Università degli Studi di Trieste - Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Progetto - Fondamenti d'Informatica

Enrico Piccin - IN0501089

Anno Accademico 2021/2022

Indice

1 Individuazione della funzione Booleana

A partire dalla matricola IN0501089, si procede elidenndo il prefisso IN ed individuando il numero di matricola associato: **0501089**.
Dividendo tale numero per $2^{2^4} = 65536$ si perviene al risultato seguente:

$$\frac{501089}{65536} = 7 + \mathbf{42337}$$

Avendo ricavato il resto 42337, si procede a codificarlo in binario, impiegando 16 bit, tramite succcessive divisioni del numero ottenuto per 2, come illustrato di seguito:

$$\begin{aligned}
42337 &= 21168 \cdot 2 + \boxed{1} \\
21164 &= 10584 \cdot 2 + \boxed{0} \\
10584 &= 5298 \cdot 2 + \boxed{0} \\
5298 &= 2646 \cdot 2 + \boxed{0} \\
2646 &= 1323 \cdot 2 + \boxed{0} \\
1323 &= 661 \cdot 2 + \boxed{1} \\
661 &= 330 \cdot 2 + \boxed{1} \\
330 &= 165 \cdot 2 + \boxed{0} \\
165 &= 82 \cdot 2 + \boxed{1} \\
82 &= 41 \cdot 2 + \boxed{0} \\
41 &= 20 \cdot 2 + \boxed{1} \\
20 &= 10 \cdot 2 + \boxed{0} \\
10 &= 5 \cdot 2 + \boxed{0} \\
5 &= 2 \cdot 2 + \boxed{1} \\
2 &= 1 \cdot 2 + \boxed{0} \\
1 &= 0 \cdot 2 + \boxed{1}
\end{aligned}$$

$$42337_{10} = \mathbf{1010010101100001_2}$$

Tabella 1: Rappresentazione del resto 42337 in binario

Pertanto, la funzione Booleana a 4 associata corrisponde alla stringa binaria di cui sopra, da cui si evincono i seguenti termini minimi (*minterm*) e massimi (*maxterm*):

		x	y	z	w	$\boldsymbol{f}$	
m_0	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{w}$	0	0	0	0	**1**	μ_0
m_1	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}w$	0	0	0	1	**0**	μ_1
m_2	$\overline{x}\overline{y}z\overline{w}$	0	0	1	0	**1**	μ_2
m_3	$\overline{x}\overline{y}zw$	0	0	1	1	**0**	μ_3
m_4	$\overline{x}y\overline{z}\overline{w}$	0	1	0	0	**0**	μ_4
m_5	$\overline{x}y\overline{z}w$	0	1	0	1	**1**	μ_5
m_6	$\overline{x}yz\overline{w}$	0	1	1	0	**0**	μ_6
m_7	$\overline{x}yzw$	0	1	1	1	**1**	μ_7
m_8	$x\overline{y}\overline{z}\overline{w}$	1	0	0	0	**0**	μ_8
m_9	$x\overline{y}\overline{z}w$	1	0	0	1	**1**	μ_9
m_{10}	$x\overline{y}z\overline{w}$	1	0	1	0	**1**	μ_{10}
m_{11}	$x\overline{y}zw$	1	0	1	1	**0**	μ_{11}
m_{12}	$xy\overline{z}\overline{w}$	1	1	0	0	**0**	μ_{12}
m_{13}	$xy\overline{z}w$	1	1	0	1	**0**	μ_{13}
m_{14}	$xyz\overline{w}$	1	1	1	0	**0**	μ_{14}
m_{15}	$xyzw$	1	1	1	1	**1**	μ_{15}

		x	y	z	w	$\boldsymbol{f}$	
M_0	$x+y+z+w$	0	0	0	0	**1**	μ_0
M_1	$x+y+z+\overline{w}$	0	0	0	1	**0**	μ_1
M_2	$x+y+\overline{z}+w$	0	0	1	0	**1**	μ_2
M_3	$x+y+\overline{z}+\overline{w}$	0	0	1	1	**0**	μ_3
M_4	$x+\overline{y}+z+w$	0	1	0	0	**0**	μ_4
M_5	$x+\overline{y}+z+\overline{w}$	0	1	0	1	**1**	μ_5
M_6	$x+\overline{y}+\overline{z}+w$	0	1	1	0	**0**	μ_6
M_7	$x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}$	0	1	1	1	**1**	μ_7
M_8	$\overline{x}+y+z+w$	1	0	0	0	**0**	μ_8
M_9	$\overline{x}+y+z+\overline{w}$	1	0	0	1	**1**	μ_9
M_{10}	$\overline{x}+y+\overline{z}+w$	1	0	1	0	**1**	μ_{10}
M_{11}	$\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}$	1	0	1	1	**0**	μ_{11}
M_{12}	$\overline{x}+\overline{y}+z+w$	1	1	0	0	**0**	μ_{12}
M_{13}	$\overline{x}+\overline{y}+z+\overline{w}$	1	1	0	1	**0**	μ_{13}
M_{14}	$\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+w$	1	1	1	0	**0**	μ_{14}
M_{15}	$\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}$	1	1	1	1	**1**	μ_{15}

