

# Università di Trieste

## Laurea in ingegneria elettronica e informatica

Enrico Piccin - Corso di Fisica generale I - Prof. Pierre Thibault

Anno Accademico 2021/2022 - 1 Marzo 2022

### Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
1.1	Metodo scientifico . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Unità e vettori</b>	<b>6</b>
2.1	Grandezza fisica . . . . .	6
2.2	Cifre significative e incertezza . . . . .	6
2.2.1	Operazioni di base . . . . .	7
2.3	Ordini di grandezza . . . . .	7
2.4	Analisi dimensionale . . . . .	8
2.5	Scalari e vettori . . . . .	8
2.6	Prodotto con uno scalare . . . . .	9
2.7	Somma vettoriale . . . . .	9
2.8	Versori . . . . .	9
2.9	Modulo e direzione . . . . .	10
2.10	Prodotto scalare . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Cinematica</b>	<b>12</b>
3.1	Posizione e spostamento . . . . .	12
3.2	Posizione in funzione del tempo . . . . .	13
3.3	Velocità . . . . .	14
3.4	Accelerazione . . . . .	15
3.5	Moto uniformemente accelerato . . . . .	17
3.5.1	Caduta libera dei gravi . . . . .	19
3.5.2	Moto dei proiettili . . . . .	20
3.6	Moto in 2D e 3D . . . . .	23
3.7	Moto circolare uniforme . . . . .	24
3.8	Moti relativi . . . . .	28
3.8.1	Caso generale . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Dinamica</b>	<b>30</b>
4.1	Massa . . . . .	30
4.2	Forza . . . . .	31
4.3	Principi della dinamica - Leggi di Newton . . . . .	31
4.4	Forza peso . . . . .	31
4.5	Forza normale . . . . .	32
4.6	Forza di tensione . . . . .	35
4.7	Forza di attrito . . . . .	39
4.8	Attrito dovuto a un fluido (resistenza) . . . . .	45
4.9	Dinamica del moto circolare uniforme . . . . .	47
4.10	Sistemi non-inerziali . . . . .	49
4.11	Prodotto vettoriale . . . . .	50
4.12	Pseudo-forza di Coriolis . . . . .	52

<b>5</b>	<b>Gravità</b>	<b>54</b>
5.1	L'esperimento di Cavendish . . . . .	55
5.2	Campo gravitazionale . . . . .	56
5.3	Massa gravitazionale e inerziale . . . . .	56
5.4	Corpi estesi . . . . .	57
5.5	Leggi di Keplero . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Energia</b>	<b>61</b>
6.1	Energia cinetica . . . . .	61
6.2	Lavoro . . . . .	62
6.3	Teorema lavoro-energia cinetica . . . . .	62
6.4	Lavoro compiuto da una forza variabile . . . . .	65
6.5	Lavoro compiuto dalla forza di gravità . . . . .	67
6.6	Forze conservative . . . . .	68
6.7	Energia potenziale . . . . .	70
6.7.1	Energia potenziale gravitazionale . . . . .	71
6.7.2	Energia potenziale elastica . . . . .	71
6.8	Potenza . . . . .	71
6.9	Conservazione dell'energia . . . . .	75
6.10	Velocità di fuga . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Moto dei sistemi</b>	<b>85</b>
7.1	Centro di massa . . . . .	85
7.2	Moto del centro di massa . . . . .	90
7.3	Dinamica del centro di massa . . . . .	90
7.4	Conservazione della quantità di moto . . . . .	91
7.5	Seconda legge di Newton reinterpretata . . . . .	93
7.6	Impulso . . . . .	95
7.7	Urti . . . . .	96
7.7.1	Urti tra due corpi . . . . .	98
7.7.2	Urti elastici . . . . .	99
7.8	Urto in 1D - Elastico . . . . .	100
7.9	Urto in 1D - Anelastico . . . . .	101
7.10	Urti - Riepilogo . . . . .	101
7.11	Moto dei razzi . . . . .	103
<b>8</b>	<b>Moto e dinamica dei corpi rigidi</b>	<b>106</b>
8.1	Corpi rigidi - Cinematica . . . . .	106
8.1.1	Traslazione . . . . .	107
8.1.2	Rotazione . . . . .	107
8.1.3	Rototraslazione . . . . .	108
8.2	Corpi rigidi - Dinamica . . . . .	108
8.3	Corpi rigidi - Energia cinetica . . . . .	109
8.4	Momento di inerzia . . . . .	110
8.5	Teorema degli assi paralleli . . . . .	115
8.6	Prodotto vettoriale - Richiamo . . . . .	116
8.7	Momento di forza . . . . .	117
8.7.1	Momento di forza dovuto alla gravità . . . . .	120
8.8	Baricentro . . . . .	121
8.9	Ribaltamento . . . . .	122
8.10	Leve e ingranaggi . . . . .	124
8.11	Potenza . . . . .	125
8.12	Momento angolare . . . . .	126
8.13	Momento angolare e dinamica . . . . .	127
8.14	Equazioni cardianli della meccanica . . . . .	127
8.15	Equilibrio statico di un corpo rigido . . . . .	128
8.16	Orbita e spin . . . . .	128
8.17	Momento angolare - Corpo rigido . . . . .	130
8.18	Conservazione del momento angolare . . . . .	130

8.19	Seconda legge di Keplero . . . . .	133
8.20	Fisica di un quadricottero . . . . .	133
<b>9</b>	<b>Oscillazioni</b>	<b>135</b>
9.1	Moto armonico . . . . .	135
9.1.1	Cinematica del moto armonico . . . . .	135
9.1.2	Dinamica del moto armonico . . . . .	136
9.2	Energia . . . . .	137
9.3	Pendolo . . . . .	138
9.4	Moto armonico smorzato . . . . .	140
9.5	Moto armonico forzato . . . . .	140
<b>10</b>	<b>Solidi e fluidi</b>	<b>141</b>
10.1	Proprietà dei solidi . . . . .	141
10.1.1	Deformazioni . . . . .	141
10.2	Elasticità . . . . .	142
10.3	Fluidi . . . . .	142
10.4	Pressione . . . . .	143
10.4.1	Principio (o legge) di Pascal . . . . .	143
10.5	Equilibrio idrostatico . . . . .	144
10.6	Flusso laminare e turbolento . . . . .	145
10.7	Equazione di continuità . . . . .	145
10.8	Teorema di Bernoulli . . . . .	146
10.9	Viscosità . . . . .	147
<b>11</b>	<b>Termodinamica</b>	<b>148</b>
11.1	Principio “Zero” della termodinamica . . . . .	149
11.2	Temperatura . . . . .	149
11.3	Gas perfetto . . . . .	151
11.4	Dilatazione termica . . . . .	152
11.5	Equilibrio termodinamico . . . . .	155
11.6	Equazione di stato dei gas perfetti . . . . .	156
11.7	Equazione di stato dei gas non-perfetti . . . . .	156
11.8	Trasformazione termodinamica . . . . .	156
11.9	Diagramma di Clapeyron - Pressione/Volume . . . . .	157
11.10	Trasferimenti di energia . . . . .	158
11.11	Calore specifico . . . . .	160
11.12	Capacità termica molare . . . . .	161
11.13	Calore latente . . . . .	162
11.14	Lavoro termodinamico . . . . .	163
<b>12</b>	<b>Il primo principio della termodinamica</b>	<b>165</b>
12.1	Trasformazione isocora . . . . .	166
12.2	Trasformazione isobara . . . . .	166
12.3	Trasformazione ciclica . . . . .	166
12.4	Espansione libera . . . . .	166
12.5	Relazione di Mayer . . . . .	167
12.6	Trasformazione adiabatica . . . . .	169
12.6.1	Energia interna e Lavoro - Trasformazione adiabatica . . . . .	170
12.7	Trasformazione isoterma . . . . .	171
12.8	Riassunto . . . . .	172
<b>13</b>	<b>Teoria cinetica dei gas</b>	<b>173</b>
13.1	Ipotesi di lavoro . . . . .	173
13.2	Valore medio delle velocità . . . . .	173
13.3	Pressione a livello microscopico . . . . .	174
13.4	Temperatura a livello microscopico . . . . .	176
13.5	Equipartizione dell’energia . . . . .	177
13.6	Capacità termiche molari . . . . .	177

13.7 Legge di Dulong e Petit . . . . .	180
13.8 Distribuzione delle velocità . . . . .	180
<b>14 Il secondo principio della termodinamica</b>	<b>182</b>

1 Marzo 2022

## 1 Introduzione

La **Fisica** è lo studio della materia e delle sue interazioni. La **Fisica classica** è divisa in tre macroaree:

1. Meccanica classica
2. Termodinamica
3. Elettromagnetismo

La Fisica è organizzata in

- **Leggi:** relazioni fra grandezze fisiche
- **Principi:** affermazioni generali da reputare vere
- **Modelli:** analogie o rappresentazioni pratiche su cui basare il proprio studio
- **Teoria:** insieme di leggi, principi e modelli

### 1.1 Metodo scientifico

Il **metodo scientifico** si basa su **osservazioni** della realtà circostante, a cui seguono delle **ipotesi**, ossia delle possibili spiegazioni dei fenomeni osservati, basati sulle osservazioni precedentemente formulate.

Dopo aver esposto le proprie ipotesi, esse devono essere verificate, mediante degli **esperimenti**, a cui seguono delle **analisi** dei risultati sperimentali ottenuti. Il processo di analisi viene seguito da delle **conclusioni** che “concludono” il metodo scientifico.

Naturalmente tale circuito non è chiuso, in quanto ciascuna di queste fasi può essere ripetuta più e più volte. La parte più importante di tale *metodo scientifico* è la dimostrazione, così come la verifica tramite **sperimentazioni** delle proprie ipotesi, in quanto le ipotesi devono essere **sempre verificate**. Tale processo permette di sviluppare leggi e teorie con un fondamento concreto e solido.

**Osservazione:** Si osservi che **verificare un’ipotesi** non significa dimostrare che un’ipotesi è vera, ma **verificare che un’ipotesi può essere contraddetta**, ovvero ci si deve assicurare che una **teoria deve essere “falsificabile”**, ossia che può essere dimostrato che essa sia falsa.

## 2 Unità e vettori

### 2.1 Grandezza fisica

Alla base della **Fisica** si pone il concetto di **grandezza fisica**. Non è facile, per esempio, definire che cosa sia il *tempo*; tuttavia, la soluzione più immediata è quella che prevede di definire la misura del tempo come ciò che si riesce a misurare tramite, per esempio, un orologio.

Si parla, in tale caso, di **definizione operativa**:

#### DEFINIZIONE OPERATIVA

Una grandezza fisica è definita solo dalle operazioni necessarie per misurarla.

Inoltre, le grandezze fisiche si esprimono in termini di un **campione**, il quale prende il nome di **unità**.

In Fisica, inoltre, si distinguono due diverse categorie di grandezze fisiche:

1. Grandezze fisiche fondamentali
2. Grandezze fisiche derivate

Le **grandezze fisiche fondamentali** sono 3:

1. Tempo: il tempo presenta come unità il **secondo** (s) che, dal 1967, è stato definito come

9192631170 volte il periodo di oscillazione di una risonanza dell'atomo di Cesio  $^{133}\text{C}$

Prima di tale data, il secondo era definito come una suddivisione del giorno, ma tale definizione era imprecisa: la terra non ruota sempre con la stessa velocità.

2. Lunghezza: la lunghezza presenta come unità il **metro** (m), il quale viene definito come

$\frac{1}{299782458}$  la distanza percorsa dalla luce in 1 s

Prima di tale definizione, il metro era definito come  $\frac{1}{10000}$  la distanza tra equatore e polo. La nuova definizione, tuttavia, è più precisa, in quanto la velocità della luce è **costante**, fissata in quanto su tale costante si definisce il metro.

3. Massa: la massa presenta come unità il **chilogrammo** (kg), il quale viene definito in funzione della **costante di Planck** ( $h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ ). Prima di tale definizione, il chilogrammo era definito con riferimento ad un campione presente a Parigi e su cui si faceva riferimento per ogni misura di massa.

Le grandezze fisiche fondamentali permettono, poi, di definire le grandezze fisiche derivate, quale il **Volume**, la **Forza**, etc.

### 2.2 Cifre significative e incertezza

In Fisica, quando si effettuano delle misurazioni, deve essere sempre specificata la precisione e, dunque, l'incertezza. Infatti, **tutte le misure hanno un livello di incertezza**.

Per esempio

$$L = 1.82 \pm 0.02 \text{ m}$$

$$m = 3.5 \pm 0.1 \text{ kg}$$

Da notare che l'indicazione dell'incertezza è sempre (o quasi) data da una sola cifra: altrimenti si avrebbe incertezza nell'incertezza. L'indicazione dell'incertezza è la base della **fisica sperimentale**.

Nella pratica, tuttavia, l'indicazione dell'incertezza è ridondante e pesante. Per indicare il livello

di precisione si ricorre alle cifre significative.

Per esempio

$$L = 1.82 \text{ m} = 1.82 \pm 0.01 \text{ m}$$

$$m = 3.5 \text{ kg} = 3.5 \pm 0.1 \text{ kg}$$

### 2.2.1 Operazioni di base

Per la gestione delle cifre significative nelle operazioni di calcolo è importante tenere a mente che

- Moltiplicazione e Divisione: bisogna considerare come cifre significative del prodotto o del quoziente il più basso numero di cifre significative dei fattori o di dividendo e divisore.

Per esempio

$$1,1 \text{ m} \times 3.45 \text{ m} = 3.8 \text{ m}^2$$

in quanto il più basso numero di cifre significative dei fattori è 1.

- Addizione e Sottrazione: bisogna considerare come cifre significative della somma o differenza il più basso numero di decimali degli addendi o del minuendo e sottraendo.

Per esempio

$$1.1 \text{ m} - 12 \text{ cm} = 1.1 \text{ m} - 0.12 \text{ m} = 0.98 \text{ m} = 1.0 \text{ m}$$

in quanto il più basso numero di decimali tra minuendo e sottraendo è 1.

## 2.3 Ordini di grandezza

Molto spesso, nelle stime è importante non tanto la precisione delle misure, ma l'ordine di grandezza delle stesse, in modo tale da effettuare un macroconfronto utile per delle valutazioni pratiche e veloci.

Lo scopo, quindi, dell'impiego degli ordini di grandezza è quello di effettuare dei calcoli veloci e, quindi, delle stime. Più precisamente:

### ORDINE DI GRANDEZZA

L'ordine di grandezza di una misura è la **potenza di 10 più vicina**.

**Esempio:** Un ingegnere deve fabbricare un nuovo pacemaker. Si stimi quanti battiti di cuore deve fare senza malfunzionamento. Per effettuare tale stima è necessario conoscere la *media dei battiti al secondo* e *l'aspettativa di vita del soggetto*. Considerando, quindi, come media dei battiti  $m_B = 1$  battito/s e come aspettativa di vita  $a_V = 60$  anni. La stima selectlanguage

$$m_B \times a_V \times \pi \times 10^7 \text{ s/anno} = 1 \text{ battito/s} \times 60 \text{ anni} \times \times 10^7 \text{ s/anno} = 2 \times 10^9 \text{ battiti}$$

2 Marzo 2022

Il metodo scientifico permette di **falsificare una teoria**, quindi non è vero che permette di validare una teoria senza ambiguità.

## 2.4 Analisi dimensionale

Il concetto di **unità** è estremamente importante per parlare di **analisi dimensionale**. In particolare

$$A = B$$

non può essere valido e corretto formalmente se  $A$  e  $B$  hanno unità diverse. Questo è molto intuitivo per le grandezze fisiche fondamentali, ma quando si parla di grandezze derivate diventa un punto cruciale: tale concetto permette di validare anche delle possibili soluzioni di test.

Per esempio, l'unità di misura della costante di richiamo di una molla si può facilmente ricavare dalla formula della *forza di richiamo*:

$$F = k \cdot x$$

Da cui è immediato capire che

$$[k] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{\text{kg m s}^{-2}}{m} = \text{kg s}^{-2}$$

## 2.5 Scalari e vettori

Di seguito si espone la definizione di **scalare**:

### SCALARE

Uno **scalare** è una grandezza specificata da un numero + unità.  
Per esempio la *lunghezza*, la *massa* o l'*energia*.

Mentre un **vettore** è:

### VETTORE

Un **vettore** è una quantità definita da un valore e una direzione (e un verso, che può essere implicito nella definizione di direzione).

Tale definizione, tuttavia, pur essendo molto intuitiva, non risulta particolarmente pratica. Si potrebbe anche considerare un vettore come una **quantità con più valori associati**, ovvero una **lista di numeri a cui conferiamo un significato**.

Per esempio, in algebra un vettore viene indicato come segue

$$\vec{v} = (1, 2, 3)$$

a cui la fisica attribuisce un significato preciso: 1, 2 e 3 sono le componenti associate alle tre diverse dimensioni  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Il vettore di cui sopra, allora, si può scrivere come

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

**Osservazione:** Anche se tale definizione sembra identica alla definizione del **punto**, in realtà tale definizione è differente, in quanto

- un punto non ha una lunghezza;
- non è possibile eseguire la somma di due punti, etc.



## 2.6 Prodotto con uno scalare

Dato un vettore

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

e si considera uno scalare  $a \in \mathbb{R}$ , allora

$$a \cdot \vec{v} = (a \cdot v_x, a \cdot v_y, a \cdot v_z)$$

in cui il vettore  $a \cdot \vec{v}$  è un vettore che

- presenta come lunghezza la lunghezza del vettore  $\vec{v}$  moltiplicata per  $|a|$ ;
- presenta come direzione la stessa direzione del vettore  $\vec{v}$ ;
- presenta come verso lo stesso verso del vettore  $\vec{v}$  se  $a \geq 0$ , mentre avrà verso opposto se  $a \leq 0$ .

## 2.7 Somma vettoriale

Dati due vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , la loro somma viene eseguita graficamente tramite la **regola del parallelogramma**, o il metodo “punta-coda”:

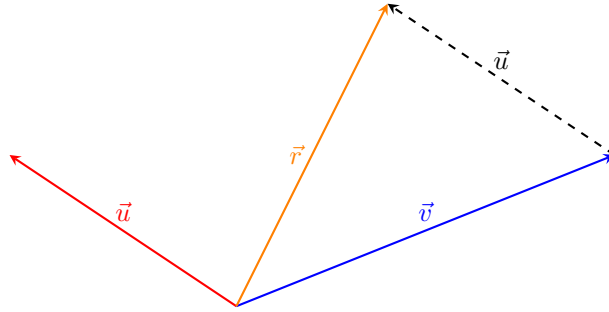


Figura 1: Somma vettoriale con il metodo “punta-coda”

Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sono espressi nello stesso sistema di riferimento, allora è chiaro che la loro somma sarà data **componente per componente**, ovvero

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + v_z)$$

## 2.8 Versori

Si definiscano tre versori come segue

$$\hat{i} = (1, 0, 0)$$

$$\hat{j} = (0, 1, 0)$$

$$\hat{k} = (0, 0, 1)$$

Allora qualsiasi vettore può essere scritto come

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{j} + v_z \cdot \hat{k}$$

in cui, naturalmente,  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  sono le componenti di  $\vec{v}$  in direzione  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ . Naturalmente si scrive  $\hat{i}$  e non  $\vec{i}$  in quanto

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

essi, infatti, prendono il nome di **versori** o **vettori unità**.

## 2.9 Modulo e direzione

Di seguito si espone la definizione di **modulo di un vettore**:

### MODULO DI UN VETTORE

Il modulo di un vettore è la sua “lunghezza geometrica” e si indica come segue

$$v = |\vec{v}|$$

È chiaro che il modulo può essere **positivo o nullo**, mai negativo. In termini di componenti il modulo si calcola come segue

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Per esempio, si calcoli il modulo del vettore

$$\hat{n} = \frac{\vec{v}}{v}$$

ovviamente si procede come segue

$$\left| \frac{\vec{v}}{v} \right| = \frac{1}{|v|} \cdot |\vec{v}| = \frac{v}{v} = 1$$

Ecco che allora tale vettore è a tutti gli effetti un versore in direzione  $\vec{v}$ , in quanto di modulo 1. Questo fa capire come si possa definire un versore associato a qualunque vettore: basta dividere il vettore per il suo modulo.

Mentre di seguito si espone la definizione di **direzione di un vettore**:

### DIREZIONE DI UN VETTORE

La direzione di un vettore (e anche il suo verso) è definita, in due dimensioni, come l'angolo  $\theta$  che il vettore descrive con il semiasse positivo delle ascisse.

È immediato osservare che

$$v_x = v \cdot \cos(\theta)$$

$$v_y = v \cdot \sin(\theta)$$

e si può verificare che

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v^2 \cdot \cos^2(\theta) + v^2 \cdot \sin^2(\theta)} = v \cdot \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = v$$

## 2.10 Prodotto scalare

Di seguito si espone la definizione di **prodotto scalare**:

### PRODOTTO SCALARE

Il prodotto scalare tra due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$ , in termini di componenti si definisce come segue:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x \cdot u_x + v_y \cdot u_y + v_z \cdot u_z$$

che è, naturalmente, uno scalare.

Analogamente si può interpretare il prodotto scalare tra due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  come il prodotto dei moduli per il **coseno** dell'angolo  $\theta$  compreso tra i vettori stessi, ovvero

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v \cdot u \cdot \cos(\theta)$$

**Osservazione:** Naturalmente, da tale definizione seguono delle importanti osservazioni:

- $\vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = |\vec{v}|^2$
- $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$
- $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$ . Questo significa che i due vettori considerati sono ortogonali, ovvero i versori  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  sono a due a due ortogonali.

Si consideri, invece, l'esempio seguente:

$$\vec{v} \cdot \hat{i} = (v_x \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{j} + v_z \cdot \hat{k}) \cdot \hat{i} = v_x \cdot \hat{i} \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{i} \cdot \hat{j} + v_z \cdot \hat{i} \cdot \hat{k} = v_x$$

e questo significa che  $\vec{v} \cdot \hat{i}$  è la **proiezione** del vettore  $\vec{v}$  in direzione  $\hat{i}$ . Tale metodo è molto efficace per effettuare un cambio di base: se al posto dei versori  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ , che presuppongono l'origine del sistema di riferimento in  $O = (0, 0, 0)$  si sceglissero degli altri versori, moltiplicando il vettore  $\vec{v}$  per taluni versori si otterrebbero le componenti del nuovo vettore in una nuova base.

**Osservazione:** Se si considerando due vettori  $\vec{c}$  e  $\vec{d}$ , allora il loro prodotto scalare può essere interpretato come segue

$$\vec{c} \cdot \vec{d} \cdot \frac{d}{d} = d \cdot \left( \vec{c} \cdot \frac{\vec{d}}{d} \right)$$

per cui, ricordando che

$$\hat{n} = \frac{\vec{d}}{d}$$

è un versore in direzione del vettore  $\vec{d}$ , allora il prodotto scalare tra  $\vec{c}$  e  $\vec{d}$  è proprio la proiezione del vettore  $\vec{c}$  sul vettore  $\vec{d}$ , per quanto appena detto a proposito delle **proiezioni**, moltiplicata per il modulo del vettore  $\vec{d}$ .

3 Marzo 2022

### 3 Cinematica

La descrizione del moto di un corpo (approssimato ad un punto) prende il nome di **cinematica** (mentre la ragione del moto viene studiata dalla **dinamica**). Com'è noto, inoltre, un vettore è una quantità con **modulo** e **direzione** (e **verso**). La descrizione di un vettore avviene tramite le sue componenti: in particolare, dato un versore  $\hat{n}$ , la componente di un vettore  $\vec{v}$  in direzione del versore  $\hat{n}$  è così definita

$$\vec{v} \cdot \hat{n}$$

Per esempio, la componente del vettore  $\vec{v}$  lungo l'asse  $x$  è

$$\vec{v} \cdot \hat{i} = v_x$$

Inoltre, il **prodotto scalare** tra due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  viene definito come:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x \cdot u_x + v_y \cdot u_y + v_z \cdot u_z = v \cdot u \cdot \cos(\theta)$$

ove  $\theta$  è l'angolo compreso tra i due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$ .

Grazie a ciò è possibile definire il concetto di **Cinematica**:

#### CINEMATICA

La cinematica è lo **studio del moto**, a differenza della **dinamica** che studia la **causa del moto** e della **statica** che studia l'**equilibrio meccanico**, ossia la **causa dell'immobilità**.

È chiaro che lo studio di un corpo complesso e non omogeneo è molto più elaborato dello studio di un solo **punto**. Pertanto, il primo passo per lo studio del moto è quello di studiare il comportamento di un modello standard a cui può essere ricondotto, tramite approssimazione, un altro corpo, a seconda della necessità.

#### 3.1 Posizione e spostamento

Dato un punto nello spazio, la sua posizione viene descritta tramite un “vettore” posizione  $\vec{r}$ , di cui è possibile calcolare la lunghezza ( $r$ ), la quale, tuttavia, non ha molto significato dal momento che dipende dalla posizione dell'origine del sistema scelta: ovverosia dipende dalla posizione iniziale e, quindi, dal **sistema di riferimento adottato**:

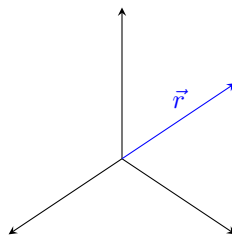


Figura 2: “Vettore” posizione

Conoscere il sistema di riferimento è fondamentale, in quanto in base a ciò possono essere effettuate diverse valutazioni che, naturalmente, variano a seconda del sistema di riferimento scelto: si pensi ed effettuare una misurazione adottando come sistema di riferimento un treno che si muove oppure un treno immobile, o ancora un treno che sta accelerando: si parla, in tale contesto, di un **sistema di riferimento non inerziale**.

### SPOSTAMENTO

Lo **spostamento**, invece, è proprio un vettore e, com'è intuibile, taluno è definito come la differenza tra due posizioni, ovvero

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

di cui è possibile calcolare il modulo come segue

$$|\Delta \vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \text{distanza}$$

Per esempio, la lunghezza sull'asse  $x$  è

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \cdot \hat{i}$$

di cui

$$|\Delta \vec{r}| = |x_2 - x_1|$$

### 3.2 Posizione in funzione del tempo

È particolarmente importante considerare la variazione della posizione nel tempo

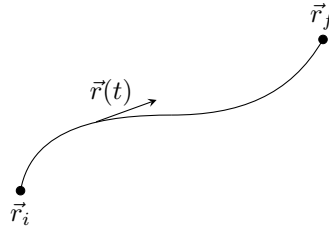


Figura 3: “Vettore” posizione in funzione del tempo

Sia data una funzione spostamento, definita in funzione del tempo  $t$ , quale

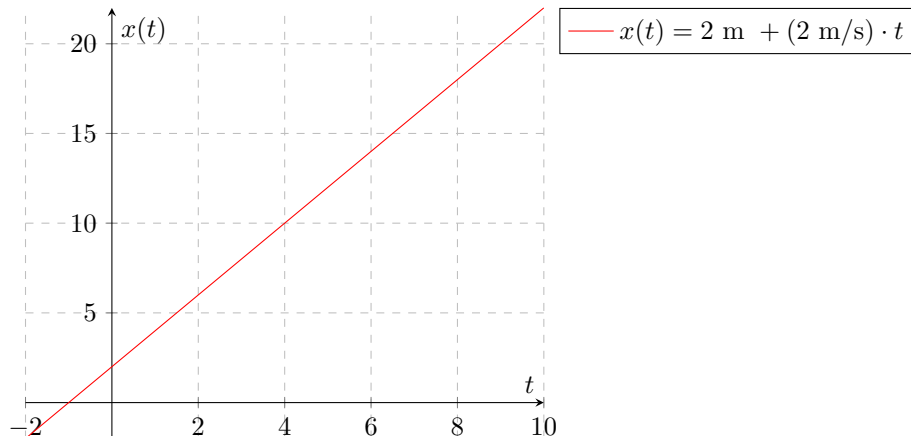
$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j}$$

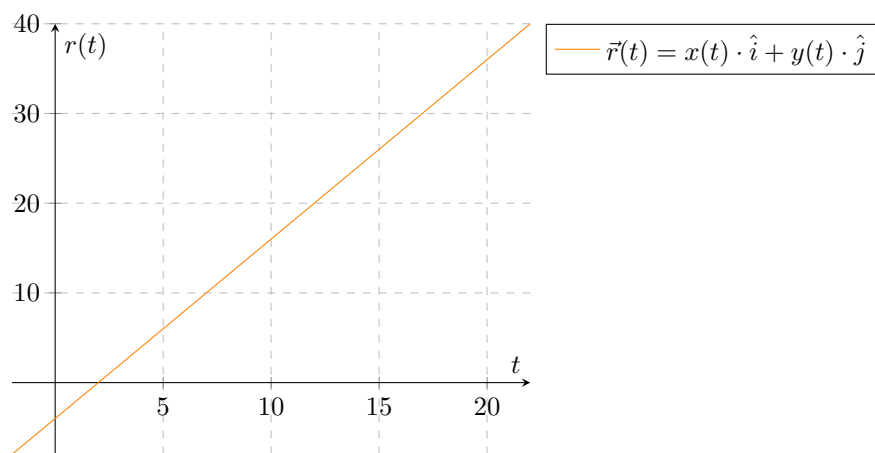
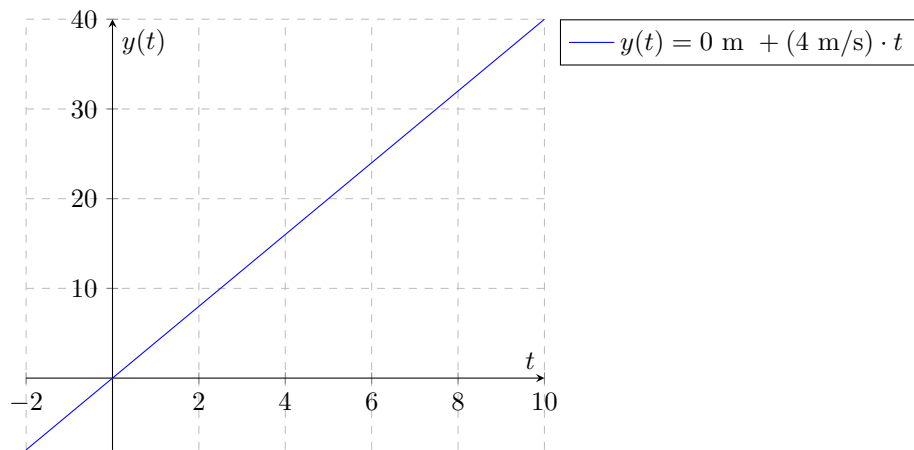
in cui

$$x(t) = 2 \text{ m} + (2 \text{ m/s}) \cdot t$$

$$y(t) = 0 \text{ m} + (4 \text{ m/s}) \cdot t$$

Naturalmente si ha



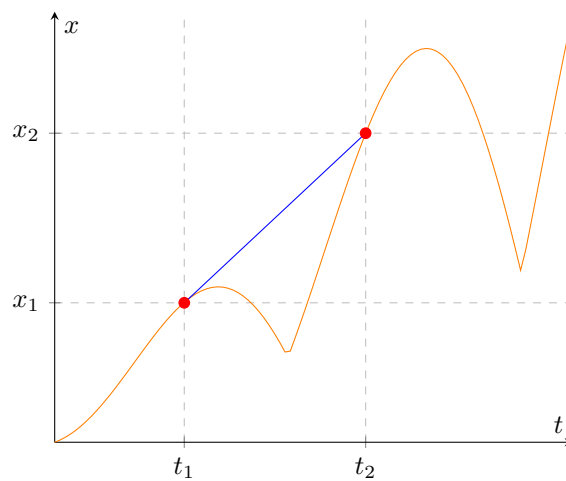


### 3.3 Velocità

La **velocità** si pone alla base della cinematica. In fisica la velocità si distingue in due tipologie

- Velocità istantanea
- Velocità media

Si consideri, a tal proposito, il seguente grafico spazio-tempo:



### VELOCITÀ MEDIA

Intuitivamente si ha che la velocità media è proprio il rapporto tra uno spostamento e il tempo impiegato per effettuarlo, ovvero

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

che, graficamente, può essere interpretata come la pendenza (o coefficiente angolare), della congiungente i punti  $(x_1, t_1)$  e  $(x_2, t_2)$  nel grafico spazio/tempo.

### VELOCITÀ ISTANTANEA

Mentre la velocità istantanea è, naturalmente, la derivata nel tempo del vettore posizione, ovvero

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

ovvero la retta tangente al grafico della funzione posizione nel punto  $(x_0, t_0)$ . Naturalmente essendo un vettore la velocità istantanea, è possibile descriverlo tramite **componenti** come segue:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (\vec{r}(t)) = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x} \cdot \hat{i} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y} \cdot \hat{j} + \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z} \cdot \hat{k}$$

in quanto  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  non dipendono dal tempo (cosa che potrebbe accadere, comunque, in determinate circostanze).

Il **modulo** della velocità si calcola come segue

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

**Esempio:** Si consideri uno spostamento verso l'alto tale per cui  $x_1 = 0$  m e  $x_2 = 12000$  m e  $t_1 = 2600$  s e  $t_2 = 4000$  s. Allora si ha che

$$\langle v_z \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{12000}{4000 - 2600} = 8.6 \text{ m/s} = 308.6 \text{ km/h}$$

Che è una velocità irrisoria; tuttavia, ciò non sorprende, in quanto è opportuno conoscere anche le altre componenti della velocità, ossia  $v_x$  e  $v_y$ .

## 3.4 Accelerazione

Di seguito si espone la definizione di **accelerazione**:

### ACCELERAZIONE

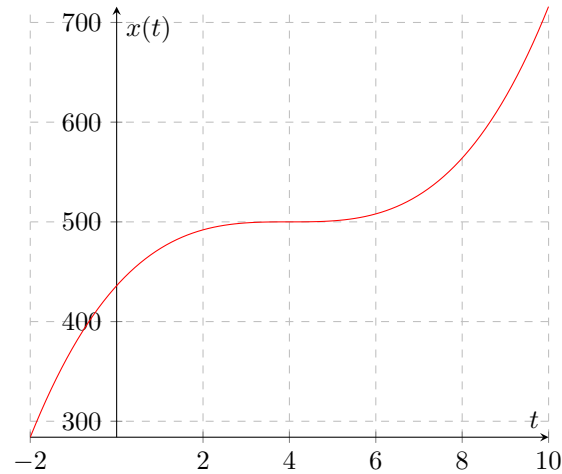
L'accelerazione viene definita come la derivata prima della velocità nel tempo, o la derivata seconda dello spostamento nel tempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

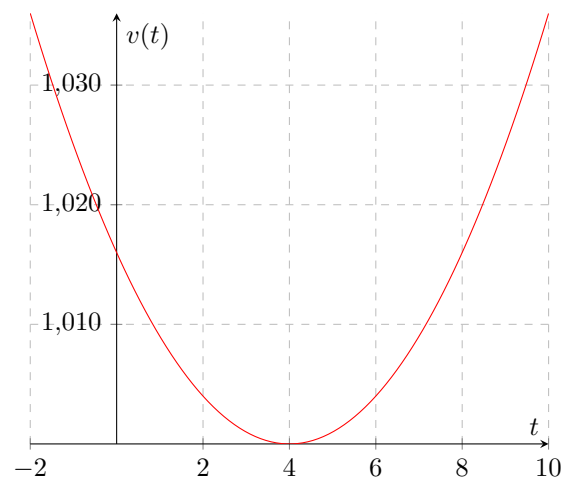
7 Marzo 2022

Comè noto, l'accelerazione è la derivata prima della velocità in funzione del tempo, o la derivata seconda dello spostamento in funzione del tempo.

L'accelerazione è fondamentale in **meccanica**, in quanto grazie all'accelerazione è possibile definire il concetto di forza: l'accelerazione è la connessione tra cinematica e dinamica.

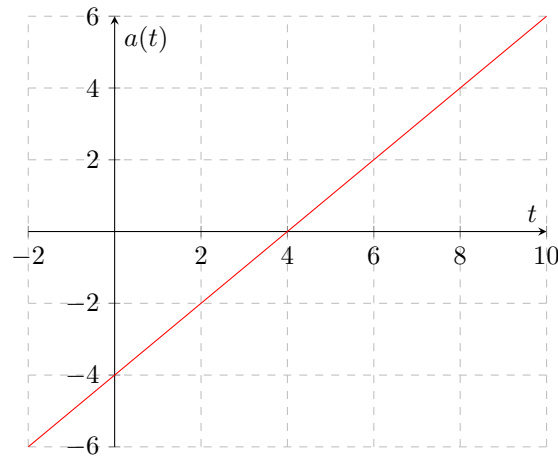


Avendo a disposizione il grafico che descrive la variazione della posizione nel tempo, è possibile ora studiarne l'andamento per poi descrivere il comportamento della velocità nel secondo grafico. È sufficiente, pertanto, osservare gli intervalli di crescita e decrescenza e i punti in cui la derivata si annulla nulla:



Ancora una volta, studiando l'andamento della velocità nel suo rispettivo grafico è ora possibile descrivere il grafico della derivata della velocità, ovvero dell'accelerazione, sempre analizzando gli intervalli di crescita e decrescenza:





Ecco che il punto in cui la derivata seconda (ovverosia l'accelerazione) cambia segno è un **punto di flesso**, ovvero il punto in cui il grafico dello spostamento cambia la propria concavità.

**Esempio:** Si consideri la seguente funzione spostamento in funzione del tempo:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t)$$

questa è l'equazione di oscillazione di un pendolo o di una molla. Per il calcolo della velocità è sufficiente calcolare la derivata prima, ovvero

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega \cdot A \cdot \sin(\omega t)$$

e per l'accelerazione è sufficiente derivare nuovamente la velocità

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t) = -\omega^2 \cdot x(t)$$

Tale risultato ha senso e può essere interpretato anche graficamente, grazie al grafico di una molla: quando lo spostamento è positivo, l'accelerazione è negativa, e viceversa.

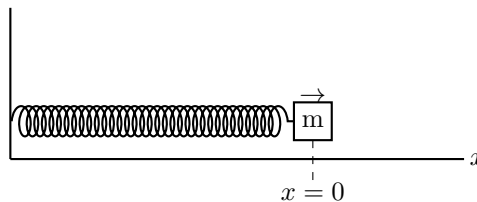


Figura 4: Fisica di una molla

**Osservazione:** Quando la velocità è nulla, la posizione si mantiene costante e non cresce o decresce. Quando si ha un punto di salto della velocità si ha una situazione difficile da riprodurre fisicamente, in quanto si ha un crollo della velocità istantanea, come un impulso (si pensi anche al fatto che, per il teorema del limite della derivata, una funzione con un salto non può essere la derivata di una funzione derivabile).

Si può utilizzare anche l'**integrale** per passare dalla velocità allo spostamento.

### 3.5 Moto uniformemente accelerato

Nel moto uniformemente accelerato si ha che l'**accelerazione** è **costante**. Sapendo che l'accelerazione è la derivata prima della velocità nel tempo, si può scrivere:

$$\frac{dv}{dt} = a \longrightarrow dv = a \cdot dt$$

Questo, in particolare, è possibile farlo sia per una variazione  $\Delta$ , ma anche per una variazione infinitesimale  $d$ . Ciò che si sta facendo, in questo caso, è risolvere un'**equazione differenziale**. Pertanto, dopo aver ottenuto  $dv = a \cdot dt$  si può procedere all'integrazione

$$\int dv = \int a \cdot dt \longrightarrow v = at + c$$

La costante  $c$  che compare nella formula, ottenuta grazie alla risoluzione di una equazione differenziale, è la cosiddetta **velocità iniziale**: se  $t = 0$ , infatti,  $v = c = v_0$ . Quindi l'equazione diviene

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

Avendo ottenuto l'equazione della velocità nel tempo, è opportuno ottenere l'equazione della posizione in funzione del tempo, integrando nuovamente, sempre partendo da

$$\frac{dx}{dt} = v \longrightarrow dx = v \cdot dt \longrightarrow \int dx = \int v \cdot dt = \int (v_0 + a \cdot t) dt$$

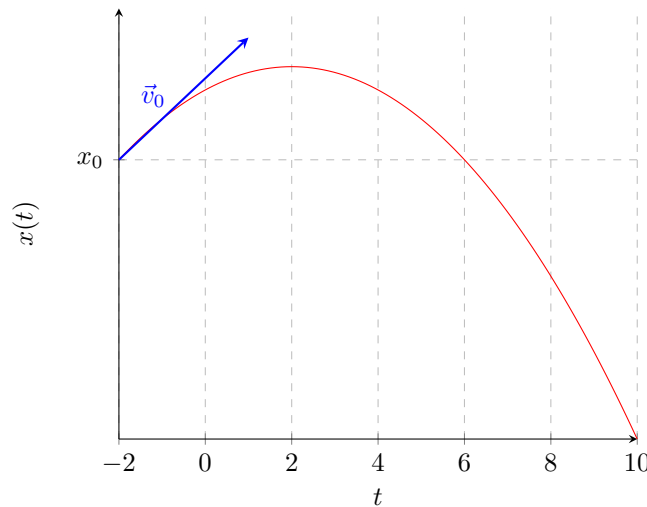
quindi si ottiene

$$x(t) = \int v_0 \cdot dt + \int a \cdot t \cdot dt + c = v_0 \cdot t + a \cdot \frac{t^2}{2} + c$$

ove  $c = x_0 = x(t = 0)$ . Pertanto l'equazione della posizione in funzione del tempo è

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

che rappresenta l'equazione di una parabola, come illustrato nell'esempio seguente:



In cui, ovviamente, l'intersezione tra il grafico e l'asse  $y$  è  $x_0$ , il vettore designato in blu, ossia la tangente in  $(x_0, 0)$ , rappresenta la pendenza iniziale del grafico della posizione, ovvero la velocità iniziale  $v_0$ . Essendo il grafico di un moto uniformemente accelerato, è ovvio che la pendenza decresce in modo costante: prima la velocità sarà positiva, ma decrescente, e poi continuerà a decrescere, ma con valori negativi.

**Osservazione:** Si consideri la seguente equazione

$$v(t) = a \cdot t + v_0$$

e si provi ad isolare  $t$  da tale equazione, come segue

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

se ora si considera l'equazione seguente

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

e si sostituisce il  $t$  calcolato in precedenza a tale equazione si ottiene

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left( \frac{v - v_0}{a} \right)^2 + v_0 \cdot \left( \frac{v - v_0}{a} \right) + x_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot (v^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 + v_0^2) + \frac{1}{a} \cdot (v_0 \cdot v + v_0^2) + x_0$$

ovvero si ottiene

$$x = \frac{v^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a} + x_0$$

quindi

$$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot (x - x_0)$$

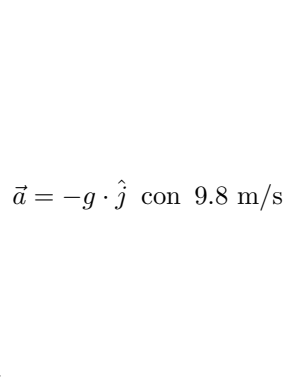
la quale è **valida solamente per il moto uniformemente accelerato** ed è estremamente utile per conoscere lo spazio percorso da un corpo che si muove secondo queste legge oraria, senza conoscere il **tempo**.

### 3.5.1 Caduta libera dei gravi

La **caduta libera** avviene con la **medesima accelerazione** per tutti i corpi (ovviamente, l'attrazione gravitazionale non è costante in tutto l'universo, ma se si considerano un punto sulla terra e distanze piccole e prossime a quella del raggio terrestre, si può, senza perdita di generalità, considerare un'accelerazione costante  $g$ ).

**Osservazione:** Naturalmente sulla Luna non c'è aria, si è nel vuoto, per cui tutti i corpi vengono attratti dalla Luna solamente per la forza di attrazione gravitazionale, senza che tale moto sia influenzato dall'attrito dell'aria.

L'accelerazione gravitazionale può essere interpretata come segue:



$$\vec{a} = -g \cdot \hat{j} \text{ con } 9.8 \text{ m/s}$$

Figura 5: Visualizzazione grafica del moto di caduta libera

Ove, naturalmente si ha

$$\vec{a} = -g \cdot \hat{j} \text{ con } 9.8 \text{ m/s}$$

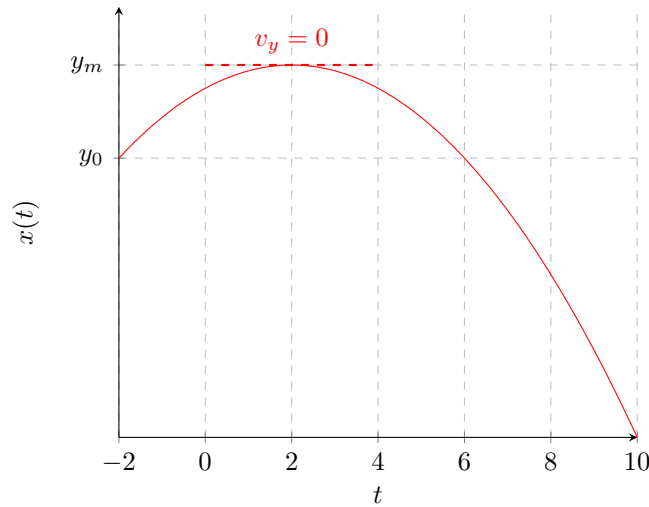
Pertanto si ottengono le seguenti equazioni, a partire da quelle generali per un moto uniformemente accelerato. Per quanto riguarda la velocità di caduta si ha:

$$v_y = -g \cdot t + v_{0y}$$

mentre per quanto riguarda la posizione in funzione del tempo si ottiene

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t + y_0$$

Per capire che altezza raggiungerà un corpo quando viene lanciato verso l'alto si deve osservare il grafico seguente



Naturalmente si osserva che la velocità nel punto più alto è nulla, in quanto la tangente è orizzontale, mentre si conosce la velocità iniziale  $v_0$ .

Per capire l'altezza, allora, si potrebbe calcolare il tempo impiegato per raggiungere il punto più alto e poi sostituire tale valore all'interno dell'equazione dello spostamento.

Alternativamente, si potrebbe considerare la formula seguente

$$v_y^2 - v_{y0}^2 = -2 \cdot g \cdot (y - y_0)$$

e sostituendo i valori si ha

$$0 - v_{y0}^2 = 2 \cdot g \cdot (y_m - y_0)$$

Per cui l'altezza massima che un corpo raggiunge quando viene lanciato verso l'alto con velocità iniziale  $v_{y0}$  e a partire da un'altezza  $y_0$  è

$$y_m = y_0 + \frac{v_{y0}^2}{2g}$$

### 3.5.2 Moto dei proiettili

Il moto dei proiettili ha un'importanza storica fondamentale: Aristotele, nel 340 a.c. parlava di **moto “naturale” e “forzato”**: tuttavia, naturalmente, un oggetto fermo, privo di sollecitazioni, non ha la propensione a muoversi, quindi non ha senso parlare di *forzatura*.

Successivamente, Filopono (490 – 570) d.c. ha introdotto il concetto di **impeto** e, infine, **Galileo** (1564 – 1642) d.c., basandosi su osservazioni e misurazioni pratiche precedenti (invece che fornire una spiegazione a priori), ha fornito una **spiegazione scientifica** a tale fenomeno.

**LEGGE ORARIA DEL MOTO DEI PROIETTILI**

Per lo studio del moto dei proiettili si considera il vettore accelerazione

$$\vec{a} = a_x \cdot \hat{i} + a_y \cdot \hat{j} = 0 \cdot \hat{i} - g \cdot \hat{j}$$

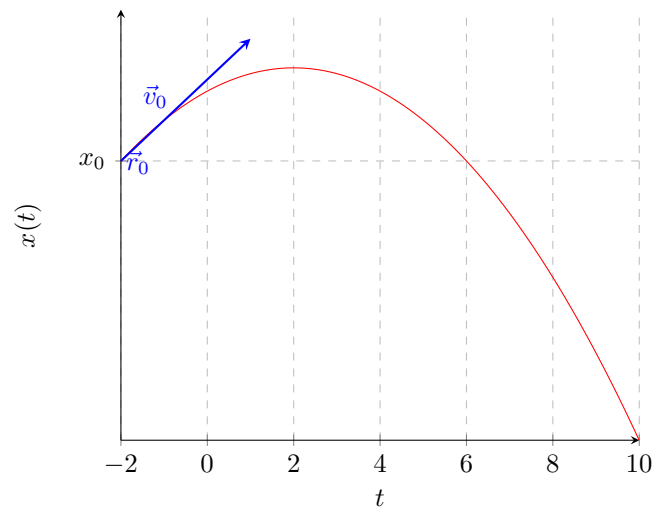
Analogamente per la velocità si ha

$$\vec{v} = v_x \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{j} = v_{0x} \cdot \hat{i} - (v_{0y} - gt) \cdot \hat{j}$$

Per quanto concerne la posizione in funzione del tempo si ha

$$\vec{r} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} = (v_{0x}t + x_0) \cdot \hat{i} - (y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2) \cdot \hat{j}$$

Si consideri il seguente grafico della posizione di un proiettile:



Naturalmente si ha che

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= v_{x0} \cdot \hat{i} + v_{y0} \cdot \hat{j} \\ \vec{r}_0 &= x_0 \cdot \hat{i} + y_0 \cdot \hat{j} \end{aligned}$$

8 Marzo 2022

Naturalmente il modulo di un vettore non dipende dal sistema di coordinate scelto.  
Naturalmente è possibile avere

$$|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$$

e per dimostrarne la veridicità basta considerare due vettori perpendicolari.

Ovviamente, un versore ha sempre modulo unitario per essere definito tale: in particolare, dato il vettore  $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ , il versore

$$\hat{n} = \frac{\vec{v}}{v}$$

è proprio un versore in direzione  $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ .

La componente del vettore  $\vec{v} = -3 \cdot \hat{i} + 5 \cdot \hat{j} + \hat{k}$  in direzione  $\hat{n} = 0.6 \cdot \hat{j} - 0.8 \cdot \hat{k}$  è ovviamente

$$\vec{v} \cdot \hat{n} = -3 \cdot 0 + 5 \cdot 0.6 - 1 \cdot 0.8 = 2.2$$

È chiaro che in questo caso  $\hat{n}$  era già un versore, altrimenti, se si avesse avuto un vettore, si sarebbe dovuto calcolare il versore corrispondente dividendo per il suo modulo.

Nel moto dei proiettili è estremamente importante considerare l'**altezza massima** che esso raggiungerà, ma soprattutto la sua **gittata**, ovvero la distanza massima che esso raggiungerà.

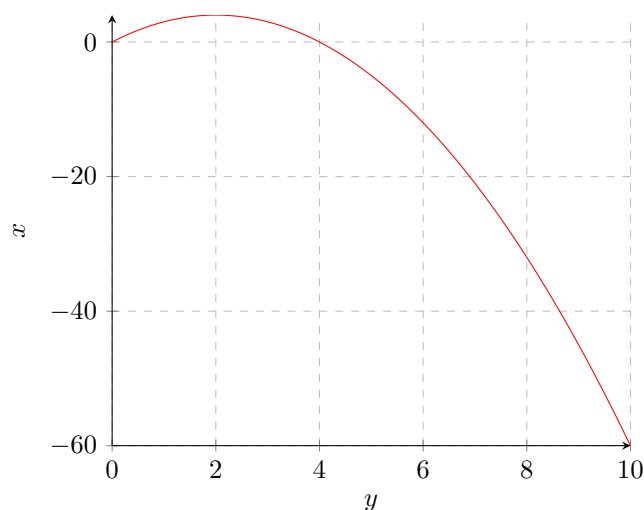
Molto spesso, in questo caso, per lavorare è molto più conveniente operare con le coordinate polari  $v_0$  e  $\theta$  (ovvero con modulo e angolo), anziché con  $v_{x0}$  e  $v_{y0}$ , sempre ricordando che

$$v = \begin{pmatrix} v_{x0} = v_0 \cdot \cos(\theta) \\ v_{y0} = v_0 \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

In questo caso, per calcolare l'altezza massima raggiunta è sufficiente considerare solamente la componente della velocità verticale, come per la caduta libera dei gravi, ovvero

$$y_m = y_0 + \frac{v_{y0}^2}{2g} = y_0 + \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\theta)}{2g}$$

Analogamente, per calcolare la gittata, ovvero la distanza orizzontale percorsa da un corpo lanciato in aria, si dovrà usare solo la componente della velocità orizzontale.



Naturalmente, in questo caso, il calcolo della gittata  $R$  si effettua come segue: è noto che

$$R = v_{x0} \cdot t_R$$

ove  $t_R$  è la **durata del volo**. Però è noto che al tempo  $t_R$  la coordinata  $y$  è nulla, ovvero

$$y(t_R) = 0 = v_{y0} \cdot t_R - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_R^2$$

Dal momento che il tempo  $t_R$  non è nullo è possibile dividere per  $t$ , ottenendo

$$v_{y0} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_R = 0$$

da cui si evince che il tempo  $t_R$  cercato è

$$t_R = \frac{2 \cdot v_{y0}}{g}$$

sostituendo, ora, il tempo trovato nella formula di cui sopra si ottiene

$$R = v_{x0} \cdot \frac{2 \cdot v_{y0}}{g} = 2 \cdot \frac{v_{x0} \cdot v_{y0}}{g}$$

ma ricordando come si calcolano le componenti  $v_{x0}$  e  $v_{y0}$  si ha

$$R = 2 \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)}{g}$$

ed essendo  $2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) = \sin(2 \cdot \theta)$  si ottiene

$$R = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta)}{g}$$

Le unità in gioco sono

$$\begin{aligned} [v^2] &= \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \\ [g] &= \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ [R] &= \frac{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \text{m} \end{aligned}$$

**Osservazione:** Si osservi che, naturalmente, quando  $\theta = 0^\circ$ , si ha che  $\sin(0) = 0$  e quindi  $R = 0$ : ciò ha senso, in quanto lanciando orizzontalmente il corpo cade immediatamente. Quando  $\theta = 90^\circ$  non si ha gittata, in quanto, lanciando verticalmente il corpo cada verticalmente. Quando  $\theta = 45^\circ$  si ha la gittata massima, in quanto  $\sin(90) = 1$ .

### 3.6 Moto in 2D e 3D

Si consideri la seguente traiettoria

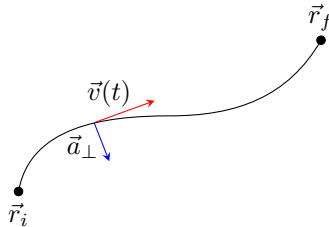


Figura 6: “Vettore” velocità in funzione del tempo

Naturalmente  $\vec{v}$  è sempre parallelo alla tangente della curva  $\vec{r}(t)$ .

Si osservi, inoltre, che l'accelerazione deve sempre presentare una **componente lineare**  $\vec{a}_{\parallel}$  (parallela a  $\vec{v}$ ) e una **componente ortogonale**  $\vec{a}_{\perp}$  (in direzione del cambiamento dell'orientazione

della velocità), la quale è fondamentale: infatti, se ci fosse solo una componente lineare, la velocità aumenterebbe il proprio modulo, ma non direzione; ogni qualvolta si ha una variazione della direzione della velocità ci deve essere una componente ortogonale dell'accelerazione.

