

Università di Trieste

Laurea in ingegneria elettronica e informatica

Enrico Piccin - Corso di Fisica generale II - Prof. Pierluigi Monaco e Prof. Gabriele Cescutti

Anno Accademico 2022/2023 - 3 Ottobre 2022

Indice

1	Introduzione all'elettrostatica	3
1.1	Conduttore	3
1.2	Legge di Coulomb	3
1.3	Campo elettrico	5
1.3.1	Campo elettrico generato da una carica puntiforme	5
1.4	Dipolo elettrico	6
1.5	Campo elettrico sull'asse di un dipolo	6
1.6	Campo elettrico nel piano equatoriale di un dipolo	6
1.7	Campo elettrico generato da distribuzioni continue di carica	6
1.8	Linee di forza del campo elettrico	7
1.9	Campo elettrico di una distribuzione lineare di carica	8
1.10	Campo elettrico sull'asse di un anello carico	8
1.11	Campo elettrico di una distribuzione superficiale di carica	9
1.12	Particelle cariche in un campo elettrico uniforme	9
1.12.1	Dipolo elettrico in campo elettrico uniforme	10
2	Legge di Gauss	11
2.1	Flusso	11
2.2	Legge di Gauss	12
2.3	Deduzione della legge di Gauss dalla legge di Coulomb	12
2.4	Deduzione della legge di Gauss dalla legge di Coulomb	13
2.5	Flusso attraverso una superficie arbitraria con carica puntiforme all'interno	14
2.6	Flusso attraverso una superficie arbitraria con carica puntiformi all'interno e all'esterno	14
2.7	Legge di Gauss in forma differenziale	14
2.7.1	Campo elettrico in prossimità di una distribuzione lineare di carica molto lunga	17
2.7.2	Campo elettrico in prossimità di una grande lamina piana carica	17
2.7.3	Superficie sferica carica	17
2.7.4	Sfera carica in modo uniforme	18
2.8	Proprietà elettrostatiche di un conduttore	18
2.8.1	Campo nelle immediate vicinanze di un conduttore	18
3	Potenziale elettrico	19
3.1	Energia potenziale elettrica	19
3.1.1	Energia potenziale di una particella di prova nel campo di una carica puntiforme	19
3.1.2	Energia potenziale di una particella di prova nel campo di un numero qualsiasi di cariche puntiformi	20
3.2	Potenziale elettrico	21
3.3	Potenziale prodotto da distribuzioni continue di cariche	21
3.4	Differenza di potenziale	22
3.5	Relazione tra campo e potenziale elettrico	23
3.5.1	Campo elettrico come gradiente del potenziale	24

3.5.2	Equazioni di Laplace e di Poisson	24
3.6	Rotore del campo elettrico	28
3.7	Superfici equipotenziali	29
3.8	Proprietà elettrostatiche di un conduttore	29
4	Conduttori, capacità e dielettrici	31
4.0.1	Capacità di un cavo coassiale	32
4.1	Condensatori in serie e in parallelo	32
4.1.1	Condensatori in serie	32
4.1.2	Condensatori in parallelo	33
4.2	Proprietà elettrostatiche dei dielettrici	35
4.3	Descrizione molecolare dei dielettrici	35

3 Ottobre 2022

1 Introduzione all'elettrostatica

Quando consideriamo una barretta di vetro appesa ad un filo che viene strofinata su un pezzo di lana e la si avvicina ad un'altra barretta, in posizione fissa, la prima si allontana.

Se al posto di barrette di vetro si considerano barrette di plastica, si osserva il medesimo fenomeno di allontanamento.

Se, però, si considera una barretta di vetro e una di plastica, allora si ottiene un fenomeno opposto: le bacchette si avvicinano.

Ciò che, infatti, risulta fondamentale da capire in elettrostatica, è che la forza elettrostatica è sia **attrattiva** che **repulsiva**, a seconda della tipologia di cariche elettroniche che interagiscono.

Da notare, inoltre, che quando si parla di bacchette di carica positiva o negativa, si sta parlando di bacchette alle quali si sottraggono **cariche negative** oppure se ne aggiungono, in quanto gli elettroni sono le uniche particelle che si muovono. La carica dell'elettrone è la seguente

$$e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Si sta parlando, comunque, di cariche che orbitano attorno al nucleo (il quale presenta un diametro di $5.0 \times 10^{-15} \text{ m}$), mentre il diametro dell'atomo è di circa $2.0 \times 10^{-10} \text{ m}$.

Osservazione: Il fatto che gli elettroni non cadano dentro il nucleo, che presenta particelle positive come i protoni, è dettato dal principio di indeterminazione di Heisenberg, il quale afferma che, dal punto di vista quantistico, è impossibile conoscere simultaneamente con precisione sia il momento sia la posizione di una particella.

1.1 Conduttore

Si consideri una sfera conduttrice in cui vi sono elettroni che tendono a distribuirsi su un lato della superficie della sfera, lasciando dall'altro lato una carica positiva. Se a tale sfera viene collegato un cavo conduttore, gli elettroni tenderanno a percorrere tale cavo, diminuendo, di fatto, la quantità di carica negativa presente nella sfera conduttrice.

Osservazione: Come si è detto, la carica è quantizzata, e la **carica base** di un elettrone è

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

che, ovviamente, presenta un segno negativo. Quando un oggetto è carico, significa che vi è uno squilibrio tra il numero degli elettroni e il numero di protoni. Si potrebbe scrivere che la quantità di carica è data da

$$q = (N_p - N_e) \cdot e$$

dove N_e , N_p rappresentano il numero di elettroni e di protoni.

Non solo, ma dato un oggetto, è possibile definire

- **densità lineare di carica**, definita come $\lambda = \frac{q}{L}$;
- **densità superficiale di carica**, definita come $\sigma = \frac{q}{S}$;
- **densità volumetrica di carica**, definita come $\rho = \frac{q}{V}$.

In generale, poi, la quantità di carica totale, in elettrostatica, si **conserva**.

1.2 Legge di Coulomb

Per misurare la forza di gravità è stata impiegata la *bilancia di torsione*, impiegando la forza elastica per misurare un'ulteriore forza. Analogamente, ponendo due cariche opposte vicine le une alle altre, si misura l'angolo che viene descritto dalle due cariche nello spazio angolare: in base a

tale dato, unito al fatto che è nota la forza di torsione in funzione dell'angolo stesso, si riesce a determinare la **forza di Coulomb**. Di qui si ha che

$$\vec{F}_{a,b} = K \cdot \frac{q_A \cdot q_B}{r_{a,b}^2} \cdot \hat{v}_{a,b}$$

Naturalmente la forza ha una sua direzione e un suo verso, oltre che modulo, descritto dal versore. Per la 3° legge di Newton, si ha naturalmente che

$$\vec{F}_{a,b} = \vec{F}_{b,a}$$

ovvero le forze sono opposte a seconda del versore impiegato. Si ha che la costante ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto, definita come

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Mentre la costante K di Coulomb è

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

Osservazione: La carica di 1 C è molto elevata, in quanto se si pongono due cariche da 1 C a distanza di 1 m si ottiene una forza di Coulomb pari a $F_{a,b} = 9 \times 10^9$ N, che è elevatissima. Non solo, si osservi che le forze attrattive agenti su un corpo si sommano, al fine di ottenere la forza risultante.

Esempio 1: Per capire se, date due cariche, risulta più significativa la forza di gravità o la forza di Coulomb, è sufficiente considerare due protoni entrambi di carica elementare e , posti a distanza x . In particolare si ha che

- La forza di Coulomb è data $F_{C,a,b} = K \cdot \frac{e^2}{x^2}$
- La forza di gravità è data da $F_{G,a,b} = G \cdot \frac{m_p^2}{x^2}$

Da cui si evince che il loro rapporto è dato da

$$\frac{F_{C,a,b}}{F_{G,a,b}} = \frac{e^2}{m_p^2} \cdot \frac{K}{G} = \frac{1.6 \times 10^{-38}}{1.67 \times 10^{-54}} \cdot \frac{9 \times 10^9}{6.67 \times 10^{-11}} = \frac{9}{7} \times 10^{36}$$

il che significa che la forza di Coulomb è circa 10^{36} volte quella di gravità.

Esempio 2: Due sfere identiche di polistirolo sono appese tramite un filo lungo $l = 30 \times 10^{-2}$ m. Le cariche delle due sfere sono incognite, ma le loro masse, invece, sono $m_1 = m_2 = 0,030$ kg. L'angolo descritto dal filo rispetto alla verticale è $\theta = 7^\circ$, è facile capire come la distanza delle due cariche sia $30 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \sin(7) \cdot 2 = 39 \times 10^{-2}$ m. Non solo, ma è anche noto come

$$mg = T \cos(\theta) \quad \text{e} \quad F_C = T \sin(\theta)$$

per cui si ha che

$$F_C = mg \tan(\theta)$$

Da ciò si evince come le due cariche siano

$$q_1 = q_2 = \sqrt{\frac{mg \tan(\theta) \cdot (2l \sin(\theta))^2}{K}} = 1.46 \times 10^{-7} \text{ C}$$

che si può anche scrivere come 146 nC.

4 Ottobre 2022

La forza di Coulomb è alla base della forza elettrostatica. Non solo, ma è fondamentale capire che, in elettrostatica, le forze possono essere sia attrattive che repulsive.

La carica è quantizzata e le forze elettrostatiche che agiscono su una particella possono essere sommate (secondo le regole del parallelogramma) al fine di determinarne la risultante.

1.3 Campo elettrico

Esattamente come nel caso del campo gravitazionale, anche il campo elettrico è un campo vettoriale che presenta implicite delle proprietà che attribuisce alle entità che vi interagiscono.

Di seguito si espone la definizione di **campo elettrico**:

CAMPO ELETTRICO

Il campo elettrico, dal punto di vista vettoriale, viene definito come

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

in cui q_0 deve essere piccolo, ed è una carica di prova necessaria per misurare il campo elettrico, in quanto è noto che le cariche fra di loro interagiscono e si influenzano reciprocamente.

Il campo elettrico è additivo, per cui al fine di conoscere il vettore campo elettrico risultante, è sufficiente sommare i vettori campo elettrico secondo la regola del parallelogramma.

Esempio: Si consideri una carica elettrica piccola $q_0 = 81 \text{ nC}$ e una forza che agisce su tale carica \vec{F} ..., allora ... continua ...