Tabella 2: Funzione Booleana a 4 variabili associata alla stringa 1010010101100001_2

1.1 Codifica dei termini minimi (*minterm*)

Se nella tavola di verità della funzione f considerata si pone in evidenza la codifica dei termini minimi si ottiene:

		x	y	z	w	$\boldsymbol{f}$	
m_0	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{w}$	0	0	0	0	**1**	μ_0
m_1	$\overline{x}\overline{y}\overline{z}w$	0	0	0	1	**0**	μ_1
m_2	$\overline{x}\overline{y}z\overline{w}$	0	0	1	0	**1**	μ_2
m_3	$\overline{x}\overline{y}zw$	0	0	1	1	**0**	μ_3
m_4	$\overline{x}y\overline{z}\overline{w}$	0	1	0	0	**0**	μ_4
m_5	$\overline{x}y\overline{z}w$	0	1	0	1	**1**	μ_5
m_6	$\overline{x}yz\overline{w}$	0	1	1	0	**0**	μ_6
m_7	$\overline{x}yzw$	0	1	1	1	**1**	μ_7
m_8	$x\overline{y}\overline{z}\overline{w}$	1	0	0	0	**0**	μ_8
m_9	$x\overline{y}\overline{z}w$	1	0	0	1	**1**	μ_9
m_{10}	$x\overline{y}z\overline{w}$	1	0	1	0	**1**	μ_{10}
m_{11}	$x\overline{y}zw$	1	0	1	1	**0**	μ_{11}
m_{12}	$xy\overline{z}\overline{w}$	1	1	0	0	**0**	μ_{12}
m_{13}	$xy\overline{z}w$	1	1	0	1	**0**	μ_{13}
m_{14}	$xyz\overline{w}$	1	1	1	0	**0**	μ_{14}
m_{15}	$xyzw$	1	1	1	1	**1**	μ_{15}

Tabella 3: Codifica dei termini minimi

Pertanto, se si codificano le quaterne d'ingresso associate a ciascun termine minimo con il corrispondente intero rappresentato in notazione posizionale in base 2, è possibile indicare i termini minimi che compongono la sommatoria di prodotti usando gli interi compresi tra 0 e $2^4 - 1$, come illustrato di seguito:

$$f(x, y, z, w) = \sum_{i=0}^{2^4-1} \mu_i \cdot m_i = \sum_{i:\mu_i=1} m_i$$

dove μ_i è il valore assunto dalla funzione in corrispondenza del termine minimo m_i e $0 \leq i \leq 2^n - 1$. Nel caso analizzato, si ha $m_0 = \overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{w}, m_2 = \overline{x}\overline{y}z\overline{w}, m_5 = \overline{x}y\overline{z}w, m_7 = \overline{x}yzw, m_9 = x\overline{y}\overline{z}w, m_{10} = x\overline{y}z\overline{w}, m_{15} = xyzw, \mu_0 = \mu_2 = \mu_5 = \mu_7 = \mu_9 = \mu_{10} = \mu_{15} = 1, \mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_6 = \mu_8 = \mu_{11} =$

$\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{14} = 0$.
Per cui si perviene al risultato seguente

$$f(x,y,z,w) = \sum_{i\in\{0,2,5,7,9,10,15\}} m_i = m_0 + m_2 + m_5 + m_7 + m_9 + m_{10} + m_{15}$$

Quindi l'espressione dei *minterm* è:

$$f(x,y,z,w) = \overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{w} + \overline{x}\overline{y}z\overline{w} + \overline{x}y\overline{z}w + \overline{x}yzw + x\overline{y}\overline{z}w + x\overline{y}z\overline{w} + xyzw$$

poiché $0, 2, 5, 7, 9, 10$ e 15 sono le codifiche in base 2 di 0000, 0010, 0101, 0111, 1001, 1010 e 1111.

