

Università di Trieste

Laurea in ingegneria elettronica e informatica

Enrico Piccin - Corso di Probabilità e Statistica - Prof. Marco Barchiesi

Anno Accademico 2021/2022 - 3 Marzo 2022

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Matematica della probabilità	4
1.2	Regole della famiglia di eventi complessi	4
1.3	Regole dell'applicazione di probabilità	5
1.4	Spazio di probabilità	5
1.4.1	Proprietà degli spazi di probabilità finiti	6
1.4.2	Costruzione di spazi di probabilità finiti	8
2	Serie	11
2.1	Condizione necessaria per la convergenza di una serie	12
2.1.1	Serie armonica	12
2.2	Serie armonica generalizzata	13
2.3	Serie geometrica	14
2.4	Criterio del confronto per serie a termini positivi	15

3 Marzo 2022

1 Introduzione

Si supponga di stare in un **universo deterministico**, ovvero tale per cui tutto ciò che accadrà in futuro è determinato dalla situazione nel preciso istante in cui si sta vivendo.

Dal punto di vista fisico, si supponga di voler analizzare un certo fenomeno, a patto di conoscere

1. la legge che regola tale fenomeno
2. i dati iniziali (riferiti allo stato iniziale del fenomeno)
3. le condizioni esterne al fenomeno oggetto di interesse

è sempre possibile predire quello che accadrà nel futuro relativamente al fenomeno oggetto di studio.

Esempio: Si consideri il **lancio di un dado**. Taluno è un fenomeno oggetto di studio e, come tale, deve essere analizzato conoscendo

1. la legge che regola il fenomeno: la legge di caduta dei gravi
2. i dati iniziali del problema: peso del dado, altezza iniziale, forza di attrazione gravitazionale, etc.
3. le condizioni esterne: vento, umidità, stabilità dell'aria, etc.

Naturalmente, attraverso queste informazioni, è possibile predire il comportamento del dado: quando esso viene lasciato, cade e si schianta al suolo.

Tuttavia, se ora si volesse anche sapere su che faccia il dado atterrerà, non si ha a disposizione una legge fisica che ne regola tale fenomeno, in quanto la legge di caduta dei gravi presuppone il corpo come puntiforme; inoltre il movimento dell'aria influenza significativamente la rotazione del corpo. Pertanto, per la determinazione dell'esito di tale fenomeno, non si hanno a disposizione informazioni sufficienti: non si conosce la legge che regola il fenomeno, i dati iniziali sono scarsamente influenti e le condizioni esterne sono troppo variabili. Ciò fa sì che l'output finale di tale fenomeno sia completamente sconosciuto, in quanto l'evento oggetto d'analisi è totalmente **casuale**, o più propriamente **aleatorio**.

Si noti, ovviamente, che anche per fenomeni apparentemente facili da predire, le condizioni iniziali che vengono poste per lo studio degli stessi comportano sempre un margine di incertezza e, quindi, di aleatorietà: non si può sempre sapere con precisione assoluta lo stato iniziale del sistema oggetto di studio.

Per cercare di far fronte a tale incertezza si può

- impiegare una legge molto più particolareggiata (più vicina alla perfezione) che regola il fenomeno interessato; misurare con maggiore precisione i dati iniziali e definire con più raffinatezza le condizioni esterne; tuttavia, tale procedimento comporterebbe un lavoro molto oneroso e scarsamente proficuo;
- cercare di capire quali sono i possibili output del fenomeno (ossia le 6 facce del dado) e associare a ciascuno di tali output un valore che fornisca un'informazione di carattere quantitativo in riferimento alla possibilità che esso sia l'effettivo output del fenomeno interessato.

Da quest'ultima alternativa segue la definizione di **probabilità**:

PROBABILITÀ

La **probabilità** è un modo per **quantificare** quanto un possibile risultato sia **facilmente ottenibile**.

Esempio: Si consideri il lancio di un dado a 6 facce e si prendano in considerazione dei possibili risultati

1. esce il numero 6
2. esce un numero pari
3. esce un numero ≤ 6
4. esce un numero ≤ 4
5. esce un numero ≥ 7

Si capisce facilmente come il primo risultato (o evento) sia molto elementare, in quanto prende in considerazione una sola faccia del dado, mentre i restanti sono dei risultati (o eventi) più complessi, che si ottengono tramite aggregazione dei risultati elementari.

