

# Università di Trieste

## Laurea in ingegneria elettronica e informatica

Enrico Piccin - Corso di Fisica generale I - Prof. Pierre Thibault

Anno Accademico 2021/2022 - 1 Marzo 2022

### Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Metodo scientifico . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Unità e vettori</b>	<b>4</b>
2.1	Grandezza fisica . . . . .	4
2.2	Cifre significative e incertezza . . . . .	4
2.2.1	Operazioni di base . . . . .	5
2.3	Ordini di grandezza . . . . .	5
2.4	Analisi dimensionale . . . . .	6
2.5	Scalari e vettori . . . . .	6
2.6	Prodotto con uno scalare . . . . .	7
2.7	Somma vettoriale . . . . .	7
2.8	Versori . . . . .	7
2.9	Modulo e direzione . . . . .	8
2.10	Prodotto scalare . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Cinematica</b>	<b>10</b>
3.1	Posizione e spostamento . . . . .	10
3.2	Posizione in funzione del tempo . . . . .	11
3.3	Velocità . . . . .	12
3.4	Accelerazione . . . . .	13
3.5	Moto uniformemente accelerato . . . . .	15
3.5.1	Caduta libera dei gravi . . . . .	17
3.5.2	Moto dei proiettili . . . . .	18
3.6	Moto in 2D e 3D . . . . .	21
3.7	Moto circolare uniforme . . . . .	22
3.8	Moti relativi . . . . .	26
3.8.1	Caso generale . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Dinamica</b>	<b>28</b>
4.1	Massa . . . . .	28
4.2	Forza . . . . .	29
4.3	Principi della dinamica - Leggi di Newton . . . . .	29
4.4	Forza peso . . . . .	29
4.5	Forza normale . . . . .	30
4.6	Forza di tensione . . . . .	33
4.7	Forza di attrito . . . . .	37
4.8	Attrito dovuto a un fluido (resistenza) . . . . .	43
4.9	Dinamica del moto circolare uniforme . . . . .	45
4.10	Sistemi non-inerziali . . . . .	47
4.11	Prodotto vettoriale . . . . .	48
4.12	Pseudo-forza di Coriolis . . . . .	50

<b>5</b>	<b>Gravità</b>	<b>52</b>
5.1	L'esperimento di Cavendish . . . . .	53
5.2	Campo gravitazionale . . . . .	54
5.3	Massa gravitazionale e inerziale . . . . .	54
5.4	Corpi estesi . . . . .	55
5.5	Leggi di Keplero . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Energia</b>	<b>59</b>
6.1	Energia cinetica . . . . .	59
6.2	Lavoro . . . . .	60
6.3	Teorema lavoro-energia cinetica . . . . .	60
6.4	Lavoro compiuto da una forza variabile . . . . .	63
6.5	Lavoro compiuto dalla forza di gravità . . . . .	65
6.6	Forze conservative . . . . .	66
6.7	Energia potenziale . . . . .	68
6.7.1	Energia potenziale gravitazionale . . . . .	69
6.7.2	Energia potenziale elastica . . . . .	69
6.8	Potenza . . . . .	69
6.9	Conservazione dell'energia . . . . .	73
6.10	Velocità di fuga . . . . .	76
<b>7</b>	<b>Moto dei sistemi</b>	<b>83</b>
7.1	Centro di massa . . . . .	83
7.2	Moto del centro di massa . . . . .	88
7.3	Dinamica del centro di massa . . . . .	88
7.4	Conservazione della quantità di moto . . . . .	89
7.5	Seconda legge di Newton reinterpretata . . . . .	90
7.6	Impulso . . . . .	92
7.7	Urti . . . . .	92
7.7.1	Urti tra due corpi . . . . .	94
7.7.2	Urti elastici . . . . .	95
7.8	Urto in 1D - Elastico . . . . .	95
7.9	Urto in 1D - Anelastico . . . . .	96
7.10	Urti - Riepilogo . . . . .	96
7.11	Moto dei razzi . . . . .	98
<b>8</b>	<b>Moto e dinamica dei corpi rigidi</b>	<b>100</b>
8.1	Corpi rigidi - Cinematica . . . . .	100
8.1.1	Traslazione . . . . .	100
8.1.2	Rotazione . . . . .	100
8.1.3	Rototraslazione . . . . .	101
8.2	Corpi rigidi - Dinamica . . . . .	101
8.2.1	Corpi rigidi - Energia cinetica . . . . .	102
8.3	Momento di inerzia . . . . .	103
8.4	Teorema degli assi paralleli . . . . .	105
8.5	Prodotto vettoriale . . . . .	106
<b>9</b>	<b>Oscillazioni</b>	<b>107</b>
<b>10</b>	<b>Solidi e fluidi</b>	<b>108</b>
<b>11</b>	<b>Temperatura e calore</b>	<b>109</b>
<b>12</b>	<b>Il primo principio della termodinamica</b>	<b>110</b>
<b>13</b>	<b>Il secondo principio della termodinamica</b>	<b>111</b>

1 Marzo 2022

## 1 Introduzione

La **Fisica** è lo studio della materia e delle sue interazioni. La **Fisica classica** è divisa in tre macroaree:

1. Meccanica classica
2. Termodinamica
3. Elettromagnetismo

La Fisica è organizzata in

- **Leggi:** relazioni fra grandezze fisiche
- **Principi:** affermazioni generali da reputare vere
- **Modelli:** analogie o rappresentazioni pratiche su cui basare il proprio studio
- **Teoria:** insieme di leggi, principi e modelli

### 1.1 Metodo scientifico

Il **metodo scientifico** si basa su **osservazioni** della realtà circostante, a cui seguono delle **ipotesi**, ossia delle possibili spiegazioni dei fenomeni osservati, basati sulle osservazioni precedentemente formulate.

Dopo aver esposto le proprie ipotesi, esse devono essere verificate, mediante degli **esperimenti**, a cui seguono delle **analisi** dei risultati sperimentali ottenuti. Il processo di analisi viene seguito da delle **conclusioni** che “concludono” il metodo scientifico.

Naturalmente tale circuito non è chiuso, in quanto ciascuna di queste fasi può essere ripetuta più e più volte. La parte più importante di tale *metodo scientifico* è la dimostrazione, così come la verifica tramite **sperimentazioni** delle proprie ipotesi, in quanto le ipotesi devono essere **sempre verificate**. Tale processo permette di sviluppare leggi e teorie con un fondamento concreto e solido.

**Osservazione:** Si osservi che **verificare un’ipotesi** non significa dimostrare che un’ipotesi è vera, ma **verificare che un’ipotesi può essere contraddetta**, ovvero ci si deve assicurare che una **teoria deve essere “falsificabile”**, ossia che può essere dimostrato che essa sia falsa.

## 2 Unità e vettori

### 2.1 Grandezza fisica

Alla base della **Fisica** si pone il concetto di **grandezza fisica**. Non è facile, per esempio, definire che cosa sia il *tempo*; tuttavia, la soluzione più immediata è quella che prevede di definire la misura del tempo come ciò che si riesce a misurare tramite, per esempio, un orologio.

Si parla, in tale caso, di **definizione operativa**:

#### DEFINIZIONE OPERATIVA

Una grandezza fisica è definita solo dalle operazioni necessarie per misurarla.

Inoltre, le grandezze fisiche si esprimono in termini di un **campione**, il quale prende il nome di **unità**.

In Fisica, inoltre, si distinguono due diverse categorie di grandezze fisiche:

1. Grandezze fisiche fondamentali
2. Grandezze fisiche derivate

Le **grandezze fisiche fondamentali** sono 3:

1. Tempo: il tempo presenta come unità il **secondo** (s) che, dal 1967, è stato definito come

9192631170 volte il periodo di oscillazione di una risonanza dell'atomo di Cesio  $^{133}\text{C}$

Prima di tale data, il secondo era definito come una suddivisione del giorno, ma tale definizione era imprecisa: la terra non ruota sempre con la stessa velocità.

2. Lunghezza: la lunghezza presenta come unità il **metro** (m), il quale viene definito come

$\frac{1}{299782458}$  la distanza percorsa dalla luce in 1 s

Prima di tale definizione, il metro era definito come  $\frac{1}{10000}$  la distanza tra equatore e polo. La nuova definizione, tuttavia, è più precisa, in quanto la velocità della luce è **costante**, fissata in quanto su tale costante si definisce il metro.

3. Massa: la massa presenta come unità il **chilogrammo** (kg), il quale viene definito in funzione della **costante di Planck** ( $h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ ). Prima di tale definizione, il chilogrammo era definito con riferimento ad un campione presente a Parigi e su cui si faceva riferimento per ogni misura di massa.

Le grandezze fisiche fondamentali permettono, poi, di definire le grandezze fisiche derivate, quale il **Volume**, la **Forza**, etc.

### 2.2 Cifre significative e incertezza

In Fisica, quando si effettuano delle misurazioni, deve essere sempre specificata la precisione e, dunque, l'incertezza. Infatti, **tutte le misure hanno un livello di incertezza**.

Per esempio

$$L = 1.82 \pm 0.02 \text{ m}$$

$$m = 3.5 \pm 0.1 \text{ kg}$$

Da notare che l'indicazione dell'incertezza è sempre (o quasi) data da una sola cifra: altrimenti si avrebbe incertezza nell'incertezza. L'indicazione dell'incertezza è la base della **fisica sperimentale**.

Nella pratica, tuttavia, l'indicazione dell'incertezza è ridondante e pesante. Per indicare il livello

di precisione si ricorre alle cifre significative.

Per esempio

$$L = 1.82 \text{ m} = 1.82 \pm 0.01 \text{ m}$$

$$m = 3.5 \text{ kg} = 3.5 \pm 0.1 \text{ kg}$$

### 2.2.1 Operazioni di base

Per la gestione delle cifre significative nelle operazioni di calcolo è importante tenere a mente che

- Moltiplicazione e Divisione: bisogna considerare come cifre significative del prodotto o del quoziente il più basso numero di cifre significative dei fattori o di dividendo e divisore.

Per esempio

$$1,1 \text{ m} \times 3.45 \text{ m} = 3.8 \text{ m}^2$$

in quanto il più basso numero di cifre significative dei fattori è 1.

- Addizione e Sottrazione: bisogna considerare come cifre significative della somma o differenza il più basso numero di decimali degli addendi o del minuendo e sottraendo.

Per esempio

$$1.1 \text{ m} - 12 \text{ cm} = 1.1 \text{ m} - 0.12 \text{ m} = 0.98 \text{ m} = 1.0 \text{ m}$$

in quanto il più basso numero di decimali tra minuendo e sottraendo è 1.

## 2.3 Ordini di grandezza

Molto spesso, nelle stime è importante non tanto la precisione delle misure, ma l'ordine di grandezza delle stesse, in modo tale da effettuare un macroconfronto utile per delle valutazioni pratiche e veloci.

Lo scopo, quindi, dell'impiego degli ordini di grandezza è quello di effettuare dei calcoli veloci e, quindi, delle stime. Più precisamente:

### ORDINE DI GRANDEZZA

L'ordine di grandezza di una misura è la **potenza di 10 più vicina**.

**Esempio:** Un ingegnere deve fabbricare un nuovo pacemaker. Si stimi quanti battiti di cuore deve fare senza malfunzionamento. Per effettuare tale stima è necessario conoscere la *media dei battiti al secondo* e *l'aspettativa di vita del soggetto*. Considerando, quindi, come media dei battiti  $m_B = 1$  battito/s e come aspettativa di vita  $a_V = 60$  anni. La stima selectlanguage

$$m_B \times a_V \times \pi \times 10^7 \text{ s/anno} = 1 \text{ battito/s} \times 60 \text{ anni} \times \times 10^7 \text{ s/anno} = 2 \times 10^9 \text{ battiti}$$

2 Marzo 2022

Il metodo scientifico permette di **falsificare una teoria**, quindi non è vero che permette di validare una teoria senza ambiguità.

## 2.4 Analisi dimensionale

Il concetto di **unità** è estremamente importante per parlare di **analisi dimensionale**. In particolare

$$A = B$$

non può essere valido e corretto formalmente se  $A$  e  $B$  hanno unità diverse. Questo è molto intuitivo per le grandezze fisiche fondamentali, ma quando si parla di grandezze derivate diventa un punto cruciale: tale concetto permette di validare anche delle possibili soluzioni di test.

Per esempio, l'unità di misura della costante di richiamo di una molla si può facilmente ricavare dalla formula della *forza di richiamo*:

$$F = k \cdot x$$

Da cui è immediato capire che

$$[k] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{\text{kg m s}^{-2}}{m} = \text{kg s}^{-2}$$

## 2.5 Scalari e vettori

Di seguito si espone la definizione di **scalare**:

### SCALARE

Uno **scalare** è una grandezza specificata da un numero + unità.  
Per esempio la *lunghezza*, la *massa* o l'*energia*.

Mentre un **vettore** è:

### VETTORE

Un **vettore** è una quantità definita da un valore e una direzione (e un verso, che può essere implicito nella definizione di direzione).

Tale definizione, tuttavia, pur essendo molto intuitiva, non risulta particolarmente pratica. Si potrebbe anche considerare un vettore come una **quantità con più valori associati**, ovvero una **lista di numeri a cui conferiamo un significato**.

Per esempio, in algebra un vettore viene indicato come segue

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

a cui la fisica attribuisce un significato preciso: 1, 2 e 3 sono le componenti associate alle tre diverse dimensioni  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Il vettore di cui sopra, allora, si può scrivere come

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

**Osservazione:** Anche se tale definizione sembra identica alla definizione del **punto**, in realtà tale definizione è differente, in quanto

- un punto non ha una lunghezza;
- non è possibile eseguire la somma di due punti, etc.

## 2.6 Prodotto con uno scalare

Dato un vettore

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

e si considera uno scalare  $a \in \mathbb{R}$ , allora

$$a \cdot \vec{v} = (a \cdot v_x, a \cdot v_y, a \cdot v_z)$$

in cui il vettore  $a \cdot \vec{v}$  è un vettore che

- presenta come lunghezza la lunghezza del vettore  $\vec{v}$  moltiplicata per  $|a|$ ;
- presenta come direzione la stessa direzione del vettore  $\vec{v}$ ;
- presenta come verso lo stesso verso del vettore  $\vec{v}$  se  $a \geq 0$ , mentre avrà verso opposto se  $a \leq 0$ .

## 2.7 Somma vettoriale

Dati due vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , la loro somma viene eseguita graficamente tramite la **regola del parallelogramma**, o il metodo “punta-coda”:

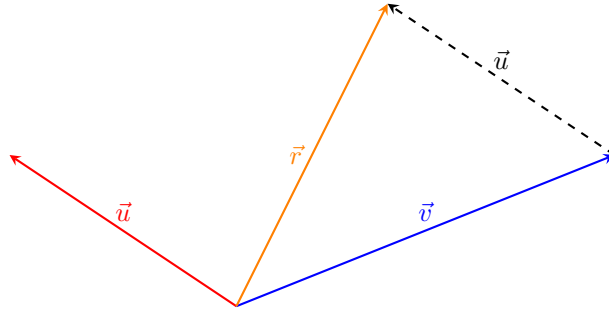


Figura 1: Somma vettoriale con il metodo “punta-coda”

Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sono espressi nello stesso sistema di riferimento, allora è chiaro che la loro somma sarà data **componente per componente**, ovvero

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$$

## 2.8 Versori

Si definiscano tre versori come segue

$$\hat{i} = (1, 0, 0)$$

$$\hat{j} = (0, 1, 0)$$

$$\hat{k} = (0, 0, 1)$$

Allora qualsiasi vettore può essere scritto come

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{j} + v_z \cdot \hat{k}$$

in cui, naturalmente,  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  sono le componenti di  $\vec{v}$  in direzione  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ . Naturalmente si scrive  $\hat{i}$  e non  $\vec{i}$  in quanto

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

essi, infatti, prendono il nome di **versori** o **vettori unità**.

## 2.9 Modulo e direzione

Di seguito si espone la definizione di **modulo di un vettore**:

### MODULO DI UN VETTORE

Il modulo di un vettore è la sua “lunghezza geometrica” e si indica come segue

$$v = |\vec{v}|$$

È chiaro che il modulo può essere **positivo o nullo**, mai negativo. In termini di componenti il modulo si calcola come segue

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Per esempio, si calcoli il modulo del vettore

$$\hat{n} = \frac{\vec{v}}{v}$$

ovviamente si procede come segue

$$\left| \frac{\vec{v}}{v} \right| = \frac{1}{|v|} \cdot |\vec{v}| = \frac{v}{v} = 1$$

Ecco che allora tale vettore è a tutti gli effetti un versore in direzione  $\vec{v}$ , in quanto di modulo 1. Questo fa capire come si possa definire un versore associato a qualunque vettore: basta dividere il vettore per il suo modulo.

Mentre di seguito si espone la definizione di **direzione di un vettore**:

### DIREZIONE DI UN VETTORE

La direzione di un vettore (e anche il suo verso) è definita, in due dimensioni, come l'angolo  $\theta$  che il vettore descrive con il semiasse positivo delle ascisse.

È immediato osservare che

$$v_x = v \cdot \cos(\theta)$$

$$v_y = v \cdot \sin(\theta)$$

e si può verificare che

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v^2 \cdot \cos^2(\theta) + v^2 \cdot \sin^2(\theta)} = v \cdot \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = v$$



## 2.10 Prodotto scalare

Di seguito si espone la definizione di **prodotto scalare**:

### PRODOTTO SCALARE

Il prodotto scalare tra due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$ , in termini di componenti si definisce come segue:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x \cdot u_x + v_y \cdot u_y + v_z \cdot u_z$$

che è, naturalmente, uno scalare.

Analogamente si può interpretare il prodotto scalare tra due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  come il prodotto dei moduli per il **coseno** dell'angolo  $\theta$  compreso tra i vettori stessi, ovvero

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v \cdot u \cdot \cos(\theta)$$

**Osservazione:** Naturalmente, da tale definizione seguono delle importanti osservazioni:

- $\vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = |\vec{v}|^2$
- $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$
- $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$ . Questo significa che i due vettori considerati sono ortogonali, ovvero i versori  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  sono a due a due ortogonali.

Si consideri, invece, l'esempio seguente:

$$\vec{v} \cdot \hat{i} = (v_x \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{j} + v_z \cdot \hat{k}) \cdot \hat{i} = v_x \cdot \hat{i} \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{i} \cdot \hat{j} + v_z \cdot \hat{i} \cdot \hat{k} = v_x$$

e questo significa che  $\vec{v} \cdot \hat{i}$  è la **proiezione** del vettore  $\vec{v}$  in direzione  $\hat{i}$ . Tale metodo è molto efficace per effettuare un cambio di base: se al posto dei versori  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ , che presuppongono l'origine del sistema di riferimento in  $O = (0, 0, 0)$  si sceglieranno degli altri versori, moltiplicando il vettore  $\vec{v}$  per taluni versori si otterrebbero le componenti del nuovo vettore in una nuova base.

**Osservazione:** Se si considerano due vettori  $\vec{c}$  e  $\vec{d}$ , allora il loro prodotto scalare può essere interpretato come segue

$$\vec{c} \cdot \vec{d} \cdot \frac{d}{d} = d \cdot \left( \vec{c} \cdot \frac{\vec{d}}{d} \right)$$

per cui, ricordando che

$$\hat{n} = \frac{\vec{d}}{d}$$

è un versore in direzione del vettore  $\vec{d}$ , allora il prodotto scalare tra  $\vec{c}$  e  $\vec{d}$  è proprio la proiezione del vettore  $\vec{c}$  sul vettore  $\vec{d}$ , per quanto appena detto a proposito delle **proiezioni**, moltiplicata per il modulo del vettore  $\vec{d}$ .

3 Marzo 2022

### 3 Cinematica

La descrizione del moto di un corpo (approssimato ad un punto) prende il nome di **cinematica** (mentre la ragione del moto viene studiata dalla **dinamica**). Com'è noto, inoltre, un vettore è una quantità con **modulo** e **direzione** (e **verso**). La descrizione di un vettore avviene tramite le sue componenti: in particolare, dato un versore  $\hat{n}$ , la componente di un vettore  $\vec{v}$  in direzione del versore  $\hat{n}$  è così definita

$$\vec{v} \cdot \hat{n}$$

Per esempio, la componente del vettore  $\vec{v}$  lungo l'asse  $x$  è

$$\vec{v} \cdot \hat{i} = v_x$$

Inoltre, il **prodotto scalare** tra due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  viene definito come:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x \cdot u_x + v_y \cdot u_y + v_z \cdot u_z = v \cdot u \cdot \cos(\theta)$$

ove  $\theta$  è l'angolo compreso tra i due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$ .

Grazie a ciò è possibile definire il concetto di **Cinematica**:

#### CINEMATICA

La cinematica è lo **studio del moto**, a differenza della **dinamica** che studia la **causa del moto** e della **statica** che studia l'**equilibrio meccanico**, ossia la **causa dell'immobilità**.

È chiaro che lo studio di un corpo complesso e non omogeneo è molto più elaborato dello studio di un solo **punto**. Pertanto, il primo passo per lo studio del moto è quello di studiare il comportamento di un modello standard a cui può essere ricondotto, tramite approssimazione, un altro corpo, a seconda della necessità.

#### 3.1 Posizione e spostamento

Dato un punto nello spazio, la sua posizione viene descritta tramite un “vettore” posizione  $\vec{r}$ , di cui è possibile calcolare la lunghezza ( $|\vec{r}|$ ), la quale, tuttavia, non ha molto significato dal momento che dipende dalla posizione dell'origine del sistema scelta: ovverosia dipende dalla posizione iniziale e, quindi, dal **sistema di riferimento adottato**:

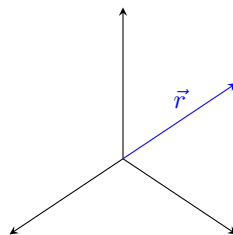


Figura 2: “Vettore” posizione

Conoscere il sistema di riferimento è fondamentale, in quanto in base a ciò possono essere effettuate diverse valutazioni che, naturalmente, variano a seconda del sistema di riferimento scelto: si pensi ed effettuare una misurazione adottando come sistema di riferimento un treno che si muove oppure un treno immobile, o ancora un treno che sta accelerando: si parla, in tale contesto, di un **sistema di riferimento non inerziale**.

### SPOSTAMENTO

Lo **spostamento**, invece, è proprio un vettore e, com'è intuibile, taluno è definito come la differenza tra due posizioni, ovvero

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

di cui è possibile calcolare il modulo come segue

$$|\Delta \vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \text{distanza}$$

Per esempio, la lunghezza sull'asse  $x$  è

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \cdot \hat{i}$$

di cui

$$|\Delta \vec{r}| = |x_2 - x_1|$$

### 3.2 Posizione in funzione del tempo

È particolarmente importante considerare la variazione della posizione nel tempo

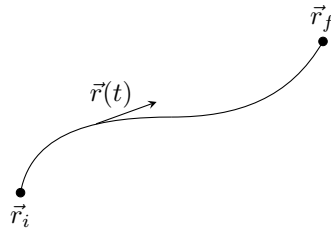


Figura 3: “Vettore” posizione in funzione del tempo

Sia data una funzione spostamento, definita in funzione del tempo  $t$ , quale

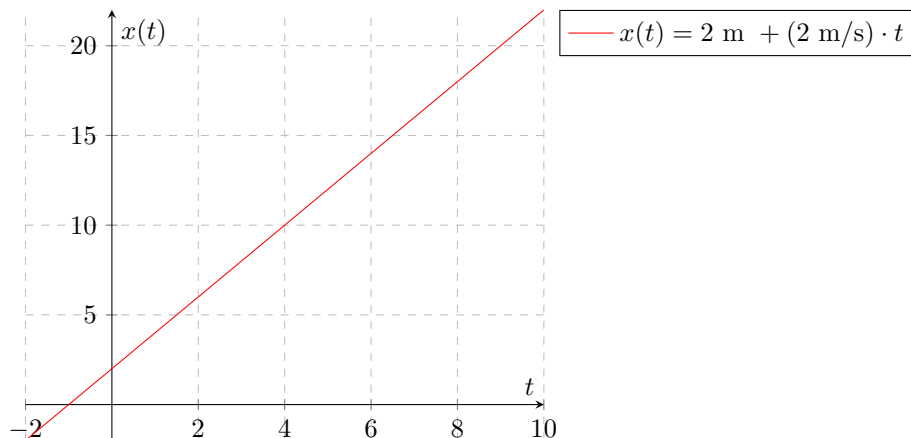
$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j}$$

in cui

$$x(t) = 2 \text{ m} + (2 \text{ m/s}) \cdot t$$

$$y(t) = 0 \text{ m} + (4 \text{ m/s}) \cdot t$$

Naturalmente si ha





### 3.3 Velocità

La **velocità** si pone alla base della cinematica. In fisica la velocità si distingue in due tipologie

- Velocità istantanea
- Velocità media

Si consideri, a tal proposito, il seguente grafico spazio-tempo:



### VELOCITÀ MEDIA

Intuitivamente si ha che la velocità media è proprio il rapporto tra uno spostamento e il tempo impiegato per effettuarlo, ovvero

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

che, graficamente, può essere interpretata come la pendenza (o coefficiente angolare), della congiungente i punti  $(x_1, t_1)$  e  $(x_2, t_2)$  nel grafico spazio/tempo.

### VELOCITÀ ISTANTANEA

Mentre la velocità istantanea è, naturalmente, la derivata nel tempo del vettore posizione, ovvero

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

ovvero la retta tangente al grafico della funzione posizione nel punto  $(x_0, t_0)$ . Naturalmente essendo un vettore la velocità istantanea, è possibile descriverlo tramite **componenti** come segue:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (\vec{r}(t)) = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x} \cdot \hat{i} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y} \cdot \hat{j} + \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z} \cdot \hat{k}$$

in quanto  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  non dipendono dal tempo (cosa che potrebbe accadere, comunque, in determinate circostanze).

Il **modulo** della velocità si calcola come segue

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

**Esempio:** Si consideri uno spostamento verso l'alto tale per cui  $x_1 = 0$  m e  $x_2 = 12000$  m e  $t_1 = 2600$  s e  $t_2 = 4000$  s. Allora si ha che

$$\langle v_z \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{12000}{4000 - 2600} = 8.6 \text{ m/s} = 308.6 \text{ km/h}$$

Che è una velocità irrisoria; tuttavia, ciò non sorprende, in quanto è opportuno conoscere anche le altre componenti della velocità, ossia  $v_x$  e  $v_y$ .

## 3.4 Accelerazione

Di seguito si espone la definizione di **accelerazione**:

### ACCELERAZIONE

L'accelerazione viene definita come la derivata prima della velocità nel tempo, o la derivata seconda dello spostamento nel tempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

7 Marzo 2022

Comè noto, l'accelerazione è la derivata prima della velocità in funzione del tempo, o la derivata seconda dello spostamento in funzione del tempo.

L'accelerazione è fondamentale in **meccanica**, in quanto grazie all'accelerazione è possibile definire il concetto di forza: l'accelerazione è la connessione tra cinematica e dinamica.



Avendo a disposizione il grafico che descrive la variazione della posizione nel tempo, è possibile ora studiarne l'andamento per poi descrivere il comportamento della velocità nel secondo grafico. È sufficiente, pertanto, osservare gli intervalli di crescita e decrescenza e i punti in cui la derivata si annulla nulla:



Ancora una volta, studiando l'andamento della velocità nel suo rispettivo grafico è ora possibile descrivere il grafico della derivata della velocità, ovvero dell'accelerazione, sempre analizzando gli intervalli di crescita e decrescenza:



Ecco che il punto in cui la derivata seconda (ovverosia l'accelerazione) cambia segno è un **punto di flesso**, ovvero il punto in cui il grafico dello spostamento cambia la propria concavità.

**Esempio:** Si consideri la seguente funzione spostamento in funzione del tempo:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t)$$

questa è l'equazione di oscillazione di un pendolo o di una molla. Per il calcolo della velocità è sufficiente calcolare la derivata prima, ovvero

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega \cdot A \cdot \sin(\omega t)$$

e per l'accelerazione è sufficiente derivare nuovamente la velocità

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t) = -\omega^2 \cdot x(t)$$

Tale risultato ha senso e può essere interpretato anche graficamente, grazie al grafico di una molla: quando lo spostamento è positivo, l'accelerazione è negativa, e viceversa.



Figura 4: Fisica di una molla

**Osservazione:** Quando la velocità è nulla, la posizione si mantiene costante e non cresce o decresce. Quando si ha un punto di salto della velocità si ha una situazione difficile da riprodurre fisicamente, in quanto si ha un crollo della velocità istantanea, come un impulso (si pensi anche al fatto che, per il teorema del limite della derivata, una funzione con un salto non può essere la derivata di una funzione derivabile).

Si può utilizzare anche l'**integrale** per passare dalla velocità allo spostamento.

### 3.5 Moto uniformemente accelerato

Nel moto uniformemente accelerato si ha che l'**accelerazione** è **costante**. Sapendo che l'accelerazione è la derivata prima della velocità nel tempo, si può scrivere:

$$\frac{dv}{dt} = a \longrightarrow dv = a \cdot dt$$

Questo, in particolare, è possibile farlo sia per una variazione  $\Delta$ , ma anche per una variazione infinitesimale  $d$ . Ciò che si sta facendo, in questo caso, è risolvere un'**equazione differenziale**. Pertanto, dopo aver ottenuto  $dv = a \cdot dt$  si può procedere all'integrazione

$$\int dv = \int a \cdot dt \longrightarrow v = at + c$$

La costante  $c$  che compare nella formula, ottenuta grazie alla risoluzione di una equazione differenziale, è la cosiddetta **velocità iniziale**: se  $t = 0$ , infatti,  $v = c = v_0$ . Quindi l'equazione diviene

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

Avendo ottenuto l'equazione della velocità nel tempo, è opportuno ottenere l'equazione della posizione in funzione del tempo, integrando nuovamente, sempre partendo da

$$\frac{dx}{dt} = v \longrightarrow dx = v \cdot dt \longrightarrow \int dx = \int v \cdot dt = \int (v_0 + a \cdot t) dt$$

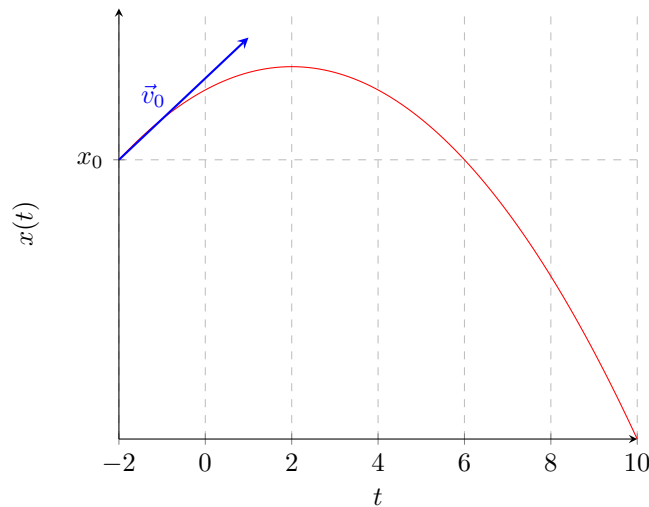
quindi si ottiene

$$x(t) = \int v_0 \cdot dt + \int a \cdot t \cdot dt + c = v_0 \cdot t + a \cdot \frac{t^2}{2} + c$$

ove  $c = x_0 = x(t = 0)$ . Pertanto l'equazione della posizione in funzione del tempo è

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

che rappresenta l'equazione di una parabola, come illustrato nell'esempio seguente:



In cui, ovviamente, l'intersezione tra il grafico e l'asse  $y$  è  $x_0$ , il vettore designato in blu, ossia la tangente in  $(x_0, 0)$ , rappresenta la pendenza iniziale del grafico della posizione, ovvero la velocità iniziale  $v_0$ . Essendo il grafico di un moto uniformemente accelerato, è ovvio che la pendenza decresce in modo costante: prima la velocità sarà positiva, ma decrescente, e poi continuerà a decrescere, ma con valori negativi.