### 3.7 Moto circolare uniforme

Per moto circolare uniforme si intende un moto circolare in cui la **velocità angolare** si mantiene **costante**.

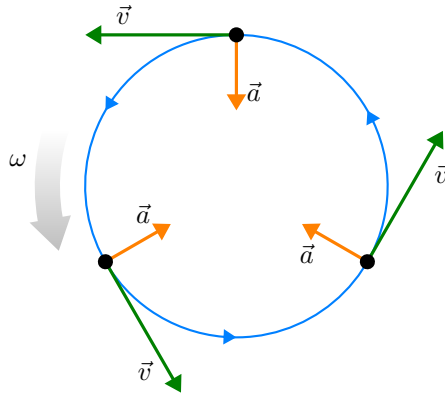


Figura 7: Moto circolare uniforme

Naturalmente, la **circonferenza** del cerchio è  $C = 2\pi R$ . Parlando di moto circolare uniforme è possibile introdurre il concetto di **periodo**  $T$ , ovvero il tempo impiegato a completare una circonferenza completa.

Pertanto, volendo conoscere la velocità del moto si ottiene

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

ove  $\omega$  prende il nome di **velocità angolare**, che ha una misura di RAD/s, per questo prende il nome di velocità angolare, in quanto ha la stessa unità di misura di una frequenza (visto che l'angolo non ha una propria vera misura).

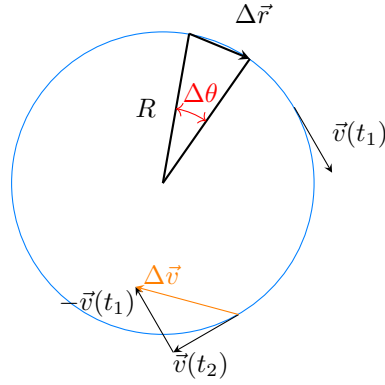
Naturalmente, volendo conoscere l'accelerazione che agisce sul punto in movimento, si può immediatamente dire che, essendo la velocità costante, si dovrà solo considerare una componente ortogonale, in quanto se essa non ci fosse, il corpo si muoverebbe in linea retta, senza compiere una traiettoria circolare.

Pertanto, dal momento che  $|\vec{v}| = v = \text{costante}$ , si ha che  $\vec{a}_{\parallel} = 0$ . L'accelerazione media, naturalmente, può essere calcolata come segue

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Anche graficamente appare evidente come l'accelerazione media sia un vettore ortogonale al vettore velocità e orientato verso il centro della circonferenza.





Lo spostamento tra due punti, naturalmente, è  $\Delta \vec{r}$  e i due triangoli che vengono così disegnati sono simili, per cui il rapporto tra i lati corrispondenti deve mantenersi costante. È facile, pertanto, vedere immediatamente come

$$\boxed{\frac{|\Delta \vec{r}|}{R} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v}}$$

ossia il rapporto tra lo spostamento e il raggio costante, così come la variazione di velocità e il modulo della velocità costante è uguale. Da ciò si evince che

$$a = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v} \cdot \frac{v}{\Delta t} = \frac{|\Delta \vec{r}|}{R} \cdot \frac{v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

Ovvero si ha che, nel moto circolare uniforme, il modulo dell'accelerazione orientata verso il centro del cerchio è pari a

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R}}$$

**Esempio:** Si consideri l'esempio seguente che riguarda un veicolo in movimento a velocità costante su una curva

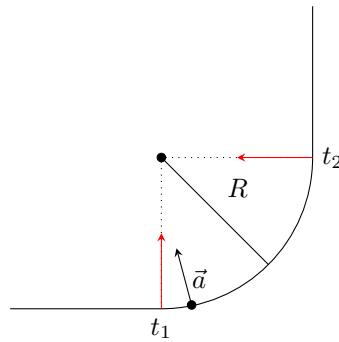
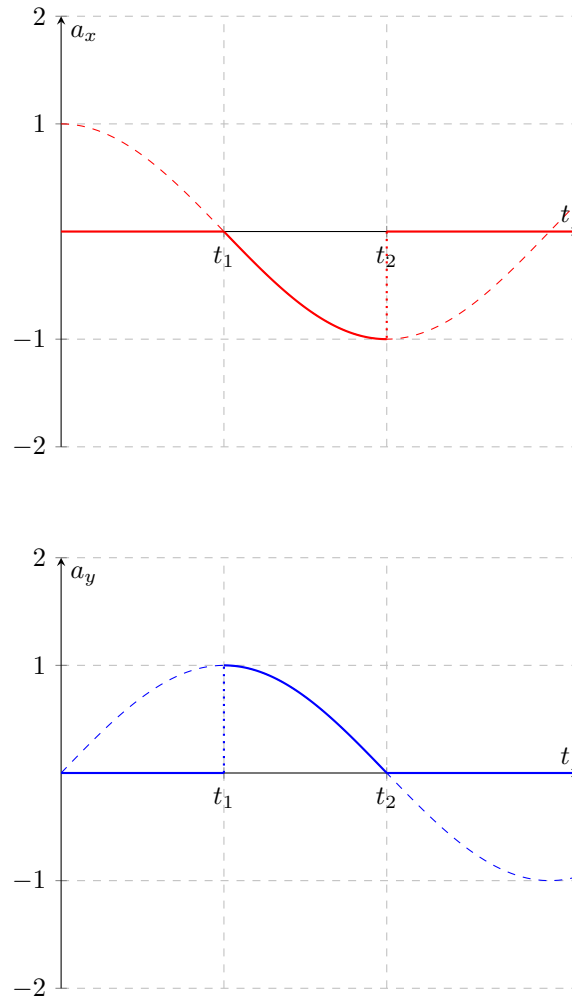


Figura 8: Auto in movimento su una curva

e si considerino le componenti dell'accelerazione in  $x$  e in  $y$  in funzione del tempo.



per capire la natura delle curve appena disegnate, è sufficiente osservare la Figura 9 seguente:

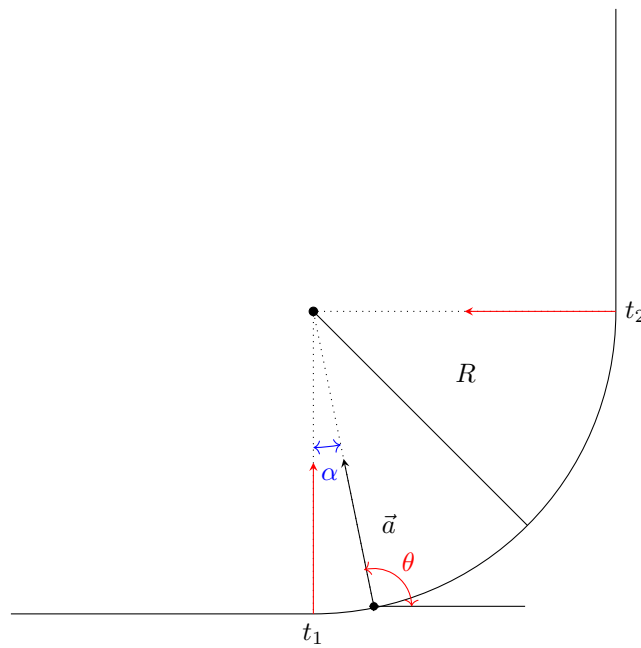


Figura 9: Visualizzazione degli angoli coinvolti

Si può facilmente capire come  $\alpha$  sia l'angolo da sommare a  $90^\circ$  per ottenere  $\theta$ , quindi

$$a_x = a \cdot \cos(\theta) = a \cdot \cos(\alpha + 90^\circ) = -a \cdot \sin(\alpha) = -a \cdot \sin(\omega t)$$

pertanto nel caso di  $a_x$  si è considerato un ramo di  $\sin(\omega t)$ , mentre nel caso di  $a_y$  si è considerato un ramo di  $\cos(\omega t)$ .

9 Marzo 2022

Il moto circolare uniforme è un moto semplice: la formula più importante da conoscere è il modulo dell'**accelerazione centripeta**, ovvero dell'accelerazione diretta verso il centro della circonferenza.

Il raggio  $R$  della circonferenza del moto è costante, mentre l'angolo  $\theta$  descritto dal punto in movimento all'interno della circonferenza varia linearmente con il tempo, secondo la seguente legge

$$\theta(t) = \frac{2\pi}{T} \cdot t = \omega t$$

ove  $\omega$  prende il nome di velocità angolare ed è definita come segue

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Per quando concerne la variazione della posizione nel tempo si ha

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} = R \cdot \cos(\omega t) \cdot \hat{i} + R \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{j}$$

A partire da tale risultato si sarebbe potuto determinare il modulo dell'accelerazione, semplicemente procedendo per derivate successive, ottenendo dapprima

$$\vec{v}(t) = -\omega R \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{i} + \omega R \cos(\omega t) \cdot \hat{j}$$

e infine

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t)$$

in cui è evidente come il vettore accelerazione è sempre parallelo al vettore posizione, ma con verso opposto: il vettore posizione è sempre diretto verso l'esterno, mentre il vettore accelerazione è diretto verso il centro della circonferenza.

Se ora si procede al calcolo del modulo di tale vettore si ottiene

$$|\vec{a}| = \omega^2 \cdot R = \frac{v^2}{R}$$

dal momento che si ha

$$v = \omega R$$

In realtà anche  $\omega$  è un vettore, in cui la sua direzione è l'asse di rotazione, mentre il modulo fornirà una stima della velocità alla quale si muove; tale risultato avrà una importante validità in seguito.

### 3.8 Moti relativi

Si consideri il caso di un moto composto da più moti: un sasso che viene lasciato cadere sullo scafo di una barca in movimento.

Naturalmente, considerando la caduta di un sasso, fissando un tempo  $t$ , si ha che

$$\vec{v}_{PB} = -gt \cdot \hat{j}$$

in quanto si tratta di una caduta libera. Questo, tuttavia, osservando il moto dalla barca ( $PB$  = punto-barca) in movimento. Se, invece, tale moto viene visto da terra ( $PT$  = punto-terra), sarà dotato di due componenti, ovvero

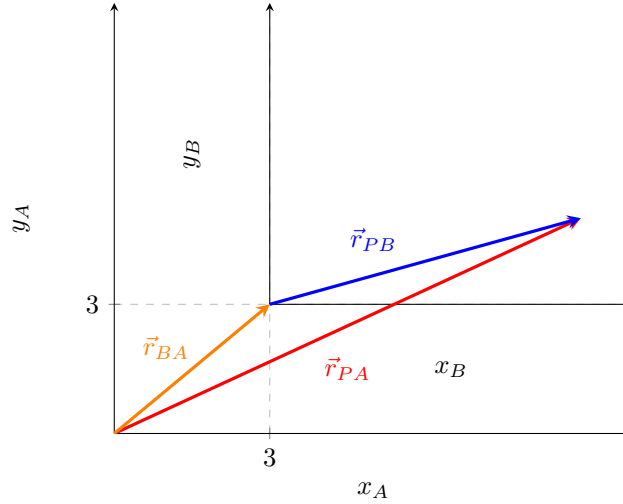
$$\vec{v}_{PT} = \vec{v} + -gt \cdot \hat{j}$$

in cui la componente verticale è la stessa del moto precedente, mentre la componente orizzontale dipende dalla velocità della barca. Questo è proprio quello che ha fatto Galileo: osservare questo tipo di situazioni nella vita reale, fornendovi una spiegazione scientifica e definendo, in questo caso, il concetto di sistema di riferimento e di moto relativo.

### 3.8.1 Caso generale

Per capire come passare da un sistema di riferimento all'altro, è necessario considerare un caso generale, in cui come sistema di riferimento si assume quello definito da:

- posizione dell'origine;
- assi (posizione e orientamento).



Per passare da un sistema di riferimento  $A$  all'altro  $B$  è necessario definire la posizione relativa tra i due sistemi di riferimento  $A - B$ .

Infatti, definendo un nuovo vettore  $\vec{r}_{BA}$  è possibile scrivere la somma di vettori seguente

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

Ma non solo, è possibile anche calcolare la derivata nel tempo e considerare, quindi, le velocità

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

che corrisponde proprio al caso analizzato per la barca: la differenza tra i due sistemi di osservazione è proprio il moto della barca. Un caso ancora più importante è quello che prevede  $\vec{v}_{BA}$  **costante**, per cui i due sistemi non si muovono l'uno rispetto all'altro e misurare l'accelerazione nell'uno o nell'altro non cambia, in quanto sarà la stessa. Derivando nuovamente nel tempo, infatti, si ottiene

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{BA}$$

ma essendo  $\vec{v}_{BA}$  costante, ovviamente  $\vec{a}_{BA} = 0$ . Questo è il caso di un **sistema di riferimento inerziale**, ovvero di un sistema di riferimento che può muoversi ad una certa velocità, ma non può accelerare. Naturalmente l'accelerazione del sistema inerziale non è relativa, non è da definirsi rispetto ad un altro sistema di riferimento come in questo caso, ma necessita di una definizione molto più rigorosa fornita tramite le leggi della dinamica di Newton. Questo ragionamento, naturalmente, si applica sia ad un caso in 2D, ma anche in 3D.

**Osservazione:** Si osservi, ovviamente, che nel moto circolare uniforme velocità e accelerazione. Inoltre, si ha che

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0$$

significa che la variazione del modulo della velocità nel tempo è nullo: pertanto, se non c'è variazione del modulo della velocità, si ha che la componente parallela dell'accelerazione è nulla, ovvero  $\vec{a}_{\parallel} = 0$ .

## 4 Dinamica

Alla base della dinamica vi sono i 3 principi della dinamica di Newton, formulati da Newton all'interno del libro **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**.

Esse sono le seguenti:

### LEGGI DELLA DINAMICA

Le leggi della dinamica sono le seguenti:

1. **Prima legge:** *Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, eccetto che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse.*
2. **Seconda legge:** *Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza mmotrice impressa, ed avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza è stata impressa.*
3. **Terza legge:** *Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria: ossia le azioni di due corpi sono sempre uguali fra loro e dirette verso parti opposte.*

### 4.1 Massa

Per parlare della dinamica, si devono introdurre due concetti fondamentali ed interconnessi; prima di tutto si fornisce la definizione di **massa**, la quale può essere definita in modi diversi a seconda della necessità:

#### MASSA INERZIALE

La **massa inerziale** (da **inerzia**: propensione a non muoversi) viene definita come misura della resistenza alle variazioni di velocità.

che si adatta perfettamente alla seconda legge della dinamica, la quale afferma che l'accelerazione è proporzionale alla forza impressa ed è la massa a rappresentare la **costante di proporzionalità**: a parità di forza, più il corpo è massivo meno accelera, meno è massivo, più accelera.

Di seguito, invece, si definisce il concetto di **massa gravitazionale**:

#### MASSA GRAVITAZIONALE

La **massa gravitazionale** è proporzionale al **peso**.

Non da ultimo si fornisce una definizione di massa che è approssimabile ad una quantificazione:

#### MASSA

La **massa** viene definita come **quantità di materia** e la sua unità di misura è

$$[m] = \text{kg}$$

Inoltre la massa è **additiva**: dato un corpo, agglomerato compatto di due masse  $m_1$  e  $m_2$ , la massa complessiva è

$$m = m_1 + m_2$$

## 4.2 Forza

Di seguito si espone il significato fisico di **forza**:

### FORZA

Una **forza** è una spinta che produce un cambiamento di moto di un corpo.

La forza è un **vettore** (con modulo, direzione e verso) la cui unità di misura è

$$[F] = \text{N} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$$

ove N sta per Newton.

## 4.3 Principi della dinamica - Leggi di Newton

Si descrivano, ora, le leggi di Newton in termini dei due concetti esposti, ossia massa e forza:

1. Se la forza risultante che agisce su un corpo è nulla, ovvero

$$\sum \vec{F} = 0$$

allora l'accelerazione del corpo è nulla, cioè  $\vec{a} = 0$ , ovvero

$$\boxed{\sum \vec{F} = 0 \longrightarrow \vec{a} = 0}$$

Tale legge potrebbe sembrare superflua, in quanto un caso particolare della seconda: tuttavia, tale legge assolve al compito di definire un **sistema di riferimento inerziale**.

2. La forza risultante su un corpo è direttamente proporzionale all'accelerazione del corpo stesso. L'accelerazione di un corpo, quindi, è proporzionale alla forza risultante

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$$

3. La forza esercitata da un corpo  $a$  su un corpo  $b$  è uguale in modulo e direzione, ma ha verso opposto alla forza esercitata da  $b$  su  $a$ .

Ovvero si ha che

$$\boxed{\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}}$$

e ciò è sempre vero.

Dopo aver definito tali leggi, è necessario definire diversi tipi di forze, distinguendole in base alla loro tipologia.

## 4.4 Forza peso

Di seguito si espone il significato fisico di **forza peso**:

### FORZA PESO

La forza peso viene designata con  $\vec{F}_t$ , ovvero la forza di attrazione esercitata dalla terra su un corpo di massa  $m$ . In particolare si ha

$$\boxed{\vec{F}_t = m\vec{g}}$$

in cui  $\vec{g} = -9.8 \text{ m/s}^2 \cdot \hat{j}$  e prende il nome di **accelerazione gravitazionale** (o meglio, di **campo gravitazionale** sulla superficie della terra).

Di seguito si espone una illustrazione della forza peso:

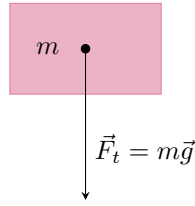


Figura 10: Forza peso

**Osservazione:** Si osservi che la formula seguente

$$\vec{F}_t = m\vec{g}$$

potrebbe rassomigliare la formula

$$\vec{F}_t = m\vec{a}$$

Tuttavia, i due concetti sono ben distinti, in quanto  $\vec{F}_t = m\vec{g}$  è un caso particolare della **legge di gravitazione universale**.

**Osservazione:** Si osservi che anche nel caso della forza peso è presente il terzo principio della dinamica: infatti un corpo viene attratto verso il centro della terra ed esercita una forza sulla superficie terrestre, così come la terra esercita una forza uguale e contraria (solamente che è impercettibile, è sempre presente).

#### 4.5 Forza normale

Di seguito si espone un altro tipo di forza, una forza di contatto, che prende il nome di **forza normale**:

##### FORZA NORMALE

La **forza normale**  $\vec{F}_N$  è un caso di forza di contatto, definita come **spinta fornita da una superficie (o da un altro corpo)**: quando un oggetto è appoggiato su una superficie e non si muove (ovvero si ha che  $\vec{v} = 0$  e  $\vec{a} = 0$ ), alla **forza peso** si contrappone la **forza normale**, uguale e contraria alla forza peso.

Di seguito si espone una illustrazione della forza normale:

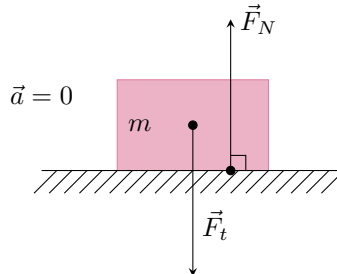


Figura 11: Forza normale

Una caratteristica fondamentale della forza normale è che essa è sempre **ortogonale alla superficie** su cui poggia l'oggetto. Se si osserva che il corpo presenta  $\vec{a} = 0$ , significa che

$$\vec{F}_t + \vec{F}_N = 0 = m\vec{a} \longrightarrow \vec{F}_N = -\vec{F}_t$$



Mentre la forza peso presenta un modulo preciso, calcolabile tramite la legge di gravitazione universale, la forza normale, invece, adatta la propria intensità al corpo appoggiato sulla superficie: fintantoché la superficie resiste, il modulo della forza normale coincide con quello della forza peso; se il corpo è eccessivamente massiccio, la superficie si rompe.

**Osservazione:** Una forza presenta sempre un **punto di applicazione** che, graficamente, è rappresentata dalla “coda del vettore”:

1. Nel caso della forza peso, il punto di applicazione è sempre dato del **centro di massa** del corpo stesso;
2. Nel caso della forza normale, il punto di applicazione è la superficie di contatto (anche se vi sono molti punti di applicazione vista l’irregolarità della superficie stessa).

Tuttavia è sempre possibile eseguire la somma di forze per conoscerne la risultante.

**Osservazione:** Quando si deve eseguire la rappresentazione grafica delle forze è necessario introdurre il concetto di **diagramma di corpo libero**:

- ogni corpo è rappresentato da un **punto** (per cui il punto di applicazione delle forze sul corpo è proprio rappresentato dal punto stesso);
- comporta **solo le forze** che sono applicate sul corpo, e ciò diviene particolarmente utile quando bisogna considerare un sistema di più corpi interagenti.

**Esempio:** Si considerino due corpi poggianti uno sopra l’altro e stanti su una superficie fissa. Naturalmente su tali corpi agiscono due forze peso distinte. Inoltre la superficie di contatto tra i due corpi permette di individuare due forze normali: uno del primo corpo sul secondo e una del secondo corpo sul primo. Infine vi è la forza di contatto dei due corpi con la superficie su cui poggiano, come mostrato di seguito:

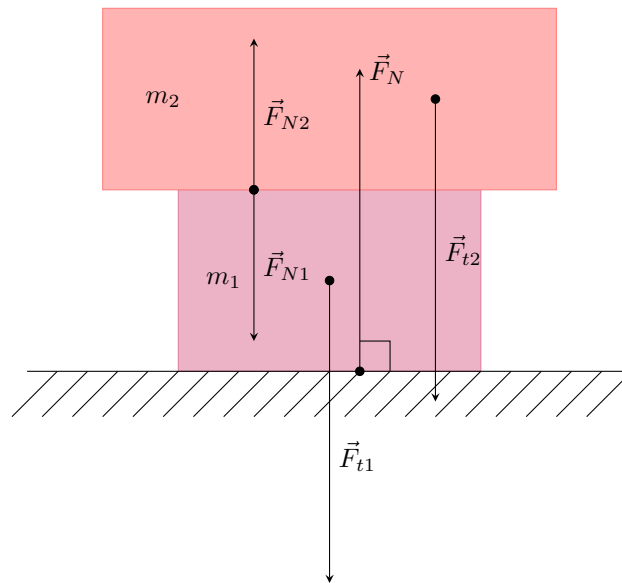


Figura 12: Forza normale di due corpi a contatto

Dopo aver effettuato la raffigurazione, si procede alla realizzazione del **diagramma a corpo libero** di ciascuno dei due corpi, come mostrato di seguito:

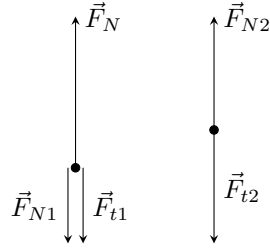


Figura 13: Diagramma a corpo libero di due corpi a contatto

Naturalmente in questo caso si possono determinare direttamente le forze coinvolte

$$\begin{aligned}\vec{F}_{t1} &= -gm_1 \cdot \hat{j} = m_1 \vec{g} \\ \vec{F}_{t2} &= -gm_2 \cdot \hat{j} = m_2 \vec{g}\end{aligned}$$

Applicando la **2<sup>a</sup> legge della dinamica** si perviene al risultato seguente

$$\begin{aligned}m_1 \vec{a}_1 &= m_1 \vec{g} = \sum \vec{F} = \vec{F}_N + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{t1} = 0 \\ m_2 \vec{a}_2 &= m_2 \vec{g} = \sum \vec{F} = \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{t2} = 0\end{aligned}$$

Questo, in quanto l'accelerazione è nulla, un dato noto dal problema. Applicando, ora, la **3<sup>a</sup> legge della dinamica** si perviene al risultato seguente:

$$\vec{F}_{N1} = -\vec{F}_{N2}$$

Da ciò si può concludere il problema, andando a determinare

$$\begin{aligned}\vec{F}_{N2} &= -\vec{F}_{t2} = gm_2 \cdot \hat{j} \\ \vec{F}_{N1} &= -\vec{F}_{N2} = \vec{F}_{t2} = -gm_2 \cdot \hat{j} \\ \vec{F}_N &= -\vec{F}_{N1} - \vec{F}_{t1} = gm_2 \cdot \hat{j} + gm_1 \cdot \hat{j} = g \cdot (m_1 + m_2) \cdot \hat{j}\end{aligned}$$

10 Marzo 2022

## 4.6 Forza di tensione

Di seguito si espone il significato fisico della **forza di tensione** che, nel suo comportamento, non è dissimile dalla forza normale:

### FORZA DI TENSIONE

La forza di tensione è la forza esercitata, per esempio, da un cavo o una fune, come mostrato di seguito, in cui la forza di tensione va a cancellare la forza peso del corpo appeso alla fune. È importante notare che  $\vec{F}_T$  è sempre **parallela alla direzione della corda** stessa.

Di seguito si espone una illustrazione della forza di tensione:

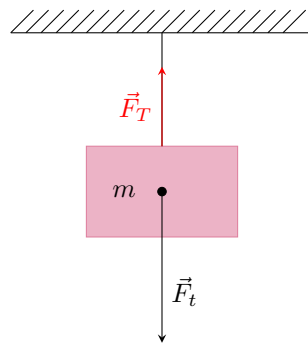


Figura 14: Forza di tensione di un corpo sospeso

**Esempio:** Si consideri l'esempio seguente, in cui vi è un corpo che rimane sospeso nel vuoto da due funi che descrivono con il soffitto due angoli, rispettivamente  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Si determinino le tensioni sulle due corde.

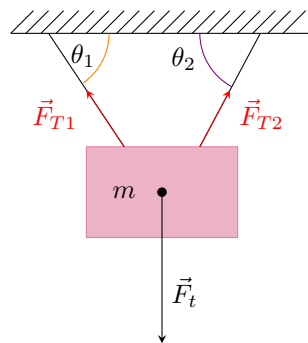


Figura 15: Forza di tensione di un corpo sospeso da due corde

Dopo aver realizzato una figura illustrativa, bisogna sempre procedere alla raffigurazione del **diagramma a corpo libero**, come mostrato di seguito:

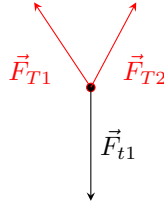


Figura 16: Diagramma a corpo libero di un corpo sospeso da due corde

Applicando, ora, la **2<sup>a</sup> legge della dinamica** si perviene al risultato seguente:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0$$

essendo l'accelerazione nulla. Pertanto si ha che

$$\vec{F}_{T1} + \vec{F}_{T2} + \vec{F}_t = 0$$

Sarà ora sufficiente decomporre tale equazione vettoriale nelle sue due componenti ( $x$  e  $y$ ), come mostrato di seguito

$$\begin{aligned} x &= -F_{T1} \cdot \cos(\theta_1) + F_{T2} \cdot \cos(\theta_2) + 0 = 0 \\ y &= F_{T1} \cdot \sin(\theta_1) + F_{T2} \cdot \sin(\theta_2) - mg = 0 \end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ha che

$$F_{T1} = F_{T2} \cdot \frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)}$$

che, sostituita nella seconda equazione, permette di ottenere

$$F_{T2} \cdot \frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)} \cdot \sin(\theta_1) + F_{T2} \cdot \sin(\theta_2) = mg$$

che può essere riscritto come segue

$$F_{T2} \cdot \cos(\theta_2) \cdot \left[ \frac{\sin(\theta_1)}{\cos(\theta_1)} + \frac{\sin(\theta_2)}{\cos(\theta_2)} \right] = mg$$

Pertanto si ha che

$$F_{T2} = \frac{mg}{\cos(\theta_2) \cdot (\tan(\theta_1) + \tan(\theta_2))} \quad \text{e} \quad F_{T1} = \frac{mg}{\cos(\theta_1) \cdot (\tan(\theta_1) + \tan(\theta_2))}$$

Se si cerca di capire che cosa accade quando gli angoli descritti dalla fune con il soffitto sono prossimi all'angolo limite di  $90^\circ$ , si rileva immediatamente una instabilità.

Intuitivamente si potrebbe pensare che una massa sospesa tramite due cavi come nella configurazione mostrata di seguito sia facilmente in equilibrio:

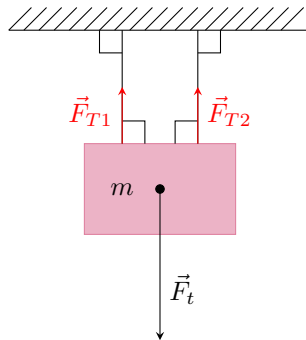


Figura 17: Forza di tensione di un corpo sospeso da due corde parallele

Tuttavia, è necessario considerare anche un altro aspetto nella determinazione dell'equilibrio: il **momento di forza**. Il caso precedentemente analizzato riguardava la configurazione per la quale il punto di applicazione della corda alla massa era identico e precisamente al centro della massa stessa:

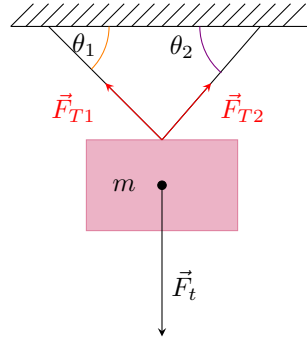


Figura 18: Forza di tensione di un corpo sospeso da due corde con stesso punti di applicazione

Affinché in questa configurazione la massa stia in equilibrio, è necessario che precisamente la lunghezza di ciascun cavo sia identica; se differisse anche di poco, allora tutta la tensione graverebbe sul cavo più corto.

**Esempio:** Si consideri un quadricottero, ovverosia un drone con 4 eliche e rotori, ciascuna capace di fornire una forza propulsiva verso l'alto di eguale modulo. Considerando il drone stazionario si ha, per la **2<sup>a</sup> legge della dinamica**, la seguente eguaglianza

$$4 \cdot \vec{F}_s + \vec{F}_t = 0$$

questo significa che ciascun rotore deve essere in grado di sviluppare una forza propulsiva verso l'alto pari a un quarto del peso del drone; quando, invece, si ha uno sbilanciamento delle forze dei rotori si ottiene un'inclinazione del drone nella direzione delle forze di minore intensità (quello che viene chiamato **momento di forza**).

Pertanto si può concludere che

$$\vec{F}_s = -\frac{1}{4} \cdot \vec{F}_t$$

**Esempio:** Si consideri una massa su un piano inclinato, come mostrato di seguito (considerando ininfluyente l'attrito tra la massa e la superficie del piano):

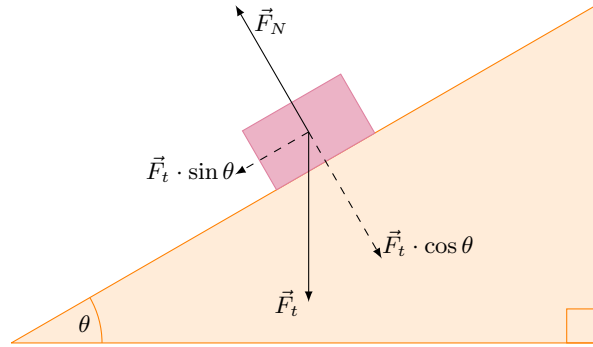


Figura 19: Piano inclinato

A cui segue il diagramma a corpo libero seguente:

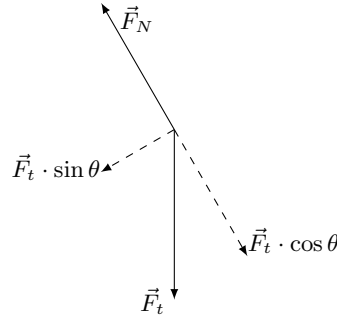


Figura 20: Diagramma a corpo libero di un piano inclinato

Dopo aver disegnato anche il diagramma a corpo libero si può procedere a ragionare con la **2<sup>a</sup> legge della dinamica**, ottenendo

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_N + \vec{F}_t$$

e scomponendo tale equazione nelle sue componenti si ottiene

$$ma_x = -F_N \cdot \sin(\theta)$$

$$ma_y = F_N \cdot \cos(\theta) - mg$$

Volendo conoscere l'accelerazione del corpo, si osserva che sussiste il seguente vincolo geometrico:

$$\frac{a_y}{a_x} = \tan(\theta) \longrightarrow a_y = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \cdot a_x$$

da cui

$$a_y \cdot \cos(\theta) = a_x \cdot \sin(\theta) \longrightarrow a_x = a_y \cdot \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

Pertanto, procedendo dalla prima equazione si ottiene

$$F_N = -\frac{ma_x}{\sin(\theta)}$$

e quindi, nella seconda equazione si ottiene

$$ma_x \cdot \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -ma_x \cdot \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - mg \longrightarrow a_x = -g \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

Sfruttando il vincolo geometrico precedente si ottiene anche che

$$a_y = -g \cdot \sin^2(\theta)$$

Avendo determinato ciò è possibile calcolare il modulo dell'accelerazione come segue

$$a = \sqrt{g^2 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta) + g^2 \cdot \sin^4(\theta)} = g \cdot \sin(\theta) \cdot \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = g \cdot \sin(\theta)$$

**Esempio:** Si consideri il caso del piano inclinato precedente, procedendo, ora, alla rotazione del sistema di riferimento dell'angolo  $\theta$ , dimodoché lo spostamento avvenga lungo l'asse  $x$  soltanto, e non vi sia, conseguentemente, accelerazione lungo l'asse  $y$ . In base a questo nuovo sistema di riferimento si ottiene la seguente decomposizione

$$\begin{aligned} x : ma_x &= -mg \cdot \sin(\theta) \\ y : ma_y &= -mg \cdot \cos(\theta) + F_N = 0 \end{aligned}$$

per cui si ha che

$$a_x = -g \cdot \sin(\theta)$$

## 4.7 Forza di attrito

Di seguito si espone la definizione generale di **forza di attrito**:

### FORZA DI ATTRITO

La **forza di attrito** è una forza di contatto, esattamente come la forza normale: quest'ultima è sempre perpendicolare alla superficie e il suo modulo è tale che vincola il moto, al fine di contrastare la forza nell'altra direzione.

La **forza di attrito**, come la forza normale, è una forza che presenta come punto di applicazione la superficie di contatto con il corpo. Inoltre, la forza di attrito

- è sempre **parallela alla superficie**;
- è di **modulo proporzionale** a  $|F_N|$ .

Quest'ultima osservazione non è ovvia, in quanto bisogna osservare il comportamento delle particelle a livello microscopico.

Si consideri l'illustrazione seguente, in cui si espongono le forze di attrito agenti:

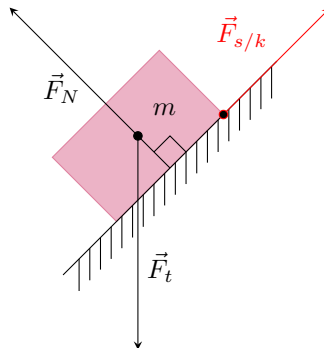


Figura 21: Forza di attrito

La forza di attrito si distingue in due diverse tipologie:

1. L'**attrito cinetico**, si ha quando il moto relativo tra le superfici in contatto non è nullo, ovvero si ha movimento con  $v \neq 0$ .  
Si ha che

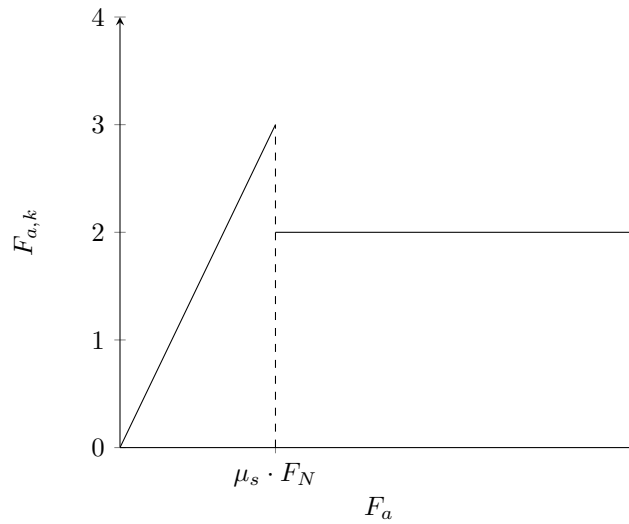
$$F_k = \mu_k \cdot F_N$$

in cui  $\mu_k$  prende il nome di **coefficiente di attrito cinetico** (dall'inglese  $k$ , di "kinetic"), il quale, per ovvie ragioni, è **adimensionale**.

2. L'**attrito statico**, si ha quando la velocità relativa tra le superfici di contatto è nulla, ovvero non si ha movimento,  $v = 0$ .  
Si ha che

$$F_s \leq \mu_s \cdot F_N$$

ovvero il modulo  $F_s$  aumenta affinché la risultante delle forze interagenti (e quindi la risultante) sia 0. Ovviamente, quando la forza che agisce aumenta il proprio modulo fino a superare la forza di attrito statico, il corpo inizia a muoversi e l'attrito si tramuta, a seguito del moto, in attrito cinetico, come si vede di seguito:



Il coefficiente moltiplicativo  $\mu_s$  prende il nome di **coefficiente di attrito statico** e generalmente si ha che

$$\mu_k < \mu_s$$



14 Marzo 2022

Si osservi che quando una massa rimane sospesa tramite due cavi che formano con la superficie di collegamento un angolo di  $90^\circ$  ciascuno, non entrano in gioco solamente le forze, ma risulta fondamentale anche conoscere il concetto di **momento di forza** e di **punto di applicazione**: se il punto di applicazione delle forze di tensione è lo stesso sul corpo sospeso, basta una leggerissima differenza di lunghezza dei cavi per avere uno sbilanciamento significativo delle forze di tensione.

**Osservazione:** L'attrito statico è come se non fosse un attrito, in quanto non si ha movimento: è come una forza normale che si oppone al tentativo di spostamento, variando il proprio modulo in modo tale da cancellare la forza applicata.

L'attrito cinetico, invece, è un vero e proprio attrito che si oppone al moto tramite la dissipazione di energia in calore.

**Esempio:** Si consideri una vettura che, in movimento, procede a frenare e a rallentare fino a fermarsi: il fenomeno che si sta studiando è l'attrito tra le ruote e la strada. In particolare la vettura richiede 70 m per fermarsi, partendo da una velocità di 100 km/h (a causa di uno slittamento delle gomme sull'asfalto).

A partire da questi dati, si determini il **coefficiente di attrito cinetico**; si proceda alla realizzazione di un modello grafico del problema:

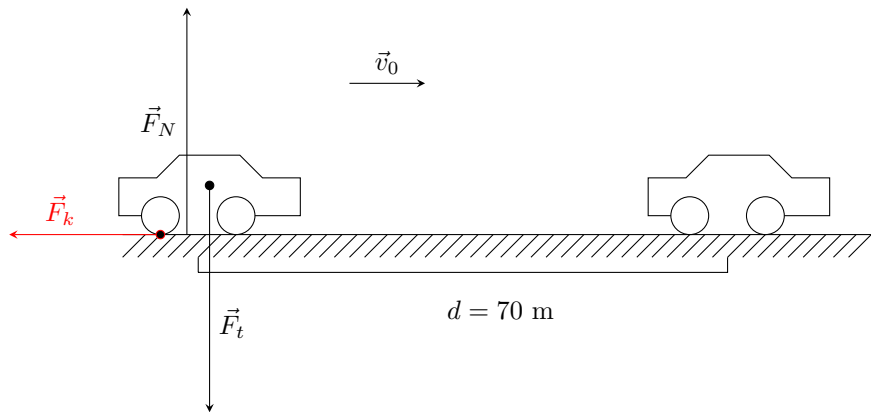


Figura 22: Vettura in decelerazione su una strada

È molto importante osservare che la forza normale è essenziale per il calcolo della forza di attrito cinetico, in quanto da essa dipende il suo modulo. Si realizzi, ora, il diagramma a corpo libero:

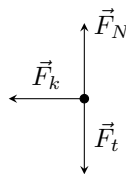


Figura 23: Diagramma a corpo libero di una vettura in rallentamento

Per procedere si richiami la 2<sup>a</sup> legge della dinamica e si scriva

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \cdot (a_x \cdot \hat{i} + 0 \cdot \hat{j})$$

È noto, inoltre, che

$$\vec{F}_t + \vec{F}_N = 0 \longrightarrow \vec{F}_t = -\vec{F}_N$$

Per cui si ottiene che

$$\vec{F}_k = ma_x \cdot \hat{i} \longrightarrow a_x = -\frac{F_k}{m}$$

in cui, per convenzione, si pone la componente orizzontale negativa.

Inoltre è possibile calcolare anche l'accelerazione con cui la macchina rallenta, impiegando la seguente formula del moto uniformemente accelerato:

$$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot (x - x_0)$$

che è possibile applicare al contesto in quanto si parla di moto uniformemente accelerato, giacché l'accelerazione è causata dalla forza di attrito, che è costante in quanto prodotto tra un coefficiente e la forza normale, la quale è costante in quanto si oppone al peso che è costante.

Da tale formula si ottiene che

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{x - x_0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{2d}$$

Da ciò segue che, ovviamente

$$F_k = \mu_k F_N$$

in cui ovviamente

$$F_N = F_t = mg$$

per cui si evince che

$$F_k = \mu_k \cdot mg \longrightarrow a_x = -\frac{F_k}{m} = -\mu_k g$$

Pertanto, dalla uguaglianza appena determinata

$$a_x = -\mu_k g = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{2d}$$

si può ricavare

$$\mu_k = \frac{v_0^2}{2gd} = 0.56$$

**Osservazione:** Si osservi che la 2<sup>a</sup> legge di Newton è applicabile in un sistema di riferimento inerziale, ovvero in un sistema di riferimento che non ha propensione a muoversi.

Il tempo di volo di un proiettile è

$$t = \frac{2v_0 \cdot \sin(\theta)}{g}$$

**Esempio:** Si consideri un piano su cui poggiano tre masse, l'una collegata all'altra, come mostrato di seguito:

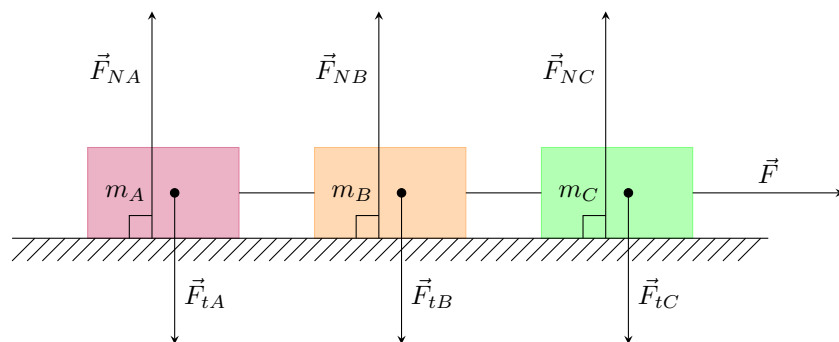


Figura 24: Tre masse trainate

Tali masse vengono trainate con una forza  $F = 200$  N, mentre le masse sono  $m_A = 30$  kg,  $m_B = 50$  kg e  $m_C = 20$  kg; inoltre è noto che il coefficiente di attrito cinetico è  $\mu_k = 0.1$ . Si determini, allora

- l'accelerazione dell'intero sistema;

- la tensione delle corde  $A - B$  e  $B - C$ .

Si realizzi il diagramma a corpo libero del sistema oggetto di studio

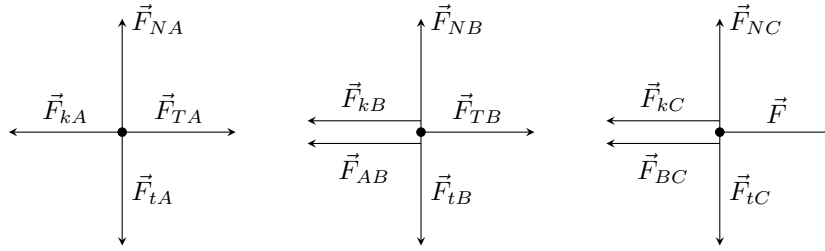


Figura 25: Diagramma a corpo libero di 3 masse trainate

Per la risoluzione del primo quesito, si può sfruttare la **proprietà additiva** della massa, essendo i tre corpi omogenei e costituiti dalla stessa sostanza. Pertanto l'assieme  $ABC$  si comporta come un unico corpo, la cui massa complessiva è

$$m = m_A + m_B + m_C = 30 \text{ kg} + 50 \text{ kg} + 20 \text{ kg} = 100 \text{ kg}$$

Pertanto si può realizzare un nuovo diagramma a corpo libero, mostrato di seguito:

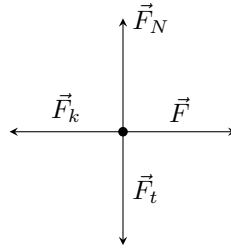


Figura 26: Diagramma a corpo libero di un'unica massa

Pertanto si ottiene che, per la 2<sup>a</sup> legge della dinamica:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Naturalmente le forze possono essere scomposte nei loro rispettivi componenti, per cui si ottiene

$$y : \begin{cases} \vec{F}_N = -\vec{F}_t \\ F_N = mg \end{cases}$$

mentre si ottiene che

$$x : \begin{cases} ma_x = F - F_k \\ F_k = \mu_k \cdot F_N \end{cases}$$

da cui

$$a_x = \frac{F}{m} - \mu_k \cdot g = 2.0 \text{ m/s}^2 - 0.98 \text{ m/s}^2 = 1.0 \text{ m/s}^2$$

Per la risoluzione del secondo quesito, si determini dapprima la tensione della corda  $A - B$ , ovvero  $\vec{F}_{AB}$  che, per la 3<sup>a</sup> legge di Newton è uguale, in modulo, alla forza  $\vec{F}_{TA}$ .

Dalla 2<sup>a</sup> legge della dinamica applicata al corpo  $A$  si ottiene

$$\vec{F}_{NA} + \vec{F}_{tA} + \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{kA} = m_A \cdot \vec{a}_A$$

Naturalmente si ha che, scomponendo tale equazione nelle sue componenti  $x$  e  $y$  si ottiene

$$\begin{cases} F_{ABx} - \mu_k m_A g = m_A a_{Ax} \\ F_N + F_t = m_A a_{Ay} = 0 \longrightarrow F_N = -F_t \end{cases}$$

Si può procedere, ora, al calcolo di  $F_{BAx}$  come segue (ricordando che l'accelerazione del sistema è la stessa di ciascuna massa, ovviamente):

$$F_{BAx} = m_A \cdot (a_{Ax} + \mu_k g) = 30 \text{ kg} \cdot [1 \text{ m/s}^2 + 0.1 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2] = 60 \text{ N}$$

Da notare che tale formula poteva anche essere riscritta come segue

$$F_{BA} = m_A \cdot \left( \frac{F}{m} - \mu_k \cdot g + \mu_k \cdot g \right) = \frac{m_A}{m_A + m_B + m_C} \cdot F = 60 \text{ N}$$

Per la determinazione della tensione  $B - C$ , è sufficiente procedere come già fatto, impiegando la seconda legge della dinamica sul corpo  $B$  (o anche sul corpo  $C$ , visto che sono noti tutti i dati del problema). Si applichi, allora, la 2<sup>a</sup> legge della dinamica sul corpo  $C$ , ottenendo

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \longrightarrow \vec{F} + \vec{F}_{kc} + \vec{F}_{NC} + \vec{F}_{tC} + \vec{F}_{BC} = m_C \cdot \vec{a}_C$$

Naturalmente è possibile scomporre tale equazione nelle sue componenti  $x$  e  $y$ , ottenendo

$$y : F_{NC} - F_{tC} = 0 \longrightarrow F_{NC} = F_{tC} = m_C g$$

$$x : F - F_{kC} - F_{BC} = m_C a_{xC} \longrightarrow F - \mu_k m_C g - F_{BC} = m_C \cdot a_{xC}$$

Da cui si evince che

$$F_{BC} = F - \mu_k m_C g - m_C \cdot a_{xC} = 200 \text{ N} - 20 \text{ N} - 20 \text{ N} = 160 \text{ N}$$

15 Marzo 2022

Quando bisogna risolvere un problema di meccanica, è essenziale visualizzare il problema tramite una rappresentazione grafica; dopodiché è fondamentale procedere alla realizzazione del diagramma a corpo libero del sistema.

Solamente a questo punto è possibile procedere alla stesura delle equazioni dinamiche che consentono di isolare le richieste del problema.

#### 4.8 Attrito dovuto a un fluido (resistenza)

Un'altra importante forza di attrito è la resistenza di un fluido: l'aria, per esempio, rallenta il moto di un corpo, come accade quando si lascia cadere dalla stessa altezza un martello e una piuma (sulla terra, dove c'è aria, il martello cade prima della piuma, mentre sulla Luna, in assenza di atmosfera, i due corpi cadono alla medesima velocità, impiegando lo stesso tempo).

##### ATTRITO DOVUTO A UN FLUIDO (RESISTENZA)

La resistenza di un fluido è la forza di attrito che il fluido produce sul corpo in movimento, rallentandone la corsa. La causa di tale resistenza è dovuta alla **viscosità del fluido** che, naturalmente, esercita una **forza opposta**  $\vec{F}_v$  al moto del fluido (naturalmente le proprietà del fluido sono determinanti).

Il problema della forza esercitata da un fluido viscoso su un corpo in esso immerso è complesso; tuttavia, tale fenomeno viene modellizzato, in maniera approssimativa, attraverso due diversi schemi teorici:

1. George Stokes, nel 1845, prese in considerazione il problema solo per un caso particolare, quello di un **oggetto di forma sferica, completamente immerso** in un fluido in **moto laminare**, di **densità costante** ed **incomprimibile**.

Pertanto, a velocità bassa con densità bassa, si ha un **flusso laminare** (ovvero si è in **assenza di turbolenza**) e per determinare la forza resistiva si impiega, appunto, la **legge di Stokes**

$$\vec{F} = -b \cdot \vec{v}$$

in cui  $b$  prende il nome di **coefficiente di viscosità**, che dipende dalle proprietà del fluido ed è un coefficiente di proporzionalità diretta: più aumenta la velocità, maggiore sarà l'intensità della forza d'attrito. Tale forza è molto diversa rispetto alle forze precedentemente analizzate, in quanto dipende strettamente dalla tipologia di moto del corpo considerato. Naturalmente, in questo caso, l'equazione è molto semplice, ma difficilmente applicabile, in quanto nell'equazione di Newton si ha un'accelerazione, mentre la legge di Stokes fornisce una velocità: si tratta, quindi, di risolvere un'**equazione differenziale**.

2. Se il **moto** invece è **turbolento** le forze inerziali dominano su quelle viscosi e la forza di resistenza dipende da diversi fattori:

- **densità**  $\rho$  del fluido;
- l'**area di proiezione** del fluido  $A$ , ovvero una stima di quanto fluido viene spostato nel moto: un corpo lungo e fino non subirà molta resistenza, mentre un corpo grande e largo avrà una resistenza maggiore;
- il **coefficiente di caratterizzazione della forma del corpo**  $C_d$  (in cui  $D$  sta per "Drag"), determinato sperimentalmente e, per ovvie ragioni, **adimensionale**.

Considerando tali fattori, la forza di resistenza è

$$F_v = \frac{1}{2} \rho A C_d v^2$$

**Esempio:** Si consideri un quadricottero che, inclinandosi orizzontalmente di un angolo  $\theta$ , produce uno spostamento di velocità  $v$  che, naturalmente, viene rallentato dall'aria che oppone una forza di resistenza.

Si supponga, per ipotesi, che tale drone esegua un moto che è possibile modellizzare tramite la legge di Stokes, ovvero

$$\vec{F}_v = -b \cdot \vec{v}$$

Si determini, allora, l'angolo  $\theta$  tale per cui il drone si muove ad una **velocità costante**  $\vec{v}$ . Si realizzi, allora, il diagramma a corpo libero seguente:

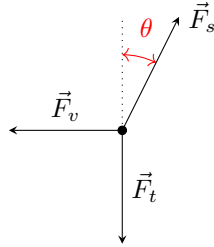


Figura 27: Diagramma a corpo libero di un drone inclinato

Naturalmente, in questo caso, è possibile applicare la 2<sup>a</sup> legge della dinamica, in quanto è noto che il drone si muove a velocità costante, quindi l'accelerazione è nulla e quindi la somma delle forze risultanti è nulla.

Pertanto si ha che

$$\vec{F}_t + \vec{F}_v + \vec{F}_s = m \cdot \vec{a} = 0$$

Naturalmente è possibile scomporre tale equazione vettoriale nelle sue componenti  $x$  e  $y$ , ottenendo

$$x : F_s \cdot \sin(\theta) - bv = 0$$

$$y : F_s \cdot \cos(\theta) - mg = 0$$

Dalla seconda equazione si ottiene che

$$F_s = \frac{mg}{\cos(\theta)}$$

mentre dalla prima equazione si ha che

$$v = \frac{mg}{b} \cdot \tan(\theta)$$

**Esempio:** Si calcoli la velocità limite di un paracadutista che scende verticalmente, di cui si propone di seguito il diagramma a corpo libero:



Figura 28: Diagramma a corpo libero di un drone inclinato

Infatti, ad un certo punto, la forza peso del corpo in caduta libera verrà eguagliata dalla forza di resistenza dell'aria e il paracadutista non aumenterà più la sua velocità, ma la manterrà costante. Naturalmente, in questo caso, è necessario applicare la seconda formula della resistenza, semplicemente osservando che

$$mg = F_v = \frac{1}{2} \cdot \rho AC_d v^2$$

Per isolare la velocità limite, semplicemente si può scrivere

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho AC_d}}$$

Naturalmente, se si suppone che

- $m = 70 \text{ kg}$
- $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$
- $C_d = 0.8$
- $A = 0.5 \text{ m}^2$

Considerando tali dati per il problema si ottiene che

$$v = 55 \text{ m/s}$$

e tale risultato è totalmente ininflente dall'altezza dalla quale ci si paracaduta, in quanto la velocità limite che è possibile raggiungere è  $v = 55 \text{ m/s}$ .

## 4.9 Dinamica del moto circolare uniforme

Naturalmente, è noto che nel moto circolare uniforme la velocità  $v$  è costante, per cui l'accelerazione è soltanto centripeta e diretta verso il centro della circonferenza, ortogonalmente al vettore velocità. È noto che il modulo dell'accelerazione nel moto circolare uniforme è pari a

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

essendo

$$\omega = \frac{v}{R}$$

### FORZA CENTRIPETA

La forza necessaria per mantenere il moto circolare è, per la seconda legge della dinamica:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

e sostituendo ad  $a$  la formula precedentemente ottenuta si ha

$$F_c = \frac{mv^2}{R}$$

orientata verso il centro della circonferenza. Naturalmente quest'ultima è la **forza centripeta**, così chiamata per descriverne la direzione e il verso, ma non la natura della forza (la forza centripeta non è un tipo di forza, in quanto anche la forza di attrazione gravitazionale è una forza centripeta quando si parla di attrazione tra pianeti, anche la forza d'attrito è una forza centripeta, come quando si gira con la macchina).

**Esempio:** Nelle curve delle strade, la carreggiata è inclinata, in quanto la forza normale si scompone in due componenti: una centrifuga e una centripeta; ciò, naturalmente, aiuta la forza di attrito ad evitare che la vettura esca fuori strada.