Dal punto di vista matematica, per l'analisi di questo fenomeno, si definisce un insieme Ω dei possibili risultati elementari del lancio di un dado, ovvero

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Naturalmente, ora, i risultati che sono stati esposti in principio non sono altro che dei **sottoinsiemi** dell'insieme Ω appena definito, come mostrato di seguito:

1. $A = \{6\}$
2. $A = \{2, 4, 6\}$
3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$
4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$
5. $A = \emptyset$

Per attribuire a ciascuno di tali risultati un valore quantitativo che ne descriva la possibilità di verificarsi, si definisce $p = p(A)$ come la **probabilità associata al risultato** A , ovvero sia un numero all'interno di una scala che, per convenzione, viene indicata nell'intervallo $[0, 1]$, che quantifica la facilità con cui il risultato si presenta.

Per esempio, la probabilità che esca un numero maggiore di 7 nel lancio di un dado a 6 facce è ovviamente nulla, in quanto a tale evento viene associato l'insieme vuoto. Questo significa che tale risultato (o evento) è **impossibile**, pertanto si assegna ad esso un valore di probabilità di fondo scala, ovvero

$$p(\emptyset) = 0$$

Analogamente, la probabilità che esca un numero minore o uguale a 6 nel lancio di un dado è ovviamente massima, in quanto a tale evento viene associato l'insieme Ω stesso. Questo significa che tale risultato (o evento) è **certo**, pertanto si assegna ad esso un valore di probabilità di fine scala, ovvero

$$p(\Omega) = 1$$

È facile capire che se si considerano due eventi a cui sono associati due sottoinsiemi A e B disgiunti, tali per cui $A \cap B = \emptyset$, allora si avrà che

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Inoltre, se il dado è regolare, ha senso ed è plausibile associare lo stesso valore di probabilità a ciascuno degli eventi elementari, ovvero

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\})$$

e se ora si sommano le probabilità di tutti gli eventi elementari, non si può non ottenere la probabilità dell'evento certo, ovvero

$$p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) + p(\{5\}) + p(\{6\}) = p(\Omega) = 1$$

Per implicazione logica, siccome la somma delle probabilità degli eventi elementari è pari a 1 ed essi sono **equiprobabili**, deve essere necessariamente che

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = p(\{5\}) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

A partire da tale evidenza, è possibile ora andare ad associare agli eventi complessi, aggregati di eventi elementari, una probabilità, come di seguito esposto

$$p(\{2, 4, 6\}) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

e similmente

$$p(\{1, 2, 3, 4\}) = p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Naturalmente, ora, se si dovesse definire la probabilità associata alla somma di due eventi non disgiunti, non si può ricorrere alla formula precedentemente esposta, in quanto bisogna anche tenere conto delle sovrapposizioni. Infatti

$$\frac{7}{6} = p(\{2, 4, 6\}) + p(\{1, 2, 3, 4\}) \neq p(\{1, 2, 3, 4, 6\}) = \frac{5}{6}$$

questo perché, per quanto si è detto, i due sottoinsieme associati ai rispettivi risultati non sono disgiunti, in quanto $\{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{2, 4\}$

1.1 Matematica della probabilità

Il compito della probabilità è quello di fornire delle regole, a partire dalle quali riuscire ad attribuire una valutazione quantitativa della possibilità di verificarsi di eventi più complessi, **basandosi sulla probabilità associata ad eventi più elementari**.

Non è, invece, compito della probabilità quello di attribuire i valori di probabilità agli eventi elementari (si pensi, banalmente, alla differenza tra un dado regolare e un dado truccato): infatti, tale compito è affidato alla statistica, in quanto molto più legato alla praticità e alla modalità dei assegnazione.

Una volta appresa l'assegnazione della probabilità agli eventi elementari, interviene la probabilità: in particolare, la struttura matematica alla base del calcolo della probabilità prevede tre importanti elementi

1. un insieme Ω (che per il momento si considera finito);
2. una famiglia A (non vuota) di sottoinsiemi di Ω (spesso la famiglia di tutti i sottoinsiemi); mentre gli elementi di Ω sono chiamati risultati elementari, gli elementi sottoinsiemi di Ω appartenenti a tale famiglia sono chiamati risultati complessi, ottenuti come aggregazione di risultati elementari;
3. un'applicazione

$$p : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$

che ad ogni sottoinsieme appartenente alla famiglia \mathcal{A} associa un valore compreso tra 0 e 1.

