Università di Trieste

Laurea in ingegneria elettronica e informatica

Enrico Piccin - Corso di Analisi matematica II - Prof. Franco Obersnel

Anno Accademico 2022/2023 - 3 Ottobre 2022

Indice

3 Ottobre 2022

1 Introduzione

Considerando un foglio di carta, dividendolo in due metà esatte, si ottiene $\frac{1}{2}$ del profilo quadrato di partenza. Considerando una delle due metà, e suddividendola ancora in due, si ottiene $\frac{1}{4}$ del profilo quadrato di partenza. Ripetendo questo procedimento, si otterranno le seguenti frazioni del profilo quadrato originario: $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, ...$ Sommando tutte le frazioni di profilo quadrato, alla fine si otterrà il profilo quadrato di partenza, ossia la frazione 1. Ecco quindi che, contrariamente a quanto voleva sostenere **Parmenide**, **Zenone** scoprì che

$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+...=1 \to \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1}$$

Ciò non risulta essere banale: una somma di **infinite quantità positive** produce una quantità finita. Quello che si è ottenuto è una **serie (numerica) geometrica di ragione** $\frac{1}{2}$.

2 Serie numerica

Di seguito si espone la definizione di **serie numerica**:

SERIE NUMERICA

Data una successione $(a_n)_n$ con valori nel campo complesso $a_n \in \mathbb{C}$. Si consideri una nuova successione $(s_n)_n$ definita **per ricorrenza** come segue

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \qquad \text{posto} \qquad s_0 = a_0$$

Ciò significa che

- $s_0 = a_0$
- $s_1 = a_0 + a_1$
- $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$
- e via di seguito...

La serie $a_0 + a_1 + a_2 + ...$ è la **coppia ordinata** delle due successioni, come mostrato di seguito

$$((a_n)_n, (s_n)_n)$$

ove la successione $(a_n)_n$ prende il nome **successioni dei termini generali**, mentre la successione $(s_n)_n$ si chiama successione delle **ridotte** o delle **somme parziali** della serie.

Esempio: Posto $a_1 = \frac{1}{2}$ e il termine generale $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, la ridotta sarà

$$s_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}$$

osservando bene di partire da $n = 1$ e non da 0.

2.1 Convergenza, divergenza e indeterminatezza di una serie

Data una serie, ossia data una coppia di successioni, è possibile ora andare a studiare il comportamento della successione delle ridotte.

2.1.1 Convergenza di una serie

Di seguito si espone la definizione di **convergenza di una serie**:

CONVERGENZA DI UNA SERIE

Se la successione delle ridotte di una serie è convergente, si dice che la serie è convergente e il limite della successione delle ridotte prende il nome di **somma della serie**.
In altre parole, se **esiste finito** il

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{C}$$

allora la serie si dice **convergente** e il limite s si dice **somma della serie** e si scrive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s$$

Attenzione: Molto spesso si utilizza la notazione sopra esposta per indicare sia la serie stessa, sia la sua somma, per cui può essere fuorviante. Lo si può capire dal contesto: una serie potrebbe non essere convergente, e quindi non avere una somma.

Esempio: Se si considera $a_n = 1, \forall n$, per cui

$$1 + 1 + 1 + ... = \sum_{n=0}^{n} 1$$

allora la somma parziale è $s_n = n + 1$, ovvero una successione divergente a $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$$

Ciò significa che la serie non converge, ma è **divergente**, per cui non ha nemmeno una somma.

Osservazione: Si osservi che la divergenza a $+\infty$ di una serie ha significato solamente quando i termini generali sono sul campo reale: se una serie ha termine generico nel campo complesso, non può essere divergente a $+\infty$, in quanto non esiste un limite infinito nel campo complesso (a meno che non si consideri il modulo).

2.1.2 Divergenza di una serie

Di seguito si espone la definizione di **divergenza di una serie**:

DIVERGENZA DI UNA SERIE

Se la successione delle ridotte di una serie (a termine generale reale) è divergente, si dice che la serie è divergente; in questo caso, la serie non presenta una somma.
In altre parole, se data $a_n \in \mathbb{R}, \forall n$, e posto

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty \text{ o } -\infty$$

la serie si dice **divergente**.

Esempio: Se $a_n = a \in \mathbb{R}$ **costante**, allora la serie con termine generale a_n

$$a_0 + a_1 + a_2 + ...$$

è necessariamente

- divergente a $+\infty$ se $a > 0$
- divergente a $-\infty$ se $a < 0$
- convergente, con somma 0, se $a = 0$

Attenzione: se $a \neq 0$, ma $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, si dice semplicemente che la serie **non converge** (non ha senso parlare di divergenza).

2.1.3 Indeterminatezza di una serie

Di seguito si espone la definizione di **serie indeterminata**:

SERIE INDETERMINATA

Una serie si dice **indeterminata** se non converge e non diverge.

Esempio 1: Per quello che si è visto, una serie a termine generale costante, complesso e non reale, è indeterminata.

Esempio 2: Un esempio di serie a termini reali, ma indeterminata, è la **serie di Grandi**, definita così:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

per cui $s_0 = (-1)^0 = 1$ e $s_1 = a_0 + a_1 = 1 + (-1)^1 = 0$. Pertanto si ha che

- $s_n = 1$ se n è pari
- $s_n = 0$ se n è dispari

Per cui si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} s_0 =? \text{ non esiste}$$

E per dimostrare che non esiste, si può semplicemente dimostrare che due sotto-successioni della successione delle somme parziali convergono a limiti diversi (ossia la sotto-successioni degli indici pari e quella dei dispari); infatti:

- $\lim\limits_{k\to+\infty} s_{2k} = 1$
- $\lim\limits_{k\to+\infty} s_{2k+1} = 0$

per cui sono state ottenute due sotto-successioni che presentano limite differente: per il teorema dell'unicità del limite e il teorema del limite delle sotto-successioni di una successione, si conclude che la successione delle somme parziali è indeterminata.

Osservazione: La serie di Grandi è una serie che può essere usata per dimostrare l'esistenza di Dio, in quanto commutando fra di loro i differenti termini può essere fatta convergere a qualsiasi (o quasi) numero finito.
Se, infatti, si considerano le somme

- $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... = 0$
- $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + ... = 1$
- $(1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) = 2$

si ottengono serie che convergono a qualunque valore (tranne uno). In generale, infatti, se una serie è indeterminata, si possono commutare gli addendi della stessa e ottenere la convergenza a qualunque numero.

2.2 Serie geometrica

Si è osservato che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

per cui è ovvio che partendo con $n = 0$, si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

Più in generale, si fornisce di seguito la definizione di **serie geometrica**:

SERIE GEOMETRICA

Si dice **serie geometrica** di ragione $z \in \mathbb{C}$ la serie del tipo

$$1 + z + z^2 + z^3 + ... \to \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

che, tuttavia, palesa un problema di fondo: se si sceglie $z = 0$, naturalmente si incorre nell'ambiguità

$$0^0 + 0^1 + ...$$

ma 0^0 è una scrittura che non ha significato. Tuttavia, in questo particolare caso, si considera $0^0 = 1$, in modo tale da essere coerenti con la scrittura $1 + z + z^2 + z^3 + ...$ impiegata in precedenza.

