Università di Trieste

Laurea in ingegneria elettronica e informatica

Enrico Piccin - Corso di Ricerca Operativa - Prof. Lorenzo Castelli

Anno Accademico 2022/2023 - 3 Ottobre 2022

Indice

3 Ottobre 2022

1 Introduzione

Il termine “RICERCA OPERATIVA” sembra sia stato usato per la prima volta nel 1939, ma già precedentemente alcuni scienziati si erano occupati di problemi decisionali.
Fra gli esempi isolati, ma importanti, di anticipazione dei metodi della ricerca operativa, possono essere considerati i seguenti:

- Nel 1776, il matematico G. MONGE ha affrontato un problema di trasporti esaminandone con metodi analitici gli aspetti economici.
- Nel 1885, F. W. TAYLOR ha pubblicato uno studio sui metodi di produzione
- Nel 1908 A. K. ERLANG ha studiato il problema della congestione del traffico telefonico.

Tuttavia il progresso della ricerca operativa non si sarebbe forse verificato se non fosse stato per i suoi sviluppi nelle organizzazioni militari durante la seconda guerra mondiale.
Durante la II Guerra Mondiale, infatti, i responsabili militari inglesi si rivolsero agli scienziati per chiedere il loro aiuto, quando iniziò l'attacco aereo tedesco sulla Gran Bretagna. Piccoli gruppi di scienziati, provenienti da diverse discipline, lavorarono su questi problemi con notevole successo nel periodo 1939-1940 (OR team).
Tali gruppi di scienziati avevano come riferimenti i responsabili delle operazioni militari e quindi il loro lavoro divenne noto come *operational research* = **ricerca delle operazioni** (militari).
Dopo la guerra, questi operatori vennero, poco a poco, assorbiti dall'industria, dalle aziende di consulenza, da università e da organizzazioni statali. Oggi la maggior parte delle grandi imprese si serve della ricerca operativa.

1.1 Definizione di Ricerca Operativa

Di seguito si espone la definizione formale di **ricerca operativa**:

RICERCA OPERATIVA

La ricerca operativa è l'**applicazione del metodo** scientifico da parte di gruppi interdisciplinari a sistemi complessi e organizzati p**er fornire al personale dirigente soluzioni utilizzabili nei processi decisionali** (Morse e Kimball).
Più specificatamente, la **ricerca operativa** è la branca della **matematica applicata** in cui **problemi decisionali** complessi vengono analizzati e risolti mediante **modelli matematici** e **metodi quantitativi** avanzati (**ottimizzazione**, simulazione, ecc.) come supporto alle **decisioni** stesse.

Osservazione: Com'è intuibile, all'interno della **Ricerca Operativa**, un ruolo di fondamentale importanza è svolto dalla **Programmazione Matematica**, che è la disciplina che ha per oggetto lo studio dei problemi in cui si vuole **minimizzare o massimizzare una funzione reale** definita su $\mathbb{R}^n$ (lo spazio delle n-uple reali) **le cui variabili sono vincolate ad appartenere ad una insieme prefissato**.
Si tratta, quindi, di problemi di **ottimizzazione**, cioè problemi nei quali si desidera **minimizzare o massimizzare** una quantità che è espressa attraverso una funzione.

6 Ottobre 2022

2 Problema di ottimizzazione

Di seguito si espone la definizione di **problema di ottimizzazione**:

PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE

Un **problema di ottimizzazione** viene definito specificando:

- Un insieme E, i cui elementi si chiamano **soluzioni** (o decisioni o alternative);
- Un sottoinsieme $F \subset E$ (definito **insieme ammissibile**). I suoi elementi si chiamano **soluzioni ammissibili**. Il suo complementare, $E - F$ si chiama **insieme inammissibile**: la relazione $x \in F$ prende il nome di **vincolo**;
- Una funzione
$$f : E \longmapsto \mathbb{R}$$
chiamata **funzione obiettivo**, che deve essere **minimizzata** o **massimizzata** a seconda dello scopo del problema.

