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

- in forma parametrica, della forma

$$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$$

L'ultima modalità permette di fornire la definizione di **superficie parametrica**:

CURVA

Si chiama **superficie parametrica in \mathbb{R}^3** una **funzione**

$$\gamma : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$$

con

$$\gamma(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))^T$$

in cui il sostegno della superficie è l'insieme immagine $\gamma(\Omega) \subset \mathbb{R}^3$

4.20.1 Retta in \mathbb{R}^2 in forma parametrica

Una retta in \mathbb{R}^2 viene parametrizzata tramite la seguente funzione γ :

$$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2 \quad \text{con} \quad \gamma(t) = (x_0, y_0)^T + t \cdot (a, b)^T$$

Esempio: Si determini la retta passante per i punti $(0, 2)^T$ e $(1, 0)^T$. Un modo per determinarne l'equazione è quello di considerare il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a \cdot (x - 0) + b \cdot (y - 2) = 0 \rightarrow ax + by = 2b \\ a \cdot (x - 1) + b \cdot (y - 0) = 0 \rightarrow ax + by = a \end{cases}$$

per cui è immediato capire che $a = 2b$, per cui l'equazione cercata è

$$2bx + by = 2b \rightarrow 2x + y = 2$$

Un altro metodo prevederebbe di considerare la funzione

$$y = f(x) = mx + q$$

ottenendo le due equazioni seguenti:

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 1 + q \\ 2 = m \cdot 0 + q \end{cases}$$

per cui è immediato evincere che $q = 2$ e $m = -2$. Pertanto si ottiene ancora l'equazione

$$y = -2x + 2$$

Se, invece, si volesse impiegare la forma parametrica, si potrebbe considerare il coefficiente angolare

$$\vec{v} = P_2 - P_1 = (1, -2)^T$$

per cui si ottiene

$$\gamma(t) = (0, 2)^T + t \cdot (1, -2)^T = (t, 2 - 2t)^T$$

considerando il primo punto. Altrimenti si sarebbe potuto considerare il secondo punto, ottenendo:

$$\gamma(t) = (1, 0)^T + t \cdot (1, -2)^T = (t + 1, -2t)^T$$

4.20.2 Piano in \mathbb{R}^3 in forma parametrica

Un piano in \mathbb{R}^3 può essere descritto come

$$\gamma(s, t) = (x_0, y_0, z_0)^T + s \cdot (a_1, a_2, a_3)^T + t \cdot (b_1, b_2, b_3)^T$$

Esempio: Dati i seguenti punti

$$(1, 0, 0)^T \quad (0, 2, 0)^T \quad (0, 0, 3)^T$$

Al fine di scrivere la giacitura del piano, si considerano due coppie di vettori linearmente indipendenti e si ottiene

$$a = P_2 - P_1 = (-1, 2, 0)^T \quad \text{e} \quad b = P_3 - P_1 = (-1, 0, 3)^T$$

per cui l'equazione parametric del piano cercata è

$$\gamma(s, t) = (1, 0, 0)^T + s \cdot (-1, 2, 0)^T + t \cdot (-1, 0, 3)^T$$

4.20.3 Sfera

Si consideri una sfera in \mathbb{R}^3 , come quella considerata:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

allora tale sfera non può essere rappresentata come grafico da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R} , in quanto non è un grafico. Al limite si può considerare come l'unione di due grafici, quali

$$f_1 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{e} \quad f_2 = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

per descrivere, invece, la sfera tramite equazioni parametriche, ossia con una funzione

$$\gamma : A \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3 \quad \text{con} \quad \gamma = \gamma(\phi, \theta)$$

ottenendo

- $x(\phi, \theta) = \sin(\phi) \cdot \cos(\theta)$
- $y(\phi, \theta) = \sin(\phi) \cdot \sin(\theta)$
- $z(\phi, \theta) = \cos(\theta)$

21 Ottobre 2022

Esercizio 1: Si consideri la serie seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \log \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Allora per il criterio di Leibniz si ha che

- il termine a_n è sempre positivo, ovvero $a_n > 0$
- il termine a_n è infinitesimo
- il termine a_n è anche decrescente, in quanto composta di una funzione crescente con una decrescente.