Osservazione: Data la serie seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

per cui la ridotta è

$$s_n = 1 + z + z^2 + ... + z^n$$

che può anche essere riscritto come

$$s_n = 1 + z + z^2 + ... + z^n = 1 + z \cdot \left(1 + z + ... + z^{n-1}\right)$$

dove $1 + z + ... + z^{n-1} = s_{n-1}$. Da cui si evince che, sommando e sottraendo per la medesima quantità z^n, si ottiene

$$s_n = 1 + z \cdot \left(\underbrace{1 + z + ... + z^{n-1} + z^n}_{s_n} - z^n \right)$$

che diviene, quindi:

$$s_n = 1 + z \cdot s_n - z^{n+1} \quad \to \quad s_n - z \cdot s_n = 1 - z^{n+1} \quad \to \quad s_n \cdot (1 - z) = 1 - z^{n+1} \quad \to \quad s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

posto $z \neq 1$ (ma il caso $z = 1$ è facilmente risolubile, per quanto osservato nel caso di una serie a termine generale costante).
Di seguito si espone, quindi, il comportamento della serie geometrica a seconda della sua ragione z:

COMPORTAMENTO DELLA SERIE GEOMETRICA

Per quanto osservato in precedenza, si ha che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

posto $z \neq 1$, che diviene

- $\dfrac{1}{1-z}$ se $|z| < 1$.
- non converge se $|z| > 1$, tuttavia, si può dire che
  - se $z \in \mathbb{R}$ e $z \geq 1$, diverge a $+\infty$
  - se $z \in \mathbb{C}$ e $|z| \geq 1$ (ovvero può essere anche un numero negativo), posto $z \notin]1, +\infty[$ (ossia diverso dal caso precedente), nel caso di n pari si sommano quantità positive, nel caso di n dispari si sommano quantità negative, per cui la serie oscilla e quindi è indeterminata.

Osservazione: Si osservi che la serie geometrica è l'unica per cui si riesce a calcolare la somma, in quanto è l'unica di cui è possibile esprimere la ridotta in modo generale.
Altrimenti, gestire le ridotte diviene molto complesso.

Esempio: Si consideri la seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \cos^n(1)$$

che è una serie geometrica di ragione $\cos(1)$, ove $|\cos(1)| < 1$, per cui converge. La somma di tale serie, quindi, è facilmente determinabile secondo quanto visto in precedenza, tenendo conto che n parte da 2, per cui bisogna sottrarre $\cos^0(1) = 1$ e $\cos^1(1) = \cos(1)$. Da ciò si evince che la serie converge a

$$\frac{1}{1-\cos(1)} - 1 - \cos(1) = \frac{1 - 1 + \cos(1) - \cos(1) + \cos^2(1)}{1-\cos(1)} = \frac{\cos^2(1)}{1-\cos(1)}$$

Osservazione: La somma della serie geometrica di ragione $z \in \mathbb{C}$ è indeterminata se $|z| > 1$, per quanto già visto.
Inoltre si ha che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2i+x}{4}\right)^n$$

è convergente se

$$\left|\frac{2i+x}{4}\right| < 1$$

ma ricordando come si calcola il modulo di un numero complesso si ottiene

$$|2i + x| = \sqrt{4+x^2}$$

e quindi

$$\sqrt{4+x^2} < 4 \quad \to \quad 4 + x^2 < 16 \quad \to \quad x^2 < 12 \quad \to \quad |x| < \sqrt{12} \quad \to \quad |x| < 2\sqrt{3}$$

E poi, ovviamente, la serie di Grandi è il tipico esempio di serie indeterminata, per cui la sua somma non può essere definita.

5 Ottobre 2022

Una serie è costituita da 2 successioni: la successione dei termini generali e la successione delle ridotte o somme parziali: quando si opera con le serie, risulta fondamentale distinguere le due successioni.
Una tra le serie più note è la serie geometrica, di ragione $z \in \mathbb{C}$, la quale converge se il modulo della ragione è minore di 1. Non converge in caso contrario, ma in particolare

- se la ragione z è un numero reale, $z \in \mathbb{R}$, e $z \geq 1$, allora la serie diverge a $+\infty$;
- se la ragione z è un numero complesso, con $|z| \geq 1$ e $z \notin]1, +\infty[$, allora la serie è indeterminata.

In generale, non si può parlare di divergenza a $+\infty$ o $-\infty$ in campo complesso, in quanto in esso è **assente la relazione d'ordine** e quindi non esiste un limite infinito.

Esempio: Si consideri l'esempio seguente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{2^n}$$

Tale serie presenta come termine generale

$$a_n = \frac{\cos(n)}{2^n}$$

ma è vero che $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, per cui

$$-\frac{1}{2^n} \leq a_n \leq \frac{1}{2^n}$$

Per dimostrare che anche la serie in esame converge, è sufficiente considerare s_n^- e s_n^+, rispettivamente la ridotta n-esima della serie geometrica di ragione $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, come segue

$$s_n^- = -1 - \frac{1}{2} - ... - \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad s_n^+ = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^n}$$

per cui

$$s_n^- \leq s_n \leq s_n^+$$

e per il **teorema del confronto esiste finito** il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} s_n \in \mathbb{R}$$

e quindi la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{2^n}$$

converge.

2.3 Teorema del confronto per le serie

Di seguito si espone il fondamentale **teorema del confronto per le serie**:

Teorema 2.1 ***Teorema del confronto per le serie***
*Siano $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tali che $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n$ (anche se sarebbe sufficiente richiedere che ciò sia vero **definitivamente**, ossia $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che la disuguaglianza di cui sopra è valida $\forall n \geq n_0$). Siano convergenti le serie*

$$\sum a_n \quad e \quad \sum c_n$$

allora è convergente anche la serie

$$\sum b_n$$

ed è tale la stima della somma della serie:

$$\sum a_n \leq \sum b_n \leq c_n$$

che è una stima valida $\forall n$*, oppure* $\forall n \geq n_0$ *(a seconda che sia stato richiesto* $\forall n$*, oppure definitivamente).*

Osservazione: Si osservi il caso particolare per cui $a_n = 0, \forall n$ (ossia il caso in cui la serie con termine generale b_n è a termini positivi, cioè una serie per cui tutti i termini della successione dei termini generali sono positivi), allora è sufficiente che la serie con termine generale c_n converga per concludere la convergenza.
Similmente, se $c_n = 0, \forall n$ (ossia la serie con termine generale b_n è a termini negativi, vale a dire una serie per cui tutti i termini della successione dei termini generali sono negativi), è sufficiente che la serie con termine generale a_n converga per concludere la convergenza.
In questi casi, infatti, è sufficiente considerare un limitazione superiore (o inferiore, rispettivamente) per concludere la convergenza.

Osservazione: È facile capire che **il carattere di una serie non dipende da quello che accade su un numero finito di termini**, in quanto

$$\sum_{n=k}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

differiscono solamente per k termini, ove k è una **costante**.

Esempio: Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} e^{100-n^2}$$

Si può facilmente capire che

$$e^{100-n^2} \leq 1 \quad \text{se} \quad n \geq 10$$

per cui

$$\frac{1}{2^n} e^{100-n^2} \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{se} \quad n \geq 10$$

Pertanto, essendo essa a termini positivi e maggiorata definitivamente, la serie di partenza converge per il teorema del confronto. Tuttavia, la stima seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} e^{100-n^2} \leq 2$$

ove 2 è la somma della serie geometrica, è vera solamente definitivamente, per $n \geq 10$. Per avere una stima della somma più accurata, naturalmente, è possibile considerare quello che accade per i primi 9 termini, per cui:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} e^{100-n^2} < a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + 2$$

dove $a_0 + a_1 + \cdots + a_9$ sono i primi 9 termini della serie stessa. Ma per migliorare la stima è possibile anche considerare i primi 9 termini della serie geometrica, da cui

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} e^{100-n^2} < a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + \left(2 - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{2^9}\right)$$

Esempio: Si consideri la serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

Essa naturalmente diverge, in quanto il limite per $n \to +\infty$ del suo termine generale è

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

ossia, per n molto grande, nella serie si somma sempre 1, per cui diverge. Infatti, affinché una serie converga, il suo termine generale deve essere infinitesimo.