**Osservazione:** Si consideri la seguente equazione

$$v(t) = a \cdot t + v_0$$

e si provi ad isolare  $t$  da tale equazione, come segue

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$



se ora si considera l'equazione seguente

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

e si sostituisce il  $t$  calcolato in precedenza a tale equazione si ottiene

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left( \frac{v - v_0}{a} \right)^2 + v_0 \cdot \left( \frac{v - v_0}{a} \right) + x_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot (v^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 + v_0^2) + \frac{1}{a} \cdot (v_0 \cdot v + v_0^2) + x_0$$

ovvero si ottiene

$$x = \frac{v^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a} + x_0$$

quindi

$$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot (x - x_0)$$

la quale è **valida solamente per il moto uniformemente accelerato** ed è estremamente utile per conoscere lo spazio percorso da un corpo che si muove secondo queste legge oraria, senza conoscere il **tempo**.

### 3.5.1 Caduta libera dei gravi

La **caduta libera** avviene con la **medesima accelerazione** per tutti i corpi (ovviamente, l'attrazione gravitazionale non è costante in tutto l'universo, ma se si considerano un punto sulla terra e distanze piccole e prossime a quella del raggio terrestre, si può, senza perdita di generalità, considerare un'accelerazione costante  $g$ ).

**Osservazione:** Naturalmente sulla Luna non c'è aria, si è nel vuoto, per cui tutti i corpi vengono attratti dalla Luna solamente per la forza di attrazione gravitazionale, senza che tale moto sia influenzato dall'attrito dell'aria.

L'accelerazione gravitazionale può essere interpretata come segue:



$$\vec{a} = -g \cdot \hat{j} \text{ con } 9.8 \text{ m/s}$$

Figura 5: Visualizzazione grafica del moto di caduta libera

Ove, naturalmente si ha

$$\vec{a} = -g \cdot \hat{j} \text{ con } 9.8 \text{ m/s}$$

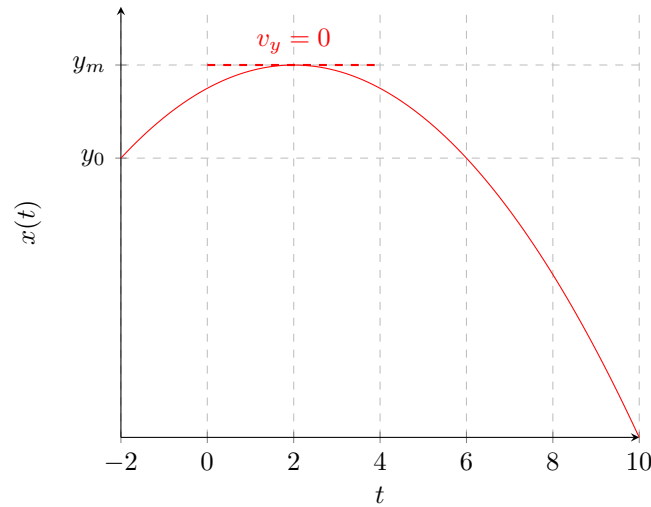
Pertanto si ottengono le seguenti equazioni, a partire da quelle generali per un moto uniformemente accelerato. Per quanto riguarda la velocità di caduta si ha:

$$v_y = -g \cdot t + v_{0y}$$

mentre per quanto riguarda la posizione in funzione del tempo si ottiene

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t + y_0$$

Per capire che altezza raggiungerà un corpo quando viene lanciato verso l'alto si deve osservare il grafico seguente



Naturalmente si osserva che la velocità nel punto più alto è nulla, in quanto la tangente è orizzontale, mentre si conosce la velocità iniziale  $v_0$ .

Per capire l'altezza, allora, si potrebbe calcolare il tempo impiegato per raggiungere il punto più alto e poi sostituire tale valore all'interno dell'equazione dello spostamento.

Alternativamente, si potrebbe considerare la formula seguente

$$v_y^2 - v_{y0}^2 = -2 \cdot g \cdot (y - y_0)$$

e sostituendo i valori si ha

$$0 - v_{y0}^2 = 2 \cdot g \cdot (y_m - y_0)$$

Per cui l'altezza massima che un corpo raggiunge quando viene lanciato verso l'alto con velocità iniziale  $v_{y0}$  e a partire da un'altezza  $y_0$  è

$$y_m = y_0 + \frac{v_{y0}^2}{2g}$$

### 3.5.2 Moto dei proiettili

Il moto dei proiettili ha un'importanza storica fondamentale: Aristotele, nel 340 a.c. parlava di **moto "naturale" e "forzato"**: tuttavia, naturalmente, un oggetto fermo, privo di sollecitazioni, non ha la propensione a muoversi, quindi non ha senso parlare di *forzatura*.

Successivamente, Filopono (490 – 570) d.c. ha introdotto il concetto di **impeto** e, infine, **Galileo** (1564 – 1642) d.c., basandosi su osservazioni e misurazioni pratiche precedenti (invece che fornire una spiegazione a priori), ha fornito una **spiegazione scientifica** a tale fenomeno.

### LEGGE ORARIA DEL MOTO DEI PROIETTILI

Per lo studio del moto dei proiettili si considera il vettore accelerazione

$$\vec{a} = a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j} = 0 \cdot \hat{i} - g \cdot \hat{j}$$

Analogamente per la velocità si ha

$$\vec{v} = v_x \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{j} = v_{0x} \cdot \hat{i} - (v_{0y} - gt) \cdot \hat{j}$$

Per quanto concerne la posizione in funzione del tempo si ha

$$\vec{r} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} = (v_{0x}t + x_0) \cdot \hat{i} - (y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2) \cdot \hat{j}$$

Si consideri il seguente grafico della posizione di un proiettile:



Naturalmente si ha che

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= v_{x0} \cdot \hat{i} + v_{y0} \cdot \hat{j} \\ \vec{r}_0 &= x_0 \cdot \hat{i} + y_0 \cdot \hat{j} \end{aligned}$$

8 Marzo 2022

Naturalmente il modulo di un vettore non dipende dal sistema di coordinate scelto. Naturalmente è possibile avere

$$|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$$

e per dimostrarne la veridicità basta considerare due vettori perpendicolari.

Ovviamente, un versore ha sempre modulo unitario per essere definito tale: in particolare, dato il vettore  $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ , il versore

$$\hat{n} = \frac{\vec{v}}{v}$$

è proprio un versore in direzione  $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ .

La componente del vettore  $\vec{v} = -3 \cdot \hat{i} + 5 \cdot \hat{j} + \hat{k}$  in direzione  $\hat{n} = 0.6 \cdot \hat{j} - 0.8 \cdot \hat{k}$  è ovviamente

$$\vec{v} \cdot \hat{n} = -3 \cdot 0 + 5 \cdot 0.6 - 1 \cdot 0.8 = 2.2$$

È chiaro che in questo caso  $\hat{n}$  era già un versore, altrimenti, se si avesse avuto un vettore, si sarebbe dovuto calcolare il versore corrispondente dividendo per il suo modulo.

Nel moto dei proiettili è estremamente importante considerare l'**altezza massima** che esso raggiungerà, ma soprattutto la sua **gittata**, ovvero la distanza massima che esso raggiungerà.

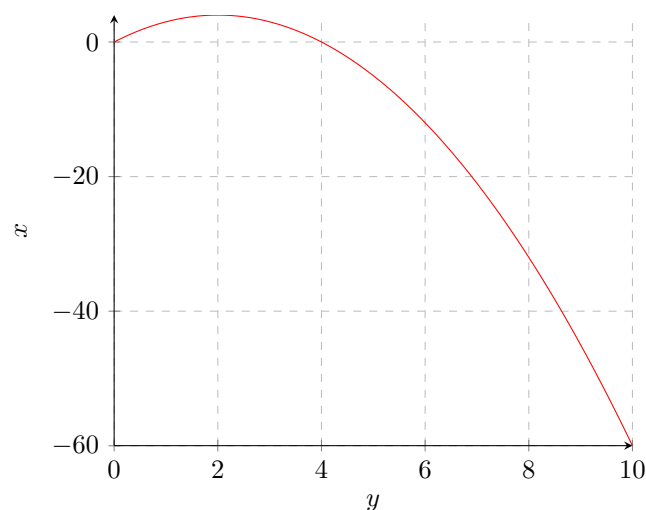
Molto spesso, in questo caso, per lavorare è molto più conveniente operare con le coordinate polari  $v_0$  e  $\theta$  (ovvero con modulo e angolo), anziché con  $v_{x0}$  e  $v_{y0}$ , sempre ricordando che

$$v = \begin{pmatrix} v_{x0} = v_0 \cdot \cos(\theta) \\ v_{y0} = v_0 \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

In questo caso, per calcolare l'altezza massima raggiunta è sufficiente considerare solamente la componente della velocità verticale, come per la caduta libera dei gravi, ovvero

$$y_m = y_0 + \frac{v_{y0}^2}{2g} = y_0 + \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\theta)}{2g}$$

Analogamente, per calcolare la gittata, ovvero la distanza orizzontale percorsa da un corpo lanciato in aria, si dovrà usare solo la componente della velocità orizzontale.



Naturalmente, in questo caso, il calcolo della gittata  $R$  si effettua come segue: è noto che

$$R = v_{x0} \cdot t_R$$

ove  $t_R$  è la **durata del volo**. Però è noto che al tempo  $t_R$  la coordinata  $y$  è nulla, ovvero

$$y(t_R) = 0 = v_{y0} \cdot t_R - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_R^2$$

Dal momento che il tempo  $t_R$  non è nullo è possibile dividere per  $t$ , ottenendo

$$v_{y0} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_R = 0$$

da cui si evince che il tempo  $t_R$  cercato è

$$t_R = \frac{2 \cdot v_{y0}}{g}$$

sostituendo, ora, il tempo trovato nella formula di cui sopra si ottiene

$$R = v_{x0} \cdot \frac{2 \cdot v_{y0}}{g} = 2 \cdot \frac{v_{x0} \cdot v_{y0}}{g}$$

ma ricordando come si calcolano le componenti  $v_{x0}$  e  $v_{y0}$  si ha

$$R = 2 \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)}{g}$$

ed essendo  $2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) = \sin(2 \cdot \theta)$  si ottiene

$$R = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta)}{g}$$

Le unità in gioco sono

$$\begin{aligned} [v^2] &= \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \\ [g] &= \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ [R] &= \frac{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \text{m} \end{aligned}$$

**Osservazione:** Si osservi che, naturalmente, quando  $\theta = 0^\circ$ , si ha che  $\sin(0) = 0$  e quindi  $R = 0$ : ciò ha senso, in quanto lanciando orizzontalmente il corpo cade immediatamente. Quando  $\theta = 90^\circ$  non si ha gittata, in quanto, lanciando verticalmente il corpo cada verticalmente. Quando  $\theta = 45^\circ$  si ha la gittata massima, in quanto  $\sin(90) = 1$ .

### 3.6 Moto in 2D e 3D

Si consideri la seguente traiettoria

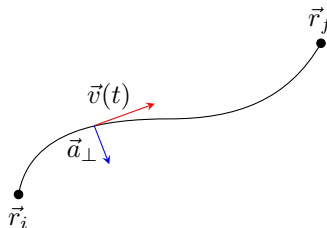


Figura 6: “Vettore” velocità in funzione del tempo

Naturalmente  $\vec{v}$  è sempre parallelo alla tangente della curva  $\vec{r}(t)$ .

Si osservi, inoltre, che l'accelerazione deve sempre presentare una **componente lineare**  $\vec{a}_{\parallel}$  (parallela a  $\vec{v}$ ) e una **componente ortogonale**  $\vec{a}_{\perp}$  (in direzione del cambiamento dell'orientazione

della velocità), la quale è fondamentale: infatti, se ci fosse solo una componente lineare, la velocità aumenterebbe il proprio modulo, ma non direzione; ogni qualvolta si ha una variazione della direzione della velocità ci deve essere una componente ortogonale dell'accelerazione.

### 3.7 Moto circolare uniforme

Per moto circolare uniforme si intende un moto circolare in cui la **velocità angolare** si mantiene **costante**.

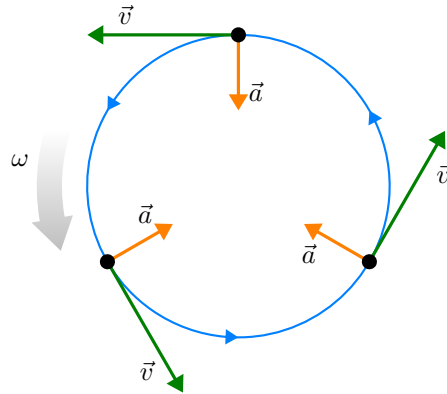


Figura 7: Moto circolare uniforme

Naturalmente, la **circonferenza** del cerchio è  $C = 2\pi R$ . Parlando di moto circolare uniforme è possibile introdurre il concetto di **periodo**  $T$ , ovvero il tempo impiegato a completare una circonferenza completa.

Pertanto, volendo conoscere la velocità del moto si ottiene

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

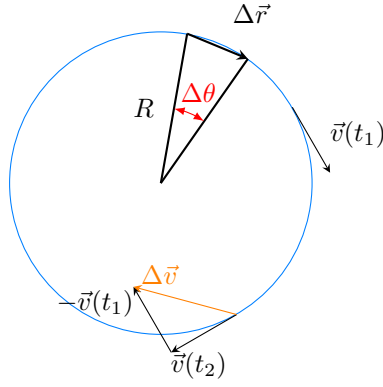
ove  $\omega$  prende il nome di **velocità angolare**, che ha una misura di RAD/s, per questo prende il nome di velocità angolare, in quanto ha la stessa unità di misura di una frequenza (visto che l'angolo non ha una propria vera misura).

Naturalmente, volendo conoscere l'accelerazione che agisce sul punto in movimento, si può immediatamente dire che, essendo la velocità costante, si dovrà solo considerare una componente ortogonale, in quanto se essa non ci fosse, il corpo si muoverebbe in linea retta, senza compiere una traiettoria circolare.

Pertanto, dal momento che  $|\vec{v}| = v = \text{costante}$ , si ha che  $\vec{a}_{\parallel} = 0$ . L'accelerazione media, naturalmente, può essere calcolata come segue

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Anche graficamente appare evidente come l'accelerazione media sia un vettore ortogonale al vettore velocità e orientato verso il centro della circonferenza.



Lo spostamento tra due punti, naturalmente, è  $\Delta \vec{r}$  e i due triangoli che vengono così disegnati sono simili, per cui il rapporto tra i lati corrispondenti deve mantenersi costante. È facile, pertanto, vedere immediatamente come

$$\boxed{\frac{|\Delta \vec{r}|}{R} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v}}$$

ossia il rapporto tra lo spostamento e il raggio costante, così come la variazione di velocità e il modulo della velocità costante è uguale. Da ciò si evince che

$$a = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v} \cdot \frac{v}{\Delta t} = \frac{|\Delta \vec{r}|}{R} \cdot \frac{v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

Ovvero si ha che, nel moto circolare uniforme, il modulo dell'accelerazione orientata verso il centro del cerchio è pari a

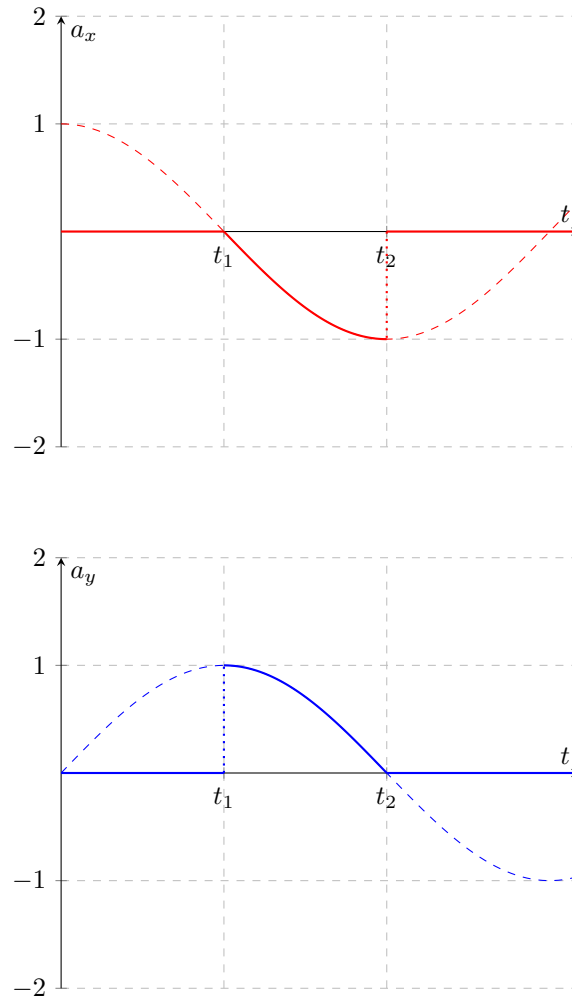
$$\boxed{a = \frac{v^2}{R}}$$

**Esempio:** Si consideri l'esempio seguente che riguarda un veicolo in movimento a velocità costante su una curva



Figura 8: Auto in movimento su una curva

e si considerino le componenti dell'accelerazione in  $x$  e in  $y$  in funzione del tempo.



per capire la natura delle curve appena disegnate, è sufficiente osservare la Figura 9 seguente:

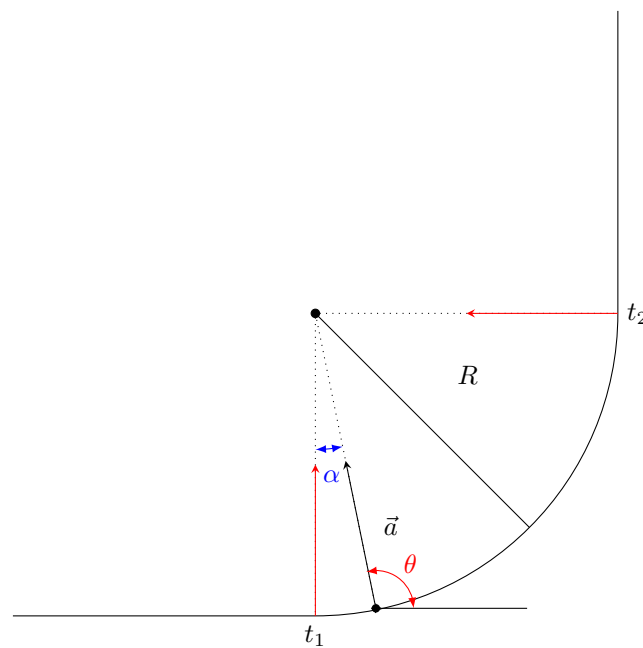


Figura 9: Visualizzazione degli angoli coinvolti



Si può facilmente capire come  $\alpha$  sia l'angolo da sommare a  $90^\circ$  per ottenere  $\theta$ , quindi

$$a_x = a \cdot \cos(\theta) = a \cdot \cos(\alpha + 90^\circ) = -a \cdot \sin(\alpha) = -a \cdot \sin(\omega t)$$

pertanto nel caso di  $a_x$  si è considerato un ramo di  $\sin(\omega t)$ , mentre nel caso di  $a_y$  si è considerato un ramo di  $\cos(\omega t)$ .

9 Marzo 2022

Il moto circolare uniforme è un moto semplice: la formula più importante da conoscere è il modulo dell'**accelerazione centripeta**, ovvero dell'accelerazione diretta verso il centro della circonferenza.

Il raggio  $R$  della circonferenza del moto è costante, mentre l'angolo  $\theta$  descritto dal punto in movimento all'interno della circonferenza varia linearmente con il tempo, secondo la seguente legge

$$\theta(t) = \frac{2\pi}{T} \cdot t = \omega t$$

ove  $\omega$  prende il nome di velocità angolare ed è definita come segue

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Per quando concerne la variazione della posizione nel tempo si ha

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} = R \cdot \cos(\omega t) \cdot \hat{i} + R \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{j}$$

A partire da tale risultato si sarebbe potuto determinare il modulo dell'accelerazione, semplicemente procedendo per derivate successive, ottenendo dapprima

$$\vec{v}(t) = -\omega R \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{i} + \omega R \cos(\omega t) \cdot \hat{j}$$

e infine

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t)$$

in cui è evidente come il vettore accelerazione è sempre parallelo al vettore posizione, ma con verso opposto: il vettore posizione è sempre diretto verso l'esterno, mentre il vettore accelerazione è diretto verso il centro della circonferenza.

Se ora si procede al calcolo del modulo di tale vettore si ottiene

$$|\vec{a}| = \omega^2 \cdot R = \frac{v^2}{R}$$

dal momento che si ha

$$v = \omega R$$

In realtà anche  $\omega$  è un vettore, in cui la sua direzione è l'asse di rotazione, mentre il modulo fornirà una stima della velocità alla quale si muove; tale risultato avrà una importante validità in seguito.

### 3.8 Moti relativi

Si consideri il caso di un moto composto da più moti: un sasso che viene lasciato cadere sullo scafo di una barca in movimento.

Naturalmente, considerando la caduta di un sasso, fissando un tempo  $t$ , si ha che

$$\vec{v}_{PB} = -gt \cdot \hat{j}$$

in quanto si tratta di una caduta libera. Questo, tuttavia, osservando il moto dalla barca ( $PB$  = punto-barca) in movimento. Se, invece, tale moto viene visto da terra ( $PT$  = punto-terra), sarà dotato di due componenti, ovvero

$$\vec{v}_{PT} = \vec{v} + -gt \cdot \hat{j}$$

in cui la componente verticale è la stessa del moto precedente, mentre la componente orizzontale dipende dalla velocità della barca. Questo è proprio quello che ha fatto Galileo: osservare questo tipo di situazioni nella vita reale, fornendovi una spiegazione scientifica e definendo, in questo caso, il concetto di sistema di riferimento e di moto relativo.

### 3.8.1 Caso generale

Per capire come passare da un sistema di riferimento all'altro, è necessario considerare un caso generale, in cui come sistema di riferimento si assume quello definito da:

- posizione dell'origine;
- assi (posizione e orientamento).



Per passare da un sistema di riferimento  $A$  all'altro  $B$  è necessario definire la posizione relativa tra i due sistemi di riferimento  $A - B$ .

Infatti, definendo un nuovo vettore  $\vec{r}_{BA}$  è possibile scrivere la somma di vettori seguente

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

Ma non solo, è possibile anche calcolare la derivata nel tempo e considerare, quindi, le velocità

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

che corrisponde proprio al caso analizzato per la barca: la differenza tra i due sistemi di osservazione è proprio il moto della barca. Un caso ancora più importante è quello che prevede  $\vec{v}_{BA}$  **costante**, per cui i due sistemi non si muovono l'uno rispetto all'altro e misurare l'accelerazione nell'uno o nell'altro non cambia, in quanto sarà la stessa. Derivando nuovamente nel tempo, infatti, si ottiene

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{BA}$$

ma essendo  $\vec{v}_{BA}$  costante, ovviamente  $\vec{a}_{BA} = 0$ . Questo è il caso di un **sistema di riferimento inerziale**, ovvero di un sistema di riferimento che può muoversi ad una certa velocità, ma non può accelerare. Naturalmente l'accelerazione del sistema inerziale non è relativa, non è da definirsi rispetto ad un altro sistema di riferimento come in questo caso, ma necessita di una definizione molto più rigorosa fornita tramite le leggi della dinamica di Newton. Questo ragionamento, naturalmente, si applica sia ad un caso in 2D, ma anche in 3D.

**Osservazione:** Si osservi, ovviamente, che nel moto circolare uniforme velocità e accelerazione. Inoltre, si ha che

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0$$

significa che la variazione del modulo della velocità nel tempo è nullo: pertanto, se non c'è variazione del modulo della velocità, si ha che la componente parallela dell'accelerazione è nulla, ovvero  $\vec{a}_{\parallel} = 0$ .

## 4 Dinamica

Alla base della dinamica vi sono i 3 principi della dinamica di Newton, formulati da Newton all'interno del libro **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**.

Esse sono le seguenti:

### LEGGI DELLA DINAMICA

Le leggi della dinamica sono le seguenti:

1. **Prima legge:** *Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, eccetto che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse.*
2. **Seconda legge:** *Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza mmotrice impressa, ed avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza è stata impressa.*
3. **Terza legge:** *Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria: ossia le azioni di due corpi sono sempre uguali fra loro e dirette verso parti opposte.*

### 4.1 Massa

Per parlare della dinamica, si devono introdurre due concetti fondamentali ed interconnessi; prima di tutto si fornisce la definizione di **massa**, la quale può essere definita in modi diversi a seconda della necessità:

#### MASSA INERZIALE

La **massa inerziale** (da **inerzia**: propensione a non muoversi) viene definita come misura della resistenza alle variazioni di velocità.

che si adatta perfettamente alla seconda legge della dinamica, la quale afferma che l'accelerazione è proporzionale alla forza impressa ed è la massa a rappresentare la **costante di proporzionalità**: a parità di forza, più il corpo è massivo meno accelera, meno è massivo, più accelera.

Di seguito, invece, si definisce il concetto di **massa gravitazionale**:

#### MASSA GRAVITAZIONALE

La **massa gravitazionale** è proporzionale al **peso**.

Non da ultimo si fornisce una definizione di massa che è approssimabile ad una quantificazione:

#### MASSA

La **massa** viene definita come **quantità di materia** e la sua unità di misura è

$$[m] = \text{kg}$$

Inoltre la massa è **additiva**: dato un corpo, agglomerato compatto di due masse  $m_1$  e  $m_2$ , la massa complessiva è

$$m = m_1 + m_2$$

## 4.2 Forza

Di seguito si espone il significato fisico di **forza**:

### FORZA

Una **forza** è una spinta che produce un cambiamento di moto di un corpo.

La forza è un **vettore** (con modulo, direzione e verso) la cui unità di misura è

$$[F] = \text{N} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$$

ove N sta per Newton.

## 4.3 Principi della dinamica - Leggi di Newton

Si descrivano, ora, le leggi di Newton in termini dei due concetti esposti, ossia massa e forza:

1. Se la forza risultante che agisce su un corpo è nulla, ovvero

$$\sum \vec{F} = 0$$

allora l'accelerazione del corpo è nulla, cioè  $\vec{a} = 0$ , ovvero

$$\boxed{\sum \vec{F} = 0 \longrightarrow \vec{a} = 0}$$

Tale legge potrebbe sembrare superflua, in quanto un caso particolare della seconda: tuttavia, tale legge assolve al compito di definire un **sistema di riferimento inerziale**.

2. La forza risultante su un corpo è direttamente proporzionale all'accelerazione del corpo stesso. L'accelerazione di un corpo, quindi, è proporzionale alla forza risultante

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$$

3. La forza esercitata da un corpo  $a$  su un corpo  $b$  è uguale in modulo e direzione, ma ha verso opposto alla forza esercitata da  $b$  su  $a$ .

Ovvero si ha che

$$\boxed{\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}}$$

e ciò è sempre vero.

Dopo aver definito tali leggi, è necessario definire diversi tipi di forze, distinguendole in base alla loro tipologia.

## 4.4 Forza peso

Di seguito si espone il significato fisico di **forza peso**:

### FORZA PESO

La forza peso viene designata con  $\vec{F}_t$ , ovvero la forza di attrazione esercitata dalla terra su un corpo di massa  $m$ . In particolare si ha

$$\boxed{\vec{F}_t = m\vec{g}}$$

in cui  $\vec{g} = -9.8 \text{ m/s}^2 \cdot \hat{j}$  e prende il nome di **accelerazione gravitazionale** (o meglio, di **campo gravitazionale** sulla superficie della terra).

Di seguito si espone una illustrazione della forza peso:



Figura 10: Forza peso

**Osservazione:** Si osservi che la formula seguente

$$\vec{F}_t = m\vec{g}$$

potrebbe rassomigliare la formula

$$\vec{F}_t = m\vec{a}$$

Tuttavia, i due concetti sono ben distinti, in quanto  $\vec{F}_t = m\vec{g}$  è un caso particolare della **legge di gravitazione universale**.

**Osservazione:** Si osservi che anche nel caso della forza peso è presente il terzo principio della dinamica: infatti un corpo viene attratto verso il centro della terra ed esercita una forza sulla superficie terrestre, così come la terra esercita una forza uguale e contraria (solamente che è impercettibile, è sempre presente).

#### 4.5 Forza normale

Di seguito si espone un altro tipo di forza, una forza di contatto, che prende il nome di **forza normale**:

##### FORZA NORMALE

La **forza normale**  $\vec{F}_N$  è un caso di forza di contatto, definita come **spinta fornita da una superficie (o da un altro corpo)**: quando un oggetto è appoggiato su una superficie e non si muove (ovvero si ha che  $\vec{v} = 0$  e  $\vec{a} = 0$ ), alla **forza peso** si contrappone la **forza normale**, uguale e contraria alla forza peso.

Di seguito si espone una illustrazione della forza normale:



Figura 11: Forza normale

Una caratteristica fondamentale della forza normale è che essa è sempre **ortogonale alla superficie** su cui poggia l'oggetto. Se si osserva che il corpo presenta  $\vec{a} = 0$ , significa che

$$\vec{F}_t + \vec{F}_N = 0 = m\vec{a} \longrightarrow \vec{F}_N = -\vec{F}_t$$

Mentre la forza peso presenta un modulo preciso, calcolabile tramite la legge di gravitazione universale, la forza normale, invece, adatta la propria intensità al corpo appoggiato sulla superficie: fintantoché la superficie resiste, il modulo della forza normale coincide con quello della forza peso; se il corpo è eccessivamente massiccio, la superficie si rompe.

**Osservazione:** Una forza presenta sempre un **punto di applicazione** che, graficamente, è rappresentata dalla “coda del vettore”:

1. Nel caso della forza peso, il punto di applicazione è sempre dato del **centro di massa** del corpo stesso;
2. Nel caso della forza normale, il punto di applicazione è la superficie di contatto (anche se vi sono molti punti di applicazione vista l'irregolarità della superficie stessa).

Tuttavia è sempre possibile eseguire la somma di forze per conoscerne la risultante.

**Osservazione:** Quando si deve eseguire la rappresentazione grafica delle forze è necessario introdurre il concetto di **diagramma di corpo libero**:

- ogni corpo è rappresentato da un **punto** (per cui il punto di applicazione delle forze sul corpo è proprio rappresentato dal punto stesso);
- comporta **solo le forze** che sono applicate sul corpo, e ciò diviene particolarmente utile quando bisogna considerare un sistema di più corpi interagenti.

