Università di Trieste

Laurea in ingegneria elettronica e informatica

Enrico Piccin - Corso di Analisi matematica II - Prof. Franco Obersnel

Anno Accademico 2022/2023 - 3 Ottobre 2022

Indice

3 Ottobre 2022

1 Introduzione

Considerando un foglio di carta, dividendolo in due metà esatte, si ottiene $\frac{1}{2}$ del profilo quadrato di partenza. Considerando una delle due metà, e suddividendola ancora in due, si ottiene $\frac{1}{4}$ del profilo quadrato di partenza. Ripetendo questo procedimento, si otterranno le seguenti frazioni del profilo quadrato originario: $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, ...$. Sommando tutte le frazioni di profilo quadrato, alla fine si otterrà il profilo quadrato di partenza, ossia la frazione 1. Ecco quindi che, contrariamente a quanto voleva sostenere **Parmenide**, **Zenone** scoprì che

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + ... = 1 \to \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1}$$

Ciò non risulta essere banale: una somma di **infinite quantità positive** produce una quantità finita. Quello che si è ottenuto è una **serie (numerica) geometrica di ragione** $\frac{1}{2}$.

2 Serie numerica

Di seguito si espone la definizione di **serie numerica**:

SERIE NUMERICA

Data una successione $(a_n)_n$ con valori nel campo complesso $a_n \in \mathbb{C}$. Si consideri una nuova successione $(s_n)_n$ definita **per ricorrenza** come segue

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \qquad \text{posto} \qquad s_0 = a_0$$

Ciò significa che

- $s_0 = a_0$
- $s_1 = a_0 + a_1$
- $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$
- e via di seguito...

La serie $a_0 + a_1 + a_2 + ...$ è la **coppia ordinata** delle due successioni, come mostrato di seguito

$$((a_n)_n, (s_n)_n)$$

ove la successione $(a_n)_n$ prende il nome **successioni dei termini generali**, mentre la successione $(s_n)_n$ si chiama successione delle **ridotte** o delle **somme parziali** della serie.

Esempio: Posto $a_1 = \frac{1}{2}$ e il termine generale $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, la ridotta sarà

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}$$

osservando bene di partire da $n = 1$ e non da 0.

2.1 Convergenza, divergenza e indeterminatezza di una serie

Data una serie, ossia data una coppia di successioni, è possibile ora andare a studiare il comportamento della successione delle ridotte.

2.1.1 Convergenza di una serie

Di seguito si espone la definizione di **convergenza di una serie**:

CONVERGENZA DI UNA SERIE

Se la successione delle ridotte di una serie è convergente, si dice che la serie è convergente e il limite della successione delle ridotte prende il nome di **somma della serie**.
In altre parole, se **esiste finito** il

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{C}$$

allora la serie si dice **convergente** e il limite s si dice **somma della serie** e si scrive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s$$

Attenzione: Molto spesso si utilizza la notazione sopra esposta per indicare sia la serie stessa, sia la sua somma, per cui può essere fuorviante. Lo si può capire dal contesto: una serie potrebbe non essere convergente, e quindi non avere una somma.

Esempio: Se si considera $a_n = 1, \forall n$, per cui

$$1 + 1 + 1 + ... = \sum_{n=0}^{n} 1$$

allora la somma parziale è $s_n = n + 1$, ovvero una successione divergente a $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$$

Ciò significa che la serie non converge, ma è **divergente**, per cui non ha nemmeno una somma.

Osservazione: Si osservi che la divergenza a $+\infty$ di una serie ha significato solamente quando i termini generali sono sul campo reale: se una serie ha termine generico nel campo complesso, non può essere divergente a $+\infty$, in quanto non esiste un limite infinito nel campo complesso (a meno che non si consideri il modulo).