Teorema 2.2 ***Condizione necessaria per la convergenza***
Sia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

una serie ***convergente*** *(in generale a termini complessi), allora*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ossia la successione dei termini generali è ***infinitesima****.*

Dimostrazione: Si consideri la ridotta di indice $n+1$, ossia

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \qquad \text{tale per cui} \qquad a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

Siccome la serie è convergente per ipotesi (s_{n+1} e s_n convergono allo stesso limite), per la linearità del limite, il limite della differenza è uguale alla differenza dei limiti, per cui:

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = s_{n+1} - s_n = 0$$

Osservazione: Si osservi che la condizione per la convergenza esposta in precedenza è necessaria, ma non sufficiente. Infatti, esistono delle serie

$$\sum a_n$$

non convergenti, dove il

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

per questo si parla di condizione necessaria, e non sufficiente. Infatti è importante definire con quale velocità la successione dei termini generali vada a 0: se è troppo lenta, nonostante sia infinitesima, la serie associata divergerà.

2.4 Serie armonica

Si consideri la serie seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che prende il nome di **serie armonica**. Per studiarne il comportamento, è sufficiente capire che **ogni serie può essere considerata come un integrale generalizzato**. Infatti, per definizione di integrale generalizzato di una funzione definita su una semiretta reale localmente integrabile:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

allora se si considera la serie $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, si definisce una funzione f dipendente dalla serie stessa:

$$f : [1, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$$

nel modo seguente: essendo una successione una funzione (definita sui numeri naturali), la funzione f deve interpolare i valori della successione dei termini generali, assumendo il valore costante a_n quando $x \in [n, n+1[$, come nel seguito:

$$f(x) = a_n \quad \text{se} \quad x \in [n, n+1[, \quad \forall n \geq 1$$

ottenendo una funzione che rappresenta la successione degli a_n sotto forma di funzione.
Se f è la successione degli a_n, la serie con termine generale a_n non è altro che l'integrale generalizzato di tale funzione. Infatti, si ha che

$$\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = a_n \cdot (n+1-n) = a_n$$

per cui è ovvio che

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Se la funzione f è integrabile (ossia esiste il limite dell'integrale di cui sopra), allora

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

e per quanto appena osservato,

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{allora} \quad \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

per cui, per il teorema del limite delle successioni, ogni successione in cui n tende a $+\infty$, avrà lo stesso limite della funzione f, ossia

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pertanto, se la funzione f così definita è integrabile e l'integrale ha un valore finito, allora la serie è convergente e la somma della serie è il valore di tale integrale.

Osservazione: Si osservi che se la serie converge, per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = s$$

è anche vero che f è integrabile, ovvero

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = s$$

Ciò è vero in quanto la serie converge, e per la condizione necessaria vista in precedenza,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Pertanto, studiando l'integrale

$$\int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

presa la parte intera di b, ossia $[b] = n$, essendo $b < n+1$ (in quanto la sua parte intera è n), si evince che

$$\int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + \int_n^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dovendo studiare il limite per $b \to +\infty$ di tale integrale, è molto utile scomporlo in questo modo. Così facendo, siccome la serie converge, si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = s$$

mentre

$$\left|\int_n^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = |a_n \cdot (b-n)| \le |a_n|$$

in quanto $b < n+1$, per cui $b - n < 1$, essendo $[b] = n$. Ma siccome la serie converge, allora il limite del termine generale è 0, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

per cui, per la linearità del limite, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{n\to+\infty} \int_n^b f(x)\,\mathrm{d}x = s + 0 = s$$

come esposto da teorema seguente:

Teorema 2.3 *Sia $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ una serie e sia f la funzione associata definita come*

$$f(x) = a_n \quad \textit{se} \quad x \in [n, n+1[, \quad \forall n \ge 1$$

*allora f è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $[1, +\infty[$ **se e solo** se la serie converge. In questo caso si ha che la somma della serie è uguale al valore dell'integrale generalizzato, per cui*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Osservazione: Tale risultato è fondamentale per studiare il carattere della serie armonica. Infatti, se si considera la funzione

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

essa non è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $[1, +\infty[$. Allora, presa $f(x)$ la funzione definita a tratti rispetto alla serie armonica, è facle capire che

$$g(x) \le f(x), \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

Dal momento che $g(x)$ non è integrabile, non lo è nemmeno la f (per il teorema del confronto degli integrali generalizzati).
Ma siccome, per il teorema precedentemente esposto, è noto che una serie converge se e solo se la funzione f ad essa associata converge, si capisce immediatamente che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

non converge. Essendo una serie a termini positivi, per l'aut-aut si vedrà immediatamente che, non convergendo, dovrà necessariamente essere divergente a $+\infty$.

2.4.1 Serie armonica generalizzata

È noto che la serie armonica non converge. Non sorprende, però, sapere che tale serie è divergente a $+\infty$, ovvero

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

come conseguenza diretta dell'aut-aut. Pertanto, se si considera

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

è evidente capire che
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1$$
per cui, per il teorema del confronto, diverge a $+\infty$. Ciò risulta vero per ogni
$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1 \quad \text{se } 0 < \alpha \leq 1$$
Nel caso $\alpha > 1$, invece, è possibile studiare l'integrale generalizzato associato, da cui:
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{-\alpha+1} \cdot x^{-\alpha+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1}$$
Tuttavia, ciò non risulta essere sufficiente per dimostrare che la serie converge. Infatti, in questo caso, si è studiato l'integrale generalizzato di una funzione $g(x)$, ben diversa dalla funzione f definita a tratti in precedenza.
Se ora si impiegasse la funzione f definita in precedenza (da n a $n+1$), siccome essa sarà inevitabilmente maggiore della funzione g (di cui è nota l'integrabilità), ovvero $f(x) \geq g(x)$, non è possibile stabilire se essa sia integrabile o meno tramite il criterio del confronto per l'integrale generalizzato.
Per tale ragione si definisce
$$h(x) = a_n \quad \text{se} \quad x \in]n-1, n]$$
tale per cui $h(x) \leq g(x), \ \forall n \geq 1$. Allora è noto che
$$\int_{n-1}^{n} h(x) \, \mathrm{d}x = a_n$$
Da ciò segue che
$$\int_1^{+\infty} h(x) \, \mathrm{d}x = a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n$$
che parte da $n = 2$, per come è stata definita $h(x)$. Pertanto, si ha che
$$\int_1^{+\infty} h(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}$$
e quindi, per il teorema del confronto dell'integrale generalizzato, la funzione h è integrabile. Inoltre, per il teorema precedentemente esposto, siccome la funzione h associata alla serie è integrabile, la serie armonica generalizza converge; non solo, la somma della serie è
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} + 1$$

COMPORTAMENTO DELLA SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

La serie armonica generalizzata
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$
con $\alpha >$ è

- divergente a $+\infty$ se $\alpha \in]0, 1]$
- convergente se $\alpha > 1$ con somma
$$s \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$
dal momento che l'integrale
$$\int_1^{+\infty} h(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{in particolare} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \geq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$
e siccome parte da $n = 2$, è necessario aggiungere 1, da cui la disuguaglianza esposta.