2.1 Soluzione ottimale

Di seguito si espone la definizione di **soluzione ottimale**:

SOLUZIONE OTTIMALE

Ogni elementi $x^* \in F$ tale che
$$f(x^*) \leq f(y), \forall y \in F$$
per un **problema di minimizzazione**, oppure $x^* \in F$ tale che
$$f(x^*) \geq f(y), \forall y \in F$$
per un **problema di massimizzazione**, prende iul nome di **optimum**, o **soluzione ottimale**.
Invece, il valore $v = f(x^*)$ della funzione in corrispondenza della soluzione ottimale, prende il nome di **valore ottimale**. Si userà, quindi, la seguente notazione per indicare valori ottimali in corrispondenza di problemi di minimizzazione e massimizzazione:

- $v = \min f(x), x \in F$, per la minimizzazione;
- $v = \max f(x), x \in F$, per la massimizzazione.

Osservazione: Si osservi che un problema di massimizzazione (o minimizzazione) può essere facilmente trasformato in un problema di minimizzazione (o massimizzazione) sostituendo la funzione obiettivo f con il suo opposto $-f$.

2.1.1 Classificazione dei problemi di ottimizzazione

I problemi di ottimizzazione vengono classificati secondo le tre categorie seguenti

1. **Problemi di ottimizzazione nel continuo**: Le variabili decisionali possono assumere tutti i valori reali $x \in \mathbb{R}^n$. In aggiunta, si distinguono

   (a) **Ottimizzazioni vincolate**, quando l'insieme delle soluzioni ammissibili è $F \subset \mathbb{R}^n$

   (b) **Ottimizzazioni non vincolate**, quando l'insieme delle soluzioni ammissibili è $F = \mathbb{R}^n$

2. **Problemi di ottimizzazione nel discreto**: Le variabili sono vincolate ad essere degli interi $x \in \mathbb{Z}^n$. In aggiunta, si distinguono
   (a) **Programmazione intera**, quando l'insieme delle soluzioni ammissibili è $F \subset \mathbb{Z}^n$
   (b) **Programmazione binaria (o booleana)**, quando $F \subset \{0,1\}^n$

3. **Problemi di ottimizzazione mista**: Solamente alcune variabili decisionali sono vincolate ad essere intere.

Osservazione: Non è possibile risolvere problemi di ottimizzazione discreta se non si è in grado di risolvere problemi di ottimizzazione continua.

Esempio 1: Si consideri un'industria chimica, la quale fabbrica 4 tipi di fertilizzanti: Tipo 1, Tipo 2, Tipo 3 e Tipo 4, la cui lavorazione è affidata a due reparti dell'industria: il reparto produzione e il reparto confezionamento. Per ottenere fertilizzante pronto per la vendita è necessaria, naturalmente, la lavorazione in entrambi i reparti.
La tabella che segue riporta, per ciascun tipo di fertilizzante i tempi (in ore) necessari di lavorazione in ciascuno dei reparti per avere una tonnellata di fertilizzante pronto per la vendita:

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
Reparto produzione	2	1.5	0.5	2.5
Reparto confezionamento	0.5	0.25	0.25	1

Dopo aver dedotto il costo del materiale grezzo, ciascuna tonnellata di fertilizzante dà seguenti profitti (prezzi espressi in Euro per tonnellata):

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
Profitti netti	250	230	110	350

Determinare le quantità che si devono produrre settimanalmente di ciascun tipo di fertilizzante, in modo da massimizzare il profitto complessivo, sapendo che ogni settimana, il reparto produzione e il reparto confezionamento, hanno una capacità lavorativa massima rispettivamente di 100 e 50 ore.