Esercizio 2: Si consideri la serie seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n \cdot (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + i^{2n} \cdot \sqrt{n+1}}{n}$$

Allora è possibile spezzare la serie, ottenendo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n \cdot (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})}{n} + (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{n}$$

in cui è immediato evincere che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{n}$$

è ovviamente convergente per Leibniz (ma non è assolutamente convergente).

Il primo termine, invece, può essere scomposto come segue:

$$\frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})}{n} \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$

pertanto si ottiene che

$$\frac{1}{n \cdot \sqrt{n} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)}$$

che è un infinitesimo di ord $\frac{3}{2} > 1$. Ciò implica il fatto che

$$\left| \frac{i^n \cdot (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})}{n} \right| = \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})}{n}$$

che è assolutamente convergente, quindi è convergente. Se ne conclude che la funzione di partenza è convergente semplicemente, ma non assolutamente.

Osservazione: Si osservi che una retta può essere interpretata come

- insieme degli zeri di un campo scalare da \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}
- grafico di una funzione
- curva parametrica

In generale, se si considera una funzione

$$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$

si possono distinguere due casistiche

- se $m = 1$ allora f è un campo scalare della forma

$$f((x_1, \dots, x_n)^T) = f(x_1, \dots, x_n)$$

- se $n = 1$ e $m \geq 2$, allora f è una curva
- se $n \geq 2$ e $m \geq 2$, allora f viene definita **campo vettoriale**. In particolare, se $n = 2$ e $m = 3$, f è una superficie. Se si considera

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))^T$$

che sono proprio le componenti del campo vettoriale.

Esempio: Si consideri la funzione

$$f(x, y, z) = \left(\frac{\sin(x, z)}{x - y}, \log(x + z) \right)^T$$

Allora il dominio di tale funzione deve essere l'intersezione del dominio di tutte e due le funzioni, ovvero

$$\begin{cases} x - y \neq 0 \\ x + z > 0 \end{cases}$$

4.21 Rappresentazione grafica in \mathbb{R}^n

Si considerino i seguenti esempi di rappresentazione grafica di alcune curve nello spazio:

- sia data la funzione $f = 2x^2 + y^2$, allora il suo grafico viene definito come

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, f(x, y))^T : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

che, per essere rappresentato può essere scomposto nelle sue proiezioni xy , yz e xz .

- Sul piano xz la funzione da considerare è $z = 2x^2$, che è una parabola più ripida del normale;
- Sul piano yz la funzione da considerare è $z = y^2$, che è una parabola normale;
- Sul piano xy la funzione da considerare è $0 = 2x^2 + y^2$, che è solamente il punto $(0, 0)^T$.

- sia data la funzione $f = \frac{1}{x + y}$, allora il suo dominio non è più tutto \mathbb{R}^2 , ma è l'insieme dei punti per cui $x \neq -y$. Il grafico della funzione è

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, f(x, y))^T : x \neq -y\}$$

Esso, per essere rappresentato può essere scomposto nelle sue proiezioni xy , yz e xz .

- Sul piano xz la funzione da considerare è $z = \frac{1}{x}$, che è un'iperbole;
- Sul piano yz la funzione da considerare è $z = \frac{1}{y}$, che è un'iperbole.
- Sul piano xy la funzione da considerare è $0 = \frac{1}{x + y}$, che si ha solamente quando x o y sono infiniti.

Osservazione: Si osservi che in tutti i casi precedenti, risulta molto difficile capire la rappresentazione grafica delle funzioni. Se, però, si considerasse come funzione $h(x, y)$ la quota sul livello del mare di un monte, si possono impiegare le **curve di livello**, chiamate anche **isoipse**.

4.22 Insieme di livello

Di seguito si fornisce la definizione di **insieme di livello**:

INSIEME DI LIVELLO

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si chiama, allora, **insieme di livello** α di f l'insieme

$$L_\alpha = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$$

ovvero l'insieme degli zeri del campo scalare $Z_{f-\alpha}$.

- Con $n = 2$, l'insieme L_α è una curva (appunto, la curva di livello)
- Con $n = 3$, l'insieme L_α è una superficie.