Esercizio 1: Si consideri la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log(n)}$$

che, ovviamente, diverge in quanto

$$\frac{1}{\log(n)} \geq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq e$$

e siccome $\frac{1}{n}$ diverge, per il teorema del confronto, diverge anche $\frac{1}{\log(n)}$.

Esercizio 2: Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (\log(n))^\alpha}$$

Per capire se essa diverga o meno, si considera l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (\log(n))^\alpha} \, \mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{n \cdot (\log(n))^\alpha} \, \mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{1}{-\alpha + 1} \log^{-\alpha+1}(x) \right]_1^b$$

in cui

- se $\alpha > 1$, allora la funzione non è integrabile in senso generalizzato;
- se $\alpha = 1$, l'integrale è nullo e la funzione è integrabile in senso generalizzato.

Esercizio 3: Si consideri la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\arctan(n^2)}{n \cdot \sqrt{n}}$$

È ovvio che il numeratore è limitato, in quanto

$$\arctan(n^2) \leq \frac{\pi}{2}, \quad \forall n$$

e quindi si evince che

$$\left| \frac{\arctan(n^2)}{n \cdot \sqrt{n}} \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}}$$

ove

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}}$$

è una serie armonica generalizzata di ragione $\frac{3}{2} > 1$ che converge. Per il criterio del confronto per le serie, anche la serie di partenza converge.

2.5 Serie a termini (reali) positivi

Si consideri una serie a termini (reali) positivi, tale che $a_n \geq 0, \forall n$ (anche se sarebbe sufficiente **definitivamente**, ossia da un certo n in poi).
Allora, per il **teorema dell'Aut-Aut**, tale serie o converge, o diverge, ma non può essere indeterminata.
Ciò spiega perché la serie armonica diverga a $+\infty$, in quanto si è dimostrato che non converge ed è una serie a termini (reali) positivi; naturalmente, il teorema dell'Aut-Aut si aggiunge al teorema del confronto.
Un altro importante criterio è l'ordine di infinitesimo che, tuttavia, non risulta efficace quando si considerano serie il cui termine generale presenta un ordine infrareale, ossia maggiore di α, ma più piccolo di $\alpha + \epsilon, \ \forall \epsilon > 0$.

7 Ottobre 2022

Dopo aver analizzato la condizione necessaria per la convergenza, è stato anche considerato il fatto che una serie può essere sempre considerata come un integrale generalizzato. Un esempio fondamentale di serie di confronto è anche la serie armonica.
Di seguito si espongono alcuni teoremi fondamentali per la convergenza/divergenza di una serie.

2.6 Teorema dell'Aut-Aut per le serie a termini (reali) positivi

Si supponga che la serie

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

abbia termini positivi ($a_n > 0$) o al più non negativi ($a_n \geq 0$). Allora essa converge o diverge. In altre parole, una serie a termini non negativi non può essere indeterminata.

Dimostrazione: Supposto $a_n \geq 0, \forall n$ (anche se sarebbe sufficiente richiedere definitivamente), la successione delle ridotte è **crescente (anche in senso debole)**, tale per cui

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

Per il **teorema di esistenza del limite delle successioni monotone**, la successione delle ridotte ammette limite, ed esso è

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \sup \{s_n : n \in \mathbb{N}^+\}$$

Pertanto

- se la successione delle ridotte è superiormente limitata, ovvero sup $\{s_n\} \in \mathbb{R}$, la serie è ovviamente convergente.
- se la successione delle ridotte è superiormente illimitata, per cui sup $\{s_n\} = +\infty$, la serie diverge a $+\infty$.

In ogni caso, però, **la serie non può essere indeterminata**.

Osservazione: Naturalmente la stessa cosa vale anche per successioni a termini negativi. L'importante è che sia verificata la condizione $a_n \geq 0$ oppure $a_n \leq 0$ infinitesimo.

2.7 Criterio dell'ordine di infinitesimo per le serie a termini positivi

Il teorema dell'Aut-Aut permette di dimostrare anche un altro importante criterio:

Teorema 2.4 ***Criterio dell'ordine di infinitesimo per le serie a termini positivi***
Sia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

una serie a termini positivi con termine generale infinitesimo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

allora

- *se esiste* $\alpha > 1 |$ *ord* $a_n \geq \alpha$, *la serie converge*
- *se esiste* $\alpha > 1 |$ *ord* $a_n \leq 1$, *la serie diverge*

Dimostrazione: Supposto che la successione a_n abbia come ordine di infinitesimo α, con $\alpha > 1$, ossia

$$\lim \left| \frac{a_n}{\frac{1}{n^\alpha}} \right| = l \quad \text{posto} \quad l \neq 0$$

allora, per definizione stessa di limite,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} | \forall n > n_\epsilon \text{ si ha} n^\alpha < l + \epsilon$$

Per comodità, si sceglie $\epsilon = 1$, da cui

$$n^\alpha a_n < l + 1$$

Ciò consente di affermare che $\forall n > n_\epsilon$ si ha che

$$0 \leq a_n \leq (l+1) \cdot \frac{1}{n^\alpha}$$

In questo modo si sta confrontando il termine generale a_n con il termine generale della serie armonica generalizzata. Per il teorema del confronto, siccome definitivamente

$$a_n \leq (l+1) \cdot \frac{1}{n^\alpha}$$

e la serie armonica converge, in quanto $\alpha > 1$ ... continua ...

Supposto, ora, ord $a_n \leq 1$, si dimostri che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

diverge.
Il fatto che ord $a_n \leq 1$, significa che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = l$$

per cui se $l \in \mathbb{R} - \{0\}$ significa che ord $a_n = 1$, se $l = +\infty$, ord $a_n < 1$.
Nell'ipotesi che $l \in \mathbb{R} - \{0\}$, ovvero

$$\lim_{n \to +\infty} n \cdot a_n = l \in \mathbb{R} - \{0\}$$

allora, per la definizione stessa di limite

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} | \forall n > n_\epsilon : |a_n - l| < \epsilon$$

Scelto, per comodità, $\epsilon = \frac{l}{2}$, e quindi ... continua ...

Osservazione: In particolare, se $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$, e si ha

- ord $a_n > \alpha$, la serie converge
- ord $a_n \leq 1$, la serie diverge

Tuttavia, sapere che ord $a_n > 1$ non fornisce informazioni

Esercizio 1: La serie

$$\sum \frac{5n + \cos(n)}{3 + 2n^3}$$

è ovviamente convergente, in quanto ord $a_n = 2 > 1$.

Esercizio 2: La serie

$$\sum \frac{2\sqrt{n}}{n^2 + n + 1}$$

è ovviamente convergente, in quanto ord $a_n = \frac{3}{2} > 1$.

Esercizio 3: La serie
$$\sum \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$
non converge. La serie è a termini negativi, tuttavia si può fare
$$-\lim_{n\to+\infty} -\frac{\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$
per cui ord $a_n = 1$.

Esercizio 4: La serie
$$\sum 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$
è ovviamente convergente, in quanto ord $a_n = 2 > 1$.

Esercizio 5: La serie
$$\sum \frac{2^n}{(\log(n))^n} = \sum \left(\frac{2}{\log(n)}\right)^n$$
è ovviamente convergente, in quanto
$$\frac{2}{\log(n)} < \frac{2}{3} \to \log(n) > 3$$
per $n > e^3$, ma l'importante è che accada definitivamente, per cui la serie converge per confronto con la serie geometrica.

