

Università di Trieste

Laurea in ingegneria elettronica e informatica

Enrico Piccin - Corso di Fisica generale I - Prof. Pierre Thibault

Anno Accademico 2021/2022 - 1 Marzo 2022

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Metodo scientifico	3
2	Unità e vettori	4
2.1	Grandezza fisica	4
2.2	Cifre significative e incertezza	4
2.2.1	Operazioni di base	5
2.3	Ordini di grandezza	5
2.4	Analisi dimensionale	6
2.5	Scalari e vettori	6
2.6	Prodotto con uno scalare	7
2.7	Somma vettoriale	7
2.8	Versori	7
2.9	Modulo e direzione	8
2.10	Prodotto scalare	9
3	Cinematica	10
3.1	Posizione e spostamento	10
3.2	Posizione in funzione del tempo	11
3.3	Velocità	12
3.4	Accelerazione	13
3.5	Moto uniformemente accelerato	15
3.5.1	Caduta libera dei gravi	17
3.5.2	Moto dei proiettili	18
3.6	Moto in 2D e 3D	21
3.7	Moto circolare uniforme	22
3.8	Moti relativi	26
3.8.1	Caso generale	27
4	Dinamica	28
4.1	Massa	28
4.2	Forza	29
4.3	Principi della dinamica - Leggi di Newton	29
4.4	Forza peso	29
4.5	Forza normale	30
4.6	Forza di tensione	33
4.7	Forza di attrito	37
4.8	Attrito dovuto a un fluido (resistenza)	43
4.9	Dinamica del moto circolare uniforme	45
4.10	Sistemi non-inerziali	47
4.11	Prodotto vettoriale	48
4.12	Pseudo-forza di Coriolis	49

5	Gravità	51
5.1	L'esperimento di Cavendish	52
5.2	Campo gravitazionale	52
5.3	Massa gravitazionale e inerziale	52
5.4	Corpi estesi	53
6	Energia	54
7	Moto dei sistemi	55
8	Corpi rigidi	56
9	Oscillazioni	57
10	Solidi e fluidi	58
11	Temperatura e calore	59
12	Il primo principio della termodinamica	60
13	Il secondo principio della termodinamica	61

1 Marzo 2022

1 Introduzione

La **Fisica** è lo studio della materia e delle sue interazioni. La **Fisica classica** è divisa in tre macroaree:

1. Meccanica classica
2. Termodinamica
3. Elettromagnetismo

La Fisica è organizzata in

- **Leggi:** relazioni fra grandezze fisiche
- **Principi:** affermazioni generali da reputare vere
- **Modelli:** analogie o rappresentazioni pratiche su cui basare il proprio studio
- **Teoria:** insieme di leggi, principi e modelli

1.1 Metodo scientifico

Il **metodo scientifico** si basa su **osservazioni** della realtà circostante, a cui seguono delle **ipotesi**, ossia delle possibili spiegazioni dei fenomeni osservati, basati sulle osservazioni precedentemente formulate.

Dopo aver esposto le proprie ipotesi, esse devono essere verificate, mediante degli **esperimenti**, a cui seguono delle **analisi** dei risultati sperimentali ottenuti. Il processo di analisi viene seguito da delle **conclusioni** che “concludono” il metodo scientifico.

Naturalmente tale circuito non è chiuso, in quanto ciascuna di queste fasi può essere ripetuta più e più volte. La parte più importante di tale *metodo scientifico* è la dimostrazione, così come la verifica tramite **sperimentazioni** delle proprie ipotesi, in quanto le ipotesi devono essere **sempre verificate**. Tale processo permette di sviluppare leggi e teorie con un fondamento concreto e solido.

Osservazione: Si osservi che **verificare un’ipotesi** non significa dimostrare che un’ipotesi è vera, ma **verificare che un’ipotesi può essere contraddetta**, ovvero ci si deve assicurare che una **teoria deve essere “falsificabile”**, ossia che può essere dimostrato che essa sia falsa.

2 Unità e vettori

2.1 Grandezza fisica

Alla base della **Fisica** si pone il concetto di **grandezza fisica**. Non è facile, per esempio, definire che cosa sia il *tempo*; tuttavia, la soluzione più immediata è quella che prevede di definire la misura del tempo come ciò che si riesce a misurare tramite, per esempio, un orologio.

Si parla, in tale caso, di **definizione operativa**:

DEFINIZIONE OPERATIVA

Una grandezza fisica è definita solo dalle operazioni necessarie per misurarla.

Inoltre, le grandezze fisiche si esprimono in termini di un **campione**, il quale prende il nome di **unità**.

In Fisica, inoltre, si distinguono due diverse categorie di grandezze fisiche:

1. Grandezze fisiche fondamentali
2. Grandezze fisiche derivate

Le **grandezze fisiche fondamentali** sono 3:

1. Tempo: il tempo presenta come unità il **secondo** (s) che, dal 1967, è stato definito come

9192631170 volte il periodo di oscillazione di una risonanza dell'atomo di Cesio ^{133}C

Prima di tale data, il secondo era definito come una suddivisione del giorno, ma tale definizione era imprecisa: la terra non ruota sempre con la stessa velocità.

2. Lunghezza: la lunghezza presenta come unità il **metro** (m), il quale viene definito come

$\frac{1}{299782458}$ la distanza percorsa dalla luce in 1 s

Prima di tale definizione, il metro era definito come $\frac{1}{10000}$ la distanza tra equatore e polo. La nuova definizione, tuttavia, è più precisa, in quanto la velocità della luce è **costante**, fissata in quanto su tale costante si definisce il metro.

3. Massa: la massa presenta come unità il **chilogrammo** (kg), il quale viene definito in funzione della **costante di Planck** ($h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$). Prima di tale definizione, il chilogrammo era definito con riferimento ad un campione presente a Parigi e su cui si faceva riferimento per ogni misura di massa.

Le grandezze fisiche fondamentali permettono, poi, di definire le grandezze fisiche derivate, quale il **Volume**, la **Forza**, etc.

2.2 Cifre significative e incertezza

In Fisica, quando si effettuano delle misurazioni, deve essere sempre specificata la precisione e, dunque, l'incertezza. Infatti, **tutte le misure hanno un livello di incertezza**.

Per esempio

$$L = 1.82 \pm 0.02 \text{ m}$$

$$m = 3.5 \pm 0.1 \text{ kg}$$

Da notare che l'indicazione dell'incertezza è sempre (o quasi) data da una sola cifra: altrimenti si avrebbe incertezza nell'incertezza. L'indicazione dell'incertezza è la base della **fisica sperimentale**.

Nella pratica, tuttavia, l'indicazione dell'incertezza è ridondante e pesante. Per indicare il livello

di precisione si ricorre alle cifre significative.

Per esempio

$$L = 1.82 \text{ m} = 1.82 \pm 0.01 \text{ m}$$

$$m = 3.5 \text{ kg} = 3.5 \pm 0.1 \text{ kg}$$

2.2.1 Operazioni di base

Per la gestione delle cifre significative nelle operazioni di calcolo è importante tenere a mente che

- Moltiplicazione e Divisione: bisogna considerare come cifre significative del prodotto o del quoziente il più basso numero di cifre significative dei fattori o di dividendo e divisore.

Per esempio

$$1,1 \text{ m} \times 3.45 \text{ m} = 3.8 \text{ m}^2$$

in quanto il più basso numero di cifre significative dei fattori è 1.

- Addizione e Sottrazione: bisogna considerare come cifre significative della somma o differenza il più basso numero di decimali degli addendi o del minuendo e sottraendo.

Per esempio

$$1.1 \text{ m} - 12 \text{ cm} = 1.1 \text{ m} - 0.12 \text{ m} = 0.98 \text{ m} = 1.0 \text{ m}$$

in quanto il più basso numero di decimali tra minuendo e sottraendo è 1.

2.3 Ordini di grandezza

Molto spesso, nelle stime è importante non tanto la precisione delle misure, ma l'ordine di grandezza delle stesse, in modo tale da effettuare un macroconfronto utile per delle valutazioni pratiche e veloci.

Lo scopo, quindi, dell'impiego degli ordini di grandezza è quello di effettuare dei calcoli veloci e, quindi, delle stime. Più precisamente:

ORDINE DI GRANDEZZA

L'ordine di grandezza di una misura è la **potenza di 10 più vicina**.

Esempio: Un ingegnere deve fabbricare un nuovo pacemaker. Si stimi quanti battiti di cuore deve fare senza malfunzionamento. Per effettuare tale stima è necessario conoscere la *media dei battiti al secondo* e *l'aspettativa di vita del soggetto*. Considerando, quindi, come media dei battiti $m_B = 1$ battito/s e come aspettativa di vita $a_V = 60$ anni. La stima selectlanguage

$$m_B \times a_V \times \pi \times 10^7 \text{ s/anno} = 1 \text{ battito/s} \times 60 \text{ anni} \times \times 10^7 \text{ s/anno} = 2 \times 10^9 \text{ battiti}$$

2 Marzo 2022

Il metodo scientifico permette di **falsificare una teoria**, quindi non è vero che permette di validare una teoria senza ambiguità.

2.4 Analisi dimensionale

Il concetto di **unità** è estremamente importante per parlare di **analisi dimensionale**. In particolare

$$A = B$$

non può essere valido e corretto formalmente se A e B hanno unità diverse. Questo è molto intuitivo per le grandezze fisiche fondamentali, ma quando si parla di grandezze derivate diventa un punto cruciale: tale concetto permette di validare anche delle possibili soluzioni di test.

Per esempio, l'unità di misura della costante di richiamo di una molla si può facilmente ricavare dalla formula della *forza di richiamo*:

$$F = k \cdot x$$

Da cui è immediato capire che

$$[k] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{\text{kg m s}^{-2}}{m} = \text{kg s}^{-2}$$

2.5 Scalari e vettori

Di seguito si espone la definizione di **scalare**:

SCALARE

Uno **scalare** è una grandezza specificata da un numero + unità.
Per esempio la *lunghezza*, la *massa* o l'*energia*.

Mentre un **vettore** è:

VETTORE

Un **vettore** è una quantità definita da un valore e una direzione (e un verso, che può essere implicito nella definizione di direzione).

Tale definizione, tuttavia, pur essendo molto intuitiva, non risulta particolarmente pratica. Si potrebbe anche considerare un vettore come una **quantità con più valori associati**, ovvero una **lista di numeri a cui conferiamo un significato**.

Per esempio, in algebra un vettore viene indicato come segue

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

a cui la fisica attribuisce un significato preciso: 1, 2 e 3 sono le componenti associate alle tre diverse dimensioni x , y e z . Il vettore di cui sopra, allora, si può scrivere come

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

Osservazione: Anche se tale definizione sembra identica alla definizione del **punto**, in realtà tale definizione è differente, in quanto

- un punto non ha una lunghezza;
- non è possibile eseguire la somma di due punti, etc.

2.6 Prodotto con uno scalare

Dato un vettore

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

e si considera uno scalare $a \in \mathbb{R}$, allora

$$a \cdot \vec{v} = (a \cdot v_x, a \cdot v_y, a \cdot v_z)$$

in cui il vettore $a \cdot \vec{v}$ è un vettore che

- presenta come lunghezza la lunghezza del vettore \vec{v} moltiplicata per $|a|$;
- presenta come direzione la stessa direzione del vettore \vec{v} ;
- presenta come verso lo stesso verso del vettore \vec{v} se $a \geq 0$, mentre avrà verso opposto se $a \leq 0$.

2.7 Somma vettoriale

Dati due vettori \vec{u} e \vec{v} , la loro somma viene eseguita graficamente tramite la **regola del parallelogramma**, o il metodo “punta-coda”:



Figura 1: Somma vettoriale con il metodo “punta-coda”

Se \vec{u} e \vec{v} sono espressi nello stesso sistema di riferimento, allora è chiaro che la loro somma sarà data **componente per componente**, ovvero

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$$

2.8 Versori

Si definiscano tre versori come segue

$$\hat{i} = (1, 0, 0)$$

$$\hat{j} = (0, 1, 0)$$

$$\hat{k} = (0, 0, 1)$$

Allora qualsiasi vettore può essere scritto come

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{j} + v_z \cdot \hat{k}$$

in cui, naturalmente, v_x , v_y e v_z sono le componenti di \vec{v} in direzione \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} . Naturalmente si scrive \hat{i} e non \vec{i} in quanto

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

essi, infatti, prendono il nome di **versori** o **vettori unità**.

2.9 Modulo e direzione

Di seguito si espone la definizione di **modulo di un vettore**:

MODULO DI UN VETTORE

Il modulo di un vettore è la sua “lunghezza geometrica” e si indica come segue

$$v = |\vec{v}|$$

È chiaro che il modulo può essere **positivo o nullo**, mai negativo. In termini di componenti il modulo si calcola come segue

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Per esempio, si calcoli il modulo del vettore

$$\hat{n} = \frac{\vec{v}}{v}$$

ovviamente si procede come segue

$$\left| \frac{\vec{v}}{v} \right| = \frac{1}{|v|} \cdot |\vec{v}| = \frac{v}{v} = 1$$

Ecco che allora tale vettore è a tutti gli effetti un versore in direzione \vec{v} , in quanto di modulo 1. Questo fa capire come si possa definire un versore associato a qualunque vettore: basta dividere il vettore per il suo modulo.