**Esempio:** Si considerino due corpi poggianti uno sopra l'altro e stanti su una superficie fissa. Naturalmente su tali corpi agiscono due forze peso distinte. Inoltre la superficie di contatto tra i due corpi permette di individuare due forze normali: uno del primo corpo sul secondo e una del secondo corpo sul primo. Infine vi è la forza di contatto dei due corpi con la superficie su cui poggiano, come mostrato di seguito:



Figura 12: Forza normale di due corpi a contatto

Dopo aver effettuato la raffigurazione, si procede alla realizzazione del **diagramma a corpo libero** di ciascuno dei due corpi, come mostrato di seguito:



Figura 13: Diagramma a corpo libero di due corpi a contatto

Naturalmente in questo caso si possono determinare direttamente le forze coinvolte

$$\begin{aligned}\vec{F}_{t1} &= -gm_1 \cdot \hat{j} = m_1 \vec{g} \\ \vec{F}_{t2} &= -gm_2 \cdot \hat{j} = m_2 \vec{g}\end{aligned}$$

Applicando la **2<sup>a</sup> legge della dinamica** si perviene al risultato seguente

$$\begin{aligned}m_1 \vec{a}_1 &= m_1 \vec{g} = \sum \vec{F} = \vec{F}_N + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{t1} = 0 \\ m_2 \vec{a}_2 &= m_2 \vec{g} = \sum \vec{F} = \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{t2} = 0\end{aligned}$$

Questo, in quanto l'accelerazione è nulla, un dato noto dal problema. Applicando, ora, la **3<sup>a</sup> legge della dinamica** si perviene al risultato seguente:

$$\vec{F}_{N1} = -\vec{F}_{N2}$$

Da ciò si può concludere il problema, andando a determinare

$$\begin{aligned}\vec{F}_{N2} &= -\vec{F}_{t2} = gm_2 \cdot \hat{j} \\ \vec{F}_{N1} &= -\vec{F}_{N2} = \vec{F}_{t2} = -gm_2 \cdot \hat{j} \\ \vec{F}_N &= -\vec{F}_{N1} - \vec{F}_{t1} = gm_2 \cdot \hat{j} + gm_1 \cdot \hat{j} = g \cdot (m_1 + m_2) \cdot \hat{j}\end{aligned}$$



10 Marzo 2022

## 4.6 Forza di tensione

Di seguito si espone il significato fisico della **forza di tensione** che, nel suo comportamento, non è dissimile dalla forza normale:

### FORZA DI TENSIONE

La forza di tensione è la forza esercitata, per esempio, da un cavo o una fune, come mostrato di seguito, in cui la forza di tensione va a cancellare la forza peso del corpo appeso alla fune. È importante notare che  $\vec{F}_T$  è sempre **parallela alla direzione della corda** stessa.

Di seguito si espone una illustrazione della forza di tensione:



Figura 14: Forza di tensione di un corpo sospeso

**Esempio:** Si consideri l'esempio seguente, in cui vi è un corpo che rimane sospeso nel vuoto da due funi che descrivono con il soffitto due angoli, rispettivamente  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Si determinino le tensioni sulle due corde.



Figura 15: Forza di tensione di un corpo sospeso da due corde

Dopo aver realizzato una figura illustrativa, bisogna sempre procedere alla raffigurazione del **diagramma a corpo libero**, come mostrato di seguito:



Figura 16: Diagramma a corpo libero di un corpo sospeso da due corde

Applicando, ora, la **2<sup>a</sup> legge della dinamica** si perviene al risultato seguente:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0$$

essendo l'accelerazione nulla. Pertanto si ha che

$$\vec{F}_{T1} + \vec{F}_{T2} + \vec{F}_t = 0$$

Sarà ora sufficiente decomporre tale equazione vettoriale nelle sue due componenti ( $x$  e  $y$ ), come mostrato di seguito

$$\begin{aligned} x &= -F_{T1} \cdot \cos(\theta_1) + F_{T2} \cdot \cos(\theta_2) + 0 = 0 \\ y &= F_{T1} \cdot \sin(\theta_1) + F_{T2} \cdot \sin(\theta_2) - mg = 0 \end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ha che

$$F_{T1} = F_{T2} \cdot \frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)}$$

che, sostituita nella seconda equazione, permette di ottenere

$$F_{T2} \cdot \frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)} \cdot \sin(\theta_1) + F_{T2} \cdot \sin(\theta_2) = mg$$

che può essere riscritto come segue

$$F_{T2} \cdot \cos(\theta_2) \cdot \left[ \frac{\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_1)} + \frac{\sin(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} \right] = mg$$

Pertanto si ha che

$$F_{T2} = \frac{mg}{\cos(\theta_2) \cdot (\tan(\theta_1) + \tan(\theta_2))} \quad \text{e} \quad F_{T1} = \frac{mg}{\cos(\theta_1) \cdot (\tan(\theta_1) + \tan(\theta_2))}$$

Se si cerca di capire che cosa accade quando gli angoli descritti dalla fune con il soffitto sono prossimi all'angolo limite di  $90^\circ$ , si rileva immediatamente una instabilità.

Intuitivamente si potrebbe pensare che una massa sospesa tramite due cavi come nella configurazione mostrata di seguito sia facilmente in equilibrio:

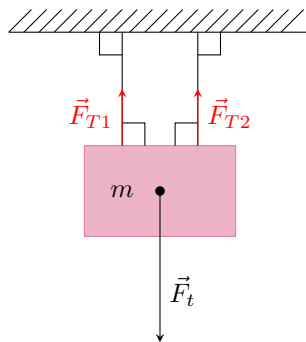


Figura 17: Forza di tensione di un corpo sospeso da due corde parallele

Tuttavia, è necessario considerare anche un altro aspetto nella determinazione dell'equilibrio: il **momento di forza**. Il caso precedentemente analizzato riguardava la configurazione per la quale il punto di applicazione della corda alla massa era identico e precisamente al centro della massa stessa:



Figura 18: Forza di tensione di un corpo sospeso da due corde con stesso punti di applicazione

Affinché in questa configurazione la massa stia in equilibrio, è necessario che precisamente la lunghezza di ciascun cavo sia identica; se differisse anche di poco, allora tutta la tensione graverebbe sul cavo più corto.

**Esempio:** Si consideri un quadricottero, ovverosia un drone con 4 eliche e rotori, ciascuna capace di fornire una forza propulsiva verso l'alto di eguale modulo. Considerando il drone stazionario si ha, per la **2<sup>a</sup> legge della dinamica**, la seguente eguaglianza

$$4 \cdot \vec{F}_s + \vec{F}_t = 0$$

questo significa che ciascun rotore deve essere in grado di sviluppare una forza propulsiva verso l'alto pari a un quarto del peso del drone; quando, invece, si ha uno sbilanciamento delle forze dei rotori si ottiene un'inclinazione del drone nella direzione delle forze di minore intensità (quello che viene chiamato **momento di forza**).

Pertanto si può concludere che

$$\vec{F}_s = -\frac{1}{4} \cdot \vec{F}_t$$

**Esempio:** Si consideri una massa su un piano inclinato, come mostrato di seguito (considerando ininfluyente l'attrito tra la massa e la superficie del piano):



Figura 19: Piano inclinato

A cui segue il diagramma a corpo libero seguente:



Figura 20: Diagramma a corpo libero di un piano inclinato

Dopo aver disegnato anche il diagramma a corpo libero si può procedere a ragionare con la **2<sup>a</sup> legge della dinamica**, ottenendo

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_N + \vec{F}_t$$

e scomponendo tale equazione nelle sue componenti si ottiene

$$ma_x = -F_N \cdot \sin(\theta)$$

$$ma_y = F_N \cdot \cos(\theta) - mg$$

Volendo conoscere l'accelerazione del corpo, si osserva che sussiste il seguente vincolo geometrico:

$$\frac{a_y}{a_x} = \tan(\theta) \longrightarrow a_y = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \cdot a_x$$

da cui

$$a_y \cdot \cos(\theta) = a_x \cdot \sin(\theta) \longrightarrow a_x = a_y \cdot \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

Pertanto, procedendo dalla prima equazione si ottiene

$$F_N = -\frac{ma_x}{\sin(\theta)}$$

e quindi, nella seconda equazione si ottiene

$$ma_x \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -ma_x \cdot \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - mg \longrightarrow a_x = -g \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

Sfruttando il vincolo geometrico precedente si ottiene anche che

$$a_y = -g \cdot \sin^2(\theta)$$

Avendo determinato ciò è possibile calcolare il modulo dell'accelerazione come segue

$$a = \sqrt{g^2 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta) + g^2 \cdot \sin^4(\theta)} = g \cdot \sin(\theta) \cdot \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = g \cdot \sin(\theta)$$

**Esempio:** Si consideri il caso del piano inclinato precedente, procedendo, ora, alla rotazione del sistema di riferimento dell'angolo  $\theta$ , dimodoché lo spostamento avvenga lungo l'asse  $x$  soltanto, e non vi sia, conseguentemente, accelerazione lungo l'asse  $y$ . In base a questo nuovo sistema di riferimento si ottiene la seguente decomposizione

$$\begin{aligned} x : ma_x &= -mg \cdot \sin(\theta) \\ y : ma_y &= -mg \cdot \cos(\theta) + F_N = 0 \end{aligned}$$

per cui si ha che

$$a_x = -g \cdot \sin(\theta)$$

## 4.7 Forza di attrito

Di seguito si espone la definizione generale di **forza di attrito**:

### FORZA DI ATTRITO

La **forza di attrito** è una forza di contatto, esattamente come la forza normale: quest'ultima è sempre perpendicolare alla superficie e il suo modulo è tale che vincola il moto, al fine di contrastare la forza nell'altra direzione.

La **forza di attrito**, come la forza normale, è una forza che presenta come punto di applicazione la superficie di contatto con il corpo. Inoltre, la forza di attrito

- è sempre **parallela alla superficie**;
- è di **modulo proporzionale** a  $|F_N|$ .

Quest'ultima osservazione non è ovvia, in quanto bisogna osservare il comportamento delle particelle a livello microscopico.

Si consideri l'illustrazione seguente, in cui si espongono le forze di attrito agenti:

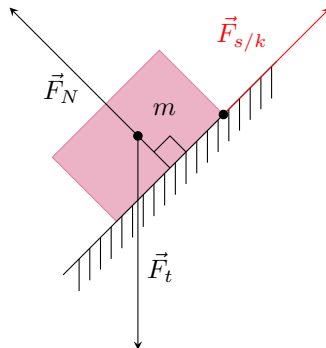


Figura 21: Forza di attrito

La forza di attrito si distingue in due diverse tipologie:

1. L'**attrito cinetico**, si ha quando il moto relativo tra le superfici in contatto non è nullo, ovvero si ha movimento con  $v \neq 0$ .  
Si ha che

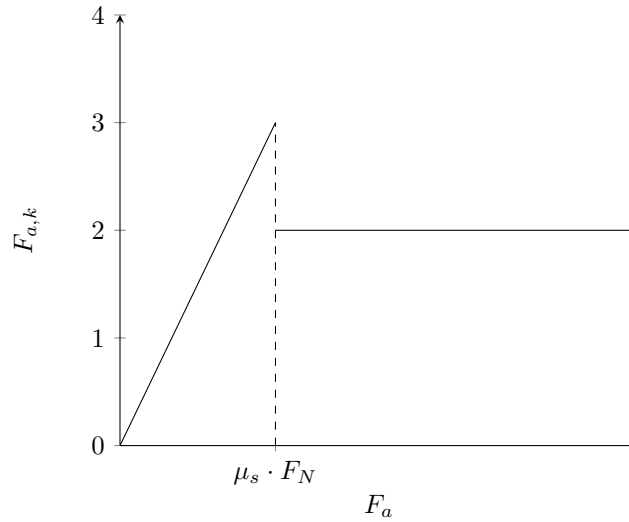
$$F_k = \mu_k \cdot F_N$$

in cui  $\mu_k$  prende il nome di **coefficiente di attrito cinetico** (dall'inglese  $k$ , di "kinetic"), il quale, per ovvie ragioni, è **adimensionale**.

2. L'**attrito statico**, si ha quando la velocità relativa tra le superfici di contatto è nulla, ovvero non si ha movimento,  $v = 0$ .  
Si ha che

$$F_s \leq \mu_s \cdot F_N$$

ovvero il modulo  $F_s$  aumenta affinché la risultante delle forze interagenti (e quindi la risultante) sia 0. Ovviamente, quando la forza che agisce aumenta il proprio modulo fino a superare la forza di attrito statico, il corpo inizia a muoversi e l'attrito si tramuta, a seguito del moto, in attrito cinetico, come si vede di seguito:



Il coefficiente moltiplicativo  $\mu_s$  prende il nome di **coefficiente di attrito statico** e generalmente si ha che

$$\mu_k < \mu_s$$

14 Marzo 2022

Si osservi che quando una massa rimane sospesa tramite due cavi che formano con la superficie di collegamento un angolo di  $90^\circ$  ciascuno, non entrano in gioco solamente le forze, ma risulta fondamentale anche conoscere il concetto di **momento di forza** e di **punto di applicazione**: se il punto di applicazione delle forze di tensione è lo stesso sul corpo sospeso, basta una leggerissima differenza di lunghezza dei cavi per avere uno sbilanciamento significativo delle forze di tensione.

**Osservazione:** L'attrito statico è come se non fosse un attrito, in quanto non si ha movimento: è come una forza normale che si oppone al tentativo di spostamento, variando il proprio modulo in modo tale da cancellare la forza applicata.

L'attrito cinetico, invece, è un vero e proprio attrito che si oppone al moto tramite la dissipazione di energia in calore.

**Esempio:** Si consideri una vettura che, in movimento, procede a frenare e a rallentare fino a fermarsi: il fenomeno che si sta studiando è l'attrito tra le ruote e la strada. In particolare la vettura richiede 70 m per fermarsi, partendo da una velocità di 100 km/h (a causa di uno slittamento delle gomme sull'asfalto).

A partire da questi dati, si determini il **coefficiente di attrito cinetico**; si proceda alla realizzazione di un modello grafico del problema:

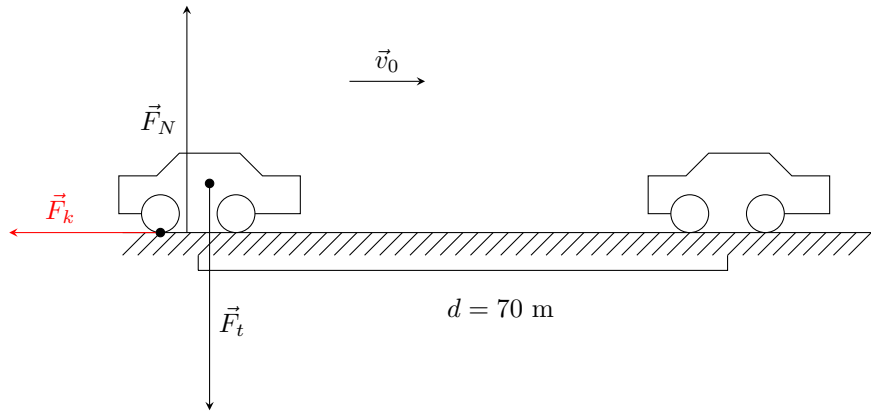


Figura 22: Vettura in decelerazione su una strada

È molto importante osservare che la forza normale è essenziale per il calcolo della forza di attrito cinetico, in quanto da essa dipende il suo modulo. Si realizzi, ora, il diagramma a corpo libero:

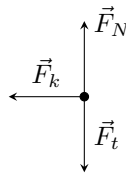


Figura 23: Diagramma a corpo libero di una vettura in rallentamento

Per procedere si richiami la 2<sup>a</sup> legge della dinamica e si scriva

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \cdot (a_x \cdot \hat{i} + 0 \cdot \hat{j})$$

È noto, inoltre, che

$$\vec{F}_t + \vec{F}_N = 0 \longrightarrow \vec{F}_t = -\vec{F}_N$$

Per cui si ottiene che

$$\vec{F}_k = ma_x \cdot \hat{i} \longrightarrow a_x = -\frac{F_k}{m}$$

in cui, per convenzione, si pone la componente orizzontale negativa.

Inoltre è possibile calcolare anche l'accelerazione con cui la macchina rallenta, impiegando la seguente formula del moto uniformemente accelerato:

$$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot (x - x_0)$$

che è possibile applicare al contesto in quanto si parla di moto uniformemente accelerato, giacché l'accelerazione è causata dalla forza di attrito, che è costante in quanto prodotto tra un coefficiente e la forza normale, la quale è costante in quanto si oppone al peso che è costante.

Da tale formula si ottiene che

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{x - x_0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{2d}$$

Da ciò segue che, ovviamente

$$F_k = \mu_k F_N$$

in cui ovviamente

$$F_N = F_t = mg$$

per cui si evince che

$$F_k = \mu_k \cdot mg \longrightarrow a_x = -\frac{F_k}{m} = -\mu_k g$$

Pertanto, dalla uguaglianza appena determinata

$$a_x = -\mu_k g = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{2d}$$

si può ricavare

$$\mu_k = \frac{v_0^2}{2gd} = 0.56$$

**Osservazione:** Si osservi che la 2<sup>a</sup> legge di Newton è applicabile in un sistema di riferimento inerziale, ovvero in un sistema di riferimento che non ha propensione a muoversi.

Il tempo di volo di un proiettile è

$$t = \frac{2v_0 \cdot \sin(\theta)}{g}$$

**Esempio:** Si consideri un piano su cui poggiano tre masse, l'una collegata all'altra, come mostrato di seguito:



Figura 24: Tre masse trainate

Tali masse vengono trainate con una forza  $F = 200$  N, mentre le masse sono  $m_A = 30$  kg,  $m_B = 50$  kg e  $m_C = 20$  kg; inoltre è noto che il coefficiente di attrito cinetico è  $\mu_k = 0.1$ . Si determini, allora

- l'accelerazione dell'intero sistema;



- la tensione delle corde  $A - B$  e  $B - C$ .

Si realizzi il diagramma a corpo libero del sistema oggetto di studio

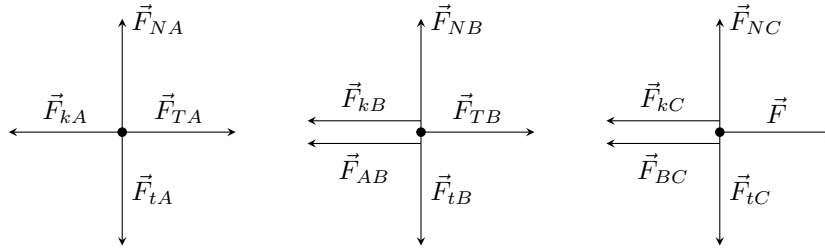


Figura 25: Diagramma a corpo libero di 3 masse trainate

Per la risoluzione del primo quesito, si può sfruttare la **proprietà additiva** della massa, essendo i tre corpi omogenei e costituiti dalla stessa sostanza. Pertanto l'assieme  $ABC$  si comporta come un unico corpo, la cui massa complessiva è

$$m = m_A + m_B + m_C = 30 \text{ kg} + 50 \text{ kg} + 20 \text{ kg} = 100 \text{ kg}$$

Pertanto si può realizzare un nuovo diagramma a corpo libero, mostrato di seguito:



Figura 26: Diagramma a corpo libero di un'unica massa

Pertanto si ottiene che, per la 2<sup>a</sup> legge della dinamica:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Naturalmente le forze possono essere scomposte nei loro rispettivi componenti, per cui si ottiene

$$y : \begin{cases} \vec{F}_N = -\vec{F}_t \\ F_N = mg \end{cases}$$

mentre si ottiene che

$$x : \begin{cases} ma_x = F - F_k \\ F_k = \mu_k \cdot F_N \end{cases}$$

da cui

$$a_x = \frac{F}{m} - \mu_k \cdot g = 2.0 \text{ m/s}^2 - 0.98 \text{ m/s}^2 = 1.0 \text{ m/s}^2$$

Per la risoluzione del secondo quesito, si determini dapprima la tensione della corda  $A - B$ , ovvero  $\vec{F}_{AB}$  che, per la 3<sup>a</sup> legge di Newton è uguale, in modulo, alla forza  $\vec{F}_{TA}$ .

Dalla 2<sup>a</sup> legge della dinamica applicata al corpo  $A$  si ottiene

$$\vec{F}_{NA} + \vec{F}_{tA} + \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{kA} = m_A \cdot \vec{a}_A$$

Naturalmente si ha che, scomponendo tale equazione nelle sue componenti  $x$  e  $y$  si ottiene

$$\begin{cases} F_{ABx} - \mu_k m_A g = m_A a_{Ax} \\ F_N + F_t = m_A a_{Ay} = 0 \longrightarrow F_N = -F_t \end{cases}$$

Si può procedere, ora, al calcolo di  $F_{BAx}$  come segue (ricordando che l'accelerazione del sistema è la stessa di ciascuna massa, ovviamente):

$$F_{BAx} = m_A \cdot (a_{Ax} + \mu_k g) = 30 \text{ kg} \cdot [1 \text{ m/s}^2 + 0.1 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2] = 60 \text{ N}$$

Da notare che tale formula poteva anche essere riscritta come segue

$$F_{BA} = m_A \cdot \left( \frac{F}{m} - \mu_k \cdot g + \mu_k \cdot g \right) = \frac{m_A}{m_A + m_B + m_C} \cdot F = 60 \text{ N}$$

Per la determinazione della tensione  $B - C$ , è sufficiente procedere come già fatto, impiegando la seconda legge della dinamica sul corpo  $B$  (o anche sul corpo  $C$ , visto che sono noti tutti i dati del problema). Si applichi, allora, la 2<sup>a</sup> legge della dinamica sul corpo  $C$ , ottenendo

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \longrightarrow \vec{F} + \vec{F}_{kc} + \vec{F}_{NC} + \vec{F}_{tC} + \vec{F}_{BC} = m_C \cdot \vec{a}_C$$

Naturalmente è possibile scomporre tale equazione nelle sue componenti  $x$  e  $y$ , ottenendo

$$y : F_{NC} - F_{tC} = 0 \longrightarrow F_{NC} = F_{tC} = m_C g$$

$$x : F - F_{kC} - F_{BC} = m_C a_{xC} \longrightarrow F - \mu_k m_C g - F_{BC} = m_C \cdot a_{xC}$$

Da cui si evince che

$$F_{BC} = F - \mu_k m_C g - m_C \cdot a_{xC} = 200 \text{ N} - 20 \text{ N} - 20 \text{ N} = 160 \text{ N}$$

15 Marzo 2022

Quando bisogna risolvere un problema di meccanica, è essenziale visualizzare il problema tramite una rappresentazione grafica; dopodiché è fondamentale procedere alla realizzazione del diagramma a corpo libero del sistema.

Solamente a questo punto è possibile procedere alla stesura delle equazioni dinamiche che consentono di isolare le richieste del problema.

#### 4.8 Attrito dovuto a un fluido (resistenza)

Un'altra importante forza di attrito è la resistenza di un fluido: l'aria, per esempio, rallenta il moto di un corpo, come accade quando si lascia cadere dalla stessa altezza un martello e una piuma (sulla terra, dove c'è aria, il martello cade prima della piuma, mentre sulla Luna, in assenza di atmosfera, i due corpi cadono alla medesima velocità, impiegando lo stesso tempo).

##### ATTRITO DOVUTO A UN FLUIDO (RESISTENZA)

La resistenza di un fluido è la forza di attrito che il fluido produce sul corpo in movimento, rallentandone la corsa. La causa di tale resistenza è dovuta alla **viscosità del fluido** che, naturalmente, esercita una **forza opposta**  $\vec{F}_v$  al moto del fluido (naturalmente le proprietà del fluido sono determinanti).

Il problema della forza esercitata da un fluido viscoso su un corpo in esso immerso è complesso; tuttavia, tale fenomeno viene modellizzato, in maniera approssimativa, attraverso due diversi schemi teorici:

1. George Stokes, nel 1845, prese in considerazione il problema solo per un caso particolare, quello di un **oggetto di forma sferica, completamente immerso** in un fluido in **moto laminare**, di **densità costante** ed **incomprimibile**.

Pertanto, a velocità bassa con densità bassa, si ha un **flusso laminare** (ovvero si è in **assenza di turbolenza**) e per determinare la forza resistiva si impiega, appunto, la **legge di Stokes**

$$\vec{F} = -b \cdot \vec{v}$$

in cui  $b$  prende il nome di **coefficiente di viscosità**, che dipende dalle proprietà del fluido ed è un coefficiente di proporzionalità diretta: più aumenta la velocità, maggiore sarà l'intensità della forza d'attrito. Tale forza è molto diversa rispetto alle forze precedentemente analizzate, in quanto dipende strettamente dalla tipologia di moto del corpo considerato. Naturalmente, in questo caso, l'equazione è molto semplice, ma difficilmente applicabile, in quanto nell'equazione di Newton si ha un'accelerazione, mentre la legge di Stokes fornisce una velocità: si tratta, quindi, di risolvere un'**equazione differenziale**.

2. Se il **moto** invece è **turbolento** le forze inerziali dominano su quelle viscosi e la forza di resistenza dipende da diversi fattori:

- **densità**  $\rho$  del fluido;
- l'**area di proiezione** del fluido  $A$ , ovvero una stima di quanto fluido viene spostato nel moto: un corpo lungo e fino non subirà molta resistenza, mentre un corpo grande e largo avrà una resistenza maggiore;
- il **coefficiente di caratterizzazione della forma del corpo**  $C_d$  (in cui  $D$  sta per "Drag"), determinato sperimentalmente e, per ovvie ragioni, **adimensionale**.

Considerando tali fattori, la forza di resistenza è

$$F_v = \frac{1}{2} \rho A C_d v^2$$

**Esempio:** Si consideri un quadricottero che, inclinandosi orizzontalmente di un angolo  $\theta$ , produce uno spostamento di velocità  $v$  che, naturalmente, viene rallentato dall'aria che oppone una forza di resistenza.

Si supponga, per ipotesi, che tale drone esegua un moto che è possibile modellizzare tramite la legge di Stokes, ovvero

$$\vec{F}_v = -b \cdot \vec{v}$$

Si determini, allora, l'angolo  $\theta$  tale per cui il drone si muove ad una **velocità costante**  $\vec{v}$ . Si realizzi, allora, il diagramma a corpo libero seguente:

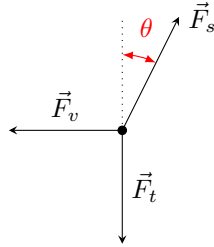


Figura 27: Diagramma a corpo libero di un drone inclinato

Naturalmente, in questo caso, è possibile applicare la 2<sup>a</sup> legge della dinamica, in quanto è noto che il drone si muove a velocità costante, quindi l'accelerazione è nulla e quindi la somma delle forze risultanti è nulla.

Pertanto si ha che

$$\vec{F}_t + \vec{F}_v + \vec{F}_s = m \cdot \vec{a} = 0$$

Naturalmente è possibile scomporre tale equazione vettoriale nelle sue componenti  $x$  e  $y$ , ottenendo

$$x : F_s \cdot \sin(\theta) - bv = 0$$

$$y : F_s \cdot \cos(\theta) - mg = 0$$

Dalla seconda equazione si ottiene che

$$F_s = \frac{mg}{\cos(\theta)}$$

mentre dalla prima equazione si ha che

$$v = \frac{mg}{b} \cdot \tan(\theta)$$

**Esempio:** Si calcoli la velocità limite di un paracadutista che scende verticalmente, di cui si propone di seguito il diagramma a corpo libero:



Figura 28: Diagramma a corpo libero di un drone inclinato

Infatti, ad un certo punto, la forza peso del corpo in caduta libera verrà eguagliata dalla forza di resistenza dell'aria e il paracadutista non aumenterà più la sua velocità, ma la manterrà costante. Naturalmente, in questo caso, è necessario applicare la seconda formula della resistenza, semplicemente osservando che

$$mg = F_v = \frac{1}{2} \cdot \rho AC_d v^2$$

Per isolare la velocità limite, semplicemente si può scrivere

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho AC_d}}$$

Naturalmente, se si suppone che

- $m = 70 \text{ kg}$
- $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$
- $C_d = 0.8$
- $A = 0.5 \text{ m}^2$

Considerando tali dati per il problema si ottiene che

$$v = 55 \text{ m/s}$$

e tale risultato è totalmente ininfluenza dall'altezza dalla quale ci si paracaduta, in quanto la velocità limite che è possibile raggiungere è  $v = 55 \text{ m/s}$ .

## 4.9 Dinamica del moto circolare uniforme

Naturalmente, è noto che nel moto circolare uniforme la velocità  $v$  è costante, per cui l'accelerazione è soltanto centripeta e diretta verso il centro della circonferenza, ortogonalmente al vettore velocità. È noto che il modulo dell'accelerazione nel moto circolare uniforme è pari a

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

essendo

$$\omega = \frac{v}{R}$$

### FORZA CENTRIPETA

La forza necessaria per mantenere il moto circolare è, per la seconda legge della dinamica:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

e sostituendo ad  $a$  la formula precedentemente ottenuta si ha

$$F_c = \frac{mv^2}{R}$$

orientata verso il centro della circonferenza. Naturalmente quest'ultima è la **forza centripeta**, così chiamata per descriverne la direzione e il verso, ma non la natura della forza (la forza centripeta non è un tipo di forza, in quanto anche la forza di attrazione gravitazionale è una forza centripeta quando si parla di attrazione tra pianeti, anche la forza d'attrito è una forza centripeta, come quando si gira con la macchina).

**Esempio:** Nelle curve delle strade, la carreggiata è inclinata, in quanto la forza normale si scompone in due componenti: una centrifuga e una centripeta; ciò, naturalmente, aiuta la forza di attrito ad evitare che la vettura esca fuori strada.

Si determini, allora, l'angolo  $\theta$  di inclinazione della strada affinché la componente orizzontale della forza normale fornisca la forza centripeta necessaria per girare (supponendo in assenza di attrito):



Figura 29: Auto in curva su un piano inclinato

Si realizzi il diagramma a corpo libero della vettura:

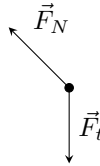


Figura 30: Diagramma a corpo libero di una macchina in curva

Naturalmente, scomponendo la forza normale nelle sue due componenti (orizzontale e verticale) si ottiene che

$$F_N \cdot \sin(\theta) = F_c = \frac{mv^2}{R}$$

$$F_N \cdot \cos(\theta) - mg = 0 \longrightarrow F_N \cdot \cos(\theta) = mg$$

Allora si ha che

$$\tan(\theta) = \frac{v^2}{Rg}$$

**Osservazione:** Anche quando si considera il moto di una corda che viene fatta ruotare nell'aria, la tensione della corda è esattamente la forza centripeta necessaria a mantenere il moto circolare uniforme (conoscendo il raggio di rotazione, ossia la lunghezza della corda, nonché la velocità di rotazione).

Per verificare che il coefficiente di attrito statico non può essere mai maggiore di 1 è sufficiente porre una massa su una superficie inclinata e aumentare l'angolo di inclinazione.

16 Marzo 2022

#### 4.10 Sistemi non-inerziali

Il concetto di sistema non-inerziale è essenziale per lo studio della dinamica dei corpi. Infatti, un sistema non-inerziale è un sistema di riferimento in cui l'accelerazione non è nulla, ovvero  $a \neq 0$ . Ciò impedisce di applicare la 2<sup>a</sup> legge della dinamica, in quanto tale legge si applica solo a sistemi di riferimento inerziali.

Si consideri il caso di un treno in accelerazione e di una massa sospesa al soffitto; naturalmente, quando il treno accelera (e quindi la sua velocità non è costante), la massa si inclina nella direzione opposta al moto:

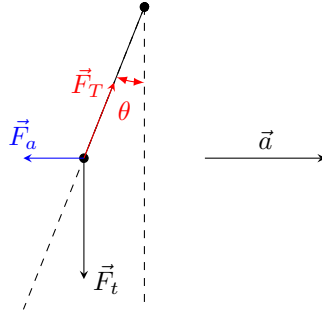


Figura 31: Forza apparente

In cui, ovviamente, applicando la 2<sup>a</sup> legge della dinamica si ottiene che

$$\vec{F}_T + \vec{F}_t = m \cdot \vec{a}$$

da cui

$$\vec{F}_T + m\vec{g} = m\vec{a} \longrightarrow \vec{F}_T = m \cdot (\vec{a} - \vec{g})$$

**Osservazione:** Si osservi che la prima equazione può essere riscritta come segue:

$$\vec{F}_T + \vec{F}_t = m \cdot \vec{a} \longrightarrow \vec{F}_T + \vec{F}_t - m \cdot \vec{a} = 0$$

Ecco che allora la forza  $\vec{F}_a = m\vec{a}$  è una nuova forza, la quale prende il nome di **forza apparente**, o anche **pseudo-forza apparente** o **forza inerziale**, che agisce ancora una volta sulla massa  $m$ , in direzione opposta alla direzione del moto.