Appare naturale, in questo caso, introdurre quattro variabili decisionali reali x_1, x_2, x_3, x_4, rappresentative delle quantità di ciascun prodotto di Tipo 1, Tipo 2, Tipo 3 e Tipo 4, rispettivamente, da produrre in una settimana.
Giacché ciascuna tonnellata di ognuno dei 4 fertilizzanti contribuisce al profitto totale, la funzione obiettivo può essere espressa come

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4$$

in quanto l'obiettivo dell'industria chimica è quello di scegliere in modo idoneo i valori delle quattro quantità x_1, x_2, x_3, x_4 in modo tale da massimizzare il profitto.
Ovviamente, però, la capacità produttiva dell'industria limita il valore che le variabili x_1, x_2, x_3, x_4 potranno assumere, in quanto vi è un limite settimanale in termini di ore in cui i diversi stabilimenti potranno operare. Più precisamente, vi è un limite di 100 ore settimanali per il reparto di produzione e, siccome ogni tonnellata di fertilizzante di Tipo 1 impiega lo stabilimento produttivo per 2 ore, ogni tonnellata di fertilizzante di Tipo 2 impiega lo stabilimento produttivo per 1.5 ore e così via per gli altri tipo, si dovrà considerare il vincolo

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100$$

Ragionando in modo analogo per lo stabilimento di confezionamento, si ottiene un secondo vincolo:

$$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50$$

Per essere coerenti, bisogna anche specificare un vincolo esplicito relativo al fatto che le variabili x_1, x_2, x_3, x_4 rappresentano quantità di prodotto che non possono essere negative, per cui si deve imporre anche che $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.
Ciò porta, naturalmente, a considerare il seguente insieme ammissibile F:

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100 \\ 0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Appare, quindi, evidente che vi sono dei vincoli, in quanto non si sta lavorando su tutto $\mathbb{R}^4$, ma ci sono delle limitazioni dettate dal tempo di lavorazione e confezionamento dei diversi fertilizzanti.

Esempio 2: Si supponga di essere un investitore, il quale possiede €1000 da investire nel mercato finanziario, avente a disposizione 3 opzioni di investimento (non divisibili), ciascuno caratterizzato da un costo di acquisto e da un rendimento riassunti nella tabella seguente:

	A	B	C
Costo di acquisto	750	200	800
Rendimento	20	5	10

Procedendo sempre in modo naturalmente intuitivo, si possono introdurre 3 variabili x_A, x_B, x_C tali che

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se l'investimento } i\text{-esimo non viene scelto} \\ 1 & \text{se l'investimento } i\text{-esimo viene scelto} \end{cases}$$

La funzione obiettivo da massimizzare è, ovviamente,

$$f = 20x_A + 5x_B + 10x_C$$

sempre tenendo in considerazione il vincolo per cui

$$750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000$$

ottenendo, quindi, l'insieme ammissibile seguente

$$F = \{x \in \{0, 1\}^3 | 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000\}$$

3 Convessità

Di seguito si espone il significato di **convessità**:

CONVESSITÀ DI UNA FUNZIONE

Una funzione $f(x)$ di una variabile è una **funzione convessa** se, per ogni coppia x' e x'' di valori di x (con $x' < x''$) si ha

$$f(\lambda x'' + (1-\lambda)x') \leq \lambda f(x'') + (1-\lambda) f(x')$$

per ogni valore di λ tale che $0 < \lambda < 1$.

- Una funzione è **strettamente convessa** se si può sostituire $\leq$ con $<$.
- Una funzione è **concava** se la condizione di cui sopra vale quando si sostituisce $\leq$ con $\geq$.
- Una funzione è **strettamente concava** se si può sostituire $\geq$ con $>$.

Osservazione 1: Ovviamente, in modo analogo, la funzione $f(x)$ è convessa se per ogni coppia di punti del grafico $f(x)$, il segmento che li congiunge sta interamente al di sopra del grafico di $f(x)$ o coincide con esso.
In modo inverso, la funzione $f(x)$ è concava se per ogni coppia di punti del grafico $f(x)$, il segmento che li congiunge sta interamente al di sotto del grafico di $f(x)$ o coincide con esso.
Una funzione lineare (ossia una retta) è una funzione che è sia concava che convessa.