Gli elementi di Ω sono detti **eventi elementari**, per cui Ω è detto **spazio degli eventi elementari**, mentre gli elementi della famiglia A prendono il nome di **risultati** (o eventi) **casuali** (o semplicemente eventi, configurazioni, traiettorie, campioni), per cui A prende il nome di **spazio degli eventi casuali**.

Se due eventi hanno un'intersezione nulla (come numeri pari e numeri dispari), si dice che essi sono **mutualmente esclusivi**.

L'applicazione p è detta **probabilità**, mentre l'immagine attraverso p di un evento A , ovvero $p(A)$ viene chiamata **probabilità dell'evento A** .

1.2 Regole della famiglia di eventi complessi

La famiglia di eventi complessi \mathcal{A} , così come l'applicazione p , è sempre subordinata alla presenza di alcune importanti condizioni:

1. tra gli elementi della famiglia degli eventi complessi \mathcal{A} ci deve essere sempre l'**evento certo**:

$$\Omega \in \mathcal{A}$$

2. tra gli elementi della famiglia degli eventi complessi \mathcal{A} ci deve essere sempre l'**evento impossibile**:

$$\emptyset \in \mathcal{A}$$

3. se tra gli elementi della famiglia degli eventi complessi \mathcal{A} si considerano gli eventi A e B , ad \mathcal{A} deve appartenere anche la loro **unione** e la loro **intersezione**:

$$A \cup B \in \mathcal{A} \text{ e } A \cap B \in \mathcal{A}$$

4. se tra gli elementi della famiglia degli eventi complessi \mathcal{A} si considera l'evento A , ad \mathcal{A} deve appartenere anche il suo opposto:

$$A^c \in \mathcal{A}$$

Nella pratica, se si lavora con uno spazio degli eventi che è finito, come famiglia dei risultati si considera l'insieme di tutti i risultati possibili, ovvero la famiglia costituita da tutti i sottoinsiemi di Ω (essendo Ω **finito**, l'insieme dei sottoinsiemi di Ω è ancora una famiglia finita con cui si può lavorare). Quando, invece, Ω è infinito, non si potrà lavorare con tutti i sottoinsiemi di Ω , ma si dovrà procedere a considerare una sua restrizione (potrebbe, infatti, non essere possibile considerare l'insieme di tutti sottoinsiemi dello spazio degli eventi elementari).

Una famiglia \mathcal{A} che soddisfa i quattro punti di cui sopra prende il nome di **algebra**: l'insieme delle parti è un esempio di algebra.

1.3 Regole dell'applicazione di probabilità

L'applicazione p tale per cui

$$p : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$

deve soddisfare, anch'essa, determinate regole:

1. l'**evento certo** deve avere **probabilità massima**, ovvero

$$p(\Omega) = 1$$

2. l'**evento impossibile** deve avere **probabilità nulla**, ovvero

$$p(\emptyset) = 0$$

3. se due eventi A e B sono mutualmente esclusivi, ovvero tali che i sottoinsiemi di Ω associati siano disgiunti, ovvero $A \cap B = \emptyset$, allora si ha che

$$p(A) + p(B) = p(A \cup B)$$

tale proprietà prende il nome di **additività** (sempre, però, relativamente a eventi disgiunti).

Un'applicazione p definita come segue

$$p : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$

che soddisfa le tre proprietà di cui sopra prende il nome di **misura di probabilità**.

1.4 Spazio di probabilità

Dopo aver introdotto il concetto di **algebra** e **probabilità** è possibile fornire la definizione di **spazio di probabilità finito**, (finito in quanto lo spazio degli eventi elementari Ω è finito):

SPAZIO DI PROBABILITÀ FINITO

Per definizione si chiama **spazio di probabilità finito** una **terna** (Ω, \mathcal{A}, p) dove

- Ω è un insieme **finito** che identifica tutti e soli gli eventi elementari;
- \mathcal{A} è un'algebra di sottoinsiemi di Ω (che, in quanto algebra, soddisfa le 4 regole precedentemente esposte), generalmente data da tutti i sottoinsiemi di Ω ;
- p è una probabilità su \mathcal{A} (che, essendo una probabilità, soddisfa le 3 regole precedentemente esposte).