Mentre di seguito si espone la definizione di **direzione di un vettore**:

DIREZIONE DI UN VETTORE

La direzione di un vettore (e anche il suo verso) è definita, in due dimensioni, come l'angolo θ che il vettore descrive con il semiasse positivo delle ascisse.

È immediato osservare che

$$v_x = v \cdot \cos(\theta)$$

$$v_y = v \cdot \sin(\theta)$$

e si può verificare che

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v^2 \cdot \cos^2(\theta) + v^2 \cdot \sin^2(\theta)} = v \cdot \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = v$$

2.10 Prodotto scalare

Di seguito si espone la definizione di **prodotto scalare**:

PRODOTTO SCALARE

Il prodotto scalare tra due vettori \vec{v} e \vec{u} , in termini di componenti si definisce come segue:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x \cdot u_x + v_y \cdot u_y + v_z \cdot u_z$$

che è, naturalmente, uno scalare.

Analogamente si può interpretare il prodotto scalare tra due vettori \vec{v} e \vec{u} come il prodotto dei moduli per il **coseno** dell'angolo θ compreso tra i vettori stessi, ovvero

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v \cdot u \cdot \cos(\theta)$$

Osservazione: Naturalmente, da tale definizione seguono delle importanti osservazioni:

- $\vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = |\vec{v}|^2$
- $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$
- $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$. Questo significa che i due vettori considerati sono ortogonali, ovvero i versori \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} sono a due a due ortogonali.

Si consideri, invece, l'esempio seguente:

$$\vec{v} \cdot \hat{i} = (v_x \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{j} + v_z \cdot \hat{k}) \cdot \hat{i} = v_x \cdot \hat{i} \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{i} \cdot \hat{j} + v_z \cdot \hat{i} \cdot \hat{k} = v_x$$

e questo significa che $\vec{v} \cdot \hat{i}$ è la **proiezione** del vettore \vec{v} in direzione \hat{i} . Tale metodo è molto efficace per effettuare un cambio di base: se al posto dei versori \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} , che presuppongono l'origine del sistema di riferimento in $O = (0, 0, 0)$ si sceglieranno degli altri versori, moltiplicando il vettore \vec{v} per taluni versori si otterrebbero le componenti del nuovo vettore in una nuova base.

Osservazione: Se si considerano due vettori \vec{c} e \vec{d} , allora il loro prodotto scalare può essere interpretato come segue

$$\vec{c} \cdot \vec{d} \cdot \frac{d}{d} = d \cdot \left(\vec{c} \cdot \frac{\vec{d}}{d} \right)$$

per cui, ricordando che

$$\hat{n} = \frac{\vec{d}}{d}$$

è un versore in direzione del vettore \vec{d} , allora il prodotto scalare tra \vec{c} e \vec{d} è proprio la proiezione del vettore \vec{c} sul vettore \vec{d} , per quanto appena detto a proposito delle **proiezioni**, moltiplicata per il modulo del vettore \vec{d} .

3 Marzo 2022

3 Cinematica

La descrizione del moto di un corpo (approssimando ad un punto) prende il nome di **cinematica** (mentre la ragione del moto viene studiata dalla **dinamica**). Com'è noto, inoltre, un vettore è una quantità con **modulo** e **direzione** (e **verso**). La descrizione di un vettore avviene tramite le sue componenti: in particolare, dato un versore \hat{n} , la componente di un vettore \vec{v} in direzione del versore \hat{n} è così definita

$$\vec{v} \cdot \hat{n}$$

Per esempio, la componente del vettore \vec{v} lungo l'asse x è

$$\vec{v} \cdot \hat{i} = v_x$$

Inoltre, il **prodotto scalare** tra due vettori \vec{v} e \vec{u} viene definito come:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x \cdot u_x + v_y \cdot u_y + v_z \cdot u_z = v \cdot u \cdot \cos(\theta)$$

ove θ è l'angolo compreso tra i due vettori \vec{v} e \vec{u} .

Grazie a ciò è possibile definire il concetto di **Cinematica**:

CINEMATICA

La cinematica è lo **studio del moto**, a differenza della **dinamica** che studia la **causa del moto** e della **statica** che studia l'**equilibrio meccanico**, ossia la **causa dell'immobilità**.

È chiaro che lo studio di un corpo complesso e non omogeneo è molto più elaborato dello studio di un solo **punto**. Pertanto, il primo passo per lo studio del moto è quello di studiare il comportamento di un modello standard a cui può essere ricondotto, tramite approssimazione, un altro corpo, a seconda della necessità.

3.1 Posizione e spostamento

Dato un punto nello spazio, la sua posizione viene descritta tramite un “vettore” posizione \vec{r} , di cui è possibile calcolare la lunghezza ($|\vec{r}|$), la quale, tuttavia, non ha molto significato dal momento che dipende dalla posizione dell'origine del sistema scelta: ovverosia dipende dalla posizione iniziale e, quindi, dal **sistema di riferimento adottato**:

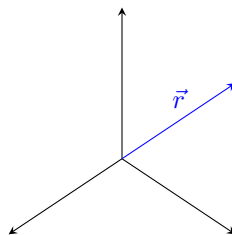


Figura 2: “Vettore” posizione

Conoscere il sistema di riferimento è fondamentale, in quanto in base a ciò possono essere effettuate diverse valutazioni che, naturalmente, variano a seconda del sistema di riferimento scelto: si pensi ed effettuare una misurazione adottando come sistema di riferimento un treno che si muove oppure un treno immobile, o ancora un treno che sta accelerando: si parla, in tale contesto, di un **sistema di riferimento non inerziale**.

SPOSTAMENTO

Lo **spostamento**, invece, è proprio un vettore e, com'è intuibile, taluno è definito come la differenza tra due posizioni, ovvero

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

di cui è possibile calcolare il modulo come segue

$$|\Delta \vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \text{distanza}$$

Per esempio, la lunghezza sull'asse x è

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \cdot \hat{i}$$

di cui

$$|\Delta \vec{r}| = |x_2 - x_1|$$

3.2 Posizione in funzione del tempo

È particolarmente importante considerare la variazione della posizione nel tempo

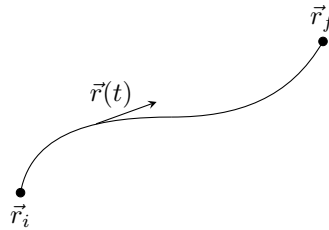


Figura 3: “Vettore” posizione in funzione del tempo

Sia data una funzione spostamento, definita in funzione del tempo t , quale

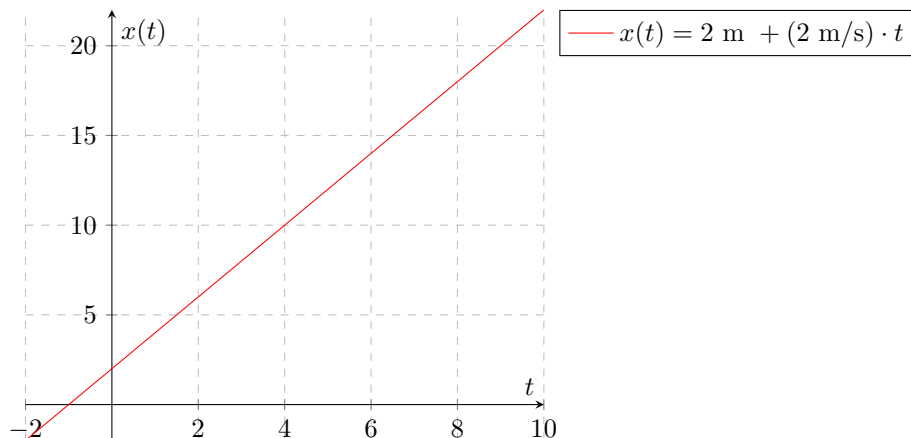
$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j}$$

in cui

$$x(t) = 2 \text{ m} + (2 \text{ m/s}) \cdot t$$

$$y(t) = 0 \text{ m} + (4 \text{ m/s}) \cdot t$$

Naturalmente si ha





3.3 Velocità

La **velocità** si pone alla base della cinematica. In fisica la velocità si distingue in due tipologie

- Velocità istantanea
- Velocità media

Si consideri, a tal proposito, il seguente grafico spazio-tempo:



VELOCITÀ MEDIA

Intuitivamente si ha che la velocità media è proprio il rapporto tra uno spostamento e il tempo impiegato per effettuarlo, ovvero

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

che, graficamente, può essere interpretata come la pendenza (o coefficiente angolare), della congiungente i punti (x_1, t_1) e (x_2, t_2) nel grafico spazio/tempo.

VELOCITÀ ISTANTANEA

Mentre la velocità istantanea è, naturalmente, la derivata nel tempo del vettore posizione, ovvero

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

ovvero la retta tangente al grafico della funzione posizione nel punto (x_0, t_0) . Naturalmente essendo un vettore la velocità istantanea, è possibile descriverlo tramite **componenti** come segue:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (\vec{r}(t)) = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x} \cdot \hat{i} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y} \cdot \hat{j} + \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z} \cdot \hat{k}$$

in quanto \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} non dipendono dal tempo (cosa che potrebbe accadere, comunque, in determinate circostanze).

Il **modulo** della velocità si calcola come segue

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Esempio: Si consideri uno spostamento verso l'alto tale per cui $x_1 = 0$ m e $x_2 = 12000$ m e $t_1 = 2600$ s e $t_2 = 4000$ s. Allora si ha che

$$\langle v_z \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{12000}{4000 - 2600} = 8.6 \text{ m/s} = 308.6 \text{ km/h}$$

Che è una velocità irrisoria; tuttavia, ciò non sorprende, in quanto è opportuno conoscere anche le altre componenti della velocità, ossia v_x e v_y .

3.4 Accelerazione

Di seguito si espone la definizione di **accelerazione**:

ACCELERAZIONE

L'accelerazione viene definita come la derivata prima della velocità nel tempo, o la derivata seconda dello spostamento nel tempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

7 Marzo 2022

Comè noto, l'accelerazione è la derivata prima della velocità in funzione del tempo, o la derivata seconda dello spostamento in funzione del tempo.

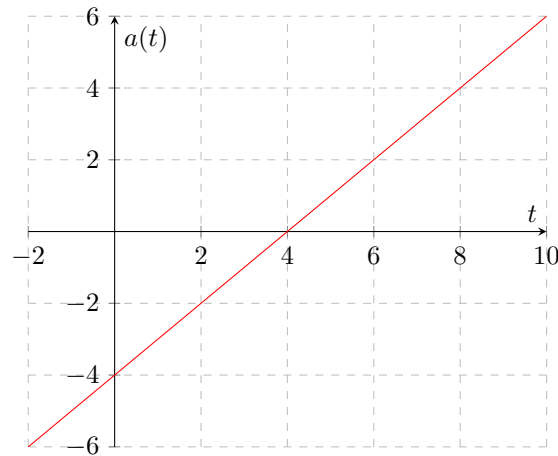
L'accelerazione è fondamentale in **meccanica**, in quanto grazie all'accelerazione è possibile definire il concetto di forza: l'accelerazione è la connessione tra cinematica e dinamica.



Avendo a disposizione il grafico che descrive la variazione della posizione nel tempo, è possibile ora studiarne l'andamento per poi descrivere il comportamento della velocità nel secondo grafico. È sufficiente, pertanto, osservare gli intervalli di crescita e decrescenza e i punti in cui la derivata si annulla nulla:



Ancora una volta, studiando l'andamento della velocità nel suo rispettivo grafico è ora possibile descrivere il grafico della derivata della velocità, ovvero dell'accelerazione, sempre analizzando gli intervalli di crescita e decrescenza:



Ecco che il punto in cui la derivata seconda (ovverosia l'accelerazione) cambia segno è un **punto di flesso**, ovvero il punto in cui il grafico dello spostamento cambia la propria concavità.

Esempio: Si consideri la seguente funzione spostamento in funzione del tempo:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t)$$

questa è l'equazione di oscillazione di un pendolo o di una molla. Per il calcolo della velocità è sufficiente calcolare la derivata prima, ovvero

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega \cdot A \cdot \sin(\omega t)$$

e per l'accelerazione è sufficiente derivare nuovamente la velocità

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t) = -\omega^2 \cdot x(t)$$

Tale risultato ha senso e può essere interpretato anche graficamente, grazie al grafico di una molla: quando lo spostamento è positivo, l'accelerazione è negativa, e viceversa.



Figura 4: Fisica di una molla

Osservazione: Quando la velocità è nulla, la posizione si mantiene costante e non cresce o decresce. Quando si ha un punto di salto della velocità si ha una situazione difficile da riprodurre fisicamente, in quanto si ha un crollo della velocità istantanea, come un impulso (si pensi anche al fatto che, per il teorema del limite della derivata, una funzione con un salto non può essere la derivata di una funzione derivabile).

Si può utilizzare anche l'**integrale** per passare dalla velocità allo spostamento.