Esempio 1: Nel primo esempio, posto

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

allora l'insieme di livello è

$$L_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = \alpha\}$$

che può essere riscritto come

$$\frac{x^2}{(\sqrt{\frac{\alpha}{2}})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{\alpha})^2} = 1$$

che permette di capire come

$$a = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{\alpha}$$

che permette di capire come il semiasse orizzontale è minore di quello verticale.

Esempio 2: Nel secondo esempio, posto

$$f(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

naturalmente si ha sempre $x \neq y$ come campo di esistenza. L'insieme di livello, invece, è

$$L_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x + y} = \alpha\}$$

In cui è immediato evincere che

- se α diviene $\gg 1$, allora la retta sul piano xy che si ottiene è sempre più distante dall'origine.
- se α diviene $\ll 1$, allora la retta sul piano xy che si ottiene è sempre più vicina all'origine.
- se $\alpha < 0$, allora si ottiene la medesima rappresentazione dei primi due punti, ma simmetrica rispetto all'asse $y = -x$

5 Funzioni tra spazi metrici

Si consideri una funzione

$$f : E \subseteq X_1 \mapsto X_2$$

avente delle metriche (X_1, d_1) e (X_2, d_2) .

5.1 Limite di una funzione

Di seguito si espone la definizione di **limite di una funzione**:

LIMITE DI UNA FUNZIONE

Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici; si consideri

$$f : E \subseteq X_1 \mapsto X_2$$

Sia $x_1 \in X_1$ un punto di accumulazione per E , con $l \in X_2$. Allora si dira che

$$\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = l$$

se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in E, x \neq x_1, d_1(x, x_1) < \delta \text{ si ha che } d_2(f(x), l) < \epsilon$$

Osservazione 1: In particolare, sulla base della definizione di limite di cui sopra, f è **continua** in X_1 se

$$\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$$

ma solamente se $x_1 \in E$ e x_1 è punto di accumulazione. In generale, infatti, x_1 può anche essere un punto isolato, per cui la definizione generale richiederebbe che

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in E, d_1(x, x_1) < \delta \text{ si ha che } d_2(f(x), l) < \epsilon$$

Osservazione 2: In particolare, sulla base della definizione di limite di cui sopra, f è **uniformemente continua** in X_1 se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x_1, y_1 \in X_1, d_1(x_1, y_1) < \delta \text{ si ha che } d_2(f(x_1), f(y_1)) < \epsilon$$

5.2 Continuità della norma

Di seguito si espone il teorema sulla **continuità della norma**:

Teorema 5.1 Sia (X, d) uno spazio metrico con d indotta da una norma $\|\cdot\|$. Allora la funzione

$$f : X \mapsto \mathbb{R}$$

definita da $f(x) = \|x\|$ è continua.

DIMOSTRAZIONE: Si provi che

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tale che } \|x - x_0\| < \delta \text{ allora } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

ovvero che

$$|||x| - |x_0|||$$

Ciò è evidente in quanto

- $\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\|$
- $\|x_0\| = \|x_0 - x + x\| \leq \|x_0 - x\| + \|x\|$

Ma ciò implica quanto si voleva dimostrare.

5.3 Limite delle componenti

Di seguito si espone il teorema sul **limite delle componenti**:

LIMITE DELLE COMPONENTI

Sia (X_1, d_1) uno spazio metrico, con

$$f = (f_1, \dots, f_m)^T : E \subseteq X_1 \mapsto \mathbb{R}^m$$

con $x_1 \in X_1$ punto di accumulazione per E e

$$l = (l_1, \dots, l_m)^T \in \mathbb{R}^m$$

Si ha, allora, che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_k} f_k(x) = l_k \quad \text{per ogni } k = 1, 2, \dots, m$$

DIMOSTRAZIONE 1: Si operi con $m = 2$. Si supponga, per ipotesi che

$$\lim_{x \rightarrow x_k} f_k(x) = l_k \quad \text{per ogni } k = 1, 2, \dots, m$$

e si dimostri che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Allora, per definizione dei due limiti seguenti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l_2$$

è noto che

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, x \neq x_0, d_1(x, x_0) < \delta_1 \text{ si ha che } |f(x) - l_1| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0, x \neq x_0, d_2(x, x_0) < \delta_2 \text{ si ha che } |f(x) - l_2| < \epsilon$$

Allora si ha che, preso $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (che è un passo fondamentale, in quanto non sarebbe vera per m infinito), si ha che

$$||\cdot||$$

... continua ...