1.2 Codifica dei termini massimi (*maxterm*)

Analogamente, procedendo per dualità, se nella tavola di verità della funzione f considerata si pone in evidenza la codifica dei termini massimi si ottiene:

		x	y	z	w	f	
M_0	$x+y+z+w$	0	0	0	0	**1**	μ_0
M_1	$x+y+z+\overline{w}$	0	0	0	1	**0**	μ_1
M_2	$x+y+\overline{z}+w$	0	0	1	0	**1**	μ_2
M_3	$x+y+\overline{z}+\overline{w}$	0	0	1	1	**0**	μ_3
M_4	$x+\overline{y}+z+w$	0	1	0	0	**0**	μ_4
M_5	$x+\overline{y}+z+\overline{w}$	0	1	0	1	**1**	μ_5
M_6	$x+\overline{y}+\overline{z}+w$	0	1	1	0	**0**	μ_6
M_7	$x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}$	0	1	1	1	**1**	μ_7
M_8	$\overline{x}+y+z+w$	1	0	0	0	**0**	μ_8
M_9	$\overline{x}+y+z+\overline{w}$	1	0	0	1	**1**	μ_9
M_{10}	$\overline{x}+y+\overline{z}+w$	1	0	1	0	**1**	μ_{10}
M_{11}	$\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}$	1	0	1	1	**0**	μ_{11}
M_{12}	$\overline{x}+\overline{y}+z+w$	1	1	0	0	**0**	μ_{12}
M_{13}	$\overline{x}+\overline{y}+z+\overline{w}$	1	1	0	1	**0**	μ_{13}
M_{14}	$\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+w$	1	1	1	0	**0**	μ_{14}
M_{15}	$\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+\overline{w}$	1	1	1	1	**1**	μ_{15}

Tabella 4: Codifica dei termini massimi

Analogamente a quanto già esposto, se ora si codificano le quaterne d'ingresso associate a ciascun termine massimo con il corrispondente intero rappresentato in notazione posizionale in base 2, è possibile indicare i termini massimi che compongono il prodotto di somme usando gli interi compresi tra 0 e $2^4 - 1$, come illustrato di seguito:

$$f(x,y,z,w) = \prod_{i=0}^{2^4-1} \mu_i \cdot M_i = \prod_{i:\mu_i=1} M_i$$

dove μ_i è il valore assunto dalla funzione in corrispondenza del termine massimo M_i e $0 \le i \le 2^n-1$. Nel caso analizzato, si ha $M_1 = x+y+z+\overline{w}, M_3 = x+y+\overline{z}+\overline{w}, M_4 = x+\overline{y}+z+w, M_6 = x+\overline{y}+\overline{z}+w, M_8 = \overline{x}+y+z+w, M_{11} = \overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}, M_{12} = \overline{x}+\overline{y}+z+w, M_{13}\overline{x}+\overline{y}+z+\overline{w}, M_{14} = \overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+w, \mu_0 = \mu_2 = \mu_5 = \mu_7 = \mu_9 = \mu_{10} = \mu_{15} = 1, \mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_6 = \mu_8 = \mu_{11} = \mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{14} = 0$.
Per cui si perviene al risultato seguente

$$f(x,y,z,w) = \prod_{i\in\{1,3,4,6,8,11,12,13,14\}} M_i = M_1 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_8 \cdot M_{11} \cdot M_{12} \cdot M_{13} \cdot M_{14}$$

Quindi l'espressione dei *maxterm* è:

$$f(x,y,z,w) = (x+y+z+\overline{w}) \cdot (x+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (x+\overline{y}+z+w) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}+w) \cdot (\overline{x}+y+z+w)$$
$$\cdot (\overline{x}+y+\overline{z}+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+\overline{y}+z+w) \cdot (\overline{x}+\overline{y}+z+\overline{w}) \cdot (\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}+w)$$

poiché $1, 3, 4, 6, 8, 11, 12, 13$ e 14 sono le codifiche in base 2 di 0001, 0011, 0100, 0110, 1000, 1011, 1100, 1101 e 1110.

2 Semplificazione dell'espressione Booleana

Di seguito si espongono i 3 diversi procedimenti di semplificazione dell'espressione Booleana precedentemente ottenuta, ricondotta alla forma minima tramite l'*applicazione delle relazioni fondamentali dell'Algebra Booleana* (assiomi e teoremi), tramite le *mappe di Karnaugh* e attraverso il *metodo tabellare di Quine - Mc Cluskey.*

2.1 Semplificazione per via algebrica

Si procede, ora, alla semplificazione delle espressioni ottenute per via diretta, facendo uso degli assiomi A1-A7 e dei teoremi T1-T10 dell'Algebra Booleana.