Si determini, allora, l'angolo  $\theta$  di inclinazione della strada affinché la componente orizzontale della forza normale fornisca la forza centripeta necessaria per girare (supponendo in assenza di attrito):

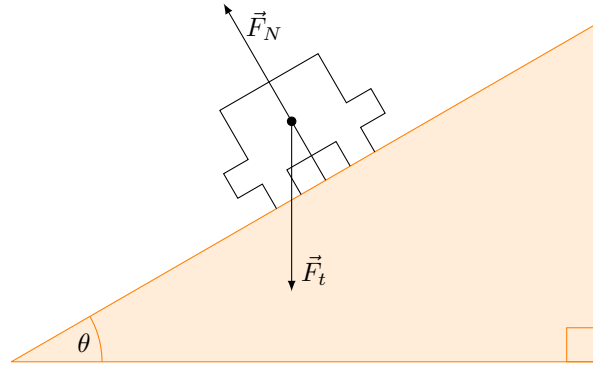


Figura 29: Auto in curva su un piano inclinato

Si realizzi il diagramma a corpo libero della vettura:

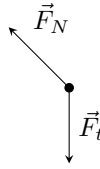


Figura 30: Diagramma a corpo libero di una macchina in curva

Naturalmente, scomponendo la forza normale nelle sue due componenti (orizzontale e verticale) si ottiene che

$$F_N \cdot \sin(\theta) = F_c = \frac{mv^2}{R}$$

$$F_N \cdot \cos(\theta) - mg = 0 \longrightarrow F_N \cdot \cos(\theta) = mg$$

Allora si ha che

$$\tan(\theta) = \frac{v^2}{Rg}$$

**Osservazione:** Anche quando si considera il moto di una corda che viene fatta ruotare nell'aria, la tensione della corda è esattamente la forza centripeta necessaria a mantenere il moto circolare uniforme (conoscendo il raggio di rotazione, ossia la lunghezza della corda, nonché la velocità di rotazione).

Per verificare che il coefficiente di attrito statico non può essere mai maggiore di 1 è sufficiente porre una massa su una superficie inclinata e aumentare l'angolo di inclinazione.



16 Marzo 2022

#### 4.10 Sistemi non-inerziali

Il concetto di sistema non-inerziale è essenziale per lo studio della dinamica dei corpi. Infatti, un sistema non-inerziale è un sistema di riferimento in cui l'accelerazione non è nulla, ovvero  $a \neq 0$ . Ciò impedisce di applicare la 2<sup>a</sup> legge della dinamica, in quanto tale legge si applica solo a sistemi di riferimento inerziali.

Si consideri il caso di un treno in accelerazione e di una massa sospesa al soffitto; naturalmente, quando il treno accelera (e quindi la sua velocità non è costante), la massa si inclina nella direzione opposta al moto:

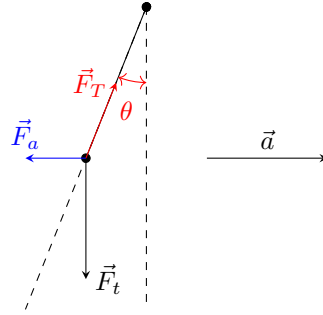


Figura 31: Forza apparente

In cui, ovviamente, applicando la 2<sup>a</sup> legge della dinamica si ottiene che

$$\vec{F}_T + \vec{F}_t = m \cdot \vec{a}$$

da cui

$$\vec{F}_T + m\vec{g} = m\vec{a} \longrightarrow \vec{F}_T = m \cdot (\vec{a} - \vec{g})$$

**Osservazione:** Si osservi che la prima equazione può essere riscritta come segue:

$$\vec{F}_T + \vec{F}_t = m \cdot \vec{a} \longrightarrow \vec{F}_T + \vec{F}_t - m \cdot \vec{a} = 0$$

Ecco che allora la forza  $\vec{F}_a = m\vec{a}$  è una nuova forza, la quale prende il nome di **forza apparente**, o anche **pseudo-forza apparente** o **forza inerziale**, che agisce ancora una volta sulla massa  $m$ , in direzione opposta alla direzione del moto.

Naturalmente, in questo caso, l'unico termine da considerare è  $m\vec{a}$ , in quanto l'accelerazione è costante, mentre se l'accelerazione non lo fosse, all'interno della formula dovrebbero figurare altri termini (si pensi, per esempio, ad una **pseudo-forza apparente centrifuga**, la quale può essere costante in modulo, ma cambia direzione e verso).

**Esempio:** Si consideri il caso in cui una massa  $m$  è posta su un cuneo e l'intero sistema accelera con  $\vec{a}$  costante:

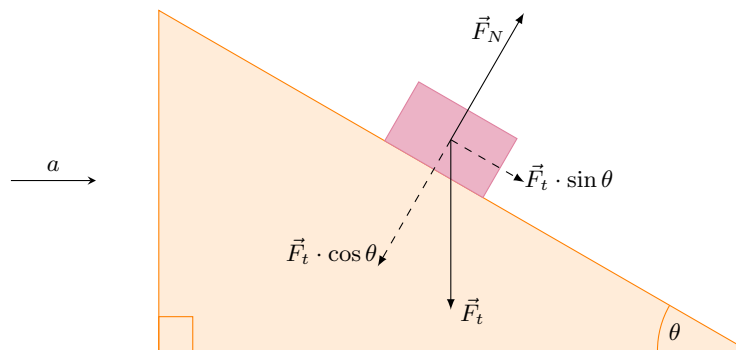


Figura 32: Piano inclinato in accelerazione

Si determini, allora, quale deve essere l'accelerazione  $\vec{a}$  affinché il blocco rimanga immobile sul cuneo.

Naturalmente, osservando il sistema da fuori, le uniche forze che agiscono su tale corpo sono la forza peso e la forza normale. Se, invece, tale corpo viene osservato dall'interno, impiegando un sistema di riferimento non-inerziale, allora a tali forze se ne deve aggiungere una terza, una **pseudo-forza apparente** che agisce in verso opposto a quello dell'accelerazione  $\vec{a}$ , ovvero la forza  $\vec{F}_a = -m\vec{a}$ , come mostrato di seguito:

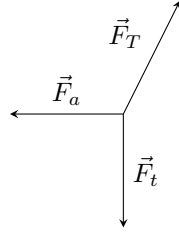


Figura 33: Diagramma a corpo libero di una massa su un piano inclinato in accelerazione

Da cui si evince che

$$\vec{F}_N + \vec{F}_t + \vec{F}_a = 0$$

e scomponendo l'equazione nelle sue componenti orizzontali e verticali si perviene al risultato seguente:

$$\begin{aligned} F_N \cdot \cos(\theta) - mg &= 0 \\ -F_a + F_N \cdot \sin(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

per cui si ottiene che

$$a = g \cdot \tan(\theta)$$

#### 4.11 Prodotto vettoriale

Si considerino due vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , allora si ha che

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |A| \cdot |B| \cdot \sin(\theta)$$

ove  $\theta$  è l'angolo compreso tra i vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ .

**Osservazione:** Si osservi che il prodotto vettoriale  $\vec{A} \times \vec{B}$  è un vettore ortogonale ad  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ :

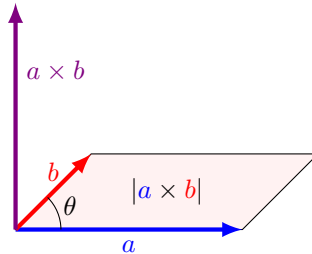


Figura 34: Prodotto vettoriale

Inoltre si ha che

- se  $\vec{A} \perp \vec{B}$ , allora si ha che

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |A| \cdot |B|$$

- se  $\vec{A} \parallel \vec{B}$ , allora si ha che

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = 0$$

- negli altri casi bisogna impiegare la regola della mano destra. Se si considera il prodotto vettoriale seguente (che non è mai commutativo)

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

la regola della mano destra si applica come segue:

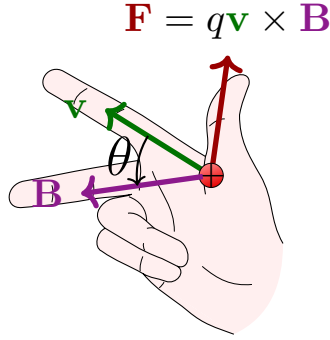


Figura 35: Regola della mano destra

- $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$
- $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$
- $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$
- $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$
- $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$
- $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$
- $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

Alternativamente, è noto che il prodotto vettoriale  $\vec{A} \times \vec{B}$  si calcola come

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

**Osservazione:** Mentre il prodotto vettoriale è il determinante della matrice di cui sopra, il prodotto scalare,  $\vec{B} \cdot \vec{A}$  si interpretava come  $|A|$  per la componente di  $B$  su  $A$ .

Inoltre si ha che il prodotto scalare tra  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  non viene alterato se ai due vettori vengono aggiunte ulteriori componenti parallele ad  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ .

**Esempio:** Si consideri la forza di Lorentz, la cui formula viene di seguito esposta

$$\vec{F} = g\vec{E} + g\vec{v} \times \vec{B}$$

in cui, senza  $\vec{E}$ , sarebbe stato

$$\vec{F} = g\vec{v} \times \vec{B}$$

Allora, in questo caso, se il campo magnetico  $\vec{B}$  va dentro la pagina e la velocità  $\vec{v}$  è parallela alla pagina, la forza  $\vec{F}$  è diretta verso il centro della spirale, ovvero  $\vec{F}$  è una **forza centripeta**, calcolata come segue

$$\vec{F} = -e \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Ma dalla cinetica è anche noto che la forza centripeta si calcola come

$$F_c = \frac{mv^2}{R}$$

per cui operando una eguaglianza si ottiene

$$\frac{mv^2}{R} = evB \rightarrow \frac{mv}{R} = eB \rightarrow m\omega = eB \rightarrow \omega = \frac{eB}{m}$$

in cui  $\omega$  prende il nome di **frequenza ciclotronica**, un valore utilizzabile per determinare la traiettoria e la natura del campo magnetico  $B$ , grazie all'emissione di fotoni da parte delle particelle. Tale fenomeno non si verifica solo sperimentalmente grazie ad un acceleratore di particelle, ma anche nello spazio, dove sono presenti campi magnetici e particelle cariche, le quali ruotano con frequenza angolare corrispondente alla frequenza ciclotronica;

#### 4.12 Pseudo-forza di Coriolis

Si consideri il seguente diagramma di un moto circolare

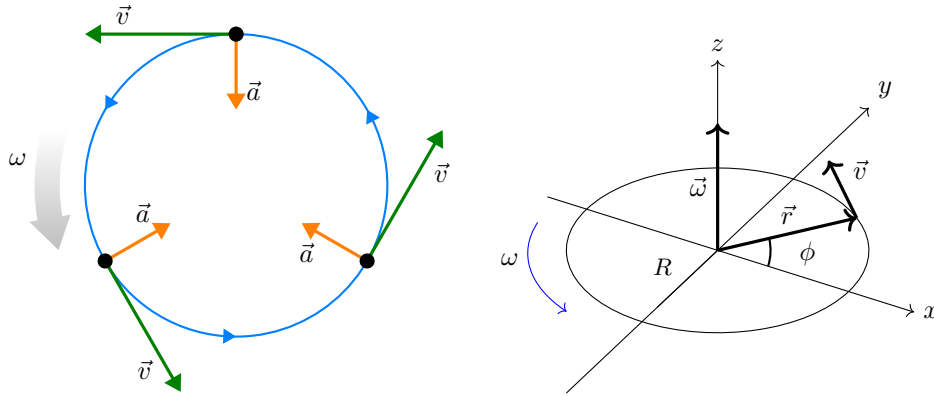


Figura 36: Moto circolare uniforme e pseudo-forza di Coriolis

Allora si può scrivere che, naturalmente, la velocità è il prodotto vettoriale tra il vettore velocità angolare e il vettore posizione, ovvero

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

E procedendo a derivare tale espressione rispetto al tempo si ottiene che

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

in cui le parentesi sono importanti, essendo il prodotto vettoriale non associativo (infatti  $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$ , essendo paralleli).

La pseudo-forza centrifuga, pertanto, si calcola come segue

$$\vec{F} = -m\vec{a} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

da cui si evince che se  $\vec{R} = 0$ , ovvero il punto si trova sull'asse di rotazione, allora non subisce alcuna forza, ma tanto più grande sarà il raggio, maggiore sarà anche la pseudo-forza che lo spinge in direzione opposta al moto.

**Osservazione:** Si consideri un punto materiale che si muove in linea retta e si supponga che poggia su un piano rotante con velocità angolare  $\vec{\omega}$ ; allora si osserva che, naturalmente, la pseudo-forza centrifuga è una componente che contribuisce a fare sì che il punto vada verso l'esterno, ma oltre a ciò, è da considerare anche un'altra forza che spinge il punto materiale in direzione opposta al verso di rotazione, ovvero la pseudo-forza di Coriolis, la quale si ha quando il sistema di riferimento non inerziale dal quale si osserva il fenomeno presenta una propria velocità, ossia non si muove con traiettoria circolare.

### PSEUDO-FORZA DI CORIOLIS

Tale forza prende il nome di **pseudo-forza di Coriolis**, la quale è perpendicolare a  $\vec{\omega}$  e a  $\vec{v}$  e si calcola come segue

$$\vec{F} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

**Esempio:** Si osservi che, in un vortice di bassa pressione, considerando la velocità angolare terrestre con verso uscente dal foglio e la velocità delle particelle di aria dirette verso il centro del vortice, si ottiene che la pseudo-forza di Coriolis, per la regola della mano destra, è diretta ortogonalmente al vettore velocità e giacente sul foglio stesso:

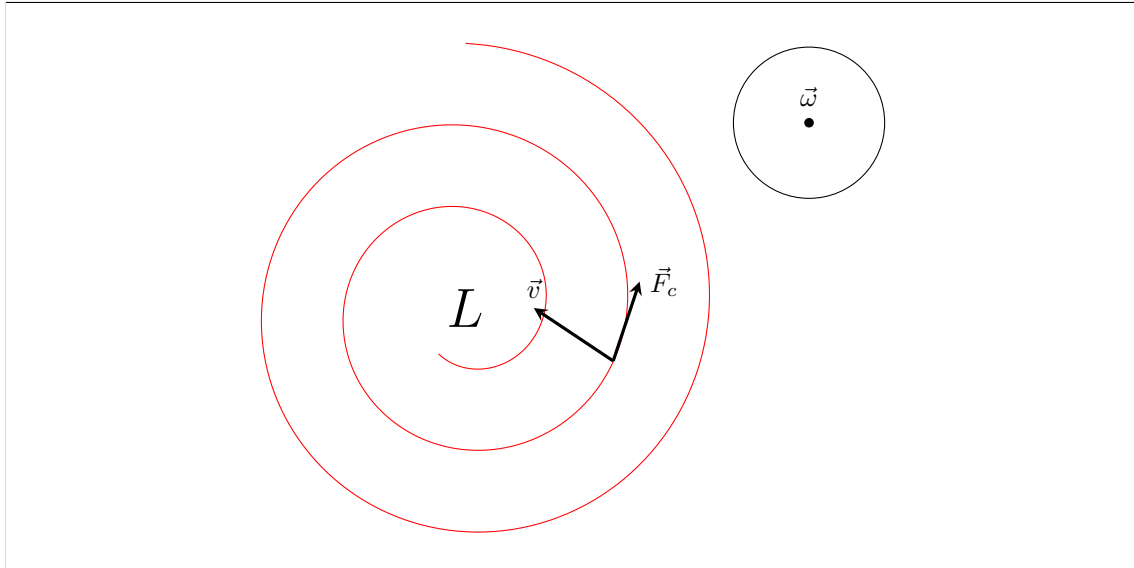


Figura 37: Vortice di bassa pressione e pseudo-forza di Coriolis

**Osservazione:** Si osservi che il calcolo della velocità limite segue la seguente formula

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho AC_d}}$$

e sapendo che

$$m = V \cdot \rho$$

si evince che

$$v = \sqrt{\frac{2V\rho g}{\rho AC_d}} = \sqrt{\frac{2Vg}{AC_d}}$$

pertanto, a parità di accelerazione gravitazionale  $g$  e coefficiente di resistenza  $C_d$ , ciò che determina la velocità dell'impatto con il suolo è il rapporto

$$\frac{V}{A}$$

pertanto più un corpo è voluminoso, maggiore sarà la velocità con cui impatta al suolo.

## 5 Gravità

17 Marzo 2022

La **legge di gravitazione universale** venne formulata da Isaac Newton nell'opera *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ("Principia") e pubblicata il 5 luglio 1687. Newton, infatti, ha affermato di voler formulare una teoria unica (appunto, universale) che descriva sia la caduta dei corpi sulla terra, sia il movimento degli astri.

Al fine di determinare tale formula, Newton si basò sull'osservazione della Luna e del suo moto; l'**accelerazione centripeta della Luna**, naturalmente, si calcola come segue

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

in cui, ovviamente,  $\omega$  è la velocità angolare, mentre  $R$  è il raggio dell'orbita della Luna, ovvero la distanza Terra-Luna (già nota dai tempi dei Greci); in particolare è noto che  $R = 60 \cdot R_T$ , in cui  $R_T = 6371$  km, mentre per determinare la velocità angolare della Luna, è noto che

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ovvero il rapporto tra l'angolo descritto dal moto e il tempo impiegato: anche in questo caso è noto che  $T \cong 27.3$  giorni. Ovviamente, ora, con questi dati è possibile calcolare l'accelerazione centripeta della Luna, ossia:

$$a_c = 2.7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

inoltre è noto che l'accelerazione gravitazionale terrestre è  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  per cui eseguendo il rapporto si ottiene

$$\frac{g}{a_c} \cong 60^2$$

che è un risultato importante, in quanto fa capire come il modulo dell'accelerazione centripeta sia **inversamente proporzionale al quadrato della distanza** tra i due corpi che si attraggono:

$$F \propto \frac{1}{d^2}$$

Tale proprietà viene espressa tramite la seguente legge di gravitazione universale

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

in cui  $G$  prende il nome di **costante di gravitazione universale**, la quale venne determinata significativamente dopo Newton.

**Esempio:** Si considerino due punti materiali  $m_1$  e  $m_2$  ad una certa posizione:

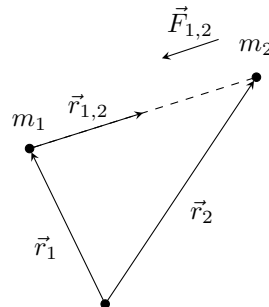


Figura 38: Forza di attrazione tra due masse

Allora si ha che, normalmente, il modulo della forza di attrazione gravitazionale dal corpo 1 al corpo 2 è

$$\vec{F}_{1,2} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

e volendo determinare il vettore forza di attrazione, semplicemente si può scrivere

$$\vec{F}_{1,2} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \cdot \hat{r}_{1,2}$$

in cui cambiando il versore  $\hat{r}_{1,2}$  si osserva come tale formula si adatti perfettamente alla terza legge di Newton: infatti il versore cambia segno, ma il modulo della forza rimane lo stesso.

**Osservazione:** Si osservi che, naturalmente, sulla Terra, fissando come origine il centro della Terra:

$$\vec{F}_t = -G \cdot \frac{m_t \cdot m}{r^2} \cdot \hat{r} = - \left( G \cdot \frac{m_t}{R_t^2} \right) \cdot m \cdot \hat{r}$$

in cui, ovviamente

$$g = \left( G \cdot \frac{m_t}{R_t^2} \right)$$

in cui si è fissato come raggio il raggio terrestre, dal momento che la Terra è un corpo sferico e, quindi, tutta la sua massa può essere considerata concentrata nel suo nucleo (un'assunzione che corrisponde alla somma del contributo attrattivo di tutte le infinitesime masse che costituiscono la Terra).

## 5.1 L'esperimento di Cavendish

Per misurare la forza di attrazione gravitazionale, Cavendish ha impiegato un **pendolo a torsione** su cui venivano fissate due masse, in corrispondenza delle loro estremità:

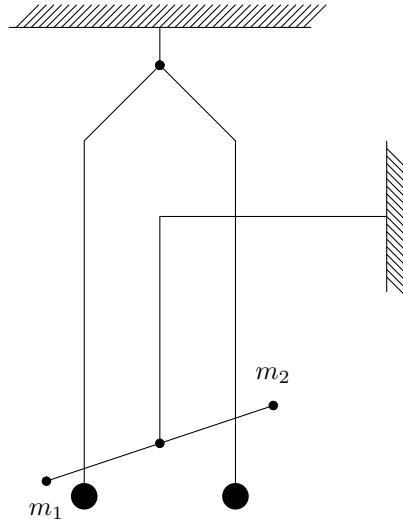


Figura 39: Esperimento di Cavendish

Tali piccole masse oscillavano leggermente, a causa dell'attrazione con masse più consistenti, in un moto continuativo, ma molto lento (in questo caso il periodo si aggirava intorno a 20 minuti); l'esperimento doveva svolgersi esattamente sul piano, in modo tale da essere ortogonale alla forza di gravità della terra e ciò richiedeva molta precisione e condizioni sperimentali costanti (quali temperatura, pressioni, vento, etc.).

Grazie a ciò Cavendish è riuscito a determinare la **densità della terra**, che era ciò che gli interessava maggiormente: sapendo, infatti, la densità e il volume della Terra, si sarebbe stati in grado di conoscerne la massa e, sapendo il valore di  $g$ , si sarebbe, in seguito, stati in grado di isolare la costante gravitazionale  $G$ , che presenta il valore seguente:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{ kg}}$$

A partire da tale risultato è possibile analizzare il moto e le caratteristiche di diversi pianeti.

## 5.2 Campo gravitazionale

A partire dall'equazione seguente

$$\vec{F}_t = -G \cdot \frac{m_t}{R_t^2} \cdot \hat{r} \cdot m$$

si osserva come la forza sia proporzionale alla massa: conoscendo la massa del corpo è possibile conoscere la forza su tale corpo.

Per campo è da intendersi una valutazione della **forza per unità di massa**, come mostrato di seguito:

$$\frac{\vec{F}_t}{m} = -G \cdot \frac{m_t}{R_t^2} \cdot \hat{r} = \vec{g}$$

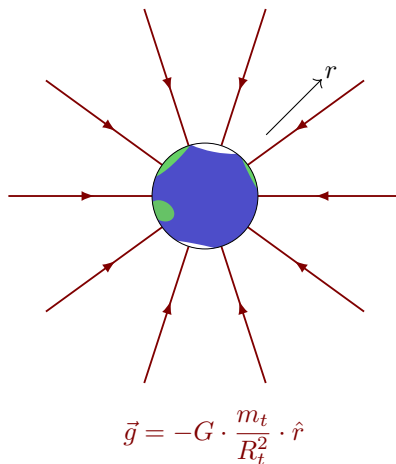


Figura 40: Campo gravitazionale terrestre

che è esattamente lo stesso concetto di di campo elettrico, ovvero la forza per unità di carica (nel caso di un campo gravitazionale, la carica è proprio la massa): sapendo la carica, e qui la massa, è possibile conoscere la forza associata, in quanto è noto il campo, ossia la forza per unità di carica/massa.

**Osservazione:** Si osservi che il **campo gravitazionale è additivo**: infatti, date due masse identiche  $m_1$  e  $m_2$ , poste vicine l'una all'altra, le linee di campo dell'una si fondono con quelle dell'altra, dando vita a delle deformazioni delle linee di campo.

Si osservi che, ovviamente, le linee di campo sono una convenzione grafica atta a rappresentare qualitativamente il fenomeno attrattivo: in ogni punto dello spazio vi sono dei vettori che dovrebbero essere rappresentati integralmente, ma per ovvie ragioni di comprensione, si preferisce la più elegante soluzione delle linee di campo.

Di fatto si ha che il campo gravitazionale risultante è

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

## 5.3 Massa gravitazionale e inerziale

Dalla 2<sup>a</sup> legge della dinamica

$$\vec{F} = m_I \cdot \vec{a}$$

si evince come la massa  $m_I$  sia da considerarsi con l'**inerzia**, ovvero la **resistenza alla variazione di moto** (e quindi di velocità).

Mentre dalla legge di gravitazione universale

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_G}{r^2} \cdot \vec{r}$$



si ha che  $m_G$  è una sorta di “carica gravitazionale”; tuttavia  $m_I$  e  $m_G$  non sono da reputarsi il medesimo concetto dal punto di vista teorico: si consideri, per esempio, il caso di due particelle, una poco massiva, ma molto carica e l'altra più massiva, che presenta una carica elettrica pressoché nulla, tale che la forza che subiscono sia completamente slegata dalla loro massa; in generale, infatti, non vi è correlazione fra le due masse, per cui, nel caso di una caduta libera, si dovrebbe avere che

$$m_I \cdot \vec{a} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_G}{r^2} \cdot \vec{r}$$

in cui, isolando l'accelerazione si ottiene

$$a_y = -G \cdot \frac{m_1}{r^2} \cdot \left( \frac{m_G}{m_I} \right)$$

in cui non è possibile, in linea teoria, confondere  $m_I$  con  $m_G$ . Tuttavia, dal punto di vista sperimentale, sono state eseguite delle misurazioni con un altissimo livello di precisione che hanno confermato come

$$\frac{m_G}{m_I} = 1$$

per cui le due masse sono da reputarsi identiche. Anche nella teoria della relatività generale tale risultato trova significato: in essa, infatti, non si considera un'attrazione gravitazionale, ma solamente una deformazione spazio-temporale, per cui tutto il sistema è non-inerziale.

## 5.4 Corpi estesi

Il campo gravitazionale è una quantità additiva, per cui per conoscere la forza di attrazione di un corpo non puntiforme, è sufficiente scomporlo in punti e sommare il contributo di ciascuno per pervenire al risultato cercato.

In altri termini si ha che

$$\vec{g} = \sum_i \vec{g}_i = \sum_i -G \cdot \frac{m_i}{r_i^2} \cdot \hat{r} = -G \cdot \int \frac{dm}{r^2} \cdot \hat{r}$$

in cui si deve integrare all'infinito il contributo di ciascuna punto.

**Esempio:** Se si considera una **distribuzione con simmetria sferica** (ovvero una sfera in cui la densità non deve necessariamente essere uniforme), allora tutta la massa è da reputarsi concentrata al centro della sfera, in quanto tale interpretazione è perfettamente equivalente alla somma infinita di tutti i contributi.

**Osservazione:** Si osservi che il numero di giri compiuti nell'unità di tempo è, ovviamente, data da

$$\frac{1}{T}$$

Inoltre, si ha che la forza centripeta descrive la natura della forza, non il tipo di forza, per cui la forza centripeta può essere causata da qualsiasi tipo di forza.

Si osservi che un punto materiale si muove con velocità di modulo costante lungo un'ellisse, allora, l'accelerazione punta sempre verso il centro dell'ellisse, in quanto il moto considerato è lo stesso di un moto circolare uniforme, ma visto da un sistema di riferimento a velocità costante (per cui l'accelerazione è nulla).

Naturalmente, i corpi liberi su una vettura in decelerazione cadono in avanti perché mantengono la stessa velocità che avevano prima della decelerazione, mentre la pseudo-forza di Coriolis ha effetto solamente su grandi distanza, come si può evincere dalla seguente formula:

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

ricordando che

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{v}}{R}$$

21 Marzo 2022

La forza di attrazione tra due corpi è direttamente proporzionale alla massa dei due corpi e inversamente proporzionale alla distanza fra i due (e tale concetto si trasla anche alla teoria della carica, per la **Forza di Coulomb**, in cui al posto della massa si deve considerare la carica di una particella e in questo caso la carica può essere positiva o negativa, ottenendo forze attrattive o repulsive). La formula per il calcolo della forza di attrazione gravitazionale presenta un  $-$  in quanto si tratta di una forza attrattiva, ovviamente.

Il **campo gravitazionale** è definita come la forza per unità di massa: è, quindi, una vera e propria forza che si applica indistintamente ad ogni corpo, indipendentemente dalla massa di ogni corpo. La differenza tra massa gravitazionale e massa inerziale è puramente concettuale, anche se nella pratica tali masse coincidono; infine, per quanto concerne i corpi estesi, al fine di considerare la forza attrattiva totale, è sufficiente sommare i contributi di tutte le masse; nel caso di un corpo con simmetria sferica, invece, è sufficiente considerare che la massa sia idealmente concentrata nel centro della sfera stessa, un'agevolazione che permette anche di semplificare i calcoli da svolgere.

## 5.5 Leggi di Keplero

Keplero, impiegando dei dati molto precisi, è riuscito a formulare delle valutazioni estremamente importanti sull'orbita dei pianeti: egli, infatti, ha scoperto che l'orbita dei pianeti è ellittica, in cui il sole si trova in uno dei due fuochi.

Non solo, Keplero, osservando il moto degli astri, è riuscito anche a formulare due leggi che spieghino la cinetica del moto dei pianeti, attraverso calcoli molto complessi e basandosi su risultati sperimentali. Di seguito si espongono le tre fondamentali leggi di Keplero:

### LEGGI DI KEPLERO

Le leggi di Keplero sono:

1. *Tutti i pianeti si muovono lungo orbite ellittiche di cui il sole occupa uno dei fuochi;*
2. *La congiungente di un pianeta con il Sole spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali (ciò significa che i pianeti, quando sono più lontani dal sole, ruotano più lentamente rispetto a quando si trovano nelle sue prossimità);*
3. *Il quadrato del periodo di un qualunque pianeta è proporzionale al cubo della distanza media del pianeta dal Sole.*

La terza legge di Keplero può essere facilmente giustificata alla luce della legge di gravitazione universale di Newton.

Se, infatti, si considera un'orbita circolare (anziché ellittica) è possibile confondere la forza di attrazione gravitazionale  $\vec{F}_a$  con la forza centripeta  $\vec{F}_c$ , per cui si ottiene

$$\vec{F}_c = \vec{F}_a \longrightarrow m_P \cdot \frac{v^2}{d} = G \cdot \frac{m_P \cdot m_S}{d^2}$$

o anche

$$\vec{F}_c = \vec{F}_a \longrightarrow m_P \cdot \omega^2 \cdot d = G \cdot \frac{m_P \cdot m_S}{d^2}$$

in cui, ovviamente,  $m_P$  è la massa del pianeta, mentre  $m_S$  è la massa del sole e  $d$  è la distanza tra il pianeta e il sole. Da questo si ottiene che:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{G \cdot m_S} \cdot d^3$$

Ma siccome  $\omega$  è la velocità angolare, ovvero il rapporto fra un giro completo e il periodo di rotazione, è facile capire che:

$$\frac{T^2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{G \cdot m_S} \cdot d^3$$

Allora isolando il quadrato del periodo si ottiene:

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{G \cdot m_S} \cdot d^3$$

**Esercizio:** Un'orbita geostazionaria è l'orbita di un satellite attorno alla Terra che presenta un periodo di rotazione identico a quello della terra, per cui si mantiene sempre sopra lo stesso punto sopra la terra: secondo la terza di legge di Keplero, esiste una sola altezza tale per cui l'orbita di un satellite possa essere geostazionaria.

Si calcoli, allora, la velocità alla quale deve ruotare un satellite (idealmente sulla superficie della Terra) affinché la sua orbita sia geostazionaria. È facile capire che tale velocità si calcola come segue

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{(2\pi)^2}{g \cdot r^2} \cdot r^3}} = r \cdot \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{g \cdot r}$$

ricordando che

$$g = \frac{G \cdot m_t}{R_t^2} \longrightarrow G \cdot m_t = g \cdot R_t^2$$

Ecco che allora la velocità cercata è

$$v = \sqrt{g \cdot r}$$

Si possono, naturalmente, anche considerare le due uguaglianze seguenti:

$$\frac{v^2}{R_t} = g \quad \text{e} \quad \omega^2 \cdot R_t = g$$

Ovviamente, per determinare il periodo di rotazione di un satellite attorno alla terra è sufficiente impiegare la terza legge di Keplero, per cui

$$T = \sqrt{\frac{(2\pi)^2}{g} \cdot d}$$

**Osservazione:** Si osservi che il periodo dell'orbita per diversi pianeti risulta essere molto simile; in particolare è noto che, per un qualsiasi pianeta, dalla terza legge di Keplero si ottiene che

$$d^3 = \frac{G \cdot m_S}{(2\pi)^2} \cdot T^2$$

ma più in generale, per un qualsiasi pianeta si ottiene che

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R_P^3}{G \cdot m_P}}$$

in cui, sotto la radice, compare il rapporto

$$\frac{R_P^3}{m_P}$$

che è esattamente il reciproco della densità del pianeta, essendo il volume di una sfera

$$V_S = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

da cui si evince che

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{1}{\rho}}$$

in cui, naturalmente

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Pertanto si ottiene che tutti i pianeti che sono stati considerati presentano lo stesso periodo di orbita in quanto hanno tutti la **stessa densità** (in quanto formati da ghiaccio, rocce, acqua, etc.).

**Osservazione:** Se fosse possibile tagliare la terra in due parti uguali e si lasciasse cadere una massa in tale foro, allora la massa accelererebbe fino a raggiungere il centro della terra, dove la forza di attrazione si annullerebbe; pertanto, la massa continuerebbe a scendere venendo progressivamente decelerata fino a raggiungere velocità nulla al culmine della sua corsa dall'altra parte del pianeta, venendo nuovamente attratta al centro e così via, fino a quando non si viene a creare un moto oscillatorio di periodo esattamente pari al periodo di orbita attorno alla Terra.

**Esercizio:** Si consideri una macchina che cerca di accelerare su diverse superfici e avente diverse configurazioni di trazione.

Allora se il coefficiente di attrito statico è  $\mu_s = 1.0$  e la macchina presenta solo due ruote trainanti, l'accelerazione della vettura deve essere

$$a \leq \frac{\mu_s}{2} \cdot g = 4.9 \text{ m/s}^2$$

e così via, variando il coefficiente di attrito statico e la distribuzione del peso.

**Esercizio:** Si consideri un'ascensore sospeso da un cavo, avente massa  $1.7 \times 10^3 \text{ kg}$ .

Allora, richiamando la seconda legge della dinamica, si può scrivere:

$$\vec{F}_T + F_t = m \cdot \vec{a}$$

e sostituendo a tali vettori i moduli, si ottiene

$$F_T = m \cdot (a + g)$$

Taluna è la formula che si può adattare a qualsiasi scenario al fine di calcolare la forza di tensione sul cavo: se esso si muove di moto rettilineo uniforme, se accelera o decelera.

## 6 Energia

L'energia è la grandezza fisica che misura la capacità di un corpo o di un sistema fisico di compiere lavoro, a prescindere dal fatto che tale lavoro sia o possa essere effettivamente svolto.

Di seguito si espongono diverse forme di energia e ne viene analizzata nel dettaglio il significato fisico.

### 6.1 Energia cinetica

L'**energia cinetica** (originariamente chiamata *vis viva*) venne teorizzata da Leibniz e da Decartes: il primo asseriva che l'energia cinetica era direttamente proporzionale alla massa e al quadrato della velocità (ovvero  $mv^2$ ), mentre il secondo considerava soltanto la massa e la velocità e non il suo quadrato (ovvero  $mv$ , che prende il nome di *quantità di moto*).

Grazie a Thomas Young, il concetto fisico teorizzato da Leibniz prese il nome di **energia** ed infine Gustave Gasparre Coriolis gli attribuì il nome di **energia cinetica**, definita come segue:

#### ENERGIA CINETICA

L'**energia cinetica** viene calcolata come segue:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

per quanto riguarda un solo punto materiale di massa  $m$ . Se, invece, si considera un agglomerato di punti materiali, allora, essendo l'**energia additiva**, si ottiene

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \cdot v_i^2$$

Naturalmente, l'energia cinetica è uno scalare (non può avere una direzione), in cui  $v^2 = |\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ .

**Esempio:** Si consideri una macchina di massa  $m = 1000$  kg e avente una velocità di  $v_1 = 50$  km/h. Allora l'energia cinetica si calcola come segue:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \left(\frac{50}{3.6} \text{ m/s}\right)^2 = 96.5 \text{ kJ}$$

in cui

$$1 \text{ J} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

Mentre se la velocità della vettura è  $v_2 = 60$  km/h allora l'energia cinetica della macchina diventa:

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \left(\frac{60}{3.6} \text{ m/s}\right)^2 = 139 \text{ kJ}$$

che significa che l'aumento di velocità di soli 10 km/h comporta un aumento del 50% dell'energia e, quindi, della dissipazione di energia in calore in caso di frenata (aumento dello spazio di frenata).

## 6.2 Lavoro

Di seguito si espone la definizione di **lavoro**, basandosi sulla Figura 41:

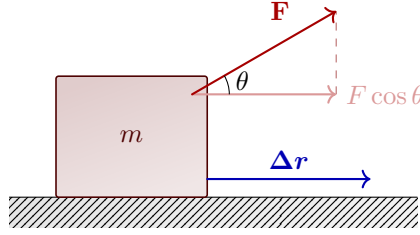


Figura 41: Lavoro compiuto da una forza non parallela allo spostamento

### LAVORO

Quando una forza  $\vec{F}$  viene applicata su un corpo e produce uno spostamento  $\Delta\vec{r}$ , allora si ha che la forza ha compiuto un lavoro, calcolato come

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \cdot \cos(\theta)$$

che significa che

- Se  $\vec{F}$  è parallelo a  $\Delta\vec{r}$ , allora il lavoro è massimo.
- Se  $\vec{F}$  è perpendicolare a  $\Delta\vec{r}$ , allora il lavoro è nullo (come nel moto circolare uniforme).
- Se  $\vec{F}$  presenta verso opposto rispetto a  $\Delta\vec{r}$ , allora il lavoro è negativo (si ha sottrazione di energia al sistema, come per l'attrito).

Naturalmente, nel caso in cui vi siano più forze agenti sul sistema, ciascuna delle quali produce uno spostamento, si ottiene che

$$W_{\text{tot}} = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2 + \dots = \sum_i F_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

Infine, se il corpo non ruota e non si deforma, tutti gli spostamenti sono uguali, ovvero  $\Delta\vec{r}_1 = \Delta\vec{r}_2 = \dots = \Delta\vec{r}_n$ , e quindi il lavoro totale sarà dato solo dal prodotto scalare tra la somma delle forze e il singolo spostamento:

$$W_{\text{tot}} = \sum_i F_i \cdot \Delta\vec{r}$$

**Osservazione:** Si osservi che un astronauta in orbita attorno alla terra **ha peso**, in quanto è grazie a tale forza che riesce a mantenere la propria orbita, altrimenti continuerebbe il proprio moto in linea retta.

È facile, inoltre, determinare il raggio di orbita geostazionaria (partendo dal centro della Terra), calcolabile come:

$$d = \frac{T^2 \cdot g \cdot R_t^2}{(2\pi)^2} = 42221 \text{ km}$$

## 6.3 Teorema lavoro-energia cinetica

Si osservi che dalla cinetica, per quanto riguarda il moto uniformemente accelerato, è nota la formula seguente:

$$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot (x - x_0)$$

Ma se ambo i membri si moltiplicano per  $\frac{1}{2}m$  si ottiene

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = ma \cdot (x - x_0)$$

che corrisponde a

$$K - K_0 = F \cdot (x - x_0) \longrightarrow \Delta K = F \cdot \Delta x \longrightarrow \Delta K = W$$

ovvero si è ottenuto il **lavoro compiuto sul sistema da una forza esterna (trasferimento di energia verso (o da) il sistema)**. In altre parole, quando una forza viene applicata su un sistema, si assiste ad un trasferimento di energia (come quando una forza applicata ad un corpo ne aumenta la velocità, la forza ha compiuto un lavoro sul sistema che si è tramutato in aumento di energia cinetica).

Più in generale, è possibile affermare dalla seconda legge della dinamica applicata ad un punto materiale di massa  $m$  che

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

considerando, ora, uno **spostamento infinitesimale**  $d\vec{r}$  (che è da interpretarsi come  $\Delta\vec{r} \rightarrow 0$ ), si può calcolare il **lavoro infinitesimale** compiuto dalla forza sul punto materiale per determinare tale spostamento:

$$dW = \left( \sum \vec{F} \right) \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r}$$

ma dalla cinetica è anche noto che

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \longrightarrow d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$$

che significa che in intervallo di tempo infinitesimale  $dt$ , un punto materiale alla velocità  $\vec{v}$  compie uno spostamento infinitesimale  $d\vec{r}$ . Alla luce di tale evidenza, la formula ottenuta precedentemente diviene:

$$m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot \vec{v}dt$$

Ma calcolando la derivata della velocità al quadrato si ottiene

$$\frac{d}{dt} \vec{v}^2 = \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{a} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{a} = 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{v}$$

Alla luce di tale risultato si può quindi scrivere

$$m\vec{a} \cdot \vec{v}dt = \frac{1}{2}m \cdot \frac{d}{dt}(\vec{v})^2$$

ovvero

$$dW = \frac{1}{2}m \cdot \frac{d}{dt}(\vec{v})^2$$

Avendo ottenuto la formula per il calcolo del lavoro infinitesimale  $dW$ , è possibile eseguire una somma infinita di tali contributi per determinare il lavoro compiuto per effettuare uno spostamento maggiore, come mostrato di seguito:

$$W_{\text{tot}} = \int_i^f dW = \int_{t_i}^{t_f} \left( \sum \vec{F} \right) \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}m \cdot \frac{d}{dt}(\vec{v})^2 \cdot dt = \frac{1}{2}m \cdot (v_f^2 - v_i^2)$$

per cui la formula finale ottenuta è proprio quanto ci si aspettava:

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{2}m \cdot (v_f^2 - v_i^2)$$

**Osservazione:** Il **teorema lavoro-energia cinetica** è una **conseguenza diretta** della seconda legge di Newton

$$F = m\vec{a}$$

e si applica ai punti materiali (ma non ad un sistema più complesso).

Si osservi che tale risultato non è equivalente al teorema di **conservazione dell'energia**, anche

se fornisce risultati uguali in importanti casi.

È significativo osservare che il lavoro totale  $W_{\text{tot}}$  così calcolato non corrisponde al “lavoro” in senso termodinamico. In questo caso si ha che

$$W_{\text{tot}} = \Delta K$$

da cui si può capire come il lavoro di una **forza costante** si possa calcolare come segue:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_f - \vec{r}_i) = \vec{F} \cdot \vec{l}$$

in cui  $\vec{l}$  indica lo **spostamento totale**, il quale non dipende assolutamente dal percorso compiuto.

**Esercizio:** Si consideri una vettura di massa  $m = 1000$  kg che viaggia ad una velocità  $v_0 = 50$  km/h. Si calcoli la distanza di arresto, considerando che la frenatura è resa possibile dalla forza di attrito cinetico  $\vec{F}_k$ .

Naturalmente è ovvio che  $F_N = F_t = mg$ , mentre  $F_k = \mu_k F_N = \mu_k mg$ . Allora il lavoro compiuto dalla forza di attrito è

$$W = \int_i^f \vec{F}_k \cdot d\vec{r}$$

ed essendo la forza di attrito di verso opposto al moto, il lavoro  $W$  avrà segno negativo.

Pertanto si ottiene

$$W = \int_i^f \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = \int_0^d -F_k \cdot dx = -F_k \cdot d = -\mu_k mgd$$

E richiamando il teorema lavoro-energia cinetica, si ottiene che

$$W = \Delta K \longrightarrow -\mu_k mgd = K_f - K_i = -\frac{1}{2}mv_i^2 \longrightarrow d = \frac{v_i^2}{2\mu_k g}$$

e com'era da aspettarsi, lo spazio di frenata aumenta con il quadrato della velocità.

**Esercizio:** Si consideri un proiettile che viene sparato in aria, in direzione verticale, con velocità  $\vec{v}_i$  sufficiente per raggiungere l'altezza di  $h$  in cui l'accelerazione gravitazionale non può essere considerata costante.

Naturalmente, dalla legge di gravitazione universale si ottiene che

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m_t \cdot m}{(R_t + h)^2} \cdot \hat{j}$$

Allora per il calcolo del lavoro si può procedere come segue:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int -G \cdot \frac{m_t \cdot m}{(R_t + h)^2} \cdot dh$$

Naturalmente, in questo caso, la forza non è costante, per cui bisogna calcolare l'integrale, posto  $h' = R_t + h$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int -G \cdot \frac{m_t \cdot m}{(R_t + h)^2} \cdot dh = \int_{R_t}^{R_t+h} -\frac{Gm_t m}{h'^2} \cdot dh' = Gm_t m \cdot \left( \frac{1}{R_t + h} - \frac{1}{R_t} \right)$$

in cui si ottiene che

$$\Delta K = W_{\text{tot}} \longrightarrow 0 - \frac{1}{2}m \cdot v_i^2 = Gm_t m \cdot \left( \frac{1}{R_t + h} - \frac{1}{R_t} \right)$$

in cui, isolando  $h$  si ottiene

$$h = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_t^2 \cdot v_i^2}{Gm_t} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R_t \cdot v_i^2}{Gm_t} \right)^{-1} \longrightarrow h = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_i^2}{g} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_i^2}{gR_t} \right)^{-1}$$

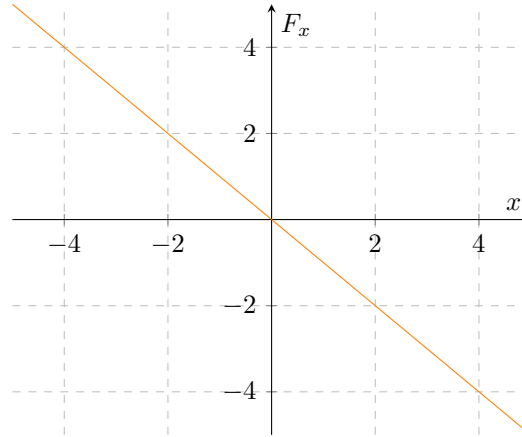
in cui appare evidente come l'altezza dipenda dal quadrato della velocità; inoltre se il secondo termine si annulla, con una velocità sufficiente, essendo valutato il reciproco, l'altezza diviene idealmente infinita e quindi il proiettile esce dall'orbita terrestre.



23 Marzo 2022

### 6.4 Lavoro compiuto da una forza variabile

Il lavoro compiuto da una forza variabile si ha quando la forza non è costante, ma dipende dalla distanza: in altre parole, sussiste una **relazione lineare tra forza e distanza**:



Per cui si perviene al risultato seguente:

$$F_x = -kx$$

la quale prende il nome di **legge di Hooke**, in cui  $k$  è la costante di proporzionalità. Tipicamente, tale legge viene impiegata per descrivere la **forza di una molla**: quando lo spostamento è positivo, la forza è negativa (si chiama, infatti, **forza di richiamo**), e viceversa.

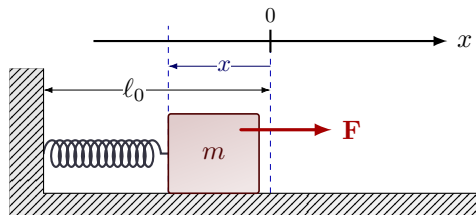


Figura 42: Fisica di una molla

Volendo calcolare il lavoro compiuto da tale forza, è sufficiente considerare l'integrale della forza risultante moltiplicata per lo spostamento, come mostrato di seguito:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} -kx \cdot dx = -\frac{1}{2}k \cdot (x_f^2 - x_i^2)$$

che costituisce un lavoro che è **indipendente dal percorso compiuto**, ma dipende solamente dalla posizione iniziale e finale.

**Esempio 1:** Si consideri un blocco sospeso da una molla, in cui la costante di elasticità della molla è  $k$ , mentre il blocco è immobile:

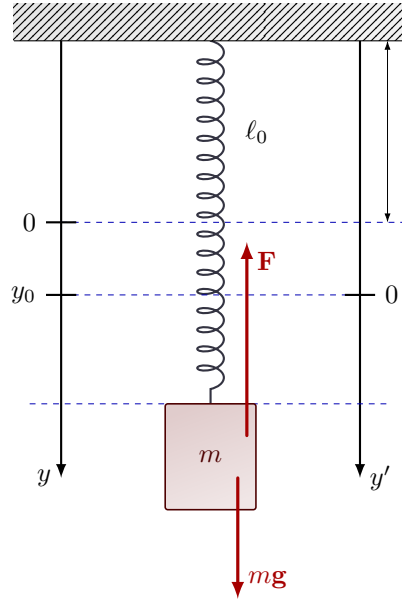


Figura 43: Fisica di una molla verticale

Naturalmente, le due forze che agiscono su tale massa sono la forza peso  $\vec{F}_t$  e la forza di richiamo della molla  $\vec{F}_m$ . Inoltre, essendo il blocco immobile ( $\vec{a} = 0$ ), deve essere che

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0$$

Applicando la seconda legge della dinamica, quindi, si ottiene che

$$k \cdot \Delta y = mg \rightarrow \Delta y = \frac{mg}{k}$$

**Esempio 2:** Si consideri un carrello che si muove di velocità  $\vec{v}_i$  e che deve arrestare la sua corsa per mezzo di una molla posta orizzontalmente al moto:

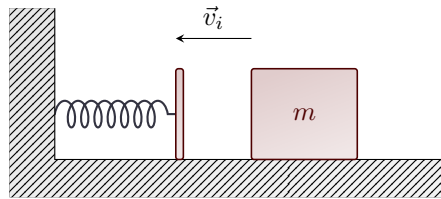
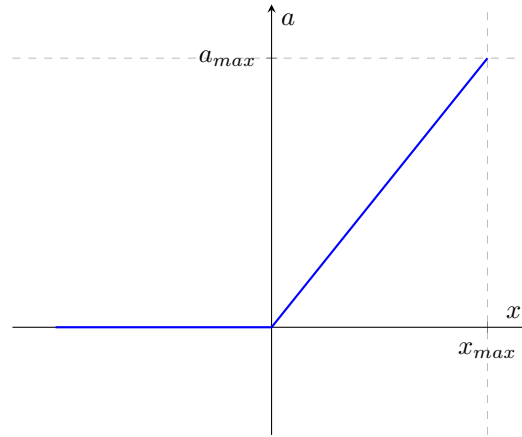


Figura 44: Arresto di un carrello tramite freno a molla

Si determini, allora, la costante di elasticità della molla  $k$  affinché il modulo dell'accelerazione sia al massimo  $a_{max} = 5g$ .

Naturalmente, se tale costante è troppo elevata, la molla si comporterà come un muro, mentre se è troppo bassa non sarà sufficiente a rallentare in tempo la corsa del mezzo.

Sa la molla è troppo dura, la decelerazione sarà molto forte e rapida, mentre se è troppo morbida, la sua decelerazione non sarà sufficiente ad evitare l'impatto; è chiaro che l'accelerazione sarà massima nel punto di massima compressione, mentre sarà nulla prima del punto di contatto e crescerà in modo lineare secondo la legge di Hooke:



Dalla seconda legge della dinamica si ottiene che

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

per cui considerando solamente la componente orizzontale, si ottiene

$$F_x = ma_x \longrightarrow -kx = ma_x \longrightarrow a_x = -\frac{k}{m}x$$

Applicando, ora, il teorema lavoro-energia cinetica si ottiene che

$$W = \Delta K$$

in cui è noto che  $\vec{v}_i = \vec{v}_i$  mentre  $x_i = 0$ , e  $\vec{v}_f = 0$ , mentre  $x_f = x_{max}$  da cui:

$$W = -\frac{1}{2}k \cdot (x_f^2 - x_i^2) = -\frac{1}{2}k \cdot x_{max}^2$$

invece si ottiene che

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Applicando infine il teorema lavoro-energia cinetica si ottiene che

$$-\frac{1}{2}k \cdot x_{max}^2 = -\frac{1}{2}mv_i^2 \longrightarrow x_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot v_i$$

Ecco che avendo isolato  $x_{max}$  si può scrivere che

$$a_{max} = \left| \frac{k}{m}x_{max} \right| \longrightarrow a_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot v_i$$

Ma sapendo che  $a_{max} = 5g$ , si può facilmente isolare  $k$ , ottenendo:

$$k \leq \frac{a_{max}^2}{v_i^2} \cdot m = \frac{25g^2}{v_i^2} \cdot m$$

## 6.5 Lavoro compiuto dalla forza di gravità

Naturalmente la forza di gravità è una forza costante, per cui il lavoro che essa compie dipende unicamente dalla posizione iniziale e finale scelta.

Allora, applicando la formula per il calcolo del lavoro compiuto da una forza costante si ottiene

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg \cdot (y_f - y_i)$$

pertanto il lavoro compiuto dalla forza di gravità è

$$W = -mg \cdot (y_f - y_i)$$

**Esempio:** Si consideri una massa  $m$  che viene lasciata scivolare (senza attrito) su una discesa, partendo con velocità iniziale  $\vec{v}_i = 0$  e giungendo alla base di tale discesa con velocità finale  $\vec{v}_f$ . Si calcoli, allora, la velocità finale della massa.

Naturalmente, applicando il teorema lavoro-energia cinetica si ottiene che

$$W = \Delta K \longrightarrow -mg \cdot (y_f - y_i) = \frac{1}{2}m \cdot v_f^2 \longrightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Ecco allora che la velocità finale di un corpo che viene lasciato cadere da una altezza  $h$ , in assenza di attriti è

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

**Osservazione:** Si osservi che il lavoro compiuto da una forza può essere sia positivo o negativo (se la forza è diretta nello stesso verso dello spostamento, oppure no).

Una forza che non compie mai lavoro è il campo magnetico (in quanto nell'equazione di Lorents, la forza è ortogonale alla velocità, e quindi al vettore spostamento): ciò significa che il campo magnetico non può mai accelerare delle particelle; per farlo è necessario impiegare un campo elettrico.

Ovviamente il lavoro è l'integrale della forza per lo spostamento, per cui rappresenta l'area della parte di piano sottesa al grafico della forza in funzione dello spostamento.

## 6.6 Forze conservative

Di seguito si espone la definizione di **forza conservativa**:

### FORZA CONSERVATIVA

Una forza  $\vec{F}$  si definisce **conservativa** se

$$\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

è **indipendente dal percorso**. Analogamente si ha che il lavoro compiuto da una forza  $\vec{F}$  conservativa su un **percorso chiuso è nullo**

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

che corrisponde a dire che

$$\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

In altri termini, si potrebbe dire che una forza è definita conservativa se esiste una funzione  $\mathcal{U}$  tale che

$$\vec{F} = \nabla \mathcal{U}$$

Ove per  $\nabla \mathcal{U}$  è da intendersi il **gradiente** di  $\mathcal{U}$ , ossia la derivata coalcolata in tutte le direzioni:

$$\nabla \mathcal{U} = \frac{d\mathcal{U}}{dx} \cdot \hat{i} + \frac{d\mathcal{U}}{dy} \cdot \hat{j} + \frac{d\mathcal{U}}{dz} \cdot \hat{k}$$

**Osservazione:** Si osservi che la funzione  $\mathcal{U}$  impiegata nella definizione prende il nome di **energia potenziale**.

**Esempio:** Si osservi che un esempio molto semplice di **forza non-conservativa** è l'attrito, in quanto il lavoro compiuto da tale forza dipende necessariamente dal percorso, essendo la forza

d'attrito sempre opposta allo spostamento. Pertanto si ottiene che:

$$W_k = \int_i^f \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = \int_i^f -\mu_k mg \cdot d\vec{r} = -\mu_k mg \cdot s$$

in cui  $s$  è la lunghezza del percorso.