1.4.1 Proprietà degli spazi di probabilità finiti

Le proprietà degli spazi di probabilità finiti discendono dalle richieste, ossia dalle regole, definite in merito alla famiglia degli eventi complessi \mathcal{A} , la quale deve essere un'algebra e sulla funzione p , la quale deve essere una **probabilità**:

1. **Proprietà additiva e subadditiva**: di seguito si espone la definizione di proprietà additiva e subadditiva della probabilità:

PROPRIETÀ ADDITIVA E SUBADDITIVA

Se $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ e sono a due a due **disgiunti** (ovvero mutualmente esclusivi), allora

$$\sum_{k=1}^n p(A_k) = p\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$$

ciò significa che la probabilità è **additiva**.

Se gli eventi non sono a due a due disgiunti, allora è possibile solo affermare che

$$\sum_{k=1}^n p(A_k) \geq p\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$$

In particolare, è sempre verificato che

$$p(A) + p(B) \geq p(A \cup B), \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$$

ciò significa che la probabilità è **subadditiva**.

Dimostrazione 1: La proprietà di additività e subadditività si dimostra per **induzione**: si chiami B l'evento così ottenuto

$$B = \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

Dal momento che per ipotesi gli eventi $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ sono disgiunti, deve essere che

$$A \cap \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k = A \cap B = \emptyset$$

e quindi si ha che

$$p\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = p(A_n) + p\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$

sfruttando la proprietà di **additività della probabilità rispetto ad eventi disgiunti** (ossia la proprietà 3 della probabilità).

Si procede analogamente, per induzione a scendere su n fino a ottenere che

$$p\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n p(A_k)$$

Per dimostrare anche la seconda implicazione, si deve ricorrere alla proprietà fondamentale dimostrata di seguito, la quale permette di affermare che, siccome $p(A \cap B) \geq 0$, allora

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B) \longrightarrow p(A) + p(B) \geq p(A \cup B)$$

Ancora una volta, per dimostrare la proprietà di cui sopra si procede per **induzione**: avendo dimostrato il passo base con $n = 2$, si suppone che tale proprietà sia verificata per $n - 1$ e la si dimostri per n ; appare evidente che se si considerano n eventi non a due a due disgiunti, tali per cui

$$A_n \cap \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \neq \emptyset$$

allora segue che

$$p\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq p(A_n) + p\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$

ma usando l'ipotesi induttiva si perviene al risultato seguente

$$\sum_{k=1}^n p(A_k) \geq p\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$$

2. **Proprietà fondamentale**: di seguito si espone una relazione fondamentale che riguarda il calcolo della probabilità:

PROPRIETÀ FONDAMENTALE

Si verifica che

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$$

Dimostrazione 2: Per dimostrare la proprietà fondamentale è opportuno osservare che $A \cup B$ può essere vista come l'unione di tre **insiemi disgiunti**:

$$A - (A \cap B) \quad A \cap B \quad B - (A \cap B)$$

ovvero

$$A \cup B = (A - (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B - (A \cap B))$$

sfruttando ancora la proprietà di **additività della probabilità rispetto ad eventi disgiunti** nel caso $n = 3$ e la proprietà di **monotonia** dimostrata di seguito, osservando che $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$ si può concludere che

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A - (A \cap B)) + p(A \cap B) + p(B - (A \cap B)) \\ &= p(A) - p(A \cap B) + p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \end{aligned}$$

3. **Proprietà di monotonia:** di seguito si espone la proprietà che giustifica la monotonia della probabilità:

PROPRIETÀ DI MONOTONIA

Si verifica che

$$p(A - B) = p(A) - p(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{A} : B \subset A$$

In particolare, dal momento che $p(A - B) \geq 0$, allora deve essere che

$$B \subset A \longrightarrow p(B) \leq p(A)$$

ciò significa che la probabilità è **monotona (crescente)**, come intuitivamente ci si poteva aspettare.