Naturalmente, in questo caso, l'unico termine da considerare è  $m\vec{a}$ , in quanto l'accelerazione è costante, mentre se l'accelerazione non lo fosse, all'interno della formula dovrebbero figurare altri termini (si pensi, per esempio, ad una **pseudo-forza apparente centrifuga**, la quale può essere costante in modulo, ma cambia direzione e verso).

**Esempio:** Si consideri il caso in cui una massa  $m$  è posta su un cuneo e l'intero sistema accelera con  $\vec{a}$  costante:

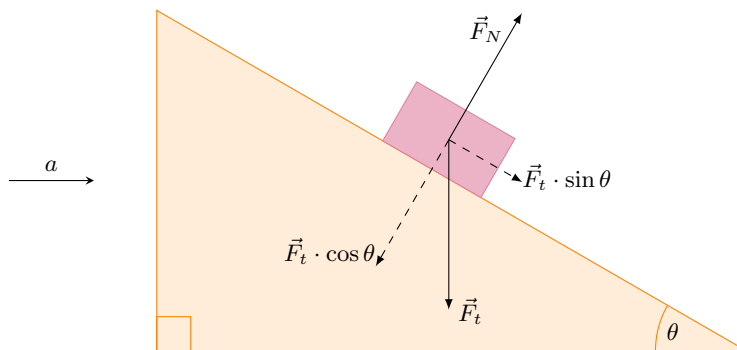


Figura 32: Piano inclinato in accelerazione

Si determini, allora, quale deve essere l'accelerazione  $\vec{a}$  affinché il blocco rimanga immobile sul cuneo.

Naturalmente, osservando il sistema da fuori, le uniche forze che agiscono su tale corpo sono la forza peso e la forza normale. Se, invece, tale corpo viene osservato dall'interno, impiegando un sistema di riferimento non-inerziale, allora a tali forze se ne deve aggiungere una terza, una **pseudo-forza apparente** che agisce in verso opposto a quello dell'accelerazione  $\vec{a}$ , ovvero la forza  $\vec{F}_a = -m\vec{a}$ , come mostrato di seguito:

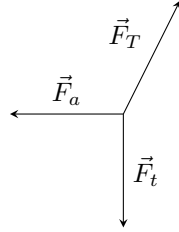


Figura 33: Diagramma a corpo libero di una massa su un piano inclinato in accelerazione

Da cui si evince che

$$\vec{F}_N + \vec{F}_t + \vec{F}_a = 0$$

e scomponendo l'equazione nelle sue componenti orizzontali e verticali si perviene al risultato seguente:

$$\begin{aligned} F_N \cdot \cos(\theta) - mg &= 0 \\ -F_a + F_N \cdot \sin(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

per cui si ottiene che

$$a = g \cdot \tan(\theta)$$

#### 4.11 Prodotto vettoriale

Si considerino due vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , allora si ha che

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |A| \cdot |B| \cdot \sin(\theta)$$

ove  $\theta$  è l'angolo compreso tra i vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ .

**Osservazione:** Si osservi che il prodotto vettoriale  $\vec{A} \times \vec{B}$  è un vettore ortogonale ad  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ :

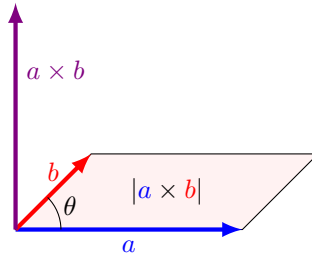


Figura 34: Prodotto vettoriale

Inoltre si ha che

- se  $\vec{A} \perp \vec{B}$ , allora si ha che

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |A| \cdot |B|$$



- se  $\vec{A} \parallel \vec{B}$ , allora si ha che

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = 0$$

- negli altri casi bisogna impiegare la regola della mano destra. Se si considera il prodotto vettoriale seguente (che non è mai commutativo)

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

la regola della mano destra si applica come segue:

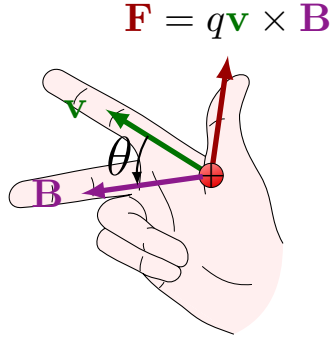


Figura 35: Regola della mano destra

- $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$
- $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$
- $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$
- $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$
- $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$
- $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$
- $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

Alternativamente, è noto che il prodotto vettoriale  $\vec{A} \times \vec{B}$  si calcola come

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

**Osservazione:** Mentre il prodotto vettoriale è il determinante della matrice di cui sopra, il prodotto scalare,  $\vec{B} \cdot \vec{A}$  si interpretava come  $|A|$  per la componente di  $B$  su  $A$ .

Inoltre si ha che il prodotto scalare tra  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  non viene alterato se ai due vettori vengono aggiunte ulteriori componenti parallele ad  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ .

**Esempio:** Si consideri la forza di Lorentz, la cui formula viene di seguito esposta

$$\vec{F} = g\vec{E} + g\vec{v} \times \vec{B}$$

in cui, senza  $\vec{E}$ , sarebbe stato

$$\vec{F} = g\vec{v} \times \vec{B}$$

Allora, in questo caso, se il campo magnetico  $\vec{B}$  va dentro la pagina e la velocità  $\vec{v}$  è parallela alla pagina, la forza  $\vec{F}$  è diretta verso il centro della spirale, ovvero  $\vec{F}$  è una **forza centripeta**, calcolata come segue

$$\vec{F} = -e \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Ma dalla cinetica è anche noto che la forza centripeta si calcola come

$$F_c = \frac{mv^2}{R}$$

per cui operando una eguaglianza si ottiene

$$\frac{mv^2}{R} = evB \rightarrow \frac{mv}{R} = eB \rightarrow m\omega = eB \rightarrow \omega = \frac{eB}{m}$$

in cui  $\omega$  prende il nome di **frequenza ciclotronica**, un valore utilizzabile per determinare la traiettoria e la natura del campo magnetico  $B$ , grazie all'emissione di fotoni da parte delle particelle. Tale fenomeno non si verifica solo sperimentalmente grazie ad un acceleratore di particelle, ma anche nello spazio, dove sono presenti campi magnetici e particelle cariche, le quali ruotano con frequenza angolare corrispondente alla frequenza ciclotronica;

#### 4.12 Pseudo-forza di Coriolis

Si consideri il seguente diagramma di un moto circolare

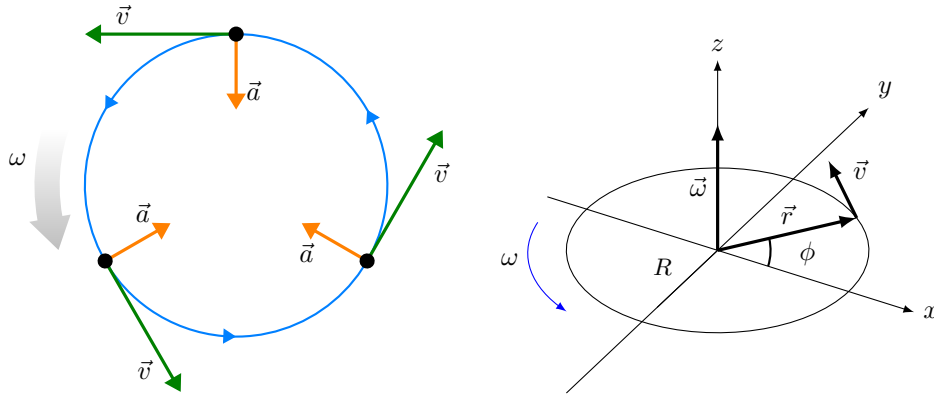


Figura 36: Moto circolare uniforme e pseudo-forza di Coriolis

Allora si può scrivere che, naturalmente, la velocità è il prodotto vettoriale tra il vettore velocità angolare e il vettore posizione, ovvero

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

E procedendo a derivare tale espressione rispetto al tempo si ottiene che

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

in cui le parentesi sono importanti, essendo il prodotto vettoriale non associativo (infatti  $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$ , essendo paralleli).

La pseudo-forza centrifuga, pertanto, si calcola come segue

$$\vec{F} = -m\vec{a} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

da cui si evince che se  $\vec{R} = 0$ , ovvero il punto si trova sull'asse di rotazione, allora non subisce alcuna forza, ma tanto più grande sarà il raggio, maggiore sarà anche la pseudo-forza che lo spinge in direzione opposta al moto.

**Osservazione:** Si consideri un punto materiale che si muove in linea retta e si supponga che poggia su un piano rotante con velocità angolare  $\vec{\omega}$ ; allora si osserva che, naturalmente, la pseudo-forza centrifuga è una componente che contribuisce a fare sì che il punto vada verso l'esterno, ma oltre a ciò, è da considerare anche un'altra forza che spinge il punto materiale in direzione opposta al verso di rotazione, ovvero la pseudo-forza di Coriolis, la quale si ha quando il sistema di riferimento non inerziale dal quale si osserva il fenomeno presenta una propria velocità, ossia non si muove con traiettoria circolare.

### PSEUDO-FORZA DI CORIOLIS

Tale forza prende il nome di **pseudo-forza di Coriolis**, la quale è perpendicolare a  $\vec{\omega}$  e a  $\vec{v}$  e si calcola come segue

$$\vec{F} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

**Esempio:** Si osservi che, in un vortice di bassa pressione, considerando la velocità angolare terrestre con verso uscente dal foglio e la velocità delle particelle di aria dirette verso il centro del vortice, si ottiene che la pseudo-forza di Coriolis, per la regola della mano destra, è diretta ortogonalmente al vettore velocità e giacente sul foglio stesso:

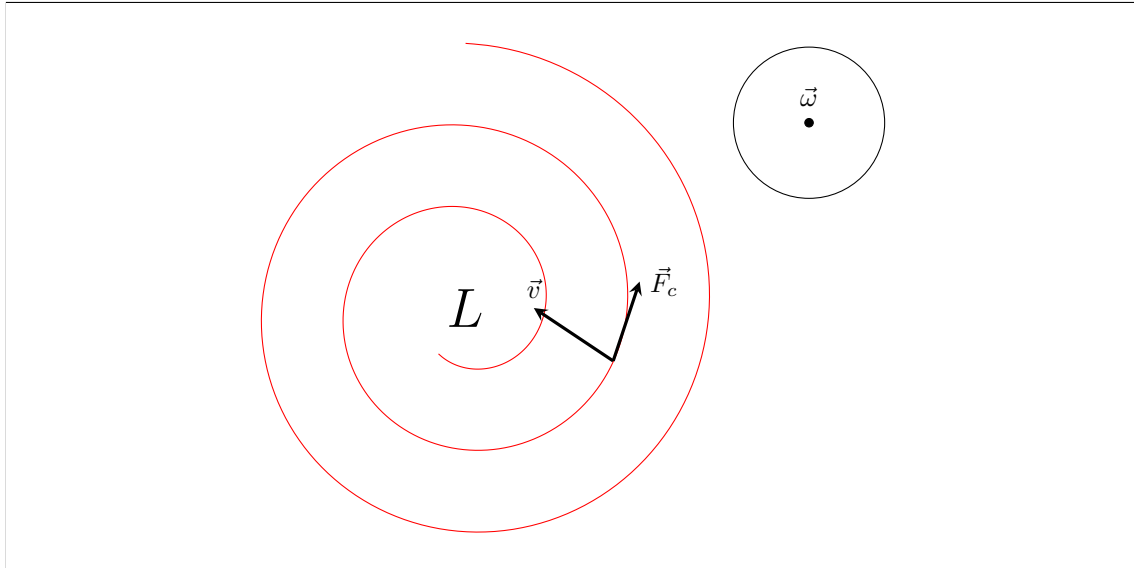


Figura 37: Vortice di bassa pressione e pseudo-forza di Coriolis

**Osservazione:** Si osservi che il calcolo della velocità limite segue la seguente formula

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho AC_d}}$$

e sapendo che

$$m = V \cdot \rho$$

si evince che

$$v = \sqrt{\frac{2V\rho g}{\rho AC_d}} = \sqrt{\frac{2Vg}{AC_d}}$$

pertanto, a parità di accelerazione gravitazionale  $g$  e coefficiente di resistenza  $C_d$ , ciò che determina la velocità dell'impatto con il suolo è il rapporto

$$\frac{V}{A}$$

pertanto più un corpo è voluminoso, maggiore sarà la velocità con cui impatta al suolo.

## 5 Gravità

17 Marzo 2022

La **legge di gravitazione universale** venne formulata da Isaac Newton nell'opera *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ("Principia") e pubblicata il 5 luglio 1687. Newton, infatti, ha affermato di voler formulare una teoria unica (appunto, universale) che descriva sia la caduta dei corpi sulla terra, sia il movimento degli astri.

Al fine di determinare tale formula, Newton si basò sull'osservazione della Luna e del suo moto; l'**accelerazione centripeta della Luna**, naturalmente, si calcola come segue

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

in cui, ovviamente,  $\omega$  è la velocità angolare, mentre  $R$  è il raggio dell'orbita della Luna, ovvero la distanza Terra-Luna (già nota dai tempi dei Greci); in particolare è noto che  $R = 60 \cdot R_T$ , in cui  $R_T = 6371$  km, mentre per determinare la velocità angolare della Luna, è noto che

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ovvero il rapporto tra l'angolo descritto dal moto e il tempo impiegato: anche in questo caso è noto che  $T \cong 27.3$  giorni. Ovviamente, ora, con questi dati è possibile calcolare l'accelerazione centripeta della Luna, ossia:

$$a_c = 2.7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

inoltre è noto che l'accelerazione gravitazionale terrestre è  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  per cui eseguendo il rapporto si ottiene

$$\frac{g}{a_c} \cong 60^2$$

che è un risultato importante, in quanto fa capire come il modulo dell'accelerazione centripeta sia **inversamente proporzionale al quadrato della distanza** tra i due corpi che si attraggono:

$$F \propto \frac{1}{d^2}$$

Tale proprietà viene espressa tramite la seguente legge di gravitazione universale

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

in cui  $G$  prende il nome di **costante di gravitazione universale**, la quale venne determinata significativamente dopo Newton.

**Esempio:** Si considerino due punti materiali  $m_1$  e  $m_2$  ad una certa posizione:

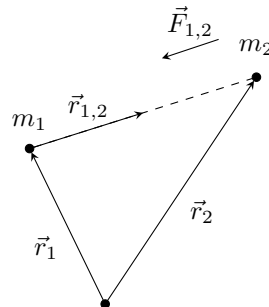


Figura 38: Forza di attrazione tra due masse

Allora si ha che, normalmente, il modulo della forza di attrazione gravitazionale dal corpo 1 al corpo 2 è

$$\vec{F}_{1,2} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

e volendo determinare il vettore forza di attrazione, semplicemente si può scrivere

$$\vec{F}_{1,2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \cdot \hat{r}_{1,2}$$

in cui cambiando il versore  $\hat{r}_{1,2}$  si osserva come tale formula si adatti perfettamente alla terza legge di Newton: infatti il versore cambia segno, ma il modulo della forza rimane lo stesso.

**Osservazione:** Si osservi che, naturalmente, sulla Terra, fissando come origine il centro della Terra:

$$\vec{F}_t = -G \cdot \frac{m_t \cdot m}{r^2} \cdot \hat{r} = - \left( G \cdot \frac{m_t}{R_t^2} \right) \cdot m \cdot \hat{r}$$

in cui, ovviamente

$$g = \left( G \cdot \frac{m_t}{R_t^2} \right)$$

in cui si è fissato come raggio il raggio terrestre, dal momento che la Terra è un corpo sferico e, quindi, tutta la sua massa può essere considerata concentrata nel suo nucleo (un'assunzione che corrisponde alla somma del contributo attrattivo di tutte le infinitesime masse che costituiscono la Terra).

## 5.1 L'esperimento di Cavendish

Per misurare la forza di attrazione gravitazionale, Cavendish ha impiegato un **pendolo a torsione** su cui venivano fissate due masse, in corrispondenza delle loro estremità:

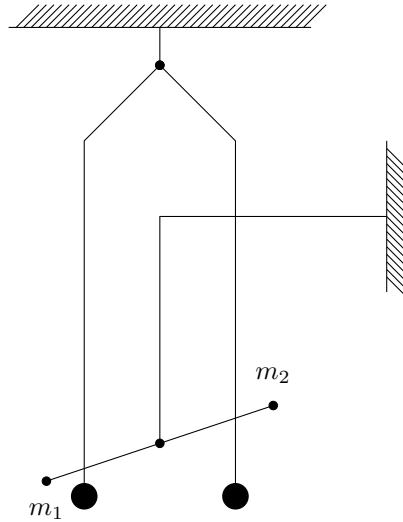


Figura 39: Esperimento di Cavendish

Tali piccole masse oscillavano leggermente, a causa dell'attrazione con masse più consistenti, in un moto continuativo, ma molto lento (in questo caso il periodo si aggirava intorno a 20 minuti); l'esperimento doveva svolgersi esattamente sul piano, in modo tale da essere ortogonale alla forza di gravità della terra e ciò richiedeva molta precisione e condizioni sperimentali costanti (quali temperatura, pressioni, vento, etc.).

Grazie a ciò Cavendish è riuscito a determinare la **densità della terra**, che era ciò che gli interessava maggiormente: sapendo, infatti, la densità e il volume della Terra, si sarebbe stati in grado di conoscerne la massa e, sapendo il valore di  $g$ , si sarebbe, in seguito, stati in grado di isolare la costante gravitazionale  $G$ , che presenta il valore seguente:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{ kg}}$$

A partire da tale risultato è possibile analizzare il moto e le caratteristiche di diversi pianeti.

## 5.2 Campo gravitazionale

A partire dall'equazione seguente

$$\vec{F}_t = -G \cdot \frac{m_t}{R_t^2} \cdot \hat{r} \cdot m$$

si osserva come la forza sia proporzionale alla massa: conoscendo la massa del corpo è possibile conoscere la forza su tale corpo.

Per campo è da intendersi una valutazione della **forza per unità di massa**, come mostrato di seguito:

$$\frac{\vec{F}_t}{m} = -G \cdot \frac{m_t}{R_t^2} \cdot \hat{r} = \vec{g}$$

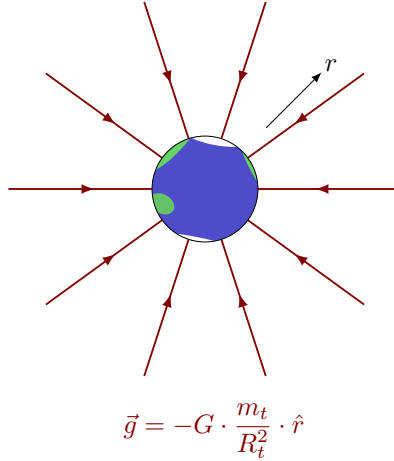


Figura 40: Campo gravitazionale terrestre

che è esattamente lo stesso concetto di di campo elettrico, ovvero la forza per unità di carica (nel caso di un campo gravitazionale, la carica è proprio la massa): sapendo la carica, e qui la massa, è possibile conoscere la forza associata, in quanto è noto il campo, ossia la forza per unità di carica/massa.

**Osservazione:** Si osservi che il **campo gravitazionale è additivo**: infatti, date due masse identiche  $m_1$  e  $m_2$ , poste vicine l'una all'altra, le linee di campo dell'una si fondono con quelle dell'altra, dando vita a delle deformazioni delle linee di campo.

Si osservi che, ovviamente, le linee di campo sono una convenzione grafica atta a rappresentare qualitativamente il fenomeno attrattivo: in ogni punto dello spazio vi sono dei vettori che dovrebbero essere rappresentati integralmente, ma per ovvie ragioni di comprensione, si preferisce la più elegante soluzione delle linee di campo.

Di fatto si ha che il campo gravitazionale risultante è

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

## 5.3 Massa gravitazionale e inerziale

Dalla 2<sup>a</sup> legge della dinamica

$$\vec{F} = m_I \cdot \vec{a}$$

si evince come la massa  $m_I$  sia da considerarsi con l'**inerzia**, ovvero la **resistenza alla variazione di moto** (e quindi di velocità).

Mentre dalla legge di gravitazione universale

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_G}{r^2} \cdot \vec{r}$$

si ha che  $m_G$  è una sorta di “carica gravitazionale”; tuttavia  $m_I$  e  $m_G$  non sono da reputarsi il medesimo concetto dal punto di vista teorico: si consideri, per esempio, il caso di due particelle, una poco massiva, ma molto carica e l'altra più massiva, che presenta una carica elettrica pressoché nulla, tale che la forza che subiscono sia completamente slegata dalla loro massa; in generale, infatti, non vi è correlazione fra le due masse, per cui, nel caso di una caduta libera, si dovrebbe avere che

$$m_I \cdot \vec{a} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_G}{r^2} \cdot \vec{r}$$

in cui, isolando l'accelerazione si ottiene

$$a_y = -G \cdot \frac{m_1}{r^2} \cdot \left( \frac{m_G}{m_I} \right)$$

in cui non è possibile, in linea teoria, confondere  $m_I$  con  $m_G$ . Tuttavia, dal punto di vista sperimentale, sono state eseguite delle misurazioni con un altissimo livello di precisione che hanno confermato come

$$\frac{m_G}{m_I} = 1$$

per cui le due masse sono da reputarsi identiche. Anche nella teoria della relatività generale tale risultato trova significato: in essa, infatti, non si considera un'attrazione gravitazionale, ma solamente una deformazione spazio-temporale, per cui tutto il sistema è non-inerziale.

## 5.4 Corpi estesi

Il campo gravitazionale è una quantità additiva, per cui per conoscere la forza di attrazione di un corpo non puntiforme, è sufficiente scomporlo in punti e sommare il contributo di ciascuno per pervenire al risultato cercato.

In altri termini si ha che

$$\vec{g} = \sum_i \vec{g}_i = \sum_i -G \cdot \frac{m_i}{r_i^2} \cdot \hat{r} = -G \cdot \int \frac{dm}{r^2} \cdot \hat{r}$$

in cui si deve integrare all'infinito il contributo di ciascuna punto.

**Esempio:** Se si considera una **distribuzione con simmetria sferica** (ovvero una sfera in cui la densità non deve necessariamente essere uniforme), allora tutta la massa è da reputarsi concentrata al centro della sfera, in quanto tale interpretazione è perfettamente equivalente alla somma infinita di tutti i contributi.

**Osservazione:** Si osservi che il numero di giri compiuti nell'unità di tempo è, ovviamente, data da

$$\frac{1}{T}$$

Inoltre, si ha che la forza centripeta descrive la natura della forza, non il tipo di forza, per cui la forza centripeta può essere causata da qualsiasi tipo di forza.

Si osservi che un punto materiale si muove con velocità di modulo costante lungo un'ellisse, allora, l'accelerazione punta sempre verso il centro dell'ellisse, in quanto il moto considerato è lo stesso di un moto circolare uniforme, ma visto da un sistema di riferimento a velocità costante (per cui l'accelerazione è nulla).

Naturalmente, i corpi liberi su una vettura in decelerazione cadono in avanti perché mantengono la stessa velocità che avevano prima della decelerazione, mentre la pseudo-forza di Coriolis ha effetto solamente su grandi distanze, come si può evincere dalla seguente formula:

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

ricordando che

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{v}}{R}$$

21 Marzo 2022

La forza di attrazione tra due corpi è direttamente proporzionale alla massa dei due corpi e inversamente proporzionale alla distanza fra i due (e tale concetto si trasla anche alla teoria della carica, per la **Forza di Coulomb**, in cui al posto della massa si deve considerare la carica di una particella e in questo caso la carica può essere positiva o negativa, ottenendo forze attrattive o repulsive). La formula per il calcolo della forza di attrazione gravitazionale presenta un  $-$  in quanto si tratta di una forza attrattiva, ovviamente.

Il **campo gravitazionale** è definita come la forza per unità di massa: è, quindi, una vera e propria forza che si applica indistintamente ad ogni corpo, indipendentemente dalla massa di ogni corpo. La differenza tra massa gravitazionale e massa inerziale è puramente concettuale, anche se nella pratica tali masse coincidono; infine, per quanto concerne i corpi estesi, al fine di considerare la forza attrattiva totale, è sufficiente sommare i contributi di tutte le masse; nel caso di un corpo con simmetria sferica, invece, è sufficiente considerare che la massa sia idealmente concentrata nel centro della sfera stessa, un'agevolazione che permette anche di semplificare i calcoli da svolgere.

## 5.5 Leggi di Keplero

Keplero, impiegando dei dati molto precisi, è riuscito a formulare delle valutazioni estremamente importanti sull'orbita dei pianeti: egli, infatti, ha scoperto che l'orbita dei pianeti è ellittica, in cui il sole si trova in uno dei due fuochi.

Non solo, Keplero, osservando il moto degli astri, è riuscito anche a formulare due leggi che spieghino la cinetica del moto dei pianeti, attraverso calcoli molto complessi e basandosi su risultati sperimentali. Di seguito si espongono le tre fondamentali leggi di Keplero:

### LEGGI DI KEPLERO

Le leggi di Keplero sono:

1. *Tutti i pianeti si muovono lungo orbite ellittiche di cui il sole occupa uno dei fuochi;*
2. *La congiungente di un pianeta con il Sole spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali (ciò significa che i pianeti, quando sono più lontani dal sole, ruotano più lentamente rispetto a quando si trovano nelle sue prossimità);*
3. *Il quadrato del periodo di un qualunque pianeta è proporzionale al cubo della distanza media del pianeta dal Sole.*

La terza legge di Keplero può essere facilmente giustificata alla luce della legge di gravitazione universale di Newton.

Se, infatti, si considera un'orbita circolare (anziché ellittica) è possibile confondere la forza di attrazione gravitazionale  $\vec{F}_a$  con la forza centripeta  $\vec{F}_c$ , per cui si ottiene

$$\vec{F}_c = \vec{F}_a \longrightarrow m_P \cdot \frac{v^2}{d} = G \cdot \frac{m_P \cdot m_S}{d^2}$$

o anche

$$\vec{F}_c = \vec{F}_a \longrightarrow m_P \cdot \omega^2 \cdot d = G \cdot \frac{m_P \cdot m_S}{d^2}$$

in cui, ovviamente,  $m_P$  è la massa del pianeta, mentre  $m_S$  è la massa del sole e  $d$  è la distanza tra il pianeta e il sole. Da questo si ottiene che:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{G \cdot m_S} \cdot d^3$$

Ma siccome  $\omega$  è la velocità angolare, ovvero il rapporto fra un giro completo e il periodo di rotazione, è facile capire che:

$$\frac{T^2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{G \cdot m_S} \cdot d^3$$



Allora isolando il quadrato del periodo si ottiene:

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{G \cdot m_S} \cdot d^3$$

**Esercizio:** Un'orbita geostazionaria è l'orbita di un satellite attorno alla Terra che presenta un periodo di rotazione identico a quello della terra, per cui si mantiene sempre sopra lo stesso punto sopra la terra: secondo la terza di legge di Keplero, esiste una sola altezza tale per cui l'orbita di un satellite possa essere geostazionaria.

Si calcoli, allora, la velocità alla quale deve ruotare un satellite (idealmente sulla superficie della Terra) affinché la sua orbita sia geostazionaria. È facile capire che tale velocità si calcola come segue

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{(2\pi)^2}{g \cdot r^2} \cdot r^3}} = r \cdot \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{g \cdot r}$$

ricordando che

$$g = \frac{G \cdot m_t}{R_t^2} \longrightarrow G \cdot m_t = g \cdot R_t^2$$

Ecco che allora la velocità cercata è

$$v = \sqrt{g \cdot r}$$

Si possono, naturalmente, anche considerare le due uguaglianze seguenti:

$$\frac{v^2}{R_t} = g \quad \text{e} \quad \omega^2 \cdot R_t = g$$

Ovviamente, per determinare il periodo di rotazione di un satellite attorno alla terra è sufficiente impiegare la terza legge di Keplero, per cui

$$T = \sqrt{\frac{(2\pi)^2}{g} \cdot d}$$

**Osservazione:** Si osservi che il periodo dell'orbita per diversi pianeti risulta essere molto simile; in particolare è noto che, per un qualsiasi pianeta, dalla terza legge di Keplero si ottiene che

$$d^3 = \frac{G \cdot m_S}{(2\pi)^2} \cdot T^2$$

ma più in generale, per un qualsiasi pianeta si ottiene che

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R_P^3}{G \cdot m_P}}$$

in cui, sotto la radice, compare il rapporto

$$\frac{R_P^3}{m_P}$$

che è esattamente il reciproco della densità del pianeta, essendo il volume di una sfera

$$V_S = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

da cui si evince che

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{1}{\rho}}$$

in cui, naturalmente

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Pertanto si ottiene che tutti i pianeti che sono stati considerati presentano lo stesso periodo di orbita in quanto hanno tutti la **stessa densità** (in quanto formati da ghiaccio, rocce, acqua, etc.).

**Osservazione:** Se fosse possibile tagliare la terra in due parti uguali e si lasciasse cadere una massa in tale foro, allora la massa accelererebbe fino a raggiungere il centro della terra, dove la forza di attrazione si annullerebbe; pertanto, la massa continuerebbe a scendere venendo progressivamente decelerata fino a raggiungere velocità nulla al culmine della sua corsa dall'altra parte del pianeta, venendo nuovamente attratta al centro e così via, fino a quando non si viene a creare un moto oscillatorio di periodo esattamente pari al periodo di orbita attorno alla Terra.

**Esercizio:** Si consideri una macchina che cerca di accelerare su diverse superfici e avente diverse configurazioni di trazione.

Allora se il coefficiente di attrito statico è  $\mu_s = 1.0$  e la macchina presenta solo due ruote trainanti, l'accelerazione della vettura deve essere

$$a \leq \frac{\mu_s}{2} \cdot g = 4.9 \text{ m/s}^2$$

e così via, variando il coefficiente di attrito statico e la distribuzione del peso.

**Esercizio:** Si consideri un'ascensore sospeso da un cavo, avente massa  $1.7 \times 10^3 \text{ kg}$ .

Allora, richiamando la seconda legge della dinamica, si può scrivere:

$$\vec{F}_T + F_t = m \cdot \vec{a}$$

e sostituendo a tali vettori i moduli, si ottiene

$$F_T = m \cdot (a + g)$$

Taluna è la formula che si può adattare a qualsiasi scenario al fine di calcolare la forza di tensione sul cavo: se esso si muove di moto rettilineo uniforme, se accelera o decelera.

22 Marzo 2022

## 6 Energia

L'energia è la grandezza fisica che misura la capacità di un corpo o di un sistema fisico di compiere lavoro, a prescindere dal fatto che tale lavoro sia o possa essere effettivamente svolto.

Di seguito si espongono diverse forme di energia e ne viene analizzata nel dettaglio il significato fisico.