Esercizio 6: La serie
$$\sum$$

2.8 Criterio del rapporto

Presa una serie a termini positivi, ma non nulli (in quanto bisogna dividere per il termine a_n), per cui $a_n > 0$, come la seguente
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$
tale per cui
$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$
Allora

- se $k < 1$ la serie converge
- se $k = 1$ la serie diverge
- se $k > 1$ non è possibile dire nulla in merito al carattere della serie

Dimostrazione 1: Si consideri
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$
con $k < 1$. Allora, per la definizione di limite
$$\exists \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} | \forall n > n_\epsilon, k - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < k + \epsilon$$
preso un ϵ sufficientemente piccolo
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < k + \epsilon < 1 \quad \to \quad a_{n+1} < (k+\epsilon) \cdot a_n$$

E avendo supposto $a_n > 0$, è ovvio che

$$0 < a_n < \dots$$

senza perdita di generalità (in quanto si richiederebbe $\forall n > n_\epsilon$), è possibile supporre che

$$a_{n+1} < (k+\epsilon) \cdot a_n, \forall n$$

per cui, si ha che

$$a_n < (k+\epsilon)^n \cdot a_0$$

e, quindi, essendo a_0 costante, per il teorema del confronto, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}$$

converge.

Dimostrazione 2: Si consideri

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$

con $k > 1$. ... continua ... Allora, per la definizione di limite

$$\exists \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} | \forall n > n_\epsilon, k - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < k + \epsilon$$

preso un ϵ sufficientemente piccolo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < k + \epsilon < 1 \quad \to \quad a_{n+1} < (k+\epsilon) \cdot a_n$$

E avendo supposto $a_n > 0$, è ovvio che

$$0 < a_n < \dots$$

senza perdita di generalità (in quanto si richiederebbe $\forall n > n_\epsilon$), è possibile supporre che

$$a_{n+1} < (k+\epsilon) \cdot a_n, \forall n$$

per cui, si ha che

$$a_n < (k+\epsilon)^n \cdot a_0$$

e, quindi, essendo a_0 costante, per il teorema del confronto, la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}$$

converge.

Esempio: Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

Allora, applicando il teorema del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}}$$

Che può essere riscritto come

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{(n!)^2}{(n+1)^2 \cdot (n!)^2} = 0$$

e siccome $0 < 1$, la serie converge. Non solo, siccome la serie converge, la successione delle somme parziali è infinitesima.

2.9 Criterio della radice n-esima

Sia una serie a termini positivi, con $a_n \geq 0, \forall n$ (anche se sarebbe sufficiente richiederlo definitivamente). Supposto che esiste

$$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt[n]{a_n}) = l$$

Allora si considerano le seguenti casistiche

- se $l > 1$ la serie diverge
- se $l < 1$ la serie converge
- se $l = 1$ non si può dire nulla sul carattere della serie

Dimostrazione 1: Si consideri il caso in cui

$$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt[n]{a_n}) = l$$

com $l > 1$, per la definizione di limite

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} | \forall n > n_\epsilon, |\sqrt[n]{a_n} - l| < \epsilon$$

da cui $\sqrt[n]{a_n} > l - \epsilon$, per cui posto $\epsilon = 1$ si ha che, definitivamente $a_n > 1$ e quindi la serie non può convergere.

Dimostrazione 2: Si consideri il caso in cui

$$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt[n]{a_n}) = l$$

com $l < 1$, per la definizione di limite

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} | \forall n > n_\epsilon, |\sqrt[n]{a_n} - l| < \epsilon$$

e, prendendo $0 < \epsilon < 1 - l$, si evince che

$$\sqrt[n]{a_n} < l + \epsilon < 1 \quad \to \quad a_n < (l + \epsilon)^n$$

e siccome si è preso $|q| < 1$, per confronto con la serie converge.

Esempio: Si consideri la serie seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

applicando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

per cui per tale criterio non è possibile dire nulla, ma è noto che la serie converge.
Analogamente si ha che il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

non può essere determinato con il criterio del rapporto, in quanto

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

ma è noto che tale serie diverge.

2.10 Serie a termini qualsiasi

Se si considera una serie a termine generale qualsiasi

$$\sum a_n, \qquad \text{con} \qquad a_n \in \mathbb{C}$$

non è possibile dire molto sul suo carattere. Tuttavia, ad essa è possibile associare la serie

$$\sum |a_n|$$

che è una serie a termine generale positivo. Da ciò segue anche la definizione di **serie assolutamente convergente**:

SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

Una serie

$$\sum a_n$$

si dice **assolutamente convergente**, se è convergente la serie

$$\sum |a_n|$$

Teorema 2.5 *Una serie assolutamente convergente è convergente.*

DIMOSTRAZIONE: Si consideri il caso in cui $a_n \in \mathbb{R}$, allora, per definizione di parte positiva e parte negativa si ha

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{se} \quad a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad a_n < 0 \end{cases}$$

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{se} \quad a_n < 0 \\ 0 & \text{se} \quad a_n \geq 0 \end{cases}$$

ma ciò significa che $a_n = a_n^+ - a_n^-$, mentre $|a_n|a_n^+ + a_n^-$, ma è ance vero che

$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$$

$$0 \leq a_n^- \leq |a_n|$$

Se si considera un numero complesso Ma ciò significa

Osservazione: Tuttavia, non è vero il viceversa, come nel caso della **serie di Leibniz**... continua ...

2.11 Limiti di successioni in $\mathbb{C}$

Sia $(z_n)_n$ una successione in $\mathbb{C}$, con $\gamma \in \mathbb{C}$, si dirà che

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = \gamma$$

se

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_\epsilon, |z_n - \gamma| < \epsilon$$

in cui è da intendersi $|\dots|$ come modulo di un numero complesso. Un numero complesso può essere descritto come $z = x + iy$, con $z, y \in \mathbb{R}$: esiste una relazione tra la successione di un numero complesso e la successione della sua parte reale e immaginaria, esposta dal seguente teorema:

Teorema 2.6 *La successione* $(z_n)_n$*, posto* $z_n = x_n + i \cdot y_n$ *converge a* $\gamma = \alpha + i\beta$ ***se e solo se***

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = \beta$$

Dimostrazione 1: Dalla definizione di modulo, si ha che

$$|x_n - \gamma| = \sqrt{(x_n-\alpha)^2 + (y_n-\beta)^2}$$

Da ciò appare evidente che

$$|x_n - \alpha| \le |z_n - \gamma|$$
$$|y_n - \beta| \le |z_n - \gamma|$$

Dimostrazione 2: ... continua ... Dalla definizione di modulo, si ha che

$$|x_n - \gamma| = \sqrt{(x_n-\alpha)^2 + (y_n-\beta)^2}$$

Da ciò appare evidente che

$$|x_n - \alpha| \le |z_n - \gamma|$$
$$|y_n - \beta| \le |z_n - \gamma|$$

Osservazione: Dal momento che le serie sono particolari successioni, tali risultati si applicano in modo identico. Per cui una serie a termini complessi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$$

converge **se e solo se** convergono le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n) \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$$

e si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n)$$

10 Ottobre 2022

Le serie numeriche sono delle coppie di successioni: una è la successione dei termini generali, l'altra è la successione delle somme parziali.
Se una successione è convergente, allora il suo termine generale è infinitesimo. Una serie può essere sempre pensata come un integrale generalizzato.
Le serie a termini (reali) positivi sono le serie più facili da studiare, in forza del teorema dell'aut-aut.
Il criterio di convergenza più importante è il criterio dell'ordine di infinitesimo, a cui si aggiunge il criterio del rapporto e il criterio della radice n-esima.
Tuttavia, se una serie non è a termini (reali) positivi, si può associare ad essa la serie dei suoi moduli, che è a termini positivi, quindi più facile da studiare. Una serie si dice assolutamente convergente se la serie dei suoi moduli è convergente.
Serie non assolutamente convergenti vengono chiamate serie **semplicemente convergenti**.