DIMOSTRAZIONE 2: Si operi con $m = 2$. Si supponga, per ipotesi che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{ovvero} \quad ||(f_1, f_2)^T(x) - (l_1, l_2)^T|| < \epsilon$$

allora si ha che ... continua ...

5.4 Successione in \mathbb{R}^n

Di seguito si espone la definizione di **successione in \mathbb{R}^n** :

SUCCESSIONE

Una successione $(x_n)_n$ in uno spazio metrico (X, d) è una funzione

$$f : E \subseteq \mathbb{N} \mapsto X$$

con E infinito.

Osservazione: Il limite di una successione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$$

con

5.5 Caratterizzazione del limite di una funzione usando le successioni

Si espone di seguito il **teorema di caratterizzazione del limite di una funzione usando le successioni**:

CARATTERIZZAZIONE DEL LIMITE DI UNA FUNZIONE USANDO LE SUCCESIONI

Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici; si consideri

$$f : E \subseteq X_1 \mapsto X_2$$

Sia $\alpha \in X_1$ un punto di accumulazione per E , con $l \in X_2$. Si ha, allora, che

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$$

se e solo se, per ogni successione $(x_n)_n$ in X_1 tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$$

si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

DIMOSTRAZIONE 1: Si supponga che

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$$

Si consideri, allora, una successione $(x_n)_n$ una successione tale per cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$$

e si dimostri che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

Fissato $\epsilon > 0$, allora per la definizione di limite di cui sopra, si ha che

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in E, x \neq \alpha, d_1(x, \alpha) < \delta \text{ tale che } d_2(f(x), l) < \epsilon$$

Dal momento che, per ipotesi, si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$$

per definizione di limite

$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq n_\epsilon \text{ si ha che } d_1(x_n, \alpha) < \delta$$

e, di conseguenza,

$$d_2(f(x_n), l) < \epsilon$$

DIMOSTRAZIONE 2: Si supponga, per ipotesi, che per ogni successione $(x_n)_n$ in X_1 tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$$

si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

e si dimostri che

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$$

Dalla definizione dell'ultimo limite si ha che

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in E, x \neq \alpha, d_1(x, \alpha) < \delta, d_2(f(x), l) < \epsilon$$

Si proceda per assurdo, e si neghi tale affermazione

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta = \frac{1}{n} > 0, \exists x_n \in E, x_n \neq \alpha, \text{ tale che } d_1(x, \alpha) < \delta = \frac{1}{n} \text{ ma } d_2(f(x), l) \geq \epsilon$$

in cui si è assunto che $\delta = \frac{1}{n}$, per comodità. Ciò consente di generare, implicitamente, una successione che permetterà di ottenere l'assurdo. Infatti, avendo ottenuto che

$$d_1(x, \alpha) < \delta = \frac{1}{n} \quad \text{è immediato evincere che} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$$

Ma siccome per ipotesi è noto che ogni successione $(x_n)_n$ in X_1 tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$$

si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

Pertanto si conclude l'assurdo, perché si era assunto che

$$d_2(f(x), l) \geq \epsilon$$

Esercizio: Si consideri lo spazio delle funzioni continue su $[0, 1]$ a valori reali: $X = C^0([0, 1])$. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si consideri la funzione $\phi_n \in X$ definita da

$$\phi_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{se } t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \geq 0 \\ 0 & \text{se } t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \geq 0 \end{cases}$$

Si discuta l'eventuale convergenza della successione $(\phi_n)_n$ nello spazio metrico (X, d_1) e nello spazio metrico (X, d_∞) , dove d_1 è la metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|_1$ e d_∞ è la metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|_\infty$.

Essendo la norma 1 seguente $\|\cdot\|_1$ denotata con

$$\|\phi\|_1 = \int_0^1 |\phi(t)| dt$$

Dalla rappresentazione grafica è facile intuire che il limite di tale successione sia 0, ovvero

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon, \forall n \geq n_\epsilon, \int_0^1 |\phi(t)| dt < \epsilon$$

ma siccome la funzione $\phi(t)$ è nulla da $\frac{1}{n}$ a 1, basta considerare

$$\int_0^1 |\phi(t)| dt = \int_0^{\frac{1}{n}} |\phi(t)| dt + 0 = \left[t - \frac{1}{2}nt^2 \right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} < \epsilon$$

... continua ...

