Università di Trieste

Laurea in ingegneria elettronica e informatica

Enrico Piccin - Corso di Probabilità e Statistica - Prof. Marco Barchiesi

Anno Accademico 2021/2022 - 3 Marzo 2022

Indice

3 Marzo 2022

1 Introduzione

Si supponga di stare in un **universo deterministico**, ovvero tale per cui tutto ciò che accadrà in futuro è determinato dalla situazione nel preciso istante in cui si sta vivendo.
Dal punto di vista fisico, si supponga di voler analizzare un certo fenomeno, a patto di conoscere

1. la legge che regola tale fenomeno
2. i dati iniziali (riferiti allo stato iniziale del fenomeno)
3. le condizioni esterne al fenomeno oggetto di interesse

è sempre possibile predire quello che accadrà nel futuro relativamente al fenomeno oggetto di studio.

Esempio: Si consideri il **lancio di un dado**. Taluno è un fenomeno oggetto di studio e, come tale, deve essere analizzato conoscendo

1. la legge che regola il fenomeno: la legge di caduta dei gravi
2. i dati iniziali del problema: peso del dado, altezza inziale, forza di attrazione gravitazionale, etc.
3. le condizioni esterne: vento, umidità, stabilità dell'aria, etc.

Naturalmente, attraverso queste informazioni, è possibile predire il comportamento del dado: quando esso viene lasciato, cade e si schianta al suolo.
Tuttavia, se ora si volesse anche sapere su che faccia il dado atterrerà, non si ha a disposizione un legge fisica che ne regola tale fenomeno, in quanto la legge di caduta dei gravi presuppone il corpo come puntiforme; inoltre il movimento dell'aria influenza significativamente la rotazione del corpo.
Pertanto, per la determinazione dell'esito di tale fenomeno, non si hanno a disposizione informazioni sufficienti: non si conosce la legge che regola il fenomeno, i dati iniziali sono scarsamente influenti e le condizioni esterne sono troppo variabili. Ciò fa sì che l'output finale di tale fenomeno sia completamente sconosciuto, in quanto l'evento oggetto d'analisi è totalmente **casuale**, o più propriamente **aleatorio**.
Si noti, ovviamente, che anche per fenomeni apparentemente facili da predire, le condizioni iniziali che vengono poste per lo studio degli stessi comportano sempre un margine di incertezza e, quindi, di aleatorietà: non si può sempre sapere con precisione assoluta lo stato iniziale del sistema oggetto di studio.
Per cercare di far fronte a tale incertezza si può

- impiegare una legge molto più particolareggiata (più vicina alla perfezione) che regola il fenomeno interessato; misurare con maggiore precisione i dati iniziali e definire con più raffinatezza le conidizione esterne; tuttavia, tale procedimento comporterebbe un lavoro molto oneroso e scarsamente proficuo;
- cercare di capire quali sono i possibili output del fenomeno (ossia le 6 facce del dado) e associare a ciascuno di tali output un valore che fornisca un'informazione di carattere quantitativo in riferimento alla possibilità che esso sia l'effettivo output del fenomeno interessato.

Da quest'ultima alternativa segue la definizione di **probabilità**:

PROBABILITÀ

La **probabilità** è un modo per **quantificare** quanto un possibile risultato sia **facilmente ottenibile**.

Esempio: Si consideri il ancio di un dado a 6 facce e si prendano in considerazione dei possibili risultati

1. esce il numero 6
2. esce un numero pari
3. esce un numero ≤ 6
4. esce un numero ≤ 4
5. esce un numero ≥ 7

Si capisce facilmente come il primo risultato (o evento) sia molto elementare, in quanto prende in considerazione una sola faccia del dado, mentre i restanti sono dei risultati (o eventi) più complessi, che si ottengono tramite aggregazione dei risultati elementari.
Dal punto di vista matematica, per l'analisi di questo fenomeno, si definisce un insieme Ω dei possibili risultati elementari del lancio di un dado, ovvero

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Naturalmente, ora, i risultati che sono stati esposti in principio non sono altro che dei **sottoinsiemi** dell'insieme Ω appena definito, come mostrato di seguito:

1. $A = \{6\}$
2. $A = \{2, 4, 6\}$
3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$
4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$
5. $A = \varnothing$