2.12 Serie semplicemente convergenti

2.12.1 Criterio di Leibniz per le serie a termini alterni

Si consideri $(a_n)_n$ una successione a termini reali, con $a_n \in \mathbb{R}$, tale che

- $a_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $a_{n+1} \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- il termine a_n deve essere infinitesimo:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

Allora la serie costruita come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

converge.

Dimostrazione: Si consideri la ridotta n-esima s_n. Posto $k \in \mathbb{N}$ tale per cui $k \geq 0$, allora studiando la sottosuccessione dei termini pari e quella dei termini dispari, si ha

1. $s_{2k+2} = s_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} = s_{2k} - (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \leq s_{2k}$ essendo, per ipotesi, $a_{n+1} \leq a_n$, e quindi si ha che $a_{2k+1} - a_{2k+2} \geq 0$.
   Per tale ragione, tale sottosuccessione è **monotona decrescente**.

2. $s_{2k+3} = s_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3} = s_{2k+1} + (a_{2k+2} - a_{2k+3}) \geq s_{2k+1}$ essendo, per ipotesi, $a_{n+1} \leq a_n$, e quindi si ha che $a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0$.
   Per tale ragione, tale sottosuccessione è **monotona crescente**.

È noto, per ipotesi, che

$$s_{2k+1} - s_{2k} = (-1)^{2k+1} \cdot a_{2k+1} = -a_{2k+1} \leq 0 \quad \text{e quindi } s_{2k+1} \leq s_{2k}, \quad \forall k \geq 0$$

ciò significa che, per ogni n, la ridotta pari è maggiore della ridotta dispari, rimbalzando progressivamente attorno al limite delle due sottosuccessioni.
Dalle disuguaglianze di cui sopra si ha che

$$s_{2k} \geq s_{2k+1} \geq s_1 = a_0 - a_1 \forall k > 0 \tag{1}$$

$$s_{2k+1} \leq s_{2k} \leq s_2 = a_0 - a_1 + a_2 \forall k > 0 \tag{2}$$

Essendo le due sottosuccessioni, decrescente e crescente, rispettivamente limitata dal basso e dall'alto, esiste per entrambe un limite finito:

$$\lim_{k\to+\infty} s_{2k} = \beta \quad \text{e} \quad \lim_{k\to+\infty} s_{sk+1} = \alpha$$

e, per il teorema del confronto dei limiti, si ha che $\alpha \leq \beta$.
Essendo il termine a_n infinitesimo, si ha che

$$0 = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to+\infty} s_{2k} - s_{sk+1} = \alpha - \beta = 0$$

Dal momento che le sottosuccessioni sono complementari, la serie di partenza converge.

Osservazione: Inoltre, detta s la somma della serie, si ha che

$$\forall n \quad |s_n - s| \leq a_{n+1}$$

secondo la cosiddetta **formula di approssimazione**. Tale formula funziona in quanto

- se n è dispari

$$s - s_{2k+1} \leq s_{2k+2} - s_{sk+1} = a_{2k+1} + a_{2k+1} - s_{2k+1} = a_{2k+2} = a_{(2k+1)+1} = a_{n+1}$$

- se n è pari

$$s_{2k} - s \leq s_{2k} - s_{2k+1} = a_{2k+1} = a_{n+1}$$

Esempio: Si consideri la serie di Leibniz:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = s$$

Allora, per conoscere la somma della serie con un errore di $\frac{1}{10}$, è sufficiente considerare

$$s_9 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{9}$$

Esercizio 1: Si consideri la serie seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{\log_{10}(n)}{n}$$

Si controlli se sono verificate le condizioni seguenti

- Si ha che

$$\frac{\log_{10}(n)}{n} > 0 \quad \forall n \geq 2$$

- Si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_{10}(n)}{n} = 0$$

- La succesione

$$\frac{\log_{10}(n)}{n}$$

  è decrescente?

Per verificare l'ultimo punto, si considera la funzione

$$f(x) = \frac{\log_{10}(x)}{x}$$

e se ne calcola la derivata, da cui

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x \cdot \log(10)} \cdot x - \log_{10}(x) \cdot 1}{x^2}$$

Se ne studia il segno, che dipende solamente dal numeratore, da cui

$$\frac{1}{x \cdot \log(10)} \cdot x - \log_{10}(x) \cdot 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \log_{10}(x) < \frac{1}{\log(10)} \quad \rightarrow \quad x < 10^{\log(10)}$$

Per cui per $x > 10^{\log(10)}$, la funzione è decrescente. Per tale ragione, la serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\log_{10}(n)}{n}$$

converge ad s. Tuttavia, non è possibile applicare la formula di approssimazione, in quanto le condizioni di Leibniz non sono soddisfatte per tutti gli n.

Esercizio 2: Si consideri la serie seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot (1+3n)\right)}{1+3n}$$

che, in prima approssimazione, sembra non essere assolutamente convergente, in quanto il suo comportamento asintotico risulta essere simile a quello della serie armonica.
Per verificare se essa sia convergente semplicemente, si verifica se essa soddisfa le tre condizioni di Leibniz; riscrivendo il termine generale si ha

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 3n\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ecco, quindi, che la serie può essere riscritta come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+3n}}_{a_n}$$

Osservazione: Si presti particolare attenzione che, in questo ultimo caso, è stato fondamentale riscrivere il termine generale, mettendo in evidenza il fattore $(-1)^n$, in quanto per verificare le 3 ipotesi del criterio di Leibniz, bisogna studiare il termine

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+3n}$$

che risulta essere

1. a termini positivi
2. infinitesimo
3. decrescente

Se ne evince che la serie di partenza è convergente per Leibniz.

Esercizio: Si consideri la seguente serie, posto $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n + (-5)^n}{2^n} \cdot \sin\left(\pi + \frac{1}{n}\right)$$

Il seno può essere riscritto come

$$\sin\left(\pi + \frac{1}{n}\right) = -\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Pertanto si ottiene
$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\alpha^n + (-5)^n}{5^n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$
Tuttavia, si può osservare immediatamente che se $|\alpha| > 5$, la serie non converge in quanto il termine generale non è infinitesimo. Se $\alpha = -5$, si ottiene il termine generale
$$-\frac{2 \cdot (-1)^n \cdot 5^n}{5^n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = -2 \cdot (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$
in cui il termine
$$\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$
soddisfa le 3 condizioni di Leibniz, quindi la serie di partenza converge.
Nel caso in cui $\alpha = 5$, si ottiene
$$-\frac{5^n + (-1)^n \cdot 5^n}{5^n} \cdot \sin$$
... continua ...

Nel caso in cui $|\alpha| < 5$, spezzando la frazione si ottiene
$$\left(\frac{\alpha}{5}\right)^n \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) + (-1)^n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$
in cui la prima converge, se confrontata con la geometrica, e anche la seconda converge per Leibniz.