Dimostrazione 3: È facile osservare che gli eventi $A - B$ e l'evento B sono, per costruzione, due eventi mutualmente esclusivi (e quindi disgiunti); inoltre deve essere $(A - B) \cup B = A$, dal momento che $B \subset A$. Ciò permette di concludere che

$$p(A - B) + p(B) = p((A - B) \cup B) = p(A)$$

sfruttando la proprietà di **additività della probabilità rispetto ad eventi disgiunti**.

Corollario 1.0.1 Osservazione: Se si considera un evento $A \in \mathcal{A}$, allora si ha che

$$p(A^c) = 1 - p(A)$$

Dimostrazione: La dimostrazione è presto fatta e segue dai risultati precedenti. Infatti è ovvio che A e A^c sono due eventi disgiunti e che $A \cup A^c = \Omega$. Pertanto, sfruttando la **proprietà di additività della probabilità rispetto ad eventi disgiunti** e la probabilità dell'evento certo si ottiene che

$$p(A \cup A^c) = p(\Omega) = p(A) + p(A^c) \longrightarrow p(A) = 1 - p(A^c)$$

1.4.2 Costruzione di spazi di probabilità finiti

Si consideri un **insieme finito** $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ di eventi elementari (che prenderà il nome di **spazio campionario**) e un insieme $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ di **numeri reali positivi** la cui somma deve produrre il valore 1, ovvero

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 \quad \text{con } \alpha_k \in \mathbb{R}, \alpha_k \geq 0$$

Per la costruzione dello spazio di probabilità si considera come **algebra** \mathcal{A} degli eventi complessi (o aggregati) l'**insieme delle parti** di Ω e si definisce una funzione

$$p : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$

considerando i valori $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ come i valori di probabilità che verranno attribuiti a ciascun evento elementare di Ω , ovvero sia

$$p(\{\omega_k\}) = \alpha_k, \quad \text{con } k = 1, \dots, n$$

Tale concetto deve poi essere esteso a qualsiasi evento $A \in \mathcal{A}$ non vuoto, quale il seguente

$$A = \{\omega_{k,1}, \dots, \omega_{k,m}\}$$

ovvero un sottoinsieme non vuoto di Ω . Allora la probabilità dell'evento A sarà definita come segue

$$p(A) = \sum_{j=1}^m p(\{\omega_{k,j}\}) = \sum_{j=1}^m \alpha_{k,j} = \sum_{\omega \in A} p(\{\omega\})$$

ponendo, per semplicità, $p(\emptyset) = 0$. In altre parole, **la probabilità di A è la somma delle probabilità degli eventi elementari che costituiscono A .**

Mentre la famiglia \mathcal{A} è necessariamente un'algebra (in quanto soddisfa le 4 proprietà precedentemente esposte), in quanto l'insieme delle parti di Ω , è opportuno verificare che la funzione p presa in considerazione sia, effettivamente, una probabilità:

1. La probabilità dell'evento certo è naturalmente 1 per costruzione, in quanto

$$p(\Omega) = \sum_{k=1}^n p(\{w_k\}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$$

2. Per costruzione, la probabilità dell'evento impossibile è nulla, ovvero:

$$p(\emptyset) = 0$$

3. Si verifica immediatamente, infine, che la funzione p è effettivamente additiva rispetto a eventi disgiunti, ovvero

$$p(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} p(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in B} p(\{\omega\})$$

essendo A e B disgiunti, ovvero $A \cup B = A + B$.

Esempio 1: Nel caso di un dado regolare a sei facce, si è posto

$$\omega_k = k \text{ e } \alpha_k = \frac{1}{6}$$

ovverosia

$$\Omega = \{1, \dots, 6\} \text{ e } \Delta = \left\{ \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{6} \right\}$$

Esempio 2: Si consideri il lancio di due dadi regolari, ambedue a sei facce. Lo spazio degli eventi elementari è