Osservazione 2: Sia $f(x)$ una funzione di una sola variabile che ammette derivata seconda per tutti i possibili valori di x. Allora $f(x)$ è:

- **convessa** se e solo se
$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0$$
per ogni possibile valore di x;
- **strettamente convessa** se e solo se
$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$$
per ogni possibile valore di x;
- **concava** se e solo se
$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \leq 0$$
per ogni possibile valore di x;
- **strettamente concava** se e solo se
$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0$$
per ogni possibile valore di x.

Ovviamente, però, una funzione strettamente convessa è anche convessa, ma una funzione convessa non è strettamente convessa se la sua derivata seconda è uguale a zero per alcuni valori di x.
Analogamente una funzione strettamente concava è concava, ma non è vero il viceversa.

3.1 Insieme convesso

Di seguito si espone la definizione di **insieme convesso**:

INSIEME CONVESSO

Un insieme convesso è un insieme di punti tale che, per ogni coppia di punti dell'insieme, il segmento che li congiunge è interamente contenuto nell'insieme stesso.

Osservazione: È facile risolvere problemi di carattere continuo in quanto la regione ammissibile è un insieme convesso, mentre nel caso di problemi discreti o binari ciò non accade.
Non solo, ma è vero che l'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso.

3.1.1 Punto estremo di un insieme convesso

Di seguito si espone la definizione di **punto estremo di un insieme convesso**:

PUNTO ESTREMO DI UN INSIEME CONVESSO

Un **punto estremo di un insieme convesso** è punto dell'insieme che non appartiene ad alcun segmento congiungente altri due punti distinti dell'insieme stesso.

Osservazione: Si osservi che non tutti gli insiemi convessi hanno punti estremi, come nel caso dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

3.1.2 Massimo e minimo

Data una funzione di una sola variabile e derivabile, è **condizione necessaria** affinché una particolare soluzione $x = x^*$ sia un minimo o un massimo è che

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad \text{in} \quad x = x^*$$

Tuttavia, per avere maggiori informazioni sui punti critici (punti di minimo, di massimo o di flesso) è necessario esaminare la derivata seconda; ovviamente, se la funzione non è derivabile in tutto il dominio, la proprietà sopra enunciata non vale.
Pertanto, se

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0 \quad \text{in} \quad x = x^*$$

allora x^* è almeno un **minimo locale** (ossia $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni x sufficientemente vicino a x^*); in altre parole, x^* è un minimo se $f(x)$ è strettamente convessa in un intorno di x^*.
Analogamente, una condizione sufficiente affinché x^* sia un **massimo locale** (supponendo che soddisfi la condizione necessaria) è che f(x) sia strettamente concava in un intorno di x^* (cioè la derivata seconda è negativa in x^*).
Se la derivata seconda è nulla, è necessario esaminare le derivate di ordine superiore (in questo caso il punto potrebbe anche essere un punto di flesso); per individuare eventuali punti critici, se il dominio è limitato, è necessario controllare gli estremi dell'intervallo.
Per determinare un **minimo globale** (cioè una soluzione x^* tale che $f(x^*) \leq f(x), \forall x$) è necessario confrontare i minimi locali e identificare quello per il quale si ha il più piccolo valore di $f(x)$: se tale valore è minore di $f(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ (o agli estremi del suo dominio, se essa è definita in un intervallo limitato), allora questo punto è un minimo globale; Il massimo globale è determinato in modo analogo.