### 6.1 Energia cinetica

L'**energia cinetica** (originariamente chiamata *vis viva*) venne teorizzata da Leibniz e da Decartes: il primo asseriva che l'energia cinetica era direttamente proporzionale alla massa e al quadrato della velocità (ovvero  $mv^2$ ), mentre il secondo considerava soltanto la massa e la velocità e non il suo quadrato (ovvero  $mv$ , che prende il nome di *quantità di moto*).

Grazie a Thomas Young, il concetto fisico teorizzato da Leibniz prese il nome di **energia** ed infine Gustave Gasparre Coriolis gli attribuì il nome di **energia cinetica**, definita come segue:

#### ENERGIA CINETICA

L'**energia cinetica** viene calcolata come segue:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

per quanto riguarda un solo punto materiale di massa  $m$ . Se, invece, si considera un agglomerato di punti materiali, allora, essendo l'**energia additiva**, si ottiene

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \cdot v_i^2$$

Naturalmente, l'energia cinetica è uno scalare (non può avere una direzione), in cui  $v^2 = |\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ .

**Esempio:** Si consideri una macchina di massa  $m = 1000$  kg e avente una velocità di  $v_1 = 50$  km/h. Allora l'energia cinetica si calcola come segue:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \left(\frac{50}{3.6} \text{ m/s}\right)^2 = 96.5 \text{ kJ}$$

in cui

$$1 \text{ J} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

Mentre se la velocità della vettura è  $v_2 = 60$  km/h allora l'energia cinetica della macchina diventa:

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \left(\frac{60}{3.6} \text{ m/s}\right)^2 = 139 \text{ kJ}$$

che significa che l'aumento di velocità di soli 10 km/h comporta un aumento del 50% dell'energia e, quindi, della dissipazione di energia in calore in caso di frenata (aumento dello spazio di frenata).

## 6.2 Lavoro

Di seguito si espone la definizione di **lavoro**, basandosi sulla Figura 41:

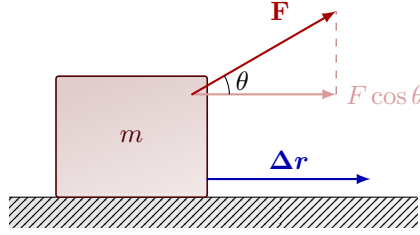


Figura 41: Lavoro compiuto da una forza non parallela allo spostamento

### LAVORO

Quando una forza  $\vec{F}$  viene applicata su un corpo e produce uno spostamento  $\Delta\vec{r}$ , allora si ha che la forza ha compiuto un lavoro, calcolato come

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \cdot \cos(\theta)$$

che significa che

- Se  $\vec{F}$  è parallelo a  $\Delta\vec{r}$ , allora il lavoro è massimo.
- Se  $\vec{F}$  è perpendicolare a  $\Delta\vec{r}$ , allora il lavoro è nullo (come nel moto circolare uniforme).
- Se  $\vec{F}$  presenta verso opposto rispetto a  $\Delta\vec{r}$ , allora il lavoro è negativo (si ha sottrazione di energia al sistema, come per l'attrito).

Naturalmente, nel caso in cui vi siano più forze agenti sul sistema, ciascuna delle quali produce uno spostamento, si ottiene che

$$W_{tot} = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2 + \dots = \sum_i F_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

Infine, se il corpo non ruota e non si deforma, tutti gli spostamenti sono uguali, ovvero  $\Delta\vec{r}_1 = \Delta\vec{r}_2 = \dots = \Delta\vec{r}_n$ , e quindi il lavoro totale sarà dato solo dal prodotto scalare tra la somma delle forze e il singolo spostamento:

$$W_{tot} = \sum_i F_i \cdot \Delta\vec{r}$$

**Osservazione:** Si osservi che un astronauta in orbita attorno alla terra **ha peso**, in quanto è grazie a tale forza che riesce a mantenere la propria orbita, altrimenti continuerebbe il proprio moto in linea retta.

È facile, inoltre, determinare il raggio di orbita geostazionaria (partendo dal centro della Terra), calcolabile come:

$$d = \frac{T^2 \cdot g \cdot R_t^2}{(2\pi)^2} = 42221 \text{ km}$$

## 6.3 Teorema lavoro-energia cinetica

Si osservi che dalla cinetica, per quanto riguarda il moto uniformemente accelerato, è nota la formula seguente:

$$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot (x - x_0)$$

Ma se ambo i membri si moltiplicano per  $\frac{1}{2}m$  si ottiene

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = ma \cdot (x - x_0)$$

che corrisponde a

$$K - K_0 = F \cdot (x - x_0) \longrightarrow \Delta K = F \cdot \Delta x \longrightarrow \Delta K = W$$

ovvero si è ottenuto il **lavoro compiuto sul sistema da una forza esterna (trasferimento di energia verso (o da) il sistema)**. In altre parole, quando una forza viene applicata su un sistema, si assiste ad un trasferimento di energia (come quando una forza applicata ad un corpo ne aumenta la velocità, la forza ha compiuto un lavoro sul sistema che si è tramutato in aumento di energia cinetica).

Più in generale, è possibile affermare dalla seconda legge della dinamica applicata ad un punto materiale di massa  $m$  che

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

considerando, ora, uno **spostamento infinitesimale**  $d\vec{r}$  (che è da interpretarsi come  $\Delta\vec{r} \rightarrow 0$ ), si può calcolare il **lavoro infinitesimale** compiuto dalla forza sul punto materiale per determinare tale spostamento:

$$dW = \left( \sum \vec{F} \right) \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r}$$

ma dalla cinetica è anche noto che

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \longrightarrow d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$$

che significa che in intervallo di tempo infinitesimale  $dt$ , un punto materiale alla velocità  $\vec{v}$  compie uno spostamento infinitesimale  $d\vec{r}$ . Alla luce di tale evidenza, la formula ottenuta precedentemente diviene:

$$m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot \vec{v}dt$$

Ma calcolando la derivata della velocità al quadrato si ottiene

$$\frac{d}{dt} \vec{v}^2 = \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{a} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{a} = 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{v}$$

Alla luce di tale risultato si può quindi scrivere

$$m\vec{a} \cdot \vec{v}dt = \frac{1}{2}m \cdot \frac{d}{dt}(\vec{v})^2$$

ovvero

$$dW = \frac{1}{2}m \cdot \frac{d}{dt}(\vec{v})^2$$

Avendo ottenuto la formula per il calcolo del lavoro infinitesimale  $dW$ , è possibile eseguire una somma infinita di tali contributi per determinare il lavoro compiuto per effettuare uno spostamento maggiore, come mostrato di seguito:

$$W_{tot} = \int_i^f dW = \int_{t_i}^{t_f} \left( \sum \vec{F} \right) \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}m \cdot \frac{d}{dt}(\vec{v})^2 \cdot dt = \frac{1}{2}m \cdot (v_f^2 - v_i^2)$$

per cui la formula finale ottenuta è proprio quanto ci si aspettava:

$$W_{tot} = \frac{1}{2}m \cdot (v_f^2 - v_i^2)$$

**Osservazione:** Il **teorema lavoro-energia cinetica** è una **conseguenza diretta** della seconda legge di Newton

$$F = m\vec{a}$$

e si applica ai punti materiali (ma non ad un sistema più complesso).

Si osservi che tale risultato non è equivalente al teorema di **conservazione dell'energia**, anche

se fornisce risultati uguali in importanti casi.

È significativo osservare che il lavoro totale  $W_{tot}$  così calcolato non corrisponde al “lavoro” in senso termodinamico. In questo caso si ha che

$$W_{tot} = \Delta K$$

da cui si può capire come il lavoro di una **forza costante** si possa calcolare come segue:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_f - \vec{r}_i) = \vec{F} \cdot \vec{l}$$

in cui  $\vec{l}$  indica lo **spostamento totale**, il quale non dipende assolutamente dal percorso compiuto.

**Esercizio:** Si consideri una vettura di massa  $m = 1000$  kg che viaggia ad una velocità  $v_0 = 50$  km/h. Si calcoli la distanza di arresto, considerando che la frenatura è resa possibile dalla forza di attrito cinetico  $\vec{F}_k$ .

Naturalmente è ovvio che  $F_N = F_t = mg$ , mentre  $F_k = \mu_k F_N = \mu_k mg$ . Allora il lavoro compiuto dalla forza di attrito è

$$W = \int_i^f \vec{F}_k \cdot d\vec{r}$$

ed essendo la forza di attrito di verso opposto al moto, il lavoro  $W$  avrà segno negativo.

Pertanto si ottiene

$$W = \int_i^f \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = \int_0^d -F_k \cdot dx = -F_k \cdot d = -\mu_k mgd$$

E richiamando il teorema lavoro-energia cinetica, si ottiene che

$$W = \Delta K \longrightarrow -\mu_k mgd = K_f - K_i = -\frac{1}{2}mv_i^2 \longrightarrow d = \frac{v_i^2}{2\mu_k g}$$

e com'era da aspettarsi, lo spazio di frenata aumenta con il quadrato della velocità.

**Esercizio:** Si consideri un proiettile che viene sparato in aria, in direzione verticale, con velocità  $\vec{v}_i$  sufficiente per raggiungere l'altezza di  $h$  in cui l'accelerazione gravitazionale non può essere considerata costante.

Naturalmente, dalla legge di gravitazione universale si ottiene che

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m_t \cdot m}{(R_t + h)^2} \cdot \hat{j}$$

Allora per il calcolo del lavoro si può procedere come segue:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int -G \cdot \frac{m_t \cdot m}{(R_t + h)^2} \cdot dh$$

Naturalmente, in questo caso, la forza non è costante, per cui bisogna calcolare l'integrale, posto  $h' = R_t + h$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int -G \cdot \frac{m_t \cdot m}{(R_t + h)^2} \cdot dh = \int_{R_t}^{R_t+h} -\frac{Gm_t m}{h'^2} \cdot dh' = Gm_t m \cdot \left( \frac{1}{R_t + h} - \frac{1}{R_t} \right)$$

in cui si ottiene che

$$\Delta K = W_{tot} \longrightarrow 0 - \frac{1}{2}m \cdot v_i^2 = Gm_t m \cdot \left( \frac{1}{R_t + h} - \frac{1}{R_t} \right)$$

in cui, isolando  $h$  si ottiene

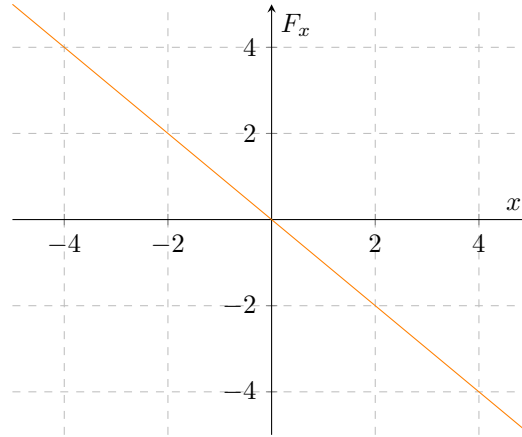
$$h = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_t^2 \cdot v_i^2}{Gm_t} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R_t \cdot v_i^2}{Gm_t} \right)^{-1} \longrightarrow h = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_i^2}{g} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_i^2}{gR_t} \right)^{-1}$$

in cui appare evidente come l'altezza dipenda dal quadrato della velocità; inoltre se il secondo termine si annulla, con una velocità sufficiente, essendo valutato il reciproco, l'altezza diviene idealmente infinita e quindi il proiettile esce dall'orbita terrestre.

23 Marzo 2022

### 6.4 Lavoro compiuto da una forza variabile

Il lavoro compiuto da una forza variabile si ha quando la forza non è costante, ma dipende dalla distanza: in altre parole, sussiste una **relazione lineare tra forza e distanza**:



Per cui si perviene al risultato seguente:

$$F_x = -kx$$

la quale prende il nome di **legge di Hooke**, in cui  $k$  è la costante di proporzionalità. Tipicamente, tale legge viene impiegata per descrivere la **forza di una molla**: quando lo spostamento è positivo, la forza è negativa (si chiama, infatti, **forza di richiamo**), e viceversa.

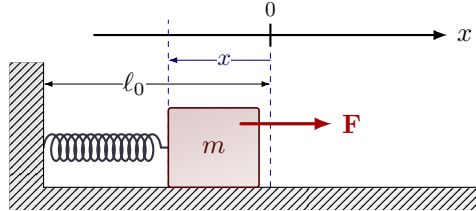


Figura 42: Fisica di una molla

Volendo calcolare il lavoro compiuto da tale forza, è sufficiente considerare l'integrale della forza risultante moltiplicata per lo spostamento, come mostrato di seguito:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} -kx \cdot dx = -\frac{1}{2}k \cdot (x_f^2 - x_i^2)$$

che costituisce un lavoro che è **indipendente dal percorso compiuto**, ma dipende solamente dalla posizione iniziale e finale.

**Esempio 1:** Si consideri un blocco sospeso da una molla, in cui la costante di elasticità della molla è  $k$ , mentre il blocco è immobile:

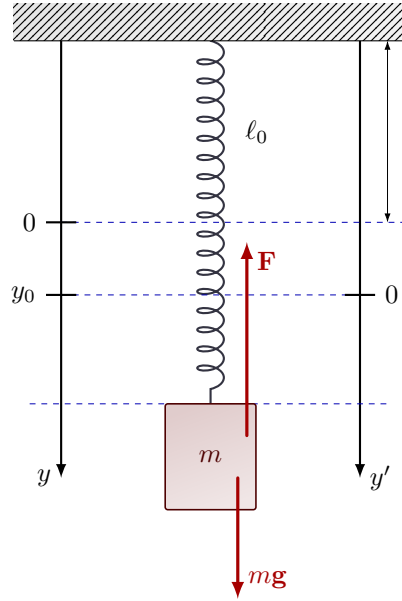


Figura 43: Fisica di una molla verticale

Naturalmente, le due forze che agiscono su tale massa sono la forza peso  $\vec{F}_t$  e la forza di richiamo della molla  $\vec{F}_m$ . Inoltre, essendo il blocco immobile ( $\vec{a} = 0$ ), deve essere che

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0$$

Applicando la seconda legge della dinamica, quindi, si ottiene che

$$k \cdot \Delta y = mg \rightarrow \Delta y = \frac{mg}{k}$$

**Esempio 2:** Si consideri un carrello che si muove di velocità  $\vec{v}_i$  e che deve arrestare la sua corsa per mezzo di una molla posta orizzontalmente al moto:

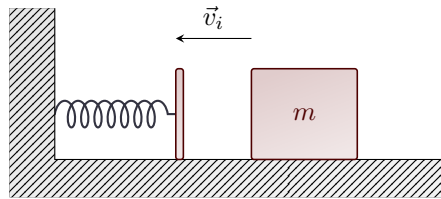


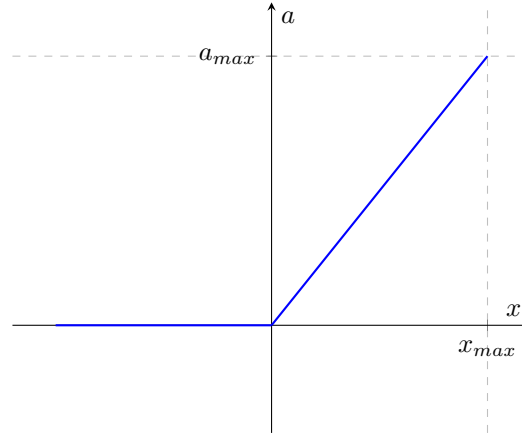
Figura 44: Arresto di un carrello tramite freno a molla

Si determini, allora, la costante di elasticità della molla  $k$  affinché il modulo dell'accelerazione sia al massimo  $a_{max} = 5g$ .

Naturalmente, se tale costante è troppo elevata, la molla si comporterà come un muro, mentre se è troppo bassa non sarà sufficiente a rallentare in tempo la corsa del mezzo.

Sa la molla è troppo dura, la decelerazione sarà molto forte e rapida, mentre se è troppo morbida, la sua decelerazione non sarà sufficiente ad evitare l'impatto; è chiaro che l'accelerazione sarà massima nel punto di massima compressione, mentre sarà nulla prima del punto di contatto e crescerà in modo lineare secondo la legge di Hooke:





Dalla seconda legge della dinamica si ottiene che

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

per cui considerando solamente la componente orizzontale, si ottiene

$$F_x = ma_x \longrightarrow -kx = ma_x \longrightarrow a_x = -\frac{k}{m}x$$

Applicando, ora, il teorema lavoro-energia cinetica si ottiene che

$$W = \Delta K$$

in cui è noto che  $\vec{v}_i = \vec{v}_i$  mentre  $x_i = 0$ , e  $\vec{v}_f = 0$ , mentre  $x_f = x_{max}$  da cui:

$$W = -\frac{1}{2}k \cdot (x_f^2 - x_i^2) = -\frac{1}{2}k \cdot x_{max}^2$$

invece si ottiene che

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Applicando infine il teorema lavoro-energia cinetica si ottiene che

$$-\frac{1}{2}k \cdot x_{max}^2 = -\frac{1}{2}mv_i^2 \longrightarrow x_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot v_i$$

Ecco che avendo isolato  $x_{max}$  si può scrivere che

$$a_{max} = \left| \frac{k}{m}x_{max} \right| \longrightarrow a_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot v_i$$

Ma sapendo che  $a_{max} = 5g$ , si può facilmente isolare  $k$ , ottenendo:

$$k \leq \frac{a_{max}^2}{v_i^2} \cdot m = \frac{25g^2}{v_i^2} \cdot m$$

## 6.5 Lavoro compiuto dalla forza di gravità

Naturalmente la forza di gravità è una forza costante, per cui il lavoro che essa compie dipende unicamente dalla posizione iniziale e finale scelta.

Allora, applicando la formula per il calcolo del lavoro compiuto da una forza costante si ottiene

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg \cdot (y_f - y_i)$$

pertanto il lavoro compiuto dalla forza di gravità è

$$\boxed{W = -mg \cdot (y_f - y_i)}$$

**Esempio:** Si consideri una massa  $m$  che viene lasciata scivolare (senza attrito) su una discesa, partendo con velocità iniziale  $\vec{v}_i = 0$  e giungendo alla base di tale discesa con velocità finale  $\vec{v}_f$ . Si calcoli, allora, la velocità finale della massa.

Naturalmente, applicando il teorema lavoro-energia cinetica si ottiene che

$$W = \Delta K \longrightarrow -mg \cdot (y_f - y_i) = \frac{1}{2}m \cdot v_f^2 \longrightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Ecco allora che la velocità finale di un corpo che viene lasciato cadere da una altezza  $h$ , in assenza di attriti è

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

**Osservazione:** Si osservi che il lavoro compiuto da una forza può essere sia positivo o negativo (se la forza è diretta nello stesso verso dello spostamento, oppure no).

Una forza che non compie mai lavoro è il campo magnetico (in quanto nell'equazione di Lorents, la forza è ortogonale alla velocità, e quindi al vettore spostamento): ciò significa che il campo magnetico non può mai accelerare delle particelle; per farlo è necessario impiegare un campo elettrico.

Ovviamente il lavoro è l'integrale della forza per lo spostamento, per cui rappresenta l'area della parte di piano sottesa al grafico della forza in funzione dello spostamento.

## 6.6 Forze conservative

Di seguito si espone la definizione di **forza conservativa**:

### FORZA CONSERVATIVA

Una forza  $\vec{F}$  si definisce **conservativa** se

$$\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

è **indipendente dal percorso**. Analogamente si ha che il lavoro compiuto da una forza  $\vec{F}$  conservativa su un **percorso chiuso è nullo**

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

che corrisponde a dire che

$$\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

In altri termini, si potrebbe dire che una forza è definita conservativa se esiste una funzione  $\mathcal{U}$  tale che

$$\vec{F} = \nabla \mathcal{U}$$

Ove per  $\nabla \mathcal{U}$  è da intendersi il **gradiente** di  $\mathcal{U}$ , ossia la derivata coalcolata in tutte le direzioni:

$$\nabla \mathcal{U} = \frac{d\mathcal{U}}{dx} \cdot \hat{i} + \frac{d\mathcal{U}}{dy} \cdot \hat{j} + \frac{d\mathcal{U}}{dz} \cdot \hat{k}$$

**Osservazione:** Si osservi che la funzione  $\mathcal{U}$  impiegata nella definizione prende il nome di **energia potenziale**.

**Esempio:** Si osservi che un esempio molto semplice di **forza non-conservativa** è l'attrito, in quanto il lavoro compiuto da tale forza dipende necessariamente dal percorso, essendo la forza

d'attrito sempre opposta allo spostamento. Pertanto si ottiene che:

$$W_k = \int_i^f \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = \int_i^f -\mu_k mg \cdot d\vec{r} = -\mu_k mg \cdot s$$

in cui  $s$  è la lunghezza del percorso.

**Osservazione:** Si osservi che Richard Feynman, parlando di fisica fondamentale delle particelle, ha affermato che:

*“Abbiamo speso un tempo considerevole per discutere le forze conservative; che cosa diremo delle forze non conservative? Approfondiremo l'argomento più di quanto non si faccia solitamente, e stabiliremo che non esistono forze non conservative! In realtà, tutte le forze fondamentali nella natura appaiono conservative. Questa non è una conseguenza delle leggi di Newton. Infatti, per quanto ne sapeva Newton, le forze avrebbero potuto essere non conservative, come apparentemente è l'attrito. Quando diciamo che l'attrito apparentemente lo è, usiamo un punto di vista moderno, essendo stato scoperto che tutte le forze elementari, le forze fra le particelle a livello fondamentale, sono conservative.”*

Richard Feynman

Per cui le forze microscopiche sono conservative, ma quando si considera un assieme, la seconda legge della termodinamica stabilirà che deve esserci calore dissipato: pertanto, anche se tutti i meccanismi fondamentali sono conservativi, vi deve essere un aumento di **entropia**. Si conclude, quindi, che il problema delle forze dissipative (e quindi non conservative), come l'attrito, è un problema prettamente termodinamico.

24 Marzo 2022

Il lavoro viene definito come l'integrale del prodotto tra la forza applicata e lo spostamento ottenuto: naturalmente il lavoro può essere positivo o negativo e può essere eseguito da qualsiasi forza.

Le forze conservative sono forze per le quali il lavoro non dipende dal percorso e, quindi, è possibile applicare il principio di conservazione dell'energia (in altre parole, le forze conservative sono forze capaci di immagazzinare dell'energia potenziale, potenziale per svolgere un lavoro). Esempi di forze conservative sono:

- Gravità;
- Forza elastica (non sempre);
- Forza elettrica;
- etc.

Mentre forze non conservative (e quindi dissipative) sono:

- Attrito;
- Resistenza dell'aria;
- Forza compiuta da una persona;
- etc.

## 6.7 Energia potenziale

Di seguito si espone la definizione di **energia potenziale**:

### ENERGIA POTENZIALE

Data una forza conservativa  $\vec{F}$ , è noto che il lavoro compiuto da tale forza è

$$W_{i,f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

il quale, essendo  $\vec{F}$  conservativa, dipende solamente dai vettori posizione iniziale  $\vec{r}_i$  e finale  $\vec{r}_f$ . Naturalmente, però, essendo  $\vec{F}$  conservativa, essa può essere definita come il gradiente di una funzione  $\mathcal{U}$ , ovvero  $\vec{F} = \nabla \mathcal{U}$ , per cui eseguendo l'integrale indefinito di  $\vec{F}$ , si ottiene solamente l'energia potenziale  $\mathcal{U}$ , che deve essere valutata da una posizione finale ad una iniziale, come mostrato di seguito:

$$W_{i,f} = (-\mathcal{U}(\vec{r}_f)) - (-\mathcal{U}(\vec{r}_i))$$

In altre parole si ha che

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} + c$$

in cui  $c$  = costante. Da ciò segue che

$$W_{i,f} = -\Delta \mathcal{U}_{i,f}$$

per cui il lavoro compiuto da  $i$  a  $f$  è uguale all'opposto della differenza di energia potenziale.

**Osservazione:** Si osservi che ogni qualvolta vi è una forza conservativa vi è energia potenziale. L'energia potenziale, più in generale, può essere interpretata come un modo di immagazzinare energia per essere successivamente impiegata per compiere un lavoro (si parla di “potenziale di compiere un lavoro”).

### 6.7.1 Energia potenziale gravitazionale

Per quanto concerne la forza di gravità, è noto che  $\vec{F}_t = -mg \cdot \hat{j}$  e  $d\vec{r} = dy \cdot \hat{j}$ , per cui l'energia potenziale gravitazionale diviene

$$\mathcal{U}(y) = - \int (-mg \cdot dy) = mg \cdot y + c$$

Per cui l'energia potenziale gravitazionale si calcola come segue:

$$\boxed{\mathcal{U}(h) = mgh}$$

### 6.7.2 Energia potenziale elastica

Per quanto concerne la forza elastica, è noto che  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -kx \cdot dx$ , da cui:

$$\mathcal{U}(x) = - \int -kx \cdot dx = \frac{1}{2}k \cdot x^2 + c$$

Per cui l'energia potenziale elastica si calcola come segue:

$$\boxed{\mathcal{U}(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$

**Esempio:** Si consideri il pompaggio idroelettrico che prevede un bacino idrico in rilievo con  $h = 1050$  m, avente una capacità di  $V = 9000000$  m<sup>3</sup>. Allora per conoscere l'energia potenziale è sufficiente impiegare la formula precedente:

$$\mathcal{U} = mgh = V\rho gh = 90TJ$$

## 6.8 Potenza

Di seguito si espone la definizione di **potenza**:

### POTENZA

La **potenza** viene definita come

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

ovverosia la quantità di energia trasferita per unità di tempo. L'unità di misura è, naturalmente, il **Watt**, per cui

$$\boxed{1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}}}$$

mentre per l'unità di energia 1 kWh è da considerarsi

$$\boxed{1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \text{ MJ}}$$

**Esempio:** Se si considera un lavoro di 90 TJ, allora tale lavoro corrisponde ad una potenza di 25 GWh. Se si considera il flusso massimo di una turbina pari a 130 m<sup>3</sup>/s, allora la potenza massima diviene:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{d}{dt}(mgh) = \frac{dm}{dt}gh = \rho \cdot \frac{dV}{dt}gh = 1.4 \text{ MW}$$

**Esercizio:** Si consideri una macchina di 10<sup>3</sup> kg che necessita una potenza di 16 hp per andare ad una velocità costante di 80 km/h. Si determini, allora, la potenza necessaria per salire una pendenza di 10°.

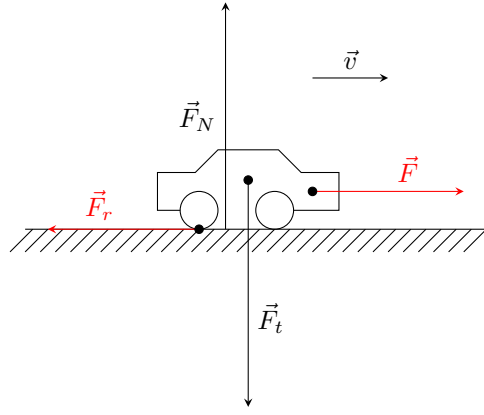


Figura 45: Vettura a velocità costante su una strada orizzontale

Naturalmente le forze in gioco sono la forza di gravità, la forza normale, la forza di attrito e la forza di trazione:

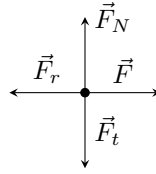


Figura 46: Diagramma a corpo libero di una vettura a velocità costante su una strada orizzontale

Giacché la velocità è costante, l'accelerazione della vettura è nulla, per cui

$$\sum \vec{F} = 0$$

Da ciò si evince la forza di trazione  $\vec{F}$  e la forza di resistenza  $\vec{F}_r$  sono uguali ed opposte, per cui:

$$\vec{F} = \vec{F}_r$$

Applicando il teorema lavoro-energia cinetica, si ha che

$$W_{tot} = \Delta K = 0$$

in cui è da considerare  $W_{tot} = W_m + W_r$ , i quali sono uguali e opposti. Ovviamente si ha che

$$W_m = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{e} \quad W_r = \int \vec{F}_r \cdot d\vec{r}$$

e sono entrambi uguali a  $W = F \cdot d$ . Naturalmente, in questo caso, si ottiene che la potenza cercata è proprio:

$$P = \frac{d}{dt} W_m = \frac{d}{dt} F \cdot d = F \cdot v$$

che è un risultato fondamentale:

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Dai dati del problema si ha che tale potenza, ovvero  $P = F \cdot v = 16$  hp.

Se la macchina deve affrontare una salita di  $10^\circ$ , allora la forza peso deve essere scomposta nelle sue due componenti, e non viene cancellata totalmente dalla forza normale; tuttavia, si ha sempre che:

$$\sum \vec{F} = 0 = \vec{F}_r + \vec{F}_N + \vec{F}_t + \vec{F}$$

Ruotando il sistema di  $10^\circ$  si ottiene che, scomponendo l'equazione nelle sue due componenti:

$$\hat{j} : F_N - F_t \cdot \cos(\theta) = 0$$

$$\hat{i} : F - F_r - F_t \cdot \sin(\theta) = 0$$

Volendo cercare la potenza della macchina necessaria per affrontare la salita, si deve procedere al calcolo seguente:

$$P = F \cdot v = (F_r + F_t \cdot \sin(\theta)) \cdot v$$

Ma volendo calcolare  $F_r \cdot v$ , si può impiegare il risultato precedente, sapendo che  $F_r \cdot v = 16$  hp. Da ciò si evince che:

$$P = F_r \cdot v + mg \cdot \sin(\theta) \cdot v = 16 \text{ hp} + \frac{37.8 \text{ kW}}{743 \text{ W/hp}} = 67 \text{ hp}$$

In cui, ovviamente,  $mg \cdot \sin(\theta) \cdot v$  è il tasso di cambio della propria velocità in energia potenziale.

**Esercizio:** Si calcoli la velocità di un motorino elettrico avente una potenza di 3000 W in salita avente una pendenza del  $10^\circ$ , in cui la massa complessiva del sistema è di 200 kg (trascurando la resistenza dell'aria).

Naturalmente, giacché  $v$  è costante, significa che non vi è accelerazione ( $\vec{a} = 0$ ). Da ciò si ha che la forza di trazione del motorino è  $F = mg \cdot \sin(\theta)$ , mentre la potenza cercata è

$$P = mg \cdot \sin(\theta) \cdot v = F \cdot v = \frac{d}{dt} (\mathcal{U}(y)) = mg \cdot \frac{dy}{dt}$$

Da cui si evince che la velocità del sistema cercata è proprio data dal rapporto seguente:

$$v = \frac{P}{mg \cdot \sin(\theta)} = 55 \text{ km/h}$$

28 Marzo 2022

**Esercizio:** Si consideri una massa  $m = 500$  g che viene lasciata cadere da un'altezza  $h = 60$  cm su un ripiano collegato ad una molla di costante elastica  $k = 120$  N/m.

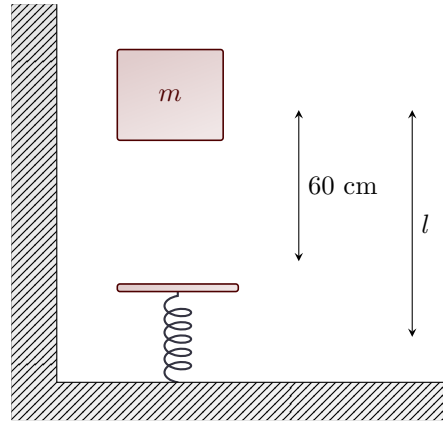


Figura 47: Massa lasciata cadere su una molla

Si determini, allora, la lunghezza  $l$  di compressione massima della molla fino a quando l'insieme blocco-piattaforma si ferma.