1.3.1 Campo elettrico generato da una carica puntiforme

È noto che la forza di Coulomb è data dalla seguente equazione

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_0}{r^2} \cdot \hat{v}$$

Per cui il campo elettrico generato da una carica puntiforme è dato da

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \hat{v}$$

Se ora si dovesse considerare il campo elettrico generato da un insieme di cariche è dato da:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \hat{v}_i$$

Esempio: Data una carica $q = 81 \times 10^{-9} \text{ C}$ ed essendo nota la carica di un elettrone $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, è facile capire che il numero di elettroni persi è dato da:

$$\frac{81 \times 10^{-9} \text{ C}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 50.6 \times 10^9$$

Osservazione: In un classico esperimento R.A. Millikan (1868-1953) misure la carica dell'elettrone. L'apparecchiatura che viene rappresentata schematicamente nella Figura 1.13. Un nebulizzatore

produceva goccioline alcune delle quali cadevano attraverso un foro in una regione in cui era presente un campo elettrico uniform generato da due piatti paralleli carichi. Millikan era in grado di osservare una particolare gocciolina con il microscopio e di determinarne la massa misurandone la velocità limite. Egli caricava poi la gocciolina, irraggiandola con raggi X e regolava il campo elettrico in modo che la goccia rimanesse in equilibrio statico sotto l'azione delle uguali e opposte forze gravitazionale ed elettrica.

1.4 Dipolo elettrico

Avvicinando un bastoncino carico ad uno non carico, si osserva un avvicinamento dei due oggetti. Il dipolo ha una direzione ben chiara:

Allora il momento di dipolo di un dipolo elettrico si calcola come:

$$\vec{p} = (2aq) \cdot \hat{j}$$

mentre il campo di dipolo si determina come

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3} \cdot [3 \cdot (\hat{r} \cdot \hat{p})\hat{r} - \hat{p}]$$

1.5 Campo elettrico sull'asse di un dipolo

Un dipolo elettrico è composto da due cariche $+q$ e $-q$ separate da una distanza $2a$. Se le due cariche sono posizionate rispettivamente in $(0, 0, a)$ e $(0, 0, -a)$ sull'asse z (ossia l'asse del dipolo).

1.6 Campo elettrico nel piano equatoriale di un dipolo

Si consideri il campo elettrico in un punto P posto sull'asse y . I due contributi di campo sono \vec{E}_+ , dovuto alla carica positiva, ed \vec{E}_- , dovuto alla carica negativa:

$$\vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_+^2} \hat{r}_+ \quad \text{e} \quad \vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-q}{r_-^2} \hat{r}_-$$

La distanza r_+ tra $+q$ e P è uguale alla distanza r_- tra $-q$ e P ed è $r_+ = r_- = r = \sqrt{y^2 + a^2}$. Com'è evidente, il vettore $\vec{r}_+ = y\hat{j} - a\hat{k}$, per cui il versore \hat{r}_+ è la normalizzazione del vettore \vec{r}_+ è

$$\hat{r}_+ = \frac{y\hat{j} - a\hat{k}}{r}$$

per cui si ottiene

$$\vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{y\hat{j} - a\hat{k}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot (y\hat{j} - a\hat{k})$$

... continua ...

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{(z-a)^2} - \frac{q}{(z+a)^2} \right)$$

1.7 Campo elettrico generato da distribuzioni continue di carica

Il campo elettrico infinitesimo $d\vec{E}$ generato da dq è

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

per cui

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

Per cui se si considera un oggetto con distribuzione volumetrica di carica costante, si ottiene:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho}{r^2} \hat{r} dv$$

mentre per un oggetto con distribuzione superficiale di carica costante, si ottiene:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma}{r^2} \hat{r} da$$

e infine, per un oggetto con distribuzione lineare di carica costante, si ottiene:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda}{r^2} \hat{r} dl$$

1.8 Linee di forza del campo elettrico

Le linee di forza d campo elettrico aiutano a farsi un'idea intuitiva del campo: sostanzialmente sono una mappa del campo. Benché le linee di forza vengano tracciate su un foglio di carta o su una lavagna (che sono bidimensionali), esse vanno immaginate nello spazio tridimensionale e sono estremamente utili, dal punto di vista grafico, anche per descrivere i campi magnetici.

Il concetto di linea di forza fu introdotto dal grande fisico sperimentale inglese Michael Faraday (1791-1867): ciascuna linea viene tracciata in modo che in ogni suo punto, il vettore campo elettrico \vec{E} sia tangente alla linea stessa, cosicché le linee di forza indicano la direzione, mentre le frecce indicano il verso del campo.

Per esempio, in prossimità di una carica puntiforme, le linee di forza sono radiali e hanno **verso uscente da una carica positiva ed entrante in una carica negativa**.

In una data rappresentazione, la densità di linee di forza per unità di superficie dipende dal modulo del campo. Nelle regioni in cui le linee sono vicine, o fitte, E è grande, mentre dove sono rade E è piccolo. La densità delle linee di forza è proporzionale a E e ciò può essere dimostrato tramite la legge di Gauss.

Dal momento che la densità delle linee per unità di superficie è proporzionale a E , il numero delle linee uscenti da una carica positiva o entranti in una carica negativa è proporzionale a $|q|$.

Un campo uniforme è rappresentato da linee di forza equidistanti, rettilinee e parallele. Il campo in prossimità di un disco in carico modo uniforme, ma lontano dal suo bordo, è pressoché uniforme. Per quanto riguarda le linee di forza del campo di un disco caricato uniformemente, si evince vicino al disco e lontano dal suo bordo le linee sono tracciate in modo da apparire approssimativamente equidistanti, rettilinee e parallele.

5 Ottobre 2022

Dopo aver introdotto la definizione di campo elettrico, sono state esposte le formule di calcolo del campo elettrico a seconda della natura dell'entità che si sta studiando, come un dipolo o una carica puntiforme.

1.9 Campo elettrico di una distribuzione lineare di carica

Quando una distribuzione di carica è lunga e sottile, come accade con una carica localizzata su un filo, si parla di **distribuzione lineare di carica**.

La densità lineare di carica λ è calcolata come

$$\lambda = \frac{Q}{2l}$$

In particolare, si ha che il campo elettrico infinitesimo, in modulo vale

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{y^2 + z^2}$$

Dovendo descrivere il campo elettrico come vettore, si ha

$$d\vec{E} = dE_y \hat{j} + dE_z \hat{k} = (dE \cos(\theta)) \hat{j} - (dE \sin(\theta)) \hat{k}$$

Appare evidente, dal punto di vista trigonometrico, come

$$\sin(\theta) = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \quad \text{e} \quad \cos(\theta) = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

Integrando rispetto alla componente y del campo, si ottiene

$$E_y = \int dE_y = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{-l}^{+l} \frac{dz}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

per cui si ottiene che

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{y} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + y^2}}$$

Ovviamente $E_z = 0$, in quanto per simmetria vi sono componenti del campo elettrico uguali e opposte lungo l'asse z .

Pertanto, generalizzando, considerando un qualunque punto del piano xy , osservando che E deve essere simmetria azimutale rispetto all'asse z , analogamente a quanto si è visto per il dipolo, si otterrebbe

$$E_R = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}}$$

dove $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. Supponendo che $l \gg R$, è chiaro che

$$E_R = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

1.10 Campo elettrico sull'asse di un anello carico

Dovendo determinare \vec{E} nei punti posti lungo l'asse di un anello circolare carico di raggio a e carica Q . La distribuzione di carica sull'anello è uniforme e sufficientemente sottile per poter essere considerata lineare, analogamente alla distribuzione di massa di un anello.

Considerando un anello su un piano yz , il campo elettrico infinitesimo $d\vec{E}$ generato dalla carica dq può essere decomposto nelle sue componenti dE_x , parallela all'asse x e dE_\perp , perpendicolare all'asse x . La simmetria della distribuzione di carica richiede che $\int dE_\perp = 0$, perché elementi di carica da parti opposte dell'anello producono componenti infinitesime del campo elettrico dE_\perp che

si elidono reciprocamente.

Pertanto si ha che

$$E_x = \int dE_x = \int dE \cos(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{dq}{r^2} \cos(\theta)$$

Ovviamente θ e r^2 rimangono costanti per ciascun elemento di carica dq , da cui

$$E_x = \frac{\cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int dq = \frac{Q \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Considerando P sull'asse dell'anello a distanza x dal centro dell'anello stesso, si ha che

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

per cui si ha

$$E_x = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 \cdot (x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1.11 Campo elettrico di una distribuzione superficiale di carica

Dal momento che la distribuzione di carica è uniforme e ha la forma di un disco sottile, si può trattare come una distribuzione superficiale con $\sigma = \frac{Q}{\pi R_0^2}$, dove πR_0^2 è l'area del disco.

È noto che dE_x sull'asse di un anello di raggio a e carica $dq = \sigma 2\pi a da$ è

$$dE_x = \frac{(\sigma 2\pi a da) x}{4\pi\epsilon_0 \cdot (x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Integrare tale espressione tra $a = 0$ e $a = R_0$ equivale a sommare tutti i contributi a E_x dovuti ai singoli anelli di raggio a compreso tra $a = 0$ e $a = R_0$:

$$E_x = \frac{2\pi\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^{R_0} \frac{ada}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Il calcolo dell'integrale produce:

$$E_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R_0^2}} \right)$$

Dal momento che la quantità tra parentesi è sempre positiva, il segno algebrico di E_x è lo stesso di x . Nell'ipotesi in cui $x \ll R_0$, si ha che

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|}$$

in cui risulta fondamentale il segno di x per definire il segno del campo.

1.12 Particelle cariche in un campo elettrico uniforme

Un tubo a raggi catodici è uno strumento in cui gli elettroni vengono prima accelerati e poi deflessi. In particolare, gli elettroni vengono emessi da un filamento reso incandescente e accelerati da un campo elettrico orizzontale generato da delle placche cariche nel cosiddetto "cannone elettronico". Se la forza elettrica è l'unica forza significativa che agisce sulla particelle $q \cdot \vec{E}$ è la forza risultante e la seconda legge di Newton fornisce

$$q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a} \quad \text{ossia} \quad \vec{a} = \frac{q \cdot \vec{E}}{m}$$

Decomponendo il vettore accelerazione nelle sue due componenti x e y , è possibile ottenere

$$\begin{aligned}a_y &= \frac{qE}{m} \quad \text{e} \quad a_x = 0 \quad \text{e} \quad a_z = 0 \\v_y &= \left(\frac{qE}{m}\right) \cdot t \quad \text{e} \quad v_x = v_0 \quad \text{e} \quad v_z = 0 \\y &= \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{m}\right) \cdot t^2 \quad \text{e} \quad x = v_0 \cdot t \quad \text{e} \quad z = 0\end{aligned}$$

È possibile ottenere anche la formula per la traiettoria parabolica della particella, ricavando t come $t = \frac{x}{v_0}$, per cui

$$y = \frac{1}{2} \frac{qE}{mv_0^2} \cdot x^2$$

1.12.1 Dipolo elettrico in campo elettrico uniforme

Un dipolo elettrico, considerato come un sistema rigido, posto in un campo elettrico uniforme tende a ruotare in modo che il momento di dipolo risulti allineato (parallelo e concorde) al campo, soggetto alle forze esterne

$$\vec{F}_+ = q \cdot \vec{E} \quad \text{e} \quad \vec{F}_- = -q \cdot \vec{E}$$

Non solo le forze interne sono nulle, ma anche le forze esterne lo sono, in quanto uguali ed opposte, mentre il momento risultante, indicato con \vec{r}_- il vettore posizione della carica negativa e con \vec{r}_+ quello della carica positiva, è pari a

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \vec{r}_+ \times (+q) \cdot \vec{E} + \vec{r}_- \times (-q) \cdot \vec{E} = q \cdot (\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$

Osservando che $\vec{r}_+ - \vec{r}_-$ è proprio il vettore che va dalla carica negativa a quella positiva, è possibile scrivere

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Dal momento che ruotare di un angolo $d\theta$ un dipolo in un campo elettrico è necessario compiere un lavoro $dL = \tau \cdot d\theta$, è possibile associare ad ogni posizione del dipolo una certa energia potenziale, in modo tale che il lavoro compiuto all'esterno per ruotare il dipolo sia pari alla variazione di energia potenziale, da cui

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \cdot d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} pE \cdot \sin(\theta) \cdot d\theta = -pE \cos(\theta_2) - (-pE \cos(\theta_1)) = \Delta U$$

Pertanto, l'energia potenziale del dipolo in un campo elettrico può essere scritta, quindi, come

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

10 Ottobre 2022

È noto che il campo elettrico è un **campo vettoriale**, definito come il rapporto tra la forza di Coulomb e una carica di prova, che deve essere piccola, ovvero

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

in cui la forza coulombiana si calcola come

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 \cdot q_1}{r^2} \hat{r}$$

ove \hat{r} è il versore che va da q_0 a q_1 .