2.1.1 Semplificazione dei *minterm*

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z,w) &= \overline{xyzw} + \overline{xy}z\overline{w} + \overline{x}y\overline{z}w + \overline{x}yzw + x\overline{yz}w + x\overline{y}z\overline{w} + xyzw \\
&\overset{(A4 \text{ e } A5)}{=} (\overline{xyzw} + \overline{xy}z\overline{w}) + (\overline{x}y\overline{z}w + \overline{x}yzw) + x\overline{yz}w + x\overline{y}z\overline{w} + xyzw \\
&\overset{(T9)}{=} \overline{xyw} + \overline{x}yw + x\overline{yz}w + x\overline{y}z\overline{w} + xyzw \\
&\overset{(A4)}{=} \overline{xyw} + x\overline{y}z\overline{w} + \overline{x}yw + xyzw + x\overline{yz}w \\
&\overset{(A4 \text{ e } A6)}{=} \overline{yw} \cdot (\overline{x} + xz) + yw \cdot (\overline{x} + xz) + x\overline{yz}w \\
&\overset{(T5)}{=} \overline{yw} \cdot (\overline{x} + z) + yw \cdot (\overline{x} + z) + x\overline{yz}w \\
&\overset{(A4 \text{ e } A6)}{=} \overline{xyw} + \overline{y}z\overline{w} + \overline{x}yw + yzw + x\overline{yz}w
\end{aligned}
$$

2.1.2 Semplificazione dei *maxterm*

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z,w) &= (x + y + z + \overline{w}) \cdot (x + y + \overline{z} + \overline{w}) \cdot (x + \overline{y} + z + w) \cdot (x + \overline{y} + \overline{z} + w) \cdot (\overline{x} + y + z + w) \\
&\quad \cdot (\overline{x} + y + \overline{z} + \overline{w}) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z + w) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z + \overline{w}) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + w) \\
&\overset{(A4 \text{ e } A5)}{=} [(x + y + z + \overline{w}) \cdot (x + y + \overline{z} + \overline{w})] \cdot [(x + \overline{y} + z + w) \cdot (x + \overline{y} + \overline{z} + w)] \cdot [(\overline{x} + y + z + w) \\
&\quad \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z + w)] \cdot (\overline{x} + y + \overline{z} + \overline{w}) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z + \overline{w}) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + w) \\
&\overset{(T9)}{=} (x + y + \overline{w}) \cdot (x + \overline{y} + w) \cdot (\overline{x} + z + w) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z} + \overline{w}) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z + \overline{w}) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + w) \\
&\overset{(A4)}{=} (x + \overline{y} + w) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + w) \cdot (\overline{x} + z + w) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z + \overline{w}) \cdot (x + y + \overline{w}) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z} + \overline{w}) \\
&\overset{(A4 \text{ e } A6)}{=} [\overline{y} + w + x \cdot (\overline{x} + \overline{z})] \cdot [\overline{x} + z + w \cdot (\overline{y} + \overline{w})] \cdot [y + \overline{w} + x \cdot (\overline{x} + \overline{z})] \\
&\overset{(A4 \text{ e } T5)}{=} (\overline{y} + w + x\overline{z}) \cdot (\overline{x} + z + \overline{y}w) \cdot (y + \overline{w} + x\overline{z}) \\
&\overset{(A4 \text{ e } T3)}{=} \left(\overline{\overline{\overline{y} + w}} + x\overline{z}\right) \cdot \left(\overline{y}w + \overline{\overline{\overline{x} + z}}\right) \cdot \left(\overline{\overline{y + \overline{w}}} + x\overline{z}\right) \\
&\overset{(A5 \text{ e } T7)}{=} \left[\left(\overline{y\overline{w}} + x\overline{z}\right) \cdot \left(\overline{y}w + \overline{x\overline{z}}\right)\right] \cdot \left(\overline{\overline{y}w} + x\overline{z}\right) \\
&\overset{(A4 \text{ e } T10)}{=} \left(x\overline{yz}w + \overline{x\overline{z}} \cdot \overline{y\overline{w}}\right) \cdot \left(\overline{\overline{y}w} + x\overline{z}\right) \\
&\overset{(A6 \text{ e } A7 \text{ e } T1)}{=} x\overline{yz}w + \overline{x\overline{z}} \cdot \overline{y\overline{w}} \cdot \overline{\overline{y}w} \\
&\overset{(A5 \text{ e } T7)}{=} x\overline{yz}w + (\overline{x} + z) \cdot [(\overline{y} + w) \cdot (y + \overline{w})] \\
&\overset{(A4 \text{ e } T10)}{=} x\overline{yz}w + (\overline{x} + z) \cdot (yw + \overline{yw}) \\
&\overset{(A4 \text{ e } A6)}{=} \overline{xyw} + \overline{y}z\overline{w} + \overline{x}yw + yzw + x\overline{yz}w
\end{aligned}
$$