Al fine di risolvere tale problema è utile richiamare il teorema lavoro-energia cinetica: naturalmente si ha che il lavoro totale compiuto sul sistema è pari alla variazione di energia cinetica:

$$W_{tot} = \Delta K = \frac{1}{2}m \cdot (v_f^2 - v_i^2)$$

ma essendo la velocità iniziale e finale del blocco nulle, si deduce che il lavoro totale compiuto sul sistema è nullo. Le uniche forze che compiono lavoro, in questo caso ipotetico, sono la forza di gravità e la forza elastica di richiamo della molla; ciò significa che il lavoro compiuto da ambedue le forze è uguale, ma opposto, da cui:

$$w_{tot} = 0 = W_g + W_m = mgl - \frac{1}{2}k \cdot (l - d)^2$$

Da ciò si evince che:

$$-\frac{1}{2}kl^2 + (kd + mg) \cdot l - \frac{1}{2}kd^2 = 0$$

e volendo isolare  $l^2$  si ottiene:

$$l^2 - 2 \cdot \left( \frac{mg}{k} + d \right) \cdot l + d^2 = 0$$

Naturalmente tale equazione presenterà due soluzioni, ma in questo caso si deve chiedere che  $l > d$ , per cui:

$$l_{1,2} = \frac{\frac{mg}{k} + l \pm \sqrt{4 \cdot \left( \frac{mg}{k} + d \right)^2 - 4d^2}}{2}$$

ma l'unica soluzione che ha significato è

$$l = \frac{mg}{k} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2kd}{mg}} \right) + d = 86.6 \text{ cm}$$

**Osservazione:** Si osservi che l'altra soluzione dell'equazione corrisponde non al caso in cui la molla è compressa, ma quando la molla è stesa.



## 6.9 Conservazione dell'energia

L'energia può essere interpretata come un fluido, la quale si trasforma in una forma o in un'altra, ma conservando sempre la propria quantità. Tale concetto viene condensato dal **teorema di conservazione dell'energia** esposto di seguito:

### CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Quando si impiega il teorema di conservazione dell'energia, è sempre fondamentale specificare il **sistema** su cui si sta lavorando, distinguendolo con l'**ambiente esterno**: tra il sistema e l'ambiente può esserci scambio (o trasferimento) di energia (in ambo le direzioni) oppure no; nel secondo caso si può applicare il **teorema di conservazione dell'energia** sul sistema considerato:

$$E_{\text{sistema}} = K + \mathcal{U} + U$$

in cui  $K$  è l'**energia cinetica**,  $\mathcal{U}$  è l'**energia potenziale**, mentre  $U$  prende il nome di **energia interna**. Tuttavia, in **meccanica**, si ignora totalmente l'energia del sistema, e si preferisce considerare solamente l'**energia meccanica**  $E_m = K + \mathcal{U}$ .

Se si ha conservazione dell'energia meccanica, si ottiene che

$$\Delta E_{\text{sistema}} = 0 = \sum \text{trasferimenti} = \text{lavoro} + \text{calore}$$

per cui su un sistema chiuso è possibile modificare l'energia del sistema compiendo lavoro su di esso, oppure tramite scambi di calore. Esempi di sistema possono essere costituiti da

- un corpo solo;
- due (o più corpi) che interagiscono;
- un corpo deformabile;
- una regione dello spazio (in questo caso si può avere non solo scambi d'energia, ma anche di materia);
- etc.

in cui tali sistemi possono essere **aperti** (per cui si ha scambio sia di energia che di materia), **chiusi** (in cui si ha scambio solamente di energia) o **isolati** (in cui non si ha nè scambio di energia nè di materia).

Più limitatamente all'energia meccanica, il teorema di conservazione dell'energia meccanica afferma che

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \Delta K + \Delta \mathcal{U} = W_{\text{sistema}}$$

ove  $W_{\text{sistema}}$  è da intendersi il lavoro totale compiuto sul sistema.

**Esempio:** Nel caso precedente, in cui si considerava una massa che cadeva sulla molla, si può considerare come sistema l'assieme blocco-molla-terra, in cui si assiste alla conservazione dell'energia meccanica, in quanto non c'è lavoro compiuto sul sistema dall'esterno: pertanto si assiste solamente alla trasformazione di energia potenziale gravitazionale in energia cinetica e, successivamente, in energia potenziale elastica.

**Osservazione:** Si osservi che l'energia cinetica non può mai essere negativa, mentre l'energia potenziale è totalmente arbitraria: ciò che è fondamentale da valutare è la variazione di energia potenziale.

Inoltre, l'energia totale di un sistema può cambiare se una forza esterna compie lavoro sul sistema: il lavoro totale compiuto sul sistema è uguale alla variazione in energia totale del sistema.

**Esercizio:** Se si considera una biglia poggiata su una molla in compressione: nello stadio iniziale vi sarà solamente energia potenziale elastica, che poi si tramuterà in energia cinetica ed energia potenziale gravitazionale, fino a quando la biglia raggiungerà il suo punto di massima altezza, in cui la totalità dell'energia del sistema è data soltanto dalla componente potenziale gravitazionale.

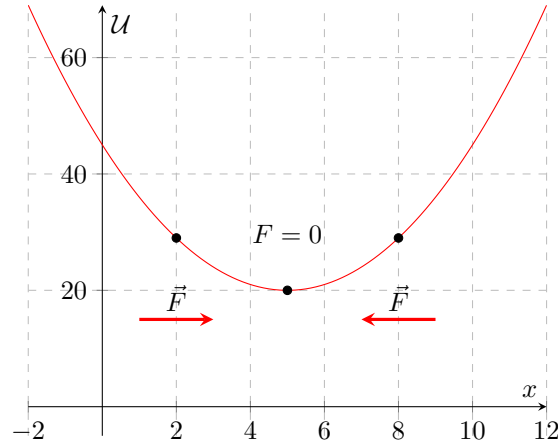
**Osservazione:** Si osservi che l'energia potenziale di una forza conservativa  $\vec{F}$  era stata definita come

$$\mathcal{U} = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

per cui si può scrivere che

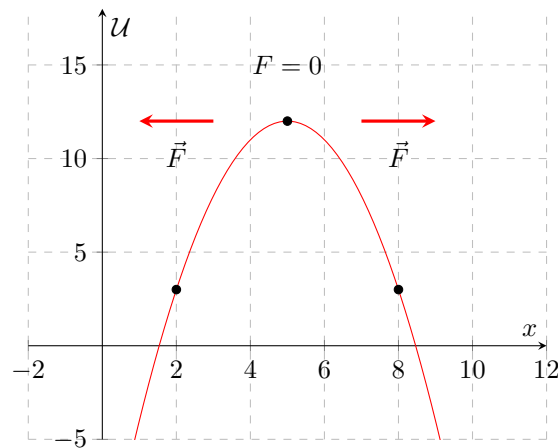
$$F_x = - \frac{d\mathcal{U}}{dx}$$

ovvero la forza  $F$  corrisponde all'opposto della pendenza del grafico energia potenziale-spostamento:



Questo è un sistema che viene definito **stabile**, in quanto ad ogni spostamento positivo (o negativo) vi è una forza di richiamo negativa (o positiva, rispettivamente) che permette di bilanciare il sistema, portandolo in una condizione di equilibrio.

Analogamente, un sistema è **instabile** quando ad ogni spostamento viene associata una forza che sbilancia ancora di più il sistema nella direzione dello spostamento:



Non da ultimo devono essere citati sistemi molto più complessi, in cui vi può essere la combinazione di più configurazioni stabili e instabili, valutabili tramite la derivata seconda, ovvero:

$$\frac{d^2\mathcal{U}}{dx^2} > 0 \longrightarrow \text{sistema stabile} \quad \text{e} \quad \frac{d^2\mathcal{U}}{dx^2} < 0 \longrightarrow \text{sistema instabile}$$

**Osservazione:** Si osservi che l'energia potenziale gravitazionale può essere interpretata come

$$\mathcal{U}(r) = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$$

che graficamente corrisponde ad un'iperbole equilatera sul quarto quadrante.

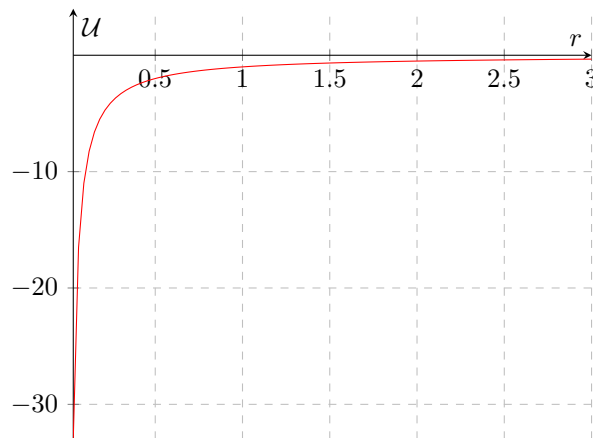
29 Marzo 2022

A proposito dell'energia potenziale gravitazionale, è nota la formula seguente, in quanto deriva dall'integrale della forza di attrazione gravitazionale per la distanza:

$$\mathcal{U}(r) = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$$

Che presenta un grafico sull'asse della distanza che rappresenta un'iperbole equilatera: infatti, due masse inizialmente a riposo presentano una certa energia potenziale, la quale, a mano a mano che le due masse si avvicinano per attrazione gravitazionale, diminuisce fino ad annullarsi, trasformandosi progressivamente in energia cinetica. Nella realtà, le masse sono sempre in movimento, con una certa velocità, e progressivamente le due masse (che sono fra di loro simili) entrano in orbita una attorno all'altra rispetto al loro centro di massa.

Di seguito si espone il grafico iperbolico dell'energia potenziale gravitazionale:



**Osservazione:** Si osservi che in base alla formula di cui sopra, l'energia potenziale gravitazionale è sempre negativa (anche se sarebbe possibile aggiungere a tale calcolo una costante  $c$  di integrazione).

**Esempio:** L'energia meccanica totale di un satellite in orbita attorno alla terra è data dalla somma di due componenti: l'energia cinetica e l'energia potenziale

$$E_{tot} = K + \mathcal{U} = \frac{1}{2}mv^2 - G \cdot \frac{m_t \cdot m}{r}$$

in cui  $m$  è la massa del satellite. Inoltre, in tali sistemi nello spazio, si assiste ad un minimo scambio di energia (a causa delle radiazioni), per cui con sufficiente precisione è possibile affermare che si ha conservazione di energia, ovvero

$$\Delta E = 0 \longrightarrow K + \mathcal{U} = \text{costante}$$

Per comprendere la condizione di orbita di un satellite, è opportuno studiare i possibili valori di  $E$

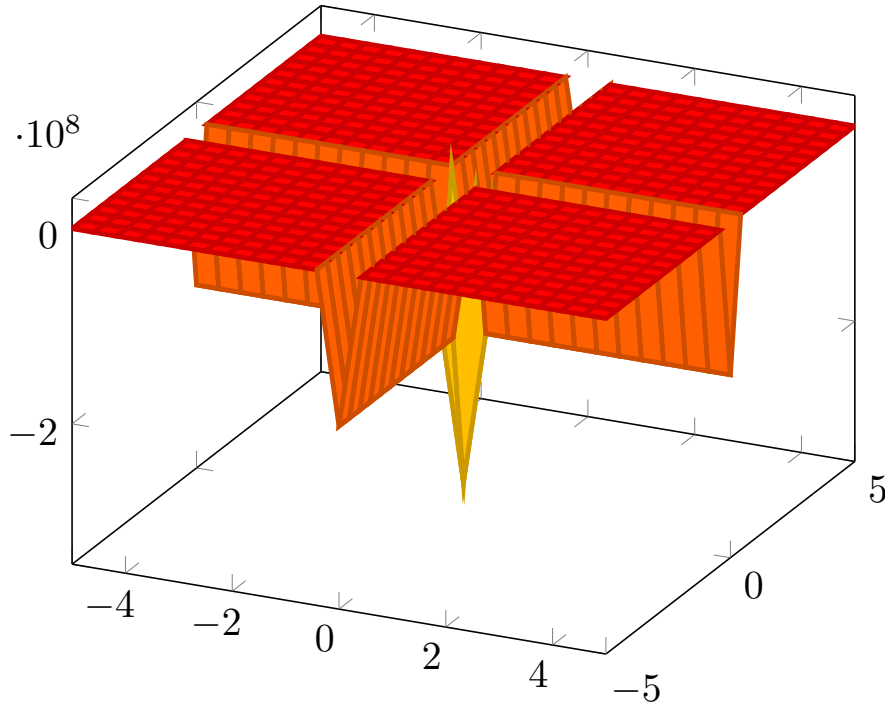
- se  $E$  è **positivo**, allontanando progressivamente il satellite dalla terra, l'energia potenziale  $\mathcal{U}$  diminuisce progressivamente, tendendo a 0, mentre l'energia cinetica aumenta (dovendo essere  $E > 0$ ), e quindi il satellite si allontanerebbe eccessivamente dalla terra, incrementando la propria energia cinetica e riducendo la propria energia potenziale, non potendo più trovarsi in orbita attorno alla terra. Pertanto  $E$  non può essere positivo, in quanto ciò significherebbe che il satellite presenta troppa energia e non può stare in orbita attorno alla terra.
- se  $E$  è **negativo**, invece, allora il satellite, ad una certa distanza dalla terra, diminuirebbe la propria energia cinetica, senza mai annullarla totalmente, però, in quanto essa è sempre tangenziale all'orbita e consente al satellite di compiere tale moto di rivoluzione.

Pertanto, è possibile definire il concetto di  $E := \text{energia di legame}$ , per cui se  $E < 0$  si ha la condizione per avere un'orbita attorno alla terra. Ovviamente sussiste anche il caso limite in cui

$E = 0$ , per cui l'energia cinetica del satellite eguaglia quella potenziale gravitazionale: ciò significa che il satellite presenta la velocità sufficiente (appunto, la **velocità di fuga**) da poter uscire dal campo gravitazionale terrestre.

**Osservazione:** Naturalmente, l'energia potenziale dipende solamente dal parametro  $r$ , per cui più  $r$  aumenta, più l'energia potenziale diminuisce, mentre se  $r$  tende a 0, allora l'energia potenziale assume il suo massimo valore.

Disegnando l'energia potenziale in tre dimensioni, è possibile visualizzare le **linee equipotenziali** che permettono di descrivere le possibili orbite di due pianeti attorno al proprio centro di massa: ovviamente tale linee sono delle circonferenze che permettono di visualizzare tutti i punti alla medesima distanza.



Ovviamente se una massa ruota seguendo una di tali linee equipotenziali, in piena conservazione dell'energia, rimarrà a compiere tale moto perpetuo, in maniera identica.

Tuttavia, a causa delle cosiddette **forze di marea**, ciò non si verifica, in quanto deformazioni del corpo in rotazione comportano dispersione di energia cinetica e quindi un allontanamento dei corpi. Il punto in cui si è più distanti dal centro è il punto in cui si ha il massimo dell'energia potenziale (ossia il più grande valore negativo), e quindi l'energia cinetica dovrà avere il suo valore minimo: infatti il satellite si muove molto lentamente tanto più è lontano dal centro; Viceversa si verificherà quando la massa si trova molto vicina al centro di rotazione.

## 6.10 Velocità di fuga

È noto che la velocità di fuga si ha quando l'energia di legame è pari a 0, ossia  $E = 0$ : taluna è la condizione che permette al satellite di fuggire dalla sua orbita, ossia di uscire dal campo gravitazionale, ovvero:

$$E = 0 = K + \mathcal{U} \longrightarrow K = -\mathcal{U} \longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = G \cdot \frac{m_t \cdot m}{r}$$

in cui  $v$  è proprio la velocità di fuga, per cui

$$v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2G \cdot m_t}{r}}$$

e dipende naturalmente da  $r$ : se la distanza è molto elevata, è chiaro che l'energia potenziale gravitazionale sarà inferiore e quindi la velocità di fuga sarà inferiore. Nel caso della terra, allora, volendo calcolare la velocità di fuga sulla superficie della terra si ottiene:

$$v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2G \cdot m_t}{R_t}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{g \cdot R_t} \cong 11000 \text{ m/s} \cong 40000 \text{ km/h}$$

ossia pari a  $\sqrt{2}$  volte la velocità necessaria per stabilire un'orbita attorno alla terra con raggio esattamente pari a quello della terra: un proiettile sulla superficie della terra avente tale velocità può effettivamente uscire dal campo gravitazionale terrestre senza mai farvi più ritorno.

**Osservazione:** Quando si considera un sistema stabile, partendo con una certa energia cinetica, tale sistema converte molteplici volte tale energia in energia potenziale e viceversa; se vi è dissipazione, ovviamente, parte dell'energia viene dispersa (viene dissipata in calore) ad ogni oscillazione fino a quando l'energia totale del sistema decresce a tal punto che si raggiunge la configurazione stabile di equilibrio, ovvero l'energia potenziale minima.

**Esempio:** Si consideri una molla verticale sulla quale è attaccata una massa:

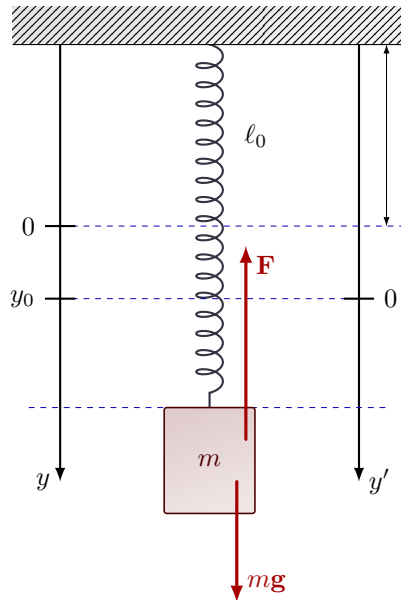


Figura 48: Fisica di una molla verticale

Naturalmente, l'energia potenziale del sistema in funzione di  $y$  è data da

$$\mathcal{U}(y) = mgy + \frac{1}{2}ky^2$$

e per conoscere il minimo valore di energia potenziale (corrispondente proprio al punto di equilibrio nel grafico di una parabola con concavità rivolta verso l'alto), è sufficiente derivare tale espressione e porre la condizione che la derivata sia nulla (corrispondente a tangente orizzontale):

$$\frac{d}{dy}\mathcal{U}(y) = mg + ky \longrightarrow y = -\frac{mg}{k}$$

che è il medesimo risultato che sarebbe stato ottenuto ragionando con la 2<sup>a</sup> legge della dinamica, imponendo che la forza peso e la forza elastica siano uguali, ma opposte (giacché la massa è immobile, quindi con  $\vec{a} = 0$ ):

$$mg = -ky \longrightarrow y = -\frac{mg}{k}$$

**Esercizio 1:** Il raggio dell'orbita di Marte è 1.52 volte quello dell'orbita terrestre. Utilizzando la terza legge di Keplero si determini il periodo della rivoluzione di Marte in anni.

La terza legge di Keplero afferma che il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta attorno al sole è proporzionale al cubo della distanza tra i due:

$$T^2 \propto R^3$$

Ma naturalmente si ha che la costante di proporzionalità sarà

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{costante}$$

e tale costante dipende solamente dalla massa del sole, per cui è la stessa per tutti i pianeti, pertanto si ha che

$$\frac{T_t^2}{R_t^3} = \frac{T_m^2}{R_m^3}$$

ma sapendo che  $R_m = 1.52R_t$  è facile isolare  $T_m$ , ottenendo

$$T_m = T_t \cdot \left( \frac{R_m}{R_t} \right)^{\frac{3}{2}} = T_t \cdot (1.52)^{\frac{3}{2}} = 1.87 \text{ anni}$$

**Esercizio 2:** Si supponga che il disco da hockey abbia una velocità di modulo  $v_0$  nella posizione più bassa.

Si determini il valore minimo  $v_0$  che consente al disco di completare il suo percorso circolare.

Naturalmente la tensione del filo nel punto più alto è nulla. Per cui, affinché si abbia un moto circolare, è necessario che la componente diretta nel piano della forza di gravità sia la forza centripeta necessaria affinché la massa compia un moto circolare uniforme.

Pertanto appare evidente come si debba imporre che

$$F_{tx} = mg \cdot \sin(\theta) = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

da cui si evince come la velocità nel punto più in alto sia

$$v = \sqrt{rg \cdot \sin(\theta)}$$

E per determinare  $v_0$  è sufficiente applicare il teorema di conservazione dell'energia, da cui

$$K_i + \mathcal{U}_i = K_f + \mathcal{U}_f$$

e volendo determinare  $K_f$ , ossia l'energia cinetica al termine della rotazione della massa nel punto più basso si ottiene:

$$K_f = K_i + \mathcal{U}_i - \mathcal{U}_f \longrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot (2L \cdot \sin(\theta))$$

per cui, volendo isolare  $v_0$  si ottiene che

$$v_0 = \sqrt{5Lg \cdot \sin(\theta)}$$

Volendo determinare la tensione del filo nella posizione più bassa, sarà sufficiente imporre che la somma della forza di tensione e della componente nel piano della forza peso devono essere pari alla forza centripeta nel punto più basso, da cui:

$$F_{tx} + F_T = F_c \longrightarrow F_T + F_{tx} = -m \cdot \frac{v_0^2}{L}$$

essendo diretta verso il centro della circonferenza. Da ciò è immediato capire che

$$F_T = -m \cdot \frac{v_0^2}{L} - mg \cdot \sin(\theta) = -6mg \cdot \sin(\theta)$$

30 Marzo 2022

**Esercizio 1:** Naturalmente, se si devono percorrere 200 km ad una velocità di 120 km/h oppure ad una velocità di 135 km/h, si ha una variazione di tempo impiegato pari a:

$$\Delta t = \frac{200 \text{ km}}{120 \text{ km/h}} - \frac{200 \text{ km}}{135 \text{ km/h}} = 11 \text{ minuti}$$

L'aumento percentuale dal lavoro compiuto dal motore per viaggiare a due diverse velocità, considerando solamente la resistenza dell'aria, è dato semplicemente dal rapporto del quadrato delle due velocità.

Infatti è noto che la forza di resistenza dell'aria è proporzionale al quadrato della velocità, da cui:

$$F_r \propto v^2 \longrightarrow F_r = \beta \cdot v^2 \quad \text{in cui} \quad \beta = \frac{1}{2} AC_d \rho$$

Pertanto, il lavoro compiuto dalla forza di resistenza è dato da:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -F_r \cdot d$$

e per calcolare l'aumento relativo percentuale è da considerare il rapporto seguente:

$$\frac{|W_{135}| - |W_{120}|}{|W_{120}|} \cdot 100 = \frac{(135 \text{ km/h})^2 - (120 \text{ km/h})^2}{(120 \text{ km/h})^2} \cdot 100 = 26.7\%$$

**Esercizio 2:** La forza compiuta da una corda bungee segue una funzione non-lineare con la sua estensione:

$$F(x) = k_1 \cdot x + k_2 \cdot x^3$$

dove  $x$  è la lunghezza di estensione della corda, mentre  $k_1 = -204 \text{ N/m}$  e  $k_3 = 0.233 \text{ N/m}^3$ .

Si determini, allora, quanto lavoro è necessario (cioè quanto lavoro deve compiere una forza esterna) per estendere la corda di 15 m, come segue:

$$W_c = \int_0^{15} \vec{F} \cdot dx = \int_0^{15} (k_1 \cdot x + k_2 \cdot x^3) \cdot dx = \left[ \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{4} k_2 x^4 \right]_0^{15} \cong 20 \text{ kJ}$$

Inoltre, se 15 m è l'estensione massima per un'operazione sicura del bungee, si determini la massa massima che può avere una persona che salta legata a questa corda, trascurando la resistenza dell'aria.

Naturalmente, essendo in assenza di attriti, è possibile applicare il **teorema di conservazione dell'energia meccanica**, ovvero:

$$E_i = E_f \longrightarrow K_i + \mathcal{U}_{gi} + \mathcal{U}_{ei} = K_f + \mathcal{U}_{gf} + \mathcal{U}_{ef}$$

Ma naturalmente l'energia iniziale del sistema è pari a 0, mentre l'energia potenziale gravitazionale finale è negativa e l'energia potenziale elastica finale è naturalmente data dall'opposto del lavoro calcolato in precedenza, da cui:

$$0 = -mgh + W_c \longrightarrow m = \frac{W_c}{gh} = 136 \text{ kg}$$

**Esercizio 3:** Una cassetta portautensili con massa 15 kg è ferma sul ripiano orizzontale liscio di un autocarro. Quand l'autocarro si mette in moto da fermo con un'accelerazione di  $2.5 \text{ m/s}^2$ , la cassetta scivola con un coefficiente di attrito cinetico pari a 0.20.

Essa parte dalla quiete nella parte anteriore del pianale e scivola finché non urta contro la spunta posteriore del pianale e scivola finché non urta contro la spunta posteriore del pianale lungo 2.0 m. Si calcoli, allora, il lavoro compiuto dalla forza di attrito sulla cassetta durante la fase di moto. Naturalmente è ovvio calcolare la forza di attrito come segue:

$$F_k = F_N \cdot \mu_k = mg \cdot \mu_k$$

Il lavoro della forza di attrito, in tale sistema di riferimento, è positivo, in quanto bisogna considerare lo spostamento della cassetta sull'autocarro, per cui bisogna scomporre il moto in quello dell'autocarro e in quello della cassetta, da cui:

$$\begin{aligned}x_a(t) &= \frac{1}{2}at^2 \\x_c(t) &= \frac{1}{2}\frac{F_k}{m} \cdot t^2 + l = \frac{1}{2}\mu_k \cdot g \cdot t^2 + l\end{aligned}$$

La condizione di risoluzione prevede di determinare l'istante di tempo nel quale le due posizioni saranno identiche, prendendo come punto di riferimento la sponda dell'autocarro. Allora si ha che

$$x_a(t_1) = x_c(t_1) \longrightarrow \frac{1}{2}at_1^2 = l + \frac{1}{2}\mu_k g t_1^2 \longrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2l}{1 - \mu_k \cdot g}}$$

per cui, ora, ovviamente, è facile ottenere la distanza  $d$  compiuta dalla cassetta nel moto considerato.

Tale distanza è semplicemente data da

$$d = x_c(t_1) - l = \frac{1}{2}a \left( \frac{2l}{a - \mu_k \cdot g} \right) - l = \frac{l\mu_k g}{a - \mu_k \cdot g}$$

Per cui ora, il lavoro compiuto dalla forza di attrito sulla distanza  $d$  è:

**Esercizio 4:** Un bambino sta seduto in cima a un serbatoio cilindrico di raggio  $R$ . La superficie è molto liscia e il bambino compincia a scivolare con attrito trascurabile. Si determini il valore dell'angolo in corrispondenza del quale il bambino si stacca dalla superficie cilindrica.

Bisogna, quindi, determinare l'angolo  $\theta$  tale  $F_N = 0$ . Naturalmente, è possibile applicare a tale problema la seconda legge della dinamica, per cui

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_N + \vec{F}_t$$

È utile, in tal senso, impiegare due nuovi versori:  $\hat{r}$  in direzione radiale rispetto alla circonferenza, e  $\hat{\theta}$ , in direzione angolare rispetto al sistema. Da ciò si evince che:

$$\vec{a} = a_r \cdot \hat{r} + a_\theta \cdot \hat{\theta}$$

Pertanto, la componente radiale dell'accelerazione si calcola come segue:

$$m \cdot a_r = m \cdot \vec{a} \cdot \hat{r} = \vec{F}_N \cdot \hat{r} + \vec{F}_t \cdot \hat{r} = F_n - mg \cdot \cos(\theta)$$

Ma è noto che nel moto circolare uniforme, l'accelerazione entripeta, e quindi in questo caso radiale, è data

$$a_r = -\frac{v^2}{R}$$

Pertanto è possibile ottenere l'equazione seguente:

$$-m \cdot \frac{v^2}{R} = F_n - mg \cdot \cos(\theta)$$

Al fine di isolare  $v$  è sufficiente applicare il teorema di conservazione dell'energia, per cui si ottiene che:

$$E_i = E_f \longrightarrow K_i + \mathcal{U}_i = K_f + \mathcal{U}_f \longrightarrow K_f = \mathcal{U}_i - \mathcal{U}_f \longrightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = mgh$$

in cui è facile ottenere  $h = R - R \cdot \cos(\theta)$ . Da ciò si evince come

$$v^2 = 2gR \cdot (1 - \cos(\theta))$$

Per cui ora è facile isolare l'angolo  $\theta$  cercato, operando come segue:

$$2gR \cdot (1 - \cos(\theta)) = gR \cdot \cos(\theta) - \frac{F_N \cdot R}{m}$$

Per cui si ottiene come

$$\cos(\theta) = \frac{2}{3} \longrightarrow \theta = 48^\circ$$



4 Aprile 2022

**Osservazione:** Si consideri un blocco di massa  $m = 500$  g, appoggiato su un piano rimovibile. Il blocco è sospeso con una molla di costante  $k = 50$  N/m inizialmente a riposo, mostrata di seguito:

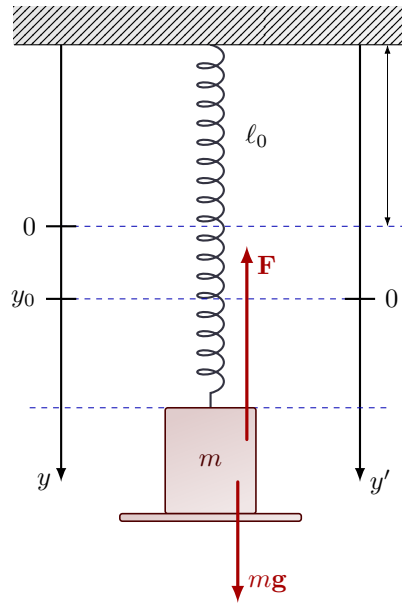


Figura 49: Fisica di una molla verticale

Il piano viene spostato seguendo due scenari diversi:

1. il piano è spostato lentamente verso il basso finché il blocco si stacca dal piano e rimane immobile sospeso alla molla.
2. il piano è rimosso velocemente, in modo da non impedire il moto del blocco.

Solamente nel secondo caso si ha conservazione dell'energia, giacché non si ha nessun intervento di una forza esterna.

Per determinare l'estensione della molla nel primo scenario, è sufficiente considerare il diagramma a corpo libero delle forze nella condizione di equilibrio, per cui la forza elastica eguaglia quella gravitazionale, ottenendo

$$-k\Delta y = -mg \longrightarrow \Delta y = \frac{mg}{k} = \frac{0.50 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2}{50 \text{ N/m}} = 9.8 \text{ cm}$$

Per determinare l'estensione massima della molla nel secondo caso, siccome si ha conservazione dell'energia meccanica, ossia  $\Delta E = 0$ , per cui

$$E_i = E_f \longrightarrow K_i + \mathcal{U}_i = K_f + \mathcal{U}_f$$

Ma naturalmente l'energia cinetica iniziale e finale è nulla, così come l'energia potenziale iniziale (data dalla somma di energia potenziale elastica e gravitazionale, fissando lo zero di riferimento in corrispondenza della posizione di equilibrio iniziale della molla).

Mentre l'energia potenziale finale è data dalla somma di energia potenziale gravitazionale ed energia potenziale elastica, da cui:

$$\mathcal{U}_{m,f} = -\mathcal{U}_{g,i} \longrightarrow \frac{1}{2}kh^2 = mgh \longrightarrow h = 2 \cdot \frac{mg}{k} \cong 20 \text{ cm}$$

che è esattamente il doppio del risultato ottenuto in precedenza; ciò non sorprende in quanto lasciare cadere una massa attaccata ad una molla, senza intervento di forze esterne, comporta l'innescio di un moto oscillatorio tale che i due estremi di oscillazione siano proprio a distanza doppia dal punto di equilibrio.