**Osservazione:** Si osservi che Richard Feynman, parlando di fisica fondamentale delle particelle, ha affermato che:

*“Abbiamo speso un tempo considerevole per discutere le forze conservative; che cosa diremo delle forze non conservative? Approfondiremo l'argomento più di quanto non si faccia solitamente, e stabiliremo che non esistono forze non conservative! In realtà, tutte le forze fondamentali nella natura appaiono conservative. Questa non è una conseguenza delle leggi di Newton. Infatti, per quanto ne sapeva Newton, le forze avrebbero potuto essere non conservative, come apparentemente è l'attrito. Quando diciamo che l'attrito apparentemente lo è, usiamo un punto di vista moderno, essendo stato scoperto che tutte le forze elementari, le forze fra le particelle a livello fondamentale, sono conservative.”*

Richard Feynman

Per cui le forze microscopiche sono conservative, ma quando si considera un assieme, la seconda legge della termodinamica stabilirà che deve esserci calore dissipato: pertanto, anche se tutti i meccanismi fondamentali sono conservativi, vi deve essere un aumento di **entropia**. Si conclude, quindi, che il problema delle forze dissipative (e quindi non conservative), come l'attrito, è un problema prettamente termodinamico.

24 Marzo 2022

Il lavoro viene definito come l'integrale del prodotto tra la forza applicata e lo spostamento ottenuto: naturalmente il lavoro può essere positivo o negativo e può essere eseguito da qualsiasi forza.

Le forze conservative sono forze per le quali il lavoro non dipende dal percorso e, quindi, è possibile applicare il principio di conservazione dell'energia (in altre parole, le forze conservative sono forze capaci di immagazzinare dell'energia potenziale, potenziale per svolgere un lavoro). Esempi di forze conservative sono:

- Gravità;
- Forza elastica (non sempre);
- Forza elettrica;
- etc.

Mentre forze non conservative (e quindi dissipative) sono:

- Attrito;
- Resistenza dell'aria;
- Forza compiuta da una persona;
- etc.

## 6.7 Energia potenziale

Di seguito si espone la definizione di **energia potenziale**:

### ENERGIA POTENZIALE

Data una forza conservativa  $\vec{F}$ , è noto che il lavoro compiuto da tale forza è

$$W_{i,f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

il quale, essendo  $\vec{F}$  conservativa, dipende solamente dai vettori posizione iniziale  $\vec{r}_i$  e finale  $\vec{r}_f$ . Naturalmente, però, essendo  $\vec{F}$  conservativa, essa può essere definita come il gradiente di una funzione  $\mathcal{U}$ , ovvero  $\vec{F} = \nabla \mathcal{U}$ , per cui eseguendo l'integrale indefinito di  $\vec{F}$ , si ottiene solamente l'energia potenziale  $\mathcal{U}$ , che deve essere valutata da una posizione finale ad una iniziale, come mostrato di seguito:

$$W_{i,f} = (-\mathcal{U}(\vec{r}_f)) - (-\mathcal{U}(\vec{r}_i))$$

In altre parole si ha che

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} + c$$

in cui  $c$  = costante. Da ciò segue che

$$W_{i,f} = -\Delta \mathcal{U}_{i,f}$$

per cui il lavoro compiuto da  $i$  a  $f$  è uguale all'opposto della differenza di energia potenziale.

**Osservazione:** Si osservi che ogni qualvolta vi è una forza conservativa vi è energia potenziale. L'energia potenziale, più in generale, può essere interpretata come un modo di immagazzinare energia per essere successivamente impiegata per compiere un lavoro (si parla di “potenziale di compiere un lavoro”).

### 6.7.1 Energia potenziale gravitazionale

Per quanto concerne la forza di gravità, è noto che  $\vec{F}_t = -mg \cdot \hat{j}$  e  $d\vec{r} = dy \cdot \hat{j}$ , per cui l'energia potenziale gravitazionale diviene

$$\mathcal{U}(y) = - \int (-mg \cdot dy) = mg \cdot y + c$$

Per cui l'energia potenziale gravitazionale si calcola come segue:

$$\boxed{\mathcal{U}(h) = mgh}$$

### 6.7.2 Energia potenziale elastica

Per quanto concerne la forza elastica, è noto che  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -kx \cdot dx$ , da cui:

$$\mathcal{U}(x) = - \int -kx \cdot dx = \frac{1}{2}k \cdot x^2 + c$$

Per cui l'energia potenziale elastica si calcola come segue:

$$\boxed{\mathcal{U}(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$

**Esempio:** Si consideri il pompaggio idroelettrico che prevede un bacino idrico in rilievo con  $h = 1050$  m, avente una capacità di  $V = 9000000$  m<sup>3</sup>. Allora per conoscere l'energia potenziale è sufficiente impiegare la formula precedente:

$$\mathcal{U} = mgh = V\rho gh = 90TJ$$

## 6.8 Potenza

Di seguito si espone la definizione di **potenza**:

### POTENZA

La **potenza** viene definita come

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

ovverosia la quantità di energia trasferita per unità di tempo. L'unità di misura è, naturalmente, il **Watt**, per cui

$$\boxed{1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}}}$$

mentre per l'unità di energia 1 kWh è da considerarsi

$$\boxed{1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \text{ MJ}}$$

**Esempio:** Se si considera un lavoro di 90 TJ, allora tale lavoro corrisponde ad una potenza di 25 GWh. Se si considera il flusso massimo di una turbina pari a 130 m<sup>3</sup>/s, allora la potenza massima diviene:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{d}{dt}(mgh) = \frac{dm}{dt}gh = \rho \cdot \frac{dV}{dt}gh = 1.4 \text{ MW}$$

**Esercizio:** Si consideri una macchina di 10<sup>3</sup> kg che necessita una potenza di 16 hp per andare ad una velocità costante di 80 km/h. Si determini, allora, la potenza necessaria per salire una pendenza di 10°.

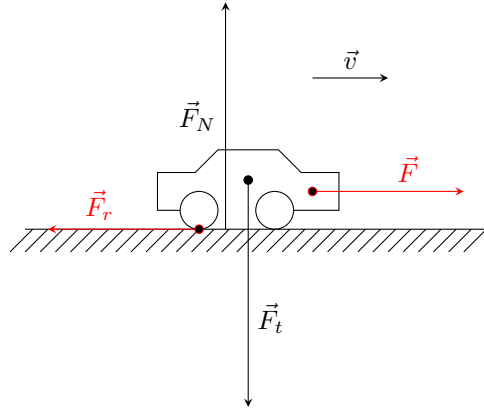


Figura 45: Vettura a velocità costante su una strada orizzontale

Naturalmente le forze in gioco sono la forza di gravità, la forza normale, la forza di attrito e la forza di trazione:

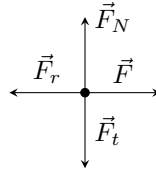


Figura 46: Diagramma a corpo libero di una vettura a velocità costante su una strada orizzontale

Giacché la velocità è costante, l'accelerazione della vettura è nulla, per cui

$$\sum \vec{F} = 0$$

Da ciò si evince la forza di trazione  $\vec{F}$  e la forza di resistenza  $\vec{F}_r$  sono uguali ed opposte, per cui:

$$\vec{F} = \vec{F}_r$$

Applicando il teorema lavoro-energia cinetica, si ha che

$$W_{\text{tot}} = \Delta K = 0$$

in cui è da considerare  $W_{\text{tot}} = W_m + W_r$ , i quali sono uguali e opposti. Ovviamente si ha che

$$W_m = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{e} \quad W_r = \int \vec{F}_r \cdot d\vec{r}$$

e sono entrambi uguali a  $W = F \cdot d$ . Naturalmente, in questo caso, si ottiene che la potenza cercata è proprio:

$$P = \frac{d}{dt} W_m = \frac{d}{dt} F \cdot d = F \cdot v$$

che è un risultato fondamentale:

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Dai dati del problema si ha che tale potenza, ovvero  $P = F \cdot v = 16$  hp.

Se la macchina deve affrontare una salita di  $10^\circ$ , allora la forza peso deve essere scomposta nelle sue due componenti, e non viene cancellata totalmente dalla forza normale; tuttavia, si ha sempre che:

$$\sum \vec{F} = 0 = \vec{F}_r + \vec{F}_N + \vec{F}_t + \vec{F}$$

Ruotando il sistema di  $10^\circ$  si ottiene che, scomponendo l'equazione nelle sue due componenti:

$$\hat{j} : F_N - F_t \cdot \cos(\theta) = 0$$

$$\hat{i} : F - F_r - F_t \cdot \sin(\theta) = 0$$



Volendo cercare la potenza della macchina necessaria per affrontare la salita, si deve procedere al calcolo seguente:

$$P = F \cdot v = (F_r + F_t \cdot \sin(\theta)) \cdot v$$

Ma volendo calcolare  $F_r \cdot v$ , si può impiegare il risultato precedente, sapendo che  $F_r \cdot v = 16$  hp. Da ciò si evince che:

$$P = F_r \cdot v + mg \cdot \sin(\theta) \cdot v = 16 \text{ hp} + \frac{37.8 \text{ kW}}{743 \text{ W/hp}} = 67 \text{ hp}$$

In cui, ovviamente,  $mg \cdot \sin(\theta) \cdot v$  è il tasso di cambio della propria velocità in energia potenziale.

**Esercizio:** Si calcoli la velocità di un motorino elettrico avente una potenza di 3000 W in salita avente una pendenza del  $10^\circ$ , in cui la massa complessiva del sistema è di 200 kg (trascurando la resistenza dell'aria).

Naturalmente, giacché  $v$  è costante, significa che non vi è accelerazione ( $\vec{a} = 0$ ). Da ciò si ha che la forza di trazione del motorino è  $F = mg \cdot \sin(\theta)$ , mentre la potenza cercata è

$$P = mg \cdot \sin(\theta) \cdot v = F \cdot v = \frac{d}{dt} (\mathcal{U}(y)) = mg \cdot \frac{dy}{dt}$$

Da cui si evince che la velocità del sistema cercata è proprio data dal rapporto seguente:

$$v = \frac{P}{mg \cdot \sin(\theta)} = 55 \text{ km/h}$$

28 Marzo 2022

**Esercizio:** Si consideri una massa  $m = 500$  g che viene lasciata cadere da un'altezza  $h = 60$  cm su un ripiano collegato ad una molla di costante elastica  $k = 120$  N/m.

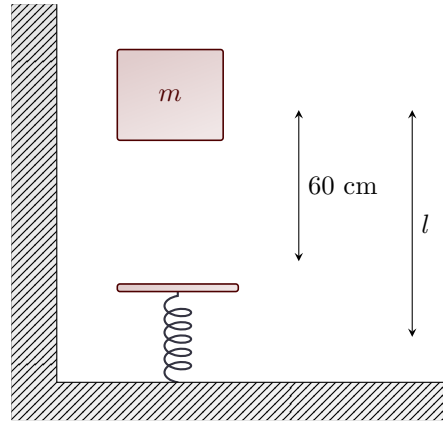


Figura 47: Massa lasciata cadere su una molla

Si determini, allora, la lunghezza  $l$  di compressione massima della molla fino a quando l'insieme blocco-piattaforma si ferma.

Al fine di risolvere tale problema è utile richiamare il teorema lavoro-energia cinetica: naturalmente si ha che il lavoro totale compiuto sul sistema è pari alla variazione di energia cinetica:

$$W_{\text{tot}} = \Delta K = \frac{1}{2}m \cdot (v_f^2 - v_i^2)$$

ma essendo la velocità iniziale e finale del blocco nulle, si deduce che il lavoro totale compiuto sul sistema è nullo. Le uniche forze che compiono lavoro, in questo caso ipotetico, sono la forza di gravità e la forza elastica di richiamo della molla; ciò significa che il lavoro compiuto da ambedue le forze è uguale, ma opposto, da cui:

$$w_{\text{tot}} = 0 = W_g + W_m = mgl - \frac{1}{2}k \cdot (l - d)^2$$

Da ciò si evince che:

$$-\frac{1}{2}kl^2 + (kd + mg) \cdot l - \frac{1}{2}kd^2 = 0$$

e volendo isolare  $l^2$  si ottiene:

$$l^2 - 2 \cdot \left( \frac{mg}{k} + d \right) \cdot l + d^2 = 0$$

Naturalmente tale equazione presenterà due soluzioni, ma in questo caso si deve chiedere che  $l > d$ , per cui:

$$l_{1,2} = \frac{\frac{mg}{k} + l \pm \sqrt{4 \cdot \left( \frac{mg}{k} + d \right)^2 - 4d^2}}{2}$$

ma l'unica soluzione che ha significato è

$$l = \frac{mg}{k} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2kd}{mg}} \right) + d = 86.6 \text{ cm}$$

**Osservazione:** Si osservi che l'altra soluzione dell'equazione corrisponde non al caso in cui la molla è compressa, ma quando la molla è stesa.

## 6.9 Conservazione dell'energia

L'energia può essere interpretata come un fluido, la quale si trasforma in una forma o in un'altra, ma conservando sempre la propria quantità. Tale concetto viene condensato dal **teorema di conservazione dell'energia** esposto di seguito:

### CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Quando si impiega il teorema di conservazione dell'energia, è sempre fondamentale specificare il **sistema** su cui si sta lavorando, distinguendolo con l'**ambiente esterno**: tra il sistema e l'ambiente può esserci scambio (o trasferimento) di energia (in ambo le direzioni) oppure no; nel secondo caso si può applicare il **teorema di conservazione dell'energia** sul sistema considerato:

$$E_{\text{sistema}} = K + \mathcal{U} + U$$

in cui  $K$  è l'**energia cinetica**,  $\mathcal{U}$  è l'**energia potenziale**, mentre  $U$  prende il nome di **energia interna**. Tuttavia, in **meccanica**, si ignora totalmente l'energia del sistema, e si preferisce considerare solamente l'**energia meccanica**  $E_m = K + \mathcal{U}$ .

Se si ha conservazione dell'energia meccanica, si ottiene che

$$\Delta E_{\text{sistema}} = 0 = \sum \text{trasferimenti} = \text{lavoro} + \text{calore}$$

per cui su un sistema chiuso è possibile modificare l'energia del sistema compiendo lavoro su di esso, oppure tramite scambi di calore. Esempi di sistema possono essere costituiti da

- un corpo solo;
- due (o più corpi) che interagiscono;
- un corpo deformabile;
- una regione dello spazio (in questo caso si può avere non solo scambi d'energia, ma anche di materia);
- etc.

in cui tali sistemi possono essere **aperti** (per cui si ha scambio sia di energia che di materia), **chiusi** (in cui si ha scambio solamente di energia) o **isolati** (in cui non si ha nè scambio di energia nè di materia).

Più limitatamente all'energia meccanica, il teorema di conservazione dell'energia meccanica afferma che

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \Delta K + \Delta \mathcal{U} = W_{\text{sistema}}$$

ove  $W_{\text{sistema}}$  è da intendersi il lavoro totale compiuto sul sistema.

**Esempio:** Nel caso precedente, in cui si considerava una massa che cadeva sulla molla, si può considerare come sistema l'assieme blocco-molla-terra, in cui si assiste alla conservazione dell'energia meccanica, in quanto non c'è lavoro compiuto sul sistema dall'esterno: pertanto si assiste solamente alla trasformazione di energia potenziale gravitazionale in energia cinetica e, successivamente, in energia potenziale elastica.

**Osservazione:** Si osservi che l'energia cinetica non può mai essere negativa, mentre l'energia potenziale è totalmente arbitraria: ciò che è fondamentale da valutare è la variazione di energia potenziale.

Inoltre, l'energia totale di un sistema può cambiare se una forza esterna compie lavoro sul sistema: il lavoro totale compiuto sul sistema è uguale alla variazione in energia totale del sistema.

**Esercizio:** Se si considera una biglia poggiata su una molla in compressione: nello stadio iniziale vi sarà solamente energia potenziale elastica, che poi si tramuterà in energia cinetica ed energia potenziale gravitazionale, fino a quando la biglia raggiungerà il suo punto di massima altezza, in cui la totalità dell'energia del sistema è data soltanto dalla componente potenziale gravitazionale.

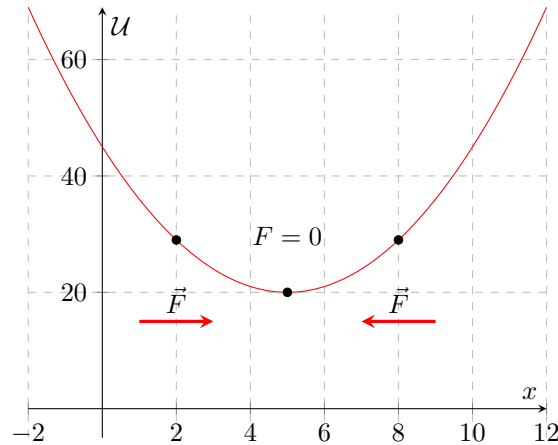
**Osservazione:** Si osservi che l'energia potenziale di una forza conservativa  $\vec{F}$  era stata definita come

$$\mathcal{U} = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

per cui si può scrivere che

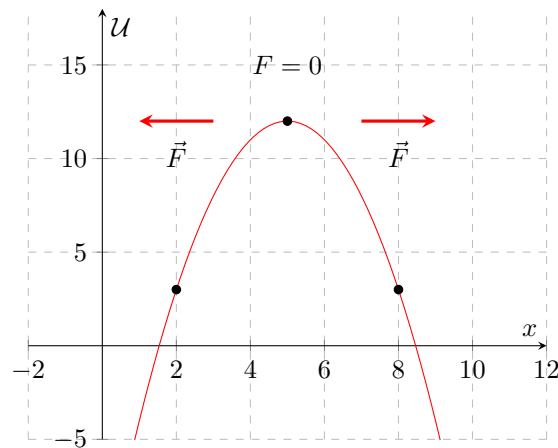
$$F_x = - \frac{d\mathcal{U}}{dx}$$

ovvero la forza  $F$  corrisponde all'opposto della pendenza del grafico energia potenziale-spostamento:



Questo è un sistema che viene definito **stabile**, in quanto ad ogni spostamento positivo (o negativo) vi è una forza di richiamo negativa (o positiva, rispettivamente) che permette di bilanciare il sistema, portandolo in una condizione di equilibrio.

Analogamente, un sistema è **instabile** quando ad ogni spostamento viene associata una forza che sbilancia ancora di più il sistema nella direzione dello spostamento:



Non da ultimo devono essere citati sistemi molto più complessi, in cui vi può essere la combinazione di più configurazioni stabili e instabili, valutabili tramite la derivata seconda, ovvero:

$$\frac{d^2\mathcal{U}}{dx^2} > 0 \longrightarrow \text{sistema stabile} \quad \text{e} \quad \frac{d^2\mathcal{U}}{dx^2} < 0 \longrightarrow \text{sistema instabile}$$

**Osservazione:** Si osservi che l'energia potenziale gravitazionale può essere interpretata come

$$\mathcal{U}(r) = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$$

che graficamente corrisponde ad un'iperbole equilatera sul quarto quadrante.

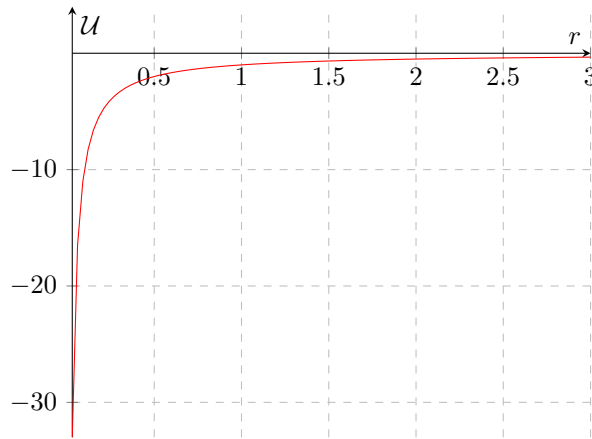
29 Marzo 2022

A proposito dell'energia potenziale gravitazionale, è nota la formula seguente, in quanto deriva dall'integrale della forza di attrazione gravitazionale per la distanza:

$$\mathcal{U}(r) = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$$

Che presenta un grafico sull'asse della distanza che rappresenta un'iperbole equilatera: infatti, due masse inizialmente a riposo presentano una certa energia potenziale, la quale, a mano a mano che le due masse si avvicinano per attrazione gravitazionale, diminuisce fino ad annullarsi, trasformandosi progressivamente in energia cinetica. Nella realtà, le masse sono sempre in movimento, con una certa velocità, e progressivamente le due masse (che sono fra di loro simili) entrano in orbita una attorno all'altra rispetto al loro centro di massa.

Di seguito si espone il grafico iperbolico dell'energia potenziale gravitazionale:



**Osservazione:** Si osservi che in base alla formula di cui sopra, l'energia potenziale gravitazionale è sempre negativa (anche se sarebbe possibile aggiungere a tale calcolo una costante  $c$  di integrazione).

**Esempio:** L'energia meccanica totale di un satellite in orbita attorno alla terra è data dalla somma di due componenti: l'energia cinetica e l'energia potenziale

$$E_{\text{tot}} = K + \mathcal{U} = \frac{1}{2}mv^2 - G \cdot \frac{m_t \cdot m}{r}$$

in cui  $m$  è la massa del satellite. Inoltre, in tali sistemi nello spazio, si assiste ad un minimo scambio di energia (a causa delle radiazioni), per cui con sufficiente precisione è possibile affermare che si ha conservazione di energia, ovvero

$$\Delta E = 0 \longrightarrow K + \mathcal{U} = \text{costante}$$

Per comprendere la condizione di orbita di un satellite, è opportuno studiare i possibili valori di  $E$

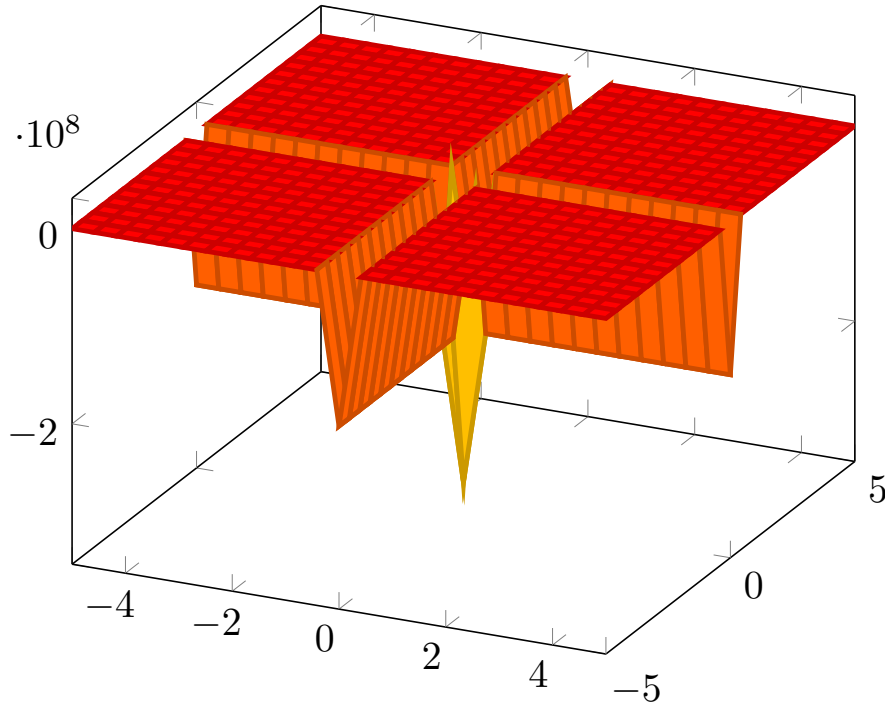
- se  $E$  è **positivo**, allontanando progressivamente il satellite dalla terra, l'energia potenziale  $\mathcal{U}$  diminuisce progressivamente, tendendo a 0, mentre l'energia cinetica aumenta (dovendo essere  $E > 0$ ), e quindi il satellite si allontanerebbe eccessivamente dalla terra, incrementando la propria energia cinetica e riducendo la propria energia potenziale, non potendo più trovarsi in orbita attorno alla terra. Pertanto  $E$  non può essere positivo, in quanto ciò significherebbe che il satellite presenta troppa energia e non può stare in orbita attorno alla terra.
- se  $E$  è **negativo**, invece, allora il satellite, ad una certa distanza dalla terra, diminuirebbe la propria energia cinetica, senza mai annullarla totalmente, però, in quanto essa è sempre tangenziale all'orbita e consente al satellite di compiere tale moto di rivoluzione.

Pertanto, è possibile definire il concetto di  $E := \text{energia di legame}$ , per cui se  $E < 0$  si ha la condizione per avere un'orbita attorno alla terra. Ovviamente sussiste anche il caso limite in cui

$E = 0$ , per cui l'energia cinetica del satellite eguaglia quella potenziale gravitazionale: ciò significa che il satellite presenta la velocità sufficiente (appunto, la **velocità di fuga**) da poter uscire dal campo gravitazionale terrestre.

**Osservazione:** Naturalmente, l'energia potenziale dipende solamente dal parametro  $r$ , per cui più  $r$  aumenta, più l'energia potenziale diminuisce, mentre se  $r$  tende a 0, allora l'energia potenziale assume il suo massimo valore.

Disegnando l'energia potenziale in tre dimensioni, è possibile visualizzare le **linee equipotenziali** che permettono di descrivere le possibili orbite di due pianeti attorno al proprio centro di massa: ovviamente tale linee sono delle circonferenze che permettono di visualizzare tutti i punti alla medesima distanza.



Ovviamente se una massa ruota seguendo una di tali linee equipotenziali, in piena conservazione dell'energia, rimarrà a compiere tale moto perpetuo, in maniera identica.

Tuttavia, a causa delle cosiddette **forze di marea**, ciò non si verifica, in quanto deformazioni del corpo in rotazione comportano dispersione di energia cinetica e quindi un allontanamento dei corpi. Il punto in cui si è più distanti dal centro è il punto in cui si ha il massimo dell'energia potenziale (ossia il più grande valore negativo), e quindi l'energia cinetica dovrà avere il suo valore minimo: infatti il satellite si muove molto lentamente tanto più è lontano dal centro; Viceversa si verificherà quando la massa si trova molto vicina al centro di rotazione.

## 6.10 Velocità di fuga

È noto che la velocità di fuga si ha quando l'energia di legame è pari a 0, ossia  $E = 0$ : taluna è la condizione che permette al satellite di fuggire dalla sua orbita, ossia di uscire dal campo gravitazionale, ovvero:

$$E = 0 = K + \mathcal{U} \longrightarrow K = -\mathcal{U} \longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = G \cdot \frac{m_t \cdot m}{r}$$

in cui  $v$  è proprio la velocità di fuga, per cui

$$v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2G \cdot m_t}{r}}$$

e dipende naturalmente da  $r$ : se la distanza è molto elevata, è chiaro che l'energia potenziale gravitazionale sarà inferiore e quindi la velocità di fuga sarà inferiore. Nel caso della terra, allora, volendo calcolare la velocità di fuga sulla superficie della terra si ottiene:

$$v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2G \cdot m_t}{R_t}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{g \cdot R_t} \cong 11000 \text{ m/s} \cong 40000 \text{ km/h}$$

ossia pari a  $\sqrt{2}$  volte la velocità necessaria per stabilire un'orbita attorno alla terra con raggio esattamente pari a quello della terra: un proiettile sulla superficie della terra avente tale velocità può effettivamente uscire dal campo gravitazionale terrestre senza mai farvi più ritorno.

**Osservazione:** Quando si considera un sistema stabile, partendo con una certa energia cinetica, tale sistema converte molteplici volte tale energia in energia potenziale e viceversa; se vi è dissipazione, ovviamente, parte dell'energia viene dispersa (viene dissipata in calore) ad ogni oscillazione fino a quando l'energia totale del sistema decresce a tal punto che si raggiunge la configurazione stabile di equilibrio, ovvero l'energia potenziale minima.

**Esempio:** Si consideri una molla verticale sulla quale è attaccata una massa:

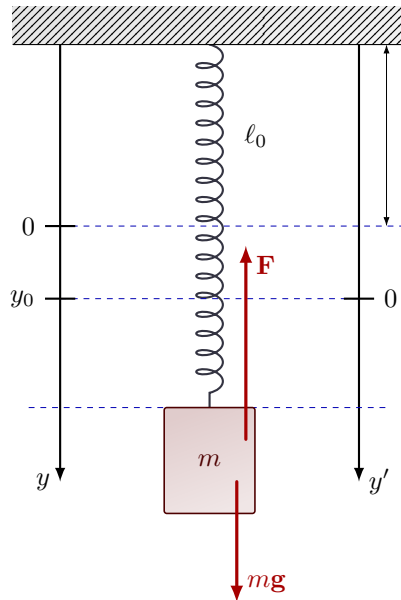


Figura 48: Fisica di una molla verticale

Naturalmente, l'energia potenziale del sistema in funzione di  $y$  è data da

$$\mathcal{U}(y) = mgy + \frac{1}{2}ky^2$$

e per conoscere il minimo valore di energia potenziale (corrispondente proprio al punto di equilibrio nel grafico di una parabola con concavità rivolta verso l'alto), è sufficiente derivare tale espressione e porre la condizione che la derivata sia nulla (corrispondente a tangente orizzontale):

$$\frac{d}{dy}\mathcal{U}(y) = mg + ky \longrightarrow y = -\frac{mg}{k}$$

che è il medesimo risultato che sarebbe stato ottenuto ragionando con la 2<sup>a</sup> legge della dinamica, imponendo che la forza peso e la forza elastica siano uguali, ma opposte (giacché la massa è immobile, quindi con  $\vec{a} = 0$ ):

$$mg = -ky \longrightarrow y = -\frac{mg}{k}$$

**Esercizio 1:** Il raggio dell'orbita di Marte è 1.52 volte quello dell'orbita terrestre. Utilizzando la terza legge di Keplero si determini il periodo della rivoluzione di Marte in anni.

La terza legge di Keplero afferma che il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta attorno al sole è proporzionale al cubo della distanza tra i due:

$$T^2 \propto R^3$$

Ma naturalmente si ha che la costante di proporzionalità sarà

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{costante}$$

e tale costante dipende solamente dalla massa del sole, per cui è la stessa per tutti i pianeti, pertanto si ha che

$$\frac{T_t^2}{R_t^3} = \frac{T_m^2}{R_m^3}$$

ma sapendo che  $R_m = 1.52R_t$  è facile isolare  $T_m$ , ottenendo

$$T_m = T_t \cdot \left(\frac{R_m}{R_t}\right)^{\frac{3}{2}} = T_t \cdot (1.52)^{\frac{3}{2}} = 1.87 \text{ anni}$$

**Esercizio 2:** Si supponga che il disco da hockey abbia una velocità di modulo  $v_0$  nella posizione più bassa.

Si determini il valore minimo  $v_0$  che consente al disco di completare il suo percorso circolare.

Naturalmente la tensione del filo nel punto più alto è nulla. Per cui, affinché si abbia un moto circolare, è necessario che la componente diretta nel piano della forza di gravità sia la forza centripeta necessaria affinché la massa compia un moto circolare uniforme.

Pertanto appare evidente come si debba imporre che

$$F_{tx} = mg \cdot \sin(\theta) = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

da cui si evince come la velocità nel punto più in alto sia

$$v = \sqrt{rg \cdot \sin(\theta)}$$

E per determinare  $v_0$  è sufficiente applicare il teorema di conservazione dell'energia, da cui

$$K_i + \mathcal{U}_i = K_f + \mathcal{U}_f$$

e volendo determinare  $K_f$ , ossia l'energia cinetica al termine della rotazione della massa nel punto più basso si ottiene:

$$K_f = K_i + \mathcal{U}_i - \mathcal{U}_f \longrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot (2L \cdot \sin(\theta))$$

per cui, volendo isolare  $v_0$  si ottiene che

$$v_0 = \sqrt{5Lg \cdot \sin(\theta)}$$

Volendo determinare la tensione del filo nella posizione più bassa, sarà sufficiente imporre che la somma della forza di tensione e della componente nel piano della forza peso devono essere pari alla forza centripeta nel punto più basso, da cui:

$$F_{tx} + F_T = F_c \longrightarrow F_T + F_{tx} = -m \cdot \frac{v_0^2}{L}$$

essendo diretta verso il centro della circonferenza. Da ciò è immediato capire che

$$F_T = -m \cdot \frac{v_0^2}{L} - mg \cdot \sin(\theta) = -6mg \cdot \sin(\theta)$$



30 Marzo 2022

**Esercizio 1:** Naturalmente, se si devono percorrere 200 km ad una velocità di 120 km/h oppure ad una velocità di 135 km/h, si ha una variazione di tempo impiegato pari a:

$$\Delta t = \frac{200 \text{ km}}{120 \text{ km/h}} - \frac{200 \text{ km}}{135 \text{ km/h}} = 11 \text{ minuti}$$

L'aumento percentuale dal lavoro compiuto dal motore per viaggiare a due diverse velocità, considerando solamente la resistenza dell'aria, è dato semplicemente dal rapporto del quadrato delle due velocità.

Infatti è noto che la forza di resistenza dell'aria è proporzionale al quadrato della velocità, da cui:

$$F_r \propto v^2 \longrightarrow F_r = \beta \cdot v^2 \quad \text{in cui} \quad \beta = \frac{1}{2} AC_d \rho$$

Pertanto, il lavoro compiuto dalla forza di resistenza è dato da:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -F_r \cdot d$$

e per calcolare l'aumento relativo percentuale è da considerare il rapporto seguente:

$$\frac{|W_{135}| - |W_{120}|}{|W_{120}|} \cdot 100 = \frac{(135 \text{ km/h})^2 - (120 \text{ km/h})^2}{(120 \text{ km/h})^2} \cdot 100 = 26.7\%$$

**Esercizio 2:** La forza compiuta da una corda bungee segue una funzione non-lineare con la sua estensione:

$$F(x) = k_1 \cdot x + k_2 \cdot x^3$$

dove  $x$  è la lunghezza di estensione della corda, mentre  $k_1 = -204 \text{ N/m}$  e  $k_3 = 0.233 \text{ N/m}^3$ .

Si determini, allora, quanto lavoro è necessario (cioè quanto lavoro deve compiere una forza esterna) per estendere la corda di 15 m, come segue:

$$W_c = \int_0^{15} \vec{F} \cdot dx = \int_0^{15} (k_1 \cdot x + k_2 \cdot x^3) \cdot dx = \left[ \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{4} k_2 x^4 \right]_0^{15} \cong 20 \text{ kJ}$$

Inoltre, se 15 m è l'estensione massima per un'operazione sicura del bungee, si determini la massa massima che può avere una persona che salta legata a questa corda, trascurando la resistenza dell'aria.

Naturalmente, essendo in assenza di attriti, è possibile applicare il **teorema di conservazione dell'energia meccanica**, ovvero:

$$E_i = E_f \longrightarrow K_i + \mathcal{U}_{gi} + \mathcal{U}_{ei} = K_f + \mathcal{U}_{gf} + \mathcal{U}_{ef}$$

Ma naturalmente l'energia iniziale del sistema è pari a 0, mentre l'energia potenziale gravitazionale finale è negativa e l'energia potenziale elastica finale è naturalmente data dall'opposto del lavoro calcolato in precedenza, da cui:

$$0 = -mgh + W_c \longrightarrow m = \frac{W_c}{gh} = 136 \text{ kg}$$

**Esercizio 3:** Una cassetta portautensili con massa 15 kg è ferma sul ripiano orizzontale liscio di un autocarro. Quand l'autocarro si mette in moto da fermo con un'accelerazione di  $2.5 \text{ m/s}^2$ , la cassetta scivola con un coefficiente di attrito cinetico pari a 0.20.

Essa parte dalla quiete nella parte anteriore del pianale e scivola finché non urta contro la sponda posteriore del pianale e scivola finché non urta contro la sponda posteriore del pianale lungo 2.0 m. Si calcoli, allora, il lavoro compiuto dalla forza di attrito sulla cassetta durante la fase di moto. Naturalmente è ovvio calcolare la forza di attrito come segue:

$$F_k = F_N \cdot \mu_k = mg \cdot \mu_k$$

Il lavoro della forza di attrito, in tale sistema di riferimento, è positivo, in quanto bisogna considerare lo spostamento della cassetta sull'autocarro, per cui bisogna scomporre il moto in quello dell'autocarro e in quello della cassetta, da cui:

$$\begin{aligned}x_a(t) &= \frac{1}{2}at^2 \\x_c(t) &= \frac{1}{2}\frac{F_k}{m} \cdot t^2 + l = \frac{1}{2}\mu_k \cdot g \cdot t^2 + l\end{aligned}$$

La condizione di risoluzione prevede di determinare l'istante di tempo nel quale le due posizioni saranno identiche, prendendo come punto di riferimento la sponda dell'autocarro. Allora si ha che

$$x_a(t_1) = x_c(t_1) \longrightarrow \frac{1}{2}at_1^2 = l + \frac{1}{2}\mu_k g t_1^2 \longrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2l}{1 - \mu_k \cdot g}}$$

per cui, ora, ovviamente, è facile ottenere la distanza  $d$  compiuta dalla cassetta nel moto considerato.

Tale distanza è semplicemente data da

$$d = x_c(t_1) - l = \frac{1}{2}a \left( \frac{2l}{a - \mu_k \cdot g} \right) - l = \frac{l\mu_k g}{a - \mu_k \cdot g}$$

Per cui ora, il lavoro compiuto dalla forza di attrito sulla distanza  $d$  è:

**Esercizio 4:** Un bambino sta seduto in cima a un serbatoio cilindrico di raggio  $R$ . La superficie è molto liscia e il bambino compincia a scivolare con attrito trascurabile. Si determini il valore dell'angolo in corrispondenza del quale il bambino si stacca dalla superficie cilindrica.

Bisogna, quindi, determinare l'angolo  $\theta$  tale  $F_N = 0$ . Naturalmente, è possibile applicare a tale problema la seconda legge della dinamica, per cui

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_N + \vec{F}_t$$

È utile, in tal senso, impiegare due nuovi versori:  $\hat{r}$  in direzione radiale rispetto alla circonferenza, e  $\hat{\theta}$ , in direzione angolare rispetto al sistema. Da ciò si evince che:

$$\vec{a} = a_r \cdot \hat{r} + a_\theta \cdot \hat{\theta}$$

Pertanto, la componente radiale dell'accelerazione si calcola come segue:

$$m \cdot a_r = m \cdot \vec{a} \cdot \hat{r} = \vec{F}_N \cdot \hat{r} + \vec{F}_t \cdot \hat{r} = F_N - mg \cdot \cos(\theta)$$

Ma è noto che nel moto circolare uniforme, l'accelerazione entripeta, e quindi in questo caso radiale, è data

$$a_r = -\frac{v^2}{R}$$

Pertanto è possibile ottenere l'equazione seguente:

$$-m \cdot \frac{v^2}{R} = F_N - mg \cdot \cos(\theta)$$

Al fine di isolare  $v$  è sufficiente applicare il teorema di conservazione dell'energia, per cui si ottiene che:

$$E_i = E_f \longrightarrow K_i + \mathcal{U}_i = K_f + \mathcal{U}_f \longrightarrow K_f = \mathcal{U}_i - \mathcal{U}_f \longrightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = mgh$$

in cui è facile ottenere  $h = R - R \cdot \cos(\theta)$ . Da ciò si evince come

$$v^2 = 2gR \cdot (1 - \cos(\theta))$$

Per cui ora è facile isolare l'angolo  $\theta$  cercato, operando come segue:

$$2gR \cdot (1 - \cos(\theta)) = gR \cdot \cos(\theta) - \frac{F_N \cdot R}{m}$$

Per cui si ottiene come

$$\cos(\theta) = \frac{2}{3} \longrightarrow \theta = 48^\circ$$

4 Aprile 2022

**Osservazione:** Si consideri un blocco di massa  $m = 500$  g, appoggiato su un piano rimovibile. Il blocco è sospeso con una molla di costante  $k = 50$  N/m inizialmente a riposo, mostrata di seguito:

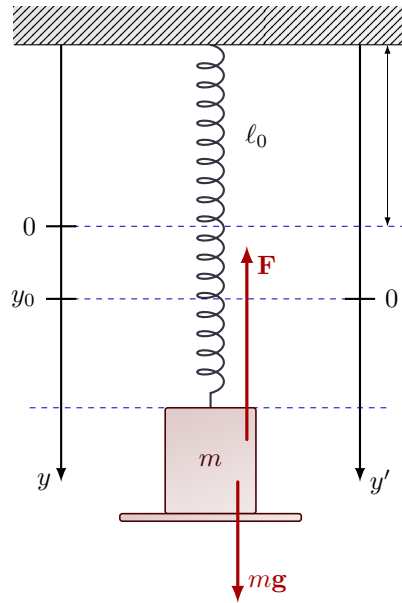


Figura 49: Fisica di una molla verticale

Il piano viene spostato seguendo due scenari diversi:

1. il piano è spostato lentamente verso il basso finché il blocco si stacca dal piano e rimane immobile sospeso alla molla.
2. il piano è rimosso velocemente, in modo da non impedire il moto del blocco.

Solamente nel secondo caso si ha conservazione dell'energia, giacché non si ha nessun intervento di una forza esterna.

Per determinare l'estensione della molla nel primo scenario, è sufficiente considerare il diagramma a corpo libero delle forze nella condizione di equilibrio, per cui la forza elastica eguaglia quella gravitazionale, ottenendo

$$-k\Delta y = -mg \longrightarrow \Delta y = \frac{mg}{k} = \frac{0.50 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2}{50 \text{ N/m}} = 9.8 \text{ cm}$$

Per determinare l'estensione massima della molla nel secondo caso, siccome si ha conservazione dell'energia meccanica, ossia  $\Delta E = 0$ , per cui

$$E_i = E_f \longrightarrow K_i + \mathcal{U}_i = K_f + \mathcal{U}_f$$

Ma naturalmente l'energia cinetica iniziale e finale è nulla, così come l'energia potenziale iniziale (data dalla somma di energia potenziale elastica e gravitazionale, fissando lo zero di riferimento in corrispondenza della posizione di equilibrio iniziale della molla).

Mentre l'energia potenziale finale è data dalla somma di energia potenziale gravitazionale ed energia potenziale elastica, da cui:

$$\mathcal{U}_{m,f} = -\mathcal{U}_{g,l} \longrightarrow \frac{1}{2}kh^2 = mgh \longrightarrow h = 2 \cdot \frac{mg}{k} \cong 20 \text{ cm}$$

che è esattamente il doppio del risultato ottenuto in precedenza; ciò non sorprende in quanto lasciare cadere una massa attaccata ad una molla, senza intervento di forze esterne, comporta l'innescare di un moto oscillatorio tale che i due estremi di oscillazione siano proprio a distanza doppia dal punto di equilibrio.

Se, invece, si considerano, al posto di una molla, due molle, è molto utile considerare il punto di

collegamento tra la prima e la seconda molla come un punto materiale di massa nulla, sul quale agiscono due forze uguali ed opposte; infatti, se si considera il punto di connessione tra le due molle, su di esso agisce la forza della prima molla verso l'alto e la forza della seconda molla verso il basso, ottenendo:

$$\vec{F}_{m_1} + \vec{F}_{m_2} = m\vec{a}$$

ma essendo la massa nulla, indipendentemente dall'istante di tempo, le due forze devono essere sempre uguali ed opposte:

$$\vec{F}_{m_1} + \vec{F}_{m_2} = 0 \longrightarrow k \cdot l_1 - k \cdot l_2 = 0 \longrightarrow l_1 = l_2$$

Applicando la 3<sup>a</sup> legge di Newton, poi, si capisce immediatamente come la forza  $\vec{F}_{m_2}$  che agisce sul punto materiale sia esattamente uguale e contraria alla forza che si contrappone alla forza peso della massa, per cui:

$$\vec{F}_t + \vec{F}_{m_2} = m\vec{a} \longrightarrow mg = k \cdot l_2 \longrightarrow l_2 = \frac{mg}{k}$$

per cui l'estensione totale finale è

$$l_1 + l_2 = 2 \cdot \frac{mg}{k} = \frac{mg}{\frac{k}{2}}$$

ossia equivalente ad un'unica molla avente costante di elasticità dimezzata.

Nel caso in cui le due molle da considerare siano in parallelo, allora è come se si considerasse una molla con costante di elasticità doppia; a partire dall'equazione seguente

$$\vec{F}_t + \vec{F}_{m_1} + \vec{F}_{m_2} = m\vec{a}$$

si evince come l'estensione sarà data da:

$$l = \frac{mg}{2k}$$

**Osservazione:** Si osservi che se si considerano delle molle in serie, allora si può sostituire a tali molle un'unica molla di costante elastica

$$k_{\text{serie}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots + \frac{1}{k_n}}$$

mentre se le molle sono poste in parallelo, allora la costante elastica della molla equivalente è

$$k_{\text{parallelo}} = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$$

## 7 Moto dei sistemi

Fino a questo momento, ogni corpo è sempre stato approssimato ad un punto materiale; tuttavia, i **corpi reali** presentano

- una **distribuzione di massa**;
- più **punti di applicazione delle forze**;
- delle **forze interne** (tra le parti del medesimo corpo).

Ciò che, naturalmente, presenta un importante significato fisico è considerare più masse insieme e le forze che si applicano su ogni elemento di massa, andando così a studiare un **sistema di masse**.

### 7.1 Centro di massa

Di seguito si espone il significato fisico di **centro di massa**:

#### CENTRO DI MASSA

Il **centro di massa** è un vettore posizione che viene definito come una **media pesata dei vettori posizione di ogni massa** (tale per cui si può considerare come se tutta la massa sia concentrata in tale punto):

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

quindi, essendo  $M = \sum_i m_i$ , il vettore posizione del centro di massa è il rapporto tra il vettore posizione di ogni massa e la massa totale del sistema, ovvero

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \sum_i \frac{m_i}{M} \cdot \vec{r}_i$$

**Esempio:** Si considerino le due masse seguenti:

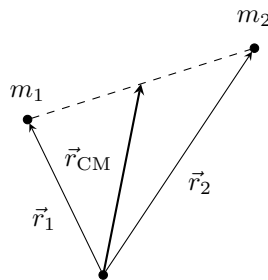


Figura 50: Centro di massa tra due masse

In cui, ovviamente, si ha che

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

in cui è facile capire come, a seconda dell'entità delle due masse  $m_1$  e  $m_2$ , si possono formulare le seguenti osservazioni:

- se  $m_1 \gg m_2$ , allora  $\vec{r}_{\text{CM}} \rightarrow \vec{r}_1$
- se  $m_1 \ll m_2$ , allora  $\vec{r}_{\text{CM}} \rightarrow \vec{r}_2$

Ovviamente, gli oggetti reali, ossia i corpi estesi, sono costituiti da un sistema continuo di punti materiali, per cui è necessario fornire una definizione di centro di massa anche per i corpi estesi, da cui

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \sum_i \frac{\Delta m_i}{M} \cdot \vec{r}_i = \frac{1}{M} \cdot \int \vec{r} \cdot dm$$

in cui si sommano i contributi di ogni porzione di massa  $\Delta m$  tendente all'infinitesimale  $\Delta m \rightarrow dm$ . Inoltre, impiegando il concetto di **densità**, ossia la massa per unità di volume

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{ossia} \quad \rho = \frac{dm}{dV}$$

essa può essere anche definita in funzione dello spazio, ottenendo  $\rho(\vec{r})$ , ossia una **densità variabile** nello spazio. Da ciò si evince che

$$\rho = \frac{dm}{dV} \longrightarrow dm = \rho \cdot dV$$

Avendo a disposizione tale concetto si ottiene che il calcolo del centro di massa diviene

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \int \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) \cdot dV$$

da cui si può evincere come

$$M = \int \rho(\vec{r}) \cdot dV$$

**Esempio:** Si consideri cilindro di lunghezza  $l$  e di massa  $M$ , avente una densità uniforme. Allora è evidente come il centro massa sia proprio al centro della bacchetta, in corrispondenza di  $\frac{l}{2}$ :

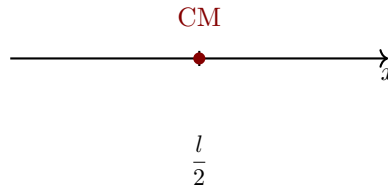


Figura 51: Centro di massa di una bacchetta

Infatti si ha che

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \int \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) \cdot dV$$

Essendo questa una equazione vettoriale, è possibile considerarne la sola componente orizzontale (supponendo che la bacchetta sia così fine che il suo spessore sia trascurabile), ottenendo

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \int x \cdot \rho(\vec{r}) \cdot dV$$

Definendo con  $A$  l'area della sezione trasversale della bacchetta e considerando una porzione  $\Delta x$  di bacchetta, è ovvio che il volume di tale porzione sarà dato da  $\Delta V = \Delta x \cdot A$  (in quanto il volume di tutta la bacchetta è  $V = l \cdot A$ ). Inoltre, **essendo la densità uniforme**, si ha che  $\rho = \frac{M}{V}$ , ma per quanto appena osservato si evince che:

$$\rho \cdot \Delta V = \frac{M}{lA} \cdot \Delta x \cdot A = \frac{M}{l} \cdot \Delta x$$

in cui  $\frac{M}{l}$  prende il nome di **densità lineare**. Considerando una porzione infinitesimale di bacchetta, si ottiene che

$$\rho(\vec{r}) \cdot dV = \frac{M}{l} dx$$

per cui l'integrale visto in partenza diviene

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \int x \cdot \rho(\vec{r}) \cdot dV = \frac{1}{M} \cdot \int x \cdot \frac{M}{l} dx = \frac{1}{l} \cdot \int_0^l x \cdot dx = \frac{1}{l} \cdot \left( \frac{1}{2} l^2 \right) = \frac{l}{2}$$

come ci si aspettava; si osservi, inoltre, come tale risultato sia totalmente indipendente dal sistema di coordinate assunto.

**Osservazione:** Si consideri una distribuzione di masse (approssimate a dei punti materiali) non necessariamente uniforme (per esempio, potrebbe accadere che vi sia uno squilibrio di distribuzione di masse tra due parti distinte di uno stesso corpo); allora, è possibile calcolare il centro di massa di differenti parti dello stesso corpo e poi sommarle fra loro, ovvero

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \sum_i \frac{m_i}{M} \cdot \vec{r}_i = \sum_{i \in A} \frac{m_i}{M} \cdot \vec{r}_i + \sum_{i \in B} \frac{m_i}{M} \cdot \vec{r}_i$$

ma essendo, ovviamente

$$M_A = \sum_{i \in A} m_i \quad \text{e} \quad M_B = \sum_{i \in B} m_i$$

si può scrivere che

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \sum_{i \in A} \frac{m_i}{M} \cdot \vec{r}_i + \sum_{i \in B} \frac{m_i}{M} \cdot \vec{r}_i = \frac{1}{M} \cdot M_A \cdot \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{M_A} \cdot \vec{r}_i}_{\vec{r}_{\text{CM}_A}} + \frac{1}{M} \cdot M_B \cdot \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{M_B} \cdot \vec{r}_i}_{\vec{r}_{\text{CM}_B}}$$

pertanto si ottiene che, essendo  $M = M_A + M_B$ :

$$\boxed{\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{M_A \cdot \vec{r}_{\text{CM}_A} + M_B \cdot \vec{r}_{\text{CM}_B}}{M}}$$

ciò significa che se si riesce a calcolare il centro di massa di singoli elementi individuali di un sistema, allora il centro di massa del sistema non è altro che la media pesata, rispetto alle masse di ciascuno, di tali centri di massa.

**Esempio:** Si consideri un disco di densità uniforme con un buco di forma circolare adiacente alla circonferenza esterna, mostrato di seguito:

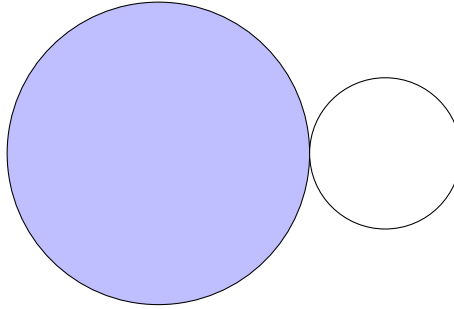


Figura 52: Disco con foro circolare

Al fine di determinare il centro di massa di tale oggetto, si dovrebbe procedere a calcolare l'integrale della figura, andando ad escludere, ovviamente, i punti del foro.

Tuttavia, con il risultato precedentemente ottenuto diviene molto più semplice; è ovvio che il centro di massa di una circonferenza è collocato nel centro della stessa, per semplice simmetria, si può considerare il concetto di massa negativa, per cui il centro di massa del disco forato si può ottenere come differenza pesata del centro di massa del disco pieno meno il centro di massa del foro, avente, appunto, massa negativa.

Ovviamente, il centro di massa del disco forato sarà collocato sull'asse passante per i due centri dei due cerchi raffigurati in Figura 52, per cui è sufficiente considerare solamente la componente  $x$  del centro massa

$$x_{\text{CM}} = \frac{M_D \cdot x_{\text{CM}_D} + M_F \cdot x_{\text{CM}_F}}{M_D + M_F}$$

in cui, per quanto detto,  $M_F < 0$ . Pertanto, se  $x_{\text{CM}_D} = 0$  e  $x_{\text{CM}_F} = \frac{R}{2}$  (ponendo il raggio del disco più grande pari a  $R$ ) e la densità  $\rho$  è uniforme, si ha che

$$M_D = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi R^2 \cdot h \quad \text{e} \quad M_F = -\rho \cdot V = -\frac{1}{4} \cdot \rho \cdot \pi R^2 \cdot h$$

ciò significa che

$$x_{\text{CM}} = \frac{0 \cdot M_D + \frac{R}{2} \cdot M_F}{M_D + M_F} = \frac{R}{2} \cdot \frac{M_D}{M_D + M_F} = -\frac{R}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4} \rho \cdot \pi R^2 \cdot h}{\frac{3}{4} \rho \cdot \pi R^2 \cdot h} = -\frac{R}{6}$$



5 Aprile 2022

**Esempio:** Si consideri la seguente figura:

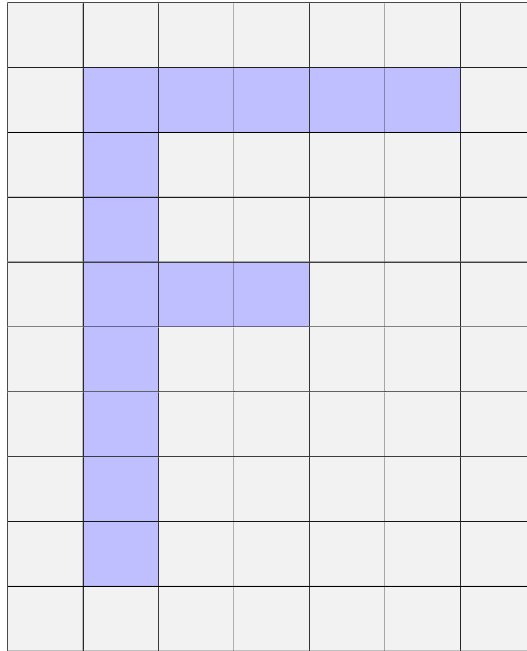


Figura 53: Oggetto di cui calcolare il centro di massa

Al fine di calcolarne il centro di massa, è utile scomporre la stessa in tre oggetti di cui è facile determinare il centro di massa, come mostrato di seguito:

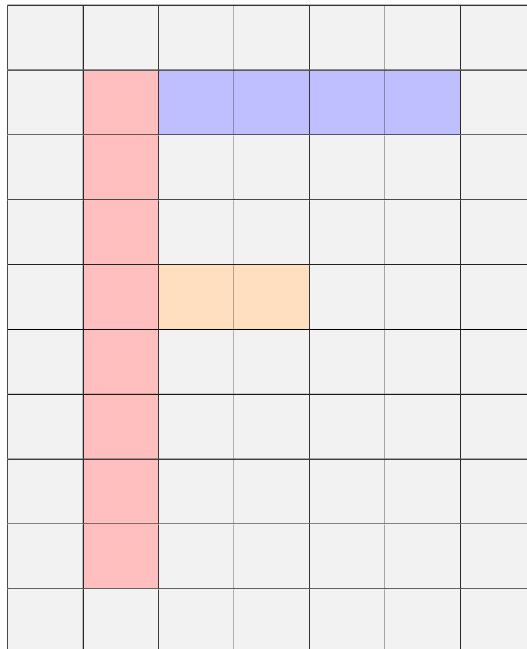


Figura 54: Oggetto di cui calcolare il centro di massa diviso in parti

Ecco che in questo caso è facile capire il centro di massa di ciascuna delle figure:

- Centro di massa **blu**:  $r_b = (3, 7.5)$ ;
- Centro di massa **rosso**:  $r_r = (0.5, 4)$ ;

- Centro di massa **arancione**:  $r_a = (2, 4.5)$ ;

Inoltre, sapendo che  $m_b = 4$ ,  $m_r = 8$  e  $m_a = 2$ , si possono facilmente determinare le coordinate del centro di massa:

$$x_{\text{CM}} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + x_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{4 \cdot 3 + 8 \cdot 0.5 + 2 \cdot 2}{4 + 8 + 2} = \frac{20}{14} \cong 1.4$$

e

$$y_{\text{CM}} = \frac{y_1 \cdot m_1 + y_2 \cdot m_2 + y_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{4 \cdot 7.5 + 8 \cdot 4 + 2 \cdot 4.5}{4 + 8 + 2} = \frac{71}{14} \cong 5$$

## 7.2 Moto del centro di massa

Volendo descrivere il moto del centro di massa, si considera la definizione dello stesso, ovvero

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i \vec{r}_i \cdot m_i}{M}$$

e volendo conoscere la velocità del centro di massa, è sufficiente considerare la derivata rispetto al tempo di tale vettore, ottenendo:

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \cdot m_i = \frac{1}{M} \cdot \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i$$

ovvero la media pesata delle velocità di ciascuna massa. Analogamente per l'accelerazione si ottiene

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \cdot m_i = \frac{1}{M} \cdot \sum_i m_i \cdot \vec{a}_i$$

ovvero la media pesata delle accelerazioni di ciascuna massa.