2.1.2 Divergenza di una serie

Di seguito si espone la definizione di **divergenza di una serie**:

DIVERGENZA DI UNA SERIE

Se la successione delle ridotte di una serie (a termine generale reale) è divergente, si dice che la serie è divergente; in questo caso, la serie non presenta una somma.
In altre parole, se data $a_n \in \mathbb{R}, \forall n$, e posto

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty \text{ o } -\infty$$

la serie si dice **divergente**.

Esempio: Se $a_n = a \in \mathbb{R}$ **costante**, allora la serie con termine generale a_n

$$a_0 + a_1 + a_2 + ...$$

è necessariamente

- divergente a $+\infty$ se $a > 0$
- divergente a $-\infty$ se $a < 0$
- convergente, con somma 0, se $a = 0$

Attenzione: se $a \neq 0$, ma $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, si dice semplicemente che la serie **non converge** (non ha senso parlare di divergenza).

2.1.3 Indeterminatezza di una serie

Di seguito si espone la definizione di **serie indeterminata**:

SERIE INDETERMINATA

Una serie si dice **indeterminata** se non converge e non diverge.

Esempio 1: Per quello che si è visto, una serie a termine generale costante, complesso e non reale, è indeterminata.

Esempio 2: Un esempio di serie a termini reali, ma indeterminata, è la **serie di Grandi**, definita così:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

per cui $s_0 = (-1)^0 = 1$ e $s_1 = a_0 + a_1 = 1 + (-1)^1 = 0$. Pertanto si ha che

- $s_n = 1$ se n è pari
- $s_n = 0$ se n è dispari

Per cui si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} s_0 =? \text{ non esiste}$$

E per dimostrare che non esiste, si può semplicemente dimostrare che due sotto-successioni della successione delle somme parziali convergono a limiti diversi (ossia la sotto-successioni degli indici pari e quella dei dispari); infatti:

- $\lim_{k\to+\infty} s_{2k} = 1$
- $\lim_{k\to+\infty} s_{2k+1} = 0$

per cui sono state ottenute due sotto-successioni che presentano limite differente: per il teorema dell'unicità del limite e il teorema del limite delle sotto-successioni di una successione, si conclude che la successione delle somme parziali è indeterminata.

Osservazione: La serie di Grandi è una serie che può essere usata per dimostrare l'esistenza di Dio, in quanto commutando fra di loro i differenti termini può essere fatta convergere a qualsiasi (o quasi) numero finito.
Se, infatti, si considerano le somme

- $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... = 0$
- $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + ... = 1$
- $(1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) = 2$

si ottengono serie che convergono a qualunque valore (tranne uno). In generale, infatti, se una serie è indeterminata, si possono commutare gli addendi della stessa e ottenere la convergenza a qualunque numero.

2.2 Serie geometrica

Si è osservato che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

per cui è ovvio che partendo con $n = 0$, si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

Più in generale, si fornisce di seguito la definizione di **serie geometrica**:

SERIE GEOMETRICA

Si dice **serie geometrica** di ragione $z \in \mathbb{C}$ la serie del tipo

$$1 + z + z^2 + z^3 + ... \to \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

che, tuttavia, palesa un problema di fondo: se si sceglie $z = 0$, naturalmente si incorre nell'ambiguità

$$0^0 + 0^1 + ...$$

ma 0^0 è una scrittura che non ha significato. Tuttavia, in questo particolare caso, si considera $0^0 = 1$, in modo tale da essere coerenti con la scrittura $1 + z + z^2 + z^3 + ...$ impiegata in precedenza.