Ciò non toglie che il campo elettrico è pur sempre un vettore.

2 Legge di Gauss

2.1 Flusso

Alla base di **legge di Gauss** si pone la definizione di **flusso**, da considerarsi come la quantità di carica che si trova su una superficie.

Naturalmente, per essere molto più pratici, è possibile introdurre il concetto partendo dal campo gravitazionale, invece del campo elettrico. È intuitivo pensare che il flusso di campo gravitazionale che attraversa una superficie è dato dal **prodotto scalare** tra il valore del campo e la superficie attraversata, da cui

$$\Phi_g = \vec{g} \cdot \Delta \vec{S}$$

in cui $\Delta \vec{S}$ prende il nome di **vettore superficie**; tale vettore è così definito

- il suo modulo è dato dall'area della superficie stessa;
- il suo orientamento è dato dall'**angolo normale \hat{n} alla superficie stessa**, diretto verso l'alto. Tuttavia, ciò non vieta di poter definire tale angolo dalla parte opposta, ma pur sempre in **direzioe esterna rispetto al volume definito dalla superficie chiusa** (infatti, una superficie chiusa è una superficie che descrive sempre un volume).

Pertanto, nel caso di un foglio rettangolare di area $A = ab$ orientato parallelamente al piano yz , si ha che il flusso è

$$\Phi_g = \vec{g} \cdot \Delta \vec{S} = (-g\hat{j}) \cdot (+ab\hat{j}) = -g \cdot ab$$

Esempio 1: Si consideri un cubo di spigolo l e si calcoli il flusso di campo elettrico che attraversa ciascuna faccia, sapendo che il campo elettrico va da sinistra verso destra.

Ovviamente il flusso totale sarà dato dalla sommatoria del flusso che attraversa tutte e sei le facce del cubo, per cui

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^6 \vec{E} \cdot \Delta \vec{S}$$

Tuttavia, le uniche facce che produrranno un flusso non nullo saranno quelle con vettore superficie posto parallelamente al vettore campo elettrico. Per cui

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^6 \vec{E} \cdot \Delta \vec{S} = \vec{E} \cdot l^2 \cos(0) + \vec{E} \cdot l^2 \cos(\pi) = E \cdot l^2 - E \cdot l^2 = 0$$

Esempio 2: Si consideri un cuneo immersa in un campo uniforme $\vec{E} = (600\text{N/C})\hat{i}$ e si calcoli il flusso che attraversa ciascuna delle 5 facce e, successivamente, il flusso totale.

In particolare si ha che

1. $\Phi_1 = E \cdot \Delta S \cdot \cos(\pi) = -600 \cdot 9 = -5400 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}$
2. $\Phi_2 = E \cdot \Delta S \cdot \frac{3}{5} = 600 \cdot 15 \cdot \frac{3}{5} = 5400 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}$
3. $\Phi_3, \Phi_4, \Phi_5 = 0 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}$

Ciò porta a concludere che il flusso totale sia nullo.

Osservazione: Gli esempi di flusso fin qui analizzati riguardano campi uniformi e superfici piane. Quando la superficie è curva, o quando il campo elettrico varia da punto a punto su di essa, il flusso si calcola dividendo quest'ultima in piccoli elementi di superficie, ciascuno abbastanza piccolo da poter essere considerato piano e tale che su di esso la variazione del campo elettrico sia trascurabile. Il flusso attraverso l'intera superficie è allora la somma dei singoli contributi dovuti a ciascuno dei

piccoli elementi di superficie. Facendo tendere a zero le dimensioni di ciascun elemento e a infinito il loro numero, la somma diventa un integrale:

$$\Phi_E = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{S}_i = \int \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

oppure, in modo analogo,

$$\Phi_E = \int \int_S E \cos(\theta) d\vec{S}$$

Nel caso di una superficie chiusa, come nella maggior parte degli esempi che si tratteranno in cui la notazione sul doppio integrale sta a significare che si tratta di una superficie chiusa, ossia una superficie che definisce un volume.

2.2 Legge di Gauss

Di seguito si espone la definizione di **legge di Gauss**:

LEGGE DI GAUSS

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa arbitraria è pari alla somma algebrica delle cariche contenute all'interno del volume delimitato dalla superficie divisa per la costante dielettrica del vuoto.

Sotto forma di equazione è

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{ovvero} \quad \oint_{S_{\text{chiusa}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V_{\text{int}}} \rho dv$$

Esempio: Si consideri una sfera al cui centro si trova una carica q . Allora, applicando la legge di Gauss, si ottiene che

$$\Phi_E = \oint_{\text{Sfera}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{Sfera}} E_r \cdot dS = E_r \cdot \oint_{\text{Sfera}} dS = E_r \cdot (4\pi r^2)$$

Dato che la carica totale presente nella sfera gaussiana è $Q_{\text{int}} = q$, la legge di Gauss porta a

$$E_r \cdot (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{ossia} \quad E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

e tenendo conto della direzione del campo si ottiene la formula del campo elettrico già desunta tramite la Legge di Coulomb:

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{r}$$

2.3 Deduzione della legge di Gauss dalla legge di Coulomb

Si considerino due sfere gaussiane di raggi differenti e aventi centro comune, in corrispondenza di una stessa particella carica. Per il teorema di Gauss, i flussi attraverso le due superfici sono uguali. Dal punto di vista grafico, si può dire che il flusso è proporzionale al numero delle linee che le attraversano. Se il flusso è lo stesso, mentre la superficie è differente, ciò che varia è la densità superficiale di carica, la quale sarà maggiore per la sfera interna, di raggio inferiore, rispetto alla sfera esterna.

11 Ottobre 2022

Se il flusso di campo elettrico su una superficie chiusa è nullo, ciò non significa che il campo elettrico su ogni “faccia” dell’oggetto sia nullo.

Per esempio, considerato un dipolo elettrico, con una superficie posta attorno a $+q$ (denotata con S_1) una tra le due cariche (denotata con S_2), si ottiene

$$\Phi_{S_1} = \frac{+q}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \Phi_{S_2} = 0$$

È noto che la Legge di Gauss e la Legge di Coulomb si equivalgono. Tuttavia, la Legge di Gauss è molto più ampia, in quanto non si applica, come per la Legge di Coulomb, solamente a cariche ferme, ma anche a **cariche in movimento**.

2.4 Deduzione della legge di Gauss dalla legge di Coulomb

Il flusso di campo elettrico generato da una particella carica attraversa una superficie a forma di blocco arrotondato. La superficie è formata da due calotte sferiche e da quattro facce piane. Il flusso attraverso ciascuna faccia piana è nullo, mentre i flussi attraverso le due calotte sferiche sono uguali e opposti, quindi il flusso relativo all’intera superficie è nullo.

Ovviamente, per quanto riguarda le facce piane, il vettore campo elettrico e il vettore superficie corrispondenti sono ortogonali, per cui il flusso è nullo. Per quanto riguarda le calotte sferiche, denotate con S_1 a distanza r_1 dalla carica q , e con S_2 a distanza r_2 dalla carica q . Per tale ragione, i flussi corrispondenti sono

$$\Phi_1 = \underbrace{\int \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{S_1} = \underbrace{\int \int_{S_1} -E \cdot dS}_{S_1} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \underbrace{\int \int_{S_1} dS}_{S_1} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \Delta S_1$$

E, analogamente per la seconda calotta, si ottiene

$$\Phi_2 = \underbrace{\int \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{S_2} = \underbrace{\int \int_{S_2} E \cdot dS}_{S_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \underbrace{\int \int_{S_2} dS}_{S_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \Delta S_2$$

Tuttavia è evidente come

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \rightarrow \quad \Delta S_2 = \Delta S_1 \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Ciò, quindi, consente di riscrivere Φ_2 come

$$\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \cdot \Delta S_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \cdot \Delta S_1 \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \Delta S_1 = -\Phi_1$$

Ecco, quindi, che il flusso totale è

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_1 + (-\Phi_1) = 0$$

In questo modo si è dimostrato che il flusso complessivo attraverso una superficie arbitraria con carica puntiforme all’esterno è nullo. Ciò che risulta fondamentale è che tale risultato non è valido solamente per la particolare superficie prescelta nella dimostrazione, ma per qualsiasi superficie chiusa. Infatti, presa una qualunque superficie, è sempre possibile scomporla in delle calotte sferiche come quella considerata, in modo tale che il flusso di ciascuna sia nulla e, quindi, anche il flusso totale sarà nullo. Ciò permette di concludere che

$\Phi_E = 0 \quad (\text{per una superficie chiusa arbitraria e una carica } q \text{ esterna})$

2.5 Flusso attraverso una superficie arbitraria con carica puntiforme all'interno

Considerando, ora, il flusso dovuto ad una carica puntiforme q posta nel centro di una superficie gaussiana sferica di raggio r .

Secondo la definizione

$$\Phi_E = \oint \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint \oint dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

in quanto la superficie di una sfera di raggio r è proprio $4\pi r^2$. Ecco che quindi si è ottenuta la legge di Gauss:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{per una superficie chiusa arbitraria e una carica } q \text{ interna})$$

Osservazione: Il flusso del campo elettrico prodotto da una carica puntiforme al centro di una superficie gaussiana che è sostanzialmente una sfera, ma con una porzione di calotta staccata e allontanata dal centro. Ovviamente, il flusso di campo elettrico attraverso la calotta 2 è uguale al flusso mancante per l'assenza della calotta 1, quindi il flusso relativo all'intera superficie è identico a quello relativo ad una sfera, ossia

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0}$$

questo è ovvio in forza del fatto che, come visto nell'esempio precedente, il flusso di campo elettrico che attraversa le due superfici sferiche di una calotta è identico, in modulo, in quanto il rapporto tra le superfici è uguale al rapporto dei quadrati dei rispettivi raggi.