3.5 Moto uniformemente accelerato

Nel moto uniformemente accelerato si ha che l'**accelerazione** è **costante**. Sapendo che l'accelerazione è la derivata prima della velocità nel tempo, si può scrivere:

$$\frac{dv}{dt} = a \longrightarrow dv = a \cdot dt$$

Questo, in particolare, è possibile farlo sia per una variazione Δ , ma anche per una variazione infinitesimale d . Ciò che si sta facendo, in questo caso, è risolvere un'**equazione differenziale**. Pertanto, dopo aver ottenuto $dv = a \cdot dt$ si può procedere all'integrazione

$$\int dv = \int a \cdot dt \longrightarrow v = at + c$$

La costante c che compare nella formula, ottenuta grazie alla risoluzione di una equazione differenziale, è la cosiddetta **velocità iniziale**: se $t = 0$, infatti, $v = c = v_0$. Quindi l'equazione diviene

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

Avendo ottenuto l'equazione della velocità nel tempo, è opportuno ottenere l'equazione della posizione in funzione del tempo, integrando nuovamente, sempre partendo da

$$\frac{dx}{dt} = v \longrightarrow dx = v \cdot dt \longrightarrow \int dx = \int v \cdot dt = \int (v_0 + a \cdot t) dt$$

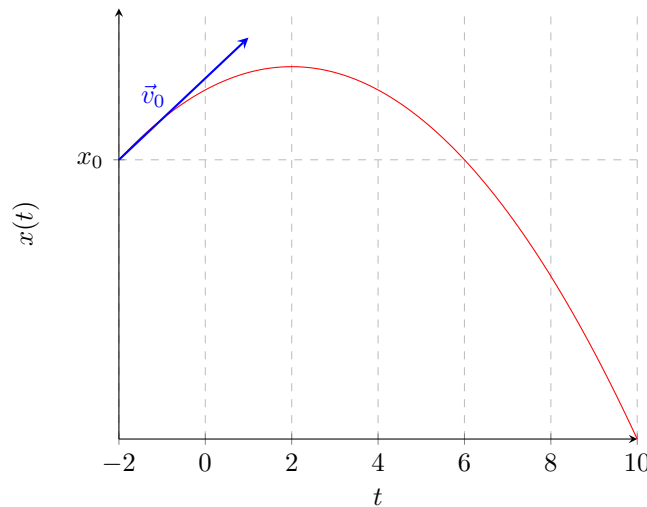
quindi si ottiene

$$x(t) = \int v_0 \cdot dt + \int a \cdot t \cdot dt + c = v_0 \cdot t + a \cdot \frac{t^2}{2} + c$$

ove $c = x_0 = x(t = 0)$. Pertanto l'equazione della posizione in funzione del tempo è

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

che rappresenta l'equazione di una parabola, come illustrato nell'esempio seguente:



In cui, ovviamente, l'intersezione tra il grafico e l'asse y è x_0 , il vettore designato in blu, ossia la tangente in $(x_0, 0)$, rappresenta la pendenza iniziale del grafico della posizione, ovvero la velocità iniziale v_0 . Essendo il grafico di un moto uniformemente accelerato, è ovvio che la pendenza decresce in modo costante: prima la velocità sarà positiva, ma decrescente, e poi continuerà a decrescere, ma con valori negativi.

Osservazione: Si consideri la seguente equazione

$$v(t) = a \cdot t + v_0$$

e si provi ad isolare t da tale equazione, come segue

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

se ora si considera l'equazione seguente

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

e si sostituisce il t calcolato in precedenza a tale equazione si ottiene

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 + v_0 \cdot \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + x_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot (v^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 + v_0^2) + \frac{1}{a} \cdot (v_0 \cdot v + v_0^2) + x_0$$

ovvero si ottiene

$$x = \frac{v^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a} + x_0$$

quindi

$$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot (x - x_0)$$

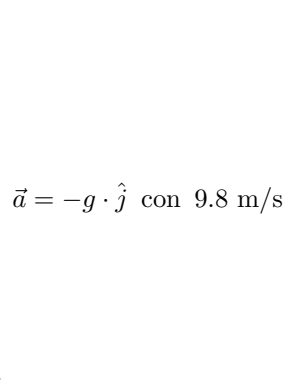
la quale è **valida solamente per il moto uniformemente accelerato** ed è estremamente utile per conoscere lo spazio percorso da un corpo che si muove secondo queste legge oraria, senza conoscere il **tempo**.

3.5.1 Caduta libera dei gravi

La **caduta libera** avviene con la **medesima accelerazione** per tutti i corpi (ovviamente, l'attrazione gravitazionale non è costante in tutto l'universo, ma se si considerano un punto sulla terra e distanze piccole e prossime a quella del raggio terrestre, si può, senza perdita di generalità, considerare un'accelerazione costante g).

Osservazione: Naturalmente sulla Luna non c'è aria, si è nel vuoto, per cui tutti i corpi vengono attratti dalla Luna solamente per la forza di attrazione gravitazionale, senza che tale moto sia influenzato dall'attrito dell'aria.

L'accelerazione gravitazionale può essere interpretata come segue:



$$\vec{a} = -g \cdot \hat{j} \text{ con } 9.8 \text{ m/s}$$

Figura 5: Visualizzazione grafica del moto di caduta libera

Ove, naturalmente si ha

$$\vec{a} = -g \cdot \hat{j} \text{ con } 9.8 \text{ m/s}$$

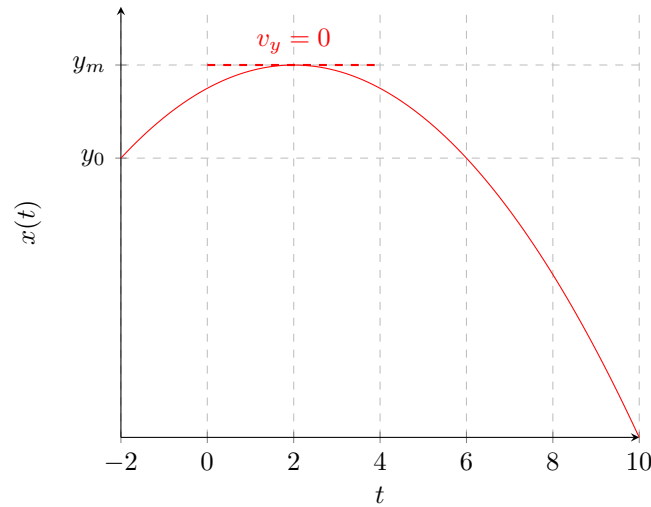
Pertanto si ottengono le seguenti equazioni, a partire da quelle generali per un moto uniformemente accelerato. Per quanto riguarda la velocità di caduta si ha:

$$v_y = -g \cdot t + v_{0y}$$

mentre per quanto riguarda la posizione in funzione del tempo si ottiene

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t + y_0$$

Per capire che altezza raggiungerà un corpo quando viene lanciato verso l'alto si deve osservare il grafico seguente



Naturalmente si osserva che la velocità nel punto più alto è nulla, in quanto la tangente è orizzontale, mentre si conosce la velocità iniziale v_0 .

Per capire l'altezza, allora, si potrebbe calcolare il tempo impiegato per raggiungere il punto più alto e poi sostituire tale valore all'interno dell'equazione dello spostamento.

Alternativamente, si potrebbe considerare la formula seguente

$$v_y^2 - v_{y0}^2 = -2 \cdot g \cdot (y - y_0)$$

e sostituendo i valori si ha

$$0 - v_{y0}^2 = 2 \cdot g \cdot (y_m - y_0)$$

Per cui l'altezza massima che un corpo raggiunge quando viene lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_{y0} e a partire da un'altezza y_0 è

$$y_m = y_0 + \frac{v_{y0}^2}{2g}$$

3.5.2 Moto dei proiettili

Il moto dei proiettili ha un'importanza storica fondamentale: Aristotele, nel 340 a.c. parlava di **moto "naturale" e "forzato"**: tuttavia, naturalmente, un oggetto fermo, privo di sollecitazioni, non ha la propensione a muoversi, quindi non ha senso parlare di *forzatura*.

Successivamente, Filopono (490 – 570) d.c. ha introdotto il concetto di **impeto** e, infine, **Galileo** (1564 – 1642) d.c., basandosi su osservazioni e misurazioni pratiche precedenti (invece che fornire una spiegazione a priori), ha fornito una **spiegazione scientifica** a tale fenomeno.

LEGGE ORARIA DEL MOTO DEI PROIETTILI

Per lo studio del moto dei proiettili si considera il vettore accelerazione

$$\vec{a} = a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j} = 0 \cdot \hat{i} - g \cdot \hat{j}$$

Analogamente per la velocità si ha

$$\vec{v} = v_x \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{j} = v_{0x} \cdot \hat{i} - (v_{0y} - gt) \cdot \hat{j}$$

Per quanto concerne la posizione in funzione del tempo si ha

$$\vec{r} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} = (v_{0x}t + x_0) \cdot \hat{i} - (y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2) \cdot \hat{j}$$

Si consideri il seguente grafico della posizione di un proiettile:



Naturalmente si ha che

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= v_{x0} \cdot \hat{i} + v_{y0} \cdot \hat{j} \\ \vec{r}_0 &= x_0 \cdot \hat{i} + y_0 \cdot \hat{j} \end{aligned}$$

8 Marzo 2022

Naturalmente il modulo di un vettore non dipende dal sistema di coordinate scelto. Naturalmente è possibile avere

$$|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$$

e per dimostrarne la veridicità basta considerare due vettori perpendicolari.

Ovviamente, un versore ha sempre modulo unitario per essere definito tale: in particolare, dato il vettore $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, il versore

$$\hat{n} = \frac{\vec{v}}{v}$$

è proprio un versore in direzione $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$.

La componente del vettore $\vec{v} = -3 \cdot \hat{i} + 5 \cdot \hat{j} + \hat{k}$ in direzione $\hat{n} = 0.6 \cdot \hat{j} - 0.8 \cdot \hat{k}$ è ovviamente

$$\vec{v} \cdot \hat{n} = -3 \cdot 0 + 5 \cdot 0.6 - 1 \cdot 0.8 = 2.2$$

È chiaro che in questo caso \hat{n} era già un versore, altrimenti, se si avesse avuto un vettore, si sarebbe dovuto calcolare il versore corrispondente dividendo per il suo modulo.

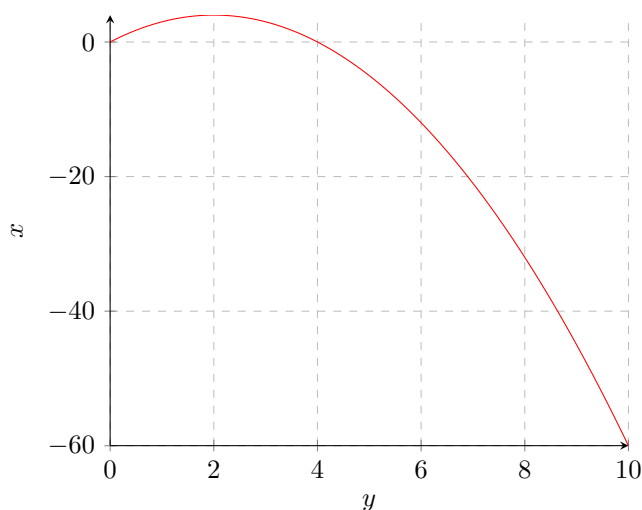
Nel moto dei proiettili è estremamente importante considerare l'**altezza massima** che esso raggiungerà, ma soprattutto la sua **gittata**, ovvero la distanza massima che esso raggiungerà. Molto spesso, in questo caso, per lavorare è molto più conveniente operare con le coordinate polari v_0 e θ (ovvero con modulo e angolo), anziché con v_{x0} e v_{y0} , sempre ricordando che

$$v = \begin{pmatrix} v_{x0} = v_0 \cdot \cos(\theta) \\ v_{y0} = v_0 \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

In questo caso, per calcolare l'altezza massima raggiunta è sufficiente considerare solamente la componente della velocità verticale, come per la caduta libera dei gravi, ovvero

$$y_m = y_0 + \frac{v_{y0}^2}{2g} = y_0 + \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\theta)}{2g}$$

Analogamente, per calcolare la gittata, ovvero la distanza orizzontale percorsa da un corpo lanciato in aria, si dovrà usare solo la componente della velocità orizzontale.



Naturalmente, in questo caso, il calcolo della gittata R si effettua come segue: è noto che

$$R = v_{x0} \cdot t_R$$

ove t_R è la **durata del volo**. Però è noto che al tempo t_R la coordinata y è nulla, ovvero

$$y(t_R) = 0 = v_{y0} \cdot t_R - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_R^2$$

Dal momento che il tempo t_R non è nullo è possibile dividere per t , ottenendo

$$v_{y0} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_R = 0$$

da cui si evince che il tempo t_R cercato è

$$t_R = \frac{2 \cdot v_{y0}}{g}$$

sostituendo, ora, il tempo trovato nella formula di cui sopra si ottiene

$$R = v_{x0} \cdot \frac{2 \cdot v_{y0}}{g} = 2 \cdot \frac{v_{x0} \cdot v_{y0}}{g}$$

ma ricordando come si calcolano le componenti v_{x0} e v_{y0} si ha

$$R = 2 \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)}{g}$$

ed essendo $2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) = \sin(2 \cdot \theta)$ si ottiene

$$R = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta)}{g}$$

Le unità in gioco sono

$$\begin{aligned} [v^2] &= \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \\ [g] &= \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ [R] &= \frac{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \text{m} \end{aligned}$$

Osservazione: Si osservi che, naturalmente, quando $\theta = 0^\circ$, si ha che $\sin(0) = 0$ e quindi $R = 0$: ciò ha senso, in quanto lanciando orizzontalmente il corpo cade immediatamente. Quando $\theta = 90^\circ$ non si ha gittata, in quanto, lanciando verticalmente il corpo cada verticalmente. Quando $\theta = 45^\circ$ si ha la gittata massima, in quanto $\sin(90) = 1$.