## 7.3 Dinamica del centro di massa

Si consideri un punto materiale  $i$  all'interno di un assieme; allora, per la seconda legge di Newton, la forza che agisce su tale punto è la risultante delle forze applicate sul punto stesso, ovvero

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{a,i} + \vec{F}_{b,i} + \vec{F}_{c,i} + \dots$$

A tal proposito, diviene utile effettuare una significativa distinzione tra **forze interne al sistema** e **forze esterne al sistema**:

- Le forze esterne al sistema si denotano con

$$\vec{F}_{\text{ext},i}$$

ovvero la risultante di tutte le forze esterne che si applicano sulla massa  $m_i$  (approssimata ad un punto materiale);

- Le forze interne al sistema, invece, dal momento che originano da altri punti del sistema, si denotano con

$$\vec{F}_{j,i}$$

ovvero la forza causata dal punto  $j$  sul punto  $i$ , ossia la massa  $m_i$  (approssimata ad un punto materiale);

Ciò permette di considerare che:

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_{\text{ext},i} + \sum_j \vec{F}_{j,i}$$

**Osservazione:** Si osservi, allora, che volendo determinare l'accelerazione del centro di massa si ottiene

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \sum_i m_i \cdot \vec{a}_i = \frac{1}{M} \cdot \sum_i \left( \vec{F}_{\text{ext},i} + \sum_j \vec{F}_{j,i} \right) = \frac{1}{M} \cdot \left( \sum_i \vec{F}_{\text{ext},i} + \sum_i \sum_j \vec{F}_{i,j} \right)$$

Ma applicando la 3<sup>a</sup> legge della dinamica, è immediato osservare come:

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{i,j} = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{4,1} + \dots + \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{3,2} + \vec{F}_{4,2} + \dots = 0$$

opposti

Pertanto, essendo tale somma nulla, in quanto  $F_{i,j} = -F_{j,i}, \forall i \neq j$ , si ottiene semplicemente che

$$M \cdot \vec{a}_{\text{CM}} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext},i}$$

ovvero la forza risultante applicata al centro di massa di un corpo dipende unicamente dalle forze esterne e non da quelle interne: ciò giustifica perfettamente l'approssimazione di un corpo ad un punto materiale (**se questo è il centro di massa** del corpo stesso) in quanto il centro di massa segue la medesima fisica, ovvero segue la 2<sup>a</sup> legge della dinamica come se fosse un punto materiale; in altre parole, **il moto del centro di massa è determinato solamente dalle forze esterne ed è indipendente dal moto relativo delle singole masse.**

**Osservazione:** Nel caso di un corpo che viene lanciato in aria e lasciato cadere, trascurando l'attrito dell'aria, si ha che:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M \cdot \vec{a}_{\text{CM}} = M \cdot \vec{g} = \sum_i m_i \cdot \vec{g}$$

Inoltre, se la somma delle forze esterne è nulla, ossia  $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$ , allora ciò significa che l'accelerazione del centro di massa è nulla ( $\vec{a}_{\text{CM}} = 0$ ) e quindi la velocità  $\vec{v}_{\text{CM}} = \text{costante}$  (per cui se si considera un sistema inizialmente fermo e poi avente una certa accelerazione che non dipende da forze esterne, come nel caso di una molla, il centro di massa continua a rimanere lo stesso, nella medesima posizione).

## 7.4 Conservazione della quantità di moto

Di seguito si espone il **principio di conservazione della quantità di moto**:

### CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Dal momento che

$$\vec{F}_{\text{ext}} = 0 = \sum_i m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_i m_i \cdot \frac{d}{dt} \cdot \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \cdot \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i$$

Pertanto, siccome la derivata nel tempo della quantità considerata è nulla, allora tale quantità viene conservata, ovvero

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = 0 \longrightarrow \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = \text{costante}$$

Ciò porta a definire il concetto di **quantità di moto** (dall'inglese *momentum*):

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

per cui se la **risultante delle forze su un sistema è nulla**, allora la **quantità di moto del sistema si conserva**.

**Osservazione:** La 2<sup>a</sup> legge di Newton, originariamente come il fisico l’aveva definita, recitava:

*“Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza motrice impressa, ed avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza è stata impressa.”*

in cui è evidente come Newton non parlasse espressamente di accelerazione proporzionale alla forza motrice impressa, ma proprio di *cambiamento di moto*, intendendo, più propriamente, la derivata nel tempo della quantità di moto. Ecco che allora la 2<sup>a</sup> legge di Newton può essere, reinterpretata alla luce della definizione di quantità di moto come segue

$$\Delta \vec{p} \propto \vec{F}$$

che ha perfettamente senso in quanto è noto che

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

per cui la 2<sup>a</sup> legge della dinamica diviene

$$F = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

che può riguardare tanto la **derivata della velocità** nel tempo quanto la **derivata della massa** nel tempo (come nel caso del moto dei razzi): ciò garantisce una maggiore generalizzazione del secondo principio della dinamica.

7 Aprile 2022

Com'è noto, il centro di massa è così definito:

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \sum_i \vec{r} \cdot m_i = \int \vec{r} \cdot g(\vec{r}) \cdot dV$$

Naturalmente, derivando nel tempo tale quantità si ottiene

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \sum_i \vec{v}_i \cdot m_i$$

e derivando nuovamente

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \sum_i \vec{a}_i \cdot m_i$$

Inoltre, è noto che la dinamica del centro di massa è totalmente indipendente dalle forze interne, ovvero:

$$M \cdot \vec{a}_{\text{CM}} = \sum F_{\text{ext}}$$

Inoltre, interpretando anche la seconda equazione come segue:

$$M \cdot \vec{v}_{\text{CM}} = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i$$

in cui, essendo  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$  la **quantità di moto**, si ha che:

$$\boxed{\vec{p}_{\text{CM}} = \sum_i \vec{p}_i}$$

Pertanto, se

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$$

allora si ha che la quantità di moto del centro di massa si conserva, ovvero  $\vec{p}_{\text{CM}}$  è costante: tale risultato prende il nome di **conservazione della quantità di moto**.

**Osservazione:** Si osservi che considerando solamente la Luna e il suo moto di rivoluzione attorno alla Terra, giacché sulla Luna agisce la forza di attrazione gravitazionale, essa non conserva la sua quantità di moto; tuttavia, se si considera il sistema Terra-Luna (ignorando anche il Sole), allora la forza di gravità è una forza interna, per cui il centro di massa conserva la propria quantità di moto e quindi si muove a velocità costante.

## 7.5 Seconda legge di Newton reinterpretata

Si considerino due masse  $m_A = m$  e  $m_B = 3m$  collegate fra di loro da una molla:

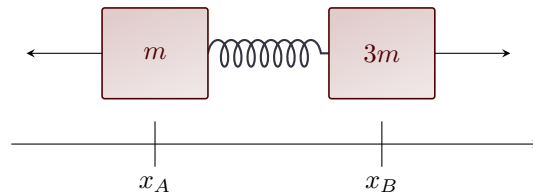


Figura 55: Masse collegate da una molla

Inizialmente, la molla compressa è a riposo, per cui la quantità di moto iniziale è nulla

$$\vec{p}_i = 0$$

Successivamente, la molla, estendendosi, innesca il moto delle due masse, ma la quantità di moto rimane la stessa, ovvero

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i = 0$$

dal momento che su tale sistema non agiscono forze esterne (o meglio, la risultante delle forze esterne impresse, forza di gravità e forza normale, è nulla)

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$$

Pertanto, a qualsiasi istante di tempo  $t$  si ha che

$$\vec{p} = 0 = \vec{p}_A + \vec{p}_B = m_A \cdot \vec{v}_A + m_B \cdot \vec{v}_B = m \cdot \vec{v}_A + 3m \cdot \vec{v}_B \longrightarrow \vec{v}_A = -3\vec{v}_B$$

**Esercizio:** Un nucleo di radio ( $^{226}\text{Ra}$ ) inizialmente a riposo si decompone in un nucleo di radon ( $^{222}\text{Rn}$ ) e una particella alfa (nucleo di  $^4\text{He}$ ). Se l'energia cinetica della particella alfa è di  $6.72 \times 10^{-13} \text{ J}$ , si determini quali sono il modulo della velocità di rinculo dell'atomo di radon e la sua energia cinetica.

Essendo il sistema inizialmente a riposo è evidente come la quantità di moto iniziale sia nulla, ovvero  $\vec{p}_i = 0$ ; applicando, poi, il principio di conservazione della quantità di moto, si ha che  $\vec{p}_i = \vec{p}_f = 0$ , dal momento che

$$\sum F_{\text{ext}} = 0$$

Ma dai dati del problema è evidente come

$$\vec{p}_f = \vec{p}_{\text{Rn}} + \vec{p}_\alpha = 0 \longrightarrow \vec{p}_{\text{Rn}} = -\vec{p}_\alpha$$

Inoltre, è noto che

$$K_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{m_\alpha} p_\alpha^2$$

Dovendo determinare la quantità di moto  $p_\alpha$  si ottiene che

$$|p_\alpha| = \sqrt{2m_\alpha K_\alpha} = |p_{\text{Rn}}|$$

per cui

$$v_{\text{Rn}} = \frac{p_{\text{Rn}}}{m_{\text{Rn}}} = \frac{1}{m_{\text{Rn}}} \cdot \sqrt{2m_\alpha K_\alpha}$$

e per determinare l'energia cinetica si esegue il calcolo seguente

$$K_{\text{Rn}} = \frac{1}{2} m_{\text{Rn}} \cdot \left( \frac{1}{m_{\text{Rn}}} \cdot \sqrt{2m_\alpha K_\alpha} \right)^2 = \frac{m_\alpha}{m_{\text{Rn}}} \cdot K_\alpha$$

che è un risultato fondamentale da considerare, in quanto è stato ottenuto senza sapere nel dettaglio ciò che è successo tra l'istante iniziale e l'istante finale presi in esame.

**Esercizio:** Una ragazza di massa 45 kg si tuffa da una barca di massa 1000 kg, allontanandosi da essa con una velocità orizzontale di 5.2 m/s. Ammettendo che la barca fosse inizialmente in quiete e libera di muoversi nell'acqua, si determini con quale velocità essa si mette in movimento.

Dal momento che la quantità di moto è un vettore, si può considerare solamente la conservazione in una direzione (come nel caso della caduta libera, in cui si ha conservazione nel movimento orizzontale, ma non verticale, a causa della forza di gravità), a differenza dell'energia, che o si conserva o non si conserva. Ciò che è utile in questo caso è considerare la conservazione della quantità di moto orizzontale, per cui:

$$\vec{p}_i = 0 \quad \text{e} \quad \vec{p}_f = \vec{p}_r + \vec{p}_b = 0$$

ovvero la quantità di moto finale è data dalla somma della quantità di moto della ragazza e della barca. Dal momento che  $p_{i_x} = p_{f_x} = 0$  si può facilmente capire come

$$p_{r_x} = -p_{b_x} \longrightarrow m_r v_{r_x} = -m_b v_{b_x}$$

In questo caso, però, viene fornita una **velocità relativa**, ossia la velocità misurata da un sistema di riferimento in cui uno dei due corpi è a riposo, ovvero, in generale

$$\boxed{\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_B - \vec{v}_A}$$

si può considerare  $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_r - \vec{v}_b$ , da cui si evince come

$$\begin{cases} m_r v_{r_x} = -m_b v_{b_x} \\ \vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_r - \vec{v}_b \end{cases}$$

Da cui si evince come  $v_{r_x} = -\frac{m_b}{m_r} \cdot v_{b_x}$  e impiegando tale risultato si ottiene che la velocità relativa diviene

$$v_{\text{rel}_x} = -\frac{m_b}{m_r} \cdot v_{b_x} - v_{b_x} = -v_{b_x} \cdot \left(1 + \frac{m_b}{m_r}\right)$$

Pertanto, ora, si possono determinare sia la velocità della barca che quella della ragazza:

$$v_{b_x} = -\frac{v_{\text{rel}_x} \cdot m_r}{m_r + m_b} \quad \text{e} \quad v_{r_x} = \frac{v_{\text{rel}_x} \cdot m_b}{m_r + m_b}$$

## 7.6 Impulso

Si consideri un uovo lasciato cadere prima su un materasso e poi su un piano rigido: nel primo caso l'uovo non si rompe, mentre nel secondo si rompe, nonostante la quantità di moto iniziale e finale (prima e dopo l'impatto) nei due casi sia la stessa; la ragione fisica di tale fenomeno sta nel concetto di **impulso**: nel primo caso la forza che rallenta la caduta del corpo agisce in un tempo superiore rispetto al secondo caso.

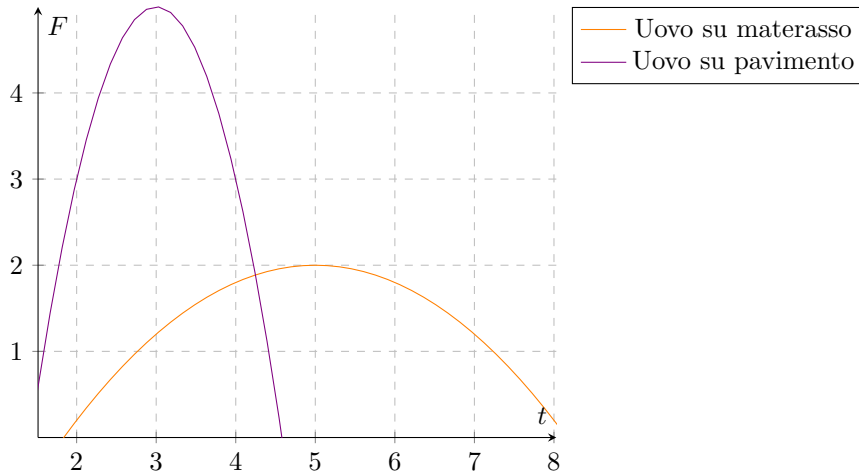
Infatti, dalla seconda legge di Newton generalizzata si ha che:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Procedendo all'integrazione di ambo le parti si ottiene che:

$$\int \vec{F} \cdot dt = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$$

Ciò permette di capire come la variazione della quantità di moto sia proprio l'area sottesa al grafico forza-tempo: nonostante nei due casi l'area sia la stessa, il picco della forza è necessariamente maggiore nel secondo caso che nel primo:



È stato, così facendo, definito implicitamente il **concetto di impulso**:

$$\vec{j} = \Delta\vec{p} = \int \vec{F} \cdot dt$$

## 7.7 Urti

Il concetto di urto risulta fondamentale nello studio e nella comprensione della fisica moderna: tutta la fisica moderna può essere interpretata come un'infinità di interazioni, come una sequenza di urti, sia a livello microscopico che macroscopico:

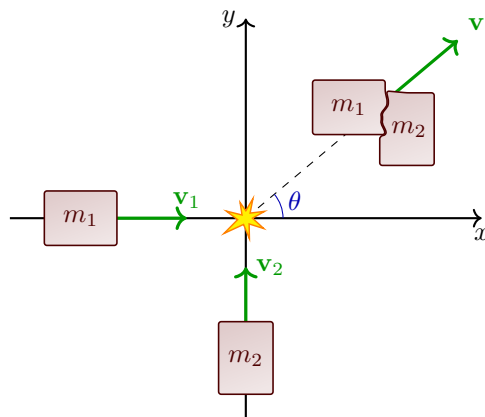


Figura 56: Esempio di urto

**Osservazione:** Si osservi che, dal momento che gli urti avvengono in un intervallo di tempo pressoché infinitesimo, si può considerare che sul sistema non agiscano forze esterne.

Quindi, dal momento che il **tempo di interazione** è estremamente corto rispetto all'effetto delle forze esterne, negli urti la **quantità di moto è sempre conservata**.

Alla luce di ciò, si distinguono tre categorie di urto:

1. **Urto elastico:** in cui si ha **conservazione dell'energia cinetica**;
2. **Urto anelastico:** i corpi interagenti rimangono attaccati dopo la collisione, per cui presenteranno la **stessa velocità finale** (si potrebbe dire che tutta l'energia viene dispersa in questo caso);
3. **Urto parzialmente anelastico:** in tale urto (una via di mezzo tra i precedenti) parte dell'energia è dispersa;

**Osservazione 1:** Per lo studio degli urti, è fondamentale collocarsi nel centro di massa del sistema: infatti, il risultato precedentemente trovato afferma che se la risultante delle forze esterne è nulla, allora l'accelerazione del centro di massa è nulla, e quindi esso si muove a velocità costante: adottando tale sistema di riferimento, siccome il centro di massa non si muove né prima né dopo l'urto, la quantità di moto (essendo conservata per ipotesi) del sistema prima e dopo l'urto è sempre nulla.

**Osservazione 2:** Naturalmente, si può cambiare la quantità di moto di una particella mentre la sua energia cinetica rimane la stessa: infatti, la quantità di moto è un vettore, per cui anche cambiando la direzione della velocità, pur mantenendo inalterato il suo modulo, si ha cambiamento di quantità di moto, ma non di energia cinetica; tuttavia, non può essere il contrario.

Ovviamente, affinché un urto sia definibile elastico, giacché la quantità di moto, negli urti, si conserva sempre, bisogna dimostrare che l'energia cinetica si conserva, ossia essa permane la stessa prima e dopo l'urto.



**Esercizio:** Si consideri l'urto seguente

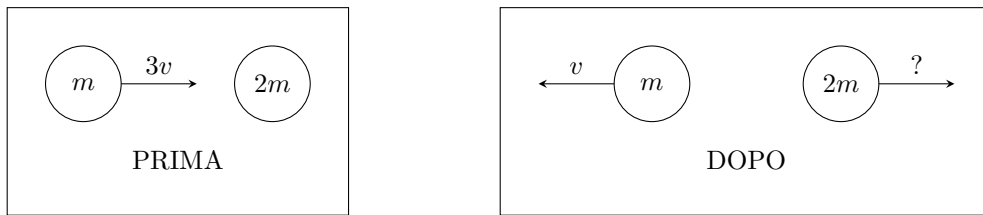


Figura 57: Esempio di urto

Al fine di verificare la natura di tale urto, è sufficiente determinare la velocità della massa  $2m$  dopo l'urto. Applicando la conservazione della quantità di moto, è facile capire come:

$$p_{i_x} = p_{f_x} \longrightarrow 3mv = -mv + 2m \cdot x \longrightarrow x = \frac{4mv}{2m} = 2v$$

Alla luce di ciò, appare evidente come

$$K_i = K_f \longrightarrow \frac{9}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 4mv^2$$

per cui l'urto è elastico.

11 Aprile 2022

### 7.7.1 Urti tra due corpi

Si considerino due corpi che collidono, come mostrato di seguito:

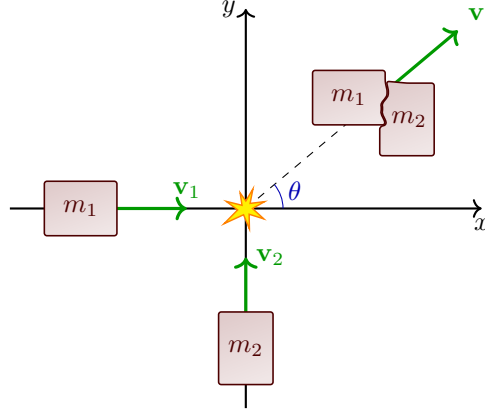


Figura 58: Esempio di urto

Allora, in questo caso, la massa  $m_1$  presenta velocità iniziale  $\vec{V}_1$ , mentre la massa  $m_2$  si muove a velocità  $\vec{V}_2$ : taluno è un problema generale che viene studiato tramite un sistema di riferimento esterno, di un osservatore.

Questo sistema di riferimento, tuttavia, non risulta essere pratico nello studio, per cui si può adottare un sistema di riferimento inerziale che prende in considerazione il centro di massa del sistema, la cui velocità, ovviamente, è data da

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \cdot \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = \frac{m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \cdot \vec{V}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{P}_1 + \vec{P}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{P}_{\text{tot}}}{m_{\text{tot}}}$$

Pertanto, se ora si considera il sistema di riferimento dato dal centro di massa, il quale si sposta con velocità  $\vec{v}_{\text{CM}}$ , le velocità delle due masse vengono così ricalcolate

$$\boxed{\vec{v}_1 = \vec{V}_1 - \vec{v}_{\text{CM}}} \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{v}_2 = \vec{V}_2 - \vec{v}_{\text{CM}}}$$

cosicchè si ha che  $\vec{p}_{\text{tot}} = 0$ , infatti:

$$\vec{p}_{\text{tot}} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{V}_1 - m_1 \vec{v}_{\text{CM}} + m_2 \vec{V}_2 - m_2 \vec{v}_{\text{CM}}$$

È sufficiente, ora, calcolare il minimo comune denominatore e si ottiene

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \frac{m_1^2 \vec{V}_1 + m_1 m_2 \vec{V}_2 + m_1 m_2 \vec{V}_1 + m_2^2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1^2 \vec{V}_1 + m_1 m_2 \vec{V}_2 + m_1 m_2 \vec{V}_1 + m_2^2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

Tale risultato è fondamentale: infatti, siccome la durata dell'urto è pressoché infinitesima, la quantità di moto totale si conserva, per cui  $\vec{p}_{\text{tot},i} = \vec{p}_{\text{tot},f} = 0$ .

Ciò significa che nel sistema di riferimento centro massa, per qualsiasi tipologia di urto

$$\boxed{\vec{p}_{\text{tot}} = 0 \longrightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2}$$

ovvero le quantità di moto delle due masse che si urtano sono uguali ed opposte; tuttavia ciò non equivale a dire che le velocità delle due masse siano uguali e opposte: infatti, le due masse potrebbero essere diverse, per cui anche le loro velocità sarebbero proporzionate.

Applicando la conservazione della quantità di moto, si evince come

$$\boxed{\vec{p}_{\text{tot},i} = \vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = 0 = \vec{p}_{\text{tot},f} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}}$$

che è una proprietà, per quanto già esposto, valida per qualsiasi urto. Tuttavia, se ora si considera l'energia cinetica, si ottiene che

$$K_i = \frac{1}{2}m_1v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,i}^2 = \frac{1}{2m_1}p_{1,i}^2 + \frac{1}{2m_2}p_{2,i}^2$$

in quanto è sempre verificata l'identità seguente

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Ma essendo le quantità di moto delle due particelle **uguali in modulo** (ovvero  $|p_{1,i}| = |p_{2,i}|$ ), allora anche i loro quadrati saranno uguali, per cui

$$\frac{1}{2m_1}p_{1,i}^2 + \frac{1}{2m_2}p_{2,i}^2 = p_{1,i}^2 \cdot \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right)$$

Analogamente, per quanto concerne l'energia cinetica finale si ottiene che

$$K_f = \frac{1}{2m_1}p_{1,f}^2 + \frac{1}{2m_2}p_{2,f}^2 = p_{1,f}^2 \cdot \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right)$$

Ciò, tuttavia, non significa che l'energia cinetica si conserva sempre (è possibile che vi sia dispersione di energia, ma anche un'aggiunta di energia, come nel caso di un'esplosione, che è comunque una forza interna che non produce un'accelerazione del centro di massa che, quindi, permane suo moto a velocità costante  $\vec{v}_{CM}$  e garantisce sempre la conservazione della quantità di moto).

### 7.7.2 Urti elastici

Nel caso di urti elastici, si ha **conservazione di energia cinetica** oltre che di quantità di moto, per cui

$$K_i = p_{1,i}^2 \cdot \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) = K_f = p_{1,f}^2 \cdot \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) \longrightarrow |p_i| = |p_f|$$

Ciò significa che

$$\boxed{|v_{1,i}| = \frac{|p_i|}{m_1} = \frac{|p_f|}{m_1} = |v_{1,f}|} \quad \text{e} \quad \boxed{|v_{2,i}| = \frac{|p_i|}{m_2} = \frac{|p_f|}{m_2} = |v_{2,f}|}$$

**Osservazione:** Pertanto, nel caso di urti elastici, le due masse che si scontrano conservano la propria velocità prima e dopo l'urto (in quanto quantità di moto ed energia cinetica sono conservati), per cui:

Conservazione dell'energia cinetica	Conservazione della quantità di moto
$ v_{1,i}  =  v_{1,f} $	$ p_{1,i}  =  p_{1,f} $
$ v_{2,i}  =  v_{2,f} $	$ p_{2,i}  =  p_{2,f} $

Tabella 1: Conclusioni sugli urti elastici

Ovviamente, considerando come sistema di riferimento il centro massa, per tutti gli urti è possibile affermare che

$$\vec{p}_{1,i} = -\vec{p}_{2,i} \quad \text{e} \quad \vec{p}_{1,f} = -\vec{p}_{2,f}$$

in forza della conservazione della quantità di moto.

Tuttavia, solamente nel caso degli urti elastici si ha che

$$|p_{1,i}| = |p_{1,f}| \quad \text{e} \quad |p_{2,i}| = |p_{2,f}|$$

in forza della conservazione dell'energia cinetica.

Non solo, ma siccome le velocità iniziali e finali delle due particelle presentano la stessa direzione, ma verso opposto (in quanto è noto che, nel centro di riferimento centro massa,  $\vec{p}_{1,i} = -\vec{p}_{2,i}$  e  $\vec{p}_{1,f} = -\vec{p}_{2,f}$ ), si può affermare, in generale che

$$|\vec{v}_{\text{rel}}| = |\vec{v}_{1,i} - \vec{v}_{2,i}| = |v_{1,i}| + |v_{2,i}|$$

ma sapendo che anche l'energia cinetica è conservata, si può scrivere che

$$|\vec{v}_{\text{rel}}| = |v_{1,f}| + |v_{2,f}| = |\vec{v}_{1,f} - \vec{v}_{2,f}|$$

e tale risultato diviene generale, valido per gli urti elastici indipendentemente dal sistema di riferimento adottato (ricordando come si ottengono  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  da  $\vec{V}_1$  e da  $\vec{V}_2$ ): il modulo della velocità relativa di avvicinamento è uguale al modulo della velocità relativa di separazione.

## 7.8 Urto in 1D - Elastico

Nel caso di urto in 1D, si può presentare solamente la situazione seguente:



Figura 59: Urto elastico in 1D

In cui, ovviamente, i vettori quantità di moto iniziali (così come quelli finali) delle due masse sono uguali ed opposti, proprietà sempre vera per qualsiasi urto osservato dal sistema di riferimento centro massa. Ma nel caso di urto elastico si ha anche che per ogni massa la quantità di moto iniziale e finale è uguale in modulo; ciò significa che, essendo in 1D, deve essere necessariamente che

$$\vec{p}_{1,i} = -\vec{p}_{1,f} \quad \text{e} \quad \vec{p}_{2,i} = -\vec{p}_{2,f} \quad \longrightarrow \quad \vec{v}_{1,i} = -\vec{v}_{1,f} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{2,i} = -\vec{v}_{2,f}$$

Passando, però, ad un nuovo sistema di riferimento e non più a quello del centro di massa, si ottiene che

$$V_{1,f} = v_{1,f} + v_{\text{CM}} = -v_{1,i} + v_{\text{CM}} = -(V_{1,i} - v_{\text{CM}}) + v_{\text{CM}} = -V_{1,i} + 2v_{\text{CM}}$$

e sapendo come determinare la velocità del centro di massa si ottiene che:

$$V_{1,f} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_{2,i} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1,i}$$

Da cui si può evincere come, nel caso in cui  $m_1 = m_2$ , allora  $V_{1,f} = V_{2,i}$  (ovvero le due masse si scambiano la velocità con l'urto).

Invece, nel caso in cui  $m_1 \rightarrow +\infty$ , allora si ha che la sua velocità finale è identica a quella iniziale:

$$V_{1,f} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_{2,i} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1,i} = V_{1,i}$$

mentre la massa  $m_2$  assume due volte la velocità della prima massa, sottratta alla propria velocità iniziale:

$$V_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{1,i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} V_{2,i} = 2V_{1,i} - V_{2,i}$$

## 7.9 Urto in 1D - Anelastico

Nel caso di un urto parzialmente anelastico non si ha conservazione dell'energia cinetica, mentre se si ha un urto completamente anelastico le due masse interagenti rimangono attaccate l'una all'altra: ciò significa che se si osserva tale urto attraverso il sistema di riferimento centro di massa, le due masse iniziale presentano una quantità di moto non nulla e dopo l'urto, rimanendo attaccate l'una all'altra, presenteranno quantità di moto pari a 0.

Ovviamente, anche in questi due casi, si ha che  $\vec{p}_{1,i} = -\vec{p}_{2,i}$ , così come  $\vec{p}_{1,f} = -\vec{p}_{2,f}$ . Parlando di urto completamente anelastico, siccome le due masse rimangono attaccate l'una all'altra, considerando il sistema di riferimento centro massa è ovvio che  $\vec{p}_{1,f} = \vec{p}_{2,f} = 0$ , mentre se si considera un sistema di riferimento differente dal centro di massa, si ottiene

$$V_{1,f} = V_{2,f} = v_{\text{CM}} = \frac{m_1 \cdot V_{1,i} + m_2 \cdot V_{2,i}}{m_1 + m_2}$$

## 7.10 Urti - Riepilogo

- Nello studio degli urti, **la conservazione della quantità di moto si applica sempre**, per cui, in un qualsiasi sistema di riferimento:

$$\vec{P}_{\text{tot},i} = \vec{P}_{\text{tot},f}$$

mentre nel sistema di riferimento del centro di massa si ha

$$\vec{p}_{1,i} = -\vec{p}_{2,i} \quad \text{e} \quad \vec{p}_{1,f} = -\vec{p}_{2,f}$$

in quanto la quantità di moto iniziale e finale è sempre nulla.

- Nel caso di un urto elastico, si ha conservazione dell'energia cinetica

$$K_i = K_f$$

per cui il modulo della velocità relativa all'avvicinamento è uguale al modulo della velocità relativa dopo l'urto.

Mentre nel sistema di riferimento del centro di massa si ha che

$$|p_{1,i}| = |p_{1,f}| = |p_{2,i}| = |p_{2,f}|$$

- Nel caso di un urto completamente anelastico, la velocità finale è quella del centro di massa, ovvero

$$V_{1,f} = V_{2,f} = v_{\text{CM}} = \frac{m_1 \cdot V_{1,i} + m_2 \cdot V_{2,i}}{m_1 + m_2}$$

12 Aprile 2022

**Esercizio:** Si consideri un carrello posizionato sulla sommità di una rampa avente altezza  $h$ . Quando viene lasciato cadere, da fermo, acquista velocità così come la rampa. Si determini la velocità della rampa.

Naturalmente a tale problema si applica la conservazione della quantità di moto, per cui

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

ed esplicitando la quantità di moto iniziale e finale si ottiene:

$$\begin{aligned}\vec{p}_i &= \vec{p}_{\text{cart},i} + \vec{p}_{\text{ramp},i} = 0 + 0 = \vec{0} \\ \vec{p}_f &= \vec{p}_{\text{cart},f} + \vec{p}_{\text{ramp},f} = \vec{v}_c \cdot m + \vec{v}_r \cdot M = 0\end{aligned}$$

ma siccome  $\vec{p}_{\text{cart},f} = -\vec{p}_{\text{ramp},f}$  si ottiene che

$$\vec{v}_{\text{cart}} \cdot m = -\vec{v}_{\text{ramp}} \cdot M \longrightarrow \vec{v}_{\text{cart}} = -M \cdot \frac{\vec{v}_{\text{ramp}}}{m}$$

Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica, si ottiene anche che

$$E_i = E_f \longrightarrow E_i = K_{\text{cart},i} + K_{\text{ramp},i} + \mathcal{U}_i = mgh$$

mentre

$$E_f = K_{\text{cart},f} + K_{\text{ramp},f} + \mathcal{U}_f = \frac{1}{2}mv_{\text{cart}}^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{ramp}}^2$$

volendo determinare  $v_{\text{ramp}}$  si ottiene, applicando la conservazione dell'energia meccanica e il fatto che  $v_{\text{cart}} = M \cdot \frac{v_{\text{ramp}}}{m}$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{\text{cart}}^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{ramp}}^2 \longrightarrow mgh = \frac{1}{2}m \left( M \cdot \frac{v_{\text{ramp}}}{m} \right)^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{ramp}}^2$$

Ciò permette di pervenire facilmente al risultato seguente:

$$v_{\text{ramp}} = \sqrt{\frac{2mgh}{M \cdot \left( 1 + \frac{M}{m} \right)}}$$

**Esercizio:** Si consideri l'urto seguente

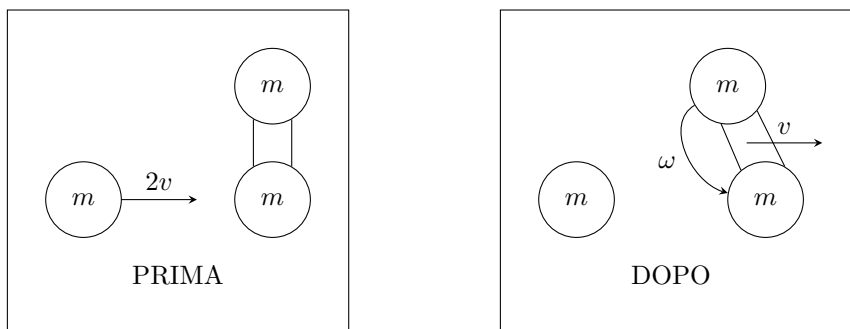


Figura 60: Esempio di urto

Essendo un urto, si può applicare la conservazione della quantità di moto, per cui

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \longrightarrow 2mv_i = \frac{mv_{1,f} + mv_{2,f}}{2m}$$

Per verificare se si conserva l'energia cinetica si consideri:

$$K_i = \frac{1}{2}m \cdot (2v)^2$$

mentre l'energia cinetica finale è data solamente dal contributo delle due masse collegate fra loro e può essere calcolata ricavando le velocità delle singole masse proprio dall'informazione fornita dal problema che  $\vec{v}_{\text{CM}} = v$ , per cui

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{mv_{1,f} + mv_{2,f}}{2m}$$

ma siccome delle due masse fra di loro collegate, solamente quella più in basso si muove (considerando l'istante appena dopo l'urto), è facile capire come

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \vec{v}_{\text{CM}} = v \longrightarrow \frac{v_{1,f}}{2} = v \longrightarrow \vec{v}_{1,f} = 2v$$

per cui l'energia cinetica finale è data unicamente dal contributo della prima massa, da cui:

$$K_f = \frac{1}{2}m(2v)^2$$

per cui l'urto considerato è elastico.

### 7.11 Moto dei razzi

Il moto dei razzi ha radici storiche molto profonde; un esempio di fallimento nella progettazione di un razzo riguarda l'esperimento di Goddard:

“Come un metodo per inviare un proiettile verso la parte pia alta, persino la parte le pia alta, dell'atmosfera terrestre, il razzo a carica multipla del Prof. Goddard è un dispositivo praticabile e quindi promettente.

(...) dopo che it razzo ha lasciato la nostra aria ed ha iniziato davvero il suo viaggio più lungo, il suo volo non sarebbe né accelerato né mantenuto dall'esplosione delle cariche avrebbe potuto ancora avere. Affermare che lo sarebbe è negare una legge fondamentale della dinamica, e solo il Dott. Einstein e la sua dozzina prescelta, pochi e capaci, sono autorizzati a farlo.

Che it Prof. Goddard (...) non conosca la relazione tra azione e reazione, e della necessità di avere qualcosa di meglio di un vuoto contro cui reagire — dire questo sarebbe assurdo.”

**Osservazione:** Al fine di analizzare il moto dei razzi, è necessario considerarne il modello seguente:

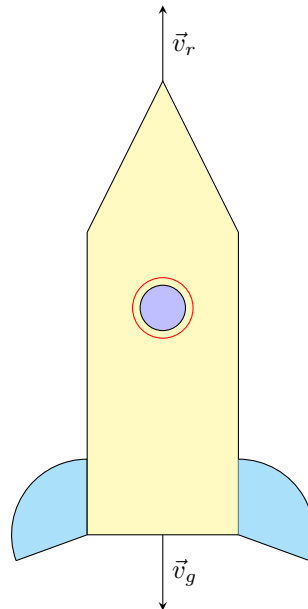


Figura 61: Modello di un razzo

Naturalmente il razzo si muove ad una velocità  $\vec{v}_r$  e, come risultato della combustione del carburante, viene emessa posteriormente anche una massa  $\Delta m$  di gas che, a causa dell'elevata temperatura,

presenta delle molecole che si muovono ad un'elevata velocità  $\vec{v}_g$ ; ovviamente è fondamentale osservare come la velocità  $\vec{v}_g$  delle molecole di gas sia relativa al razzo e non all'osservatore. A tale contesto si applica la seconda legge di Newton generalizzata, per cui si ha che

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

che, naturalmente, può anche essere interpretata come:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_i}{\Delta t}$$

La quantità di moto iniziale del razzo è

$$\vec{p}_i = m \cdot \vec{v}_r$$

in cui  $m$  è la massa totale iniziale del razzo e  $\vec{v}_r$  è la velocità iniziale dello stesso. Invece, la quantità di moto finale, dopo un intervallo di tempo  $\Delta t$  è

$$\vec{p}_f = (m - \Delta m) \cdot (\vec{v}_r + \Delta \vec{v}_r) + \Delta m \cdot (\vec{v}_g + \vec{v}_r)$$

in quanto il razzo ha perso una quantità  $\Delta m$  di gas e, quindi, ha diminuito la propria massa di  $\Delta m$  e aumentato la propria velocità di  $\Delta v$ ; inoltre è necessario anche considerare la quantità di moto della quantità  $\Delta m$  di gas che viene espulso dal razzo stesso, la cui velocità, relativa al razzo, è proprio  $\vec{v}_g + \vec{v}_r$  (sempre interpretando l'intero sistema dal punto di vista di un osservatore esterno). La semplificazione porta a

$$\vec{p}_f = (m - \Delta m) \cdot (\vec{v}_r + \Delta \vec{v}_r) + \Delta m \cdot (\vec{v}_g + \vec{v}_r) = m\vec{v}_r - \Delta m\vec{v}_r + m\Delta \vec{v}_r - \Delta m\Delta \vec{v}_r + \Delta m\vec{v}_g + \Delta m\vec{v}_r$$

in cui, ovviamente,  $\Delta m\Delta \vec{v}_r \rightarrow 0$ , in quanto due quantità infinitesime moltiplicate fra loro. In altre parole si ottiene

$$\vec{p}_f = m\vec{v}_r + m\Delta \vec{v}_r + \Delta m\vec{v}_g$$

per cui, ritornando alla seconda legge della dinamica generalizzata, si ottiene

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_i}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot (m\Delta \vec{v}_r + \Delta m\vec{v}_g - \Delta m\Delta \vec{v}_r)$$

Ma siccome, per quanto detto, le variazioni considerate sono infinitesimali, allora  $\Delta m\Delta \vec{v}_r \rightarrow 0$ , da cui

$$\vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}_r}{\Delta t} + \vec{v}_g \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

Considerando un tempo infinitesimale, ossia  $\lim \Delta t \rightarrow 0$ , si ottiene che

$$\frac{\Delta \vec{v}_r}{\Delta t} \longrightarrow \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r \quad \text{e} \quad \frac{\Delta m}{\Delta t} \longrightarrow \frac{dm}{dt}$$

Ecco, quindi, che si è ottenuto:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_r + \vec{v}_g \cdot \frac{dm}{dt}}$$

in cui  $\vec{v}_g \cdot \frac{dm}{dt}$  è proprio la **spinta del razzo**: questo è proprio il meccanismo di funzionamento di un razzo, in quanto se il gas viene espulso e acquista una certa velocità, allora anche il razzo deve accelerare per garantire la conservazione della quantità di moto.

**Esempio:** Naturalmente, nello spazio, si ha che  $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$ , per cui l'equazione di cui sopra diviene:

$$\boxed{m\vec{a}_r = -\vec{v}_g \cdot \frac{dm}{dt}}$$

che è un'equazione che ha senso, in quanto al decremento della massa del razzo corrisponde un aumento della velocità dello stesso. Per quanto riguarda la componente orizzontale, riscrivendo l'accelerazione secondo la definizione si ottiene:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -v_g \cdot \frac{dm}{dt} \longrightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{v_g}{m} \cdot \frac{dm}{dt}$$



Naturalmente taluna è una equazione differenziale; ma sapendo che

$$\frac{d}{dt} \log(m(t)) = \frac{1}{m} \frac{dm}{dt}$$

si può facilmente evincere come

$$\frac{dv}{dt} = -v_g \cdot \frac{d}{dt} \log(m(t))$$

e integrando, ora, rispetto al tempo, si ottiene che

$$v_f - v_i = -v_g \cdot [\log(m_f) - \log(m_i)]$$

che permette di ottenere

$$v_f - v_i = \Delta v = -v_g \cdot \log\left(\frac{m_f}{m_i}\right)$$

che prende il nome di **equazione di Ciolkovsky**. È facile capire come, ovviamente, essendo  $m_f < m_i$  (a causa della perdita di carburante), si ottiene

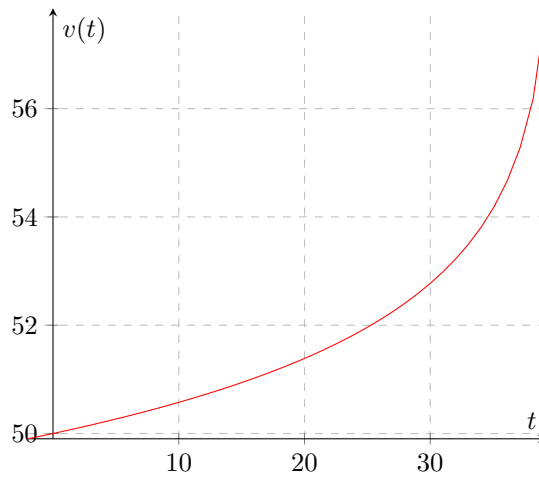
$$\frac{m_f}{m_i} < 1 \longrightarrow \log\left(\frac{m_f}{m_i}\right) < 0$$

ma essendo preceduto da un segno  $-$ , si ottiene un aumento di velocità, ovviamente.

**Osservazione:** È anche possibile considerare la velocità in funzione del tempo, ovvero

$$v(t) = v_i - v_g \log\left(\frac{m(t)}{m_i}\right)$$

che, graficamente, corrisponde a:



13 Aprile 2022

Per la risoluzione di un problema fisico, è fondamentale compiere i passi seguenti:

**1. Visualizzazione**

- (a) Creare un'immagine mentale del problema;
- (b) Identificare i concetti che possono essere utili;
- (c) Riformulare la domanda a parole più chiare, ed in termini che possono essere calcolati.

**2. Descrizione**

- (a) Realizzare diagrammi, inclusi diagrammi di corpi liberi;
- (b) Scegliere un sistema di coordinate appropriato;
- (c) Definire le quantità che sono importanti nel problema;
- (d) Identificare la quantità da determinare per fornire la soluzione al problema.

**3. Pianificazione**

- (a) Trasferire i concetti in forma matematica;
- (b) È possibile partire dalla soluzione e lavorare all'indietro, oppure costruire un percorso risolutivo da ciò che è noto a ciò che si vuole determinare.

**4. Esecuzione**

- (a) Risolvere i sistemi di equazioni;
- (b) Verificare le unità;
- (c) Sostituire i valori numerici alle variabili in gioco.

**5. Valutazione della soluzione**

- (a) Verificare se la soluzione risponde alla domanda del problema;
- (b) Validare il risultato testando i casi limite;
- (c) Valutare la ragionevolezza del risultato;
- (d) Valutare la completezza del risultato.

**6. Modificazione del piano risolutore**

- (a) Per correggere il piano risolutore si può adottare una strategia differente;
- (b) È possibile cambiare il sistema di coordinate o il sistema di riferimento.

## 8 Moto e dinamica dei corpi rigidi

Di seguito si fornisce la definizione di **corpo rigido**:

**CORPO RIGIDO**

Un corpo rigido è un corpo la cui **forma** e **dimensione** permangono fissi. In altre parole, le **posizioni relative** tra le parti del corpo sono **fisse**.

**Osservazione:** Ovviamente, la definizione di corpo rigido è relativa e fortemente limitata a dei problemi specifici, in quanto la deformazione di un corpo può avvenire sempre, ma con gradi diversi.

### 8.1 Corpi rigidi - Cinematica

La cinematica di un corpo rigido è lo studio e la descrizione del movimento di un corpo, il quale può avvenire con modalità differenti.

### 8.1.1 Traslazione

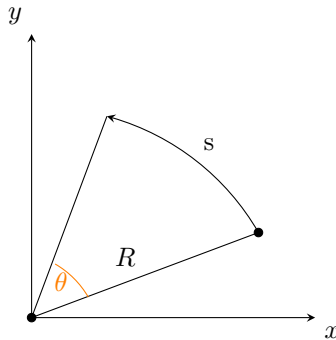
Naturalmente, in una traslazione di un corpo rigido, tutte le parti del corpo subiscono lo **stesso spostamento**  $\Delta \vec{r}$  (altrimenti si avrebbe deformazione) e, quindi, presentano la **medesima velocità**  $\vec{v}$ : ciò significa che sono sufficienti solamente 3 parametri per descrivere una traslazione, ossia  $(x, y, z)$ .

### 8.1.2 Rotazione

Per quanto concerne la rotazione di un corpo rigido, è necessario nuovamente specificare 3 parametri, come

- 3 angoli, uno per ciascun asse  $(x, y, z)$ ;
- 2 parametri per l'asse di rotazione (in quanto l'asse è un versore di lunghezza unitaria) più un angolo di rotazione attorno all'asse.

Approssimando un corpo ad un punto materiale, si osservi che se esso compie uno spostamento angolare di raggio  $R$ , descrivendo un angolo  $\theta$  e un arco di lunghezza  $s$ , come mostrato di seguito



allora l'angolo  $\theta$  descritto si calcola come

$$\theta = \frac{s}{R}$$

che viene naturalmente espresso in **radianti**. Inoltre  $\theta$  non è solo un angolo, ma è anche una “**coordinata angolare**” che permette di esprimere

- la **velocità angolare**, ossia la derivata nel tempo dell'angolo  $\theta$  descritto

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

- l'**accelerazione angolare**, ossia la derivata nel tempo della velocità angolare  $\omega$ , o anche la derivata seconda dell'angolo  $\theta$  descritto

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha$$

**Esempio:** Nel caso di *accelerazione angolare costante*, si possono impiegare le quantità note per fornire la legge oraria seguente

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

che ricorda esattamente la cinematica di un moto uniformemente accelerato (infatti, in questo caso, si ha un **momento di forza costante**).

**Osservazione:** Nel caso di un moto rotatorio, è fondamentale considerare l'attrito (che è un **attrito statico**, non essendoci moto relativo tra le superfici di contatto):

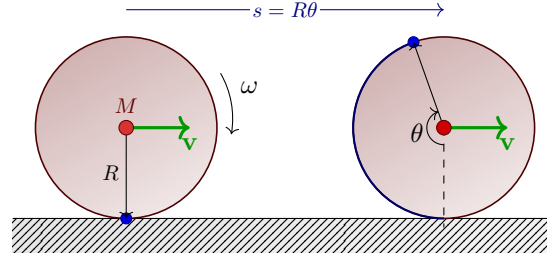


Figura 62: Corpo in rotolamento

Inoltre, se un corpo rotola con velocità  $\vec{v}$ , allora ciò significa che si può definire una funzione spostamento nel tempo:

$x(t) :=$  posizione del centro del cerchio in funzione del tempo;

$\theta(t) :=$  rapporto fra lo spostamento traslatorio orizzontale e il raggio della circonferenza;

Si osservi, infatti, che nel caso di piccoli spostamenti, l'arco descritto da una circonferenza  $\Delta s$  può essere approssimato allo spostamento orizzontale  $\Delta x$ , per cui

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} \cong \frac{\Delta x}{r}$$

Ciò, allora, porta alla seguente approssimazione:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{x(t)}{r}$$

e da ciò segue anche la relazione seguente  $v = \omega r$  (che non è sempre necessariamente vera, ma per il rotolamento sì).

### 8.1.3 Rototraslazione

Talvolta si parla anche di **rototraslazione**, ovvero un moto che è sia rotatorio che traslatorio, per la cui descrizione sono fondamentali 6 parametri.

## 8.2 Corpi rigidi - Dinamica

Partendo dal presupposto che un corpo rigido è approssimabile tramite il modello di un corpo esteso, ossia un **assieme di punti materiali con distanze relative fisse**.

L'applicazione del concetto di centro di massa ad un assieme di punti permette di scrivere la legge:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M \cdot \vec{a}_{\text{CM}}$$

che è una proprietà totalmente generale e, quindi, include anche il caso dei corpi rigidi. Ciò permette di affermare che la risultante delle forze esterne, anche se ciascuna presenta un punto di applicazione diverso, si comporta come se fosse un'unica forza che agisce sul centro di massa, come se l'intero corpo fosse un singolo punto materiale.

**Corollario 8.0.1** *Naturalmente, se non vi sono forze esterne applicate al corpo esteso*

$$\vec{F}_{\text{ext}} = 0 \longrightarrow \vec{a}_{\text{CM}} = 0$$

ossia l'accelerazione del centro di massa è nulla: ciò significa che il corpo si sposta a velocità costante. Tuttavia, ciò non significa che non vi sia accelerazione, in quanto un corpo può anche ruotare con un'**accelerazione angolare non nulla**.

### 8.3 Corpi rigidi - Energia cinetica

Si consideri un sistema di punti materiali (ovvero un insieme di punti le cui velocità e masse possono essere diverse fra di loro); naturalmente, l'energia cinetica totale del sistema è

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$$

mentre la velocità del centro di massa si calcola come

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

e volendo spostarsi nel sistema di riferimento del centro di massa, si calcoli la velocità relativa al centro di massa come:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i$$

in cui  $\vec{v}'_i$  è proprio la velocità relativa tra il sistema di riferimento dell'osservatore e il sistema di riferimento del centro di massa, ossia la velocità relativa al centro di massa. Allora, ricalcolando nuovamente l'energia cinetica totale, si ottiene

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \cdot (\vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \cdot (\vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \cdot (\vec{v}_{\text{CM}}^2 + \vec{v}'_i^2 + 2\vec{v}_{\text{CM}} \cdot \vec{v}'_i)$$

che permette di ottenere

$$K = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \underbrace{\vec{v}_{\text{CM}} \cdot \sum_i m_i \cdot \vec{v}'_i}_{0 \text{ perché } \vec{p}_{\text{tot}}=0 \text{ nel centro di massa}}$$

per cui si ottiene il seguente **risultato generale** (che non dipende dal fatto che si parli di corpi rigidi o meno)

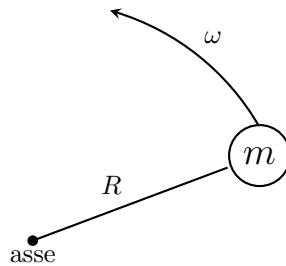
$$K_{\text{tot}} = K_{\text{CM}} + K_{\text{rel}}$$

in cui  $K_{\text{CM}}$  è l'energia cinetica del centro di massa, mentre  $K_{\text{rel}}$  è l'energia cinetica del moto relativo al centro di massa.

**Osservazione:** Si osservi che, nel caso di un **corpo rigido**, il moto relativo al centro di massa è proprio la rotazione (in quanto si parla di un moto che conserva le distanze fisse rispetto al centro di massa), per cui

$$K_{\text{tot}} = K_{\text{CM}} + K_{\text{rot}}$$

in cui  $K_{\text{rot}}$  prende il nome di **energia cinetica di rotazione**. Al fine di determinare tale energia, si consideri una massa  $m$  che ruota con velocità angolare  $\omega$  descrivendo una circonferenza di raggio  $r$ :



Da ciò segue che l'energia cinetica del singolo punto materiale è, ovviamente:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\omega r)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

in quanto è nota la relazione  $v = \omega r$ .

Se, invece, si considera un assieme di punti, il risultato generale diviene:

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_I$$

in quanto tutti i punti devono necessariamente ruotare alla stessa velocità angolare  $\omega$ , la quale è costante. Tale risultato permette di introdurre la quantità seguente

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

che prende il nome di **momento di inerzia**, in cui  $r_i$  è la distanza della massa  $i$ -esima dall'asse di rotazione. Ecco che sulla base di tale quantità è possibile definire l'energia cinetica totale di un corpo rigido come

$$K_{\text{tot}} = K_{\text{CM}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

in cui  $I$  è il momento di inerzia attorno ad un asse che passa per il centro di massa del corpo rigido (sempre ricordando come  $v = \omega r$ ). È interessante, però, osservare, che l'energia cinetica di un corpo in rotolamento, non è totalmente spesa per aumentare la velocità di traslazione del corpo stesso, ma una parte è anche spesa per il rotolamento steso, come viene esposto chiaramente nell'esempio che segue.