2.6 Flusso attraverso una superficie arbitraria con carica puntiformi all'interno e all'esterno

Dopo aver considerato il flusso elettrico prodotto da una sola particella carica, si supponga ora che vi sia più di una particella di cui tenere conto.

Data una superficie qualsiasi, in cui vi sono due cariche interne q_1 e q_3 , e una carica esterna q_2 . È noto che è valido il **principio di sovrapposizione degli effetti**, per cui

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

da cui si evince che

$$\Phi_E = \oint \oint_{S_{chiusa}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \oint_{S_{chiusa}} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3) \cdot d\vec{S} = \oint \oint_{S_{chiusa}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \oint \oint_{S_{chiusa}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \oint \oint_{S_{chiusa}} \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = \frac{q_1}{\epsilon_0} + 0 + \frac{q_3}{\epsilon_0}$$

in quanto le cariche q_1 e q_3 sono interne, mentre q_2 è esterna, per quanto dimostrato nei due casi precedenti.

Ecco che, quindi, si è ottenuta la formulazione generale della Legge di Gauss:

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\sum_{S_{chiusa}} q_i}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \oint \oint_{S_{chiusa}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, dv$$

2.7 Legge di Gauss in forma differenziale

Di seguito si espone la definizione di **divergenza di un campo vettoriale**:

DIVERGENZA DI UN CAMPO VETTORIALE

La divergenza di un campo vettoriale viene definita come la somma delle derivate parziali del campo vettoriale stesso rispetto alle 3 direzioni dello spazio tridimensionale:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta v} = \frac{d\Phi}{dv}$$

Esempio: Dato il vettore campo elettrico $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$. Si consideri un volumetto cubico di spigoli dx, dy e dz . Il flusso attraverso la faccia $ABCD$ è

$$d\Phi_{ABCD} = E_x dy dz$$

mentre il flusso attraverso la faccia $A'B'C'D'$

$$d\Phi_{A'B'C'D'} = -E'_x dy dz$$

Poiché le due facce del cubo sono molto vicine, è possibile scrivere

$$E'_x = E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \quad \rightarrow \quad E_x - E'_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx$$

cosicché, essendo $dv = dx dy dz$ si ottiene

$$d\Phi_{ABCD} + d\Phi_{A'B'C'D'} = (E_x - E'_x) dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dv$$

Similmente per le altre due coppie di facce si otterrà

$$\Phi_{AA'DD'} = -E_y dx dz \quad \text{e} \quad \Phi_{CC'B'B'} = E_y dx dz$$

$$\Phi_{AA'BB'} = -E_z dx dy \quad \text{e} \quad \Phi_{DD'CC'} = E_z dx dy$$

In conclusione si ottiene che

$$d\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dv$$

12 Ottobre 2022

Si è osservato in precedenza che, se il campo elettrico è costante e si mantiene inalterato, e passa attraverso due superfici identiche, il flusso risultante sarà sempre nullo. L'unica possibilità perché esso non si azzeri è che vi sia una differenza tra le due superfici, ovvero sia un gradiente.

Osservazione: La legge di Gauss, scritta in forma differenziale, si può esprimere come

$$\Phi = \oint_{\text{Superficie}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \iiint_{\text{Volume}} \rho dv$$

Da ciò deriva anche la definizione di **divergenza del campo elettrico** \vec{E} come

$$\text{div} \vec{E} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta v} = \frac{d\Phi}{dv}$$

Osservazione: La derivata parziale di una funzione $f(x, y, z)$ che dipende da 3 variabili, per esempio, rispetto alla variabile x viene definita come

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y, z) - f(x_0, y_0, z)}{\Delta x}$$

Nel caso visto in precedenza, per quanto concerne il calcolo del flusso, si era ottenuto

$$d\Phi_{ABCD} + d\Phi_{A'B'C'D'} = (E_x - E'_x) dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dv$$

Considerando anche le altre componenti, si ottiene che

$$d\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dv$$

ma siccome, per definizione, si ha che

$$\text{div} \vec{E} = \frac{d\Phi}{dv}$$

è immediato evincere che

$$\text{div} \vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Osservazione: Talvolta, si definisce la divergenza di \vec{E} come vettore nabla ∇ , ossia

$$\text{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}$$

in cui l'operatore nabla viene definito come

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

2.7.1 Campo elettrico in prossimità di una distribuzione lineare di carica molto lunga

Si consideri un filo molto lungo e un punto P a distanza r da esso. Il filo elettrico è caricato in modo uniforme, con densità di carica λ .

Si immagini una superficie gaussiana a forma di cilindro che avvolge il filo elettrico, di raggio r . Ovviamente sulle due superfici circolari il flusso di campo elettrico è nullo, in quanto il campo elettrico \vec{E} è in direzione radiale rispetto al filo, mentre i vettori superficie sono ambedue ortogonali al vettore campo elettrico.

Invece, il flusso sulla superficie cilindrica è dato da

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS = E \cdot \oint_S dS = E \cdot 2\pi r \cdot h$$

La carica contenuta nel cilindro è il prodotto della densità lineare di carica λ per l'altezza h del cilindro $Q_{\text{int}} = \lambda h$. Quindi dalla legge di Gauss si evince che

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow E 2\pi r = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

2.7.2 Campo elettrico in prossimità di una grande lamina piana carica

Si consideri la legge di Gauss per la determinazione del campo elettrico E prodotto da una grande lamina piana con densità superficiale di carica σ uniforme, in un punto vicino alla sua superficie. Dal momento che il vettore campo elettrico è diretto perpendicolarmente alla superficie, è possibile prendere in considerazione una superficie cilindrica che attraversa la superficie della lamina. In particolare, quindi, il flusso passante per la superficie del cilindro è nulla, in quanto il vettore superficie e il vettore campo elettrico sono ortogonali. Tuttavia, per quanto riguarda le superfici circolari, il vettore campo elettrico è sempre concorde con il vettore superficie, da cui

$$\Phi_E = E \cdot \Delta S + E \cdot \Delta S = 2E\Delta S$$

La carica contenuta nel cilindro è il prodotto della densità superficiale di carica σ per l'area della superficie circolare, ovvero $Q_{\text{int}} = \sigma\Delta S$. Quindi dalla legge di Gauss si evince che

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow 2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

2.7.3 Superficie sferica carica

Si determini il campo elettrico \vec{E} in punti sia interni che esterni a una sottile sfera cava uniformemente carica di raggio r_0 e carica Q . La distribuzione di carica è simile a quella della massa di una pallina da ping-pong.

Si consideri un punto P_1 interno alla sfera, di raggio r_1 ; allora, la superficie gaussiana più conveniente da impiegare per il calcolo del campo elettrico è proprio una sfera di raggio r_1 e centrata in modo coincidente con la sfera carica; ciò significa che la carica interna alla sfera di raggio r_1 è nulla, in quanto la carica è tutta distribuita sulla superficie carica della sfera di raggio r_0 . Pertanto, è possibile affermare che \vec{E} è nullo fintantoché $r_1 < r_0$.

Nell'ipotesi in cui $r_1 \geq r_0$, il flusso complessivo sarà

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{e anche} \quad \Phi_E = E \cdot S_{\text{sfera}} = E \cdot 4\pi r_0^2$$

Ciò permette di concludere che

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}$$

che è identico al campo elettrico generato da una carica puntiforme Q posta al centro della pallina.

2.7.4 Sfera carica in modo uniforme

Si determini il campo elettrico \vec{E} in punti sia interni che esterni a una sfera cava uniformemente carica di raggio r_0 e carica Q . La distribuzione di carica è simile a quella della massa di una pallina da biliardo.

Si consideri, dapprincipio, un punto P_1 esterno alla sfera, di raggio $r_1 > r_0$, allora il flusso esterno rispetto alla sfera carica sarà

$$\Phi_{r_1} = E_{r_1} \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{da cui} \quad E_{r_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$$

Si consideri, invece, un punto P_2 interno alla sfera, di raggio $r_2 < r_0$; allora il flusso sulla sfera di raggio r_2 è proprio dato da

$$\Phi_{r_2} = E_{r_2} \cdot 4\pi r_2^2$$

Per calcolare, invece, la carica interna alla sfera di raggio r_2 si osserva semplicemente che la densità di carica della sfera carica è

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$$

per cui, per quanto riguarda una sfera di raggio $r_2 < r_0$, la carica interna sarà

$$Q_{\text{int}} = \rho \cdot \Delta V = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3 = Q \cdot \frac{r_2^3}{r_0^3}$$

Per cui il flusso risultante è pari a

$$\Phi_{r_2} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q \cdot \frac{r_2^3}{r_0^3}}{\epsilon_0} = E_{r_2} \cdot 4\pi r_2^2 \quad \rightarrow \quad E_{r_2} = \frac{Q \cdot r_2}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}$$

che è ragionevole, in quanto il campo elettrico cresce linearmente con r nei punti interni alla sfera carica. Se $r_2 = r_0$ si ottiene il risultato già noto

$$E_{r_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}$$

2.8 Proprietà elettrostatiche di un conduttore

Si osservi facilmente che se ci fosse un campo elettrico all'interno di un conduttore, le cariche, soggette a tale campo e, quindi, alla forza di Coulomb, inizierebbero a muoversi, creando delle correnti che porterebbero a delle movimentazioni del campo elettrico. Ciò, naturalmente, non può avvenire in condizioni elettrostatiche, secondo l'ipotesi fondamentale seguente:

$$\boxed{\vec{E} = 0 \quad \text{all'interno di un conduttore in condizioni statiche}}$$

Ciò significa che se si considera una qualsiasi superficie gaussiana interna al conduttore, il flusso Φ_E è anch'esso nullo. Ma per la Legge di Gauss, se il flusso è nullo, non vi sono cariche in nessun punto all'interno del conduttore; in altre parole, la densità di carica di volume ρ deve essere nulla: ciò significa che tutte le cariche devono essere localizzate sulla superficie del conduttore.

2.8.1 Campo nelle immediate vicinanze di un conduttore

Considerando una superficie di un conduttore, su di essa può esserci un campo elettrico, ma esso deve essere diretto necessariamente in modo ortogonale rispetto alla superficie e non tangenzialmente; infatti, se così fosse, i portatori di carica si muoverebbero lungo la superficie e non si rispetterebbero più le condizioni di equilibrio elettrostatico.

Se ora si considerasse un cilindro che attraversa la superficie del conduttore considerata, essendo essa una superficie gaussiana, consente di calcolare il flusso su di essa. Ma per quanto detto, essendo il campo diretto solo ortogonalmente alla superficie ed esterno al conduttore, l'unico flusso calcolabile è

$$\Phi_{E_\perp} = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0} = E_\perp \cdot \Delta S \quad \rightarrow \quad E_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

17 Ottobre 2022

3 Potenziale elettrico

Il potenziale elettrico si misura in **Volt** [V], anche se sarebbe più corretto parlare di **Volta**, dal nome dello scienziato italiano inventore della lampadina.