3.6 Moto in 2D e 3D

Si consideri la seguente traiettoria

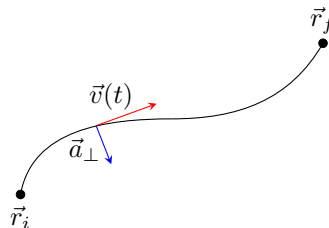


Figura 6: “Vettore” velocità in funzione del tempo

Naturalmente \vec{v} è sempre parallelo alla tangente della curva $\vec{r}(t)$.

Si osservi, inoltre, che l'accelerazione deve sempre presentare una **componente lineare** \vec{a}_{\parallel} (parallela a \vec{v}) e una **componente ortogonale** \vec{a}_{\perp} (in direzione del cambiamento dell'orientazione

della velocità), la quale è fondamentale: infatti, se ci fosse solo una componente lineare, la velocità aumenterebbe il proprio modulo, ma non direzione; ogni qualvolta si ha una variazione della direzione della velocità ci deve essere una componente ortogonale dell'accelerazione.

3.7 Moto circolare uniforme

Per moto circolare uniforme si intende un moto circolare in cui la **velocità angolare** si mantiene **costante**.

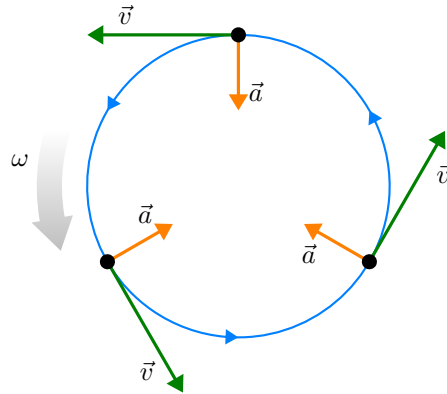


Figura 7: Moto circolare uniforme

Naturalmente, la **circonferenza** del cerchio è $C = 2\pi R$. Parlando di moto circolare uniforme è possibile introdurre il concetto di **periodo** T , ovvero il tempo impiegato a completare una circonferenza completa.

Pertanto, volendo conoscere la velocità del moto si ottiene

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

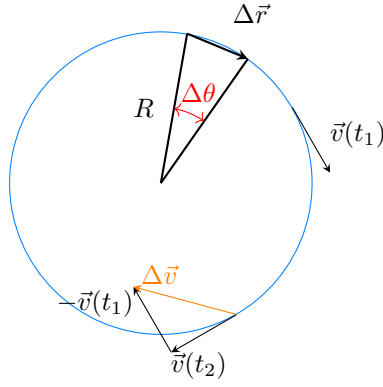
ove ω prende il nome di **velocità angolare**, che ha una misura di RAD/s, per questo prende il nome di velocità angolare, in quanto ha la stessa unità di misura di una frequenza (visto che l'angolo non ha una propria vera misura).

Naturalmente, volendo conoscere l'accelerazione che agisce sul punto in movimento, si può immediatamente dire che, essendo la velocità costante, si dovrà solo considerare una componente ortogonale, in quanto se essa non ci fosse, il corpo si muoverebbe in linea retta, senza compiere una traiettoria circolare.

Pertanto, dal momento che $|\vec{v}| = v = \text{costante}$, si ha che $\vec{a}_{\parallel} = 0$. L'accelerazione media, naturalmente, può essere calcolata come segue

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Anche graficamente appare evidente come l'accelerazione media sia un vettore ortogonale al vettore velocità e orientato verso il centro della circonferenza.



Lo spostamento tra due punti, naturalmente, è $\Delta \vec{r}$ e i due triangoli che vengono così disegnati sono simili, per cui il rapporto tra i lati corrispondenti deve mantenersi costante. È facile, pertanto, vedere immediatamente come

$$\boxed{\frac{|\Delta \vec{r}|}{R} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v}}$$

ossia il rapporto tra lo spostamento e il raggio costante, così come la variazione di velocità e il modulo della velocità costante è uguale. Da ciò si evince che

$$a = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v} \cdot \frac{v}{\Delta t} = \frac{|\Delta \vec{r}|}{R} \cdot \frac{v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

Ovvero si ha che, nel moto circolare uniforme, il modulo dell'accelerazione orientata verso il centro del cerchio è pari a

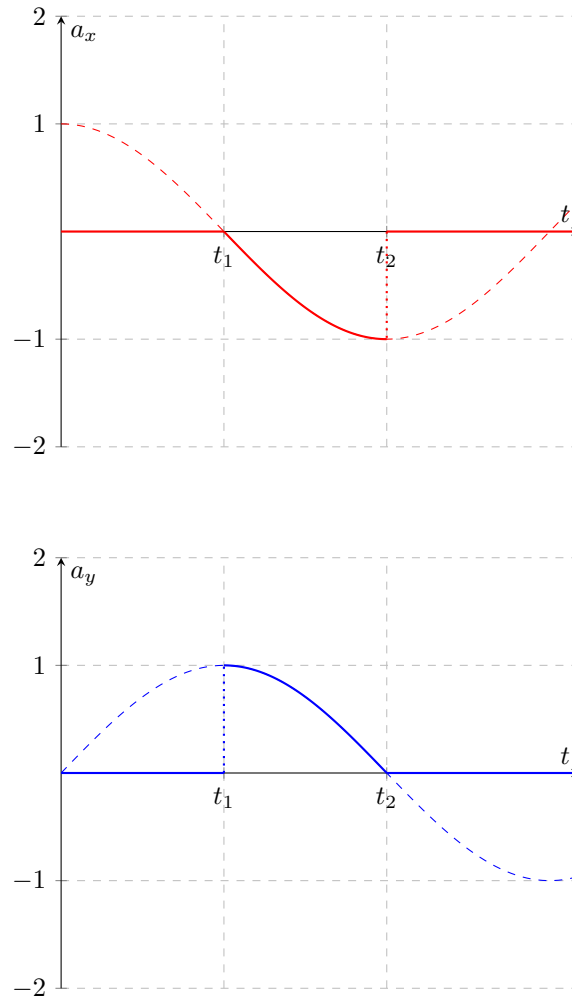
$$\boxed{a = \frac{v^2}{R}}$$

Esempio: Si consideri l'esempio seguente che riguarda un veicolo in movimento a velocità costante su una curva



Figura 8: Auto in movimento su una curva

e si considerino le componenti dell'accelerazione in x e in y in funzione del tempo.



per capire la natura delle curve appena disegnate, è sufficiente osservare la Figura 9 seguente:

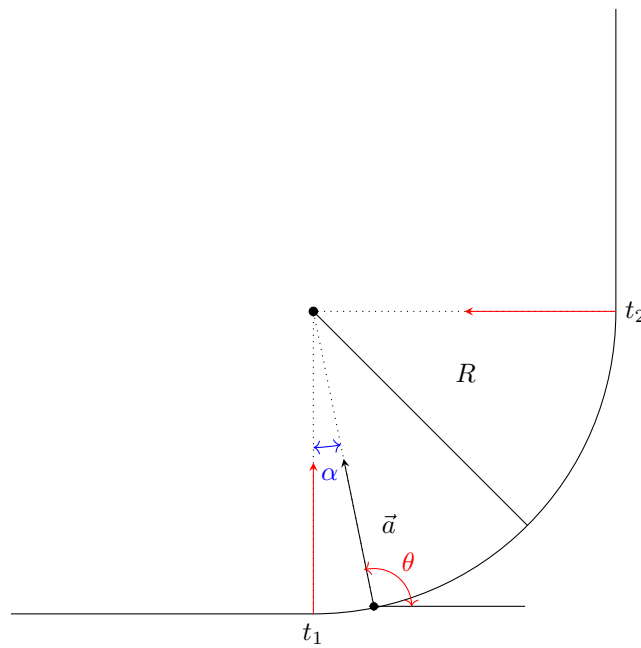


Figura 9: Visualizzazione degli angoli coinvolti

Si può facilmente capire come α sia l'angolo da sommare a 90° per ottenere θ , quindi

$$a_x = a \cdot \cos(\theta) = a \cdot \cos(\alpha + 90^\circ) = -a \cdot \sin(\alpha) = -a \cdot \sin(\omega t)$$

pertanto nel caso di a_x si è considerato un ramo di $\sin(\omega t)$, mentre nel caso di a_y si è considerato un ramo di $\cos(\omega t)$.

9 Marzo 2022

Il moto circolare uniforme è un moto semplice: la formula più importante da conoscere è il modulo dell'**accelerazione centripeta**, ovvero dell'accelerazione diretta verso il centro della circonferenza.

Il raggio R della circonferenza del moto è costante, mentre l'angolo θ descritto dal punto in movimento all'interno della circonferenza varia linearmente con il tempo, secondo la seguente legge

$$\theta(t) = \frac{2\pi}{T} \cdot t = \omega t$$

ove ω prende il nome di velocità angolare ed è definita come segue

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Per quando concerne la variazione della posizione nel tempo si ha

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} = R \cdot \cos(\omega t) \cdot \hat{i} + R \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{j}$$

A partire da tale risultato si sarebbe potuto determinare il modulo dell'accelerazione, semplicemente procedendo per derivate successive, ottenendo dapprima

$$\vec{v}(t) = -\omega R \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{i} + \omega R \cos(\omega t) \cdot \hat{j}$$

e infine

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t)$$

in cui è evidente come il vettore accelerazione è sempre parallelo al vettore posizione, ma con verso opposto: il vettore posizione è sempre diretto verso l'esterno, mentre il vettore accelerazione è diretto verso il centro della circonferenza.

Se ora si procede al calcolo del modulo di tale vettore si ottiene

$$|\vec{a}| = \omega^2 \cdot R = \frac{v^2}{R}$$

dal momento che si ha

$$v = \omega R$$

In realtà anche ω è un vettore, in cui la sua direzione è l'asse di rotazione, mentre il modulo fornirà una stima della velocità alla quale si muove; tale risultato avrà una importante validità in seguito.

3.8 Moti relativi

Si consideri il caso di un moto composto da più moti: un sasso che viene lasciato cadere sullo scafo di una barca in movimento.

Naturalmente, considerando la caduta di un sasso, fissando un tempo t , si ha che

$$\vec{v}_{PB} = -gt \cdot \hat{j}$$

in quanto si tratta di una caduta libera. Questo, tuttavia, osservando il moto dalla barca (PB = punto-barca) in movimento. Se, invece, tale moto viene visto da terra (PT = punto-terra), sarà dotato di due componenti, ovvero

$$\vec{v}_{PT} = \vec{v} + -gt \cdot \hat{j}$$

in cui la componente verticale è la stessa del moto precedente, mentre la componente orizzontale dipende dalla velocità della barca. Questo è proprio quello che ha fatto Galileo: osservare questo tipo di situazioni nella vita reale, fornendovi una spiegazione scientifica e definendo, in questo caso, il concetto di sistema di riferimento e di moto relativo.

3.8.1 Caso generale

Per capire come passare da un sistema di riferimento all'altro, è necessario considerare un caso generale, in cui come sistema di riferimento si assume quello definito da:

- posizione dell'origine;
- assi (posizione e orientamento).



Per passare da un sistema di riferimento A all'altro B è necessario definire la posizione relativa tra i due sistemi di riferimento $A - B$.

Infatti, definendo un nuovo vettore \vec{r}_{BA} è possibile scrivere la somma di vettori seguente

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

Ma non solo, è possibile anche calcolare la derivata nel tempo e considerare, quindi, le velocità

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

che corrisponde proprio al caso analizzato per la barca: la differenza tra i due sistemi di osservazione è proprio il moto della barca. Un caso ancora più importante è quello che prevede \vec{v}_{BA} **costante**, per cui i due sistemi non si muovono l'uno rispetto all'altro e misurare l'accelerazione nell'uno o nell'altro non cambia, in quanto sarà la stessa. Derivando nuovamente nel tempo, infatti, si ottiene

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{BA}$$

ma essendo \vec{v}_{BA} costante, ovviamente $\vec{a}_{BA} = 0$. Questo è il caso di un **sistema di riferimento inerziale**, ovvero di un sistema di riferimento che può muoversi ad una certa velocità, ma non può accelerare. Naturalmente l'accelerazione del sistema inerziale non è relativa, non è da definirsi rispetto ad un altro sistema di riferimento come in questo caso, ma necessita di una definizione molto più rigorosa fornita tramite le leggi della dinamica di Newton. Questo ragionamento, naturalmente, si applica sia ad un caso in 2D, ma anche in 3D.