**Esempio:** Si considerano due piani inclinati identici, sul primo del quale vi è una massa quadrata  $m$  e sul secondo una sfera, sempre di massa  $m$ :

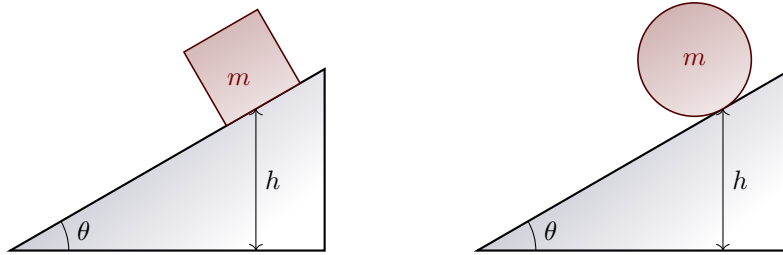


Figura 63: Confronto di corpi in rotolamento

In questo caso, se entrambi partono da un'altezza  $h$  e si spostano senza attrito, applicando la conservazione dell'energia meccanica, si ottiene:

1.  $\frac{1}{2} m v_f^2 = mgh$
2.  $\frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_f^2}{r^2} = mgh$

In cui è evidente come la velocità finale della prima massa sarà maggiore della seconda (e quindi arriva prima), in quanto nel secondo caso parte dell'energia potenziale viene “persa o spesa” per effettuare la rotazione.

## 8.4 Momento di inerzia

La definizione generale di **momento di inerzia** è

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

ma se si considera un corpo continuo si ottiene

$$I = \int r^2 \cdot dm$$

e se la densità è data si ha

$$I = \int r^2 \cdot \rho(\vec{r}) \cdot dV$$

che, in ognuno di taluni tre casi, il concetto di momento di inerzia è interpretabile come **la resistenza di un corpo al cambiamento di velocità angolare** (che è molto simile alla definizione della massa inerziale): più il momento di inerzia è grande, maggiore sarà la resistenza che il corpo oppone alla variazione della propria velocità angolare e viceversa.

Tuttavia, la definizione del momento di inerzia dipende dalla **posizione** e dall'**orientazione** dell'asse di rotazione (su uno stesso corpo, ad assi di rotazione differenti corrispondono momenti di inerzia differenti: più la massa è distante dall'asse di rotazione, maggiore sarà il suo momento di inerzia).

**Osservazione:** Naturalmente, nel caso di un punto materiale di massa  $m$ , a distanza  $r$  dall'asse di rotazione, si ha che il suo momento di inerzia è calcolabile come:

$$I_{\text{punto}} = mr^2$$

se, invece, si considerano due punti di massa  $\frac{m}{2}$  (affinché la massa totale del sistema sia sempre  $m$ ) a distanza  $r$  dall'asse di rotazione, si ha che

$$I_{2 \text{ punti}} = \frac{m}{2}r^2 + \frac{m}{2}r^2 = mr^2$$

Più in generale, considerando  $n$  punti di massa  $\frac{m}{n}$  a distanza  $r$  dal centro si avrà che

$$I_{n \text{ punti}} = \sum_{i=1}^n \frac{m}{n}r^2 = mr^2$$

e si va al limite si ottiene sempre che

$$I_{\infty \text{ punti}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m}{n}r^2 = \int r^2 \cdot dm = mr^2$$

ed è possibile calcolare il momento di inerzia anche per altri corpi, come mostrato nella tabella seguente:

Oggetto	Momento di inerzia
Anello	$I = mR^2$
Sfera piena	$I = \frac{2}{5}mr^2$
Sfera cava	$I = \frac{2}{3}mr^2$
Cilindro	$I = \frac{1}{2}mr^2$
Cilindro cavo	$I = mR^2$

Tabella 2: Tabella dei momenti di inerzia

21 Aprile 2022

La formulazione per l'energia cinetica del moto di rotazione si calcola considerando il momento di inerzia, il quale dipende dall'asse di rotazione del corpo stesso (in quanto il momento di inerzia si calcola in base alla distanza dei contributi di massa dall'asse di rotazione). È stato osservato, inoltre, quale sia il momento di inerzia di un anello che, come si può facilmente intuire, è lo stesso di un anello cavo.

Al fine di determinare il periodo di rotazione sapendo la velocità angolare  $\omega$ , è possibile impiegare la definizione e isolare  $T$  come segue

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Se si considera un'accelerazione angolare costante  $\alpha$  (e negativa) e una velocità angolare iniziale  $\omega$ , allora il tempo impiegato per arrestarsi è

$$t = \frac{\omega}{\alpha}$$

secondo la definizione per la quale  $\omega = \alpha t$  (che rassomiglia alla legge oraria del moto uniformemente accelerato).

Se si considera la definizione di energia cinetica di rotazione e di velocità angolare, si ha che

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow K = \frac{1}{2}I\frac{4\pi^2}{T^2} \rightarrow T = \sqrt{\frac{2\pi^2 I}{K}}$$

e sapendo che  $I = mr^2$ , avendo due masse  $m$  a distanza  $d$  l'una dall'altra, si ottiene

$$I = 2m \left(\frac{d}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}md^2$$

per cui si ha:

$$T = \sqrt{\frac{2\pi^2 I}{K}} = \sqrt{\frac{\pi^2 md^2}{K}} = \pi$$

nell'ipotesi in cui tutte le misure siano unitarie.

**Esercizio:** Un blocco di massa  $m$  è attaccato ad un filo di massa trascurabile, che è avvolto intorno a un cilindro omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R_0$ , come mostrato nella figura seguente:

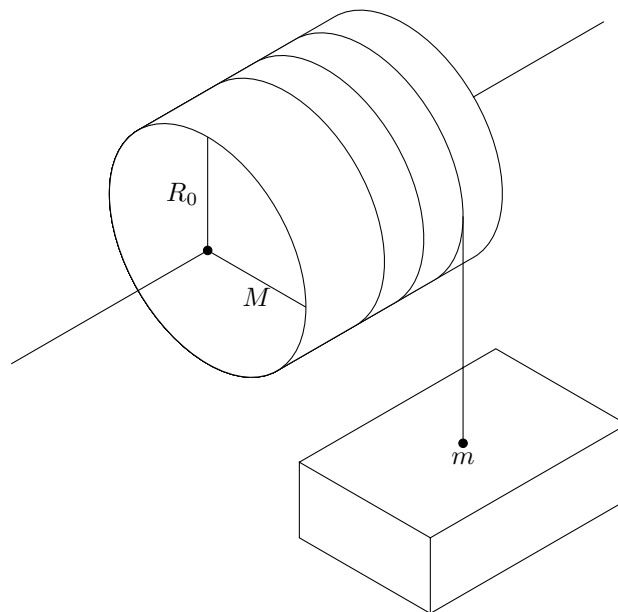


Figura 64: Massa collegata ad un cilindro rotante



Il cilindro è libero di girare, con attrito trascurabile, intorno a un asse orizzontale fisso passante per il suo centro. Dopo che il blocco è sceso di un tratto verticale  $h$  a partire dalla quiete, si determini la velocità lineare del centro del blocco e la velocità angolare del cilindro rispetto al suo asse di rotazione.

Immediatamente è possibile applicare la conservazione dell'energia meccanica del sistema cilindro-blocco: le energie coinvolte sono l'energia cinetica (anche di rotazione) e l'energia potenziale, per cui

$$E_i = E_f \longrightarrow K_i + \mathcal{U}_i = K_f + \mathcal{U}_f$$

ma siccome il sistema, inizialmente, parte dalla quiete, l'energia cinetica iniziale è nulla. Per cui si ha

$$K_f = \mathcal{U}_i - \mathcal{U}_f$$

Ovviamente, la variazione di energia cinetica è  $\Delta\mathcal{U} = mgh$ , mentre l'energia cinetica finale è data dalla somma dell'energia cinetica del blocco di massa  $m$  e la velocità angolare del cilindro, per cui:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh$$

ma siccome  $v$  e  $\omega$  sono legate fra di loro dalla relazione

$$\omega = \frac{v}{R_0}$$

in quanto un punto a velocità  $v$  sulla circonferenza del cilindro presenta la velocità della massa  $m$ , essendo connessi tramite il filo. Pertanto si ottiene che

$$v^2 \cdot \left(1 + \frac{I}{m \cdot R_0^2}\right) = 2gh$$

e sapendo che il cilindro è omogeneo, allora

$$I = \frac{1}{2}MR_0^2$$

per cui la velocità lineare del centro del blocco si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{M}{2m}}}$$

e volendo conoscere la velocità angolare del cilindro, è sufficiente dividere  $v$  per  $R_0$ . Dalla formula ottenuta si capisce bene che se la massa  $M$  del cilindro è 0, allora si ottiene una semplice caduta libera per la quale si può ignorare il cilindro stesso. Se la massa  $M \rightarrow +\infty$ , allora la velocità del blocco  $v \rightarrow 0$ , in quanto il momento d'inerzia del cilindro diviene molto grande e, quindi, la resistenza alla variazione di velocità angolare del cilindro stesso cresce.

**Esempio:** Si consideri un oggetto rotondo di massa  $m$  e raggio  $R$  che rotola giù da un piano inclinato, partendo da un'altezza  $h$  nello stato di quiete:

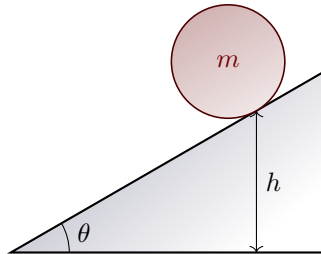


Figura 65: Massa rotonda in rotolamento

Allora, considerando l'attrito trascurabile, si può applicare la conservazione dell'energia meccanica, per cui

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

ma siccome si parla sempre di **rotolamento** (e solo in questo caso), è nota la relazione

$$\omega = \frac{v}{R}$$

da cui si ha che

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}}}$$

Si osservi che il rapporto

$$\frac{I}{mR^2}$$

è necessariamente un numero puro, in quanto  $I$  presenta, nella sua definizione, sempre il fattore  $mR^2$ , che quindi si semplifica con il denominatore. Infatti, sapendo come determinare il momento di inerzia  $I$  di diversi oggetti, si ottengono i risultati seguenti

- Sfera piena

$$I = \frac{2}{5}mR^2 \longrightarrow v = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}}$$

- Sfera cava

$$I = \frac{2}{3}mR^2 \longrightarrow v = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Pertanto, **la velocità di movimento di un corpo in rotolamento** non dipende dalla sua massa, dalla sua dimensione, dal raggio, etc., ma **dipende solamente dalla sua distribuzione di massa** (ovvero dalla forma dell'oggetto, ossia se è un cilindro, una sfera, etc.)

**Osservazione:** Pertanto, due cilindri, di raggio diverso e massa diversa, ma con densità uniforme, si muoveranno alla stessa velocità.

Si considerino, poi, due biglie identiche che sono posizionate su due rotaie a distanze diverse:

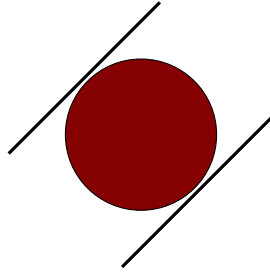


Figura 66: Biglie in rotazione su rotaie

Allora, la biglia che si posiziona sulle rotaie più ravvicinate fra di loro si muove a velocità maggiore, in quanto il raggio di rotazione della sfera rispetto al punto di contatto con le rotaie è più grande rispetto ad una biglia poggiata su rotaie a distanza maggiore. Infatti, in questo caso non è vero che  $v = \omega R$  (con  $R$  raggio della biglia), ma si ha che  $v = \omega r'$ , in cui  $r'$  è il raggio descritto dalla biglia in rotazione sulle rotaie.

Ecco che allora la velocità alla quale si muovono le due biglie si calcola come segue:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mr'^2}}}$$

in cui più  $r' \rightarrow R$  (ossia più le rotaie sono vicine tra loro), più la velocità aumenta, ma se  $r' \rightarrow 0$  (ovvero più le rotaie si allontanano), allora la velocità di traslazione diminuisce a scapito di quella di rotazione.

### 8.5 Teorema degli assi paralleli

Il teorema degli assi paralleli è estremamente utile per conoscere il momento di inerzia di un corpo attorno ad un certo asse sapendo già qual è il suo momento di inerzia attorno ad un altro asse. Si consideri, allora, una massa uniforme, il cui centro di massa, a distanza  $d$  dall'asse di rotazione, ruota a velocità angolare  $\omega$ . Allora, per quanto già visto, si ha

$$K_{\text{tot}} = K_{\text{rot}} + K_{\text{CM}} = \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2$$

per cui si ottiene che

$$K_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \underbrace{(I_{\text{CM}} + Md^2)}_{I_{\text{tot}}} \cdot \omega^2$$

in cui, essendo  $d$  la distanza tra il centro di massa e l'asse di rotazione, allora la velocità del centro di massa è  $v_{\text{CM}} = \omega d$ . Il teorema degli assi paralleli, quindi, è il seguente

#### TEOREMA DEGLI ASSI PARALLELI

Volendo calcolare il momento di inerzia di un corpo attorno ad un qualsiasi asse, conoscendo il momento di inerzia dello stesso attorno al centro di massa, si può impiegare il **teorema degli assi paralleli** che afferma che

$$I_p = I_{\text{CM}} + Md^2$$

in cui  $p$  è il punto attorno a quale il sistema ruota e  $d$  è la distanza  $p - \text{CM}$ , ovvero la distanza tra il punto attorno al quale avviene la rotazione e il centro di massa.

**Esempio:** Si consideri una porta di forma rettangolare (di dimensioni  $l, h, s$ ) avente una densità uniforme. Allora il momento di inerzia del suo centro di massa si calcola come

$$I_{\text{CM}} = \int r^2 \cdot dm = \int r^2 \rho dV = \int r^2 \frac{M}{l \cdot h \cdot s} \cdot dv$$

A questo punto, considerando la posizione del centro di massa pari a  $\frac{l}{2}$  e siccome  $dV = dx \cdot hs$  (ove  $hs$  è la sezione della porta), è facile determinare

$$I_{\text{CM}} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{M}{l \cdot s \cdot h} \cdot h \cdot s \cdot dx = \frac{M}{l} \cdot \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \cdot dx = \frac{M}{l} \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

che si traduce nel seguente risultato

$$I_{\text{CM}} = \frac{1}{12} M l^2$$

che è un risultato molto più generale che per una porta, ma per un qualsiasi oggetto a parallelepipedo, come un'asta (ovviamente considerando sempre l'asse di rotazione passante per il centro di massa).

Tuttavia, una porta non ruota attorno al proprio centro di massa, ma attorno ad uno dei lati, per cui ora è possibile applicare il teorema degli assi paralleli e considerare la distanza del centro di massa da uno dei lati come  $\frac{l}{2}$ , ottenendo

$$I = I_{\text{CM}} + M \cdot \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} M l^2 + \frac{1}{4} M l^2 = \frac{1}{3} M l^2$$

per cui è evidente come sia più facile far ruotare una porta attorno al proprio centro di massa invece che attorno ad uno dei lati.

## 8.6 Prodotto vettoriale - Richiamo

Dati due vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  aventi un angolo  $\theta$  compreso tra i due

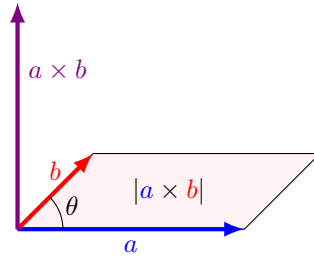


Figura 67: Prodotto vettoriale

Allora il prodotto vettoriale tra  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  è

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

in cui

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin(\theta)$$

in cui  $\vec{C} \perp \vec{A}$  e  $\vec{C} \perp \vec{B}$  e il suo verso è dato dalla regola della mano destra.

Non solo, ma era anche noto come il vettore velocità potesse essere descritto anche come prodotto vettoriale tra il vettore  $\vec{\omega}$  e  $\vec{r}$ , per cui  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . È molto conveniente, infatti, descrivere il versore dell'asse di rotazione del vettore  $\vec{\omega}$  come

$$\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$

in cui  $|\omega|$  è semplicemente la velocità angolare, calcolabile come il rapporto tra  $v$  e  $R$ .

Allo stesso modo, per l'accelerazione angolare  $\vec{\alpha}$  si ha che il suo asse è

$$\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$$

essendo  $|\alpha|$  l'accelerazione angolare.

**Osservazione:** Si osservi che se l'asse è fisso si ha che  $\vec{\alpha} \parallel \vec{\omega}$  e se  $\vec{\alpha}$  è costante, allora si ha che

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha} \cdot t$$

per cui

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega}}{t}$$

26 Aprile 2022

Il teorema degli assi paralleli è fondamentale al fine di determinare il momento di inerzia attorno ad un asse che non passa per il centro di massa: per farlo è sufficiente sommare a tale momento di inerzia il prodotto tra la massa e il quadrato della distanza tra l'asse considerato e quello passante per il centro di massa.

A proposito dell'azione di aprire una porta, si può riflettere in merito a che cosa può influire sulla facilità o meno di compiere tale atto, ovviamente determinabile in funzione del momento di inerzia e della distribuzione di massa:

- più grande è la massa, più difficile è aprire la porta;
- più grande è la distanza dell'asse di rotazione dall'asse passante per il centro di massa, più difficile è aprire la porta;
- se la distribuzione di massa è favorevole, ovvero se vi è più massa concentrata in prossimità dell'asse di rotazione, allora sarà più facile aprire la porta.
- se la forza applicata non è parallela allo spostamento, essa dovrà essere maggiore per aprire la porta.

## 8.7 Momento di forza

Di seguito si espone la definizione di **momento di forza**:

### MOMENTO DI FORZA

Il **momento di forza** viene definito come il prodotto vettoriale tra il vettore punto di applicazione (che presenta esso stesso come punto di applicazione l'asse di rotazione) e il vettore forza, ovvero

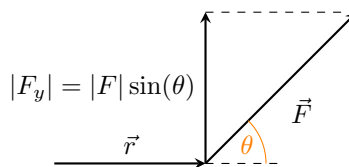
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

e per determinare il modulo di tale momento è sufficiente calcolare

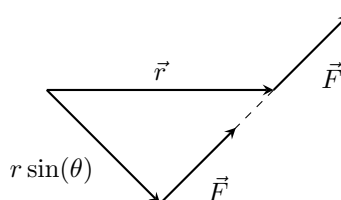
$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin(\theta) = r \cdot (F \cdot \sin(\theta)) = (r \cdot \sin(\theta)) \cdot F$$

ove  $\theta$  è l'angolo compreso tra il vettore  $\vec{r}$  e il vettore  $\vec{F}$  (ovviamente  $\theta$  dovrà essere misurato facendo coincidere il punto applicazione dei due vettori).

**Osservazione:** In altre parole il modulo del momento di forza è dato dal prodotto tra la distanza dall'asse e la componente perpendicolare della forza (ovvero  $r \cdot (F \cdot \sin(\theta))$ ):



O ancora, il modulo del momento di forza è dato dal prodotto tra la forza e il **braccio**, ossia la distanza del vettore forza dal punto di applicazione del vettore  $\vec{r}$  (ovvero  $(r \cdot \sin(\theta)) \cdot F$ , in cui  $(r \cdot \sin(\theta))$  prende il nome di braccio):



**Osservazione:** Si consideri la seguente rappresentazione tridimensionale del momento di forza, nel quale si pone l'asse di rotazione in corrispondenza dell'asse  $z$ :

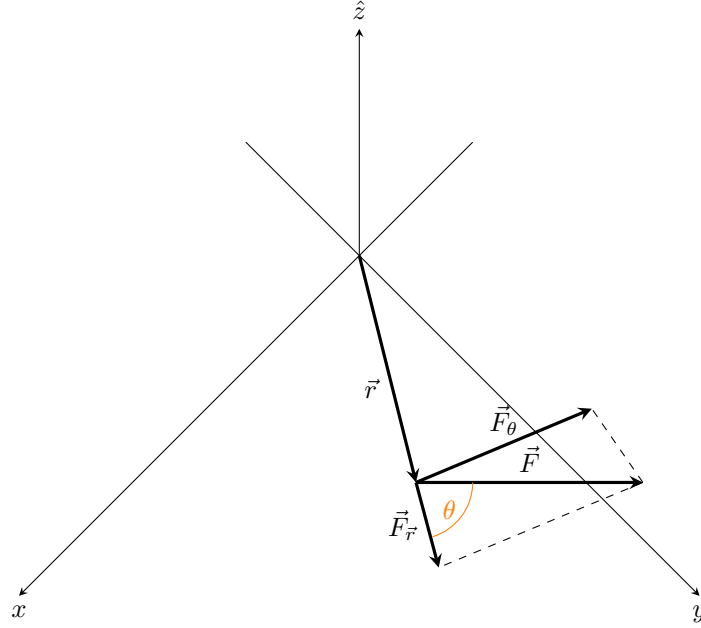


Figura 68: Calcolo del momento di forza in 3 dimensioni

Allora, giacché è noto che è possibile scomporre  $\vec{F}$  nelle sue componenti *radiale*  $\vec{F}_r$  e *angolare*  $\vec{F}_\theta$

$$\vec{F} = F_r \cdot \hat{r} + F_\theta \cdot \hat{\theta}$$

si può semplicemente calcolare il momento di forza come

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \sin(\theta) \cdot \hat{k} = \tau_z \cdot \hat{k} = r \cdot F_\theta \cdot \hat{k}$$

Applicando, inoltre, la seconda legge della dinamica  $\vec{F} = m\vec{a}$ , si evince facilmente come la componente di  $\vec{F}$  in direzione  $\theta$  sia proprio data dal prodotto tra la massa  $m$  e l'accelerazione in direzione  $\theta$

$$F_\theta = ma_\theta = mr\alpha$$

l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che l'accelerazione perpendicolare all'asse di rotazione si può calcolare come

$$a_\theta = r \cdot \alpha = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = r \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

dal momento che

$$\boxed{\vec{a}_\theta = \vec{r} \cdot \alpha}$$

Pertanto si evince come

$$\boxed{\tau_z = rF_\theta = mr^2\alpha}$$

ciò permette di capire come il momento di forza  $\tau$  produca un'**accelerazione angolare**.

Se ora si considera un corpo rigido, al fine di determinare il momento di forza totale è necessario sommare i contributi di tutte le forze applicate al corpo rigido, per cui

$$\tau_z = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_i r_i \cdot F_{i,\theta}$$

ma siccome in un corpo rigido tutti i punti presentano la stessa accelerazione angolare è facile capire come

$$\sum_i r_i \cdot F_{i,\theta} = \sum_i r_i \cdot m_i r_i \alpha = \sum_i r_i^2 m_i \alpha = I\alpha$$

per cui si ottiene che

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

che è un esatto analogo della seconda legge della dinamica  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

**Attenzione:** Si osservi che la legge

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

è valida e applicabile solamente se

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{asse è fisso} \\ \text{oppure} \\ \text{asse passa per il centro di massa} \end{array} \right.$$

**Esempio:** Si consideri il cilindro seguente:

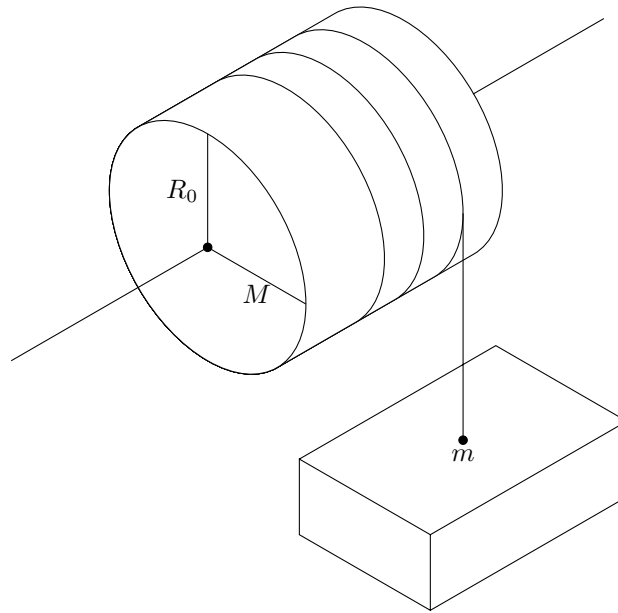


Figura 69: Massa collegata ad un cilindro rotante

Si determini l'accelerazione della massa  $m$ . Naturalmente, sulla massa  $m$  vi sono due forze applicate, ossia la forza peso  $\vec{F}_t$  e la forza di tensione  $\vec{F}_T$ , mentre sul cilindro vi è applicata una forza di tensione che produce una rotazione dello stesso, come mostrato di seguito:

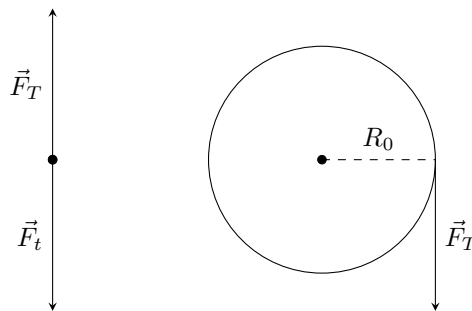


Figura 70: Diagramma a corpo libero della massa e del cilindro

Naturalmente, dalla seconda legge di Newton applicata al blocco  $m$ , si evince come

$$ma = -mg + F_T$$

mentre per quanto riguarda il cilindro, essendo l'asse fisso e  $\vec{F}_T \perp \vec{R}_0$  si ha che

$$\tau = I\alpha \longrightarrow F_T \cdot R_0 = \frac{1}{2}MR_0^2 \cdot \left(-\frac{a}{R_0}\right) \longrightarrow F_T = -\frac{1}{2}Ma$$

in quanto la fune consente di vincolare l'accelerazione angolare del cilindro con quella tangenziale della massa. A questo punto, pertanto, è possibile ottenere la seguente equazione

$$ma = -mg + F_T \longrightarrow ma = -mg + \frac{1}{2}Ma \longrightarrow ma - \frac{1}{2}Ma = -mg \longrightarrow a \cdot \left(m - \frac{1}{2}M\right) = -mg$$

pertanto si ottiene come

$$a = -\frac{m}{\left(m - \frac{1}{2}M\right)} \cdot g$$

**Osservazione:** Com'è noto, per quanto riguarda una traiettoria angolare, per la quale un punto materiale percorre uno spostamento  $\Delta s$  a distanza  $R$  dal centro e descrivendo un angolo  $\Delta\theta$ , si ha che

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} \longrightarrow \Delta s = R \cdot \Delta\theta$$

Derivando l'ultima quantità rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = R \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \longrightarrow v = R\omega$$

e derivando nuovamente rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{v}{\Delta t} = R \cdot \frac{\omega}{\Delta t} \longrightarrow a = R\alpha$$

per cui si ottiene

$$\boxed{\alpha = \frac{a}{R}}$$

### 8.7.1 Momento di forza dovuto alla gravità

Si consideri un corpo il cui asse di rotazione non coincide con il centro di massa; allora, considerando una generica una massa  $m_i$  che compone il corpo rigido, su di esso agisce una forza peso  $\vec{F}_{t,i}$  che presenta un punto di applicazione posizionato in  $\vec{r}_i$ .

Allora è ovvio, per quanto detto, che

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{t,i} = \sum_i \vec{r}_i \times (-\hat{j} \cdot m_i g) = -g \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i \times \hat{j}$$

Ma naturalmente si ha che

$$\vec{r}_i = x_i \cdot \hat{i} + y_i \cdot \hat{j} + z_i \cdot \hat{k}$$

per cui si perviene al risultato seguente

$$\vec{r}_i \times \hat{j} = x_i \cdot (\hat{i} \times \hat{j}) + y_i \cdot (\hat{j} \times \hat{j}) + z_i \cdot (\hat{k} \times \hat{j}) = x_i \cdot \hat{k} + 0 - z_i \cdot \hat{i}$$

pertanto si ottiene che

$$-g \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i \times \hat{j} = -g \cdot \sum_i m_i (x_i \cdot \hat{k} - z_i \cdot \hat{i}) = -g \cdot \left(\sum_i m_i x_i\right) \cdot \hat{k} + g \cdot \left(\sum_i m_i z_i\right) \cdot \hat{i}$$

ma ricordando che

$$\frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = x_{\text{CM}} \quad \text{e} \quad \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} = z_{\text{CM}}$$



si ottiene

$$-g \cdot \left( \sum_i m_i x_i \right) \cdot \hat{k} + g \cdot \left( \sum_i m_i z_i \right) \cdot \hat{j} = -g M x_{\text{CM}} \cdot \hat{k} + g M z_{\text{CM}} \cdot \hat{i}$$

ovvero

$$\tau = \vec{r}_{\text{CM}} \times (-\hat{j} M g) = \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}_t$$

per cui il **momento di forza dovuto alla gravità è uguale al momento di forza applicato solo sul centro di massa**; indipendentemente dalla distribuzione di massa, il momento di forza dovuto alla gravità si calcola considerando tutta la massa concentrata nel centro di massa. Ciò significa anche che se l'asse di rotazione è proprio il centro di massa, allora il momento di forza associato è nullo (essendo il braccio nullo): la forza di gravità non produce alcun momento di forza su un oggetto libero di muoversi.

## 8.8 Baricentro

Di seguito si espone la definizione del concetto di **baricentro**:

### CENTRO DI GRAVITÀ

La definizione di **baricentro** coincide con quella di *centro di massa*, anche definito **centro di gravità**, in quanto è il punto di applicazione della forza di gravità.

**Esempio 1:** Si consideri un oggetto sospeso ad una parete con l'asse di rotazione non allineato con il centro di massa; allora, in questo caso, si ha un momento di forza dovuto alla forza peso, determinabile come

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}_t \neq 0$$

Si ha equilibrio solamente quando il **centro di massa** è allineato alla verticale passante per il perno, ossia il punto attorno al quale il corpo ruota ed è, quindi, vincolato al soffitto. Per tale ragione è sufficiente considerare due misure per determinare il centro di massa: se il corpo è in equilibrio, allora è noto che il centro di massa si trova sulla verticale passante per il perno; ora è sufficiente appendere il medesimo corpo su un altro punto per determinare una nuova retta nella quale è collocato il centro di massa: l'intersezione delle due rette permette di determinare il baricentro.

**Esempio 2:** Si consideri un'asta di lunghezza  $L$  che, inizialmente verticale, viene inclinata con un angolo  $\theta$ . Naturalmente si ha che il momento di forza dovuto alla forza di gravità è

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r F_t \sin(\theta)$$

ma è noto che la distanza del centro di massa è pari a  $r = \frac{L}{2}$ , per cui

$$\vec{\tau} = r F_t \sin(\theta) = \frac{L}{2} m g \sin(\theta)$$

inoltre, dal momento che si suppone l'asta di densità uniforme e l'asse in corrispondenza di una sua estremità, si ottiene

$$\vec{\tau} = I \alpha = \frac{1}{3} m L^2 \cdot \alpha$$

per cui alla fine è immediato determinare l'accelerazione angolare  $\alpha$  come segue

$$\frac{L}{2} m g \sin(\theta) = \frac{1}{3} m L^2 \alpha \longrightarrow \alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \sin(\theta)$$

Se ora si volesse calcolare l'accelerazione lineare  $a$  nel punto più alto si ottiene:

$$a = \alpha L = \frac{3}{2} g \sin(\theta)$$

e ciò significa che ad un certo angolo si avrà che  $a > g$ , ossia il punto più alto dell'asta accelera più velocemente del centro di massa, per cui l'intera struttura in caduta potrebbe rompersi.

### 8.9 Ribaltamento

Si consideri un oggetto posizionato su un piano inclinato di un angolo  $\theta$  e avente un centro di massa CM posizionato in corrispondenza di  $\vec{r}_{CM}$ , come mostrato di seguito

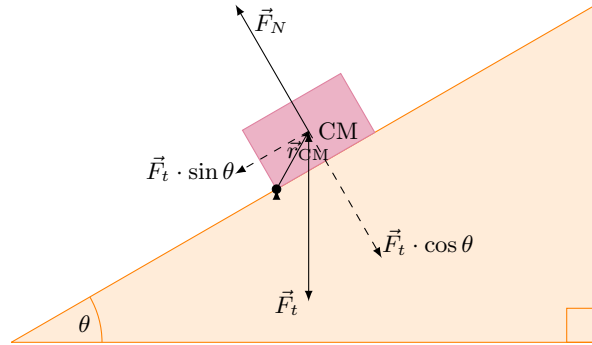


Figura 71: Piano inclinato

Ovviamente, su tale oggetto agisce la forza peso, la forza normale e la forza di attrito statico; facilmente, essendo tutto statico, si può applicare la seconda legge della dinamica, ottenendo:

$$\vec{F} = m\vec{a} = 0 = \vec{F}_s + \vec{F}_N + \vec{F}_t$$

per cui si può trovare che

$$F_N = F_t \cdot \cos(\theta) \quad \text{e} \quad F_s = F_t \cdot \sin(\theta)$$

**Osservazione:** Ovviamente, quando si considerano i vettori posizione, bisogna considerare come loro punto di applicazione l'asse di rotazione al fine di calcolare, poi, il momento di forza.

27 Aprile 2022

Ovviamente quando si considera un oggetto posizionato su un piano inclinato, la condizione di ribaltamento prevede che il centro di massa dell'oggetto sia perfettamente allineato sulla verticale con il perno di rotazione.

Chiamata  $b$  la distanza tra il perno e il piede della perpendicolare al piano inclinato passante per il centro di massa, mentre  $y_{CM}$  è la distanza tra il piano e il centro di massa stesso, come mostrato di seguito

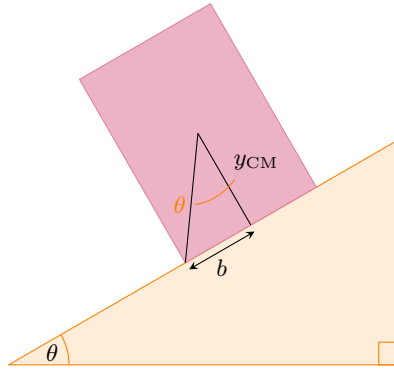


Figura 72: Piano inclinato

la **condizione di stabilità** prevede semplicemente che

$$\tan(\theta) < \frac{b}{y_{CM}}$$

per cui per aumentare la stabilità è sufficiente abbassare il baricentro o aumentare la larghezza della base di appoggio, in modo tale da rendere il rapporto più grande possibile.

**Esercizio:** Dal lato passeggero, una Jeep si ribalta se è inclinata più di  $41^\circ$ . Si determini la velocità non deve superare per evitare di ribaltarsi in una curva di raggio  $R = 100$  m.

Al fine di risolvere tale problema, è utile passare ad un sistema di riferimento non inerziale, in cui si può considerare la forza apparente centrifuga (se, invece, si considerasse un sistema di riferimento inerziale, vi sarebbero troppi contributi di forze da valutare e, siccome, si sta considerando un sistema nel quale la vettura accelera, l'asse non è fisso, per cui non si può applicare la condizione  $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ ).

Se si passa ad un sistema di riferimento non inerziale, allora si ha solo la forza apparente  $\vec{F}_a$  e la forza peso  $\vec{F}_t$ , per cui

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_a + \vec{F}_t$$

ovvero

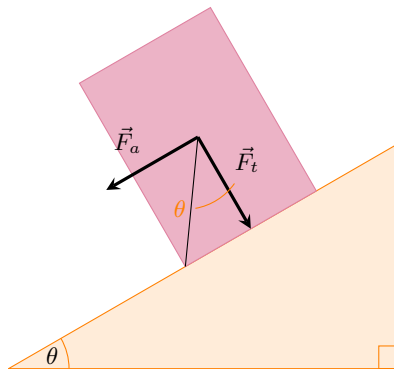


Figura 73: Condizione di ribaltamento di una Jeep

**Osservazione:** Si osservi che in questo la forza peso non è diretta verso il basso, in quanto si è considerato un sistema di riferimento non inerziale, per cui la forza peso è diretta verso il basso rispetto alla Jeep.

Si evince, quindi, che la condizione di stabilità è

$$\tan(\theta) < \frac{F_a}{F_t}$$

Naturalmente è noto che la forza apparente è una forza centrifuga, calcolabile come segue

$$f_a = \frac{mv^2}{R} \longrightarrow \tan(\theta) = \frac{v^2}{Rg}$$

Peranto, la velocità che non deve essere superata è

$$v = \sqrt{Rg \tan(\theta)}$$

## 8.10 Leve e ingranaggi

Il concetto di momento di forza si applica perfettamente a quello di leva, mostrata di seguito:

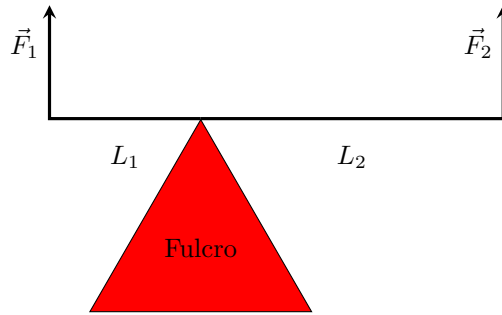


Figura 74: Funzionamento di una leva

Affinché l'intero sistema costituito da una leva sia in equilibrio, si deve verificare la condizione seguente

$$\sum \vec{\tau} = 0$$

ovvero si deve avere che

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = -F_1 L_1 + F_2 L_2 = 0 \longrightarrow F_1 L_1 = F_2 L_2$$

Ottenendo, semplicemente, la condizione seguente

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{L_2}{L_1}$$

per cui se, come nel caso descritto,  $L_2 > L_1$ , il loro rapporto è maggiore di 1, per cui applicando una piccola forza sul braccio più lungo si ottiene una forza maggiore sul braccio più corto.

Nel caso degli ingranaggi, se le ghiera sono ferme o si muovono a velocità costante, all'ora l'equilibrio rivela come nel punto di contatto  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , come mostrato di seguito:

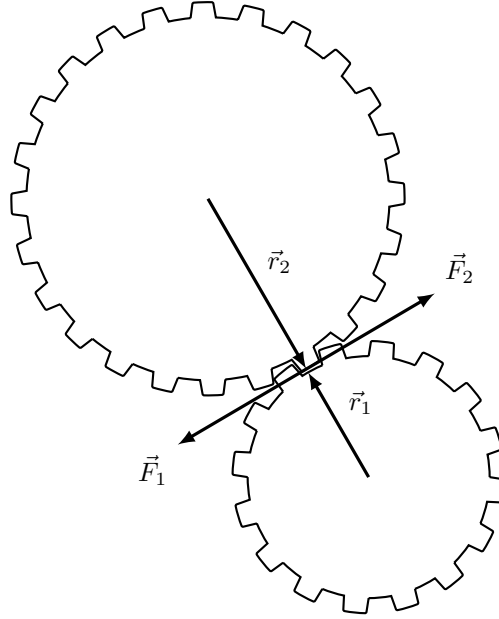


Figura 75: Momento di forza per un ingranaggio

Pertanto si ottiene che

$$\tau_1 = r_1 F_1 \quad \text{e} \quad \tau_2 = r_2 F_2$$

per cui si ottiene semplicemente che

$$\boxed{\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{r_1}{r_2} \longrightarrow \tau_1 = \tau_2 \cdot \frac{r_1}{r_2}}$$

ciò significa che applicando un piccolo momento di forza sulla ruota più grande, questo verrà ridotto di un fattore

$$\frac{r_2}{r_1}$$

sulla ruota più piccola (oppure verrà amplificato, nel caso contrario).

Analogamente, si può interpretare tale fenomeno fisico per mezzo degli angoli descritti dalle due ghiera, ottenendo

$$\boxed{r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2 \longrightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}}$$

se vi è velocità costante.

## 8.11 Potenza

Com'è noto nel caso di forze e lavoro, la potenza era data dalla variazione del lavoro nel tempo, per cui

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

ma essendo  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$  e  $d\vec{r} = \vec{v}dt$  è facile capire come  $dW = \vec{F} \cdot \vec{v}dt$ , per cui, analogamente

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Pertanto, siccome è noto che

$$dr = R d\theta = R \omega dt$$

è facile evincere come

$$F dr = FR\omega dt = dW \longrightarrow P = FR\omega$$

ma essendo  $FR = \tau$ , si perviene facilmente al risultato seguente

$$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$$

**Osservazione:** Si osservi che nel caso degli ingranaggi, si era ottenuta l'equazione

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \longrightarrow \tau_1 \omega_1 = \tau_2 \omega_2 \longrightarrow P_1 = P_2$$

ossia la potenza sviluppata dalle due ghiera permane la stessa.

## 8.12 Momento angolare

Di seguito si espone la definizione di **momento angolare**:

### MOMENTO ANGOLARE

Il **momento angolare** di un punto materiale viene definito come il prodotto vettoriale tra il vettore posizione e il vettore quantità di moto, ovvero

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

in cui è ovvio come  $\vec{r}$  dipende dall'origine scelta. Il momento angolare può essere sempre calcolato sia che vi sia o meno rotazione e può essere calcolato prendendo come punto di riferimento qualsiasi punto.

**Osservazione:** Si osservi che nel caso di un moto circolare, la quantità di moto è  $\vec{p} = m\vec{v}$ , per cui il momento angolare è

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = mR^2\vec{\omega}$$

essendo  $v = \omega R$ ,  $|\vec{r}| = R$  e  $\vec{r} \perp \vec{v}$ .

**Esempio 1:** Il momento angolare della terra che ruota attorno al Sole è, ovviamente, per quanto appena trovato

$$l = mR^2\omega = m_t \cdot d_{t-s}^2 \cdot \frac{2\pi}{T} = 2.7 \times 10^{40} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

**Esempio 2:** Il momento angolare di un elettrone in orbita intorno ad un protone (come l'idrogeno) è sempre dato da

$$l = mR^2\omega = \frac{h}{2\pi} = \hbar = 1.05 \times 10^{-34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

in cui ovviamente è possibile determinare

$$R = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \sqrt{\frac{\hbar T}{2\pi m}} = 5.4 \times 10^{-14} \text{ m} = 0.5 \text{ \AA}$$

essendo

$$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} \quad \text{e} \quad T = 1.6 \times 10^{-16} \text{ s}$$

### 8.13 Momento angolare e dinamica

Per quanto concerne un punto materiale si ha che

$$\frac{d}{dt}\vec{l} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

ma è ovvio come  $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$ , in quanto prodotto vettoriale tra due vettori paralleli, mentre  $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$ , per cui si ottiene come

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}}$$

che rappresenta un esatto analogo della seconda legge di Newton per il moto rotatorio.

**Osservazione:** Si osservi che nell'applicazione della legge

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

bisogna fare in modo che  $\vec{l}$  e  $\vec{\tau}$  siano valutati considerando la medesima origine in un **sistema inerziale**.

### 8.14 Equazioni cardinali della meccanica

Dato un sistema di punti materiali, è possibile calcolare il momento angolare totale di tale sistema, ovvero

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$$

calcolando la derivata nel tempo di tale quantità, è facile capire come si ottenga la seguente quantità

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{l}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i$$

ma applicando nuovamente la 3<sup>a</sup> legge di Newton, si ottiene che la somma di tutti i momenti di forza interni si cancellano, per cui

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{\text{ext}}$$

Ecco che sono state ottenute le due equazioni cardinali della dinamica

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{\text{ext}}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}}$$

**Osservazione:** È nota, ovviamente, la relazione seguente

$$\vec{r} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{v} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{a}$$

e, inoltre, si ha

- $m\vec{v} = \vec{p}$
- $m\vec{a} = \vec{F}$
- $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$
- $\vec{F} \cdot \vec{v} = P$
- ... continua ...

## 8.15 Equilibrio statico di un corpo rigido

È noto, ovviamente, che quando si ha

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$$

si ha la conservazione della quantità di moto e, conseguentemente, il centro di massa si muove a velocità costante.

Ora, però, è anche noto che se

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = 0$$

allora il momento angolare è conservato e, quindi, la velocità angolare è costante.

Ciò significa che un corpo a riposo, con queste due condizioni, permane nel suo stato di quiete. Pertanto, le condizioni di equilibrio per l'equilibrio statico sono

$$\boxed{\sum \vec{F} = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{\sum \vec{\tau} = 0}$$

e tale condizione può essere valutata scegliendo arbitrariamente qualsiasi punto di riferimento.

**Esempio:** Si consideri un albero di natale sul quale agisce, naturalmente, la forza peso  $\vec{F}_t$ , e due forze di sostegno  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  aventi braccio  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  dal centro di massa.

Naturalmente, affinché si abbia equilibrio statico deve essere che

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = 0 &\longrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_t = 0 \longrightarrow F_1 + F_2 = mg \\ \sum \vec{\tau} = 0 &\longrightarrow \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 0 \longrightarrow x_1 F_1 - x_2 F_2 = 0 \longrightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

Al fine di determinare  $F_1$  e  $F_2$  è sufficiente scrivere, impiegando la seconda equazione

$$F_1 = F_2 \frac{x_2}{x_1}$$

mentre dalla prima equazione appare evidente come

$$F_2 \cdot \left( \frac{x_2}{x_1} + 1 \right) = mg$$

per cui, in conclusione, si ha che

$$F_2 = \frac{mg}{1 + \frac{x_2}{x_1}} \quad \text{e} \quad F_1 = \frac{mg}{1 + \frac{x_1}{x_2}}$$

## 8.16 Orbita e spin

Dato un corpo sul quale vengono messi in evidenza il centro di massa e un punto diverso dal centro di massa, in posizione  $\vec{r}_i$  e  $\vec{r}_{\text{CM}}$ , è ovviamente possibile determinare

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{\text{CM}} + \vec{r}_{\text{rel}}$$

e se ora si calcola il momento angolare, si ottiene che

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{p}_i + \vec{r}_{\text{rel}} \times \vec{p}_i$$

Se ora si prende in considerazione l'intera totalità di tutti i punti costituenti il corpo si ottiene

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \vec{r}_{\text{CM}} \times \underbrace{\sum_i \vec{p}_i}_{\vec{p}_{\text{CM}}} + \sum_i \vec{r}_{\text{rel}} \times \vec{p}_i$$

per cui è possibile dividere il momento angolare totale in **momento angolare orbitale**  $\vec{L}_o$  e **spin**  $\vec{L}_s$ , come illustrato di seguito

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{p}_{\text{CM}}}_{\vec{L}_o = \text{orbitale}} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_{\text{rel}} \times \vec{p}_i}_{\vec{L}_s = \text{spin}}$$



per cui si ottiene la relazione fondamentale

$$\vec{L} = \vec{L}_o + \vec{L}_s$$

28 Aprile 2022

È noto che il momento angolare totale cambia quando la risultante totale dei momenti di forza è nullo. Inoltre, affinché vi sia equilibrio statico, la risultante delle forze applicate e dei momenti angolari deve essere nulla.

### 8.17 Momento angolare - Corpo rigido

Si consideri un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fissato con velocità angolare  $\omega$ ; si consideri, poi, un generico punto materiale  $m_i$  a distanza  $\vec{r}_i$  dall'asse avente velocità  $\vec{v}_i$ ; allora si ha che

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

ma essendo, com'è noto, verificata la relazione seguente

$$|\vec{v}_i| = |\vec{r}_i| \cdot \omega$$

si può esprimere  $\vec{v}_i$  in funzione di  $\omega$ , per cui

$$\vec{L} = \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega}$$

ma siccome  $\vec{\omega}$  è costante per tutti i corpi, si ottiene come il momento angolare per un corpo rigido sia

$$\boxed{\vec{L} = I \vec{\omega}}$$

**Esempio:** Il momento angolare di spin della terra è

$$L = I\omega \cong \frac{2}{5}MR^2\omega = \frac{2}{5}MR^2 \cdot \frac{2\pi}{T} = 7 \times 10^{33} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

### 8.18 Conservazione del momento angolare

È già noto che se non vi sono momenti di forza esterni che agiscono sul sistema, allora è possibile applicare la conservazione del momento angolare, ovvero

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

**Esempio 1:** Si consideri un bambino di massa  $m$  che si muove ad una velocità  $\vec{v}$  e che ad un certo punto salta su una giostra circolare di massa  $M$  e di raggio  $R$ , proprio sull'estremità della circonferenza. Se la giostra è inizialmente a riposo, si determini la velocità angolare del sistema alla fine.

In questo caso, l'energia in generale non è conservata, in quanto si tratta di una sorta di urto anelastico, in cui i due corpi, dopo l'urto, rimangono collegati fra di loro. Tuttavia, non essendoci momenti di forza esterni che agiscono sul sistema, si può applicare la conservazione del momento angolare, ovvero

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

Il momento angolare iniziale è dato solamente dal contributo del bambino, il quale si muove ad una velocità  $\vec{v}$  a distanza  $R$  dal centro della giostra, per cui

$$\vec{L}_i = \vec{r} \times m\vec{v} = mRv \cdot \hat{k}$$

Per quanto concerne il momento angolare finale, siccome i due corpi rimangono attaccati l'uno all'altro, si può approssimare come un corpo rigido avente momento angolare  $I\omega$ , in cui  $I = I_g + I_b$ , per cui

$$\vec{L}_f = (I_g + I_b) \cdot \omega = \left( \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 \right) \cdot \vec{\omega}$$

per cui, siccome  $L_i = L_f$ , è facile capire come la velocità angolare cercata sia data da

$$\omega = \frac{mv}{\left(\frac{1}{2}M + m\right) \cdot R}$$

**Esempio 2:** Si consideri il sistema Terra-Luna e si determini la posizione relativa del centro di massa dalla Terra e dalla Luna, come mostrato di seguito:

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_T \cdot 0 + m_L \cdot d}{m_T + m_L} = \frac{m_L}{m_T + m_L} \cdot d$$

supponendo la posizione  $x = 0$  in corrispondenza della Terra. Ecco, quindi, che la distanza Terra-centro di massa e Luna-centro di massa si calcola come:

$$d_L = d \frac{m_T}{m_T + m_L} \quad \text{e} \quad d_T = d \frac{m_L}{m_T + m_L}$$

in questo modo il momento orbitale del sistema Terra-Luna si calcola come segue

$$\vec{L}_o = (m_T d_T^2 + m_L d_L^2) \cdot \omega = [\dots] = \frac{m_T m_L}{m_T + m_L} d^2 \omega$$

in cui il prodotto  $m_T m_L$  prende il nome di “**massa ridotta**”.

Avendo, ora, determinato, il momento angolare orbitale, è possibile procedere al calcolo del momento angolare di spin per la Terra (ossia  $L_T = I_T \omega_T$ ) e per la Luna (ossia  $L_L = I_L \omega_L$ ), sfruttando il fatto che la velocità angolare della Luna è la stessa di quella del sistema, visto che mostra alla terra sempre la stessa faccia. Avendo ciò, ora, è possibile calcolare il momento angolare totale, dato dalla somma del momento angolare orbitale e quello di spin.

**Osservazione:** Si osservi che sia nel caso della Terra e della Luna che nel caso del bambino sulla giostra, il momento d'inerzia è dato da  $mR^2$

**Esercizio:** Si consideri un'asta *non omogenea* di lunghezza  $L = 101$  cm e forza peso  $F_t = 2.0$  N. Naturalmente il diagramma a corpi liberi dello scenario di cui sopra è

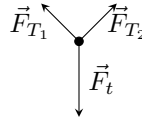


Figura 76

Naturalmente le condizioni di equilibrio sono

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad \text{e} \quad \sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = 0$$

Tali condizioni si traducono nelle seguenti equazioni (considerando come perno il punto di applicazione della forza peso):

$$\begin{cases} \vec{F}_{T_1} + \vec{F}_{T_2} + \vec{F}_t = 0 \\ -x \cdot F_{T_1} \cos(\theta) \cdot \hat{k} + (L - x) \cdot F_{T_2} \cos(\phi) \cdot \hat{k} \end{cases}$$

in cui ovviamente il momento di forza della forza peso è nullo, essendo il braccio proprio 0.

**Osservazione:** Si presti particolare attenzione al segno del prodotto vettoriale: impiegare sempre la regola della mano destra per determinare se il prodotto vettoriale **entra nella pagina** (ossia è **negativo**) oppure **esce dalla pagina** (ossia è **positivo**).

2 Maggio 2022

Considerando l'esempio precedente, è possibile, come già anticipato, considerare una differente origine attorno alla quale valutare i momenti di forza, come il punto di applicazione della prima forza di tensione  $\vec{F}_{T_1}$ , per cui si ottiene la seguente sommatoria:

$$\vec{\tau}_{T_1} + \vec{\tau}_{T_2} + \vec{\tau}_p = -x \cdot F_p + l \cdot F_{T_2} \cdot \cos(\phi)$$

in questo modo, di fatto, il momento di forza associato alla forza di tensione  $\vec{F}_{T_1}$  è nullo e tutti gli altri momenti di forza si calcolano in modo più agevole. Ovviamente il risultato ottenuto è il medesimo a quello precedente.

Al fine di determinare il modulo delle forze, è utile richiamare l'equazione di equilibrio di forze e scomporre tale equazione nelle sue due componenti  $x$  e  $y$ , per cui

$$\begin{aligned} x : -F_{T_1} \cdot \sin(\theta) + F_{T_2} \cdot \sin(\phi) &= 0 \\ y : F_{T_1} \cdot \cos(\theta) + F_{T_2} \cdot \cos(\phi) - F_t &= 0 \end{aligned}$$

a cui deve essere aggiunta anche l'equazione dei momenti di forza:

$$-x \cdot F_p + l \cdot F_{T_2} \cdot \cos(\phi)$$

È possibile, dall'ultima equazione, ricavare il vincolo

$$F_{T_2} \cos(\phi) = \frac{x}{L} F_t$$

per cui, dalla seconda equazione si evince come

$$F_{T_1} \cos(\theta) + \frac{x}{L} F_t - F_t \longrightarrow F_{T_1} \cos(\theta) = F_t \cdot \left(1 + \frac{x}{L}\right) \longrightarrow F_T = \frac{\left(1 + \frac{x}{L}\right)}{\cos(\theta)} \cdot F_t$$

Dovendo ora, determinare il valore di  $x$ , è utile impiegare la prima equazione, per cui

$$F_{T_1} \sin(\theta) = F_{T_2} \sin(\phi) \longrightarrow \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} F_t = \frac{x}{L} \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} F_t$$

e moltiplicando ambo i membri per  $L$ , si ha

$$(L - x) \tan(\theta) = x \tan(\phi) \longrightarrow x \cdot (\tan(\phi) + \tan(\theta)) = L \tan(\theta)$$

ottenendo, quindi

$$x = L \frac{\tan(\theta)}{\tan(\phi) + \tan(\theta)}$$

**Esercizio:** Il disco  $B$  ruota liberamente con velocità angolare  $\omega_B$  ed è solidale con un'asta cilindrica che ne sporge lungo l'asse di rotazione. Il disco  $C$  ha un foro al centro che consente di infilarlo sull'asta; il disco  $C$ , inizialmente in quiete, viene lasciato cadere sul disco  $B$ . Si determini la velocità angolare del sistema dopo che l'attrito tra  $B$  e  $C$  li ha portati a una velocità angolare comune. Si determini la variazione dell'energia cinetica del sistema e si esprima il risultato in termini di  $\omega_B$ ,  $I_B$  e  $I_C$ .