2.1.3 Equivalenza delle forme canoniche

Naturalmente è noto che la *somma di prodotti* e il *prodotto di somme* ottenuti rappresentano la medesima funzione; inoltre, tramite una serie di procedimenti algebrici precedentemente esposti, è stato dimostrato che le due forme canoniche si equivalgnono non solo dal punto di vista logico, ma anche dal punto di vista formale: infatti, le due espressioni semplificate, ottenute a partire da *minterm* e *maxterm* conducono alla stessa formula minima:

$$f(x, y, z, w) = \overline{x}\overline{y}\overline{w} + \overline{y}z\overline{w} + \overline{x}yw + yzw + x\overline{y}\overline{z}w$$

2.1.4 Mappa di Karnaugh

A partire dai *minterm*, si espone di seguito la semplificazione della funzione considerata tramite la mappa di Karnaugh:

$zw \backslash xy$	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	0	1
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

Figura 1: Mappa di Karnaugh per la funzione

Ricordando che, all'interno della mappa di Karnaugh, due caselle adiacenti differiscono per il valore di una sola variabile, è facile capire come il prodotto delle variabili comuni implica entrambi i termini minimi associati alle caselle considerate. Da ciò segue il risultato:

$$f(x, y, z, w) = \overline{x}\overline{y}\overline{w} + \overline{y}z\overline{w} + \overline{x}yw + yzw + x\overline{y}\overline{z}w$$

Ancora una volta, la funzione ottenuta dalla semplificazione tramite mappa di Karnaugh corrisponde alla funzione ottenuta nei passi precedenti.

2.1.5 Metodo tabellare di Quine-Mc Cluskey

A partire dai *minterm*, si espone di seguito la semplificazione della funzione considerata tramite il metodo tabellare di Quine-Mc Cluskey:

		x	y	z	w	f	
0	$\overline{xyzw}$	0	0	0	0	1	*
1	$\overline{xyz}w$	0	0	0	1	0	
2	$\overline{xy}z\overline{w}$	0	0	1	0	1	*
3	$\overline{xy}zw$	0	0	1	1	0	
4	$\overline{x}y\overline{zw}$	0	1	0	0	0	
5	$\overline{x}y\overline{z}w$	0	1	0	1	1	*
6	$\overline{x}yz\overline{w}$	0	1	1	0	0	
7	$\overline{x}yzw$	0	1	1	1	1	*
8	$x\overline{yzw}$	1	0	0	0	0	
9	$x\overline{yz}w$	1	0	0	1	1	*
10	$x\overline{y}z\overline{w}$	1	0	1	0	1	*
11	$x\overline{y}zw$	1	0	1	1	0	
12	$xy\overline{zw}$	1	1	0	0	0	
13	$xy\overline{z}w$	1	1	0	1	0	
14	$xyz\overline{w}$	1	1	1	0	0	
15	$xyzw$	1	1	1	1	1	*

Livello		x	y	z	w	f	
0	$\overline{xyzw}$	0	0	0	0	1	*
1	$\overline{xyz}w$	0	0	0	1	0	
2	$\overline{xy}z\overline{w}$	0	0	1	0	1	*
3	$\overline{xy}zw$	0	0	1	1	0	
4	$\overline{x}y\overline{zw}$	0	1	0	0	0	
5	$\overline{x}y\overline{z}w$	0	1	0	1	1	*
6	$\overline{x}yz\overline{w}$	0	1	1	0	0	
7	$\overline{x}yzw$	0	1	1	1	1	*
8	$x\overline{yzw}$	1	0	0	0	0	
9	$x\overline{yz}w$	1	0	0	1	1	*
10	$x\overline{y}z\overline{w}$	1	0	1	0	1	*
11	$x\overline{y}zw$	1	0	1	1	0	
12	$xy\overline{zw}$	1	1	0	0	0	
13	$xy\overline{z}w$	1	1	0	1	0	
14	$xyz\overline{w}$	1	1	1	0	0	
15	$xyzw$	1	1	1	1	1	*

Livello			x	y	z	f	
1	2	$\overline{x}y\overline{z}$	0	1	0	1	*
2	3	$\overline{x}yz$	0	1	1	1	*
	5	$x\overline{y}z$	1	0	1	1	*
3	7	xyz	1	1	1	1	*

Tabella 5: Trasformazione della tavola di verità della funzione logica f per ottenere la tabella di Quine-Mc Cuskey