Osservazione: Data la serie seguente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

per cui la ridotta è

$$s_n = 1 + z + z^2 + ... + z^n$$

che può anche essere riscritto come

$$s_n = 1 + z + z^2 + ... + z^n = 1 + z \cdot \left(1 + z + ... + z^{n-1}\right)$$

dove $1 + z + ... + z^{n-1} = s_{n-1}$. Da cui si evince che, sommando e sottraendo per la medesima quantità z^n, si ottiene

$$s_n = 1 + z \cdot \left(\underbrace{1 + z + ... + z^{n-1} + z^n}_{s_n} - z^n \right)$$

che diviene, quindi:

$$s_n = 1 + z \cdot s_n - z^{n+1} \quad \to \quad s_n - z \cdot s_n = 1 - z^{n+1} \quad \to \quad s_n \cdot (1 - z) = 1 - z^{n+1} \quad \to \quad s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

posto $z \neq 1$ (ma il caso $z = 1$ è facilmente risolubile, per quanto osservato nel caso di una serie a termine generale costante).
Di seguito si espone, quindi, il comportamento della serie geometrica a seconda della sua ragione z:

COMPORTAMENTO DELLA SERIE GEOMETRICA

Per quanto osservato in precedenza, si ha che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

posto $z \neq 1$, che diviene

- $\dfrac{1}{1-z}$ se $|z| < 1$.
- non converge se $|z| > 1$, tuttavia, si può dire che
  - se $z \in \mathbb{R}$ e $z \geq 1$, diverge a $+\infty$
  - se $z \in \mathbb{C}$ e $|z| \geq 1$ (ovvero può essere anche un numero negativo), posto $z \notin]1, +\infty[$ (ossia diverso dal caso precedente), nel caso di n pari si sommano quantità positive, nel caso di n dispari si sommano quantità negative, per cui la serie oscilla e quindi è indeterminata.

Osservazione: Si osservi che la serie geometrica è l'unica per cui si riesce a calcolare la somma, in quanto è l'unica di cui è possibile esprimere la ridotta in modo generale.
Altrimenti, gestire le ridotte diviene molto complesso.

Esempio: Si consideri la seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \cos^n(1)$$

che è una serie geometrica di ragione $\cos(1)$, ove $|\cos(1)| < 1$, per cui converge. La somma di tale serie, quindi, è facilmente determinabile secondo quanto visto in precedenza, tenendo conto che n parte da 2, per cui bisogna sottrarre $\cos^0(1) = 1$ e $\cos^1(1) = \cos(1)$. Da ciò si evince che la serie converge a

$$\frac{1}{1-\cos(1)} - 1 - \cos(1) = \frac{1 - 1 + \cos(1) - \cos(1) + \cos^2(1)}{1-\cos(1)} = \frac{\cos^2(1)}{1-\cos(1)}$$

Osservazione: La somma della serie geometrica di ragione $z \in \mathbb{C}$ è indeterminata se $|z| > 1$, per quanto già visto.
Inoltre si ha che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2i+x}{4}\right)^n$$

è convergente se

$$\left|\frac{2i+x}{4}\right| < 1$$

ma ricordando come si calcola il modulo di un numero complesso si ottiene

$$|2i + x| = \sqrt{4 + x^2}$$

e quindi

$$\sqrt{4+x^2} < 4 \quad \to \quad 4 + x^2 < 16 \quad \to \quad x^2 < 12 \quad \to \quad |x| < \sqrt{12} \quad \to \quad |x| < 2\sqrt{3}$$

E poi, ovviamente, la serie di Grandi è il tipico esempio di serie indeterminata, per cui la sua somma non può essere definita.

5 Ottobre 2022

Una serie è costituita da 2 successioni: la successione dei termini generali e la successione delle ridotte o somme parziali: quando si opera con le serie, risulta fondamentale distinguere le due successioni.
Una tra le serie più note è la serie geometrica, di ragione $z \in \mathbb{C}$, la quale converge se il modulo della ragione è minore di 1. Non converge in caso contrario, ma in particolare

- se la ragione z è un numero reale, $z \in \mathbb{R}$, e $z \geq 1$, allora la serie diverge a $+\infty$;
- se la ragione z è un numero complesso, con $|z| \geq 1$ e $z \notin]1, +\infty[$, allora la serie è indeterminata.

In generale, non si può parlare di divergenza a $+\infty$ o $-\infty$ in campo complesso, in quanto in esso è **assente la relazione d'ordine** e quindi non esiste un limite infinito.