2.13 Successione di Couchy

Di seguito si espone la definizione di **successione di Couchy**:

SUCCESSIONE DI COUCHY

Sia $(z_n)_n$ una successione in $\mathbb{C}$, si dirà che $(z_n)_n$ è una successione di Couchy se
$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \;\mid\; \forall n \geq n_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N} \to |z_{n+p} - z_n| < \epsilon$$

Osservazione: Si osservi che se esiste finito
$$\lim_{n \to +\infty} z_n = l$$
allora la successione è di Couchy.

Dimostrazione: Fissato $\epsilon > 0, \exists n\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\epsilon$, si ha che
$$|z_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$
Allora, $\forall n \geq n_\epsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$, si ottiene
$$|z_{n+p} - z_n| \leq |z_{n+p} - l| + |l - z_n| < \epsilon$$

Teorema 2.7 *Ogni successione di Couchy in $\mathbb{C}$ (o in $\mathbb{R}$) è convergente.*

Osservazione: Per le serie $(s_n)_n$, si ha che
$$\left|\sum_{k=0}^{n+p} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| < \epsilon \quad \to \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|$$

2.14 Criterio di Cauchy per la convergenza di una serie

Una serie

$$\sum a_n$$

converge **se e solo se** $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\epsilon$ e $\forall p \in \mathbb{N}$ vale

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon$$

3 Successioni e serie di funzioni

Di seguito si introduce l'importante tema delle successioni e delle serie di funzioni, in cui.

3.1 Successioni di funzioni

Se, per esempio, si introduce una successione di funzioni come la seguente

$$f_n(x) = x^n$$

si ottiene

1. $f_0(x) = 1$
2. $f_1(x) = x$
3. $f_2(x) = x^2$
4. $f_3(x) = x^3$

o ancora, nel caso di

$$f_n(x) = \cos(xn)$$

si ottiene

1. $f_0(x) = \cos(0) = 1$
2. $f_1(x) = \cos(x)$
3. $f_2(x) = \cos(2x)$
4. $f_3(x) = \cos(3x)$

3.1.1 Limite di una successione di funzioni

Sia $f_n : E \longmapsto \mathbb{R}(\mathbb{C})$ e $f : E \longmapsto \mathbb{R}$. Si dice che la successione $(f_n)_n$ converge puntualmente a f se, $\forall x \in E$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Esempio 1: Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \cos(nx)$$

allora tale successione ammette limite 0 se $x = 0$, non esiste altrimenti.

Esempio 2: Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n}$$

tale per cui, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x^2 + n} = 0$$

Esempio 3: Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx^2 + 1}$$

allora si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

11 Ottobre 2022

Il criterio di Leibniz è un criterio fondamentale per capire la convergenza semplice di una serie a termini alternativamente positivi e negativi. Dopodiché sono state introdotte le successioni Cauchy e il criterio di Cauchy consente di capire se esiste un limite, senza conoscere il valore del limite, che risulta fondamentale, anche per le dimostrazioni del seguito:

DIMOSTRAZIONE 1: Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

allora si dirà che la serie converge assolutamente se vale la serie dei moduli è convergente, ossia la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

è convergente.
Se una serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

converge assolutamente, allora la serie dei moduli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

è di Cauchy, ossia, secondo la definizione del criterio Cauchy, si ha che

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N} \quad \text{si ha} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \epsilon$$

Per dimostrare che la serie dei moduli è di Cauchy, si sfrutta la disuguaglianza triangolare (ossia il modulo della somma è minore della somma dei moduli), per cui

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \leq ...continua...$$

Si dimostri, tramite il criterio di Cauchy, che la serie armonica è divergente a $+\infty$.

DIMOSTRAZIONE 2: Considerando la ridotta n-esima della serie armonica, si ha

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

che, per come è stata costruita, è positiva e crescente, per cui, per il teorema di esistenza del limite delle successioni monotone, si può affermare che

$$\exists \lim_{n \to +\infty} s_n$$

finito o infinito. Si procede, ora, per assurdo, dimostrando che

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\epsilon \text{ e } \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \epsilon$$

Allora, posto $n \geq n_\epsilon$, si ha

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} < \epsilon$$

siccome il numero di addendi sommati è pari a p, in quanto $(n+p)-(n+1)+1=p$. Fissato $p=n$, si ha che

$$\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>\frac{1}{2n}}+\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{>\frac{1}{2n}}+\cdots+\frac{1}{2n}<\epsilon$$

ma essendo n addendi, si ottiene che

$$\frac{1}{2n}\cdot n=\frac{1}{2}<\epsilon$$

Ma se si sceglie arbitrariamente $\epsilon>0$, come $\epsilon=\frac{1}{10}$, si incorre in un assurdo.

Si consideri la successione di funzioni

$$f_n:[0,1[\quad \text{definita come } f_n(x)=x^n$$

Allora $\forall x\in[0,1[$, si ha che

$$\lim_{n\to+\infty}x^n=0$$

e, per la definizione di limite, si ha

$$\forall\epsilon>0,\exists n_\epsilon\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_\epsilon,|x^n|<\epsilon$$

Per determinare n_ϵ tale per cui $\forall n\geq n_\epsilon,|x^n|<\epsilon$, posto $\epsilon=e^{-10}$, si ha

$$x^n<\epsilon\to e^{n\cdot\log(x)}<\epsilon\to e^{n\cdot\log(x)}<e^{\log(\epsilon)}$$

Siccome $\log(x)<0$, si ottiene

$$n>\frac{\log(\epsilon)}{\log(x)}$$

È facile capire che

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\log(\epsilon)}{\log(x)}=+\infty$$

ovvero, n dipende fortemente da x: più x tende a 1 da sinistra, più n deve essere grande al fine di soddisfare il limite di partenza:

$$\lim_{n\to+\infty}x^n=0$$

Questo perché 0 è limite puntuale e non uniforme per la successione f_n.

LIMITE UNIFORME

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni f, con

$$f_n:E\longmapsto\mathbb{R}$$

Si dirà che f è limite uniforme della successione

$$\lim_{n\to+\infty}f_n=f$$

uniforme se

$$\forall\epsilon>0,\exists n_\epsilon\in\mathbb{N}\text{ tale che }\forall n\geq n_\epsilon,\forall x\in E,|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$$

Osservazione: Nel caso di **limite puntuale**, invece, si ha che

$$\forall\mathbf{x}\in\mathbf{E},\forall\epsilon>\mathbf{0},\exists\mathbf{n}_{\epsilon,\mathbf{x}}\in\mathbb{N}\text{ tale che }\forall\mathbf{n}\geq\mathbf{n}_\epsilon,|\mathbf{f_n(x)}-\mathbf{f(x)}|<\epsilon$$

in cui è fondamentale capire la forte dipendenza da x in questo caso, cosa che invece non accade nel caso di un limite uniforme, in cui n_ϵ si mantiene costante indipendentemente dalla scelta di x.

Osservazione: Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n + x^2}$$

posto $x = 0$, il valore massimo è $\frac{1}{n}$, per cui la successione converge uniformemente. Ciò significa che, fissato ϵ, il grafico di tutte le funzioni in dipendenza da n sono tutte contenute al di sotto del grafico.