3.1 Energia potenziale elettrica

Il potenziale elettrico è l'energia potenziale elettrica per unità di carica. Gli elementi essenziali per determinare un'espressione di tale grandezza sono

- il campo generato da una carica puntiforme
- il principio di sovrapposizione

3.1.1 Energia potenziale di una particella di prova nel campo di una carica puntiforme

Una particella di prova con carica q_0 viene spostata lungo un arco di circonferenza con centro in una carica puntiforme q fissa. Allora si ha che

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \cdot \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

in quanto il vettore $d\vec{l}$ è perpendicolare a \vec{E} in ogni punti del percorso, per cui il lavoro compiuto dalla forza elettrica è nullo.

Nel caso di una particella di prova che viene spostata lungo un percorso radiale, il lavoro è massimo, per cui

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \cdot \int_a^b \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \right) \cdot (dr \hat{r}) = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \left[-\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \right]_a^b$$

per cui si conclude che il lavoro compiuto per spostare una carica da un punto a a un punto b in direzione radiale al campo generato dalla carica di prova q_0 è

$$W = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

Se si prende in considerazione una traiettoria di forma arbitraria alla quale è sovrapposta una linea formata da un certo numero di piccoli archi e di piccoli segmenti radiali. Naturalmente, infatti, un percorso arbitrario può essere concepito come successione di un numero infinito di archi e di segmenti radiali infinitesimi.

Il lavoro compiuto lungo ciascun arco è nullo, e quindi il lavoro totale compiuto lungo la traiettoria di forma arbitraria è la somma dei contributi relativi ai vari segmenti radiali, ossia sempre

$$W = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

Osservazione: Dal momento che il lavoro compiuto dalla forza di Coulomb è indipendente dalla traiettoria, ma solamente dalla posizione iniziale e finale, si evince che **la forza di Coulomb è una forza conservativa**, per cui ad essa è possibile associare un'energia potenziale.

In particolare, è noto che la variazione dell'energia potenziale da a a b è data dall'opposto del lavoro compiuto da a a b , ovvero

$$\mathcal{U}_b - \mathcal{U}_a = - \int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}}$$

Nel caso di cui sopra, si ottiene che

$$\mathcal{U}_b - \mathcal{U}_a = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

Nell'ipotesi in cui ad una distanza molto grande $r_a = \infty$ si abbia $\mathcal{U}_\infty = 0$, è possibile generalizzare la formula dell'energia potenziale come

$$\mathcal{U}(r) = - \int_\infty^r \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}}$$

3.1.2 Energia potenziale di una particella di prova nel campo di un numero qualsiasi di cariche puntiformi

Si supponga che la particella di prova si trovi nel campo di due cariche puntiformi q_1 e q_2 . Per il principio di sovrapposizione, la forza elettrica $\vec{\mathbf{F}}$ agente sulla particella di prova è

$$\vec{\mathbf{F}} = q_0 \cdot \vec{\mathbf{E}} = q_0 \cdot (\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2)$$

Il lavoro compiuto da $\vec{\mathbf{F}}$ quando la particella di prova viene portata da a a b è

$$\int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = q_0 \cdot \int_a^b (\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2) \cdot d\vec{\mathbf{l}} = q_0 \cdot \left[\int_a^b \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot d\vec{\mathbf{l}} + \int_a^b \vec{\mathbf{E}}_2 \cdot d\vec{\mathbf{l}} \right]$$

Sviluppando si ottiene che

$$q_0 \cdot \left[\int_{r_a}^{r_b} \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot (d\mathbf{l}\hat{\mathbf{r}}) + \int_{r_a}^{r_b} \left(\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot (d\mathbf{l}\hat{\mathbf{r}}) \right] = \frac{q_0 q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r_1} \right]_{r_a}^{r_b} + \frac{q_0 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r_2} \right]_{r_a}^{r_b}$$

ottenendo

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[q_1 \cdot \left(\frac{1}{r_{1a}} - \frac{1}{r_{1b}} \right) + q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_{2a}} - \frac{1}{r_{2b}} \right) \right]$$

Pertanto il lavoro può essere suddiviso in due contributi, ciascuno dei quali è indipendente dal cammino percorso da a a b . Se si pone $r_a = \infty$, si evince come

$$\mathcal{U} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

in cui è fondamentale osservare come, tramite l'energia potenziale elettrica, sono stati rimossi i vettori ed è possibile operare unicamente tramite gli scalari.

3.2 Potenziale elettrico

Di seguito si espone la definizione di **potenziale elettrico**:

POTENZIALE ELETTRICO

Si definisce **potenziale elettrico** V come

$$V = \frac{\mathcal{U}}{q_0}$$

posto q_0 piccolo. L'unità di misura del potenziale elettrico è il **volt** [V]:

$$[V] = \frac{[J]}{[C]}$$

Si osservi, in particolare, che l'energia potenziale elettrica può anche essere misurata tramite l'**elettronvolt** [eV], definito come

$$1 \text{ eV} = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) \cdot (1 \text{ V}) = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Esercizio: In un atomo, la distanza tipica tra un elettrone e il nucleo è di circa $1 \times 10^{-10} \text{ m}$. Si determini il potenziale prodotto da un nucleo di ossigeno in un punto che si trova alla distanza di $1.0 \times 10^{-10} \text{ m}$ dal nucleo.

Il potenziale è facilmente calcolabile come

$$V = \frac{\mathcal{U}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} = 9.0 \times 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{8 \cdot 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}}{1.0 \times 10^{-10} \text{ m}} = 120 \text{ V}$$

L'energia potenziale, riferita a $U_\infty = 0$ di un elettrone in questo punto in eV si calcolerà come

$$\mathcal{U}_e = (-e) \cdot V = -120 \text{ eV}$$

che, in Joule, corrisponderà

$$\mathcal{U}_e = (-e) \cdot V = -1.6 \times 10^{-19} \cdot 120 = -1.9 \times 10^{-17} \text{ J}$$

3.3 Potenziale prodotto da distribuzioni continue di cariche

Il potenziale prodotto da una distribuzione continua di carica, semplicemente dividendo la distribuzione continua di cariche infinitesime dq e, con tale passaggio al limite, la sommatoria diviene un integrale, ossia

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ q_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{corpo carico}} \frac{dq}{r}$$

Esercizio: Il potenziale in un punto P posto sul vertice di un quadrato di lato 93 mm, dove $q_1 = 33 \text{ nC}$, $q_2 = -51 \text{ nC}$ e $q_3 = 47 \text{ nC}$. In base alla formula di cui sopra si ha che

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} \right) = 9.0 \times 10^9 \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \cdot \left(\frac{33 \times 10^{-9} \text{ C}}{93 \times 10^{-3} \text{ m}} - \frac{51 \times 10^{-9} \text{ C}}{\sqrt{2} \cdot 93 \times 10^{-3} \text{ m}} + \frac{47 \times 10^{-9} \text{ C}}{93 \times 10^{-3} \text{ m}} \right)$$

Il valore che si ottiene eseguendo i calcoli è $V = 4.2 \times 10^3 \text{ V}$.

18 Ottobre 2022

3.4 Differenza di potenziale

Se $\mathcal{U}_b - \mathcal{U}_a$ rappresenta la variazione di energia potenziale elettrica di una particella di prova con carica q_0 quando viene spostata dal punto a al punto b , la differenza di potenziale tra i punti a e b è definita come

$$\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_a = \frac{\mathcal{U}_b - \mathcal{U}_a}{q_0}$$

Inoltre, dal momento che la variazione di energia potenziale elettrica di una particella di prova con carica q_0 è l'opposto del lavoro compiuto dalla forza elettrica, si ha

$$\mathcal{U}_b - \mathcal{U}_a = -q_0 \cdot \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

dividendo per q_0 si ottiene la differenza di potenziale in funzione del campo elettrico:

$$\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Esempio: Si determini la differenza di potenziale $V_b - V_a$ in un campo uniforme orientato nella direzione $+x$. Si procede in questo modo

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b (E\hat{i}) \cdot (dx\hat{i}) = - \int_a^b E \cdot dl = -E \cdot (x_b - x_a) = -E \cdot \Delta x$$

Nell'ipotesi, quindi, che V_0 rappresenti il potenziale dei punti del piano yz , posto $x = 0$ e che $V(x)$ rappresenti il potenziale dei punti del piano parallelo al piano yz con coordinata x . Ciò fornisce

$$V(x) = V_0 - Ex$$

Esempio: Si considerino due placche cariche (anodo-catodo) in cui la differenza di energia potenziale è pari a

$$\Delta V = V_A - V_C = 2500 \text{ V}$$

Naturalmente, per la conservazione dell'energia si ottiene che

$$\mathcal{U}_A + \mathcal{K}_A = \mathcal{U}_C + \mathcal{K}_C$$

Preso un elettrone che parte dal catodo e raggiunge l'anodo, è ovvio che $\mathcal{K}_C = 0$, per cui

$$\mathcal{K}_A = \mathcal{U}_C - \mathcal{U}_A \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = -q_0 \cdot \Delta V$$

per cui la velocità cercata è

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot (-e) \cdot (-\Delta V)}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot 2500 \text{ V}}{9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 3.0 \times 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Esercizio: Si determini il potenziale nei punti dell'asse di un anello circolare uniformemente carico di raggio a e di carica totale Q . L'anello è così sottile da poter essere considerato una distribuzione lineare di carica. Pertanto si ottiene che

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{dq}{r}$$

Per la configurazione del punto considerato, si ha che

$$r = \sqrt{a^2 + x^2}$$

per cui si evince che

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

L'integrazione comporta la somma dei contributi di potenziale dovuti a tutti gli elementi di carica dq che formano l'anello. Siccome x e a sono costanti rispetto a tale integrazione, si ottiene

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Tale esempio permette di capire come il potenziale diminuisca con l'aumento della distanza x , sia essa positiva o negativa.