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), (2, 2), \dots, (6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6)\}$$

ovvero un insieme finito costituito da 36 elementi. Assumendo che i dadi siano uguali e con facce uniformi, è naturale pensare che la probabilità che esca uno degli eventi elementari sia la stessa, ovvero

$$p(\{(1, 1)\}) = p(\{(1, 2)\}) = \dots = p(\{(6, 6)\})$$

Il valore della probabilità di ciascuno degli eventi elementari è $\frac{1}{36}$: questo in quanto la somma delle probabilità di tutti gli eventi elementari deve essere 1. In questo caso, si sta quindi ponendo

$$\alpha_k = \frac{1}{36} \text{ per } k = 1, \dots, 36$$

Pertanto, considerando come algebra \mathcal{A} degli eventi l'insieme delle parti di Ω e definendo una probabilità p su \mathcal{A} come esposto in precedenza, se $A \in \mathcal{A}$, allora

$$p(A) = \begin{array}{l} \text{somma delle probabilità degli} \\ \text{eventi elementari che apparten-} \\ \text{gono ad } \mathcal{A} \end{array} = \begin{array}{l} \text{numero degli elementi di } \mathcal{A} \\ \text{moltiplicato per } \frac{1}{36} \end{array}$$

Esempio: Si calcoli, ora, la probabilità dei seguenti eventi complessi:

1. escono due numeri uguali
2. la somma dei due numeri fa 8
3. almeno uno dei due numeri è pari

Esempio 1: Al primo evento è associato il sottoinsieme

$$A = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\}$$

costituito da 6 elementi. Quindi si evince che

$$p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Infatti, dopo aver assegnato in maniera arbitraria i valori di probabilità agli eventi elementari, si adopera l'insieme delle regole del calcolo della probabilità al fine di determinare la probabilità degli eventi complessi (o aggregati).

Esempio 2: Al secondo evento è associato il sottoinsieme

$$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$$

costituito da 5 elementi. Quindi si evince che

$$p(A) = \frac{5}{36}$$

Esempio 1: Al primo evento è associato il sottoinsieme

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (2, 1), \dots, (2, 6), (4, 1), \dots, (4, 6), (6, 1), \dots, (6, 6), \\ (1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6) \end{array} \right\}$$

costituito da 27 elementi. Quindi si evince che

$$p(A) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

Osservazione: Si osservi, ancora una volta, che la scelta di porre

$$\alpha_k = \frac{1}{36} \text{ per } k = 1, \dots, 36$$

è di **natura totalmente arbitraria** e basata su considerazioni empiriche (dadi uguali, facce uniformi, etc.). Se i dadi avessero delle anomalie (fossero, per esempio, truccati), sarebbe più ragionevole pesare in modo diverso le probabilità degli eventi elementari.

Per esempio, se ci fosse uno squilibrio di peso sulle facce 1 dei dadi, si potrebbe decidere di porre

$$p(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{9}$$

$$p(\{(1, 2)\}) = p(\{(1, 6)\}) = p(\{(2, 1)\}) = \dots = p(\{(6, 1)\}) = \frac{1}{18}$$

e sui restanti 25 eventi elementari porre

$$p(\{(\dots, \dots)\}) = \left(1 - \frac{1}{9} - \frac{10}{18}\right) \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{75}$$

2 Serie

Di seguito si espone la definizione di **serie numerica**:

SERIE NUMERICA

Data una successione di numeri reali $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, si chiama **serie numerica** la successione delle somme parziali

$$\left\{ s_n := \sum_{k=1}^n a_k \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Più esplicitamente

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ \dots \\ s_n = a_1 + \dots + a_n \\ \dots \end{array} \right.$$

Pertanto, effettuare la sommatoria di infinito termini a_n equivale ad effettuare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

Tale successione si indica con il simbolo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

e si impiega lo stesso simbolo per indicare il limite per $n \rightarrow \infty$ (ammesso che esista).

Osservazione 1: Se la successione $\{a_n\}$ è una successione di numeri reali non negativi, allora, naturalmente, $\{s_n\}$ è crescente. Quindi, come ben noto, $\{s_n\}$ converge, oppure diverge a $+\infty$.

Osservazione 2: È chiaro che il simbolo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

viene utilizzato per indicare che la somma inizia a partire dal termine a_1 . Il simbolo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

invece, è atto a indicare che la somma inizia a partire dal termine a_0 . Similmente, si impiega il simbolo

$$\sum_{k=3}^{\infty} a_k$$

quando si inizia a sommare a partire dal termine a_3 .

Osservazione 3: Si osservi che, naturalmente

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converge **se e solo se** converge

$$\sum_{k=3}^{\infty} a_k$$

Questo in quanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_{j-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

per cui il limite a destra esiste **se e solo se** esiste quello di sinistra, in quanto la differenza tra le due successioni è costituita soltanto un numero finito di elementi (dalla costante $a_1 + a_2 + \dots + a_{j-1}$) che non influiscono sulla convergenza della successione stessa.