Osservazione: Si osservi, ovviamente, che nel moto circolare uniforme velocità e accelerazione. Inoltre, si ha che

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0$$

significa che la variazione del modulo della velocità nel tempo è nullo: pertanto, se non c'è variazione del modulo della velocità, si ha che la componente parallela dell'accelerazione è nulla, ovvero $\vec{a}_{\parallel} = 0$.

4 Dinamica

Alla base della dinamica vi sono i 3 principi della dinamica di Newton, formulati da Newton all'interno del libro **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**.

Esse sono le seguenti:

LEGGI DELLA DINAMICA

Le leggi della dinamica sono le seguenti:

1. **Prima legge:** *Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, eccetto che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse.*
2. **Seconda legge:** *Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza mmotrice impressa, ed avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza è stata impressa.*
3. **Terza legge:** *Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria: ossia le azioni di due corpi sono sempre uguali fra loro e dirette verso parti opposte.*

4.1 Massa

Per parlare della dinamica, si devono introdurre due concetti fondamentali ed interconnessi; prima di tutto si fornisce la definizione di **massa**, la quale può essere definita in modi diversi a seconda della necessità:

MASSA INERZIALE

La **massa inerziale** (da **inerzia**: propensione a non muoversi) viene definita come misura della resistenza alle variazioni di velocità.

che si adatta perfettamente alla seconda legge della dinamica, la quale afferma che l'accelerazione è proporzionale alla forza impressa ed è la massa a rappresentare la **costante di proporzionalità**: a parità di forza, più il corpo è massivo meno accelera, meno è massivo, più accelera.

Di seguito, invece, si definisce il concetto di **massa gravitazionale**:

MASSA GRAVITAZIONALE

La **massa gravitazionale** è proporzionale al **peso**.

Non da ultimo si fornisce una definizione di massa che è approssimabile ad una quantificazione:

MASSA

La **massa** viene definita come **quantità di materia** e la sua unità di misura è

$$[m] = \text{kg}$$

Inoltre la massa è **additiva**: dato un corpo, agglomerato compatto di due masse m_1 e m_2 , la massa complessiva è

$$m = m_1 + m_2$$

4.2 Forza

Di seguito si espone il significato fisico di **forza**:

FORZA

Una **forza** è una spinta che produce un cambiamento di moto di un corpo.

La forza è un **vettore** (con modulo, direzione e verso) la cui unità di misura è

$$[F] = \text{N} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$$

ove N sta per Newton.

4.3 Principi della dinamica - Leggi di Newton

Si descrivano, ora, le leggi di Newton in termini dei due concetti esposti, ossia massa e forza:

1. Se la forza risultante che agisce su un corpo è nulla, ovvero

$$\sum \vec{F} = 0$$

allora l'accelerazione del corpo è nulla, cioè $\vec{a} = 0$, ovvero

$$\boxed{\sum \vec{F} = 0 \longrightarrow \vec{a} = 0}$$

Tale legge potrebbe sembrare superflua, in quanto un caso particolare della seconda: tuttavia, tale legge assolve al compito di definire un **sistema di riferimento inerziale**.

2. La forza risultante su un corpo è direttamente proporzionale all'accelerazione del corpo stesso. L'accelerazione di un corpo, quindi, è proporzionale alla forza risultante

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$$

3. La forza esercitata da un corpo a su un corpo b è uguale in modulo e direzione, ma ha verso opposto alla forza esercitata da b su a .

Ovvero si ha che

$$\boxed{\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}}$$

e ciò è sempre vero.

Dopo aver definito tali leggi, è necessario definire diversi tipi di forze, distinguendole in base alla loro tipologia.

4.4 Forza peso

Di seguito si espone il significato fisico di **forza peso**:

FORZA PESO

La forza peso viene designata con \vec{F}_t , ovvero la forza di attrazione esercitata dalla terra su un corpo di massa m . In particolare si ha

$$\boxed{\vec{F}_t = m\vec{g}}$$

in cui $\vec{g} = -9.8 \text{ m/s}^2 \cdot \hat{j}$ e prende il nome di **accelerazione gravitazionale** (o meglio, di **campo gravitazionale** sulla superficie della terra).

Di seguito si espone una illustrazione della forza peso:



Figura 10: Forza peso

Osservazione: Si osservi che la formula seguente

$$\vec{F}_t = m\vec{g}$$

potrebbe rassomigliare la formula

$$\vec{F}_t = m\vec{a}$$

Tuttavia, i due concetti sono ben distinti, in quanto $\vec{F}_t = m\vec{g}$ è un caso particolare della **legge di gravitazione universale**.

Osservazione: Si osservi che anche nel caso della forza peso è presente il terzo principio della dinamica: infatti un corpo viene attratto verso il centro della terra ed esercita una forza sulla superficie terrestre, così come la terra esercita una forza uguale e contraria (solamente che è impercettibile, è sempre presente).

4.5 Forza normale

Di seguito si espone un altro tipo di forza, una forza di contatto, che prende il nome di **forza normale**:

FORZA NORMALE

La **forza normale** \vec{F}_N è un caso di forza di contatto, definita come **spinta fornita da una superficie (o da un altro corpo)**: quando un oggetto è appoggiato su una superficie e non si muove (ovvero si ha che $\vec{v} = 0$ e $\vec{a} = 0$), alla **forza peso** si contrappone la **forza normale**, uguale e contraria alla forza peso.

Di seguito si espone una illustrazione della forza normale:



Figura 11: Forza normale

Una caratteristica fondamentale della forza normale è che essa è sempre **ortogonale alla superficie** su cui poggia l'oggetto. Se si osserva che il corpo presenta $\vec{a} = 0$, significa che

$$\vec{F}_t + \vec{F}_N = 0 = m\vec{a} \longrightarrow \vec{F}_N = -\vec{F}_t$$

Mentre la forza peso presenta un modulo preciso, calcolabile tramite la legge di gravitazione universale, la forza normale, invece, adatta la propria intensità al corpo appoggiato sulla superficie: fintantoché la superficie resiste, il modulo della forza normale coincide con quello della forza peso; se il corpo è eccessivamente massiccio, la superficie si rompe.

Osservazione: Una forza presenta sempre un **punto di applicazione** che, graficamente, è rappresentata dalla “coda del vettore”:

1. Nel caso della forza peso, il punto di applicazione è sempre dato del **centro di massa** del corpo stesso;
2. Nel caso della forza normale, il punto di applicazione è la superficie di contatto (anche se vi sono molti punti di applicazione vista l'irregolarità della superficie stessa).

Tuttavia è sempre possibile eseguire la somma di forze per conoscerne la risultante.

Osservazione: Quando si deve eseguire la rappresentazione grafica delle forze è necessario introdurre il concetto di **diagramma di corpo libero**:

- ogni corpo è rappresentato da un **punto** (per cui il punto di applicazione delle forze sul corpo è proprio rappresentato dal punto stesso);
- comporta **solo le forze** che sono applicate sul corpo, e ciò diviene particolarmente utile quando bisogna considerare un sistema di più corpi interagenti.

Esempio: Si considerino due corpi poggianti uno sopra l'altro e stanti su una superficie fissa. Naturalmente su tali corpi agiscono due forze peso distinte. Inoltre la superficie di contatto tra i due corpi permette di individuare due forze normali: uno del primo corpo sul secondo e una del secondo corpo sul primo. Infine vi è la forza di contatto dei due corpi con la superficie su cui poggiano, come mostrato di seguito:



Figura 12: Forza normale di due corpi a contatto

Dopo aver effettuato la raffigurazione, si procede alla realizzazione del **diagramma a corpo libero** di ciascuno dei due corpi, come mostrato di seguito:



Figura 13: Diagramma a corpo libero di due corpi a contatto

Naturalmente in questo caso si possono determinare direttamente le forze coinvolte

$$\begin{aligned}\vec{F}_{t1} &= -gm_1 \cdot \hat{j} = m_1 \vec{g} \\ \vec{F}_{t2} &= -gm_2 \cdot \hat{j} = m_2 \vec{g}\end{aligned}$$

Applicando la **2^a legge della dinamica** si perviene al risultato seguente

$$\begin{aligned}m_1 \vec{a}_1 &= m_1 \vec{g} = \sum \vec{F} = \vec{F}_N + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{t1} = 0 \\ m_2 \vec{a}_2 &= m_2 \vec{g} = \sum \vec{F} = \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{t2} = 0\end{aligned}$$

Questo, in quanto l'accelerazione è nulla, un dato noto dal problema. Applicando, ora, la **3^a legge della dinamica** si perviene al risultato seguente:

$$\vec{F}_{N1} = -\vec{F}_{N2}$$

Da ciò si può concludere il problema, andando a determinare

$$\begin{aligned}\vec{F}_{N2} &= -\vec{F}_{t2} = gm_2 \cdot \hat{j} \\ \vec{F}_{N1} &= -\vec{F}_{N2} = \vec{F}_{t2} = -gm_2 \cdot \hat{j} \\ \vec{F}_N &= -\vec{F}_{N1} - \vec{F}_{t1} = gm_2 \cdot \hat{j} + gm_1 \cdot \hat{j} = g \cdot (m_1 + m_2) \cdot \hat{j}\end{aligned}$$

10 Marzo 2022

4.6 Forza di tensione

Di seguito si espone il significato fisico della **forza di tensione** che, nel suo comportamento, non è dissimile dalla forza normale:

FORZA DI TENSIONE

La forza di tensione è la forza esercitata, per esempio, da un cavo o una fune, come mostrato di seguito, in cui la forza di tensione va a cancellare la forza peso del corpo appeso alla fune. È importante notare che \vec{F}_T è sempre **parallela alla direzione della corda** stessa.

Di seguito si espone una illustrazione della forza di tensione:



Figura 14: Forza di tensione di un corpo sospeso

Esempio: Si consideri l'esempio seguente, in cui vi è un corpo che rimane sospeso nel vuoto da due funi che descrivono con il soffitto due angoli, rispettivamente θ_1 e θ_2 . Si determinino le tensioni sulle due corde.



Figura 15: Forza di tensione di un corpo sospeso da due corde

Dopo aver realizzato una figura illustrativa, bisogna sempre procedere alla raffigurazione del **diagramma a corpo libero**, come mostrato di seguito:



Figura 16: Diagramma a corpo libero di un corpo sospeso da due corde

Applicando, ora, la **2^a legge della dinamica** si perviene al risultato seguente:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0$$

essendo l'accelerazione nulla. Pertanto si ha che

$$\vec{F}_{T1} + \vec{F}_{T2} + \vec{F}_t = 0$$

Sarà ora sufficiente decomporre tale equazione vettoriale nelle sue due componenti (x e y), come mostrato di seguito

$$\begin{aligned} x &= -F_{T1} \cdot \cos(\theta_1) + F_{T2} \cdot \cos(\theta_2) + 0 = 0 \\ y &= F_{T1} \cdot \sin(\theta_1) + F_{T2} \cdot \sin(\theta_2) - mg = 0 \end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ha che

$$F_{T1} = F_{T2} \cdot \frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)}$$

che, sostituita nella seconda equazione, permette di ottenere

$$F_{T2} \cdot \frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)} \cdot \sin(\theta_1) + F_{T2} \cdot \sin(\theta_2) = mg$$

che può essere riscritto come segue

$$F_{T2} \cdot \cos(\theta_2) \cdot \left[\frac{\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_1)} + \frac{\sin(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} \right] = mg$$

Pertanto si ha che

$$F_{T2} = \frac{mg}{\cos(\theta_2) \cdot (\tan(\theta_1) + \tan(\theta_2))} \quad \text{e} \quad F_{T1} = \frac{mg}{\cos(\theta_1) \cdot (\tan(\theta_1) + \tan(\theta_2))}$$

Se si cerca di capire che cosa accade quando gli angoli descritti dalla fune con il soffitto sono prossimi all'angolo limite di 90° , si rileva immediatamente una instabilità.

Intuitivamente si potrebbe pensare che una massa sospesa tramite due cavi come nella configurazione mostrata di seguito sia facilmente in equilibrio:

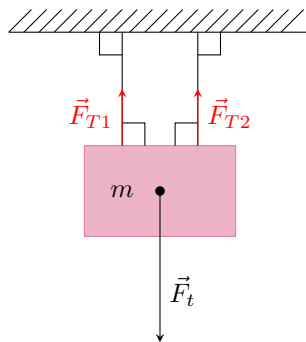


Figura 17: Forza di tensione di un corpo sospeso da due corde parallele

Tuttavia, è necessario considerare anche un altro aspetto nella determinazione dell'equilibrio: il **momento di forza**. Il caso precedentemente analizzato riguardava la configurazione per la quale il punto di applicazione della corda alla massa era identico e precisamente al centro della massa stessa:



Figura 18: Forza di tensione di un corpo sospeso da due corde con stesso punti di applicazione

Affinché in questa configurazione la massa stia in equilibrio, è necessario che precisamente la lunghezza di ciascun cavo sia identica; se differisse anche di poco, allora tutta la tensione graverebbe sul cavo più corto.