Osservazione: Si osservi, in particolare, che se $f(x)$ è una funzione convessa, allora una qualunque soluzione x^* tale che

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad \text{in} \quad x = x^*$$

è automaticamente un minimo globale; in altre parole ,questa condizione è non solo necessaria, ma anche sufficiente per un minimo globale di una funzione convessa.
Tuttavia, tale soluzione non deve necessariamente essere unica, in quanto la funzione potrebbe rimanere costante in un certo intervallo nel quale la sua derivata è nulla; d'altra parte, se $f(x)$ è strettamente convessa, allora tale soluzione deve essere l'unico minimo globale.
Analogamente se $f(x)$ è una funzione concava, allora la condizione

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad \text{in} \quad x = x^*$$

è sia necessaria che sufficiente affinché x^* sia un massimo globale.
Se la funzione, invece, non è strettamente concava o strettamente convessa ci possono essere infinite soluzioni ottime, rispettivamente massimi e minimi globali.

7 Ottobre 2022

4 Esempi di modelli

Di seguito si espongono alcuni esempi di problemi da risolvere, impiegando differenti modelli matematici:

4.1 La composizione ideale

Si vuole realizzare una compilation ideale avendo a disposizione dei file musicali e un CD-ROM dalla capacità di 800 MB. L'indice di gradimento (in una scala da 1 a 10) e l'ingombro in MB di ogni file sono riportati nella tabella seguente:

Canzone	Gradimento	Ingombro
Light my fire	8	210
Fame	7	190
I will survive	8,5	235
Imagine	9	250
Let it be	7,5	200
I feel good	8	220

Si vuole decidere quali file inserire nel CD in modo tale da massimizzare il gradimento complessivo, senza eccedere la capacità del CD.
Il problema può essere modellato per mezzo di variabili decisionali binarie $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ associate a ogni file musicale in modo tale che assumano valore 1 se il file in questione è inserito nel CD, il valore 0 in caso contrario. La funzione che bisogna massimizzare è

$$f = 8x_1 + 7x_2 + 8.5x_3 + 9x_4 + 7.5x_5 + 8x_6$$

rispettando il vincolo seguente

$$210x_1 + 190x_2 + 235x_3 + 250x_4 + 200x_5 + 220x_6 \leq 800$$

Generalizzando, indicato con g_i il gradimento della canzone i-esima, con w_i il suo ingombro e con C la capacità del CD, il problema può essere formulato per mezzo delle seguenti parametrizzazioni

$$f = \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot x_i$$

con i vincoli seguenti

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i \leq C \quad \text{e} \quad x_i \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

dove $n = 6$ è il numero di file musicali. L'unico vincolo del problema consiste nel fatto che l'ingombro dei file inseriti non deve eccedere la capacità del CD.

4.2 I treni combinati

Una compagnia ferroviaria deve decidere quanti treni combinati realizzare potendo scegliere tra due diversi modelli: DeLuxe e FarWest. La composizione dei due treni è schematizzata nella tabella seguente.

Tipo di vagone	DeLuxe	FarWest	Disponibilità
Merci	1	3	12
WLit	1	0	9
Ristorante	1	0	10
II Classe	2	3	21
I Classe	1	2	10
Motrice	1	1	9
Guadagno	€3000	€8000	-

Si vuole massimizzare il guadagno totale.
Poiché bisogna decidere quanti treni di ciascun tipo realizzare, il problema può essere formulato per mezzo di due variabili decisionali discrete x_D e x_F, che rappresentano rispettivamente il numero di treni Deluxe e il numero di treni Far West da realizzare: ovviamente tali variabili dovranno risultare intere e non negative.
Si dovrà, quindi, massimizzare la funzione obiettivo seguente

$$f = 3000x_D + 8000x_F$$

rispettando, però, i seguenti vincoli

$$\begin{aligned}
&x_D + 3x_F \leq 12\\
&x_D \leq 9\\
&x_D \leq 10\\
&2x_D + 3x_f \leq 21\\
&x_D + 2x_F \leq 10\\
&x_D + x_F \leq 0\\
&x_D \geq 0, x_F \geq 0
\end{aligned}$$

In cui la soluzione ottima è $x_D = 6, x_F = 2$ che consente di ottenere un profitto di 24000

4.3 La raffineria

Una raffineria miscela quattro tipi di petrolio greggio in diverse proporzioni per ottenere tre diversi tipi di benzina: normale, blu super e V-power. La massima quantità disponibile di ciascun componente greggio e il corrispondente costo di acquisto sono indicati nella seguente tabella.