Osservazione 4: Si osservi che

Lemma 2.1 *Non è vero che ogni serie converge o diverge a $\pm\infty$.*

Esempio: Si consideri la seguente serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$$

tale serie non converge e non diverge: infatti la somma parziale con k pari converge a 0, mentre la somma parziale con k dispari converge a -1 : pertanto la serie di partenza non converge e non diverge, in quanto non esiste il limite della somma di successione.

Si parla, in questo caso, di una **successione oscillante**:

$$s_1 = -1, s_2 = 0, s_3 = -1, \dots$$

2.1 Condizione necessaria per la convergenza di una serie

In genere non è facile stabilire se una serie sia convergente o meno (e se anche lo fosse, non è sempre facile stabilire il limite della stessa). Si consideri, a tal proposito, il seguente lemma:

Lemma 2.2 *Si consideri la serie seguente*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Se essa converge, allora deve essere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

*cioè **condizione necessaria** affinché una serie converga è che i termini da sommare progressivamente diventino indefinitivamente piccoli.*

2.1.1 Serie armonica

Osservazione: Si osservi che tale condizione è necessaria, ma **non sufficiente**. E ciò è facilmente verificabile con l'esempio seguente: si consideri la **serie armonica** seguente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Tale serie diverge a $+\infty$, anche se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$$

in quanto essa va a 0 troppo lentamente e quindi non ha sufficienza per garantire la convergenza.

Dimostrazione: Si dimostri per assurdo che la **serie armonica** diverge a $+\infty$. Dal momento che taluna è una serie ottenuta come sommatoria di quantità positive o converge, oppure diverge. Si supponga per assurdo che non diverga: allora converge ad un certo l , ovvero dovrebbe essere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = l$$

Si può facilmente osservare che la differenza tra le due somme parziali s_{2n} e s_n si può scrivere come

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

questo perché i primi n termini vengono eliminati nella differenza. Inoltre si ha che

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termini}} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

in quanto, ovviamente

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \dots > \frac{1}{2n}$$

ed essi sono proprio n termini. Ciò permette di affermare che

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Per la definizione di limite si ha che definitivamente, ossia per n abbastanza grande, si ha che

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\epsilon \longrightarrow |s_n - l| < \epsilon$$

Ponendo $\epsilon = \frac{1}{4}$ si ottiene che

$$|s_n - l| < \frac{1}{4}$$

Da ciò segue che, per la disuguaglianza triangolare e ricordando che $|w| = |-w|$

$$\frac{1}{2} \leq |s_{2n} - s_n| = |s_{2n} - l + l - s_n| \leq |s_{2n} - l| + |s_n - l| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ricordando che il limite delle due somme parziali è identico, dal momento che per $n \rightarrow \infty$ $s_n \rightarrow +\infty$, $s_n \leq s_{2n}$ e si verifica che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$$

Dal momento che una quantità non può essere minore di se stessa si ottiene l'assurdo.

2.2 Serie armonica generalizzata

Di seguito si fornisce la definizione di **serie armonica generalizzata**:

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

è detta **serie armonica generalizzata**.

Osservazione: Anche se la serie armonica è divergente, la presenza di un esponente $\alpha > 1$ sul termine $\frac{1}{k}$ fa sì che le somme parziali crescano più lentamente e quindi ci sia convergenza. Se

$\alpha < 1$, invece, la serie che non può che divergere ancora più velocemente. Omettendo la dimostrazione, si può facilmente capire che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \begin{cases} \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \\ \text{converge se } \alpha > 1 \end{cases}$$

2.3 Serie geometrica

Di seguito si fornisce la definizione di **serie geometrica**:

SERIE GEOMETRICA

Dato $Q \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

è detta **serie geometrica** di ragione q (e parte con $k = 0$).

Osservazione: Il comportamento della serie è il seguente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \begin{cases} \text{converge a } \frac{1}{1-q} \text{ se } q \in (-1, 1) \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } q \geq 1 \\ \text{indeterminata se } q \leq -1 \end{cases}$$

ove per **indeterminata** si intende che non converge, né diverge a $\pm\infty$.