In questo problema, giacché vi è attrito, non si ha conservazione dell'energia, ma si ha conservazione del momento angolare, per cui

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \longrightarrow I_B \vec{\omega}_B = (I_B + I_C) \vec{\omega}$$

Per cui si evince semplicemente come

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_B \frac{I_B}{I_C + I_B}$$

Al fine di determinare la variazione di energia, si ha

$$\Delta E = E_f - E_i = K_{\text{rot},f} - K_{\text{rot},i} = \left(\frac{1}{2}(I_B + I_C)\omega^2\right) - \left(\frac{1}{2}I_B\omega_B^2\right) = \left(\frac{1}{2}(I_B + I_C) \cdot \omega_B^2 \frac{I_B^2}{(I_C + I_B)^2}\right) - \left(\frac{1}{2}I_B\omega_B^2\right) = \frac{1}{2}I_B\omega_B^2 \left(\frac{I_B}{I_C + I_B} - 1\right)$$

## 8.19 Seconda legge di Keplero

La seconda legge di Keplero afferma che

*La congiungente di un pianeta con il Sole spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali* (ciò

significa che i pianeti, quando sono più lontani dal sole, ruotano più lentamente rispetto a quando si trovano nelle sue prossimità), ovvero

$$A \propto \Delta t$$

Tale legge può essere dimostrata, ora, alla luce del teorema di conservazione del momento angolare: naturalmente la velocità  $\vec{v}$  del pianeta attorno al sole è sempre tangenziale all'orbita, avente raggio  $\vec{r}$ , per cui

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

ma se si considera  $\theta$  l'angolo compreso tra i vettori  $r$  e  $p$  si ottiene

$$\vec{l} = m\vec{r}\vec{v} = mrv \sin(\theta)$$

Dovendo determinare la relazione con l'area descritta dal pianeta, si osserva semplicemente come

$$dA = \frac{1}{2} ds \cdot r \sin(\theta) = \frac{1}{2} v dt r \sin(\theta)$$

Pertanto, si ottiene

$$dA = \underbrace{\left( \frac{1}{2} vr \sin(\theta) \right)}_{\frac{l}{2m}} dt$$

Pertanto, in conclusione si ottiene che

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = mrv \sin(\theta) \hat{k}$$

in cui  $mr v \sin(\theta)$  è costante in quanto il momento angolare è conservato.

## 8.20 Fisica di un quadricottero

I quadricotteri presentano quattro rotori, ciascuno dei quali garantisce una forza di propulsione  $\vec{F}_s$  identica. Tale velivolo può quindi compiere 4 movimenti, ciascuno per ogni asse e poi un movimento rotatorio attorno all'asse verticale.

La forza di propulsione  $\vec{F}_s$  può essere spiegata in modo analogo alla forza di propulsione di un razzo, per cui

$$F = \frac{dp}{dt} = v \frac{dm}{dt}$$

in cui, ovviamente,  $dm$  è la massa del fluido che viene spostato. Considerando il flusso di aria di forma cilindrica, si ha che

$$dm = \rho dV = \rho dl A = \rho v dt A$$

per cui si ottiene che

$$\frac{dm}{dt} = \rho v A$$

che permette di concludere come la forza di propulsione è dato da

$$\boxed{F_s = v^2 \rho A} \longrightarrow F_s \cong 2A\rho v^2$$

anche se dovrebbe essere  $F_s = v^2 \rho 2A$ , in quanto è più aria ad essere spostata, pari a circa due volte l'area del cilindro considerato.

Avendo a disposizione i dati del drone, si può considerare la velocità per mantenere una posizione stazionaria è

$$v = \dots \text{continua} \dots$$

È importante, tuttavia, considerare il fatto che i droni possono ruotare su se stessi; non solo, se tutte le eliche ruotassero nello stesso verso, per la conservazione del momento angolare, il drone

stesso ruoterebbe in direzione opposta a quello delle eliche; in realtà, le eliche opposte ruotano nello stesso verso che è opposto rispetto a quello delle altre due; in questo modo, quindi, si ottiene che

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \vec{L}_4 = 0$$

per cui il drone è stabile.

Al fine di muoversi, il drone deve modificare la forza di propulsione di opportune eliche:

- se il drone deve alzarsi, allora tutte le eliche devono fornire la stessa forza di propulsione;
- se il drone deve muoversi in orizzontale, è necessario aumentare la forza di propulsione delle eliche opposte al movimento, affinché la forza risultante sia orizzontale.
- se il drone deve ruotare su se stesso, allora saranno le eliche che ruotano nello stesso verso a dover presentare la stessa forza di propulsione, ottenendo un momento angolare tale da garantire la rotazione cercata.

3 Maggio 2022

## 9 Oscillazioni

L'oscillazione è alla base dello studio di molti fenomeni fisici. Il primo e più importante modello da studiare è il moto armonico, esposto di seguito.

### 9.1 Moto armonico

L'equazione alla base del moto armonico viene esposto di seguito:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

in cui

- $A$  prende il nome di **ampiezza**, avente la stessa unità di misura di  $x$ ;
- $\omega$  prende il nome di **pulsazione**, avente la misura di una frequenza  $[\text{s}^{-1}]$ ;
- $\phi$  si chiama **fase**, privo di unità di misura.

La **quantità fisica**  $x(t)$  presenta il seguente grafico

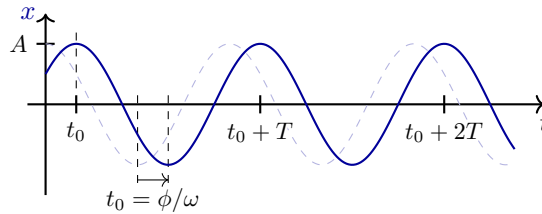


Figura 77: Grafico di equazione  $A \cdot \cos(\omega t + \phi)$

In cui è stato messo in evidenz anche il periodo  $T$  di oscillazione, calcolato come segue:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

**Osservazione:** Si osservi che l'equazione vista in principio può essere riletta come segue:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot (t - t_0))$$

in cui  $-\omega t_0 = \phi$ .

#### 9.1.1 Cinematica del moto armonico

Naturalmente, a partire dall'equazione del moto armonico seguente

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

si possono definire anche la derivata prima e seconda, ottenendo, rispettivamente

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

e

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

che rappresenta l'**equazione differenziale tipica del moto armonico**:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

le cui soluzioni sono tutte nella forma generale seguente

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

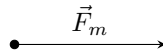
in cui  $\omega$  rappresenta la pulsazione fornita dal problema, mentre  $A$  e  $\phi$  rappresentano dei parametri iniziali, ossia delle “costanti di integrazioni”.

### 9.1.2 Dinamica del moto armonico

Il classico esempio di applicazione delle leggi del moto armonico è quello che prevede di considerare una molla, di costante  $k$ , solidale con una massa  $m$ , mostrata di seguito:

*raffigurazione*

Realizzando il diagramma dei corpi liberi si ottiene



Applicando la seconda legge della dinamica si ottiene che

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = -kz = ma_x$$

ma siccome l'accelerazione è la derivata seconda della posizione, si può facilmente vedere come

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2x$$

che è esattamente della forma vista in precedenza

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x(t)}$$

in cui è facile evincere che

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

e, quindi, la soluzione diviene

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

posto  $\omega$  pari a quanto visto in precedenza. Se il blocco inizia a riposo in posizione  $x_0 : A = x_0$ , per cui

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t)$$

**Osservazione:** Si osservi che dalla equazione seguente

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

si può facilmente capire come

- Più la molla è rigida più aumenta la pulsazione;
- Se la massa aumenta, la pulsazione decresce;
- Se la compressione iniziale aumenta, la pulsazione rimane la stessa, essendo totalmente indipendente dall'ampiezza.



## 9.2 Energia

L'energia meccanica totale di una molla è ovviamente data da

$$E_{\text{tot}} = K + \mathcal{U} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

che è un risultato calcolabile completamente a partire dall'equazione  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ , in quanto è noto come la velocità sia la derivata prima della posizione nel tempo, per cui

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

per cui si perviene al risultato proposto nel seguito

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(-\omega A \sin(\omega t + \phi))^2 = \frac{1}{2}A^2\omega^2 m \sin^2(\omega t + \phi)$$

ma dal momento che si è ottenuto che

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \longrightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

per cui l'energia cinetica diviene

$$K = \frac{1}{2}A^2 \underbrace{\omega^2 m}_k \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}A^2 k \sin^2(\omega t + \phi)$$

Per quanto concerne l'energia potenziale, invece, si può applicare direttamente la definizione  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ , per cui

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Dal momento che sono state ottenute due funzioni trigonometriche, di seguito vengono esposti i rispettivi grafici:

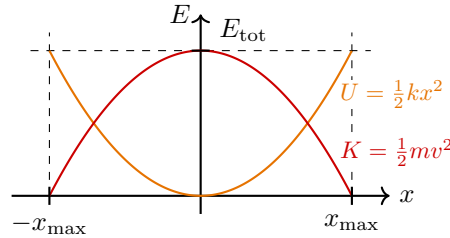


Figura 78: Oscillazione di energia cinetica e potenziale

**Osservazione:** Ovviamente, siccome le due funzioni di energia cinetica e potenziale presentano una funzione trigonometrica elevata al quadrato, l'oscillazione avrà una frequenza raddoppiata rispetto a quella di un oscillatore normale, in cui il termine trigonometrico è di primo grado: ciò significa che in ogni periodo vi saranno due picchi massimi anziché uno, in quanto la molla ha energia potenziale massima sia quando è estesa a sinistra che a destra, così come la velocità è massima in corrispondenza di  $x = 0$  per due volte quando la molla compie un'oscillazione:

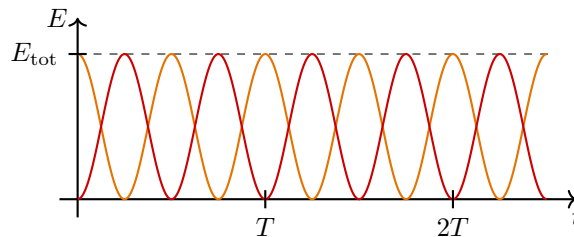


Figura 79: Oscillazione completa di energia cinetica e potenziale

**Osservazione:** Pertanto l'energia totale  $E_{\text{tot}}$  si può calcolare come

$$E_{\text{tot}} = K + \mathcal{U} = \frac{1}{2}kA^2 \underbrace{[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)]}_{=1} = \frac{1}{2}kA^2$$

per cui l'**energia totale è costante**: ciò non sorprende, in quanto si tratta di un **sistema conservativo**, in cui l'energia passa in continuazione da cinetica a potenziale.

### 9.3 Pendolo

Di seguito si espone la raffigurazione di un **pendolo**, per una migliore visualizzazione del problema fisico:

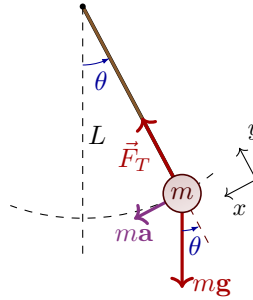


Figura 80: Pendolo in oscillazione

**Osservazione:** Si osservi che siccome un pendolo oscillante rappresenta una rotazione attorno ad un **asse fisso**, è possibile impiegare il concetto di **momento di forza**, per cui

$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

Naturalmente, la forza di tensione non produce alcun momento di forza, giacché  $\vec{F}_T$  e  $\vec{r}_T$  sono due vettori paralleli. La forza peso  $\vec{F}_t$ , invece, produce un momento di forza dato da

$$\vec{\tau}_t = \vec{r}_t \times \vec{F}_t = L \cdot F_t \sin(\theta)$$

pertanto si può scrivere

$$-\hat{k} \cdot F_t L \sin(\theta) = I\alpha \cdot \hat{k}$$

ma essendo  $\alpha$  la derivata seconda dell'angolo rispetto al tempo, si ottiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL}{I} \sin(\theta)$$

questa equazione rassomiglia all'equazione differenziale caratteristica del moto oscillatorio, ma la presenza di  $\sin(\theta)$  complica le cose. Tuttavia, per piccole oscillazioni (ovvero l'angolo  $\theta$  è piccolo), si può approssimare  $\sin(\theta)$  con  $\theta$ , essendo  $\sin(\theta) \cong \theta$ . Ciò permette di concludere che, per piccole oscillazioni, si ha

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL}{I}\theta$$

un'equazione differenziale le cui soluzioni sono tutte e sole nella forma

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

in cui, sempre per piccole oscillazioni (dell'ordine di  $15^\circ$ ), si ha

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

**Osservazione:** Naturalmente, nel caso in cui l'oggetto appeso al filo di un pendolo fosse una massa  $m$  puntiforme, allora chiaramente il suo momento d'inerzia si potrebbe calcolare come  $I = mL^2$ , essendo  $L$  la lunghezza del pendolo. Pertanto si ottiene che

$$\omega = \frac{g}{L}$$

che è un risultato più specifico di quello precedentemente ottenuto. Se, infatti, si avesse un corpo non approssimabile ad un punto, come il seguente

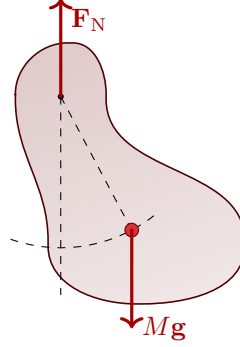


Figura 81: Esempio di pendolo fisico generale

Allora in questo caso non è possibile impiegare la definizione della pulsazione per un punto materiale, ma è necessario ricorrere alla formula più generale

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

**Osservazione:** Si osservi che, nella definizione generale di pulsazione, si ha

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

per cui, volendo isolare il periodo, si ottiene

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\sqrt{\frac{L\pi^2}{g}}$$

ma è interessante osservare come  $\pi^2 \cong 9.86$ , per cui è una buona approssimazione scrivere

$$T = 2\sqrt{L}$$

in cui naturalmente il periodo viene espresso in [s] e la lunghezza viene espressa in [m].

4 Maggio 2022

### 9.4 Moto armonico smorzato

Naturalmente, il moto armonico perpetuo è impossibile da ottenere praticamente, per cui è sempre presente un contributo esterno che porta alla conclusione di tale moto oscillatorio.

Le soluzioni generali di un moto armonico smorzato sono, in realtà, tre, esposte di seguito:

1. Una soluzione di **sottosmorzamento**, in cui è presente comunque una componente oscillatoria

$$x(t) = Ae^{\gamma t} \cos(\omega_s t + \phi)$$

nella quale l'ampiezza viene progressivamente ridotta col tempo di un fattore  $e^{\gamma t}$ . La pulsazione  $\omega_s$  viene definita come segue

$$\omega_s^2 = \omega^2 - \gamma^2$$

il che significa che anche la frequenza viene progressivamente ridotta.

2. Una soluzione di **smorzamento critico**, il quale si viene a verificare quando  $\omega = \gamma$ .
3. Una soluzione di **sovrasmorzamento**, il quale si verifica quando  $\omega < \gamma$ .

### 9.5 Moto armonico forzato

Un moto armonico forzato viene causato quando un sistema esterno contribuisce all'oscillazione di una molla, per esempio, per cui si ottiene

$$\sum \vec{F} = -kx - vb_x + F_0 \cos(\omega_e t)$$

in cui  $\omega_e$  è proprio la **pulsazione esterna**. La soluzione di questa equazione diviene

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_e t + \phi_e)$$

della quale possono essere determinati anche l'ampiezza  $A_0$  e  $\phi_e$ , ovvero

$$A_0 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \quad \text{e} \quad \tan(\phi_e) = \frac{2\gamma\omega_e}{\omega^2 - \omega_e^2}$$

in cui  $\gamma$  è una quantificazione dello smorzamento. Tali equazioni descrivono il fenomeno che prende il nome di **risonanza**.

## 10 Solidi e fluidi

Di seguito si espongono le principali proprietà di solidi e fluidi, le quali rappresentano il preludio per comprendere il concetto di termodinamica.

### 10.1 Proprietà dei solidi

Si consideri un corpo solido qualsiasi poggiato un piano e si definiscano le forze che possono agire su tale oggetto:

- La **forza normale**, ortogonale alla superficie del solido, che può essere a sua volta
  - di **tensione**, quando si tira il solido;
  - di **compressione**, quando si comprime il solido;
- La **forza parallela**, ossia le cosiddette **forze di taglio** (dall'inglese *shear forces*);

Molto spesso è utile anche definire il rapporto seguente per descrivere lo sforzo compiuto:

$$\boxed{\text{sforzo} = \frac{\text{forza}}{\text{area}}}$$

Per quanto riguarda una compressione/tensione si definisce il coefficiente

$$\sigma_t = \frac{F_N}{A}$$

ossia lo **sforzo di tensione**, mentre per le forze di taglio si ha

$$\sigma_s = \frac{F_p}{A}$$

ossia lo **sforzo di taglio**. Mentre la forza normale applicata su tutte le facce viene definita

$$\boxed{p = \frac{F_N}{A}}$$

che prende il nome di **pressione**.

#### 10.1.1 Deformazioni

Si consideri un solido di altezza  $l$  sulla quale viene esercitata una forza di compressione/tensione tale da produrre una variazione di altezza pari a  $\Delta l$ , andando così a definire il concetto di

$$\epsilon_t = \frac{\Delta l}{l}$$

ossia la **deformazioni di trazione**, dall'inglese *normal strain*, in cui *strain* significa proprio deformazione.

Se, invece, il solido viene compresso orizzontalmente tale da produrre una variazione di larghezza  $\Delta x$ , allora si definisce il coefficiente

$$\epsilon_s = \frac{\Delta x}{l}$$

che prende il nome di **deformazioni di taglio**, dall'inglese *shear strain*.

## 10.2 Elasticità

In prima approssimazione si può intuire come la deformazione vari linearmente in funzione della forza applicata al corpo rigido, seguendo il grafico seguente:

Naturalmente, la deformazione non può avvenire in maniera infinita, in quanto ad un certo punto il corpo solido si rompe (**frattura**) sotto la forza applicata. Se, invece, la deformazione aumenta con la deformazione sempre in maniera lineare, allora si entra nel regime di **plasticità**.

Ciò che costituisce un significato fisico importante è il rapporto tra sforzo ed elasticità, ovvero

$$\frac{\sigma_t}{\epsilon_t} = \frac{\frac{F_N}{A}}{\frac{\Delta l}{l}} = y$$

che prende il nome di **modulo di Young**. Se, invece, si considerano uno sforzo e una deformazione di taglio si ottiene

$$\frac{\sigma_s}{\epsilon_s} = \frac{\frac{F_p}{A}}{\frac{\Delta x}{l}} = y$$

che prende il nome di **modulo di compressione**. Un ultimo rapporto è il seguente

$$\mathcal{B} = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}$$

che prende il nome di **modulo di compressione**, dall'inglese *Bulk modulus*.

## 10.3 Fluidi

Si consideri un blocco di massa  $\Delta m$  e volume  $\Delta V$  immerso all'interno di un liquido, come per esempio l'acqua. Allora le forze esterne che agiscono su tale cubo sono

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \Delta m \vec{g} + \vec{F}_s = 0$$

in cui  $\vec{F}_s$  prende il nome di **forza di spinta dovuta al fluido attorno al cubo**, la quale è eguale e contraria alla forza peso del blocco, essendo esso in equilibrio, per cui

$$\vec{F}_s = -\Delta m \vec{g}$$

ma siccome il fluido presenta una densità  $\rho$  si può scrivere

$$\vec{F}_s = -\Delta V \rho \vec{g}$$

Se, ora, si suppone che il cubo è occupato da un altro materiale, si può sempre scrivere

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \Delta m \vec{g} - \Delta V \rho \vec{g}$$

e se si esegue la somma di tutti i blocchi di massa  $\Delta m$  per comporre un corpo di qualsiasi altra forma si ottiene

$$\boxed{\vec{F}_r = m \vec{g} - \rho V \vec{g}}$$

che prende il nome di **principio di Archimede**: *un corpo immerso parzialmente o totalmente in un fluido riceve una spinta di intensità pari al peso del fluido spostato e diretta verso l'alto lungo una retta passante per il centro di gravità del fluido spostato.*

## 10.4 Pressione

La definizione di **pressione** viene esposta di seguito:

### PRESSIONE

La pressione viene definita come **forza per unità di area**, ovvero

$$p = \frac{F}{A}$$

**Osservazione:** Si osservi che la pressione  $p$  è uno scalare perché si considera solamente la componente della forza  $\perp$  alla superficie.

Le unità di misura della pressione sono differenti:

- Il **Pascal** definito come

$$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

- Il **bar** definito come

$$1 \text{ bar} = 100 \text{ kPa} = 750 \text{ Torr}$$

- L'**atmosfera** definita come

$$1 \text{ atm} = 101.325 \text{ kPa}$$

### 10.4.1 Principio (o legge) di Pascal

Il **principio di Pascal** viene esposto di seguito:

### PRINCIPIO DI PASCAL

La pressione esercitata su un fluido viene trasmessa inalterata in ogni punto del fluido e alla superficie del suo contenitore.

che si può facilmente visualizzare con l'esempio seguente:

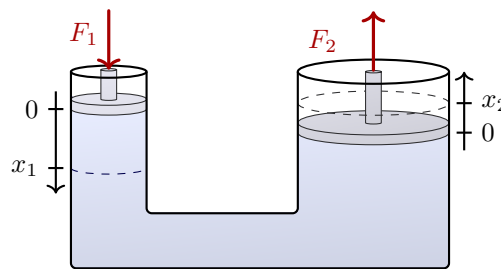


Figura 82: Principio di Pascal

Nel quale è evidente come, essendo la pressione costante, si ottiene

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \longrightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

che è il principio alla base delle **presse idrauliche**, ideate da Joseph Bramah.

## 10.5 Equilibrio idrostatico

Si consideri un blocco di massa  $m$ , avente un'area di base  $A$  e un'altezza  $dz$  immerso in un fluido. Allora la risultante delle forze applicate dal fluido sulle facce del parallelepipedo si può ottenere considerando il fatto che la pressione sia eguale su ogni faccia: pertanto la risultante orizzontale è ovviamente nulla, in cui tutti i contributi si cancellano, mentre per quanto riguarda la componente verticale si ottiene (non considerando il peso)

$$F_s = F(z) - F(z + dz) = p(z) \cdot A - p(z + dz) \cdot A$$

ma è noto, per il principio di Archimede che  $F_s = \rho g V$ , per cui

$$\rho g V = p(z)A - p(z + dz)A$$

ma siccome  $V = Adz$ , dividendo ambo i membri per  $V$  si ottiene

$$\rho g = \frac{p(z) - p(z + dz)}{dz} = -\frac{dp}{dz}$$

che rappresenta l'**equazione fondamentale dell'equilibrio idrostatico**

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g}$$

**Osservazione:** Attraverso tale risultato, è possibile ora determinare la pressione in una colonna di fluido. Partendo dal presupposto che l'acqua è un fluido incompressibile, per cui la sua densità  $\rho$  è indipendente da  $p$ , per cui  $\rho g$  è costante, da cui

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \longrightarrow \int dp = \int -\rho g dz$$

e volendo conoscere il profilo di pressione in funzione dell'altezza, si ottiene

$$\int_{p_{\text{atm}}}^{p(z)} dp = -\rho g \int_0^z dz \longrightarrow p(z) - p_{\text{atm}} = -\rho g z$$

per cui si ottiene

$$\boxed{p(z) = p_{\text{atm}} + \rho g z}$$

Tale risultato permette di capire quale sia l'altezza  $z_0$  alla quale la pressione atmosferica è eguale alla pressione del fluido, per cui

$$p(z_0) = p_{\text{atm}} + \rho g z_0 \longrightarrow z_0 = 0 \longrightarrow z_0 = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} = 10 \text{ m}$$

per cui si può anche scrivere

$$p(z) = P_{\text{atm}} \cdot \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)$$

ed essendo  $z_0 = 10 \text{ m}$  si ottiene se si scende sott'acqua, con  $z_2 = -20 \text{ m}$ ,  $z_3 = -30 \text{ m}$ , allora il coefficiente

$$1 - \frac{z_2}{z_0} = -2 \quad \text{e} \quad 1 - \frac{z_3}{z_0} = -3$$

per cui ogni 10 m la pressione atmosferica aumenta di 1 atm.



5 Maggio 2022

Grazie alla legge fondamentale dell'idrostatica

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

è possibile calcolare le variazioni di pressione in funzione della variazione di profondità. Grazie a tale risultato si è evinto come la pressione atmosferica non possa spingere una colonna d'acqua più alta di circa 10 m.

**Esempio:** La densità dell'acqua molto salata Mar Morto è  $\rho_f = 1.24 \text{ kg/l}$ . Si determini circa quale frazione del corpo di un bagnante rimane emerso. Dal momento che la somma delle forze esterne è nulla

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$$

per cui naturalmente la forza peso del bagnante (che si applica sul centro di massa del bagnante stesso) e la forza di spinta (che si applica sul centro di massa del fluido spostato), per cui

$$m\vec{g} = \rho_f \vec{g} V_f \longrightarrow V_f = \frac{m}{\rho_f}$$

Da notare che  $V_f$  è il volume di fluido spostato, mentre il volume del bagnante è dato da

$$V_b = \frac{m}{\rho_b}$$

supponendo che la densità del bagnante sia  $\rho_b \cong 1 \text{ kg/l}$ . Allora appare evidente come la porzione di corpo emerso è

$$1 - \frac{V}{V_b} = 1 - \frac{1}{1.24} \cong 20\%$$

**Esempio:** Per quanto riguarda un sifone ... continua ...

## 10.6 Flusso laminare e turbolento

Quando si considera un fluido, una parte di esso viene definito **laminare** un quanto il suo moto è pressoché lineare, mentre se il fluido è **turbolento** il suo moto è irregolare.

Si può facilmente capire come il moto di un fluido turbolento sia molto complicato da descrivere a causa di una continua dissipazione dell'energia in scale sempre più piccole.

Nel caso di un fluido laminare, invece, il suo moto può essere descritto tramite le cosiddette **linee di flusso** che non si incontrano mai e si mantengono sempre alla stessa distanza.

## 10.7 Equazione di continuità

Si consideri un contenitore come quello esposto, in cui vengono messi in evidenza delle sezioni e le loro proprietà:

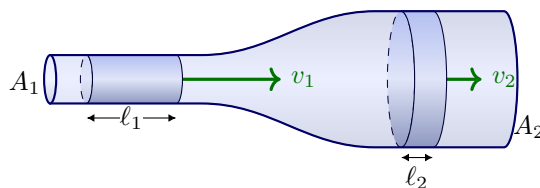


Figura 83: Equazione di continuità

Il principio alla base del fluido descritto nella Figura 83 è che la quantità di massa che attraverso il tubo si mantiene costante in quanto la **materia si conserva**, per cui

$$\Delta m_1 = \Delta m_2$$

un'equazione che, riscritta calcolando le masse si diviene

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 \Delta l_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$$

$$\Delta m_2 = \rho_2 A_2 \Delta l_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

che permette di ottenere l'**equazione di continuità** seguente

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

e se si considera un flusso incomprimibile, allora  $\rho_1 = \rho_2$ , per cui

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

**Osservazione:** Si osservi che un palloncino riempito di elio, quando si trova in un treno in decelerazione, non si sposta in

## 10.8 Teorema di Bernoulli

Si consideri un tubo riempito di fluido incomprimibile e che presenta i parametri di seguito esposti:

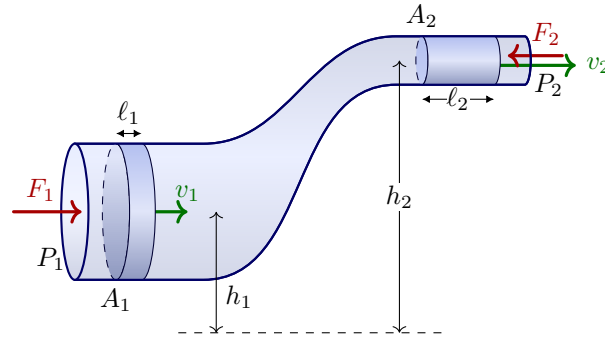


Figura 84: Teorema di Bernoulli

Applicando la conservazione dell'energia ad un fluido incomprimibile, si evince come

$$E_1 = \Delta m g h_1 + \frac{1}{2} \Delta m v_1^2$$

$$E_2 = \Delta m g h_2 + \frac{1}{2} \Delta m v_2^2$$

Allora si evince come la variazione di energia sia

$$\Delta E = E_2 - E_1 = W_{\text{ext}} = F_1 \Delta l_1 - F_2 \Delta l_2$$

ma sapendo che, ovviamente,

$$F_1 = P_1 A_1 \quad \text{e} \quad F_2 = P_2 A_2$$

per cui si ottiene che

$$W_{\text{ext}} = F_1 \Delta l_1 - F_2 \Delta l_2 = P_1 A_1 \Delta l_1 - P_2 A_2 \Delta l_2 = P_1 \Delta V_1 - P_2 \Delta V_2 = (P_1 - P_2) \cdot \Delta V$$

e considerando l'energia

$$\Delta E = \Delta m g h_1 + \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \Delta m g h_1 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 = (P_1 - P_2) \cdot \Delta V$$

che permette di concludere che

$$\rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2 = \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 = \text{costante}$$

Più in generale

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{costante}$$

per cui se la velocità aumenta, mantenendo costante l'altezza, la pressione deve diminuire, etc.

**Esempio 1:** Si consideri una boccetta di profumo: quando si preme la boccetta di profumo si accelera l'aria, la quale aumenta la sua velocità e, quindi, siccome l'altezza si mantiene costante, la pressione deve diminuire e quindi si ha un effetto di aspirazione.

## 10.9 Viscosità

Di seguito si fornisce il concetto di viscosità:

### VISCOSITÀ

La **viscosità** viene definita come la forza dovuta ad un attrito interno, calcolata come

$$F = h \cdot \frac{Av}{l}$$

**Esempio:** In un recipiente cilindrico pieno d'acqua sono praticati diversi fori. L'acqua esce dai fori in direzione orizzontale. Si determini a quale altezza deve essere praticato un foro perché l'acqua che ne zampilla tocchi terra alla massima distanza dal cilindro, supponendo che il fluido non sia viscoso.

Applicando il teorema di Bernoulli, si consideri il punto di riferimento dato dal “pelo dell'acqua”, sul quale vi è una pressione pari alla pressione atmosferica, per cui

$$p_{\text{atm}} + \rho gL + 0 = \text{costante}$$

Se si considera un foro a distanza  $d$  dal “pelo dell'acqua” si ottiene che

$$p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho g d + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}$$

e se si eguagliano le due quantità ottenute si ottiene che

$$v = \sqrt{2g \cdot d}$$

e volendo calcolare la distanza alla quale il getto d'acqua tocca terra, si consideri la seguente composizione del moto

$$\begin{cases} x = vt \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (L - d) \end{cases}$$

e siccome al tempo  $t$  cercato  $y(t) = 0$ , si evince come

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot (L - d)}{g}}$$

per cui la distanza alla quale il getto tocca terra è

$$x = vt = \sqrt{4d \cdot (L - d)}$$

## 11 Termodinamica

9 Maggio 2022

Le leggi della meccanica note ed esposte fino a questo momento non sono sufficienti per comprendere e studiare appieno il moto di ogni sistema, in quanto molto spesso i sistemi interagenti sono costituiti da una quantità di particelle enorme, per le quali non è possibile studiare singolarmente la dinamica; per questo è più significativo abbandonare una teoria microscopica per abbracciare una **teoria macroscopica** di descrizione dei fenomeni naturali, ossia una **teoria fenomenologica** che si basa su osservazione del comportamento di sistemi nella loro interezza.

Di seguito si espone la definizione di **termodinamica**:

### TERMODINAMICA

La **termodinamica** è la **descrizione macroscopica** dell'**interazione** di un **sistema** con il suo **ambiente**.

**Osservazione:** Dalla definizione di cui sopra si evince come il sistema rappresenta ciò che si andrà a studiare, mentre l'ambiente è tutto il resto.

Al fine di studiare i sistemi termodinamici è fondamentale impiegare delle **coordinate termodinamiche**, ossia delle **variabili macroscopiche**, di cui viene esposta la definizione nel seguito:

### COORDINATE/VARIABILI TERMODINAMICHE

Le **coordinate/variabili termodinamiche** sono le **grandezze fisiche macroscopiche** che descrivono lo **stato** del sistema.

**Esempio:** Esempi di coordinate termodinamiche sono

- *pressione*, ossia il rapporto tra la forza e la superficie su cui viene esercitata;
- *volume*, il quale diviene una coordinata particolarmente importante quando si studiano i gas, essendo comprimibili;
- *numero di moli*, over per *mole* è da intendersi la quantità di materia che si trova in 12 g di  $C^{12}$ , ossia carbonio 12 (ossia la massa di un numero di Avogadro di particelle, pari a  $6.02 \times 10^{23}$  particelle, siano esse atomi o molecole);
- *temperatura*, di cui verrà fornita la definizione nel seguito;
- *energia interna*;
- *entropia*;
- etc.

### EQUILIBRIO/TRASFORMAZIONE TERMODINAMICO

Se le coordinate termodinamiche prese in esame per lo studio di un sistema rimangono **costanti** nel tempo, si dice che il sistema termodinamico è in **equilibrio** (si parla, infatti, di **equilibrio termodinamico**).

Alternativamente, se tali coordinate termodinamiche cambiano (non devono cambiare necessariamente tutte), allora il sistema non è più in equilibrio e, in questo caso, si parla di **trasformazione termodinamica**.

**Esempio:** Un cubetto di ghiaccio posto sul tavolo di una stanza non è in equilibrio, in quanto con buona probabilità inizierà a sciogliersi, cambiando volume e temperatura; per evitare la fusione

del ghiaccio si sarebbe dovuto **isolare termicamente** tale sistema.

Al fine di isolare un sistema con l'esterno si possono impiegare delle **pareti adiabatiche**, ossia delle pareti isolanti che **impediscono** ogni forma di **interazione** con l'**ambiente esterno**; esempi di pareti adiabatiche (o materiali isolanti) sono la lana, un termos, la spugna espansa, etc.

Ovviamente, il concetto di parete adiabatica non esiste in realtà, si tratta solamente di un'approssimazione valida per brevi periodi, in quanto è impossibile isolare un sistema all'infinito; inoltre l'isolamento vale sia per freddo che per caldo, quindi impedisce un trasferimento di calore da e verso l'esterno.

Una **parete diatermica**, al contrario, è una parete che separa il sistema dall'ambiente esterno che non solo permette l'interazione del sistema con l'esterno (in termini di scambi di energia e calore), ma viene anche favorita, come nel caso di metalli (ovviamente lo scambio di calore non sarà perfetto, in quanto si parla di approssimazioni necessarie per poter lavorare).

## 11.1 Principio “Zero” della termodinamica

Di seguito si espone l'enunciato del **principio “Zero” della termodinamica**:

### PRINCIPIO “ZERO” DELLA TERMODINAMICA

Due sistemi in equilibrio termico con un terzo sistema (le cui coordinate termodinamiche, quindi, non variano) sono in equilibrio termico tra di loro (ossia una sorta di **proprietà transitiva**).

**Osservazione 1:** Il principio zero della termodinamica, quindi, afferma che se un sistema  $A$  è in equilibrio con un sistema  $B$  e il sistema  $B$  è anche in equilibrio con un sistema  $C$ , allora i sistema  $A$  e  $C$  sono anche in equilibrio termico.

**Osservazione 2:** Si osservi che al fine di verificare se un sistema è in equilibrio termodinamico con un altro non è necessario misurare tutte le coordinate termodinamiche, ma è sufficiente solamente misurare la **temperatura**.

## 11.2 Temperatura

Di seguito si espone la definizione di **temperatura**:

### TEMPERATURA

La **temperatura** è una grandezza fisica che definisce se 2 sistemi sono in **equilibrio termico**.

Tuttavia, tale definizione non risulta essere molto pratica. Molto spesso è più conveniente impiegare la **definizione operativa** seguente:

### TEMPERATURA

La **temperatura** viene misurata tramite un **termometro**, ossia uno strumento che rileva la variazione di temperatura tramite la variazione significativa di un'altra grandezza fisica (tramite, quindi, delle **misure indirette**), come il **volume**, la differenza di potenziale (come per una termocoppia), la resistenza, la **pressione** di un gas mantenuto a volume costante, etc.

**Osservazione 1:** Ovviamente uno stesso termometro non può essere impiegato ovunque, per misurare ogni temperatura, in quanto vi sono limiti fisici dell'utilizzo dello strumento intrinseci nella struttura dello stesso: per esempio il mercurio a  $-38\text{ }^{\circ}\text{C}$  solidifica.

**Osservazione 2:** Al fine di costruire uno strumento capace di misurare una temperatura, è necessario effettuare la **taratura** dello stesso. Un modo molto pratico per effettuare tale taratura è quello di

- posizionare il termometro su un blocco di ghiaccio fondente, pari a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;
- posizionare il termometro su una pentola di acqua bollente, pari a  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;
- dividere tale intervallo in 100 pari uguali.

La scelta di considerare come punto di riferimento i cambiamenti di fase dell'acqua è fondamentale in quanto si richiede che la temperatura si mantenga costante durante la misurazione, cosa che si ha sempre quando si ha un cambiamento di fase (un **termostato**, infatti, è un **sistema ideale**, in quanto non esistente in natura, che mantiene la **temperatura costante**; ovviamente la scelta di un termostato dipende dal sistema e dall'ambiente considerati).

Tuttavia, effettuare la taratura prendendo come punto di riferimento i cambiamenti di fase dell'acqua, presenta un limite intrinseco: la **temperatura** in generale, e quella di fusione ed ebollizione in particolare, **dipende dalla pressione**, come mostrato di seguito:

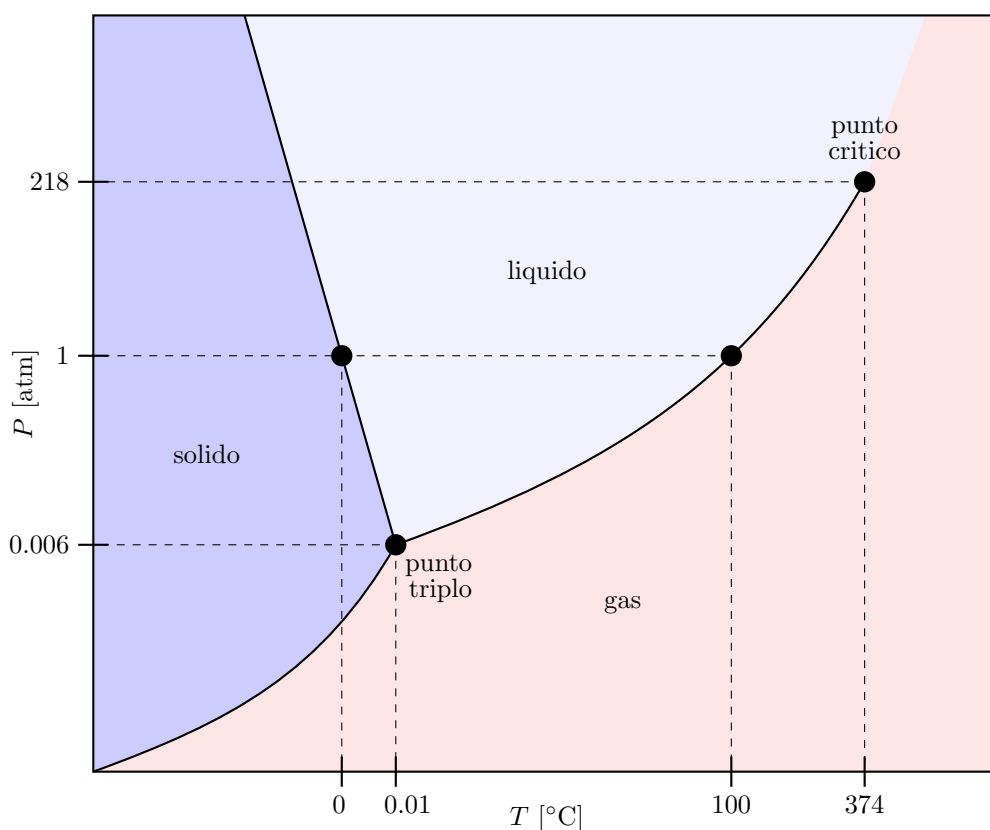


Figura 85: Diagramma di stato dell'acqua

**Osservazione:** Un altro metodo, molto più complesso, per tarare un termometro è quello di misurare il **punto triplo dell'acqua**, ossia il punto nel quale coesistono i 3 stati dell'acqua, realizzabile posizionando dell'acqua liquida all'interno di un contenitore ermetico nel quale è stato creato il vuoto e abbassando progressivamente la temperatura, fino a quando si forma del ghiaccio; il punto triplo si trova a  $p = 0.61\text{ kPa}$  e alla temperatura di  $T = 0.01\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Tuttavia, in questo modo, si dispone di un solo punto per tarare il termometro, e non più due come nel caso precedente. Tuttavia, nell'ipotesi in cui si ponga che esista una relazione di proporzionalità diretta tra temperatura e pressione, si può scrivere

$$T(p) = Ap$$

allora tramite un termometro a pressione (contenente un gas a volume costante) si rileva la pressione alla quale si è ottenuto il punto triplo, ottenendo

$$A = \frac{T_3}{p_3}$$

ove  $T_3$  e  $p_3$  sono rispettivamente la temperatura e la pressione rilevate nel punto triplo. Il valore  $A$  ottenuto è il **coefficiente angolare** della retta di proporzionalità diretta tra temperatura e pressione, per cui

$$T(p) = \frac{T_3}{p_3} \cdot p$$

Resta ora, solamente, di attribuire a  $T_3$  un valore di temperatura, come si era fatto in precedenza con 0 °C e 100 °C. Kelvin, infatti, attribuì al valore  $T_3 = 273.16$  K (che corrisponde a 0.01 °C), in modo tale che la differenza tra la temperatura di ebollizione dell'acqua e quella di fusione del ghiaccio fosse sempre pari a 100 gradi, costruendo, quindi, una **scala centigrada**.

Si osservi, infine, che la scala costruita da Kelvin è una **scala assoluta**, in quanto il coefficiente angolare è positivo e la pressione è sempre non negativa, per cui la temperatura è sempre positiva e il suo valore minimo è lo zero, ossia lo **zero assoluto**. In base a tale scala si ha la seguente corrispondenza

$$0\text{ °C} \longrightarrow 273.15\text{ K} \quad \text{e} \quad 100\text{ °C} \longrightarrow 373.15\text{ K}$$

### 11.3 Gas perfetto

Si osservi, però, che anche il termometro così costruito presenta un problema: la temperatura e la pressione che si misurano con il termometro dipendono dal termometro stesso, a seconda della **quantità** e del **tipo** di **gas** che si sceglie, come tra  $O_2$ ,  $N_2$  e He: a pressioni molto elevate le temperature dei diversi gas hanno valori molto differenti fra loro:

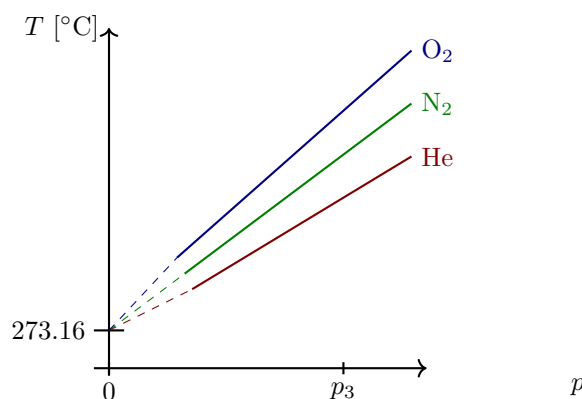


Figura 86: Variazione di temperatura a differenti livelli di pressione

Ciò che, invece, succede quando la pressione  $p_3 \rightarrow 0$ , ossia la quantità di gas presente all'interno del termometro a pressione diminuisce tendendo anche esso a 0, allora la temperatura dei gas tende allo stesso valore, ovvero  $T_3 = 273.16$  °C:

$$T = \lim_{p_3 \rightarrow 0} \frac{T_3}{p_3} \cdot p$$

in cui  $T_3 = 273.16$  °C.

Da tale osservazione segue la definizione di **gas perfetto**

#### GAS PERFETTO

Un gas perfetto è un “gas fittizio” per il quale la proporzionalità  $p - T$  tra pressione e temperatura non vale solo nel caso rarefatto, ma vale sempre.

**Osservazione:** Di seguito si espone un riepilogo delle scale di temperatura definite:

SCALE DI TEMPERATURA			
SCALA	CENTIGRADA	ASSOLUTA	DEFINIZIONE
Celsius (°C)	Sì	No	La temperatura di fusione dell'acqua è posta a 0 °C, mentre quella di ebollizione a 100 °C; inoltre la divisione della scala è equa dell'intervallo 0 – 100.
Kelvin (K)	Sì	Sì	La scala è definita un funzione del punto triplo dell'acqua, tenendo conto della pressione.
Fahrenheit (°F)	No	No	Fahrenheit ha creato una miscela di acqua e sale e ha posto a 0 °F il punto di fusione più basso possibile di tale miscela. L'altro punto di riferimento scelto è 96 °F (corrispondente alla temperatura del corpo umano). La conversione da Celsius a Fahrenheit si usa $T_F = 1.8 \cdot T_C + 32$
Rankine (°R)	No	Sì	È una scala assoluta, non centigrada e con il valore di un grado pari a quello Fahrenheit, per cui $T_R = 1.8 \cdot T_C$

## 11.4 Dilatazione termica

Il termometro a mercurio funziona sulla base del fenomeno della **dilatazione termica**. Si consideri una barra metallica di lunghezza iniziale  $L_0$ , posta vicino ad un materiale termostato (che non cambia la propria temperatura) che fa sì che la temperatura della barra passi da  $T_0$  a  $T$ , allora la lunghezza finale diviene  $L$ .

Si ha che  $\Delta T = T - T_0$  e  $\Delta L = L - L_0$  sono legate dalle seguenti proporzionalità:

1.  $\Delta L \propto \Delta T$ : più si scalda un materiale più si allunga;
2.  $\Delta L \propto L_0$ : un'asta più lunga, a parità di differenza di temperatura, si allunga di più rispetto ad un'asta più corta;
3.  $\Delta L$  dipende dal materiale e non è universale.

Ciò permette di scrivere la seguente legge:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

in cui  $\alpha$  è un **coefficiente di dilatazione termica lineare** e dipende dal materiale, indipendentemente dalla sua geometria.



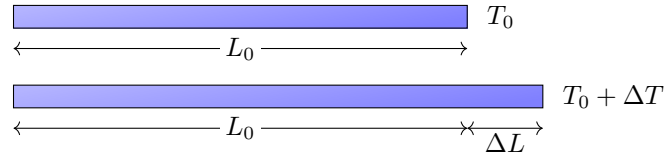


Figura 87: Dilatazione termica lineare

Ovviamente è da intendersi questa relazione come un'approssimazione, in quanto la relazione non è propriamente diretta tra aumento di lunghezza e temperatura se si considerano grandi intervalli di temperatura; diviene tanto più vero quanto più gli intervalli di temperatura considerati sono piccoli. Non solo, ma anche lo stesso  $\alpha$  non è costante: varia il proprio valore in funzione della temperatura alla quale si sta lavorando.

È possibile, quindi, passare dalla formula particolare vista in precedenza a quella più generale esposta di seguito:

$$dL = \alpha(T) \cdot L \cdot dT$$

tale per cui

$$\alpha(T) = \frac{1}{L} \cdot \frac{dL}{dT}$$

Ovviamente, passando dal caso lineare a quello tridimensionale, si ottiene che per piccoli intervalli di temperatura si ha

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T$$

in cui  $\beta$  è un **coefficiente di dilatazione termica volumica** e dipende dal materiale, indipendentemente dalla sua geometria. Considerando il differenziale si ottiene

$$dV = \beta(T) \cdot V \cdot dT$$

da cui si evince la seguente relazione

$$\beta(T) = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dT}$$

**Osservazione:** Si osservi che i valori  $\alpha$  e  $\beta$  sono quasi sempre positivi, tranne alcune eccezioni: l'acqua, al di sotto di 4 °C, presenta un  $\beta < 0$ , il che significa che diminuendo la temperatura, il volume aumenta; ciò risulta essere fondamentale per la vita nei laghi: quando la temperatura diminuisce, superati i 4 °C, l'acqua aumenta di volume, diminuisce la propria densità e si sposta verso l'alto, fino a quando si ghiaccia, isolando l'acqua sottostante che rimane liquida e la cui temperatura non scende ulteriormente, essendo isolata dal ghiaccio.

In generale, tuttavia, per la grande maggioranza dei materiali, aumentando la temperatura, il volume aumenta; questo è dovuto al fatto che le particelle all'interno di un solido, per esempio, sono legate fra di loro attraverso delle "molle", tale per cui l'energia potenziale del legame è data proprio da una sorta di legge di Hooke

$$E = \frac{1}{2} kx^2$$

per cui l'energia accumulata dipende dalla distanza:

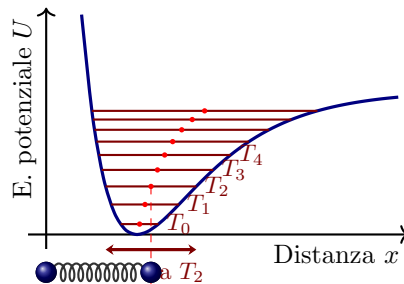


Figura 88: Energia potenziale delle molecole in funzione della loro distanza

Pertanto, fornendo poca energia alle particelle, e quindi poca temperatura (nell'esempio  $T_0$ ), la distanza media tra le molecole che si otterrà sarà data dal punto medio evidenziato in corrispondenza di  $T_0$ . Se invece l'energia è maggiore, e quindi la temperatura è maggiore, come  $T_4$ , allora la distanza media tra le molecole che si otterrà sarà data dal punto medio evidenziato in corrispondenza di  $T_4$ , per cui la distanza media tra gli atomi è più elevata a temperatura maggiore rispetto a temperature minori.

**Osservazione:** Si osservi che nei binari di un treno è molto più conveniente lasciare più spazi tra i binari piuttosto che uno solo finale in quanto la dilatazione è proporzionale alla lunghezza e quindi si dovrebbe lasciare uno spazio enorme alla fine del binario per ottenere il medesimo risultato.

11 Maggio 2022

Si osservi che in prima approssimazione la relazione tra temperatura e volume di mercurio è lineare (e non direttamente proporzionale), in quanto a volume 0 non corrisponde una temperatura di 0 gradi, in quanto bisogna considerare un'intercetta non nulla, ovvero

$$T = A \cdot V + B$$

Invece, se si considera il termometro a pressione, allora in questo caso esiste una proporzionalità diretta tra pressione e temperatura: alla pressione 0 corrisponde lo 0 K.

$$T = A \cdot p$$

Si osservi, inoltre, che il coefficiente di dilatazione termica presenta come unità di misura  $K^{-1}$ , in quanto, ovviamente

$$\alpha = \frac{[m]}{[m] \cdot [K]}$$

anche se è possibile misurare  $\alpha$  sia in  $K^{-1}$  che in  $C^{-1}$ , in quanto si tratta di differenza di temperatura e l'ampiezza del grado nelle due scale è la medesima; differente sarebbe stato se si fosse considerata la scala Fahrenheit.

Si osservi che la relazione che sussiste tra il coefficiente di dilatazione lineare  $\alpha$  e il coefficiente di dilatazione cubica  $\beta$  si ottiene

$$\boxed{\beta = 3\alpha}$$

questo in quanto dalla formula si ottiene

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}$$

ed essendo il volume di un oggetto tridimensionale in prima approssimazione è  $V = k \cdot l_1 l_2 l_3$ , per cui

$$\beta = \frac{1}{k \cdot l_1 l_2 l_3} \cdot \left[ k \cdot l_2 l_3 \frac{dl_1}{dT} + k \cdot l_1 l_3 \frac{dl_2}{dT} + k \cdot l_1 l_2 \frac{dl_3}{dT} \right]$$

ma essendo, sempre per definizione

$$\alpha = \frac{1}{L} \frac{dL}{dT} \longrightarrow \frac{dL}{dT} = \alpha L$$

per cui si evince come

$$\beta = \frac{1}{l_1 l_2 l_3} \cdot [3\alpha \cdot l_1 l_2 l_3] = 3\alpha$$

## 11.5 Equilibrio termodinamico

Di seguito si espone la definizione di **equilibrio termodinamico**:

### EQUILIBRIO TERMODINAMICO

L'**equilibrio termodinamico** prevede 3 tipologie di equilibrio

1. **Equilibrio termico**, per cui due sistemi in equilibrio presentano la medesima temperatura;
2. **Equilibrio meccanico**, ovvero sul sistema non agiscono forze;
3. **Equilibrio chimico**, per cui non vengono alterate le specie chimiche del sistema.

Quando un sistema è in **equilibrio termodinamico**, è possibile definire il suo stato tramite una **equazione di stato**:

### EQUAZIONE DI STATO

Un'**equazione di stato** è una **relazione matematica** che correla le variabili termodinamiche. Per i sistemi idrostatici, le variabili termodinamiche da prendere in considerazione sono

- Pressione;
- Volume;
- Temperatura;

## 11.6 Equazione di stato dei gas perfetti

Per i gas perfetti si osserva che

- Il prodotto tra pressione e volume è costante quando sono costanti il numero di moli e la temperatura (**legge di Boyle**);
- Il rapporto tra pressione e temperatura è costante quando sono costanti il numero di moli e il volume;
- Il rapporto tra pressione e numero di moli è costante quando sono costanti il volume e la temperatura.

Tali risultati permettono di ottenere che

$$\frac{pV}{nT} = \text{costante} = R = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

per cui si ottiene l'equazione di stato dei gas perfetti

$$pV = nRT$$

## 11.7 Equazione di stato dei gas non-perfetti

L'equazione di stato dei gas non-perfetti viene proposta da Van der Waals e tiene conto delle proprietà del gas specifico che si sceglie (mentre per il gas perfetto è ininfluenza il tipo di gas scelto)

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = nRT$$

**Osservazione:** Si osservi che per capire il numero di variabili indipendenti nell'equazione di stato si impiega la regola delle fasi di Gibbs, ovvero

per cui si evince come nell'equazione di stato dei gas perfetti il numero di variabili indipendenti è pari a 2, mentre la terza dipende necessariamente dalle altre due.

## 11.8 Trasformazione termodinamica

Di seguito si espone il significato di **trasformazione termodinamica**:

### TRASFORMAZIONE TERMODINAMICA

Una **trasformazione termodinamica** è una trasformazione che **modifica lo stato del sistema**.

**Osservazione:** Le trasformazioni possibili possono essere

1. Una **trasformazione quasi statica**, che in realtà non esiste; non potendo, tramite una equazione di stato, descrivere tutte le coordinate termodinamiche, si considera che una trasformazione passa per infiniti stati di equilibrio, nei quali è possibile descrivere le coordinate in gioco;
2. Una **trasformazione ciclica** è una trasformazione nella quale lo stato finale coincide con lo stato iniziale (è possibile che vi sia una trasformazione ciclica anche quasi statica);
3. Una **trasformazione reversibile** è una trasformazione nella quale non solo lo stato finale del sistema coincide con lo stato iniziale, ma non vi sono nemmeno modifiche all'ambiente esterno. Affinché tali trasformazioni siano possibili devono essere rispettate due condizioni:
  - (a) la trasformazione deve essere quasi statica;
  - (b) non vi devono essere forze dissipative;

**Esempio:** Un'esempio di trasformazione reversibile è quella che prevede di comprimere un gas e poi di riportarlo al volume iniziale: tuttavia, nella compressione, vi sono forze dissipative date dall'attrito, per cui il pistone viene riscaldato e l'ambiente esterno viene modificato. Ecco perché le trasformazioni reali sono **irreversibili** e non reversibili.