Esercizio: Si consideri la funzione

$$f : C([0, 1]) \mapsto \mathbb{R}$$

con norma infinito. Si provi che la funzione

$$f : X \mapsto \mathbb{R}$$

definita da

$$f(\phi) = \int_0^1 \phi(t) \, dt$$

Si dimostri la continuità in ϕ_0 , ovvero

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall \phi \text{ con } \|\phi - \phi_0\|_\infty < \delta, |f(\phi) - f(\phi_0)| < \epsilon$$

Ma in particolare, per la definizione stessa della f si ha che

$$\left| \int_0^1 \phi(t) \, dt - \int_0^1 \phi_0(t) \, dt \right| = \left| \int_0^1 (\phi(t) - \phi_0(t)) \, dt \right|$$

ma siccome

$$|\phi(t) - \phi_0(t)| \leq \|\phi(t) - \phi_0(t)\|_\infty$$

in quanto, per definizione $\|\phi(t) - \phi_0(t)\|_\infty = \sup\{|\phi - \phi_0|\}$ si conclude che

$$\left| \int_0^1 \phi(t) \, dt - \int_0^1 \phi_0(t) \, dt \right| \leq \|\phi(t) - \phi_0(t)\|_\infty \cdot \int_0^1 dt = \delta < \epsilon$$

21 Ottobre 2022

Esercizio: Si considerino i due spazi metrici $X_1 = C^{-1}([0, 1])$ e $X_2 = C^0([0, 1])$ in cui si definisce in ambo i spazi la norma $\|\cdot\|_\infty$. Si considera, allora, la funzione

$$f : X_1 \mapsto X_2 \quad \text{e} \quad f(\phi) = \phi'$$

Si vuole dimostrare che la funzione f considerata non è continua. È noto che una funzione continua se

$$\lim_{\phi \rightarrow \phi_0} f(\phi) = f(\phi_0)$$

Per il teorema di caratterizzazione del limite di una funzione tramite le successioni, si ha che

f è continua in α **se e solo se** $\forall (f_n)_n \in X_1$, con $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha$ si ha che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\alpha_n) = f(\alpha)$

Se si considera la funzione

$$\phi_n = \frac{1}{n} \cdot \sin(nx) \text{ tale che } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = 0$$

e, ovviamente, si ha che

$$f(\phi_n) = \cos(nx)$$

Tuttavia è ovvio che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\phi_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(nx) = \nexists$$

che permette di concludere che tale funzione, con tale norma, non è continua.

Osservazione: L'ultima considerazione è evidente, in quanto la norma non è concorde con la tipologia di funzione e con gli spazi metrici analizzati. La norma ...

Esempio: Si considerino gli spazi metrici $X = C([0, 1])$ con $\|\cdot\|_1$ e $Y = C([0, 1])$ con $\|\cdot\|_\infty$.

Per verificare se la funzione $f : X \mapsto Y$, con $f(\phi) = \phi$ è continua, è facile capire se si considera una successione che vale praticamente sempre 0 e vale 1 in un solo punto, allora per la norma infinito il valore è 1, mentre per la norma 1 il valore dell'integrale è 0, per cui non può essere continua.

Nel caso, invece, della funzione inversa $f^{-1} : Y \mapsto X$, con $f(\phi) = \phi$ è continua, in quanto data ...continua..

5.6 Teorema sui limiti e sulle funzioni continue

Di seguito si espongono alcuni fondamentali teoremi sui limiti e sulle funzioni continue.

5.6.1 Teorema di unicità del limite

Per la dimostrazione si impiega il principio di separazione di Hausdorff.

5.6.2 Teorema sul limite delle restrizioni

È noto che data una funzione

$$f : E \subseteq X \mapsto X$$

in cui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

allora, posto $F \subseteq E$ una restrizione di E , con x_0 punto di accumulazione per F . Allora anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_F(x) = l$$

Esercizio: Si consideri il limite seguente

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$$

Allora per risolvere tale limite, si può considerare come restrizione l'asse x , ponendo

$$F = \{(x, y)^T, y = 0\} - \{0, 0\}$$

Allora se esiste il limite di partenza, esso deve essere uguale a

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T, y=0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0$$

Anche la restrizione sull'asse y avrebbe fornito il medesimo risultato. Tuttavia, se si considera la restrizione sulla bisettrice si ottiene:

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T, x=y} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

per cui si sono trovate due restrizioni in cui il limite non coincide: il limite di partenza non esiste.