Esempio: Si consideri l'esempio seguente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{2^n}$$

Tale serie presenta come termine generale

$$a_n = \frac{\cos(n)}{2^n}$$

ma è vero che $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, per cui

$$-\frac{1}{2^n} \leq a_n \leq \frac{1}{2^n}$$

Per dimostrare che anche la serie in esame converge, è sufficiente considerare s_n^- e s_n^+, rispettivamente la ridotta n-esima della serie geometrica di ragione $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, come segue

$$s_n^- = -1 - \frac{1}{2} - ... - \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad s_n^+ = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^n}$$

per cui

$$s_n^- \leq s_n \leq s_n^+$$

e per il **teorema del confronto esiste finito** il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} s_n \in \mathbb{R}$$

e quindi la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{2^n}$$

converge.

2.3 Teorema del confronto per le serie

Di seguito si espone il fondamentale **teorema del confronto per le serie**:

Teorema 2.1 ***Teorema del confronto per le serie***
*Siano $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ tali che $a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n$ (anche se sarebbe sufficiente richiedere che ciò sia vero **definitivamente**, ossia $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che la disuguaglianza di cui sopra è valida $\forall n \geq n_0$).
Siano convergenti le serie*

$$\sum a_n \quad e \quad \sum c_n$$

allora è convergente anche la serie

$$\sum b_n$$

ed è tale la stima della somma della serie:

$$\sum a_n \leq \sum b_n \leq c_n$$

che è una stima valida $\forall n$*, oppure* $\forall n \geq n_0$ *(a seconda che sia stato richiesto* $\forall n$*, oppure definitivamente).*

Osservazione: Si osservi il caso particolare per cui $a_n = 0, \forall n$ (ossia serie a termini positivi, cioè una serie per cui tutti i termini della successione dei termini generale sono positivi) oppure quelle per cui $c_n = 0, \forall n$ (ossia serie a termini negativi, vale a dire serie per cui tutti i termini della successione dei termini generali sono negativi).
In questi casi, infatti, è sufficiente considerare un limitazione superiore (o inferiore, rispettivamente) per concludere la convergenza.

Dimostrazione - IMPORTANTE: Si dimostri che il carattere di una serie non dipende da quello che accade su un numero finito di termini.

Esempio: Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} e^{100-n^2}$$

Essendo essa a termini positivi e maggiorata da

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} e^{100}$$

per il teorema del confronto.

Osservazione: Si osservi che il termine generale $a_n < \frac{1}{2^n}$ quando ... continua ...

Esempio: Si consideri la serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$$

in quanto

$$\lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

ossia, per n molto grande, nella serie si somma sempre 1, per cui diverge.

Teorema 2.2 ***Condizione necessaria per la convergenza***
Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *una serie convergente, allora*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Dimostrazione: Sia $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$, tale per cui

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

Siccome la serie è convergente per ipotesi (s_{n+1} e s_n convergono allo stesso limite):

$$\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = s_{n+1} - s_n = 0$$

Osservazione: Si osservi che esistono delle serie

$$\sum a_n$$

non convergenti, dove il

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

per questo si parla di condizione necessaria, e non sufficiente. Infatti è importante definire con quale velocità il termine generale vada a 0: se è troppo lenta, nonostante sia infinitesima, la serie associata convergerà.

2.4 Serie armonica

Si consideri la serie seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

che prende il nome di **serie armonica**. Per studiarne il comportamento, è sufficiente capire che **ogni serie può essere considerata come un integrale generalizzato**. Infatti, per definizione di integrale generalizzato:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

allora se si considera la serie $a_1 + a_2 + a_3$, si definisce una funzione

$$f : [1, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$$

nel modo seguente: essendo una successione una funzione (definita sui numeri naturali), si possono interpolare i valori di una successione tramite delle costanti, come nel seguito:

$$f(x) = a_n \quad \text{se} \quad x \in [n, n+1[, \quad \forall n \geq 1$$

Osservazione: Naturalmente si ha che

$$\int_n^{n+1} f(x) \cdot dx = a_n \cdot (n + 1 - n) = a_n$$

per cui è ovvio che

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \int_1^{n+1} f(x) \cdot dx$$