Esercizio 1: Si consideri la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{n}{x^2 + n}$$

allora

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$$

Naturalmente si ha convergenza puntuale, ma non uniforme. Infatti, se fosse uniforme, fissato $\epsilon = \dfrac{1}{100}$ dovrebbe esistere $n_epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\epsilon, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{n}{x^2 + n} - 1 \right| < \frac{1}{100}$$

Per dimostrare che ciò non è possibile $\forall x \in \mathbb{R}$, si sviluppa, ottenendo

$$\left| \frac{n - x^2 - n}{x^2 + n} \right| = \frac{x^2}{x^2 + n}$$

basta scegliere $x = \sqrt{n}$, per cui

$$\frac{n}{n + n} = \frac{1}{2} < \frac{1}{100}$$

che, ovviamente è falso.

Esercizio 2: Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx^2 + 1}$$

allora

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$$

che è una convergenza puntuale, ma non uniforme, in quanto, fissato $\epsilon = \dfrac{1}{100}$ dovrebbe esistere $n_epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\epsilon, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{nx}{nx^2 + 1} - \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{100}$$

e sviluppando si ottiene

$$\frac{1}{x \cdot (nx^2 + 1)} < \frac{1}{100}$$

in cui basta scegliere $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, ottenendo

$$\frac{\sqrt{n}}{2} < \frac{1}{100}$$

che, ovviamente, non è vero $\forall n \in \mathbb{N}$.

Osservazione: Si osservi che se il limite di una successione di funzioni è discontinuo, allora la successione non converge uniformemente.

3.2 Teorema di inversione di due limiti

Si consideri il seguente **teorema di inversione di due limiti**:

Teorema 3.1 *Sia $f(n)_n$ una successione di funzioni*

$$f_n : E \longmapsto \mathbb{R}$$

tale che $(f_n)_n$ ***converge uniformemente*** *a*

$$f : E \longmapsto \mathbb{R}$$

con x_0 punto di accumulazione per $E, \forall n$, tale per cui

$$\exists \lim_{x \to x_0} f_n(x) = l_n$$

Allora

$$\exists \lim_{n \to +\infty} l_n = 0, \quad \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

si può affermare che

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right)$$

Osservazione: Si osservi che quanto esposto in precedenza vale solamente per successioni di funzioni con convergenza uniforme, non puntuale. Infatti

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to 1} x^n \right) = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 1} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right)$$

Dimostrazione 1: Per la dimostrazione si considera il criterio di Cauchy, fondamentale per dimostrare l'esistenza del limite

$$\lim_{n \to +\infty} l_n$$

senza conoscerlo. Bisogna dimostrare che la successione $(l_n)_n$ è di Cuachy, ossia che $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\epsilon$ e $\forall p \in \mathbb{N}$

$$|l_{n+p} - l_n| < \epsilon$$

In particolare, $\forall x \in E$ si può affermare che

$$|l_{n+p} - l_n| = \left| l_{n+p} - l_n - f_{n+1}(x) + f_{n+p}(x) - f_(n+1)(x) - f_{n+p}(x) \right|$$

Sfruttando la disuguaglianza triangolare, si ha che

$$\left| l_{n+p} - l_n - f_{n+1}(x) + f_{n+p}(x) - f_(n+1)(x) - f_{n+p}(x) \right| \leq |l_{n+p} - f_{n+p}(x)| + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| + |f_n(z) - l_n|$$

Siccome $(f_n)_n$ è uniformemente convergente, quindi è una successione di Cauchy. Ciò significa che

$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N} \text{ e } \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E} \rightarrow |\mathbf{f_{n+1}(x)} - \mathbf{f_n(x)}| < \frac{\epsilon}{\mathbf{3}}$$

Fissato $\hat{n} \geq n_\epsilon$ e un qualsiasi $q \in \mathbb{N}$, è noto che

$$\lim_{x \to x_0} f_{\hat{n}}(x) = l_{\hat{n}} \text{ e } \lim_{x \to x_0} f_{\hat{n}+p}(x) = l_{\hat{n}+p}$$

Allora, dalla definizione di limite si ha che

$$\exists \delta_{\hat{n}+p} > 0, \delta_{\hat{n}} > 0 | \forall x \in E, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta_{\hat{n}+p} \text{ e } \forall x \in E, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta_{\hat{n}} \quad \text{si ha } |f_{\hat{n}}(x) - l_{\hat{n}}| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{e} \quad |f_{\hat{n}+p}($$

Ma ciò consente di affermare che, preso il δ più piccolo di entrambi $\delta_{\hat{n}+p}$ e $\delta_{\hat{n}}$:

$$|l_{\hat{n}+\hat{p}} - l_{\hat{n}}| \leq |l_{\hat{n}+\hat{p}} - f_{\hat{n}+\hat{p}}| + |f_{\hat{n}+\hat{p}}(x) - f_{\hat{n}}(x)| + |f_{\hat{n}}(x) - l_{\hat{n}}| < \epsilon$$

Ciò, quindi, consente di affermare che

$$\exists \lim_{n\to+\infty} l_n = l \to |l_{n+p} - l_n| < \epsilon$$

Dimostrazione 2: Ripetendo la dimostrazione per

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

si ha che

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - l + l_n + f_n(x) - f_n(x)| \leq |-(f_n(n) - f(x))| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l| < \epsilon$$

Infatti, è noto che

$$\lim_{n\to+\infty} l_n = l$$

Pertanto esiste n_ϵ^1 tale che $\forall n \geq n_\epsilon^1$ si ha

$$|l_n - l| < \frac{1}{3}\epsilon$$

Inoltre, poiché

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f$$

uniforme, esiste $n_\epsilon^2 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\epsilon^2$, si ha

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall x \in E$$

Fissato, quindi, $\hat{n} \geq \max\{n_\epsilon^1, n_\epsilon^2\}$. Per questo $\hat{n}$, siccome

$$\lim_{x\to x_0} f_{\hat{n}}(x) = l_{\hat{n}}$$

si ha che $\exists \delta_\epsilon > 0$ tale che $\forall x \in E, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta_\epsilon$

$$|f_{\hat{n}}(x) - l_{\hat{n}}| < \frac{\epsilon}{3}$$

Ricapitolando: Bisogna dimostrare che

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_n(x)|$$

... continua ...

Corollario 3.1.1 *Si osservi che se*

$$f_n : E \longmapsto \mathbb{R}$$

è continua $\forall n$ *e*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f$$

uniforme. Allora f *è continua.*

Dimostrazione: Ciò è immediatamente evidente in quanto

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

Osservazione: Si osservi che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

uniforme, lo è anche puntuale.

3.3 Teorema di integrabilità

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un **intervallo compatto** (ovvero con misura finita) e sia

$$f_n : I \longmapsto \mathbb{R}$$

integrabile $\forall n$; sia, inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f$$

uniforme, con

$$f : I \longmapsto \mathbb{R}$$

allora f è integrabile e si ha che

$$\int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

DIMOSTRAZIONE: Parlando di integrale di Riemann, si dimostra che

$$\left| \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_I |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x < \epsilon \cdot m(I)$$

in quanto $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x$ se $n \geq n_e psilon$ per la convergenza uniforme.

Dimostrazione: Si consideri la seguente successione di funzioni

$$f_n : [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$$

in cui

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \{0\} \cup \left]\frac{1}{n+1}, 1\right] \\ n & \text{se} \quad x \in \left]0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

in cui appare evidente come

$$\int_[0,1] f(x)\,\mathrm{d}x = 1, \forall n$$

e, ovviamente,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} f_n(x) = 1$$

mentre

$$\int_{[0,1]} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \int_{[0,1]} 0\,\mathrm{d}x = 0$$