Componente	Disponibilità massima (barili)	Costo (€)
P1	500	9
P2	2400	7
P3	4000	12
P4	1500	6

Per poter soddisfare le specifiche qualitative dei diversi tipi di benzina è necessario rispettare dei limiti assegnati circa la percentuale di ciascun componente impiegato. Tali limiti, insieme ai prezzi di vendita dei diversi tipi di benzina, sono indicati nella tabella che segue:

Benzina	Specifiche qualitative	Prezzo (€ barile)
Normale	almeno 20% di P2 e al massimo il 30% di P3	12
Blu super	almeno il 40% di P3	18
V-power	al massimo il 50% di P2	10

Si vuole determinare la miscela ottimale dei quattro componenti che massimizza il guadagno totale derivante dalla vendita delle benzine.
Poiché bisogna decidere quale quantità di ogni componente greggio usare nella produzione di ciascun tipo di benzina, nella formulazione sono necessarie delle variabili a due indici: $x_{i,j}$ = barili di componente greggio j usati nella produzione di benzina di tipo i.
Ecco, quindi, che la funzione da massimizzare è

$$f = \sum_{i=1}^{3} p_i \cdot \sum_{j=1}^{4} x_{i,j} - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_j \cdot x_{i,j}$$

Rispettando, tuttavia, i seguenti vincoli

$$\begin{aligned}
& x_{1,2} \geq 0.2 \cdot \sum_{j=1}^{4} x_{1,j} \\
& x_{1,3} \leq 0,3 \cdot \sum_{j=1}^{4} x_{1,j} \\
& x_{2,3} \geq 0.4 \cdot \sum_{j=1}^{4} x_{2,j} \\
& x_{3,2} \leq 0,5 \cdot \sum_{j=1}^{4} x_{3,j} \\
& \sum_{i=1}^{3} x_{i,j} \leq d_j \text{ con } j = 1, \dots, 4 \\
& x_{i,j} \geq 0 \text{ con } i = 1, \dots, 3 \text{ e } j = 1, \dots, 4
\end{aligned}$$

Dove c_j e d_j indicano rispettivamente il costo e la disponibilità del componente greggio j e p_i indica il prezzo di vendita della benzina i.

4.4 La turnazione degli infermieri

Un ospedale deve organizzare i turni settimanali degli infermieri in modo da minimizzare il numero totale di persone coinvolte. Per soddisfare le esigenze di servizio occorre garantire ogni giorno la presenza di un numero minimo di infermieri, esposto nella tabella seguente:

	LUN	MAR	MER	GIO	VEN	SAB	DOM
Infermieri	17	13	15	19	14	16	11

I turni degli infermieri consistono in cinque giorni consecutivi di lavoro seguiti da due giorni di riposo (per esempio venerdì, sabato, domenica, lunedì, e martedì lavoro; mercoledì e giovedì riposo). Il problema può essere modellato mediante le variabili decisionali x_i che rappresentano il numero di persone che iniziano il turno di lavoro il giorno i per $i = 1, \ldots, 7$, in modo tale da minimizzare

$$f = \sum_{i=7} x_i$$

rispettando i seguenti vincoli:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 17 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 13 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 15 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 19 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 14 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 16 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 11
\end{aligned}$$