Se f è integrabile, allora

$$\int_1^{+\infty} f(x) \cdot dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b f(x) \cdot dx$$

per cui, per il teorema del limite delle successioni, ogni successione che tende a $+\infty$ avrà lo stesso limite della funzione f, ossia

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} f(x)...continua...$$

Osservazione: Si osservi che se la serie converge, per cui

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^{n+1} f(x) \cdot dx = \lim_{n \to +\infty} = s$$

è anche vero che f è integrabile, in quanto, posto $[b] = n$, essendo $b < n + 1$,

$$\int_1^b f(x) \cdot dx = \int_1^n f(x) cdot dx + \int_n^b f(x)dx$$

Allora, giacché

$$\int_n^b f(x) \cdot dx = a_n \cdot (b - n) \leq a_n$$

in quanto $b < n+1$ e $[b] = n$. Ma siccome la serie converge, allora il limite del termine generale è 0, quindi

$$\int_1^b f(x) \cdot dx = \int_1^n f(x) cdotdx$$

come esposto da teorema seguente:

Teorema 2.3 *Sia* $a_1 + a_2 + ...$ *una serie e sia* f *la funzione precedentemente descritta, allora* f *è integrabile in senso generalizzato su* $[1, +\infty[$ *se e solo se la serie converge... continua...*

Osservazione: Se si considera la funzione

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

allora, sapendo che

$$g(x) \leq f(x), \forall x \in [1, +\infty[$$

in quanto f è la funzione a tratti precedentemente definita. Per cui, siccome $g(x)$ non è integrabile, non lo è nemmeno la f (per il teorema del confronto degli integrali generalizzati), pertanto la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

per il teorema precedentemente esposto, non converge.

2.4.1 Serie armonica generalizzata

È noto che la serie armonica non converge. Non sorprende, però, sapere che tale serie è divergente a $+\infty$, ovvero

$$\sum n = 1^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Pertanto, se si considera

$$\sum n = 1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

essa è necessariamente

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1$$

per cui, per il teorema del confronto, diverge a $+\infty$. Ciò risulta vero per ogni

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}, \forall n \geq 1 \quad \text{se } 0 < \alpha \leq 1$$

In generale, tuttavia, sappiamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \cdot dx = \left[\frac{1}{-\alpha+1} \cdot x^{-\alpha+1} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Tuttavia, impiegando la funzione definita in precedenza (da n a $n+1$), siccome sarà maggiore di $g(x) = \frac{1}{x^2}$, non è possibile stabilire se essa sia integrabile o meno.
Per tale ragione si definisce

$$h(x) = a_n \quad \text{se} \quad x \in]n-1, n]$$

allora

$$\int_{n-1}^n h(x) \cdot dx = a_n$$

Da ciò segue che

$$\int_1^{+\infty} = a_2 + a_3 + ... + = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n$$

Pertanto, siccome

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \int_1^{+\infty} h(x) \cdot dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cdot dx = 1$$

ciò permette di concludere che la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{n^\alpha}$$

con $\alpha > 0$ è divergente a $+\infty$ se $\alpha \in]0,1]$, è convergente se $\alpha > 1$ con somma

$$s \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

dal momento che l'integrale

$$\int_1^{+\infty} h(x) \cdot dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{ovvero} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \cdot dx = 1+$$

Esercizio 1: Si consideri la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log(n)}$$

che, ovviamente, diverge in quanto

$$\frac{1}{\log(n)} \geq \frac{1}{n}$$

e siccome $\frac{1}{n}$ diverge, per il teorema del confronto, diverge anche $\frac{1}{\log(n)}$.

Esercizio 2: Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (\log(n))^\alpha}$$

Per capire se essa diverga o meno, si considera l'integrale

... continua ...