Se, invece, si considerano, al posto di una molla, due molle, è molto utile considerare il punto di

collegamento tra la prima e la seconda molla come un punto materiale di massa nulla, sul quale agiscono due forze uguali ed opposte; infatti, se si considera il punto di connessione tra le due molle, su di esso agisce la forza della prima molla verso l'alto e la forza della seconda molla verso il basso, ottenendo:

$$\vec{F}_{m_1} + \vec{F}_{m_2} = m\vec{a}$$

ma essendo la massa nulla, indipendentemente dall'istante di tempo, le due forze devono essere sempre uguali ed opposte:

$$\vec{F}_{m_1} + \vec{F}_{m_2} = 0 \longrightarrow k \cdot l_1 - k \cdot l_2 = 0 \longrightarrow l_1 = l_2$$

Applicando la 3<sup>a</sup> legge di Newton, poi, si capisce immediatamente come la forza  $\vec{F}_{m_2}$  che agisce sul punto materiale sia esattamente uguale e contraria alla forza che si contrappone alla forza peso della massa, per cui:

$$\vec{F}_t + \vec{F}_{m_2} = m\vec{a} \longrightarrow mg = k \cdot l_2 \longrightarrow l_2 = \frac{mg}{k}$$

per cui l'estensione totale finale è

$$l_1 + l_2 = 2 \cdot \frac{mg}{k} = \frac{mg}{\frac{k}{2}}$$

ossia equivalente ad un'unica molla avente costante di elasticità dimezzata.

Nel caso in cui le due molle da considerare siano in parallelo, allora è come se si considerasse una molla con costante di elasticità doppia; a partire dall'equazione seguente

$$\vec{F}_t + \vec{F}_{m_1} + \vec{F}_{m_2} = m\vec{a}$$

si evince come l'estensione sarà data da:

$$l = \frac{mg}{2k}$$

**Osservazione:** Si osservi che se si considerano delle molle in serie, allora si può sostituire a tali molle un'unica molla di costante elastica

$$k_{\text{serie}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots + \frac{1}{k_n}}$$

mentre se le molle sono poste in parallelo, allora la costante elastica della molla equivalente è

$$k_{\text{parallelo}} = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$$

## 7 Moto dei sistemi

Fino a questo momento, ogni corpo è sempre stato approssimato ad un punto materiale; tuttavia, i **corpi reali** presentano

- una **distribuzione di massa**;
- più **punti di applicazione delle forze**;
- delle **forze interne** (tra le parti del medesimo corpo).

Ciò che, naturalmente, presenta un importante significato fisico è considerare più masse insieme e le forze che si applicano su ogni elemento di massa, andando così a studiare un **sistema di masse**.

### 7.1 Centro di massa

Di seguito si espone il significato fisico di **centro di massa**:

#### CENTRO DI MASSA

Il **centro di massa** è un vettore posizione che viene definito come una **media pesata dei vettori posizione di ogni massa** (tale per cui si può considerare come se tutta la massa sia concentrata in tale punto):

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

quindi, essendo  $M = \sum_i m_i$ , il vettore posizione del centro di massa è il rapporto tra il vettore posizione di ogni massa e la massa totale del sistema, ovvero

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \sum_i \frac{m_i}{M} \cdot \vec{r}_i$$

**Esempio:** Si considerino le due masse seguenti:

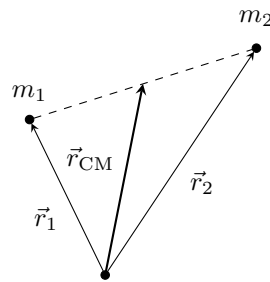


Figura 50: Centro di massa tra due masse

In cui, ovviamente, si ha che

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

in cui è facile capire come, a seconda dell'entità delle due masse  $m_1$  e  $m_2$ , si possono formulare le seguenti osservazioni:

- se  $m_1 \gg m_2$ , allora  $\vec{r}_{\text{CM}} \rightarrow \vec{r}_1$
- se  $m_1 \ll m_2$ , allora  $\vec{r}_{\text{CM}} \rightarrow \vec{r}_2$

Ovviamente, gli oggetti reali, ossia i corpi estesi, sono costituiti da un sistema continuo di punti materiali, per cui è necessario fornire una definizione di centro di massa anche per i corpi estesi, da cui

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \sum_i \frac{\Delta m_i}{M} \cdot \vec{r}_i = \frac{1}{M} \cdot \int \vec{r} \cdot dm$$

in cui si sommano i contributi di ogni porzione di massa  $\Delta m$  tendente all'infinitesimale  $\Delta m \rightarrow dm$ . Inoltre, impiegando il concetto di **densità**, ossia la massa per unità di volume

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{ossia} \quad \rho = \frac{dm}{dV}$$

essa può essere anche definita in funzione dello spazio, ottenendo  $\rho(\vec{r})$ , ossia una **densità variabile** nello spazio. Da ciò si evince che

$$\rho = \frac{dm}{dV} \longrightarrow dm = \rho \cdot dV$$

Avendo a disposizione tale concetto si ottiene che il calcolo del centro di massa diviene

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \int \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) \cdot dV$$

da cui si può evincere come

$$M = \int \rho(\vec{r}) \cdot dV$$

**Esempio:** Si consideri cilindro di lunghezza  $l$  e di massa  $M$ , avente una densità uniforme. Allora è evidente come il centro massa sia proprio al centro della bacchetta, in corrispondenza di  $\frac{l}{2}$ :

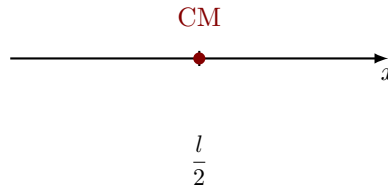


Figura 51: Centro di massa di una bacchetta

Infatti si ha che

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \int \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) \cdot dV$$

Essendo questa una equazione vettoriale, è possibile considerarne la sola componente orizzontale (supponendo che la bacchetta sia così fine che il suo spessore sia trascurabile), ottenendo

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \int x \cdot \rho(\vec{r}) \cdot dV$$

Definendo con  $A$  l'area della sezione trasversale della bacchetta e considerando una porzione  $\Delta x$  di bacchetta, è ovvio che il volume di tale porzione sarà dato da  $\Delta V = \Delta x \cdot A$  (in quanto il volume di tutta la bacchetta è  $V = l \cdot A$ ). Inoltre, **essendo la densità uniforme**, si ha che  $\rho = \frac{M}{V}$ , ma per quanto appena osservato si evince che:

$$\rho \cdot \Delta V = \frac{M}{lA} \cdot \Delta x \cdot A = \frac{M}{l} \cdot \Delta x$$

in cui  $\frac{M}{l}$  prende il nome di **densità lineare**. Considerando una porzione infinitesimale di bacchetta, si ottiene che

$$\rho(\vec{r}) \cdot dV = \frac{M}{l} dx$$

per cui l'integrale visto in partenza diviene

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \int x \cdot \rho(\vec{r}) \cdot dV = \frac{1}{M} \cdot \int x \cdot \frac{M}{l} dx = \frac{1}{l} \cdot \int_0^l x \cdot dx = \frac{1}{l} \cdot \left( \frac{1}{2} l^2 \right) = \frac{l}{2}$$

come ci si aspettava; si osservi, inoltre, come tale risultato sia totalmente indipendente dal sistema di coordinate assunto.

**Osservazione:** Si consideri una distribuzione di masse (approssimate a dei punti materiali) non necessariamente uniforme (per esempio, potrebbe accadere che vi sia uno squilibrio di distribuzione di masse tra due parti distinte di uno stesso corpo); allora, è possibile calcolare il centro di massa di differenti parti dello stesso corpo e poi sommarle fra loro, ovvero

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \sum_i \frac{m_i}{M} \cdot \vec{r}_i = \sum_{i \in A} \frac{m_i}{M} \cdot \vec{r}_i + \sum_{i \in B} \frac{m_i}{M} \cdot \vec{r}_i$$

ma essendo, ovviamente

$$M_A = \sum_{i \in A} m_i \quad \text{e} \quad M_B = \sum_{i \in B} m_i$$

si può scrivere che

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \sum_{i \in A} \frac{m_i}{M} \cdot \vec{r}_i + \sum_{i \in B} \frac{m_i}{M} \cdot \vec{r}_i = \frac{1}{M} \cdot M_A \cdot \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{M_A} \cdot \vec{r}_i}_{\vec{r}_{\text{CM}_A}} + \frac{1}{M} \cdot M_B \cdot \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{M_B} \cdot \vec{r}_i}_{\vec{r}_{\text{CM}_B}}$$

pertanto si ottiene che, essendo  $M = M_A + M_B$ :

$$\boxed{\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{M_A \cdot \vec{r}_{\text{CM}_A} + M_B \cdot \vec{r}_{\text{CM}_B}}{M}}$$

ciò significa che se si riesce a calcolare il centro di massa di singoli elementi individuali di un sistema, allora il centro di massa del sistema non è altro che la media pesata, rispetto alle masse di ciascuno, di tali centri di massa.

**Esempio:** Si consideri un disco di densità uniforme con un buco di forma circolare adiacente alla circonferenza esterna, mostrato di seguito:

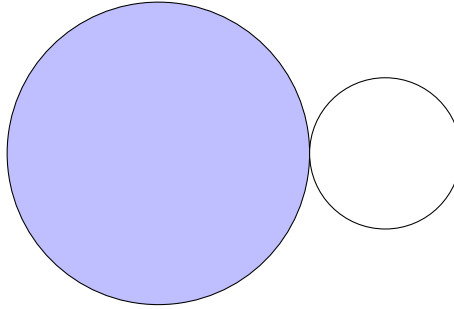


Figura 52: Disco con foro circolare

Al fine di determinare il centro di massa di tale oggetto, si dovrebbe procedere a calcolare l'integrale della figura, andando ad escludere, ovviamente, i punti del foro.

Tuttavia, con il risultato precedentemente ottenuto diviene molto più semplice; è ovvio che il centro di massa di una circonferenza è collocato nel centro della stessa, per semplice simmetria, si può considerare il concetto di massa negativa, per cui il centro di massa del disco forato si può ottenere come differenza pesata del centro di massa del disco pieno meno il centro di massa del foro, avente, appunto, massa negativa.

Ovviamente, il centro di massa del disco forato sarà collocato sull'asse passante per i due centri dei due cerchi raffigurati in Figura 52, per cui è sufficiente considerare solamente la componente  $x$  del centro massa

$$x_{\text{CM}} = \frac{M_D \cdot x_{\text{CM}_D} + M_F \cdot x_{\text{CM}_F}}{M_D + M_F}$$

in cui, per quanto detto,  $M_F < 0$ . Pertanto, se  $x_{\text{CM}_D} = 0$  e  $x_{\text{CM}_F} = \frac{R}{2}$  (ponendo il raggio del disco più grande pari a  $R$ ) e la densità  $\rho$  è uniforme, si ha che

$$M_D = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi R^2 \cdot h \quad \text{e} \quad M_F = -\rho \cdot V = -\frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \pi R^2 \cdot h$$

ciò significa che

$$x_{\text{CM}} = \frac{0 \cdot M_D + \frac{R}{2} \cdot M_F}{M_D + M_F} = \frac{R}{2} \cdot \frac{M_D}{M_D + M_F} = -\frac{R}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4} \rho \cdot \pi R^2 \cdot h}{\frac{3}{4} \rho \cdot \pi R^2 \cdot h} = -\frac{R}{6}$$

5 Aprile 2022

**Esempio:** Si consideri la seguente figura:

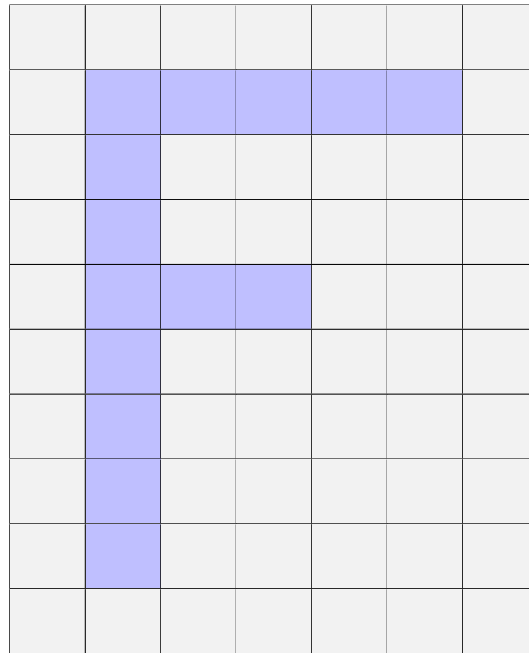


Figura 53: Oggetto di cui calcolare il centro di massa

Al fine di calcolarne il centro di massa, è utile scomporre la stessa in tre oggetti di cui è facile determinare il centro di massa, come mostrato di seguito:

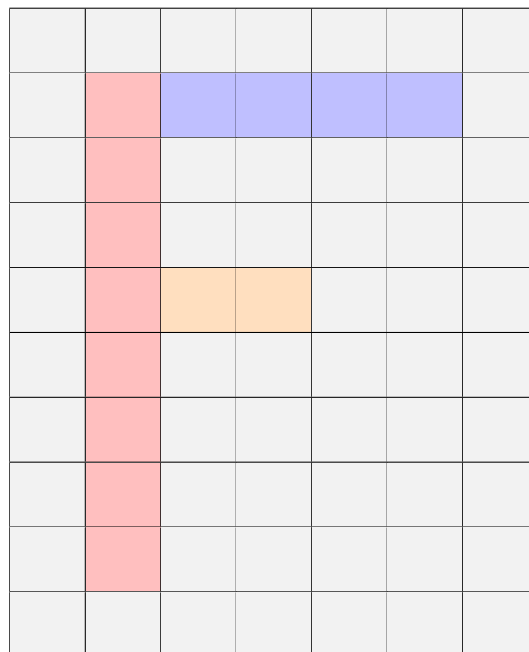


Figura 54: Oggetto di cui calcolare il centro di massa diviso in parti

Ecco che in questo caso è facile capire il centro di massa di ciascuna delle figure:

- Centro di massa **blu**:  $r_b = (3, 7.5)$ ;
- Centro di massa **rosso**:  $r_r = (0.5, 4)$ ;

- Centro di massa **arancione**:  $r_a = (2, 4.5)$ ;

Inoltre, sapendo che  $m_b = 4$ ,  $m_r = 8$  e  $m_a = 2$ , si possono facilmente determinare le coordinate del centro di massa:

$$x_{\text{CM}} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + x_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{4 \cdot 3 + 8 \cdot 0.5 + 2 \cdot 2}{4 + 8 + 2} = \frac{20}{14} \cong 1.4$$

e

$$y_{\text{CM}} = \frac{y_1 \cdot m_1 + y_2 \cdot m_2 + y_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{4 \cdot 7.5 + 8 \cdot 4 + 2 \cdot 4.5}{4 + 8 + 2} = \frac{71}{14} \cong 5$$

## 7.2 Moto del centro di massa

Volendo descrivere il moto del centro di massa, si considera la definizione dello stesso, ovvero

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i \vec{r}_i \cdot m_i}{M}$$

e volendo conoscere la velocità del centro di massa, è sufficiente considerare la derivata rispetto al tempo di tale vettore, considerando:

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \cdot m_i = \frac{1}{M} \cdot \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i$$

ovvero la media pesata delle velocità di ciascuna massa. Analogamente per l'accelerazione si ottiene

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \cdot m_i = \frac{1}{M} \cdot \sum_i m_i \cdot \vec{a}_i$$

ovvero la media pesata delle accelerazioni di ciascuna massa.

## 7.3 Dinamica del centro di massa

Si consideri un punto materiale all'interno di un assieme; allora, per la seconda legge di Newton si ha che

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{ai} + \vec{F}_{bi} + \vec{F}_{ci} + \dots$$

A tal proposito, diviene utile effettuare una significativa distinzione tra **forze interne al sistema** e **forze esterne al sistema**:

- Le forze esterne al sistema si denotano con

$$\vec{F}_{\text{ext},i}$$

ovvero la risultante di tutte le forze esterne che si applicano sulla massa  $m_i$  (approssimata ad un punto materiale);

- Le forze interne al sistema, invece, dal momento che originano da un altro punto del sistema, si denotano con

$$\vec{F}_{j,i}$$

ovvero la forza causata dal punto  $j$  sul punto  $i$ , ossia la massa  $m_i$  (approssimata ad un punto materiale);

Ciò permette di considerare che:

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_{\text{ext},i} + \sum_i \vec{F}_{j,i}$$



**Osservazione:** Si osservi, allora, che volendo determinare l'accelerazione del centro di massa si ottiene

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \sum_i m_i \cdot \vec{a}_i = \frac{1}{M} \cdot \sum_i \left( \vec{F}_{\text{ext},i} + \sum_j \vec{F}_{j,i} \right) = \frac{1}{M} \cdot \left( \sum_i \vec{F}_{\text{ext},i} + \sum_i \sum_j \vec{F}_{i,j} \right)$$

Ma applicando la 3<sup>a</sup> legge della dinamica, è immediato osservare come:

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{i,j} = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{4,1} + \dots + \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{3,2} + \vec{F}_{4,2} + \dots = 0$$

Ma tale somma, naturalmente, è nulla in quanto  $F_{i,j} = -F_{j,i}, \forall i \neq j$ , per cui si ha che

$$\boxed{M \cdot \vec{a}_{\text{CM}} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext},i}}$$

che permette di concludere come la fisica applicata fino a questo momento per un punto materiale è la stessa per il centro di massa, in quanto quest'ultimo segue la 2<sup>a</sup> legge della dinamica come se fosse un punto materiale: il moto del centro di massa dipende solamente dalle forze esterne... continua ...

**Osservazione:** Nel caso di un corpo che viene lanciato in aria e lasciato cadere, trascurando l'attrito dell'aria, si ha che:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M \cdot \vec{a}_{\text{CM}} = M \cdot \vec{g} = \sum_i m_i \cdot \vec{g}$$

Inoltre, se la somma delle forze esterne è nulla, ossia  $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$ , allora ciò significa che l'accelerazione del centro di massa è nulla ( $\vec{a} = 0$ ) e quindi la velocità  $\vec{v} = \text{costante}$ .

## 7.4 Conservazione della quantità di moto

È noto che

$$\vec{F}_{\text{ext}} = 0 = \sum_i m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_i m_i \cdot \frac{d}{dt} \cdot \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \cdot \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Pertanto si ha che

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = 0 \longrightarrow \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = \text{costante}$$

Ciò porta a definire il concetto di **quantità di moto**:

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$$

per cui se la risultante delle forze su un sistema è nulla, allora la quantità di moto del sistema si conserva.

**Osservazione:** La 2<sup>a</sup> legge di Newton può essere, quindi, reinterpretata alla luce della definizione di quantità di moto, in quanto

$$\boxed{\Delta \vec{p} \propto \vec{F}}$$

pertanto si ha

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{p}$$

per cui la 2<sup>a</sup> legge della dinamica diviene

$$\boxed{F = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

che può riguardare tanto la derivata della velocità nel tempo quanto la derivata della massa nel tempo.

7 Aprile 2022

Com'è noto, il centro di massa è così definito:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \sum_i \vec{r} \cdot m_i = \int \vec{r} \cdot g(\vec{r}) \cdot dV$$

Naturalmente, derivando nel tempo tale quantità si ottiene

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \sum_i \vec{v}_i \cdot m_i$$

e derivando nuovamente

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \sum_i \vec{a}_i \cdot m_i$$

Inoltre, è noto che la dinamica del centro di massa è totalmente indipendente dalle forze interne, ovvero:

$$M \cdot \vec{a}_{\text{CM}} = \sum F_{\text{ext}}$$

Inoltre, interpretando anche la seconda equazione come segue:

$$M \cdot \vec{v}_{\text{CM}} = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i$$

in cui, essendo  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$  la **quantità di moto**, si ha che:

$$\vec{p}_{\text{CM}} = \sum_i \vec{p}_i$$

Pertanto, se

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$$

allora si ha che la quantità di moto si conserva, ovvero  $\vec{p}_{\text{CM}}$  costante: tale concetto prende il nome di **conservazione della quantità di moto**.

**Osservazione:** Si osservi che considerando la Luna e il suo moto di rivoluzione attorno alla Terra, giacché sulla Luna agisce la forza di attrazione gravitazionale, essa non conserva la sua quantità di moto; tuttavia, se si considera il sistema Terra-Luna, allora la forza di gravità è una forza interna, per cui il centro di massa conserva la propria quantità di moto e quindi si muove a velocità costante.

## 7.5 Seconda legge di Newton reinterpretata

Si considerino due masse  $m_A = m$  e  $m_B = 3m$  collegate fra di loro da una molla.

Inizialmente, la molla compressa è a riposo, per cui

$$\vec{p}_i = 0$$

Successivamente, la molla, estendendosi, innesca il moto delle due masse, ma la quantità di moto rimane la stessa (ovvero  $\vec{p}_f = \vec{p}_i = 0$ ), dal momento che su tale sistema non agiscono forze esterne (o meglio, la risultante delle forze esterne impresse, forza di gravità e forza normale, è nulla)

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$$

Pertanto, a qualsiasi istante di tempo  $t$  si ha che

$$\vec{p} = 0\vec{p}_A + \vec{p}_B = m_A \cdot \vec{v}_A + m_B \cdot \vec{v}_B = m \cdot \vec{v}_A + 3m \cdot \vec{v}_B \longrightarrow \vec{v}_A = -3\vec{v}_B$$

**Esercizio:** Un nucleo di radio ( $^{226}\text{Ra}$ ) inizialmente a riposo si decompone in un nucleo di radon ( $^{222}\text{Rn}$ ) e una particella alfa (nucleo di  $^4\text{He}$ ). Se l'energia cinetica della particella alfa è di  $6.72 \times 10^{-13} \text{ J}$ , si determini quali sono il modulo della velocità di rinculo dell'atomo di radono e la

sua energia cinetica.

Applicando il principio di conservazione della quantità di moto, si ha che  $\vec{p}_i = \vec{p}_f = 0$ , dal momento che

$$\sum F_{\text{ext}} = 0$$

Ma dai dati del problema è evidente come

$$\vec{p}_f = \vec{p}_{\text{Rn}} + \vec{p}_\alpha = 0 \longrightarrow \vec{p}_{\text{Rn}} = -\vec{p}_\alpha$$

Inoltre, è noto che

$$K_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{m_\alpha} p_\alpha^2$$

Dovendo determinare la quantità di moto  $\vec{p}_\alpha$  si ottiene che

$$|\vec{p}_\alpha| = \sqrt{2m_\alpha \cdot K_\alpha} = |\vec{p}_{\text{Rn}}|$$

ottenendo

$$v_{\text{Rn}} = \frac{p_{\text{Rn}}}{m_{\text{Rn}}} = \frac{1}{m_{\text{Rn}}} \cdot \sqrt{2m_\alpha K_\alpha}$$

e per determinare l'energia cinetica si esegue

$$K_{\text{Rn}} = \frac{m_\alpha}{m_{\text{Rn}}} \cdot K_\alpha$$

che è un risultato fondamentale da considerare, in quanto è stato ottenuto senza sapere nel dettaglio ciò che è successo tra l'istante iniziale e l'istante finale presi in esame.

**Esercizio:** Una ragazza di massa 45 kg si tuffa da una barca di massa 1000 kg, allontanandosi da essa con una velocità orizzontale di 5.2 m/s. Ammettendo che la barca fosse inizialmente in quiete e libera di muoversi nell'acqua, si determini con quale velocità essa si mette in movimento.

Dal momento che la quantità di moto è un vettore, si può considerare solamente la conservazione in una direzione (come nel caso della caduta libera, in cui si ha conservazione nel movimento orizzontale, ma non verticale, a causa della forza di gravità), ossia quella orizzontale, che è ciò che interessa nel caso descritto; infatti, si ha che:

$$\vec{p}_i = 0 \quad \text{e} \quad \vec{p}_f = \vec{p}_r + \vec{p}_b = 0$$

Dal momento che  $p_{ix} = p_{fx} = 0$  si può facilmente capire come  $p_{rx} = -p_{bx} \longrightarrow m_r v_{rx} = -m_b v_{bx}$ . Dal momento che in questo caso viene fornita una **velocità relativa**, ossia la velocità misurata da un sistema di riferimento in cui uno dei due corpi è a riposo

$$\boxed{\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_B - \vec{v}_A}$$

si può considerare  $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_r - \vec{v}_b$ , da cui si evince come

$$\begin{cases} m_r v_{rA} = -m_b v_{bx} \\ \vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_r - \vec{v}_b \end{cases}$$

Da cui si evince come  $v_{rx} = -\frac{m_b}{m_r} \cdot v_{bx}$  e impiegando tale risultato si ottiene che la velocità relativa diviene

$$v_{\text{rel}} = -\frac{m_b}{m_r} \cdot v_{bx} - v_{bx} = -v_{bx} \cdot \left(1 + \frac{m_b}{m_r}\right)$$

Pertanto, ora, si possono determinare sia la velocità della barca che quella della ragazza:

$$v_{bx} = -\frac{v_{\text{rel}}}{\left(1 - \frac{m_b}{m_r}\right)}$$

$$v_{rx} = \frac{v_{\text{rel}}}{\left(1 - \frac{m_b}{m_r}\right)}$$

## 7.6 Impulso

Si consideri un uovo lasciato cadere prima su un materasso e poi su un piano rigido: nel primo caso l'uovo si rompe, mentre nel secondo si rompe, nonostante la quantità di moto iniziale e finale nei due casi sia la stessa, ovvero 0; la ragione fisica di tale fenomeno sta nel concetto di **impulso**: nel primo caso la forza che rallenta la caduta del corpo agisce in un tempo superiore rispetto al primo.

Infatti, dalla seconda legge di Newton generalizzata si ha che:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Procedendo all'integrazione di ambo le parti si ottiene che:

$$\int \vec{F} \cdot dt = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot dt = [\vec{p}]_i^f = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$$

Ciò permette di capire come la variazione della quantità di moto sia proprio l'area sottesa al grafico forza-tempo: nonostante nei due casi l'area sia la stessa, il picco della forza è necessariamente maggiore nel secondo caso che nel primo.

È stato, così facendo, definito implicitamente il concetto di impulso:

$$\vec{j} = \Delta\vec{p} = \int \vec{F} \cdot dt$$

## 7.7 Urti

Il concetto di urto risulta fondamentale nello studio e nella comprensione della fisica moderna: tutta la fisica moderna può essere interpretata come un'infinità di interazioni, come una sequenza di urti, sia a livello microscopico che macroscopico:

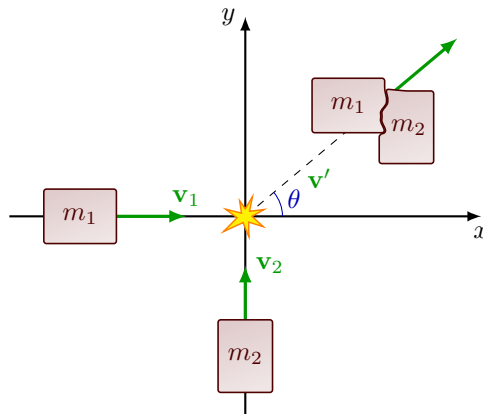


Figura 55: Esempio di urto

**Osservazione:** Si osservi che, dal momento che gli urti avvengono in un intervallo di tempo pressoché infinitesimo, si può considerare che sul sistema non agiscano forze esterne.

Quindi, dal momento che il **tempo di interazione** è estremamente corto rispetto all'effetto delle forze esterne, negli urti la **quantità di moto è sempre conservata**.

Alla luce di ciò, si distinguono tre categorie di urto:

1. **Urto elastico:** in cui si ha **conservazione dell'energia cinetica**;
2. **Urto anelastico:** i corpi interagenti rimangono attaccati dopo la collisione, per cui presenteranno la **stessa velocità finale**;
3. **Urto parzialmente anelastico:** in tale urto (una via di mezzo tra i precedenti) parte dell'energia è dispersa;

**Osservazione:** Naturalmente, si può cambiare la quantità di moto di una particella mentre la sua energia cinetica rimane la stessa: infatti, la quantità di moto è un vettore, per cui anche cambiando la direzione della velocità, pur mantenendo inalterato il suo modulo, si ha cambiamento di quantità di moto, ma non di energia cinetica; tuttavia, non può essere il contrario.

11 Aprile 2022

### 7.7.1 Urti tra due corpi

Si considerino due corpi che collidono, come mostrato di seguito:

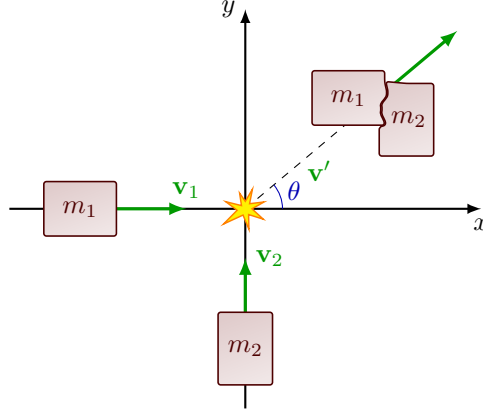


Figura 56: Esempio di urto

La massa  $m_1$  presenta velocità iniziale  $\vec{V}_1$ , mentre la massa  $m_2$  si muove a velocità  $\vec{V}_2$ . Taluno è un problema generale che viene studiato tramite un sistema di riferimento esterno, di un osservatore. Questo sistema di riferimento, tuttavia, non risulta essere pratico nello studio, per cui si può adottare un sistema di riferimento inerziale che prende in considerazione il centro di massa del sistema, la cui velocità, ovviamente, è data da

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = \frac{m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{P}_1 + \vec{P}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{P}_{\text{tot}}}{m_{\text{tot}}}$$

Pertanto, se ora si considera il sistema di riferimento dato dal centro di massa, il quale si sposta con velocità  $\vec{v}_{\text{CM}}$ ; ora, con tale nuovo sistema di riferimento, le velocità delle due masse diviene

$$\vec{v}_1 = \vec{V}_1 - \vec{v}_{\text{CM}} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \vec{V}_2 - \vec{v}_{\text{CM}}$$

cosicché si ha che  $\vec{p}_{\text{tot}} = 0$ . Ciò è fondamentale, infatti, dal momento che la durata dell'urto è pressoché infinitesima, la quantità di moto totale si conserva, per cui  $\vec{p}_{\text{tot},i} = \vec{p}_{\text{tot},f} = 0$ ; ciò significa che se  $\vec{p}_{\text{tot}} = 0$ , allora  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ , ma non che le velocità delle due masse siano uguali e opposte: infatti, le due masse potrebbero essere diverse, per cui anche le loro velocità sarebbero proporzionate.

Applicando la conservazione della quantità di moto, si evince come

$$\boxed{\vec{p}_{\text{tot},i} = \vec{p}_{\text{tot},f} = 0 = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}}$$

ciò è valido per qualsiasi urto. Tuttavia, se ora si considera l'energia cinetica, si ottiene che

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2m_1} p_{1,i}^2 + \frac{1}{2m_2} p_{2,i}^2$$

ma essendo le quantità di moto delle due particelle **uguali in modulo**, allora è immediato evincere come

$$\frac{1}{2m_1} p_{1,i}^2 + \frac{1}{2m_2} p_{2,i}^2 = p_{1,i}^2 \cdot \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right)$$

Analogamente, per quanto concerne l'energia cinetica finale si ottiene che

$$K_f = \frac{1}{2m_1} p_{1,f}^2 + \frac{1}{2m_2} p_{2,f}^2 = p_{1,f}^2 \cdot \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right)$$

Ciò, tuttavia, non significa che l'energia cinetica si conserva sempre (è possibile che vi sia dispersione di energia, ma anche un'aggiunta di energia, come nel caso di un'esplosione).