**Osservazione:** Alcune altre trasformazioni importanti sono

1. Trasformazione **ISOCORA**, che avviene a volume costante, con  $\Delta V = 0$ ;
2. Trasformazione **ISOBARA**, che avviene a pressione costante, con  $\Delta p = 0$ ;
3. Trasformazione **ISOTERMA**, che avviene a temperatura costante, con  $\Delta T = 0$ ;
4. Trasformazione **ADIABATICA**, che avviene senza scambio di calore con l'ambiente esterno, con  $\Delta C = 0$ ;

## 11.9 Diagramma di Clapeyron - Pressione/Volume

Il diagramma di Clapeyron è un diagramma **pressione-volume** che permette di definire, in ogni punto, uno stato di equilibrio, con precise coordinate di pressione, volume e temperatura. Si osservi che dato uno stato iniziale e finale, normalmente non è possibile conoscere ciò che accade nel mezzo, ma per una trasformazione quasi statica, passando per infiniti stati di equilibrio, è possibile tracciare un grafico continuo, come mostrato di seguito

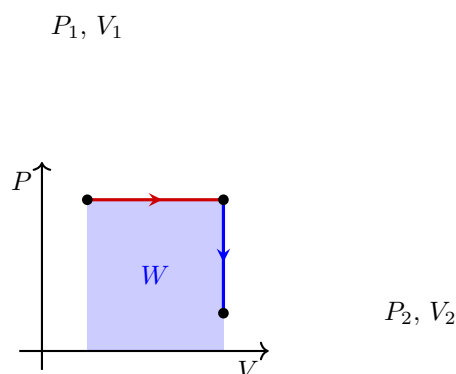


Figura 89: Trasformazione isobara

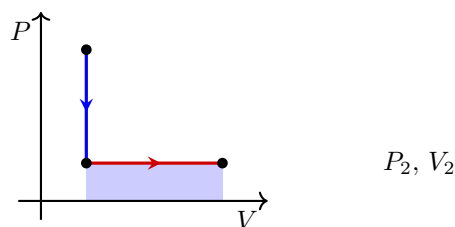
$W$  $P_1, V_1$ 

Figura 90: Trasformazione isocora

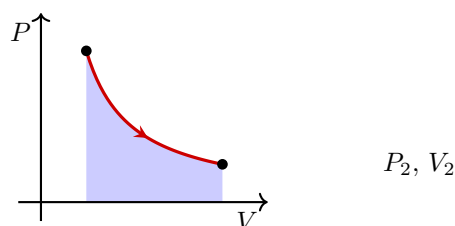
 $W$  $P_1, V_1$ 

Figura 91: Trasformazione isoterma

### 11.10 Trasferimenti di energia

Le trasformazioni termodinamiche avvengono perchè si ha trasferimento di energia da o verso il sistema, energia sottoforma di

- **calore**;
- **lavoro**;

per cui si ottiene la definizione di **calore** seguente:

#### CALORE

Il **calore** rappresenta l'energia scambiata tra sistema e ambiente dovuto **unicamente** alla variazione di temperatura  $\Delta T$  tra sistema e ambiente.

**Osservazione 1:** Si osservi che è possibile non avere cambiamento di temperatura nonostante vi sia trasferimento di calore tra sistema e ambiente, come nel caso dei cambiamenti di stato. La convenzione sul segno di calore è la seguente

- Il calore è positivo  $Q > 0$  quando viene assorbito dal sistema;
- Il calore è negativo  $Q < 0$  quando viene ceduto dal sistema all'ambiente;

**Osservazione 2:** Il trasferimento di calore può avvenire in tre modi differenti:

1. **Conduzione**, per la quale è necessario un **mezzo**, ossia un materiale che metta in contatto sorgente e assorbitore di calore.

*raffigurazione*

Allora la conduzione viene misurata in funzione della cosiddetta **corrente termica**, data da

$$C = \frac{Q}{t}$$

una corrente termica che, in condizioni stazionarie del sistema, viene data dalla formula seguente

$$C = kA \frac{(T_2 - T_1)}{L} = kA \frac{dT}{dL}$$

ove  $k$  prende il nome di **coefficiente di conducibilità termica**, misurata in  $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ , mentre  $A$  e  $L$  sono rispettivamente la sezione e la lunghezza del materiale conduttore.

Ovviamente la conducibilità dipende dal materiale, dalla differenza di temperatura e dalla geometria del materiale conduttore: più il materiale è conduttore, presenta una superficie di contatto è grande e lo spessore è piccolo, maggiore sarà la conducibilità termica, sempre nell'ipotesi che il materiale conduttore sia omogeneo e il calore si propaghi uniformemente.

2. Benché l'aria abbia un coefficiente di conducibilità termica molto basso, trasferisce calore tramite **convezione**. La convezione, infatti, funziona grazie alla variazione di densità (e quindi di volume) dei fluidi a seguito della variazione di temperatura.
3. L'**irraggiamento**, infine, è l'unico metodo di trasferimento di calore che non richiede un mezzo che funga da tramite, in quanto avviene anche nel vuoto; l'irraggiamento funziona in quanto tutti i corpi emettono energia, in questo caso calore, dalla loro superficie, in quanto aventi una certa temperatura; la trasmissione di tale energia avviene tramite **onde elettromagnetiche** seguendo la **legge di Stefan-Boltzmann**

$$P = e\sigma AT^4$$

in cui  $e$  è una costante che dipende dal materiale, mentre  $\sigma$  è una costante universale.

12 Maggio 2022

È noto che durante una trasformazione non è possibile definire che cosa sta succedendo al sistema, in quanto non si ha equilibrio; tuttavia, con l'approssimazione di una trasformazione quasi statica, si possono considerare infiniti stati di equilibrio.

Attraverso un diagramma pressione volume, o diagramma di Clapeyron, ogni singolo punto rappresenta uno stato, in quanto nell'equazione di stato dei gas perfetti si evince come siano solamente due le variabili indipendenti.

L'irraggiamento non necessita di un mezzo di trasmissione, anche se può essere presente, e riguarda tutti i corpi aventi una temperatura diversa da 0 K. L'irraggiamento segue la **legge di Stefan-Boltzmann**

$$P = e\sigma AT^4$$

in cui

- $e$  prende il nome di **coefficiente di emissione**, ed è un valore  $0 \leq e \leq 1$ ;
- $\sigma$  è la costante di Boltzmann, in particolare  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ ;
- $A$  è l'area della superficie emettente;
- $T$  è la temperatura della superficie emettente (molto spesso non vi è differenza tra temperatura della superficie e temperatura interna, ma nel caso di corpi complessi, come il sole, la differenza è significativa).

L'irraggiamento avviene tramite la trasmissione di onde elettromagnetiche le quali non sono sempre visibili, in quanto la loro visibilità dipende dalla frequenza delle onde emesse, non sempre rientrante nello spettro del visibile.

**Osservazione:** Si consideri uno specchio parabolico, tale per cui i raggi paralleli vengano riflessi nel fuoco dello stesso e viceversa; allora, ponendo uno specchio di fronte all'altro e nei fuochi un pezzo di carta e una lampadina, dopo un po' di tempo il pezzo di carta brucia: ciò significa che l'irraggiamento effettivamente permette di trasmettere energia; ovviamente, se si tolgono gli specchi la carta non brucia più, in quanto la legge di Boltzmann permette di capire come la potenza irradiata dipenda dalla superficie emittente che, nel caso degli specchi è massimizzata, mentre senza gli specchi la superficie è esigua.

**Esempio:** Un termos, dal momento che permette di creare un'intercapedina vuota tra l'interno e l'esterno, protegge sicuramente dalla convezione e dalla conduzione, non essendoci un mezzo. Inoltre, essendo molto spesso costruito con un materiale riflettente, tende a proteggere anche dall'irraggiamento.

### 11.11 Calore specifico

Per comprendere come avviene quantitativamente il trasferimento di calore, deve essere definito il concetto di **calore specifico**:



### CALORE SPECIFICO

Il **calore specifico**  $c$  rappresenta la **quantità di calore** necessaria per incrementare di 1 K (o 1 °C) un Kg di una data sostanza, secondo la seguente equazione

$$Q = mc\Delta T$$

per cui se la differenza di temperatura è negativa, ossia la temperatura è diminuita, il calore è negativo, secondo la convenzione adottata in precedenza, e viceversa.

La formula precedentemente introdotta si applica solo per piccole differenze di temperatura

$$\delta Q = mc(T)dt$$

in cui  $\delta Q$  (esattamente come  $\delta W$ ) vengono denotati diversamente in quanto non sono proprietà del sistema, ma sono grandezze atte a definire dei trasferimenti di energia. Da notare che il calore specifico

- dipende dalla sostanza;
- dipende dalla trasformazione ( $c_p$  è il calore specifico a pressione costante,  $c_v$  è il calore specifico a volume costante);
- dipende dalla temperatura.

**Esercizio:** Si immergano  $m = 2$  Kg di ferro (Fe) alla temperatura iniziale di  $T_{i,Fe} = 95$  °C all'interno di un volume 1 L alla temperatura iniziale  $T_{i,H_2O}$ . Al fine di determinare la temperatura finale del sistema, è sufficiente eguagliare il calore ceduto dal ferro all'acqua e quello acquisito dall'acqua, per cui

$$Q_{Fe \rightarrow H_2O} = -Q_{H_2O \rightarrow Fe} \quad \text{oppure} \quad |Q_{Fe \rightarrow H_2O}| = |Q_{H_2O \rightarrow Fe}|$$

per cui

$$m_{Fe} \cdot c_{Fe} \cdot (T_e - T_{i,Fe}) = -m_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot (T_e - T_{i,H_2O})$$

ottenendo

$$T_e = \frac{m_{Fe}c_{Fe} \cdot T_{i,Fe} + m_{H_2O}c_{H_2O} \cdot T_{i,H_2O}}{m_{Fe}c_{Fe} + m_{H_2O}c_{H_2O}}$$

ossia una media pesata delle temperature iniziali dei due elementi considerati, ove il peso è il prodotto  $m \cdot c$ : ciò significa che vi sono due elementi da considerare per valutare la temperatura di equilibrio, ossia la massa dei corpi e il loro calore specifico.

Si capisce facilmente, infatti, nell'esempio precedente che, essendo i calori specifici

$$c_{H_2O} = 4180 \frac{J}{Kg \cdot K} \quad \text{e} \quad c_{Fe} = 918 \frac{J}{Kg \cdot K}$$

### 11.12 Capacità termica molare

Di seguito si espone una quantità simile al calore specifico, la quale prende il nome di **capacità termica molare**:

### CAPACITÀ TERMICA MOLARE

La **capacità termica molare**  $C$  rappresenta la **quantità di calore** necessaria per incrementare di 1 K (o 1 °C) una mole di una data sostanza, secondo la seguente equazione

$$Q = nC\Delta T$$

in cui  $n$  rappresenta il numero di moli. Ancora una volta, la capacità termica molare

- dipende dalla sostanza;
- dipende dalla trasformazione ( $C_p$  per la capacità termica molare a pressione costante,  $C_V$  è la capacità termica molare a volume costante);
- dipende dalla temperatura.

Analogamente si definisce il concetto di **caloria**:

### CALORIA

La **caloria** cal rappresenta la **quantità di calore** necessaria per incrementare di 1 K, o 1 °C (più precisamente da 14.5 °C a 15.5 °C) la temperatura di 1 g di acqua a pressione atmosferica. Si ha

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$$

## 11.13 Calore latente

Si osservi che nei cambiamenti di fase è possibile avere trasferimento di calore senza variazione di temperatura. Ecco che allora la formulazione del calore necessario al cambiamento di fase si definisce come

$$Q = m \cdot L$$

in cui  $L$  prende il nome di **calore latente**:

### CALORE LATENTE

Il **calore latente di fusione/vaporizzazione** rappresenta la quantità di calore fornito o sottratto a 1 Kg di sostanza durante un cambiamento di fase.

**Osservazione:** Si osservi che mentre il coefficiente di dilatazione termica e il calore specifico variavano al variare della temperatura, il **calore latente non dipende dalla temperatura**, essendo essa costante durante il cambiamento di fase.

**Esempio:** Si calcoli la minima massa d'acqua  $m_{H_2O}$  alla temperatura iniziale  $T_0 = 25 \text{ °C}$  per fondere un cubo di ghiaccio di massa  $m_G$  alla temperatura di 0 °C. Ovviamente si ha l'uguaglianza seguente

$$m_{H_2O} c_{H_2O} \Delta T = m_G L$$

e dovendo essere la massa di acqua minima, si deve supporre che tutta l'acqua vari la propria temperatura fino a raggiungere 0 °C.

Se si considera una massa di acqua pari a  $m_{H_2O} = 10 \text{ Kg}$  e le stesse condizioni iniziali, si ottiene che

$$-m_{H_2O} c_{H_2O} \cdot (T_e - T_{H_2O}) = m_G L + m_G c_{H_2O} \cdot (T_e - T_G)$$

Risolvendo l'equazione si ottiene che la temperatura di equilibrio finale sarà

$$T_e = \frac{m_{H_2O} c_{H_2O} T_{H_2O} - m_G L + m_G c_{H_2O} T_G}{m_{H_2O} c_{H_2O} + m_G c_G} = 15 \text{ °C}$$

### 11.14 Lavoro termodinamico

Di seguito si espone il concetto di **lavoro termodinamico**

#### LAVORO TERMODINAMICO

Il **lavoro termodinamico** rappresenta la quantità di energia scambiata tra sistema e ambiente attraverso meccanismi indipendenti dalla differenza di temperatura  $\Delta T$  (principalmente si considererà lavoro dovuto a forze meccaniche).

**Osservazione 1:** Attenzione che nel caso del lavoro si considera una convenzione opposta rispetto al calore:

- Il lavoro  $W > 0$  è positivo quando è compiuto dal sistema;
- Il lavoro  $W < 0$  è negativo quando è subito dal sistema.

**Osservazione 2:** Si consideri un pistone riempito di fluido. Allora quando il fluido aumenta di volume compie lavoro positivo; se, invece, il fluido viene compresso allora il lavoro è negativo. Dalla meccanica è noto come

$$\delta W = F dx$$

ed essendo  $F = P \cdot A$  si ottiene

$$\delta W = p \cdot A dx \longrightarrow \delta W = p dV$$

ottenendo, quindi che

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p \cdot dV$$

per cui il lavoro è l'area sottesa alla curva del grafico pressione-volume:

**Esempio:** Nel caso di una **trasformazione isobara**, si ha che il lavoro è

$$W = P \cdot \Delta V$$

mentre nel caso di una **trasformazione isocora** il lavoro è ovviamente nullo, per cui

$$W = 0$$

Nel caso di una trasformazione isoterma per un gas perfetto si ha che

$$p = \frac{nRT}{V}$$

per cui si ottiene

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \cdot [\log(V_f) - \log(V_i)] = nRT \cdot \log\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

per cui il lavoro compiuto nel caso di una **trasformazione isoterma** è

$$W = nRT \cdot \log\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

16 Maggio 2022

**Esercizio 1:** Il numero di punti fissi necessari per tarare una termocoppia in cui la dipendenza della temperatura dalla differenza di potenziale è un polinomio del quarto ordine è pari a **5 punti**, in quanto è da considerarsi la relazione seguente:

$$T = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

in cui si ravvisano, ovviamente, **5 incognite** e, quindi, **5 punti fissi**.

**Esercizio 2:** Se si deve calcolare la variazione di lunghezza considerando il volume si deve considerare la formula seguente:

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T$$

ed essendo la sezione costante, si ottiene

$$A \cdot \Delta L = \beta \cdot AL_0 \cdot \Delta T$$

per cui la formula finale è

$$\Delta L = \beta L_0 \Delta T \longrightarrow L_0 = \frac{\Delta L}{\beta \cdot \Delta T}$$

**Esercizio 3:** In 1.00 kg di acqua a 80.0 °C vengono versati 100 g di ghiaccio fondente e 200 g di ghiaccio a -40.0 °C. Si calcoli la temperatura della miscela all'equilibrio termico. Ovviamente si considera l'equazione seguente:

$$-Q_{\text{H}_2\text{O}} = Q_{\text{GF},1} + Q_{\text{H}_2\text{O},1} + Q_{\text{G}} + Q_{\text{GF},2} + Q_{\text{H}_2\text{O},2}$$

ottenendo la temperatura d'equilibrio seguente

$$T_e = \frac{m_1 c_{\text{H}_2\text{O}} T_1 + (m_2 + m_3) \cdot (c_{\text{H}_2\text{O}} T_0 - L) - m_2 c_{\text{G}} (T_0 - T_3)}{c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (m_1 + m_2 + m_3)}$$

**Esercizio 4:** Una mole di gas perfetto compie un'espansione isobara dallo stato  $A$  allo stato  $B$  e una compressione isoterma da  $B$  a  $C$ . Si determini la pressione nel punto  $C$ . Allora sapendo che la trasformazione da  $B$  a  $C$  è isoterma è facile capire come

$$T_{B,C} = \frac{P_B \cdot V_B}{nR} = \frac{P_C \cdot V_C}{nR} \longrightarrow P_C = \frac{P_B \cdot V_B}{V_C}$$

## 12 Il primo principio della termodinamica

Esistono, com'è noto, due modi per trasferire l'energia: calore e lavoro (da intendersi come calore meccanico). Per convenzione si ha che

- Il calore è positivo  $Q > 0$  quando viene assorbito dal sistema;
- Il calore è negativo  $Q < 0$  quando viene ceduto dal sistema all'ambiente;
- Il lavoro  $W > 0$  è positivo quando è compiuto dal sistema;
- Il lavoro  $W < 0$  è negativo quando è subito dal sistema.

Ciò significa che

$$\Delta U = Q - W$$

ossia la differenza tra calore e lavoro permette di ottenere l'**energia netta** acquisita dal sistema. Volendo sapere se tale energia dipende dalla trasformazione, si analizzino dapprima le componenti di lavoro e calore.

Ovviamente il lavoro è da interpretarsi come

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p \cdot dV$$

ossia l'area della parte di piano sottesa al grafico pressione e volume. Naturalmente se si considerano uno stato iniziale e uno finale, esistono infiniti modi per congiungere tali due punti e l'area sottesa al grafico di tali funzioni non sarà sempre necessariamente lo stesso: **il lavoro dipende dalla trasformazione considerata**; analogamente, anche **il calore dipende dalla trasformazione considerata**.

Tuttavia, ciò che è fondamentale, è che la differenza esposta in precedenza

$$\Delta U = Q - W$$

**non dipende dalla trasformazione**: dato lo stato iniziale e lo stato finale, è già possibile calcolare la variazione di **energia interna** (essendo  $U$  il simbolo dell'**energia interna**), come esposto di seguito:

### PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

In una trasformazione in cui la quantità di calore...

$$\Delta U = U_f - U_i = Q - W \longrightarrow dU = \delta Q + \delta W$$

che si configura come una conservazione dell'energia.

**Osservazione 1:** In generale, la variazione di energia interna si esprime in termini di variazione di energia cinetica e potenziale (e quindi di energia meccanica) delle molecole costituenti il sistema considerato. Infatti si ha che

$$U = \sum_i (K_i + U_i)$$

in cui per un gas perfetto l'energia potenziale  $U_i \cong 0$ , ovvero aumentando la temperatura di un gas perfetto, aumenta l'energia cinetica delle sue molecole.

**Osservazione 2:** Dal momento che l'energia interna  $\Delta U$  non dipende dalle trasformazioni termodinamiche considerate, ma solamente dallo **stato del sistema**, il quale viene descritto dalle coordinate termodinamiche di pressione, volume e temperatura, ossia

$$U(p, V, T)$$

ma essendo solamente due le grandezze indipendenti, è sufficiente considerare solamente due coordinate termodinamiche.

**Osservazione 3:** Chiaramente l'energia interna  $U$  è stata definita a meno di una costante, appositamente non menzionata in quanto, considerando sempre delle variazioni di energia interna, tale costante diviene ininfluente.

**Esempio 1:** Scaldando una massa  $m$  di acqua da  $0^\circ$  a  $100^\circ$ , senza cambiamento di fase (in cui le piccole variazioni di volume subite dall'acqua sono trascurabili, ovvero la trasformazione è **isocora**), la variazione di energia interna  $\Delta U$  si calcola come segue

$$\Delta U = Q - W = m \cdot c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (T_{100} - T_0) - 0$$

in cui il lavoro  $W = 0$  non essendoci lavoro compiuto da/sul sistema, essendo la trasformazione isocora. Ponendo  $m$  pari ad una mole, essendovi 2 atomi di idrogeno e 1 di ossigeno, la massa è  $16 + 2 \cdot 1 = 18$  g, quindi

$$\Delta U = 18 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot 4180 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 100\text{K} = 7.5 \text{ KJ}$$

### 12.1 Trasformazione isocora

Dal momento che in una trasformazione isocora il volume è costante ... continua ...

### 12.2 Trasformazione isobara

Dal momento che in una trasformazione isobara la pressione è costante, la variazione di energia interna è data da

$$\Delta U = Q - W$$

in cui il calore è dato da

$$Q = mc_p \Delta T = nC_p \Delta T$$

in cui  $c_p$  e  $C_p$  sono rispettivamente il calore specifico e la capacità termica a pressione costante. Il lavoro, invece, essendo la pressione costante, è dato da

$$W = p \cdot \Delta T$$

pertanto la variazione di energia interna è

$$\Delta U = mc_p \Delta T - p \cdot \Delta T$$

### 12.3 Trasformazione ciclica

Nel caso di una trasformazione ciclica la variazione di energia interna è nulla: l'energia interna è una **funzione di stato**, ma se lo stato iniziale e finale sono i medesimi, l'energia interna sarà la stessa, per cui

$$\Delta U = U(f) - U(i) = 0$$

e come naturale conseguenza si ha che

$$\boxed{Q = W}$$

### 12.4 Espansione libera

Si consideri un contenitore di pareti adiabatiche diviso in due parti, l'una contenente un gas e l'altra contenente il vuoto. Eliminando la separazione tra le due parti, il gas si espande e occupa tutto il volume.

Considerando il sistema dato da tutto il contenitore, si ha che

$$\Delta U = Q - W = 0$$

in quanto le pareti sono adiabatiche e non si ha scambio di calore con l'esterno; inoltre il volume dell'intero contenitore non varia, per cui anche il calore è nullo.

Ma essendo l'energia interna è una funzione di stato, si ha che

$$U(p_i, V_i, T_i) = U(p_f, V_f, T_f)$$

ma siccome le variabili indipendenti sono solo due, è lecito scrivere

$$U(V_i, T_i) = U(V_f, T_f)$$

Si potrebbe misurare sperimentalmente che a seguito di tale espansione, per un gas perfetto, la **temperatura si mantiene costante**, mentre è ovvio che  $V_f \neq V_i$ . Allora si ha che

$$U(V_i, T) = U(V_f, T)$$

ovvero l'energia interna calcolata rispetto a due volumi diversi è la stessa (ma si sarebbe potuto anche considerare la pressione); ciò permette di affermare che **l'energia interna di un gas perfetto dipende solo dalla temperatura**.

**Osservazione:** Si osservi che alla luce delle seguenti evidenze

1. L'energia interna  $U$  è una funzione di stato e non dipende dalla trasformazione (per cui è possibile scegliere la trasformazione più semplice da calcolare che permetta di passare dallo stato iniziale a quello finale);
2. per un gas perfetto, al fine di calcolare l'energia interna è sufficiente considerare solamente la temperatura (per cui dello stato iniziale e dello stato finale interessano solo la temperatura): ma siccome è noto che

$$p = \frac{nRT}{V}$$

per un gas perfetto **gli stati alla stessa temperatura si trovano su un'iperbole**; pertanto, è possibile scegliere come stato iniziale e stato finale uno qualsiasi dei punti che si trovano sull'iperbole passante per lo stato iniziale e finale dati; furbescamente si potrebbe scegliere la trasformazione isocora, tale per cui la variazione di energia interna di un gas perfetto assume sempre la formula seguente:

$$\Delta U = Q = mC_v\Delta T = nC_v\Delta T$$

in cui ovviamente il calore non può essere pari alla variazione di energia interna, essendo il calore dipendente dalla trasformazione, a differenza dell'energia interna. Applicando il primo principio si ottiene che

$$\Delta E = Q - W \longrightarrow \Delta Q = mC_v\Delta T + p \cdot \Delta V$$

## 12.5 Relazione di Mayer

Dato un gas perfetto, per quanto esposto, è noto che la variazione di energia interna presenta sempre la seguente forma

$$dU = nC_vdT$$

Inoltre, per i gas perfetti è sempre valida l'equazione di stato seguente

$$pV = nRT$$

che, riscritta in forma differenziale, si ottiene

$$pdV + Vdp = nRdT$$

ma se si considera una trasformazione isobara, tale per cui la pressione è costante, si ha che  $dp = 0$ , per cui

$$pdV = nRdT \longrightarrow p \frac{dV}{dT} = nR$$

Applicando, infine, il primo principio della termodinamica nel caso di una trasformazione isobara, si ha che

$$dU = \delta Q - \delta W \longrightarrow nC_v dT = nC_p dT - p dV$$

in cui compare la capacità termica a volume costante (in quanto indipendentemente dalla trasformazione la variazione di energia interna per un gas perfetto presenta sempre questa forma) e a pressione costante (essendo la pressione costante). Si ottiene, quindi, che

$$nC_v dT = nC_p dT - p dV \longrightarrow C_v = C_p - \frac{p dV}{n dT} \longrightarrow C_p = C_v + \frac{p dV}{n dT}$$

ma è noto che

$$\frac{p dV}{n dT} = R$$

per cui ottiene il risultato seguente

$$C_p = C_v + \frac{p dV}{n dT} \longrightarrow C_p = C_v + R$$

che si traduce nella **relazione di Mayer** seguente, valida solamente per i gas perfetti:

$$\boxed{C_p = C_v + R}$$

Tale risultato vale solo per i gas perfetti, in quanto per i solidi e per i liquidi  $C_v = C_p$  e quindi tale relazione non può essere valida.



17 Maggio 2022

Si osservi che per **solamente per i gas perfetti** si ha che

$$dU = nC_v dT$$

così come la relazione di Mayer è valida solamente per i gas perfetti. Si ha, anche, che in funzione del primo risultato, si può esprimere il calore come

$$\delta Q = U + \delta W \longrightarrow nC_v dT + p dV$$

Infine si ha che se una trasformazione è isoterma, allora il calore è uguale al lavoro, per un gas perfetto, in quanto la variazione di energia è nulla, in quanto dipende solamente dalla temperatura. Si noti inoltre che in una trasformazione ciclica  $\Delta U = Q - L = 0$ , ma non solo, si ha anche che  $\Delta T = \Delta p = \Delta V = 0$ .

**Esercizio 1:** Si consideri l'aumento della temperatura di 1 l di acqua da 50 ° C a 60 ° C, allora la variazione di energia interna è data da

$$\Delta U = Q - W = mc_v \Delta T - \int_{V_i}^{V_f} p dV > 0$$

**Esercizio 2:** Si osservi che nel caso di una compressione reversibile di un gas perfetto costantemente in equilibrio con un termostato, la temperatura si mantiene costante e quindi la variazione di energia interna per un gas perfetto è nulla.

**Esercizio 3:** Si osservi che nel caso di una compressione reversibile di un gas non perfetto costantemente in equilibrio con un termostato, la temperatura si mantiene costante, mentre il volume diminuisce, quindi il sistema subisce del lavoro (il quale è negativo), per cui la variazione di energia è necessariamente positiva.

**Esercizio 4:** In tutti i cambiamenti di fase si ha sempre aumento di energia interna, come nel caso dell'acqua.

## 12.6 Trasformazione adiabatica

1. In una trasformazione adiabatica non si ha scambio di energia interna con l'esterno, per cui  $Q = 0$ . Applicando il primo principio della termodinamica si ottiene

$$\Delta U = Q - W = -W \longrightarrow dU = -\delta W = -p dV$$

e se si considera un **gas perfetto** allora si ottiene che

$$nC_v dT = -p dV$$

e quindi

$$\boxed{ndT = -\frac{p}{C_v} dV}$$

2. Sempre parlando di gas perfetti, si ha l'equazione di stato seguente:

$$pV = nRT \longrightarrow p dV + V dp = nR dT$$

ottenendo, quindi:

$$\boxed{ndT = \frac{1}{R} \cdot (p dV + V dp)}$$

Impiegando la relazione seguente si ottiene che

$$-\frac{p}{C_v} dV = \frac{1}{R} \cdot (p dV + V dp)$$

e applicando la relazione di Mayer, tale per cui per i gas perfetti si ha  $C_p = C_v + R \longrightarrow R = C_p - C_v$ , da cui

$$-\frac{p}{C_v}dV = \frac{1}{C_p - C_v} \cdot (pdV + Vdp)$$

e quindi

$$-\frac{C_p - C_v}{C_v}pdV = pdV + Vdp \longrightarrow \left(-\frac{C_p}{C_v} + 1\right) \cdot pdV = pdV + Vdp$$

e ponendo convenzionalmente

$$\boxed{\gamma = \frac{C_p}{C_v}}$$

per cui si ottiene

$$(-\gamma + 1) \cdot pdV = pdV + Vdp \longrightarrow -\gamma \cdot pdV = Vdp \longrightarrow -\gamma \frac{dV}{V} = \frac{dp}{p}$$

e volendo integrare si ottiene

$$-\gamma \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \int_{p_i}^{p_f} \frac{dp}{p}$$

ovverosia

$$\gamma \cdot (\log(V_f) - \log(V_i)) = \log(p_f) - \log(p_i)$$

in cui è facile osservare come

$$\boxed{\log(pV^\gamma) = \text{costante}} \quad \text{e} \quad \boxed{pV^\gamma = \text{costante}}$$

ed è per questo che nel caso di una trasformazione adiabatca di un gas perfetto il diagramma pressione volume è proprio un'iperbole descritta da

$$\boxed{p = \frac{k}{V^\gamma}}$$

essendo

$$\boxed{\gamma = \frac{C_p}{C_v} > 1}$$

ossia una quantità maggiore di 1 per la relazione di Mayer

$$C_p = C_v + R$$

**Osservazione:** È utile, molto spesso, impiegare la relazione appena ottenuta in combinazione con l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\begin{cases} pV^\gamma = \text{costante} \\ pV = nRT \end{cases}$$

### 12.6.1 Energia interna e Lavoro - Trasformazione adiabatca

Dal momento che in una trasformazione adiabatca il calore è nullo, ovvero  $Q = 0$ , si ha, dal primo principio della termodinamica:

$$\Delta U = -W$$

e per definizione si ha che

$$W = \int_{V_i}^{V_f} pdV$$

ma è stato appena dimostrato che

$$pV^\gamma = \text{costante}$$

il che significa che tale prodotto è sempre lo stesso sia all'inizio che alla fine della trasformazione. Pertanto si ha che

$$pV^\gamma = p_i V_i^\gamma \longrightarrow p = p_i \cdot \left(\frac{V_i}{V}\right)^\gamma$$

per cui si può calcolare il lavoro come segue

$$W = \int_{V_i}^{V_f} \frac{p_i V_i^\gamma}{V^\gamma} dV = p_i V_i^\gamma \cdot \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V^\gamma} = p_i V_i^\gamma \cdot \left[ -\frac{1}{\gamma-1} \cdot \frac{1}{V^{\gamma-1}} \right]_{V_i}^{V_f}$$

ciò permette, quindi, di ottenere

$$-\frac{p_i V_i^\gamma}{\gamma-1} \cdot \left[ \frac{1}{V_f^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_i^{\gamma-1}} \right] = -\frac{p_i V_i^\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{V_i^{\gamma-1} - V_f^{\gamma-1}}{V_f^{\gamma-1} \cdot V_i^{\gamma-1}} = -\frac{p_i V_i}{\gamma-1} \cdot \left[ \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

per cui si ottiene che

$$W = \frac{p_i V_i}{\gamma-1} \cdot \left[ 1 - \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} \right]$$

**Osservazione:** Si osservi, quindi, che per una trasformazione adiabatica, in generale, si ottiene che  $Q = 0$  e quindi  $\Delta U = -W$ . Se, invece, si considerano i gas perfetti si ha anche che

$$pV^\gamma = \text{costante} \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} > 1$$

da cui si evince come il lavoro sia pari a

$$W = \frac{p_i V_i}{\gamma-1} \cdot \left[ 1 - \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} \right]$$

## 12.7 Trasformazione isoterma

È noto che in una trasformazione isoterma  $\Delta T = 0$ . Se si considera un **gas perfetto**, inoltre, si ha anche che

$$pV = nRT \longrightarrow p = \frac{nRT}{V} \quad \text{con} \quad nRT = \text{costante}$$

Inoltre, siccome per un gas perfetto l'energia interna dipende solamente dalla temperatura, si ha che

$$\Delta U = 0$$

12.8 Riassunto

TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE					
	ISOCORA	ISOBARA	ISOTERMICA	ADIABATI	CICLICA
$p - V$	$p = \frac{nRT}{V}$	Sì	No	La temperatura di fusione dell'acqua è posta a 0 °C, mentre quella di ebollizione a 100 °C; inoltre la divisione della scala è equa dell'intervallo 0 – 100.	
$W$	0	$p\Delta V$	Per i gas perfetti è uguale al calore $Q$	In generale $W = -\Delta U$ e per i gas perfetti è <div><math>W = \frac{p_i V_i}{\gamma - 1}</math></div>	Uguale al calore $Q$  La scala è definita un funzione del punto triplo dell'acqua, tenendo conto della pressione.
$Q$	Fahrenheit ha creato una miscela di acqua e sale e ha posto a 0 °F il punto di fusione più basso possibile di tale miscela. L'altro punto di riferimento scelto è 96 °F (corrispondente alla temperatura del corpo umano). La conversione da Celsius a Fahrenheit si usa  $T_F = 1.8 \cdot T_C + 32$				
Rankine ( $\mathcal{R}$ )	No	Sì	È una scala assoluta, non centigrada e con il valore di un grado pari a quello Fahrenheit, per cui  $T_{\mathcal{R}} = 1.8 \cdot T_C$		

## 13 Teoria cinetica dei gas

La termodinamica è lo studio macroscopico della materia. Tuttavia, quando si parla di dilatazione termica, si è osservato come l'aumento dell'energia comporta un aumento della distanza secondo una pseudo-legge di Hooke del tipo seguente

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} kx^2$$

per cui si è reso essenziale lo studio del comportamento microscopico della materia. Ecco che allora si espone la definizione di **teoria cinetica dei gas**:

### TEORIA CINETICA

La **teoria cinetica** è un ramo della **meccanica statistica**; è un modello/teoria che permette di esprimere grandezze macroscopiche in termini di **medie** sui **moti atomici/molecolari**.

### 13.1 Ipotesi di lavoro

Alla base della teoria cinetica dei gas, devono essere formulate delle ipotesi di lavoro. In prima analisi si può dire che

1. Il gas che si sta considerando è un **gas perfetto** in cui, tuttavia, il numero di atomi/molecole è molto elevato (dell'ordine del numero di Avogadro): ciò significa che le particelle non presentano energia potenziale, ma solo energia cinetica.
2. La meccanica degli atomi/molecole risponde alle leggi di Newton;
3. Gli urti tra le particelle, oppure tra le particelle e le pareti, sono sempre **urti elastici**, per cui la componente perpendicolare alla parete è l'unica componente che cambia segno (ma non modulo, che si mantiene costante);
4. Il gas è in equilibrio (che è un'ipotesi fondamentale, in quanto altrimenti non si potrebbe definire la temperatura);
5. Il moto delle particelle è perfettamente casuale;
6. Il gas è contenuto all'interno di un contenitore di forma a parallelepipedo di volume

$$V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$$

### 13.2 Valore medio delle velocità

Il valore medio delle velocità si calcola come segue

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{v}_i = 0$$

che è nulla in quanto il moto delle particelle è perfettamente casuale, quindi la probabilità di muoversi in qualsiasi direzione è sempre la stessa per tutte le molecole.

Analogamente è possibile definire il valore medio del quadrato delle velocità, calcolato come segue

$$\langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{v}_i^2 \geq 0$$

in quanto si sono considerate solamente componenti positive, essendo

$$v_i^2 = v_{i,x}^2 + v_{i,y}^2 + v_{i,z}^2$$

18 Maggio 2022

La teoria cinetica dei gas è un modello microscopico che non contrasta con la teoria macroscopica precedente, in quanto a partire da ciò si possono comprendere i fenomeni di interesse su larga scala. Il valore medio delle velocità è sempre nullo in quanto il modello adottato prevede di considerare un moto omogeneo delle particelle di gas, per cui la probabilità di una particella di trovarsi in qualsiasi punto è sempre la stessa.

Il valore medio del quadrato delle velocità, invece, non è detto che sia nullo, e permette anche di eliminare il concetto di vettore.

### 13.3 Pressione a livello microscopico

Il gas contenuto all'interno di un contenitore urta le pareti dello stesso ed esercita su di esse una forza e, quindi, una pressione.

Al fine di calcolare tale pressione, è necessario considerare

1. qual è la probabilità che una molecola urti le pareti (perché, ovviamente, una molecola che non urta la parete non esercita pressione);
2. come calcolare la forza che la particella esercita sulla superficie.

Sapendo che il sistema è omogeneo, in cui sono contenute  $N$  particelle in un volume  $V$  di gas, dato un volume più piccolo  $V_1$ , il numero di molecole contenute in tale porzione è

$$N_1 = N \cdot \frac{V_1}{V}$$

Da ciò segue che la probabilità che una molecola si trovi nel volume  $V_1$  è semplicemente

$$p(E_1) = \frac{N_1}{N} = \frac{V_1}{V} < 1$$

che è fondamentale che sia  $< 1$ , essendo una probabilità. Se ora si volesse sapere la probabilità che una molecola di gas si trovi a distanza  $l_1$  da una parete  $A$ , applicando quanto appena visto si ottiene:

$$p(E_2) = \frac{V_{l_1}}{V} = \frac{A \cdot l_1}{A \cdot L_1} = \frac{L_2 \cdot L_3 \cdot l_1}{L_2 \cdot L_3 \cdot L_1} \cdot \frac{l_1}{L_1}$$

Se ora, infine, si volesse determinare la probabilità che una molecola di velocità  $v_x$  urti la parete  $A$  **entro** un intervallo di tempo  $\Delta t$  si deve chiedere che

$$\frac{l_1}{v_x} < \Delta t \quad \text{oppure} \quad v_x \cdot \Delta t < l_1$$

per cui si ottiene che

$$P(E'_3) = \frac{l_1}{L_1} \longrightarrow \frac{v_x \Delta t}{L}$$

In realtà, bisogna anche osservare che è possibile che vi sia anche una velocità negativa tale per cui la particella comunque, in un tempo  $\Delta t$ , non riesca a toccare la parete; essendo il moto omogeneo, per eliminare queste eventualità si ha che

$$P(E_3) = \frac{l_1}{L_1} \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{v_x \Delta t}{L}$$

Al fine di determinare la forza con cui una particella impatta sulla parete, si osservi che essa rimbalza, per cui  $v_{x,\text{iniziale}} = -v_{x,\text{finale}}$ , ossia la velocità cambia segno. Applicando il teorema dell'impulso si ha che

$$\vec{J} = \int \vec{F} dt = \vec{F} \cdot \Delta t$$

supposta  $\vec{F}$  costante. Ma è anche noto che

$$\vec{J} = \Delta \vec{p}$$

per cui è possibile calcolare

$$J_x = \Delta p = p_f - p_i = m(-v_{x,\text{finale}}) - mv_{x,\text{iniziale}} = -2mv_{x,\text{iniziale}}$$

che è da interpretarsi come l'impulso che la molecola imprime sulla parete (se si considerasse l'impulso che la parete imprime sulla molecola, si avrebbe l'opposto, ovvero  $J_x = 2mv_{x,\text{iniziale}}$ ). Se ora si moltiplica l'impulso ottenuto per la probabilità di imprimere effettivamente tale impulso, si ottiene

$$P_i \cdot J_{i,x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_{x,\text{iniziale}} \cdot \Delta t}{L_1} \cdot 2mv_{x,\text{iniziale}} = \frac{mv_{x,\text{iniziale}}^2 \Delta t}{L_1} = \langle J_{i,x} \rangle$$

ovvero l'**impulso medio della i-esima particella**. Dovendo considerare il contributo di tutte la particelle si ha che

$$\langle J_x \rangle = \sum_{i=1}^N \langle J_{i,x} \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{mv_{x,\text{iniziale}}^2 \Delta t}{L_1} = \frac{m \Delta t}{L_1} \cdot \sum_{i=1}^N v_{x,\text{iniziale}}^2$$

e dovendo ottenere la forza media si ha

$$\langle F_x \rangle = \frac{\langle J_x \rangle}{\Delta t} = \frac{m \Delta t}{L_1} \cdot \sum_{i=1}^N v_{x,\text{iniziale}}^2 \cdot \frac{1}{\Delta t} = \frac{m}{L_1} \cdot \sum_{i=1}^N v_{x,\text{iniziale}}^2$$

Avendo ora, la forza media, si può ottenere la pressione totale come segue:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{m}{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3} \sum_{i=1}^N v_{x,\text{iniziale}}^2$$

per cui alla fine si ottiene

$$pV = m \cdot \sum_{i=1}^N v_{x,\text{iniziale}}^2$$

e volendo ottenere quanto esposto in precedenza si ottiene

$$pV = m \cdot \sum_{i=1}^N v_{x,\text{iniziale}}^2 = \frac{m}{N} \cdot \sum_{i=1}^N v_{x,\text{iniziale}}^2 \cdot N = \frac{m}{N} \cdot \langle v_x^2 \rangle \cdot N$$

ed essendo il moto casuale, si può supporre che  $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ , avendo già osservato che

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

si ottiene che

$$\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$$

per cui la definizione precedentemente ottenuta diviene

$$\frac{m}{N} \cdot \langle v_x^2 \rangle \cdot N \longrightarrow \frac{m}{N} \cdot \frac{\langle v^2 \rangle}{3} \cdot N$$

per cui la pressione all'interno del contenitore dipende dal volume del contenitore, dalla massa di ciascuna molecola, nonché dal loro numero e dalla loro velocità, ottenendo

$$pV = \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{3}$$

### 13.4 Temperatura a livello microscopico

Si osservi che a partire dal risultato precedente, è possibile richiamare l'equazione di stato dei gas perfetti, in quanto si ha che

$$pV = nRT = \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{3}$$

per cui anche la temperatura influenza la velocità delle particelle.

Al fine di semplificarne lo studio, si supponga che il gas che si sta considerando sia **monoatomico** tale per cui i singoli atomi non abbiano la minima propensione ad attirarsi l'uno rispetto all'altro: ciò significa che l'energia interna del gas è data dalla somma delle sole energie cinetiche delle particelle, ovvero

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m N \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N}}_{\langle v^2 \rangle} = \frac{N}{2} \langle v^2 \rangle$$

Volendo calcolare l'**energia cinetica media**, si ottiene

$$\langle K \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N}}_{\langle v^2 \rangle} = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$$

che permette di osservare come

$$U = N \langle v^2 \rangle$$

che è un risultato che vale **solamente** per **gas perfetti monoatomici**, in quanto solo in questo caso l'energia interna dipende solamente dalla componente cinetica.

**Osservazione:** Si osservi che dai risultati seguenti

$$pV = \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{3} \quad \text{e} \quad U = N \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} Nm \langle v^2 \rangle$$

è possibile evincere come

$$U = \frac{3}{2} pV \quad \text{e} \quad U = \frac{3}{2} nRT$$

e sapendo che l'energia cinetica media si calcola come  $U = N \langle K \rangle$  si ottiene che

$$\langle K \rangle = \frac{U}{N} = \frac{1}{N} \cdot \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} \frac{n}{N} RT = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} \cdot T$$

in cui il rapporto tra la costante  $R$  e il numero di Avogadro  $N_A$  prende il nome di **costante di Boltzmann**

$$K_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

per cui si ottiene che

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} K_B T$$

che è un **risultato totalmente generale**, a differenza del risultato  $U = N \langle K \rangle$ , il quale vale solamente per gas perfetti monoatomici privi di interazioni fra loro.

**Osservazione 1:** Il fatto che l'energia cinetica sia proporzionale alla temperatura, in linea di principio, in meccanica classica, giungendo alla temperatura di 0 K gli atomi dovrebbero arrestarsi, avendo velocità nulla (anche se questa teoria non è più valida, in quanto, per esempio, l'elio He è liquido e quindi in movimento anche a 0 K)



**Osservazione 2:** È possibile anche definire il concetto di **velocità quadratica media** come

$$v_{\text{qm}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

tale per cui si ha

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} m v_{\text{qm}}^2$$

### 13.5 Equipartizione dell'energia

Si osservi che quanto esposto era valido principalmente per gas monoatomici; in particolare si è ottenuto che

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} K_B T$$

ove il fattore 3 derivava dal fatto che

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$$

Inoltre si era ottenuto anche che

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m [\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle] = \frac{1}{2} m \cdot (3 \cdot \langle v_x^2 \rangle) = \frac{3}{2} K_B T = \frac{3}{2} m \langle v_x^2 \rangle = 3 \cdot \left( \frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle \right)$$

per cui ogni “direzione” contribuisce all’energia totale con  $\frac{1}{2} K_B T$ , per ogni grado di libertà (ossia per ogni possibilità di movimento della molecola stessa). Il teorema di **equipartizione dell’energia** afferma proprio questo, come esposto di seguito

#### EQUIPARTIZIONE DELL’ENERGIA

Data una molecola più complessa rispetto ad una particella monoatomica, l’energia della stessa dipende dal numero di gradi di libertà della stessa, secondo la legge seguente:

$$\langle E \rangle = n_l \cdot \left( \frac{1}{2} K_B T \right)$$

in cui  $n_l$  sono i gradi di libertà. È chiaro che il problema è determinare quanti sono i gradi di libertà e quali di questi sono attivi (in funzione della temperatura). Per una molecola biatomica si ha che i gradi di libertà sono in totale di 6, divisi in

- traslazionali (attivi a tutte le temperature), che sono 3;
- rotazionali (attivi solo a temperature medie e alte), che sono 2;
- vibrazionali (attivi solo a temperature alte), che sono 2.

### 13.6 Capacità termiche molari

È noto che per un gas perfetto l’energia interna presenta la seguente formulazione

$$dU = n C_v dT \longrightarrow C_v = \frac{1}{n} \cdot \frac{dU}{dT}$$

nell’ipotesi di una trasformazione isocora. Per un gas monoatomico, in particolare, si ha che

$$U = n_l \cdot \left( \frac{1}{2} K_B T \right) \cdot N$$

e sapendo che

$$K_B = \frac{R}{N_A} = n R$$

per cui si ottiene

$$C_v = \frac{1}{n} \cdot n_l \cdot \frac{1}{2} n R = \frac{n_l}{2} R$$

per cui la capacità termica a volume costante è sempre data dall'equazione seguente

$$\boxed{C_v = \frac{n_l}{2} R}$$

e sfruttando la relazione di Mayer è anche possibile ottenere  $C_p = R + C_v$ .

**Esempio:** Per esempio, un gas perfetto monoatomico può presentare solamente  $n_l = 3$  gradi di libertà, a qualsiasi temperatura, per cui

- $C_v = \frac{3}{2} R$
- $C_p = C_v + R = \frac{3}{2} R + R = \frac{5}{2} R$

Invece, un gas perfetto biatomico, a temperatura ambiente (300 K) presenta un numero di gradi di libertà pari a  $n_l = 3 + 2 = 5$  (dati dalla somma di quelli traslazionali e rotazionali), per cui

- $C_v = \frac{5}{2} R$
- $C_p = C_v + R = \frac{5}{2} R + R = \frac{7}{2} R$

19 Maggio 2022

**Osservazione 1:** Si osservi che se si aumenta la velocità degli atomi di un gas perfetto, la capacità termica molare a volume costante è sempre costante, proprio pari a

$$C_v = \frac{3}{2}R$$

e rimane costante anche la capacità termica molare a pressione costante, per la relazione di Mayer

$$C_p = C_v + R = \frac{5}{2}R$$

Dalla relazione seguente

$$pV = nRT = \frac{1}{3}Nm \langle v^2 \rangle$$

si evince come aumentino

- la pressione (a volume costante);
- la temperatura;
- il volume (a pressione costante);

Inoltre è noto anche come

$$U = \frac{3}{2}pV$$

per cui aumenta anche l'energia interna aumentando la velocità. Non da ultimo aumenta anche la probabilità che una data particella colpisca la parete in un intervallo di tempo  $\Delta t$ .

**Osservazione 2:** Si osservi che non è possibile definire la temperatura media di una singola particella, in quanto la temperatura è definita in funzione della media delle energie cinetiche di tutte le particelle.

**Esercizio 1:** Si osservi che al fine di calcolare la velocità quadratica media delle molecole di aria in una stanza si può ricavare dalla seguente relazione

$$\frac{1}{2}mv_{\text{qm}}^2 = \frac{3}{2}K_B T$$

da cui si evince come

$$v_{\text{qm}} = \sqrt{\frac{3K_B T}{m}}$$

e supponendo che la massa dell'aria dipende solamente dall'azoto  $N_2$  di massa  $2 \cdot 14 \cdot 1.67 \times 10^{-27}$  kg si ottiene

**Esercizio 2:** L'energia potenziale gravitazionale non è considerata nella teoria cinetica dei gas, ma ovviamente atomi e molecole, possedendo una massa, sono soggetti all'accelerazione di gravità. Si consideri un recipiente cubico di lato 1 m contenente aria a temperatura ambiente. Si calcoli quanto varia al massimo l'energia cinetica delle molecole presenti nel contenitore a causa della forza di gravità.

Allora impiegando il teorema lavoro energia cinetica si ha che

$$\Delta K = mgh$$

**Esercizio 3:** Due recipienti contengono lo stesso numero di molecole di azoto, con velocità quadratiche medie rispettivamente di 450 m/s e 550 m/s. Se si pongono i due recipienti in comunicazione, si determini quale sarà la temperatura all'equilibrio in  $^{\circ}\text{C}$ .

Ovviamente, sapendo che la temperatura si calcola come

$$T = \frac{1}{3} \cdot \frac{mv_{\text{qm}}^2}{K_B}$$

Una volta fatto ciò si ha che la temperatura all'equilibrio è data da

$$T_e = \frac{mC_v T_1 + mC_v T_2}{mC_v + mC_v} = 295 \text{ K} = 12 \text{ }^\circ\text{C}$$

### 13.7 Legge di Dulong e Petit

Si osservi che la stessa applicazione vista per i gas può essere adattata anche ai solidi, per i quali è possibile definire la capacità termica molare in funzione dei gradi di libertà.

Essendo i solidi dei reticoli di atomi, tali atomi non possono traslare o ruotare, in quanto si sta considerando un'analisi microscopica e il legame è molto forte. L'unica cosa che possono fare gli atomi è vibrare: si era visto che per una molecola biatomica i movimenti vibrazionali erano 2, ma potendo gli atomi vibrare in tutte e 3 le direzioni, si ottiene che i gradi di libertà si hanno  $n_l = 2 \cdot 3 = 6$ , da cui

$$C_v = n_l \cdot \frac{R}{2} = 3R$$

che prende il nome di **legge di Dulong e Petit**, che vale essenzialmente solo ad elevate temperature.

### 13.8 Distribuzione delle velocità

Al fine di definire come la velocità quadratica media sia distribuita tra le molecole, si consideri la seguente **funzione di distribuzione**:

#### FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

La funzione di distribuzione  $f(v)$  viene definita in modo tale da soddisfare la seguente legge

$$\Delta N = f(v) \cdot \Delta v$$

in cui  $\Delta N$  rappresenta il numero di molecole con velocità compresa tra  $v$  e  $v + \Delta v$ , essendo  $\Delta v$  l'intervallo di velocità considerato.

In altri termini, si sta costruendo un istogramma che permette di capire quante molecole presentano una certa velocità. Ma volendo essere più precisi, considerando

$$dN = f(v) \cdot dv$$

si può calcolare il numero di molecole avente velocità tra  $v$  e  $v + \Delta v$  si ottiene

$$N(v - v + \Delta v) = \int_v^{v+\Delta v} f(v') \cdot v$$

in cui è facile capire come

$$\int_0^{+\infty} f(v') \cdot v = N$$

ossia il numero totale di molecole. Chiaramente, dividendo il numero di molecole che presentano una certa velocità per  $N$  si ottiene la probabilità che le molecole abbiano una certa velocità. Infatti si ha proprio che

$$\frac{1}{N} \cdot \int_0^{+\infty} f(v') \cdot v = \frac{1}{N} \cdot N = 1$$

**Osservazione:** Si osservi che la funzione di distribuzione delle velocità è nota ed è data dalla **funzione di distribuzione di Maxwell e Boltzmann**

$$f(v) = A v^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{m v^2}{K_B T}}$$

in cui

$$A = 4\pi N \cdot \left( \frac{m}{2\pi K_B T} \right)^{\frac{3}{2}}$$

e volendo ora calcolare la media di tale della variabile aleatoria avente tale distribuzione si ottiene

$$E[\mathcal{X}] = \frac{1}{N} \cdot \int_0^{+\infty} f(v)x \cdot dv$$

in cui  $x$  rappresenta la quantità di cui dover calcolare il valore medio, come, per esempio, la velocità, come mostrato di seguito:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{N} \cdot \int_0^{+\infty} f(v)v^2 \cdot dv = \frac{3K_B T}{m}$$

che è esattamente quanto è possibile ricavare dalla seguente equazione

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}K_B T \longrightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{3K_B T}{m}$$

Un'altra importante quantità che è utile calcolare è la media dei moduli delle velocità, calcolabile come

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \cdot \int_0^{+\infty} f(v)v \cdot dv = \sqrt{\frac{8K_B T}{m\pi}}$$

che è completamente diverso dalla radice quadrata della media delle velocità quadre

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3K_B T}{m} \longrightarrow \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3K_B T}{m}} \neq \sqrt{\frac{8K_B T}{m\pi}}$$

che permette comunque di calcolare la varianza

$$\text{var} = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$$

che permette di capire come sia fatta la distribuzione di Maxwell e Boltzmann:

- ... continua ...

Al fine di determinare il punto massimo della distribuzione, ossia la velocità massima delle particelle, si deve imporre

$$\frac{df(v)}{dv} = 0$$

che permette di ottenere

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2K_B}{R}}$$

**Osservazione:** Si osservi che l'acqua, a temperatura ambiente, evapora in quanto la distribuzione considerata mostra che vi saranno sempre, per quanto in quantità ridotta, delle molecole che presentano una velocità elevata capace di uscire dall'agglomerato di liquido.

Analogamente, essendo l'alcool molto più vaporizzabile dell'acqua a temperatura ambiente, quando lo si pone sulle mani, il proprio corpo lo scalda e lo fa evaporare, sottraendoci calore.

Analogamente, il sudore permette di assorbire calore dal proprio corpo: l'acqua si riscalda e le molecole aumentano la propria velocità, fino a quando essa è tale da evaporare.

## 14 Il secondo principio della termodinamica