Per attribuire a ciascuno di tali risultati un valore quantitativo che ne descriva la possibilità di verificarsi, si definisce $p = p(A)$ come la **probabilità associata al risultato** A, ovverosia un numero all'interno di una scala che, per convenzione, viene indicata nell'intervallo $[0, 1]$, che quantifica la facilità con cui il risultato si presenta.
Per esempio, la probabilità che esca un numero maggiore di 7 nel lancio di un dado a 6 facce è ovviamente nulla, in quanto a tale evento viene associato l'insieme vuoto. Questo significa che tale risultato (o evento) è **impossibile**, pertanto si assegna ad esso un valore di probabilità di fondo scala, ovvero

$$p(\varnothing) = 0$$

Analogamente, la probabilità che esca un numero minore o uguale a 6 nel lancio di un dado è ovviamente massima, in quanto a tale evento viene associato l'insieme Ω stesso. Questo significa che tale risultato (o evento) è **certo**, pertanto si assegna ad esso un valore di probabilità di fine scala, ovvero

$$p(\Omega) = 1$$

È facile capire che se si considerano due eventi a cui sono associati due sottinsiemi A e B disgiunti, tali per cui $A \cap B = \varnothing$, allora si avrà che

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Inoltre, se il dado è regolare, ha senso ed è plausibile associare lo stesso valore di probabilità a ciascuno degli eventi elementari, ovvero

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\})$$

e se ora si sommano le probabilità di tutti gli eventi elementari, non si può non ottenere la probabilità dell'evento certo, ovvero

$$p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) + p(\{5\}) + p(\{6\}) = p(\Omega) = 1$$

Per implicazione logica, siccome la somma delle probabilità degli eventi elementari è pari a 1 ed essi sono **equiprobabili**, deve essere necessariamente che

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

A partire da tale evidenza, è possibile ora andare ad associare agli eventi complessi, aggregati di eventi elementari, una probabilità, come di seguito esposto

$$p(\{2,4,6\}) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

e similmente

$$p(\{1,2,3,4\}) = p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Naturalmente, ora, se si dovesse definire la probabilità associata alla somma di due eventi non disgiunti, non si può ricorrere alla formula precedentemente esposta, in quanto bisogna anche tenere conto delle sovrapposizioni. Infatti

$$\frac{7}{6} = p(\{2,4,6\}) + p(\{1,2,3,4\}) \neq p(\{1,2,3,4,6\}) = \frac{5}{6}$$

questo perché, per quanto si è detto, i due sottoinsieme associati ai rispettivi risultati non sono disgiunti, in quanto $\{2,4,6\} \cap \{1,2,3,4\} = \{2,4\}$

1.1 Matematica della probabilità

Il compito della probabilità è quello di fornire delle regole, a partire dalle quali riuscire ad attribuire una valutazione quantitativa della possibilità di verificarsi di eventi più complessi, **basandosi sulla probabilità associata ad eventi più elementari**.
Non è, invece, compito della probabilità quello di attribuire i valori di probabilità agli eventi elementari (si pensi, banalmente, alla differenza tra un dado regolare e un dado truccato): infatti, tale compito è affidato alla statistica, in quanto molto più legato alla praticità e alla modalità dei assegnazione.
Una volta appresa l'assegnazione della probabilità agli eventi elemantari, interviene la probabilità: in particolare, la struttura matematica alla base del calcolo della probabilità prevede tre importanti elementi

1. un insieme Ω (che per il momento si considera finito);

2. una famiglia A (non vuota) di sottoinsiemi di Ω (spesso la famiglia di tutti i sottoinsieme); mentre gli elementi di Ω sono chiamati risultati elementari, gli elementi sottoinsiemi di Ω appartenenti a tale famiglia sono chiamati risultati complessi, ottenuti come aggregazione di risultati elementari;

3. un'applicazione
$$p : A \longrightarrow [0,1]$$
che ad ogni sottoinsieme appartenente alla famiglia A associa un valore compreso tra 0 e 1.

Gli elementi di Ω sono detti **eventi elementari**, per cui Ω è detto **spazio degli eventi elementari**, mentre gli elementi della famiglia A prendono il nome di **risultati** (o eventi) **casuali** (o semplicemente eventi, configurazioni, traiettorie, campioni), per cui A prende il nome di **spazio degli eventi casuali**.
L'applicazione p è detta **probabilità**, mentre l'immagine attraverso p di un evento A, ovvero $p(A)$ viene chiamata **probabilità dell'evento** A.