5.6.3 Teorema sul limite della funzione composta

Si considerino due funzioni

$$f : E \subseteq X_1 \mapsto X_2 \quad \text{e} \quad g : F \subseteq X_2 \mapsto X_3$$

Posto α punto di accumulazione per E , tale per cui

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$$

e sia β punto di accumulazione per F . Allora se

$$\lim_{y \rightarrow \beta} g(y) = \gamma$$

si evince che

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(f(x)) = \gamma$$

ammesso che **esista un intorno U di α tale che $\forall x \in U, x \neq \alpha, f(x) \neq \beta$**

5.6.4 Teorema sul limite della combinazione lineare di funzioni

Se X è uno spazio metrico, con Y **spazio vettoriale** con una norma $\|\cdot\|$ e la distanza indotta

$$d(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|$$

si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$$

posto $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x) = \alpha \cdot l_1 + \beta \cdot l_2$$

Inoltre, se $Y = \mathbb{R}$, o uno spazio metrico su cui è definito un prodotto, si può anche affermare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$$

Ha anche significato affermare, in \mathbb{R} , che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$$

che significa ...continua...

Esercizio 1: Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \left(\frac{\sin(xy)}{y}, \frac{3x^3y - xy^2 + 1}{xy + 2x - y - 2} \right)^T$$

Siccome si tratta di un campo vettoriale, bisogna suddividere lo stesso nelle sue due componenti, andando a studiare separatamente i due limiti. Se ciascuno esiste, il limite del campo vettoriale sarà il vettore con componenti il limite delle componenti.

Pertanto si andranno a studiare

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{\sin(xy)}{y} \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{3x^3y - xy^2 + 1}{xy + 2x - y - 2}$$

È immediato evincere che il secondo limite sia, ovviamente

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{3x^3y - xy^2 + 1}{xy + 2x - y - 2} = -\frac{1}{2}$$

Per quanto riguarda il primo limite, si devono considerare delle restrizioni opportune, per esempio

- Considerando la restrizione all'asse x si ottiene

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T, x=0} \frac{\sin(xy)}{y} = 0$$

- Considerando la restrizione sulla bisettrice si ottiene

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T, x=y} \frac{\sin(xy)}{y} = 0$$

Ciò suggerisce che il limite possa esistere; basterà andare a stimare che

$$\left| \frac{\sin(xy)}{y} \right| < \epsilon$$

ma è immediato osservare che

$$\left| \frac{\sin(xy)}{y} \right| = \left| \frac{\sin(xy)}{xy} \right| \cdot |x| \leq |x|$$

e siccome $|x| \rightarrow 0$, si evince che tale funzione è proprio nullo. Pertanto il limite del campo è il campo con componenti il limite delle componenti:

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \left(\frac{\sin(xy)}{y}, \frac{3x^3y - xy^2 + 1}{xy + 2x - y - 2} \right)^T = \left(0, -\frac{1}{2} \right)^T$$

Esercizio 2: Si consideri il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$$

Se esiste il limite, esso deve essere 0, in quanto basta lavorare sugli assi e si ottiene 0. Anche se si lavora sulla bisettrice si ottiene 0.

Tuttavia, se si considera la parabola $y = x^2$, è facile capire che

$$\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T, y=x^2} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

per cui si evince che tale limite non esiste.

Osservazione: Si osservi che negli spazi $X = C([0, 1])$ con norma $\|\cdot\|_\infty$ si lavora con successioni di funzioni ϕ_n che convergono ad una funzione ϕ con distanza indotta dalla norma infinito. Allora la convergenza per tali successioni viene definita come

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \in n_\epsilon, \max_{x \in [0,1]} |\phi_n(x) - \phi(x)| < \epsilon$$

mentre la convergenza uniforme richiede che

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq n_\epsilon, \forall x \in [0, 1] \text{ si ha che } |\phi_n(x) - \phi(x)| < \epsilon$$

che sono la stessa cosa, in quanto si sta lavorando con uno spazio topologico $C([0, 1])$ di funzioni continue, per cui esiste sempre il massimo.