3.5 Relazione tra campo e potenziale elettrico

Il potenziale, con la posizione di riferimento in un punto a grande distanza, può essere ottenuto dall'equazione

$$V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

facendo corrispondere il punto a a $r = \infty$, tale per cui $V_a = V_r = \infty$ e il punto b alla posizione P in cui si valuta il potenziale, con $V_b = V$. Ciò fornisce

$$V = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si supponga, allora, di impiegare l'equazione di partenza per determinare la differenza di potenziale tra due punti contigui $a = (x, y, z)$ e $b = (x + \Delta x, y, z)$. Dal momento che i due punti hanno le stesse coordinate y e z , si integrerà lungo una linea parallela all'asse x , per cui $d\vec{l} = dx' \hat{i}$. Quindi

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = (E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}) \cdot (dx' \hat{i}) = E_x \cdot dx'$$

per cui si evince che

$$V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z) = - \int_x^{x+\Delta x} E_x \cdot dx'$$

Supponendo che E_x sia pressoché costante tra x e $x + \Delta x$. Ciò significa che E_x viene portato fuori dal segno di integrale, ottenendo

$$- \int_x^{x+\Delta x} E_x \cdot dx' = -E_x \cdot \int_x^{x+\Delta x} dx' = -E_x \cdot \Delta x$$

Ciò permette di concludere che

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} \right] = -E_x$$

Tale grandezza viene rappresentata con il simbolo

$$\frac{\partial V}{\partial x}$$

ed è definita **derivata parziale di V rispetto a x** , per cui, osservando che variazioni infinitesime del potenziale nelle direzioni y e z forniscono risultati analoghi, per cui

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

o, in maniera più sintetica:

$$\boxed{\vec{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right)}$$

Osservazione: Se si conosce un'espressione del potenziale V dovuto ad una distribuzione di carica, si può impiegare l'espressione di cui sopra per determinare \vec{E} . Per esempio, nel caso del potenziale

V prodotto da una carica puntiforme, per trovare il campo \vec{E} generato da una carica puntiforme come segue:

$$E_r = -\frac{d}{dr} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Esempio 1: Se, a titolo di esempio, si considera una generica espressione per il potenziale elettrico, come esposto di seguito:

$$V = ax^2 + y + 3z$$

Allora il campo elettrico è

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right) = -(2ax\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}})$$

Esempio 2: Se, a titolo di esempio, si considera una generica espressione per il potenziale elettrico, come esposto di seguito:

$$V = l \cdot \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Allora il campo elettrico è

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right) = -\left(-k \frac{Q}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} x\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}\right)$$

3.5.1 Campo elettrico come gradiente del potenziale

Indicato con nabra ∇ il seguente operatore vettoriale

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right)$$

si può scrivere quanto esposto in precedenza come segue

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V} \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{E} = -\text{grad } V}$$

3.5.2 Equazioni di Laplace e di Poisson

Siccome per la **legge di Gauss** è vero che

$$\text{div } \vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

per quanto osservato in precedenza si ha che

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

per cui

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

che permette di affermare che la funzione potenziale deve verificare

- **l'equazione di Poisson**

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

che può essere riscritto come

$$\text{div grad } V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{oppure} \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- e, in particolare, nelle regioni di spazio prive di cariche elettriche, l'**equazione di Laplace**

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

che può essere riscritto come

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} V = 0 \quad \text{oppure} \quad \nabla^2 V = 0$$

Osservazione: Si determini l'energia potenziale di un dipolo in un campo elettrico uniforme diretto parallelamente all'asse x .

Per come è stato rappresentato graficamente il dipolo, è immediato evincere che il posizionamento della carica positiva e negativa sia

- $x_+ = a + a \cos(\theta)$
- $x_- = a - a \cos(\theta)$

Pertanto l'energia potenziale di ambedue le cariche si calcolerà come segue

- $\mathcal{U}_+ = q \cdot V_+ = q \cdot (-E \cdot (x_0 + a \cos(\theta)) + V_0)$
- $\mathcal{U}_- = -q \cdot V_- = -q \cdot (-E \cdot (x_0 - a \cos(\theta)) + V_0)$

Pertanto l'energia potenziale complessiva \mathcal{U} del dipolo è

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_+ + \mathcal{U}_- = q \cdot V_+ = x_+ = q \cdot (-E \cdot (x_0 + a \cos(\theta)) + V_0) - q \cdot (-E \cdot (x_0 - a \cos(\theta)) + V_0)$$

ottenendo

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_+ + \mathcal{U}_- = -2aqE \cos(\theta) = -pE \cos(\theta)$$

che permette di concludere che

$$\boxed{\mathcal{U} = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}}}$$

19 Ottobre 2022

È noto che il campo elettrico è l'opposto del gradiente del potenziale, ovvero sia

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

Esercizio 1: Si consideri il caso di due cilindri concentrici di raggio $R_1 \leq R_2$, il primo con distribuzione superficiale di carica σ_1 , mentre il secondo con distribuzione superficiale di carica σ_2 . Il flusso di campo elettrico all'interno del cilindro più interno (**che è vuoto**), con $0 < r < R_1$ è $\Phi_1 = 0$, in quanto non c'è carica all'interno del cilindro stesso.

Considerando, ora, come superficie gaussiana il cilindro di raggio $R_1 \leq r < R_2$, è immediato evincere che la quantità di carica considerata è $Q_1 = \sigma_1 \cdot 2\pi r \cdot h$. Il flusso associato alla superficie gaussiana considerata è

$$\Phi_2 = 2\pi h r \cdot E(r) \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\Phi_2}{2\pi h r} = \frac{\sigma_1 \cdot R_1}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}}$$

Per $r \geq R_2$ si ottiene che

$$E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0} = \frac{2\pi h}{\epsilon_0} \cdot (\sigma_1 \cdot R_1 + \sigma_2 \cdot R_2)$$

che può essere semplificato come

$$E(r) = \frac{2\pi h \cdot (\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2)}{\epsilon_0 2\pi h r} \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \hat{\mathbf{r}}$$

In questo modo è possibile ottenere il campo elettrico complessivo, grazie al principio di sovrapposizione.

Se ora si volesse calcolare il potenziale elettrico, per $r \geq R_2$, si dovrebbe calcolare il seguente integrale

$$V(r) = - \int_0^{R_2} \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} dr = - \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \cdot \int_0^{R_2} \frac{1}{r} dr = - \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \cdot [\log(r)]_{R_2}^r$$

ottenendo come risultato

$$V(r) = - \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \cdot \log\left(\frac{r}{R_2}\right)$$

che è coerente con quanto osservato per il campo elettrico: il potenziale è sempre negativo in quanto il campo elettrico è decrescente.

Per quanto riguarda la regione da $R_1 < r < R_2$ si ottiene che

$$V(R_2) - V(R_1) = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma_1 \cdot R_1}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} dr = - \frac{\sigma_1 \cdot R_1}{\epsilon_0} \cdot [\log(r)] = - \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \cdot \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Osservazione: Avendo implicitamente sottinteso che $V(R_2) = 0$, gli estremi di integrazione devono essere corretti rispetto a quelli impiegati. In quanto ciò che varia è la funzione di campo elettrico, per cui si ha

$$V(r) = - \int_r^{R_2} \frac{\sigma_1 \cdot R_1}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} dr = - \frac{\sigma_1 \cdot R_1}{\epsilon_0} \cdot \log\left(\frac{r}{R_2}\right)$$

in cui è $R_1 < r < R_2$, per cui il potenziale è positivo e crescente.

Considerando, ora, il caso in cui $r \leq R_1$, si calcoli il potenziale seguente

$$V(r) = - \int_{R_2}^r 0 \cdot dr = c$$

Tale calcolo, in questo caso, visto che il campo elettrico per $r \rightarrow +\infty$ non diverge, essendo nullo, quindi può essere anche scritto come

$$- [V(R_1) - V(R_2)]$$

ma avendo assunto che $V(R_2) = 0$, si ottiene esclusivamente $V(r) = -V(R_1)$ che corrisponde esattamente all'opposto della funzione potenziale

$$V(r) = \frac{\sigma_1 \cdot R_1}{\epsilon_0} \cdot \log\left(\frac{r}{R_2}\right)$$

calcolata in R_1 , ottenendo

$$V(r) = -V(R_1) = \frac{\sigma_1 \cdot R_1}{\epsilon_0} \cdot \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Esercizio 2: Si consideri una sfera solida con densità di carica di volume ρ e di raggio R_1 , con centro in O_1 . A destra di O_1 , in corrispondenza di O_2 , vi è un'ulteriore cavità sferica di raggio $R_2 < R_1$. Si determini il campo elettrico all'interno del foro.

Il campo elettrico generato dalla sfera di raggio R_1 , al di fuori della sfera è

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Il campo elettrico della sfera più grande, trascurando il campo elettrico relativo alla cavità sferica, per $r < R_1$ è dato da

$$\frac{\Phi_{\text{sfera}}}{S_{\text{sfera}}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0 \cdot S_{\text{sfera}}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho \cdot \frac{1}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} = \frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \epsilon_0} \hat{\mathbf{r}}$$

Per conoscere il campo elettrico della cavità sferica, si può considerare come se vi fosse un campo elettrico negativo, dovuto ad una densità di carica di volume $-\rho$, per cui si ha

$$\vec{E}_+(r) = \frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \epsilon_0} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{con } r < R_1 \quad \text{e} \quad \vec{E}_- = -\frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \epsilon_0} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{con } r < R_2$$

24 Ottobre 2022

Per quanto già esposto in precedenza, la funzione potenziale deve verificare

- l'**equazione di Poisson**

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

che può essere riscritto come

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{oppure} \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- e, in particolare, nelle regioni di spazio prive di cariche elettriche, l'**equazione di Laplace**

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

che può essere riscritto come

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} V = 0 \quad \text{oppure} \quad \nabla^2 V = 0$$

3.6 Rotore del campo elettrico

Dal momento che il campo elettrico è conservativo, è ovvio che il lavoro compiuto su un percorso chiuso è nullo (si dice che **la circuitazione è sempre nulla**), ovvero

$$\oint_{\text{curva chiusa } \gamma} \vec{E} \cdot \vec{l} = 0$$

Esprimendo tale relazione in forma locale, si prenda in considerazione un rettangolo di lati dx e dy paralleli ai rispettivi assi, costruito intorno al punto P , si termina il rapporto

$$(\operatorname{rot} \vec{E})_z = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot \vec{l}}{\text{rettangolo } dxdy / dS}$$

che è la componente z di un vettore detto **rotore** del campo vettoriale \vec{E} calcolato nel punto P . Esplicitando il calcolo si ha ovviamente che

$$\begin{aligned} \bullet \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_A^B (E\mathbf{i}) \cdot (dx\mathbf{i}) = -(E\mathbf{i}) \cdot \Delta x \\ \bullet \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_B^C (E\mathbf{j}) \cdot (dy\mathbf{j}) = (E\mathbf{j}) \cdot \Delta y \\ \bullet \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_C^D (E\mathbf{i}) \cdot (dx\mathbf{i}) = -(E\mathbf{i}) \cdot \Delta x \\ \bullet \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_D^A (E\mathbf{j}) \cdot (dy\mathbf{j}) = -(E\mathbf{j}) \cdot \Delta y \end{aligned}$$

In questo modo si ottiene che, in generale che

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Nel caso del campo elettrostatico, quindi, l'integrale che compare nella definizione di cui sopra è certamente nullo (sempre per il fatto che il campo elettrostatico è conservativo).