Esempio: Si consideri un quadricottero, ovverosia un drone con 4 eliche e rotori, ciascuna capace di fornire una forza propulsiva verso l'alto di eguale modulo. Considerando il drone stazionario si ha, per la **2^a legge della dinamica**, la seguente eguaglianza

$$4 \cdot \vec{F}_s + \vec{F}_t = 0$$

questo significa che ciascun rotore deve essere in grado di sviluppare una forza propulsiva verso l'alto pari a un quarto del peso del drone; quando, invece, si ha uno sbilanciamento delle forze dei rotori si ottiene un'inclinazione del drone nella direzione delle forze di minore intensità (quello che viene chiamato **momento di forza**).

Pertanto si può concludere che

$$\vec{F}_s = -\frac{1}{4} \cdot \vec{F}_t$$

Esempio: Si consideri una massa su un piano inclinato, come mostrato di seguito (considerando ininfluyente l'attrito tra la massa e la superficie del piano):



Figura 19: Piano inclinato

A cui segue il diagramma a corpo libero seguente:



Figura 20: Diagramma a corpo libero di un piano inclinato

Dopo aver disegnato anche il diagramma a corpo libero si può procedere a ragionare con la **2^a legge della dinamica**, ottenendo

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_N + \vec{F}_t$$

e scomponendo tale equazione nelle sue componenti si ottiene

$$ma_x = -F_N \cdot \sin(\theta)$$

$$ma_y = F_N \cdot \cos(\theta) - mg$$

Volendo conoscere l'accelerazione del corpo, si osserva che sussiste il seguente vincolo geometrico:

$$\frac{a_y}{a_x} = \tan(\theta) \longrightarrow a_y = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \cdot a_x$$

da cui

$$a_y \cdot \cos(\theta) = a_x \cdot \sin(\theta) \longrightarrow a_x = a_y \cdot \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

Pertanto, procedendo dalla prima equazione si ottiene

$$F_N = -\frac{ma_x}{\sin(\theta)}$$

e quindi, nella seconda equazione si ottiene

$$ma_x \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -ma_x \cdot \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - mg \longrightarrow a_x = -g \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

Sfruttando il vincolo geometrico precedente si ottiene anche che

$$a_y = -g \cdot \sin^2(\theta)$$

Avendo determinato ciò è possibile calcolare il modulo dell'accelerazione come segue

$$a = \sqrt{g^2 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta) + g^2 \cdot \sin^4(\theta)} = g \cdot \sin(\theta) \cdot \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = g \cdot \sin(\theta)$$

Esempio: Si consideri il caso del piano inclinato precedente, procedendo, ora, alla rotazione del sistema di riferimento dell'angolo θ , dimodoché lo spostamento avvenga lungo l'asse x soltanto, e non vi sia, conseguentemente, accelerazione lungo l'asse y . In base a questo nuovo sistema di riferimento si ottiene la seguente decomposizione

$$\begin{aligned} x : ma_x &= -mg \cdot \sin(\theta) \\ y : ma_y &= -mg \cdot \cos(\theta) + F_N = 0 \end{aligned}$$

per cui si ha che

$$a_x = -g \cdot \sin(\theta)$$

4.7 Forza di attrito

Di seguito si espone la definizione generale di **forza di attrito**:

FORZA DI ATTRITO

La **forza di attrito** è una forza di contatto, esattamente come la forza normale: quest'ultima è sempre perpendicolare alla superficie e il suo modulo è tale che vincola il moto, al fine di contrastare la forza nell'altra direzione.

La **forza di attrito**, come la forza normale, è una forza che presenta come punto di applicazione la superficie di contatto con il corpo. Inoltre, la forza di attrito

- è sempre **parallela alla superficie**;
- è di **modulo proporzionale** a $|F_N|$.

Quest'ultima osservazione non è ovvia, in quanto bisogna osservare il comportamento delle particelle a livello microscopico.

Si consideri l'illustrazione seguente, in cui si espongono le forze di attrito agenti:

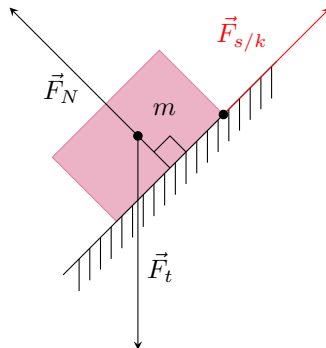


Figura 21: Forza di attrito

La forza di attrito si distingue in due diverse tipologie:

1. L'**attrito cinetico**, si ha quando il moto relativo tra le superfici in contatto non è nullo, ovvero si ha movimento con $v \neq 0$.
Si ha che

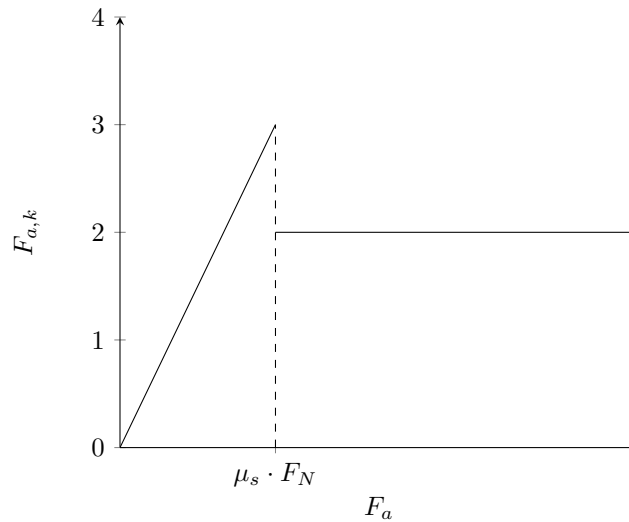
$$F_k = \mu_k \cdot F_N$$

in cui μ_k prende il nome di **coefficiente di attrito cinetico** (dall'inglese k , di "kinetic"), il quale, per ovvie ragioni, è **adimensionale**.

2. L'**attrito statico**, si ha quando la velocità relativa tra le superfici di contatto è nulla, ovvero non si ha movimento, $v = 0$.
Si ha che

$$F_s \leq \mu_s \cdot F_N$$

ovvero il modulo F_s aumenta affinché la risultante delle forze interagenti (e quindi la risultante) sia 0. Ovviamente, quando la forza che agisce aumenta il proprio modulo fino a superare la forza di attrito statico, il corpo inizia a muoversi e l'attrito si tramuta, a seguito del moto, in attrito cinetico, come si vede di seguito:



Il coefficiente moltiplicativo μ_s prende il nome di **coefficiente di attrito statico** e generalmente si ha che

$$\mu_k < \mu_s$$

14 Marzo 2022

Si osservi che quando una massa rimane sospesa tramite due cavi che formano con la superficie di collegamento un angolo di 90° ciascuno, non entrano in gioco solamente le forze, ma risulta fondamentale anche conoscere il concetto di **momento di forza** e di **punto di applicazione**: se il punto di applicazione delle forze di tensione è lo stesso sul corpo sospeso, basta una leggerissima differenza di lunghezza dei cavi per avere uno sbilanciamento significativo delle forze di tensione.

Osservazione: L'attrito statico è come se non fosse un attrito, in quanto non si ha movimento: è come una forza normale che si oppone al tentativo di spostamento, variando il proprio modulo in modo tale da cancellare la forza applicata.

L'attrito cinetico, invece, è un vero e proprio attrito che si oppone al moto tramite la dissipazione di energia in calore.

Esempio: Si consideri una vettura che, in movimento, procede a frenare e a rallentare fino a fermarsi: il fenomeno che si sta studiando è l'attrito tra le ruote e la strada. In particolare la vettura richiede 70 m per fermarsi, partendo da una velocità di 100 km/h (a causa di uno slittamento delle gomme sull'asfalto).

A partire da questi dati, si determini il **coefficiente di attrito cinetico**; si proceda alla realizzazione di un modello grafico del problema:

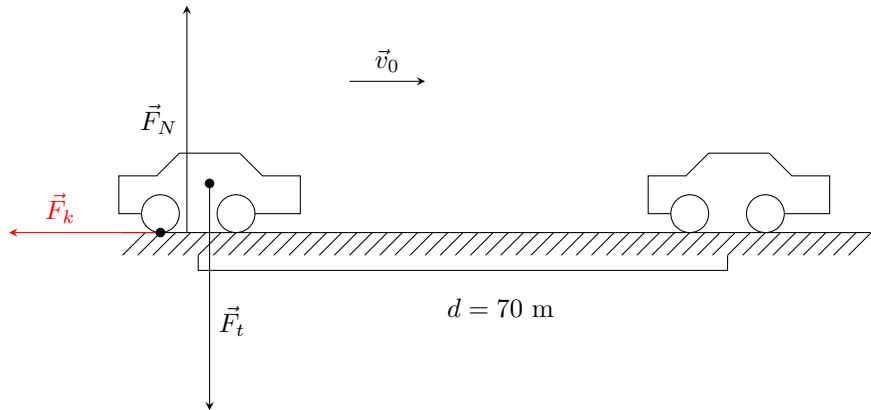


Figura 22: Vettura in decelerazione su una strada

È molto importante osservare che la forza normale è essenziale per il calcolo della forza di attrito cinetico, in quanto da essa dipende il suo modulo. Si realizzi, ora, il diagramma a corpo libero:

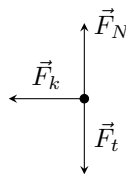


Figura 23: Diagramma a corpo libero di una vettura in rallentamento

Per procedere si richiami la 2^a legge della dinamica e si scriva

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \cdot (a_x \cdot \hat{i} + 0 \cdot \hat{j})$$

È noto, inoltre, che

$$\vec{F}_t + \vec{F}_N = 0 \longrightarrow \vec{F}_t = -\vec{F}_N$$

Per cui si ottiene che

$$\vec{F}_k = ma_x \cdot \hat{i} \longrightarrow a_x = -\frac{F_k}{m}$$

in cui, per convenzione, si pone la componente orizzontale negativa.

Inoltre è possibile calcolare anche l'accelerazione con cui la macchina rallenta, impiegando la seguente formula del moto uniformemente accelerato:

$$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot (x - x_0)$$

che è possibile applicare al contesto in quanto si parla di moto uniformemente accelerato, giacché l'accelerazione è causata dalla forza di attrito, che è costante in quanto prodotto tra un coefficiente e la forza normale, la quale è costante in quanto si oppone al peso che è costante.

Da tale formula si ottiene che

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{x - x_0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{2d}$$

Da ciò segue che, ovviamente

$$F_k = \mu_k F_N$$

in cui ovviamente

$$F_N = F_t = mg$$

per cui si evince che

$$F_k = \mu_k \cdot mg \longrightarrow a_x = -\frac{F_k}{m} = -\mu_k g$$

Pertanto, dalla uguaglianza appena determinata

$$a_x = -\mu_k g = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{2d}$$

si può ricavare

$$\mu_k = \frac{v_0^2}{2gd} = 0.56$$

Osservazione: Si osservi che la 2^a legge di Newton è applicabile in un sistema di riferimento inerziale, ovvero in un sistema di riferimento che non ha propensione a muoversi.

Il tempo di volo di un proiettile è

$$t = \frac{2v_0 \cdot \sin(\theta)}{g}$$

Esempio: Si consideri un piano su cui poggiano tre masse, l'una collegata all'altra, come mostrato di seguito:



Figura 24: Tre masse trainate

Tali masse vengono trainate con una forza $F = 200$ N, mentre le masse sono $m_A = 30$ kg, $m_B = 50$ kg e $m_C = 20$ kg; inoltre è noto che il coefficiente di attrito cinetico è $\mu_k = 0.1$. Si determini, allora

- l'accelerazione dell'intero sistema;

- la tensione delle corde $A - B$ e $B - C$.

Si realizzi il diagramma a corpo libero del sistema oggetto di studio

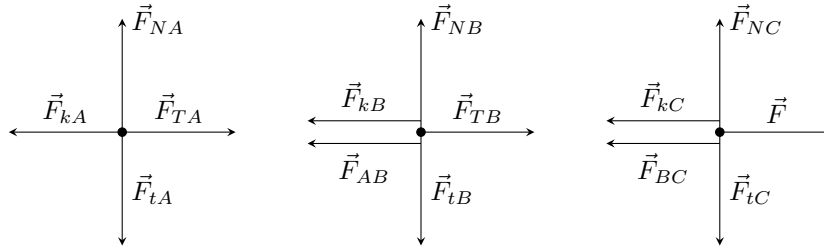


Figura 25: Diagramma a corpo libero di 3 masse trainate

Per la risoluzione del primo quesito, si può sfruttare la **proprietà additiva** della massa, essendo i tre corpi omogenei e costituiti dalla stessa sostanza. Pertanto l'assieme ABC si comporta come un unico corpo, la cui massa complessiva è

$$m = m_A + m_B + m_C = 30 \text{ kg} + 50 \text{ kg} + 20 \text{ kg} = 100 \text{ kg}$$

Pertanto si può realizzare un nuovo diagramma a corpo libero, mostrato di seguito:



Figura 26: Diagramma a corpo libero di un'unica massa

Pertanto si ottiene che, per la 2^a legge della dinamica:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Naturalmente le forze possono essere scomposte nei loro rispettivi componenti, per cui si ottiene

$$y : \begin{cases} \vec{F}_N = -\vec{F}_t \\ F_N = mg \end{cases}$$

mentre si ottiene che

$$x : \begin{cases} ma_x = F - F_k \\ F_k = \mu_k \cdot F_N \end{cases}$$

da cui

$$a_x = \frac{F}{m} - \mu_k \cdot g = 2.0 \text{ m/s}^2 - 0.98 \text{ m/s}^2 = 1.0 \text{ m/s}^2$$

Per la risoluzione del secondo quesito, si determini dapprima la tensione della corda $A - B$, ovvero \vec{F}_{AB} che, per la 3^a legge di Newton è uguale, in modulo, alla forza \vec{F}_{TA} .