5.7 Trasformazioni coordinate

Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad f^{-1} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

in cui se si considerano x e y coordinate nel dominio di f e u e v coordinate nel codominio di f . Allora se la mappatura è la seguente:

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u - v) \\ y = \frac{1}{2}(u + v) \end{cases}$$

Osservazione: Nel caso di coordinate polari del tipo ...continua...

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

... continua ...

Allora si può considerare

$$f :]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\mapsto \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)^T\}$$

in cui si pone

$$(\rho, \theta)^T \mapsto (x, y)^T$$

con la mappatura

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos(\theta) \\ y = \rho \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

Essendo un campo vettoriale, si considerano le componenti una ad una. Per verificare se f è continua si studiano le componenti, che ovviamente sono il prodotto di due funzioni continue che, quindi, è continua.

Studiando la funzione inversa f^{-1} definita come

$$f^{-1}(x, y) = (\rho, \theta)^T$$

allora si ha che

- $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
- θ è l'angolo tale che

$$x = \rho \cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = \rho \sin(\theta)$$

Pertanto non esiste una formula generale per esprimere l'angolo θ . La funzione inversa non è continua, in quanto considerando il punto sulla circonferenza goniometrica, continua...

Osservazione 1: Lavorare con le coordinate polari non è semplice, in quanto non si ha un omeomorfismo per la descrizione delle coordinate nei due sistemi. L'omeomorfismo si ha quando si esclude la semiretta dei reali positivi e, quindi, si considera la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 - \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} \mapsto]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$$

Osservazione 2: È possibile anche considerare delle coordinate ellittiche centrate in $(x_0, y_0)^T$, ovvero un sistema come quello seguente

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot \rho \cdot \cos(\theta) \\ y = y_0 + b \cdot \rho \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

Osservazione 3: È possibile anche considerare delle coordinate ellissoidali, andando a considerare un sistema seguente

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot \rho \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) \\ y = y_0 + b \cdot \rho \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \\ z = z_0 + c \cdot \rho \cdot \cos(\theta) \end{cases}$$

5.8 Intervallo e insieme compatto

Di seguito si espongono le definizioni generalizzate agli spazi metrici di intervallo e di insieme compatto.

5.8.1 Insieme compatto

Di seguito si espone la definizione di **insieme compatto** in uno spazio metrico:

INSIEME COMPATTO

Sia X uno spazio metrico. Allora un insieme $K \subseteq X$ si dice compatto (per successioni) se per ogni successioni $(x_n)_n$ con $x_n \in K, \forall n$, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ convergente, ossia

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = l \in K$$

Teorema 5.2 *Se K è compatto, allora è chiuso e limitato.*

DIMOSTRAZIONE 1: Si dimostri che se K è compatto, allora è chiuso, ovvero contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Sia, allora, α un punto di accumulazione per K , allora si considera, $\forall n$, la palla

$$B\left(\alpha, \frac{1}{n}\right)$$

Si supponga esista $x_n \neq \alpha$, con $x_n \in K \cap B\left(\alpha, \frac{1}{n}\right)$. Ovviamente, per costruzione si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$$

Poiché K è compatto, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = l \in K$$

ma $l = \alpha$ e, quindi, $\alpha \in K$, per cui K è chiuso.

DIMOSTRAZIONE 2: Si dimostri che se K è compatto, allora è limitato. Sia, allora, per assurdo K non limitato. Si fissi $x_0 \in X$ tale per cui $\forall n$ esiste $x_n \in K$ con $x_n \notin B(x_0, n)$. Ma siccome K è compatto per ipotesi, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ tale per cui

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = l \in K$$

ma tale successione non può convergere (ovvero non può essere che $d(x_{n_k}, l) < \epsilon$), in quanto

$$d(x_{n_k}, l) \geq d(x_{n_k}, x_0) - d(x_0, l) \geq n_k - M$$

essendo $d(x_0, l) = M$ costante. Ma siccome $n_k \rightarrow +\infty$ per cui non si può avere convergenza.