Un altro metodo per esprimere il rotore è

$$(\operatorname{rot} \vec{E})_z = \nabla \times \vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Per la memorizzazione di tale formula, è possibile costruire la seguente matrice

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix} \rightarrow \nabla \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

Osservazione: Il risultato di cui sopra poteva anche essere ottenuto diversamente. In particolare è noto che

$$\vec{E} = -\nabla V$$

per cui si ha che

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial z}$$

ma essendo ∂y e ∂z interscambiabili al denominatore, si ottiene che

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

3.7 Superfici equipotenziali

Una superficie equipotenziale è una superficie sulla quale il potenziale è costante. Le forze elettriche non compiono lavoro quando una particella carica si sposta su una superficie potenziale. Come accade per le linee di forza del campo elettrico, anche le superfici equipotenziali sono utili per farsi un'idea intuitiva dell'andamento spaziale del potenziale.

Nel caso di superfici equipotenziali di una sfera uniformemente carica, è noto che

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

È facile capire da tale equazione che V è costante se r è costante. Dal momento che una superficie con r costante è una superficie sferica, le superfici equipotenziali sono sferiche, e poiché r è misurata dal centro della sfera carica, le superfici equipotenziali sono concentriche con la sfera.

È noto, inoltre, che le superfici equipotenziali in un campo uniforme sono piani paralleli perpendicolari a E . Nel caso di un condensatore piano, con le superfici equipotenziali e le linee di forza tra le armature, è facile evincere che esse saranno perpendicolari alle superfici equipotenziali a carica nei punti di intersezione. Ciò deve verificarsi in tutti i casi perché, se E ha una componente tangente a una superficie, la forza elettrica compie lavoro quando una particella carica si muove sulla superficie: ne deriva che \vec{E} non può avere una componente tangente a una superficie equipotenziale.

3.8 Proprietà elettrostatiche di un conduttore

Si è già visto che il campo elettrico all'interno di un conduttore è nullo. Essendo il campo elettrico il gradiente del potenziale, se il primo è nullo significa che il secondo è costante.

Sapendo che la carica di un conduttore sta sulla superficie, si può analizzare la variazione di potenziale per una sfera carica di raggio r_0 all'aumentare della distanza dal centro della stessa. Naturalmente, fintantoché che $0 < r < r_0$ il potenziale è quello della superficie:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

Allontanandosi dal centro, con $r > r_0$, si ha che il potenziale segue la legge seguente

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

decrecendo all'aumentare di r .

Osservazione: Se si considera una cavità interna ad un conduttore carico sulla sua superficie, non può presentare una carica sulla superficie interna, in quanto questo significherebbe ci potrebbero essere dei movimenti di carica all'interno del conduttore; in altre parole, esisterebbero dei punti interni al conduttore con potenziali differenti, ma è noto che il potenziale interno ad un conduttore è costante, essendo il campo elettrico nullo.

Esempio: Dato un generatore di Van de Graaff, i valori assunti dalla carica Q_{\max} e dal potenziale V_{\max} della calotta sono determinati dalla rigidità dell'aria circostante, con rigidità $E_{\max} = 3 \times 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$.

Essendo la calotta sferica, di raggio r_0 , il campo elettrico è

$$E = \frac{|Q|}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = \frac{|V|}{r_0}$$

Semplicemente, da ciò, si evince quali sono Q_{\max} e V_{\max} secondo le formule seguenti:

$$Q_{\max} = E_{\max} \cdot 4\pi\epsilon_0 r_0^2 \quad \text{e} \quad V_{\max} = E_{\max} \cdot r_0$$

4 Conduttori, capacità e dielettrici

La capacità, in generale, viene definita come segue

$$C = \frac{Q}{V}$$

e, nel caso di una sfera isolata, diviene

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \rightarrow \quad C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Nel caso di un condensatore, invece, si ottiene

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot d \frac{Q}{S \cdot \epsilon_0} \quad \rightarrow \quad C = \frac{S \cdot \epsilon_0}{d}$$

in cui S è la superficie dell'armatura, mentre d è la distanza tra le armature.

L'unità di misura della capacità è il **farad** [F], definita come

$$F = \frac{[C]}{[V]}$$

Si osservi che la capacità è sempre positiva, per cui per il suo calcolo, per convenzione, si considerano generalmente i valori assoluti.

Osservazione: Si osservi che l'unità di misura della capacità è il **farad** [F], non il Faraday, in quanto la costante di Faraday è la quantità totale di carica elettrica di una mole di cariche elementari.

Esercizio: Si approssimi la terra come una sfera, di raggio $R_T = 6370$ km. Approssimando la sfera ad un conduttore, si può calcolare la capacità della terra sferica come

$$V_T = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 R_T} \quad \rightarrow \quad C_T = \frac{Q_T}{V_T} = 4\pi\epsilon_0 \cdot R_T = 9 \times 10^{-9} \frac{F}{m} \cdot 6.370 \times 10^6 \text{ m} = 7.09 \times 10^{-4} F = 709 \mu F$$

Per calcolare quanta carica fornire affinché il potenziale della sfera cambi di $1.00 \mu V$ è sufficiente calcolare

$$\Delta Q_T = C_T \cdot \Delta V_T = 7.09 \times 10^{-6} F \cdot 1.00 \times 10^{-6} V = 7.09 \times 10^{-12} C = 7.09 \text{ pC}$$

25 Ottobre 2022

Date le armature di un condensatore, il modo più immediato per caricarle è quello di collegarvi una batteria che presenta una forza elettromotrice tale da spostare gli elettroni da un'armatura all'altra fino ad una differenza di potenziale pari a $\frac{Q}{C}$, con C capacità del condensatore.

4.0.1 Capacità di un cavo coassiale

Il cavo coassiale è formato da un filo conduttore circondato da un cilindro conduttore coassiale; fra questi è interposto un isolante. Allora, il campo elettrico generato da un filo conduttore è, ovviamente,

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

in cui λ è la densità lineare di carica del filo è $\lambda = \frac{Q}{L}$, con L lunghezza del filo. Il potenziale, di conseguenza, è

$$V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{R_a}^{R_b} \frac{Q}{L \cdot 2\pi\epsilon_0 R} dR = - \frac{Q}{L \cdot 2\pi\epsilon_0} \cdot \int_{R_a}^{R_b} \frac{dR}{R} = - \frac{Q}{L \cdot 2\pi\epsilon_0} \cdot \log\left(\frac{R_b}{R_a}\right)$$

Volendo, ora, calcolare la capacità del cavo coassiale, si ottiene

$$C = \left| \frac{Q}{V} \right| = Q \cdot \frac{L \cdot 2\pi\epsilon_0}{Q \cdot \log\left(\frac{R_b}{R_a}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\log\left(\frac{R_b}{R_a}\right)}$$

4.1 Condensatori in serie e in parallelo

Gli elementi di un circuito possono essere collegati in molti modi diversi. Due disposizioni semplici sono quelle in cui gli elementi sono collegati in serie e in parallelo.

4.1.1 Condensatori in serie

In generale, dati dei componenti passivi di un circuito, la differenza di potenziale tra gli estremi di un sistema costituito da un numero qualsiasi di dispositivi elettrici collegati in serie è la somma delle differenze di potenziale ai capi dei singoli dispositivi.

Nell'ipotesi in cui tutti i condensatori sono inizialmente scarichi e solo successivamente vengano collegati fra loro e ad una batteria, allora appare evidente che la carica Q totale del sistema sia sempre la stessa, per cui tutti i condensatori hanno la medesima carica $Q_1 = Q_2 = Q$.

Non solo, ma la capacità equivalente di un sistema di condensatori, in generale, è la capacità di un singolo condensatore che, quando viene usato in luogo del sistema, ha lo stesso effetto esterno. Dati i condensatori in serie, aventi capacità C_1 e C_2 rispettivamente, il condensatore risultante deve possedere una carica di valore assoluto Q su ciascuna delle armature quando la differenza di potenziale ai suoi capi è V , vale a dire che

$$C_{1,2} = \frac{Q}{V} \quad \text{ossia} \quad V = \frac{Q}{C_{1,2}}$$

ma, ovviamente, è anche noto che

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

e sostituendo tali relazioni nella formula di partenza si evince che

$$V = \frac{Q}{C_{1,2}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

per cui

$$\boxed{\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2}}$$

In generale, infatti, la capacità equivalente C_{eq} di un numero qualsiasi di condensatori collegati in serie è legata alla capacità dei singoli condensatori dalla relazione

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

4.1.2 Condensatori in parallelo

In generale, dati dei componenti passivi di un circuito, la differenza di potenziale tra gli estremi di un sistema costituito da un numero qualsiasi di dispositivi elettrici collegati in parallelo è sempre la stessa.

Per produrre lo stesso effetto esterno di due condensatori disposti in parallelo, un singolo condensatore con capacità $C_{1,2}$ deve possedere una carica $Q = Q_1 + Q_2$, quando la differenza di potenziale ai suoi capi è V . Deve essere, cioè

$$C_{1,2} = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V}$$

ma siccome

$$C_1 = \frac{Q_1}{V} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{Q_2}{V}$$

si ha che

$$\boxed{C_{1,2} = C_1 + C_2}$$

In generale, infatti, la capacità equivalente C_{eq} di un numero qualsiasi di condensatori collegati in parallelo è legata alla capacità dei singoli condensatori dalla relazione

$$C_{\text{eq}} = \sum_i C_i$$

Energia elettrostatica In precedenza, è stato introdotto il concetto di **energia potenziale di una carica in un campo elettrico**, definita come l'opposto del lavoro necessario per portare una carica di prova in un generico punto dello spazio.

Si è così ottenuta una funzione della posizione che, divisa per il valore della carica di prova, ha permesso di ottenere la funzione potenziale elettrostatico.

Il concetto di **energia elettrostatica di una distribuzione di cariche**, invece, è legato al lavoro che è necessario fare per “costruire” (portare le cariche dall'infinito alla posizione loro assegnata) la distribuzione di cariche o, equivalentemente, il lavoro che si ottiene nello “smontare” (portare le cariche all'infinito) la distribuzione di cariche.

Esempio: Determinare l'energia elettrostatica di una distribuzione di cariche costituita da tre cariche q_1 , q_2 e q_3 poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato d .

Fissata una carica q_1 in un vertice, senza compiere lavoro, si sposta la carica q_2 nella sua posizione, compiendo il lavoro

$$W_2 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{d} \right) \cdot q_2$$

e, similmente per la carica q_3 si ottiene

$$W_3 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{d} + \frac{q_2}{d} \right) \cdot q_3$$

per cui l'energia elettrostatica totale è $U = W_1 + W_2 + W_3$, ottenendo

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1 q_2}{d} + \frac{q_1 q_3}{d} + \frac{q_2 q_3}{d} \right)$$

che si generalizza come segue

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \frac{q_i \cdot q_j}{r_{i,j}}$$

Osservazione: Nel caso di un condensatore, si ha che la variazione dU dell'energia potenziale del sistema di cariche dovute al trasferimento della carica dQ da parte di una batteria è

$$dU = V dQ$$

posta V l'energia potenziale per unità di carica. Per determinare l'energia U fornita al condensatore durante la carica da 0 a Q , si ottiene

$$U = \int_0^Q dU = \int_0^Q V dQ$$

Esplicitando V come

$$V = \frac{Q}{C}$$

si ottiene facilmente che

$$U = \int_0^Q dU = \int_0^Q V dQ = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

in cui sono valide tutte le formulazioni seguenti

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad U = \frac{1}{2} VQ \quad U = \frac{1}{2} CV^2$$

Esempio: Si consideri il caso di un condensatore piano di cui sono note le proprietà seguenti

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \quad \text{e} \quad V = Ed$$

allora l'energia elettrostatica di un condensatore piano è

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (Ad)$$

Ma essendo Ad nient'altro che un volume, è possibile considerare la densità di energia elettrostatica di un campo elettrico

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Esercizio: Due considerazioni di capacità $C_1 = 2.3 \mu\text{F}$ e $C_2 = 4.6 \mu\text{F}$ sono collegati in serie, in cui la differenza di potenziale tra gli estremi del sistema è $\Delta V = 35 \text{ V}$.