Dalla 2^a legge della dinamica applicata al corpo A si ottiene

$$\vec{F}_{NA} + \vec{F}_{tA} + \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{kA} = m_A \cdot \vec{a}_A$$

Naturalmente si ha che, scomponendo tale equazione nelle sue componenti x e y si ottiene

$$\begin{cases} F_{ABx} - \mu_k m_A g = m_A a_{Ax} \\ F_N + F_t = m_A a_{Ay} = 0 \longrightarrow F_N = -F_t \end{cases}$$

Si può procedere, ora, al calcolo di F_{BAx} come segue (ricordando che l'accelerazione del sistema è la stessa di ciascuna massa, ovviamente):

$$F_{BAx} = m_A \cdot (a_{Ax} + \mu_k g) = 30 \text{ kg} \cdot [1 \text{ m/s}^2 + 0.1 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2] = 60 \text{ N}$$

Da notare che tale formula poteva anche essere riscritta come segue

$$F_{BA} = m_A \cdot \left(\frac{F}{m} - \mu_k \cdot g + \mu_k \cdot g \right) = \frac{m_A}{m_A + m_B + m_C} \cdot F = 60 \text{ N}$$

Per la determinazione della tensione $B - C$, è sufficiente procedere come già fatto, impiegando la seconda legge della dinamica sul corpo B (o anche sul corpo C , visto che sono noti tutti i dati del problema). Si applichi, allora, la 2^a legge della dinamica sul corpo C , ottenendo

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \longrightarrow \vec{F} + \vec{F}_{kc} + \vec{F}_{NC} + \vec{F}_{tC} + \vec{F}_{BC} = m_C \cdot \vec{a}_C$$

Naturalmente è possibile scomporre tale equazione nelle sue componenti x e y , ottenendo

$$y : F_{NC} - F_{tC} = 0 \longrightarrow F_{NC} = F_{tC} = m_C g$$

$$x : F - F_{kC} - F_{BC} = m_C a_{xC} \longrightarrow F - \mu_k m_C g - F_{BC} = m_C \cdot a_{xC}$$

Da cui si evince che

$$F_{BC} = F - \mu_k m_C g - m_C \cdot a_{xC} = 200 \text{ N} - 20 \text{ N} - 20 \text{ N} = 160 \text{ N}$$

15 Marzo 2022

Quando bisogna risolvere un problema di meccanica, è essenziale visualizzare il problema tramite una rappresentazione grafica; dopodiché è fondamentale procedere alla realizzazione del diagramma a corpo libero del sistema.

Solamente a questo punto è possibile procedere alla stesura delle equazioni dinamiche che consentono di isolare le richieste del problema.

4.8 Attrito dovuto a un fluido (resistenza)

Un'altra importante forza di attrito è la resistenza di un fluido: l'aria, per esempio, rallenta il moto di un corpo, come accade quando si lascia cadere dalla stessa altezza un martello e una piuma (sulla terra, dove c'è aria, il martello cade prima della piuma, mentre sulla Luna, in assenza di atmosfera, i due corpi cadono alla medesima velocità, impiegando lo stesso tempo).

ATTRITO DOVUTO A UN FLUIDO (RESISTENZA)

La resistenza di un fluido è la forza di attrito che il fluido produce sul corpo in movimento, rallentandone la corsa. La causa di tale resistenza è dovuta alla **viscosità del fluido** che, naturalmente, esercita una **forza opposta** \vec{F}_v al moto del fluido (naturalmente le proprietà del fluido sono determinanti).

Il problema della forza esercitata da un fluido viscoso su un corpo in esso immerso è complesso; tuttavia, tale fenomeno viene modellizzato, in maniera approssimativa, attraverso due diversi schemi teorici:

1. George Stokes, nel 1845, prese in considerazione il problema solo per un caso particolare, quello di un **oggetto di forma sferica, completamente immerso** in un fluido in **moto laminare**, di **densità costante** ed **incomprimibile**.

Pertanto, a velocità bassa con densità bassa, si ha un **flusso laminare** (ovvero si è in **assenza di turbolenza**) e per determinare la forza resistiva si impiega, appunto, la **legge di Stokes**

$$\vec{F} = -b \cdot \vec{v}$$

in cui b prende il nome di **coefficiente di viscosità**, che dipende dalle proprietà del fluido ed è un coefficiente di proporzionalità diretta: più aumenta la velocità, maggiore sarà l'intensità della forza d'attrito. Tale forza è molto diversa rispetto alle forze precedentemente analizzate, in quanto dipende strettamente dalla tipologia di moto del corpo considerato. Naturalmente, in questo caso, l'equazione è molto semplice, ma difficilmente applicabile, in quanto nell'equazione di Newton si ha un'accelerazione, mentre la legge di Stokes fornisce una velocità: si tratta, quindi, di risolvere un'**equazione differenziale**.

2. Se il **moto** invece è **turbolento** le forze inerziali dominano su quelle viscosi e la forza di resistenza dipende da diversi fattori:

- **densità** ρ del fluido;
- l'**area di proiezione** del fluido A , ovvero una stima di quanto fluido viene spostato nel moto: un corpo lungo e fino non subirà molta resistenza, mentre un corpo grande e largo avrà una resistenza maggiore;
- il **coefficiente di caratterizzazione della forma del corpo** C_d (in cui D sta per "Drag"), determinato sperimentalmente e, per ovvie ragioni, **adimensionale**.

Considerando tali fattori, la forza di resistenza è

$$F_v = \frac{1}{2} \rho A C_d v^2$$

Esempio: Si consideri un quadricottero che, inclinandosi orizzontalmente di un angolo θ , produce uno spostamento di velocità v che, naturalmente, viene rallentato dall'aria che oppone una forza di resistenza.

Si supponga, per ipotesi, che tale drone esegua un moto che è possibile modellizzare tramite la legge di Stokes, ovvero

$$\vec{F}_v = -b \cdot \vec{v}$$

Si determini, allora, l'angolo θ tale per cui il drone si muove ad una **velocità costante** \vec{v} . Si realizzi, allora, il diagramma a corpo libero seguente:

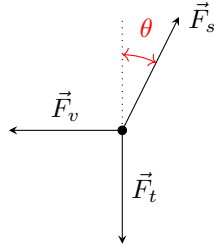


Figura 27: Diagramma a corpo libero di un drone inclinato

Naturalmente, in questo caso, è possibile applicare la 2^a legge della dinamica, in quanto è noto che il drone si muove a velocità costante, quindi l'accelerazione è nulla e quindi la somma delle forze risultanti è nulla.

Pertanto si ha che

$$\vec{F}_t + \vec{F}_v + \vec{F}_s = m \cdot \vec{a} = 0$$

Naturalmente è possibile scomporre tale equazione vettoriale nelle sue componenti x e y , ottenendo

$$x : F_s \cdot \sin(\theta) - bv = 0$$

$$y : F_s \cdot \cos(\theta) - mg = 0$$

Dalla seconda equazione si ottiene che

$$F_s = \frac{mg}{\cos(\theta)}$$

mentre dalla prima equazione si ha che

$$v = \frac{mg}{b} \cdot \tan(\theta)$$

Esempio: Si calcoli la velocità limite di un paracadutista che scende verticalmente, di cui si propone di seguito il diagramma a corpo libero:



Figura 28: Diagramma a corpo libero di un drone inclinato

Infatti, ad un certo punto, la forza peso del corpo in caduta libera verrà eguagliata dalla forza di resistenza dell'aria e il paracadutista non aumenterà più la sua velocità, ma la manterrà costante. Naturalmente, in questo caso, è necessario applicare la seconda formula della resistenza, semplicemente osservando che

$$mg = F_v = \frac{1}{2} \cdot \rho AC_d v^2$$

Per isolare la velocità limite, semplicemente si può scrivere

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho AC_d}}$$

Naturalmente, se si suppone che

- $m = 70 \text{ kg}$
- $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$
- $C_d = 0.8$
- $A = 0.5 \text{ m}^2$

Considerando tali dati per il problema si ottiene che

$$v = 55 \text{ m/s}$$

e tale risultato è totalmente ininflente dall'altezza dalla quale ci si paracaduta, in quanto la velocità limite che è possibile raggiungere è $v = 55 \text{ m/s}$.

4.9 Dinamica del moto circolare uniforme

Naturalmente, è noto che nel moto circolare uniforme la velocità v è costante, per cui l'accelerazione è soltanto centripeta e diretta verso il centro della circonferenza, ortogonalmente al vettore velocità. È noto che il modulo dell'accelerazione nel moto circolare uniforme è pari a

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

essendo

$$\omega = \frac{v}{R}$$

FORZA CENTRIPETA

La forza necessaria per mantenere il moto circolare è, per la seconda legge della dinamica:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

e sostituendo ad a la formula precedentemente ottenuta si ha

$$F_c = \frac{mv^2}{R}$$

orientata verso il centro della circonferenza. Naturalmente quest'ultima è la **forza centripeta**, così chiamata per descriverne la direzione e il verso, ma non la natura della forza (la forza centripeta non è un tipo di forza, in quanto anche la forza di attrazione gravitazionale è una forza centripeta quando si parla di attrazione tra pianeti, anche la forza d'attrito è una forza centripeta, come quando si gira con la macchina).

Esempio: Nelle curve delle strade, la carreggiata è inclinata, in quanto la forza normale si scompone in due componenti: una centrifuga e una centripeta; ciò, naturalmente, aiuta la forza di attrito ad evitare che la vettura esca fuori strada.

Si determini, allora, l'angolo θ di inclinazione della strada affinché la componente orizzontale della forza normale fornisca la forza centripeta necessaria per girare (supponendo in assenza di attrito):



Figura 29: Auto in curva su un piano inclinato

Si realizzi il diagramma a corpo libero della vettura:

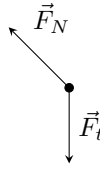


Figura 30: Diagramma a corpo libero di una macchina in curva

Naturalmente, scomponendo la forza normale nelle sue due componenti (orizzontale e verticale) si ottiene che

$$F_N \cdot \sin(\theta) = F_c = \frac{mv^2}{R}$$

$$F_N \cdot \cos(\theta) - mg = 0 \longrightarrow F_N \cdot \cos(\theta) = mg$$

Allora si ha che

$$\tan(\theta) = \frac{v^2}{Rg}$$

Osservazione: Anche quando si considera il moto di una corda che viene fatta ruotare nell'aria, la tensione della corda è esattamente la forza centripeta necessaria a mantenere il moto circolare uniforme (conoscendo il raggio di rotazione, ossia la lunghezza della corda, nonché la velocità di rotazione).

Per verificare che il coefficiente di attrito statico non può essere mai maggiore di 1 è sufficiente porre una massa su una superficie inclinata e aumentare l'angolo di inclinazione.

16 Marzo 2022

4.10 Sistemi non-inerziali

Il concetto di sistema non-inerziale è essenziale per lo studio della dinamica dei corpi. Infatti, un sistema non-inerziale è un sistema di riferimento in cui l'accelerazione non è nulla, ovvero $a \neq 0$. Ciò impedisce di applicare la 2^a legge della dinamica, in quanto tale legge si applica solo a sistemi di riferimento inerziali.

Si consideri il caso di un treno in accelerazione e di una massa sospesa al soffitto; naturalmente, quando il treno accelera (e quindi la sua velocità non è costante), la massa si inclina nella direzione opposta al moto. Si consideri il diagramma a corpo libero della massa



Figura 31: Diagramma a corpo libero di una massa sospesa in movimento

In cui, ovviamente, applicando la 2^a legge della dinamica si ottiene che

$$\vec{F}_T + \vec{F}_t = m \cdot \vec{a}$$

da cui

$$\vec{F}_T + m\vec{g} = m\vec{a} \longrightarrow \vec{F}_T = m \cdot (\vec{a} - \vec{g})$$

Osservazione: Si osservi che la prima equazione può essere riscritta come segue:

$$\vec{F}_T + \vec{F}_t = m \cdot \vec{a} \longrightarrow \vec{F}_T + \vec{F}_t - m \cdot \vec{a} = 0$$

Ecco che allora la forza $\vec{F}_a = m\vec{a}$ è una nuova forza, la quale prende il nome di **forza apparente**, o anche **pseudo-forza apparente** o **forza inerziale**, che agisce ancora una volta sulla massa m , in direzione opposta alla direzione del moto.