2.5 Serie a termini (reali) positivi

Si consideri $a_n \geq 0, \forall n$ (anche se sarebbe sufficiente **definitivamente**, ossia da un certo n in poi), per il **teorema dell'Aut-Aut**, o converge, o diverge.
Ciò spiega perché la serie armonica diverga a $+\infty$, in quanto si è dimostrato che non converge.
Il teorema dell'Aut-Aut si aggiunge al teorema del confronto

7 Ottobre 2022

Dopo aver analizzato la condizione necessaria per la convergenza, è stato anche considerato il fatto che una serie può essere sempre considerata come un integrale generalizzato. Un esempio fondamentale di serie di confronto è anche la serie armonica.
Di seguito si espongono alcuni teoremi fondamentali per la convergenza/divergenza di una serie.

2.6 Teorema dell'Aut-Aut per le serie a termini (reali) positivi

Si supponga che la serie

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

abbia termini positivi ($a_n > 0$) o al più non negativi ($a_n \geq 0$). Allora essa converge o diverge. In altre parole, una serie a termini non negativi non può essere indeterminata.

DIMOSTRAZIONE: Supposto $a_n \geq 0, \forall n$ (anche se sarebbe sufficiente richiedere definitivamente), la successione delle ridotte è **crescente (anche in senso debole)**, tale per cui

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

Per il **teorema di esistenza del limite delle successioni monotone**, la successione delle ridotte ammette limite, ed esso è

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \sup \{s_n : n \in \mathbb{N}^+\}$$

Pertanto

- se la successione delle ridotte è superiormente limitata, ovvero sup $\{s_n\} \in \mathbb{R}$, la serie è ovviamente convergente.
- se la successione delle ridotte è superiormente illimitata, per cui sup $\{s_n\} = +\infty$, la serie diverge a $+\infty$.

In ogni caso, però, **la serie non può essere indeterminata**.

Osservazione: Naturalmente la stessa cosa vale anche per successioni a termini negativi. L'importante è che sia verificata la condizione $a_n \geq 0$ oppure $a_n \leq 0$ infinitesimo.

2.7 Criterio dell'ordine di infinitesimo per le serie a termini positivi

Il teorema dell'Aut-Aut permette di dimostrare anche un altro importante criterio:

Teorema 2.4 ***Criterio dell'ordine di infinitesimo per le serie a termini positivi***
Sia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

una serie a termini positivi con termine generale infinitesimo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

allora

- *se esiste* $\alpha > 1|$ *ord* $a_n \geq \alpha$, *la serie converge*
- *se esiste* $\alpha > 1|$ *ord* $a_n \leq 1$, *la serie diverge*

Dimostrazione: Supposto che la successione a_n abbia come ordine di infinitesimo α, con $\alpha > 1$, ossia

$$\lim \left| \frac{a_n}{\frac{1}{n^\alpha}} \right| = l \qquad \text{posto} \qquad l \neq 0$$

allora, per definizione stessa di limite,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} | \forall n > n_\epsilon \text{ si ha} n^\alpha < l + \epsilon$$

Per comodità, si sceglie $\epsilon = 1$, da cui

$$n^\alpha a_n < l + 1$$

Ciò consente di affermare che $\forall n > n_\epsilon$ si ha che

$$0 \leq a_n \leq (l+1) \cdot \frac{1}{n^\alpha}$$

In questo modo si sta confrontando il termine generale a_n con il termine generale della serie armonica generalizzata. Per il teorema del confronto, siccome definitivamente

$$a_n \leq (l+1) \cdot \frac{1}{n^\alpha}$$

e la serie armonica converge, in quanto $\alpha > 1$ ... continua ...

Supposto, ora, ord $a_n \leq 1$, si dimostri che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

diverge.
Il fatto che ord $a_n \leq 1$, significa che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = l$$

per cui se $l \in \mathbb{R}$ significa che ord $a_n = 1$, se $l = +\infty$, ord $a_n < 1$