### 7.7.2 Urti elastici

Nel caso di urti elastici, si ha **conservazione di energia cinetica** oltre che di quantità di moto, per cui

$$K_i = p_{1,i}^2 \cdot \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) = K_f = p_{1,f}^2 \cdot \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) \longrightarrow |p_i| = |p_f|$$

Ciò significa che

$$\boxed{|v_{1,i}| = \frac{|p_i|}{m_1} = \frac{|p_f|}{m_1} = |v_{1,f}|} \quad \text{e} \quad \boxed{|v_{2,i}| = \frac{|p_i|}{m_2} = \frac{|p_f|}{m_2} = |v_{2,f}|}$$

**Osservazione:** Pertanto, nel caso di urti elastici, le due masse che si scontrano conservano la propria velocità prima e dopo l'urto (in quanto quantità di moto ed energia cinetica sono conservati), per cui:

Conservazione dell'energia	Conservazione della quantità di moto
$ v_{1,i}  =  v_{1,f} $	$ p_{1,i}  =  p_{1,f} $
$ v_{2,i}  =  v_{2,f} $	$ p_{2,i}  =  p_{2,f} $

Tabella 1: Conclusioni sugli urti elastici

Ovviamente, per tutti gli urti è possibile affermare che

$$\vec{p}_{1,i} = -\vec{p}_{2,i} \quad \text{e} \quad \vec{p}_{1,f} = -\vec{p}_{2,f}$$

in forza della conservazione della quantità di moto.

Tuttavia, solamente nel caso degli urti elastici si ha che

$$|p_{1,i}| = |p_{2,i}| \quad \text{e} \quad |p_{1,f}| = |p_{2,f}|$$

in forza della conservazione dell'energia cinetica.

Non solo, ma siccome le velocità delle due particelle è nella stessa direzione, ma in verso opposto, si può affermare che

$$|\vec{v}_{1,i} - \vec{v}_{2,i}| = |v_{1,i}| + |v_{2,i}| = |v_{1,i}| + |v_{2,f}| = |\vec{v}_{1,f} - \vec{v}_{2,f}|$$

## 7.8 Urto in 1D - Elastico

Nel caso di urto in 1D, si può presentare solamente la situazione seguente:



Figura 57: Urto elastico in 1D

In cui, ovviamente, si ha che ... continua ...

Passando ad un nuovo sistema di riferimento e non più a quello del centro di massa si ottiene che

$$V_{1,f} = v_{1,f} + v_{\text{CM}} = -v_{1,i} + v_{\text{CM}} = -(V_{1,i} - v_{\text{CM}}) + v_{\text{CM}} = -V_{1,i} + 2v_{\text{CM}}$$

e sapendo come determinare la velocità del centro di massa si ottiene che:

$$\boxed{V_{1,f} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_{2,i} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1,i}}$$

Da cui si può evincere come, nel caso in cui  $m_1 = m_2$ , allora  $V_{i,f} = V_{2,i}$  (ovvero le due masse si scambiano la velocità con l'urto).

Invece, nel caso in cui  $m_1 \rightarrow +\infty$ , allora si ha che la sua velocità finale è identica a quella iniziale:

$$V_{1,f} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_{2,i} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1,i} = V_{1,i}$$

mentre la massa  $m_2$  assume due volte la velocità della prima massa, sottratta alla propria velocità iniziale:

$$V_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{2,i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} V_{2,i} = 2V_{1,i} - V_{2,i}$$

## 7.9 Urto in 1D - Anelastico

Nel caso di un urto parzialmente anelastico non si ha conservazione dell'energia cinetica, mentre se si ha un urto completamente anelastico le due masse interagenti rimangono attaccate l'una all'altra.

Ovviamente, anche in questi due casi, si ha che  $\vec{p}_{1,i} = -\vec{p}_{2,i}$ , così come  $\vec{p}_{1,f} = -\vec{p}_{2,f}$ .

Naturalmente, se si considera un sistema di riferimento differente dal centro di massa, si ottiene

$$V_{1,f} = V_{2,f} = v_{\text{CM}} = \frac{m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

## 7.10 Urti - Riepilogo

- Nello studio degli urti, **la conservazione della quantità di moto si applica sempre**, per cui, in un qualsiasi sistema di riferimento:

$$\vec{P}_{\text{tot},i} = \vec{P}_{\text{tot},f}$$

mentre nel sistema di riferimento del centro di massa si ha

$$\vec{p}_{1,i} = -\vec{p}_{2,i} \quad \text{e} \quad \vec{p}_{1,f} = -\vec{p}_{2,f}$$

in quanto la quantità di moto iniziale e finale è sempre nulla.

- Nel caso di un urto elastico, si ha conservazione dell'energia cinetica

$$K_i = K_f$$

per cui il modulo della velocità relativa all'avvicinamento è uguale al modulo della velocità relativa dopo l'urto.

Mentre nel sistema di riferimento del centro di massa si ha che

$$|p_{1,i}| = |p_{1,f}| = |p_{2,i}| = |p_{2,f}|$$

- Nel caso di un urto completamente anelastico, la velocità finale è quella del centro di massa, ovvero

$$V_{1,f} = V_{2,f} = v_{\text{CM}} = \frac{m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$



12 Aprile 2022

**Esercizio:** Si consideri un carrello posizionato sulla sommità di una rampa avente altezza  $h$ . Quando viene lasciato cadere, da fermo, acquista velocità così come la rampa. Si determini la velocità della rampa.

Naturalmente a tale problema si applica la conservazione della quantità di moto, per cui

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

ed esplicitando la quantità di moto iniziale e finale si ottiene:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{cart,i} + \vec{p}_{ramp,i} = 0 + 0 = \vec{0}$$

$$\vec{p}_f = \vec{p}_{cart,f} + \vec{p}_{ramp,f} = \vec{v}_c \cdot m + \vec{v}_r \cdot M = 0$$

ma siccome  $\vec{p}_{cart,f} = -\vec{p}_{r,f}$  si ottiene che  $\vec{v}_{cart} \cdot m = -\vec{v}_{ramp} \cdot M$ .

Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica, si ottiene anche che

$$E_i = E_f \longrightarrow E_i = K_{cart,i} + K_{ramp,i} + \mathcal{U}_i = mgh$$

mentre

$$E_f = K_{cart,f} + K_{ramp,f} + \mathcal{U}_f = \frac{1}{2}mv_{cart}^2 + \frac{1}{2}Mv_{ramp}^2$$

volendo determinare  $v_{ramp}$  si ottiene, applicando la conservazione dell'energia meccanica e il fatto che  $\vec{v}_{cart} = \frac{M\vec{v}_{ramp}}{m}$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{cart}^2 + \frac{1}{2}Mv_{ramp}^2 \longrightarrow mgh = \frac{1}{2}m \left( \frac{M\vec{v}_{ramp}}{m} \right)^2 + \frac{1}{2}Mv_{ramp}^2 \longrightarrow v_{ramp} = \sqrt{\frac{2mh}{M \cdot \left( 1 + \frac{M}{m} \right)}}$$

**Esercizio:** Si consideri l'urto seguente

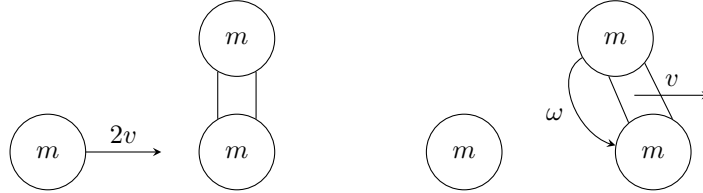


Figura 58: Esempio di urto

Essendo un urto, si può applicare la conservazione della quantità di moto, per cui

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \longrightarrow 2mv_i = \frac{mv_{1,f} + mv_{2,f}}{2m}$$

Per verificare se si conserva l'energia cinetica si consieri:

$$K_i = \frac{1}{2}m \cdot (2v)^2$$

mentre l'energia cinetica finale è data dal centro di massa, ovvero:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{mv_{1,f} + mv_{2,f}}{2m} = v \longrightarrow \frac{v_{1,f}}{2} = v \longrightarrow \vec{v}_{1,f} = 2v$$

per cui l'energia cinetica finale è data unicamente dal contributo della prima massa, da cui:

$$K_f = \frac{1}{2}m(2v)^2$$

per cui il moto considerato è elastico.

## 7.11 Moto dei razzi

Il moto dei razzi ha radici storiche molto profonde; un esempio di fallimento nella progettazione di un razzo riguarda l'esperimento di Gottard:

“Come un metodo per inviare un proiettile verso la parte più alta, persino la parte più alta, dell'atmosfera terrestre, il razzo a carica multipla del Prof. Goddard è un dispositivo praticabile e quindi promettente. (...) dopo che il razzo ha lasciato la nostra aria ed ha iniziato davvero il suo viaggio più lungo, il suo volo non sarebbe né accelerato né mantenuto dall'esplosione delle cariche che potrebbe avere ancora. Affermare che lo sarebbe è negare una legge fondamentale della dinamica, e solo il dottor Einstein e la sua dozzina prescelta, pochi e capaci, sono autorizzati a farlo. Che il Prof. Goddard (...) non conosca la relazione tra azione e reazione, e della necessità di avere qualcosa di meglio di un vuoto contro cui reagire — dire questo sarebbe assurdo.”

**Osservazione:** Naturalmente, applicando la seconda legge di Newton generalizzata, si ha che

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

che, naturalmente, può anche essere interpretata come:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_i}{\Delta t}$$

in cui, ovviamente,  $\vec{p}_i = m \cdot \vec{v}_r$ , in cui  $m$  è la massa totale iniziale del razzo e  $\vec{v}_r$  è la velocità iniziale del razzo. Invece, la quantità di moto finale è  $\vec{p}_f = (m - \Delta m) \cdot (\vec{v}_r + \Delta \vec{v}_r) + \Delta m \cdot (\vec{v}_g + \vec{v}_r)$ , in quanto il razzo ha perso una quantità  $\Delta m$  di gas e, quindi, ha diminuito la propria massa e aumentato la propria velocità; inoltre è necessario anche considerare la quantità di moto della quantità  $\Delta m$  di gas che viene espulso dal razzo stesso, la cui velocità, relativa al razzo, è proprio  $\vec{v}_g + \vec{v}_r$ . La semplificazione porta a

$$\vec{p}_f = (m - \Delta m) \cdot (\vec{v}_r + \Delta \vec{v}_r) + \Delta m \cdot (\vec{v}_g + \vec{v}_r) = m\vec{v}_r - \Delta m\vec{v}_r + m\Delta \vec{v}_r - \Delta m\Delta \vec{v}_r + \Delta m\vec{v}_g + \Delta m\vec{v}_r$$

In altre parole si ottiene

$$= \frac{1}{\Delta t} \cdot (m\Delta \vec{v}_r + \Delta m\vec{v}_g - \Delta m\Delta \vec{v}_r)$$

Ma siccome le variazioni considerate sono infinitesimali, allora  $\Delta m\Delta \vec{v}_r \rightarrow 0$ , da cui

$$\vec{p}_f = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}_r}{\Delta t} + \vec{v}_g \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

Considerando un tempo infinitesimale, ossia  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ , si ottiene che

$$\frac{\Delta \vec{v}_r}{\Delta t} \longrightarrow \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r \quad \text{e} \quad \frac{\Delta m}{\Delta t} \longrightarrow \frac{dm}{dt}$$

Ecco, quindi, che si è ottenuto:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_r + \vec{v}_g \cdot \frac{dm}{dt}}$$

in cui  $\vec{v}_g \cdot \frac{dm}{dt}$  è proprio la **spinta del razzo**.

**Esempio:** Naturalmente, nello spazio, si ha che  $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$ , per cui l'equazione di cui sopra diviene:

$$m\vec{a}_r = -\vec{v}_g \cdot \frac{dm}{dt}$$

Per quanto riguarda la componente orizzontale, riscrivendo l'accelerazione secondo la definizione si ottiene:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -v_g \cdot \frac{dm}{dt} \longrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{v_g}{m} \cdot \frac{dm}{dt}$$

Naturalmente taluna è una equazione differenziale; ma sapendo che

$$\frac{d}{dt} \log(m(t)) = \frac{1}{m} \frac{dm}{dt}$$

si può facilmente evincere come

$$\frac{dv}{dt} = -v_g \frac{d}{dt} \log(m(t)) \longrightarrow v_f - v_i = -v_g \cdot [\log(m_f) - \log(m_i)]$$

che permette di ottenere

$$v_f - v_i = \Delta v = -v_g \log\left(\frac{m_f}{m_i}\right)$$

che prende il nome di **equazione di Ciolkovsky**. È facile campire come, essendo

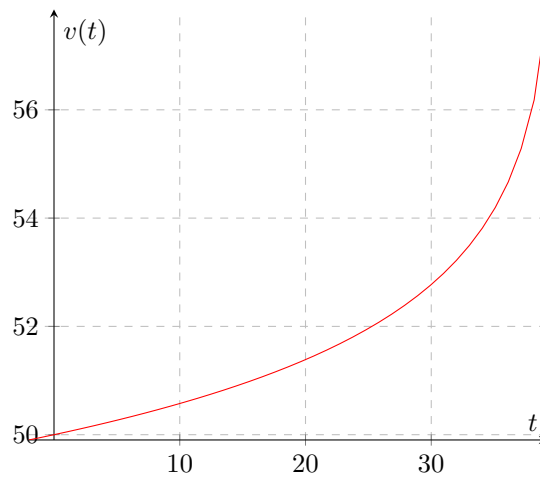
$$\frac{m_f}{m_i} < 1 \longrightarrow \log\left(\frac{m_f}{m_i}\right) < 0$$

ma essendo preceduto da un segno  $-$ , si ottiene un aumento di velocità, ovviamente.

**Osservazione:** È anche possibile considerare la velocità in funzione del tempo, ovvero

$$v(t) = v_i - v_g \log\left(\frac{m(t)}{m_i}\right)$$

che, graficamente, corrisponde a:



13 Aprile 2022

Per la risoluzione di un problema fisico, è fondamentale compiere i passi seguenti:

**1. Visualizzazione**

- (a) Creare un'immagine mentale del problema
- (b) Identificare i concetti che possono essere utili
- (c) Riformulare la domanda a parole più chiare,

**2. Descrizione****3. Pianificazione**

- (a) Trasferire i concetti in forma matematica
- (b) È possibile partire dalla soluzione e lavorare all'indietro

**4. Valutazione della soluzione****5. Modificazione del piano risolutore**

...continua...

## 8 Moto e dinamica dei corpi rigidi

Di seguito si fornisce la definizione di **corpo rigido**:

**CORPO RIGIDO**

Un corpo rigido è un corpo la cui **forma** e **dimensione** permangono fissi.  
In altre parole, le **posizioni relative** tra le parti del corpo sono **fisse**.

**Osservazione:** Ovviamente, la definizione di corpo rigido è relativa e fortemente limitata a dei problemi specifici, in quanto la deformazione di un corpo può avvenire sempre, ma con gradi diversi.

### 8.1 Corpi rigidi - Cinematica

#### 8.1.1 Traslazione

Naturalmente, in una traslazione di un corpo rigido, tutte le parti del corpo subiscono lo **stesso spostamento** (altrimenti si avrebbe deformazione) e, quindi, presentano la **medesima velocità**: ciò significa che sono sufficienti solamente 3 parametri per descrivere una traslazione, ossia  $(x, y, z)$ .

#### 8.1.2 Rotazione

Per quanto concerne la rotazione di un corpo rigido, è necessario nuovamente specificare 3 parametri, come

- 3 angoli;
- l'asse di rotazione più l'angolo.

Già approssimando un corpo ad un punto materiale, si era osservato come se un punto compie un moto rotatorio di raggio  $r$  e descrivendo un angolo  $\theta$ , allora, chiamando  $s$  la lunghezza dell'arco descritto da un punto compiendo uno spostamento angolare a distanza  $r$  dall'asse, si interpreta l'angolo  $\theta$  descritto come

$$\theta = \frac{s}{R}$$

che viene naturalmente espresso in **radiani**. Inoltre  $\theta$  non è solo un angolo, ma è anche una “**coordinata angolare**” che permette di esprimere

- **velocità angolare:**  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$
- **accelerazione angolare:**  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha$

come nel caso di un'accelerazione angolare costante, calcolata come

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

che ricorda esattamente un la cinematica di un moto uniformemente accelerato (infatti, in questo caso, si ha un **memento angolare costante**).

**Osservazione:** Nel caso di un moto rotatorio, è fondamentale considerare l'attrito (che è un attrito statico, non essendoci moto relativo tra le superfici di contatto).

Inoltre, se un corpo rotola con velocità  $\vec{v}$ , allora ciò significa che si può definire una funzione spostamento nel tempo:

$x(t) :=$  posizione del centro del cerchio in funzione del tempo

$\theta(t) :=$  rapporto fra lo spostamento traslatorio orizzontale e il raggio della circonferenza

Si osservi, infatti, che nel caso di piccoli spostamenti, l'arco descritto da una circonferenza  $\Delta s$  può essere approssimato allo spostamento orizzontale  $\Delta x$ , per cui

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} \cong \frac{\Delta x}{r}$$

Ciò, allora, porta alla seguente approssimazione:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{x(t)}{r}$$

sempre ponendo che  $v = \omega r$ .

### 8.1.3 Rototraslazione

Talvolta si parla anche di **rototraslazione**, ovvero un moto che è sia rotatorio che traslatorio, per la cui descrizione sono fondamentali 6 parametri.

## 8.2 Corpi rigidi - Dinamica

Partendo dal presupposto che un corpo rigido è approssimabile tramite il modello di un corpo esteso, ossia un **assieme di punti materiale con distanze relative fisse**.

L'applicazione del centro di massa ad un assieme di punti permette di scrivere la legge:

$$\vec{F}_{\text{tex}} = M \cdot \vec{a}_{\text{CM}}$$

che è una proprietà totalmente generale e, quindi, include anche il caso dei corpi rigidi. Ciò permette di affermare che la risultante delle forze esterne, anche se ciascuna presenta un punto di applicazione diverso, si comporta come se fosse un'unica forza che agisce sul centro di massa, come se fosse un punto materiale.

**Corollario 8.0.1** *Naturalmente, se non vi sono forze esterne applicate al corpo esteso*

$$\vec{F}_{\text{ext}} = 0 \longrightarrow \vec{a}_{\text{CM}} = 0$$

ossia l'accelerazione del centro di massa è nulla: ciò significa che il corpo si sposta a velocità costante. Tuttavia, ciò non significa che non vi sia accelerazione, in quanto un corpo può anche ruotare con un'accelerazione angolare non nulla.

### 8.2.1 Corpi rigidi - Energia cinetica

Si consideri un sistema di punti materiali (ovvero un insieme di punti le cui velocità e masse possono essere diverse fra di loro); naturalmente, l'energia cinetica totale del sistema è

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

mentre la velocità del centro di massa si calcola come

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

e volendo spostarsi nel sistema di riferimento del centro di massa, si calcoli la velocità relativa al centro di massa come:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i$$

Allora, ricalcolando nuovamente l'energia cinetica totale, si ottiene

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \cdot (\vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \cdot (\vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \cdot (\vec{v}_{\text{CM}}^2 + \vec{v}'_i^2 + 2\vec{v}_{\text{CM}} \cdot \vec{v}'_i)$$

che permette di ottenere

$$K = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \underbrace{\vec{v}_{\text{CM}} \cdot \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i}_{0 \text{ perché } \vec{p}_{\text{tot}} \text{ nel centro di massa}}$$

per cui si ottiene il seguente risultato generale (che non dipende dal fatto che si parli di corpi rigidi o meno)

$$K_{\text{tot}} = K_{\text{CM}} + K_{\text{rel}}$$

**Osservazione:** Si osservi che, nel caso di un corpo rigido,

$$K_{\text{tot}} = K_{\text{CM}} + K_{\text{rot}}$$

in cui  $K_{\text{rot}}$  prende il nome di **energia cinetica di rotazione**. Al fine di determinare tale energia, si consideri una massa  $m$  che ruota con velocità angolare  $\omega$  descrivendo una circonferenza di raggio  $r$ . Da ciò segue che l'energia cinetica del corpo è, ovviamente:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2 m (\omega r)^2} = \frac{1}{2 m \omega^2 r^2}$$

Se, invece, si considera un assieme di punti, il risultato generale diviene:

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_I$$

in cui

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

prende il nome di **momento di inerzia**. Ecco che sulla base di tale definizione è possibile definire l'energia cinetica totale di un corpo rigido come

$$K_{\text{tot}} = K_{\text{CM}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

in cui  $I$  è il momento di inerzia attorno ad un asse che passa per il centro della massa (sempre ricordando come  $v = \omega r$ ).

**Osservazione:** Si osservi che se si considerano due piani inclinati identici, sul primo del quale vi è una massa quadrata  $m$  e sul secondo una sfera  $m$ , allora, se entrambi partono da un'altezza  $h$  e si spostano senza attrito, applicando la conservazione dell'energia meccanica, si ottiene:

1.  $\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh$
2.  $\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{r^2} = mgh$

In cui è evidente come la velocità finale della prima massa sarà maggiore della seconda (e quindi arriva prima), in quanto nel secondo caso parte dell'energia potenziale viene "persa o spesa" per effettuare la rotazione.

### 8.3 Momento di inerzia

La definizione generale di **momento di inerzia** è

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

ma se si considera un corpo continuo si ottiene

$$I = \int r^2 \cdot dm$$

e se la densità è data si ha

$$I = \int r^2 \cdot \rho(\vec{r}) \cdot dV$$

che, in ognuno di talui tre casi, è interpretabile come **la resistenza di un corpo al cambiamento di velocità angolare** (che è molto simile alla definizione della massa inerziale).

Tuttavia, la definizione del momento di inerzia dipende dalla **posizione** e dall'**orientazione** dell'asse di rotazione (su uno stesso corpo, ad assi di rotazione differenti corrispondono momenti di inerzia differenti: più la massa è distante dall'asse di rotazione, maggiore sarà il suo momento di inerzia).

**Osservazione:** Naturalmente, nel caso di un punto materiale di massa  $m$ , a distanza  $r$  dall'asse di rotazione, si ha che il suo momento di inerzia è calcolabile come:

$$I_{\text{punto}} = mr^2$$

se, invece, si considerano due punti di massa  $\frac{m}{2}$  a distanza  $r$  dall'asse di rotazione, si ha che

$$I_{2 \text{ punti}} = \frac{m}{2}r^2 + \frac{m}{2}r^2 = mr^2$$

Più in generale, considerando  $n$  punti di massa  $\frac{m}{n}$  a distanza  $r$  dal centro si avrà che

$$I_{n \text{ punti}} = \sum_{i=1}^n \frac{m}{n}r^2 = mr^2$$

e si va al limite si ottiene sempre che

$$I_{\infty \text{ punti}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m}{n}r^2 = mr^2$$

ed è possibile calcolare il momento di inerzia anche per altri corpi:

- Sfera piena:  $I = \frac{2}{5}mr^2$ ;
- Sfera cava:  $I = \frac{2}{3}mr^2$ ;
- Cilindro:  $I = \frac{2}{5}mr^2$ ;

21 Aprile 2022

La formulazione per l'energia cinetica del moto di rotazione si calcola considerando il momento di inerzia, il quale dipende dall'asse di rotazione del corpo stesso (in quanto il momento di inerzia si calcola in base alla distanza dei contributi di massa dall'asse di rotazione). È stato osservato, inoltre, quale sia il momento di inerzia di un anello che, come si può facilmente intuire, è lo stesso di un anello cavo.

Al fine di determinare il periodo di rotazione sapendo la velocità angolare  $\omega$ , è possibile impiegare la definizione e isolare  $T$  come segue

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Se si considera un'accelerazione angolare costante  $\alpha$  e una velocità angolare iniziale  $\omega$ , allora il tempo impiegato per arrestarsi è

$$t = \frac{\omega}{\alpha}$$

Se si considera la definizione di energia cinetica di rotazione e di velocità angolare, si ha che

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \longrightarrow K = \frac{1}{2}I\frac{4\pi^2}{T^2} \longrightarrow T = \sqrt{\frac{2\pi^2 I}{K}}$$

e sapendo che  $I = mr^2$ , avendo due masse  $m$  a distanza  $d$  l'una dall'altra, si ottiene

$$I = 2m\left(\frac{d}{2}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}md^2$$

per cui si ha:

$$T = \sqrt{\frac{2\pi^2 I}{K}} = \sqrt{\frac{\pi^2 md^2}{K}} = \pi$$

essendo tutte le misure unitarie.

**Esercizio:** Un blocco di massa  $m$  è attaccato ad un filo di massa trascurabile, che è avvolto intorno a un cilindro omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R_0$ . Il cilindro è libero di girare, con attrito trascurabile, intorno a un asse orizzontale fisso passante per il suo centro. Dopo che il blocco è sceso di un tratto verticale  $h$  a partire dalla quiete, si determini la velocità lineare del centro del blocco e la velocità angolare del cilindro rispetto al suo asse di rotazione.

Immediatamente è possibile applicare la conservazione dell'energia meccanica del sistema cilindro-blocco: le energie coinvolte sono l'energia cinetica (anche di rotazione) e l'energia potenziale, per cui

$$E_i = E_f \longrightarrow K_i + \mathcal{U}_i = K_f + \mathcal{U}_f$$

ma siccome il sistema, inizialmente, parte dalla quiete, l'energia cinetica iniziale è nulla. Per cui si ha

$$K_f = \mathcal{U}_i - \mathcal{U}_f$$

Ovviamente, la variazione di energia cinetica è  $\Delta\mathcal{U} = mgh$ , mentre l'energia cinetica finale è data dalla somma dell'energia cinetica del blocco di massa  $m$  e la velocità angolare del cilindro, per cui:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh$$

ma siccome  $v$  e  $\omega$  sono legate fra di loro dalla relazione

$$\omega = \frac{v}{R_0}$$

per cui si ottiene che

$$v^2 \cdot \left(1 + \frac{I}{m \cdot R_0^2}\right) = 2gh$$

e sapendo che il cilindro è omogeneo, allora

$$I = \frac{1}{2}MR_0^2$$



per cui la velocità lineare del centro del blocco si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{2M}{m}}}$$

e volendo conoscere la velocità angolare del cilindro, è sufficiente dividere  $v$  per  $R_0$ .

**Esempio:** Si consideri un oggetto rotondo di massa  $m$  e raggio  $R$  che rotola giù da un piano inclinato, partendo da un'altezza  $h$  nello stato di quiete. Allora, considerando l'attrito trascurabile, si può applicare la conservazione dell'energia meccanica, per cui

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

ma siccome si parla sempre di rotolamento, è nota la relazione

$$\omega = \frac{v}{R}$$

da cui si ha che

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}}}$$

E sapendo come determinare il momento di inerzia  $I$  di diversi oggetti, si ha che:

- Sfera piena:  $I = \frac{2}{5}mR^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}}$
- Sfera cava:  $I = \frac{2}{3}mR^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$

Pertanto, la velocità di movimento di un corpo in rotolamento non dipende dalla sua massa, dalla sua dimensione, dal raggio, etc., ma solamente dalla sua distribuzione di massa (ovvero dalla forma dell'oggetto, ossia se è un cilindro, una sfera, etc.)

**Osservazione:** Pertanto, due cilindri, di raggio diverso e massa diversa, ma con densità uniforme, si muoveranno alla stessa velocità.

Si considerino, poi, due biglie identiche che sono posizionate su due rotaie a distanze diverse: allora, la biglia che si posiziona sulle rotaie più ravvicinate fra di loro si muove a velocità maggiore, in quanto il raggio di rotazione della sfera rispetto al punto di contatto con le rotaie è molto maggiore rispetto ad una biglia poggiata sulle rotaie a distanza maggiore. Ecco che allora la velocità alla quale si muovono le due biglie si calcola come segue:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mr'^2}}}$$

in cui più  $r' \rightarrow R$  (ossia più le rotaie sono vicine tra loro), più la velocità aumenta, ma se  $r' \rightarrow 0$  (ovvero più le rotaie si allontanano), allora la velocità di traslazione diminuisce a scapito di quella di rotazione.

## 8.4 Teorema degli assi paralleli

Si consideri una massa informe, il cui centro di massa, a distanza  $d$  dall'asse di rotazione, ruota a velocità angolare  $\omega$ . Allora, per quanto già visto, si ha

$$K_{\text{tot}} = K_{\text{rot}} + K_{\text{CM}} = \frac{1}{2}I_{\text{CM}} + \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2$$

per cui si ottiene che

$$K_{\text{tot}} = \frac{1}{2}()$$

**Esempio:** Si consideri una porta di forma rettangolare (di dimensioni  $l, h, s$ ) avente una distribuzione uniforme. Allora il momento di inerzia del suo centro di massa si calcola come

$$I_{\text{CM}} = \int r^2 \cdot dm = \int r^2 \rho dV = \int r^2 \frac{M}{l \cdot h \cdot s} \cdot dv$$

A questo punto, siccome il centro di massa si trova in posizione  $\frac{l}{2}$  e siccome  $dV = dx \cdot hs$ , è facile determinare

$$I_{\text{CM}} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{M}{l \cdot s \cdot h} \cdot h \cdot s \cdot dx = \frac{M}{l} \cdot \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \cdot dx = \frac{M}{l} \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12} M l^2$$

che è un risultato molto più generale che per una porta, ma per un qualsiasi oggetto a parallelepipedo (ovviamente considerando sempre come asse di rotazione passante per il centro di massa). Tuttavia, una porta non ruota attorno al proprio centro di massa, ma attorno ad uno dei lati, per cui ora è possibile applicare il teorema degli assi paralleli e considerare la distanza del centro di massa da uno dei lati come  $\frac{l}{2}$ , ottenendo

$$I = I_{\text{CM}} + M \cdot \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} M l^2 + \frac{1}{4} M l^2 = \frac{1}{3} M l^2$$

per cui è evidente come sia più facile far ruotare una porta attorno al proprio centro di massa invece che attorno ad uno dei lati.

## 8.5 Prodotto vettoriale

È noto che dati due vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  aventi un angolo  $\theta$  compreso tra i due, allora il prodotto vettoriale tra  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  è  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ , per cui  $|\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin(\theta)$ , in cui  $\vec{C} \perp \vec{A}$  e  $\vec{C} \perp \vec{B}$  e il suo verso è dato dalla regola della mano destra.

Non solo, ma era anche noto come il vettore velocità potesse essere descritto anche come prodotto vettoriale tra il vettore  $\vec{\omega}$  e  $\vec{r}$ , per cui  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . È molto conveniente, infatti, descrivere il versore dell'asse di rotazione del vettore  $\vec{\omega}$  come

$$\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$

e allo stesso modo, per l'accelerazione angolare  $\vec{\alpha}$  si ha che il suo asse è

$$\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$$

Inoltre, se l'asse è fisso si ha che  $\vec{\omega} \parallel \vec{\alpha}$  e se  $\vec{\alpha}$  è costante, allora  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha} \cdot t$ .

## 9 Oscillazioni

## 10 Solidi e fluidi

## 11 Temperatura e calore

## **12 Il primo principio della termodinamica**

## **13 Il secondo principio della termodinamica**