Naturalmente, in questo, l'unico termine da considerare è $m\vec{a}$, in quanto l'accelerazione è costante, mentre se l'accelerazione non lo fosse, all'interno della formula dovrebbero figurare altri termini (si pensi, per esempio, ad una **pseudo-forza apparente centrifuga**, la quale può essere costante in modulo, ma cambia direzione e forza).

Esempio: Si consideri il caso in cui una massa m è posta su un cuneo e l'intero sistema accelerazione con \vec{a} costante. Si determini, allora, quale deve essere l'accelerazione \vec{a} affinché il blocco rimanga immobile sul cuneo.

Naturalmente, osservando il sistema da fuori, le uniche forze che agiscono su tale corpo sono la forza peso e la forza normale. Se, invece, tale corpo viene osservato dall'interno, impiegando un sistema di riferimento non-inerziale, allora a tali forze se ne deve aggiungere una terza, una **pseudo-forza apparente** che agisce in verso opposto a quello dell'accelerazione \vec{a} , ovvero la forza $\vec{F}_a = -m\vec{a}$, come mostrato di seguito:

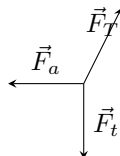


Figura 32: Diagramma a corpo libero di una massa su un piano inclinato

Da cui si evince che

$$\vec{F}_N + \vec{F}_t + \vec{F}_a = 0$$

$$\begin{aligned} F_N \cdot \cos(\theta) - mg &= 0 \\ -F_A + F_N \cdot \sin(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

per cui si ottiene che

$$a = g \cdot \tan(\theta)$$

4.11 Prodotto vettoriale

Si considerino due vettori \vec{A} e \vec{B} , allora si ha che

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin(\theta)$$

ove θ è l'angolo compreso tra i vettori \vec{A} e \vec{B} .

Osservazione: Si osservi che il prodotto vettoriale $\vec{A} \times \vec{B}$ è un vettore ortogonale ad \vec{A} e \vec{B} . Inoltre si ha che

- se $\vec{A} \perp \vec{B}$, allora si ha che

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$$

- se $\vec{A} \parallel \vec{B}$, allora si ha che

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = 0$$

- negli altri casi bisogna impiegare la regola della mano destra
- $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$
- $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$
- $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$
- $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$
- $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$
- $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$
- $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

Alternativamente, è noto che il prodotto vettoriale $\vec{A} \times \vec{B}$ si calcola come

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

Osservazione: Si osservi che, nel caso del prodotto scalare, $\vec{B} \cdot \vec{A}$ si interpretava come $|A|$ per la componente di B su A .

Inoltre si ha che che il prodotto scalare tra \vec{A} e \vec{B} non viene alterato se ai due vettori vengono aggiunte ulteriori componenti parallele ad \vec{A} e \vec{B} .

Esempio: Si osservi che la forza di Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

in cui, senza \vec{E} , sarebbe stato

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

In questo caso, il campo magnetico \vec{B} va dentro la pagina e la velocità \vec{v} è parallela alla pagina, pertanto la forza \vec{F} è diretta verso il centro della spirale, ovvero \vec{F} è una **forza centripeta**, calcolata come segue

$$\vec{F} = -e \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Ma alla cinetica è anche noto che la forza centripeta si calcola come

$$F_c = \frac{mv^2}{R}$$

per cui operando una eguaglianza si ottiene

$$\frac{mv^2}{R} = evB \rightarrow \frac{mv}{R} = eB \rightarrow m\omega = eB \rightarrow \omega = \frac{eB}{m}$$

in cui ω prende il nome di **frequenza ciclotronica**, un valore utilizzabile per determinare la traiettoria e la natura del campo magnetico B .

4.12 Pseudo-forza di Coriolis

Si consideri il seguente diagramma di un moto circolare

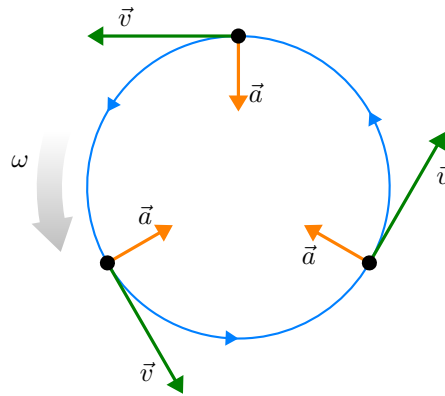


Figura 33: Pseudo-forza di Coriolis

Allora si può scrivere che, naturalmente, la velocità è il prodotto vettoriale tra il vettore velocità angolare e il vettore posizione, ovvero

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

E procedendo a derivare tale espressione rispetto al tempo si ottiene che

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

in cui le parentesi sono importanti, essendo il prodotto vettoriale non associativo.

La pseudo-forza centrifuga, pertanto, si calcola come segue

$$\vec{F} = -m\vec{a} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

Osservazione: Si consideri un punto materiale che si muove in linea retta e si supponga che poggia su un piano rotante con velocità angolare ω ; allora si osserva che, naturalmente, la pseudo-forza centrifuga è una componente che contribuisce a fare sì che il punto vada verso l'esterno, ma oltre a ciò, è da considerare anche un'altra forza che spinge il punto materiale in direzione opposta al verso di rotazione.

PSEUDO-FORZA DI CORIOLIS

Tale forza prende il nome di **pseudo-forza di Coriolis**, la quale è perpendicolare a $\vec{\omega}$ e a \vec{v} e si calcola come segue

$$\vec{F} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

Esempio: Si osservi che, in un vortice di bassa pressione, considerando la velocità angolare terrestre con verso uscente dal foglio e la velocità delle particelle di aria dirette verso il centro del vortice, si ottiene che la pseudo-forza di Coriolis, per la regola della mano destra, è diretta ortogonalmente al vettore velocità e giacente sul foglio stesso.

Osservazione: Si osservi che il calcolo della velocità limite segue la seguente formula

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho AC_d}}$$

e sapendo che

$$m = V \cdot \rho$$

si evince che

$$v = \sqrt{\frac{2V\rho g}{\rho AC_d}} = \sqrt{\frac{2Vg}{AC_d}}$$

pertanto, a parità di accelerazione gravitazionale g e coefficiente di resistenza C_d , ciò che determina la velocità dell'impatto con il suolo è il rapporto

$$\frac{V}{A}$$

pertanto più un corpo è voluminoso, maggiore sarà la velocità con cui impatta al suolo.

5 Gravità

17 Marzo 2022

La **legge di gravitazione universale** venne formulata da Isaac Newton nell'opera *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ("Principia") e pubblicata il 5 luglio 1687. Newton, infatti, ha affermato di voler formulare una teoria unica (appunto, universale) che descriva sia la caduta dei corpi sulla terra, sia il movimento degli astri.

Al fine di determinare tale formula, Newton si basò sull'osservazione della Luna e del suo moto; l'**accelerazione centripeta della Luna**, naturalmente, si calcola come segue

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

in cui, ovviamente, ω è la velocità angolare, mentre R è il raggio dell'orbita della Luna, ovvero la distanza Terra-Luna (già nota dai tempi dei Greci); in particolare è noto che $R = 60 \cdot R_T$, in cui $R_T = 6371$ km, mentre per determinare la velocità angolare, è noto che

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

in cui $T \cong 27.3$ giorni. Ovviamente con questi dati è possibile calcolare l'accelerazione centripeta della Luna è

$$a_c = 2.7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

inoltre è noto che l'accelerazione gravitazionale terrestre è $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ per cui eseguendo il rapporto si ottiene

$$\frac{g}{a_c} = 60^2$$

che è un risultato importante, in quanto fa capire come il modulo dell'accelerazione centripeta sia inversamente proporzionale alla distanza tra i due corpi che si attraggono; una proprietà che viene espressa tramite la seguente legge di gravitazione universale

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

in cui G prende il nome di **costante di gravitazione universale**.

Esempio: Si considerino due punti materiali m_1 e m_2 ad una certa posizione:

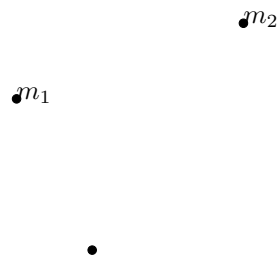


Figura 34: Diagramma a corpo libero di una vettura in rallentamento

Allora si ha che, normalmente, il modulo della forza di attrazione gravitazionale dal corpo 1 al corpo 2 è

$$F_{1,2} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

e volendo determinare il vettore forza di attrazione, semplicemente si può scrivere

$$\vec{F}_{1,2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \cdot \hat{r}_{1,2}$$

Osservazione: Allora si ha che, naturalmente, sulla Terra, fissando come origine il centro della Terra:

$$\vec{F}_t = -G \cdot \frac{m_T \cdot m}{r^2} \cdot \vec{r} = - \left(G \cdot \frac{m_T}{R_T^2} \right) \cdot m \hat{r}$$

in cui, ovviamente

$$g = \left(G \cdot \frac{m_T}{R_T^2} \right)$$

in cui si è fissato come raggio il raggio terrestre, dal momento che la Terra è un corpo sferico e, quindi, tutta la sua massa può essere considerata concentrata nel suo nucleo.

5.1 L'esperimento di Cavendish

Per misurare la forza di attrazione gravitazionale, Cavendish ha impiegato un pendolo su cui venivano fissate due masse che oscillavano leggermente ed è riuscito a determinare la densità della terra; sapendo la densità e il volume della Terra, si sarebbe stati in grado di conoscerne la massa e, sapendo il valore di g , si sarebbe, in seguito, stati in grado di isolare la costante gravitazionale G , che presenta il valore seguente:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{ kg}}$$

A partire da tale risultato è possibile analizzare il moto e le caratteristiche di diversi pianeti.

5.2 Campo gravitazionale

A partire dall'equazione seguente

$$\vec{F}_t = -G \cdot \frac{m_t}{R_t^2} \cdot \hat{r} \cdot m$$

allora per campo si definisce una valutazione della **forza per unità di massa**, come mostrato di seguito:

$$\frac{\vec{F}_t}{m} = -G \cdot \frac{m_t}{R_t^2} = \vec{g}$$

che è esattamente lo stesso concetto di di campo elettrico, ovvero la forza per unità di carica (nel caso di un campo gravitazionale, la carica è proprio la massa).

Osservazione: Si osservi che il **campo gravitazionale è additivo**: infatti, date due masse identiche, poste vicine l'una all'altra, le linee di campo dell'una si fondono con quelle dell'altra, dando vita a delle deformazioni delle linee di campo.

Di fatto si ha che il campo gravitazionale risultante è

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

5.3 Massa gravitazionale e inerziale

Dalla 2^a legge della dinamica

$$\vec{F} = m_I \cdot \vec{a}$$

si evince come la massa m_I sia da considerarsi con l'**inerzia**, ovvero la **resistenza alla variazione di moto**.

Mentre dalla legge di gravitazione universale

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_G}{r^2} \cdot \vec{r}$$

si ha che m_G è una sorta di “carica gravitazionale”, che non sono da reputarsi il medesimo concetto dal punto di vista teorico, per cui si dovrebbe dire che

$$a_y = -G \cdot \frac{m_1}{r^2} \cdot \left(\frac{m_G}{m_I} \right)$$

Tuttavia, dal punto di vista sperimentale, sono state eseguite delle misurazioni con un altissimo livello di precisione che hanno confermato come

$$\frac{m_G}{m_I} = 1$$

per cui le due masse sono da reputarsi identiche.

5.4 Corpi estesi

Il campo gravitazionale è una quantità additiva, per cui per conoscere la forza di attrazione di un corpo non puntiforme, è sufficiente scomporlo in punti e sommare il contributo di ciascuno per pervenire al risultato cercato.

In altri termini si ha che

$$\vec{g} = \sum_i \vec{g}_i = \sum_i -G \cdot \frac{m_i}{r_i^2} \cdot \hat{r} = -G \cdot \int \frac{dm}{r^2} \cdot \hat{r}$$

in cui si deve integrare all’infinito il contributo di ciascuna punto.

Esempio: Se si considera una distribuzione con simmetria sferica (ovvero una sfera in cui la densità non deve necessariamente essere uniforme), allora tutta la massa è da reputarsi al centro della sfera.

Osservazione: Si osservi che il numero di giri compiuti nell’unità di tempo è, ovviamente, data da

$$\frac{1}{T}$$

Inoltre, si ha che la forza centripeta descrive la natura della forza, non il tipo di forza, per cui la forza centripeta può essere causata da qualsiasi tipo di forza.

Si osservi che un punto materiale si muove con velocità di modulo costante lungo un’ellisse, allora, l’accelerazione punta sempre verso il centro dell’ellisse, in quanto il moto considerato è lo stesso di un moto circolare uniforme, ma visto da un sistema di riferimento a velocità costante (per cui l’accelerazione è nulla).

Naturalmente, i corpi liberi su una vettura in decelerazione cadono in avanti perché mantengono la stessa velocità che avevano prima della decelerazione.

6 Energia

7 Moto dei sistemi

8 Corpi rigidi

9 Oscillazioni

10 Solidi e fluidi

11 Temperatura e calore

12 Il primo principio della termodinamica

13 Il secondo principio della termodinamica