La capacità equivalente è, quindi

$$\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2} = \frac{(2.3 \mu\text{F}) + (4.6 \mu\text{F})}{(2.3 \mu\text{F}) \cdot (4.6 \mu\text{F})} = 1.5 \mu\text{F}$$

È noto che la carica dei singoli condensatori è uguale alla carica del condensatore equivalente, ottenendo

$$Q = Q_1 + Q_2 = C \cdot V = (1.5 \mu\text{F}) \cdot (35 \text{ V}) = 53 \mu\text{C}$$

Al fine di calcolare la differenza di potenziale ai capi di ciascun condensatore, si procede come segue

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{53 \mu\text{C}}{2.3 \mu\text{F}} = 23 \text{ V} \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{53 \mu\text{C}}{4.6 \mu\text{F}} = 12 \text{ V}$$

Che è corretto, in quanto $V_1 + V_2 = 23 \text{ V} + 12 \text{ V} = 35 \text{ V}$.

26 Ottobre 2022

4.2 Proprietà elettrostatiche dei dielettrici

Si considerino due armature parallele di un condensatore piano e carico. Quando tra le armature vi è il vuoto, il voltmetro indica il valore V_0 . Quando tra le armature del condensatore carico c'è un dielettrico, il voltmetro indica il valore V . In ogni caso, per ogni dielettrico $v_0 > V$.

Se tale esperimento viene ripetuto con materiali di diversi tipi, si vede che il rapporto $\frac{V_0}{V}$ dipende dal tipo di materiale. Gli isolanti vengono spesso chiamati *dielettrici*, e perciò tale rapporto viene chiamato **costante dielettrica relativa** \mathcal{K} è

$$\mathcal{K} = \frac{V_0}{V}$$

Si considerino, ora, le grandezze E , C e U quando un dielettrico viene interposto tra le armature di un condensatore carico (senza una batteria collegata). Denotando con il pedice 0 le grandezze in corrispondenza del vuoto tra le armature, è immediato evincere che, per il campo elettrico

$$\mathcal{K} = \frac{V_0}{V} = \frac{E_0 \cdot d}{E \cdot d} = \frac{E_0}{E} \quad \rightarrow \quad E = \frac{E_0}{\mathcal{K}}$$

Pertanto, sia il potenziale, che il campo elettrico, decrescono con l'interposizione di un dielettrico fra le armature di un condensatore. Per quanto riguarda la capacità, invece si ha

$$\mathcal{K} = \frac{V_0}{V} = \frac{Q}{C_0} \cdot \frac{C}{Q} = \frac{C}{C_0} \quad \rightarrow \quad C = \mathcal{K} \cdot C_0$$

Esempio: Si consideri un condensatore piano costruito inserendo a sandwich un foglio di carta di spessore 0.14 mm tra due fogli di alluminio, poste le dimensioni del foglio pari a 15 mm per 480 mm.

La capacità del condensatore è

$$C = \mathcal{K} \cdot C_0 = \mathcal{K} \cdot \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d} = \frac{3.6 \cdot \left(8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}\right) \cdot (1.5 \times 10^{-2} \text{ m}) \cdot (0.48 \text{ m})}{1.4 \times 10^{-4} \text{ m}} = 1.6 \text{ nF}$$

La massima differenza di potenziale che può essere applicata tra le sue armature senza che si verifichi la perforazione. Conoscendo la rigidità dielettrica della carta E_{\max} si evince che

$$V_{\max} = E_{\max} \cdot d = \left(15 \times 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}\right) \cdot (1.4 \times 10^{-4} \text{ m}) = 2.1 \text{ kV}$$

4.3 Descrizione molecolare dei dielettrici

Si supponga che uno strato di dielettrico venga interposto nel campo uniforme \vec{E}_0 tra le armature di un condensatore piano. Il dielettrico si polarizza perché il campo induce dei dipoli e i dipoli permanenti, se ve ne sono, vengono allineati al campo. A causa di ciò, sulle due fasce di dielettrico adiacenti alle armature, compare una distribuzione superficiale di carica di densità σ_p (dove p sta per polarizzazione), e il segno di questa carica indotta su ciascuna faccia del dielettrico è opposto a quella della carica presente sull'armatura adiacente. Per distinguerla, si indicherà la densità di carica delle armature con σ_l , dove l sta per libera.

Pertanto si ottiene che

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$$

se si dispone l'asse x nella direzione di \vec{E} , si ha

$$E\hat{\mathbf{i}} = E_0\hat{\mathbf{i}} - E_p\hat{\mathbf{i}} = (E_0 - E_p)\hat{\mathbf{i}}$$

per cui

$$E = E_0 - E_p = \frac{|\sigma_l| - |\sigma_p|}{\epsilon_0}$$

Ma esprimendo le densità in funzione di \mathcal{K} , si ha che

$$E = \frac{E_0}{\mathcal{K}} = \frac{|\sigma_l|}{\mathcal{K} \cdot \epsilon_0} = \frac{|\sigma_l| - |\sigma_p|}{\epsilon_0}$$

Risolvendo rispetto a $|\sigma_p|$ si ottiene

$$|\sigma_p| = \frac{\mathcal{K} - 1}{\mathcal{K}} \cdot |\sigma_l|$$

Esercizio 1: Un dielettrico è parzialmente inserito per un tratto x tra le armature (poste a distanza d) di un condensatore piano rettangolare di lati w_1 e w_2 .

Si dimostri che la capacità è

$$C = \frac{\epsilon_0 w_2 \cdot [(\mathcal{K} - 1)x + w_1]}{d}$$

dove \mathcal{K} è la costante dielettrica relativa del dielettrico. Appare evidente che il modo per determinare la capacità complessiva del condensatore è quello di interpretarlo come due condensatori in parallelo che presentano due dielettrici differenti tra le armature, per cui

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d} = \frac{\epsilon_0 \cdot (w_1 - x)w_2}{d}$$

$$C_2 = \frac{\mathcal{K} \cdot \epsilon_0 \cdot A}{d} = \frac{\mathcal{K} \cdot \epsilon_0 \cdot w_2 \cdot x}{d}$$

ed essendo i condensatori in parallelo, la capacità equivalente è data dalla somma della capacità di ciascun condensatore:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \cdot (w_1 - x)w_2}{d} + \frac{\mathcal{K} \cdot \epsilon_0 \cdot w_2 \cdot x}{d} = \frac{\epsilon_0 w_2 \cdot [(\mathcal{K} - 1)x + w_1]}{d}$$

Nell'ipotesi in cui il condensatore venga caricato e staccato dalla batteria di carica prima dell'inserimento del dielettrico; si ricavi un'espressione della forza elettrica che agisce sullo strato di dielettrico e si determini la direzione di tale forza.

Ovviamente è nota la relazione seguente per la forza elettrostatica

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = -W$$

ma sapendo che

$$W = \int_a^b \hat{F} \cdot d\hat{r} \quad \rightarrow \quad dW = F dr \quad \rightarrow \quad F = \frac{dW}{dr}$$

per cui si ottiene che

$$F = -\frac{d}{dx} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C \cdot x} = -\frac{d}{dx} \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{d}{\epsilon_0 \cdot w_2 \cdot [w_1 + (\mathcal{K} - 1)x]} = \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{(\mathcal{K} - 1) \cdot d}{\epsilon_0 \cdot w_2 \cdot [w_1 + (\mathcal{K} - 1)x]^2}$$

Esercizio 2: Si consideri un condensatore in serie con due condensatori in parallelo. Per prima cosa si calcola la capacità equivalente dei due condensatori in parallelo, per cui

$$C_{2,3} = C_2 + C_3 = 2.9 \mu\text{F} + 1.8 \mu\text{F} = 4.7 \mu\text{F}$$

Da ciò segue che la capacità equivalente finale è data

$$\frac{1}{C_{1,2,3}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{2,3}} = \frac{C_1 + C_{2,3}}{C_1 \cdot C_{2,3}} = \frac{(4.7 + 2.4) \mu\text{F}}{(2.3 \mu\text{F}) \cdot (2.4 \mu\text{F})} = \frac{1}{16 \mu\text{F}}$$

La differenza di potenziale agli estremi del sistema è 53 V. Ciò permette di affermare che $V = V_1 + V_{2,3}$ e la carica complessiva è $Q = V \cdot C_{1,2,3}$, da cui si evince che

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{V \cdot C_{1,2,3}}{C_1} = \frac{(53 \text{ V}) \cdot (1.6 \text{ } \mu\text{F})}{2.4 \text{ } \mu\text{F}} = 35 \text{ V}$$
$$V_{2,3} = \frac{Q}{C_{2,3}} = \frac{V \cdot C_{1,2,3}}{C_{2,3}} = \frac{(53 \text{ V}) \cdot (1.6 \text{ } \mu\text{F})}{4.7 \text{ } \mu\text{F}} = 18 \text{ V}$$

in cui, essendo i condensatori 2 e 3 in parallelo, è ovvio che $V_{2,3} = V_2 = V_3$. Per quanto riguarda la carica di ciascun condensatore, è immediato evincere che

$$Q_1 = V_1 \cdot C_1 = (35 \text{ V}) \cdot (2.4 \text{ } \mu\text{F}) = 84 \text{ } \mu\text{C}$$
$$Q_2 = V_{2,3} \cdot C_2 = (18 \text{ V}) \cdot (1.8 \text{ } \mu\text{F}) = 32 \text{ } \mu\text{C}$$
$$Q_3 = V_{2,3} \cdot C_3 = (18 \text{ V}) \cdot (1.9 \text{ } \mu\text{F}) = 52 \text{ } \mu\text{C}$$

Esercizio 3: Si calcoli la densità di energia in un punto posto a 0.15 m dal centro di una distribuzione di carica a simmetria sferica di raggio 55 mm e carica 18 nC.

Poiché il punto in questione si trova all'esterno della distribuzione di carica, il campo è uguale a quello generato da una carica puntiforme posta nel centro della distribuzione di carica, da cui

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 = \frac{(18 \text{ nC}^2)}{32\pi^2 \cdot \left(8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \right) \cdot (0.15\text{m})^4} = 230 \text{ } \mu \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$