Dimostrazione: Se $q = 1$ il comportamento è ovvio, in quanto si somma indefinitamente il valore 1, per cui la serie diverge a $+\infty$. Se $q \neq 1$, allora si deve osservare che è possibile scrivere

$$1 - q^{n+1} = (1 - q) \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^n)$$

dividendo ambo i membri per il termine $1 - q \neq 0$ in quanto per ipotesi si è assunto $q \neq 1$, si ottiene il seguente termine generico della serie geometrica:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

e la tesi segue per quanto noto sul limite di q^n :

- se $q \in (-1, 1)$, allora ovviamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$$

per cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

- se $q > 1$, allora ovviamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = +\infty$$

per cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = +\infty$$

in quanto si può portare fuori il “−”, senza avere problemi di segno.

- se $q < 1$, allora ovviamente

$$q^{n+1} > 0$$

se $n + 1$ è pari, mentre

$$q^{n+1} < 0$$

se $n + 1$ è dispari, quindi la serie è oscillante con ampiezza a crescere.

Esempio: Si calcoli la seguente serie geometrica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

ricordando sempre, però, che la serie geometrica parte con $k = 0$. Ovviamente è noto che, se $k = 0$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

per cui si può scrivere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

ma siccome $q = \frac{1}{3} \in (-1, 1)$, allora la serie converge a

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

e si può scrivere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = -1 + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

2.4 Criterio del confronto per serie a termini positivi

Non è sempre facile capire se una serie converge o meno: anche se la serie è a termini positivi, non è facile determinare se essa converga o diverga a $\pm\infty$. Tuttavia, esistono diversi criteri, uno dei più basilari ed efficaci è il criterio del confronto:

CRITERIO DEL CONFRONTO PER SERIE A TERMINI POSITIVI

Siano date due successioni $a_n, b_n \geq 0$ e si supponga che esse siano tali che $a_n \leq b_n, \forall n$. Allora si ha che

- se $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ diverge, diverge anche $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$
- se $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ converge, allora converge anche $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$

Inoltre, detto l_b il limite della prima e l_a il limite della seconda, risulta $l_a = l_b$.

Si propone una breve dimostrazione (che si basa sui teoremi del confronto di successioni monotone):

- si indichi con s_n la successione delle somme parziali relativa ai termini a_n , ovvero

$$s_n = a_1 + \dots + a_n$$

- si indichi con r_n la successione delle somme parziali relativa ai termini b_n , ovvero

$$r_n = b_1 + \dots + b_n$$

Si supponga che la successione r_n converga e si chiami con l_b il suo limite, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = l_b$$

sapendo, però, che $a_n \leq b_n, \forall n$, si evince che

$$s_n \leq r_n$$

ma siccome r_n è una successione crescente e convergente, i suoi termini sono diminuiti dall'alto dal limite l_b , da cui

$$s_n \leq r_n \leq l_b$$

per il teorema di convergenza delle successioni monotone. Ma siccome anche la successione s_n è crescente ed è limitata superiormente da l_b , per il teorema di esistenza del limite delle successioni monotone segue che

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l_a$$

per il teorema del confronto tra successioni, sapendo che $a_n \leq b_n, \forall n$, si ha che $l_a \leq l_b$. Generalmente per il confronto vengono utilizzate la serie geometrica e la serie armonica generalizzata (visto che già se ne conosce il comportamento).

Dimostrazione: Si consideri la seguente serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

e si dimostri che essa è **convergente**. Ricordando che $0! = 1$, per definizione, si ha che

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2}$$

se ora, in ciascun denominatore, si procede ad eliminare tutti i prodotti tranne i primi due, ovvero lasciando solamente $n \cdot (n-1)$, è naturale ottenere una sommatoria maggiorata, per cui

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \cdot (k-1)}$$

La serie a destra può essere così riscritta

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right]$$

e tale serie è **convergente** ad 1, in quanto $s_n = 1 - \frac{1}{n}$. Per verificarlo basta provare a scrivere esplicitamente la successione delle somme parziali

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

in quanto tutti gli altri termini si semplificano. Applicando il criterio del confronto, è facile osservare che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k-1)} = 2 + 1 = 3$$

per cui si ottiene che anche la successione

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

è convergente e il suo limite è minore di 3. Tale limite prende il nome di **numero di Nepero** ed è indicato con e .