4.5 La campagna pubblicitaria

Un'agenzia di pubblicità deve realizzare una campagna promozionale avendo a disposizione due mezzi: gli annunci radiofonici e quelli su carta stampata.
Sono ammessi annunci radiofonici con durata di frazione di minuto e annunci sul giornale di frazione di pagina. Le stazioni radiofoniche private praticano sconti in base alla quantità di minuti richiesti: il costo al minuto è di €100 meno €2 per ogni minuto utilizzato (in questo modo, il costo al minuto qualora se ne richiedono tre è di €94). Inoltre, le emittenti possono fornire al massimo 30 minuti di annunci in totale.
I giornali, invece, richiedono un prezzo standard di €200 per pagina. Per vincoli contrattuali almeno un terzo della spesa deve consistere in annunci sui giornali. In base ai risultati statistici, si stima che tramite un minuto di annunci radiofonici si raggiungono 100.000 persone e tramite un annuncio su una pagina di giornale 15.000 persone. L'agenzia deve raggiungere almeno 3 milioni di persone minimizzando i costi della campagna.
In questo caso è sufficiente introdurre due variabili decisionali x_1 e x_2 che rappresentano il numeri di minuti e il numero di pagine di giornale utilizzati nella campagna, andando a minimizzare la funzione

$$f = (100 - 2x_1) \cdot x_1 + 200x_2$$

rispettando i vincoli seguenti:

$$\begin{aligned}
100x_1 + 15x_2 &\geq 3000 \\
200x_2 &\geq \frac{1}{3} \cdot ((100 - x_1) \cdot x_1 + 200x_2) \\
0 \leq x_1 &\leq 30, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

In cui appare evidente che non si tratta di un problema di programmazione lineare.

4.6 Radioterapia

La radioterapia prevede l'utilizzo di un raggio esterno per far passare le radiazioni ionizzanti attraverso il corpo del paziente, danneggiando sia i tessuti cancerosi che quelli sani.
Normalmente, diversi fasci vengono amministrati con precisione da diverse angolazioni in un piano

bidimensionale. A causa dell'attenuazione, ogni raggio fornisce più radiazioni al tessuto vicino al punto di ingresso rispetto al tessuto vicino al punto di uscita. La dispersione causa anche una certa quantità di radiazione al tessuto al di fuori del percorso diretto del raggio.
Poiché le cellule tumorali sono tipicamente microscopicamente intervallate tra cellule sane, il dosaggio di radiazioni in tutto la regione del tumore deve essere abbastanza grande da uccidere le cellule maligne, che sono leggermente più radiosensibili, ma abbastanza piccolo da risparmiare le cellule sane.
Allo stesso tempo, la dose che colpisce i tessuti critici non deve superare i livelli di tolleranza stabiliti, al fine di prevenire complicazioni che possono essere più gravi della malattia stessa. Per la stessa ragione, la dose totale all'intera parte sana deve essere ridotta al minimo.
L'obiettivo del progetto è selezionare la combinazione di raggi da utilizzare, e l'intensità di ciascuno, per generare la migliore distribuzione possibile della dose. (L'intensità della dose in qualsiasi punto del corpo viene misurata in unità chiamate Kilorad.)
Pertanto si ha la seguente schematizzazione

Area	Raggio 1	Raggio 2	Restrizioni (Kilorad)
Anatomia sana	0.4	0.5	minimizzare
Tessuti critici	0.3	0.1	≤ 2.7
Regione tumorale	0.5	0.5	$= 6.0$
Nucleo del tumore	0.6	0.4	≥ 0.6

Le due variabili decisionali x_1 e x_2 rappresentano la dose (in Kilorad) al punto di ingresso per il Raggio 1 e il Raggio 2, rispettivamente, per cui la funzione f da minimizzare è

$$f = 0.4x_1 + 0.5x_2$$

con i vincoli che

$$\begin{aligned} 0.3x_1 + 0.1x_2 &\leq 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 &= 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 &\geq 0.6 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

10 Ottobre 2022

5 Programmazione Lineare

Di seguito si espone la definizione di **problema di programmazione lineare**:

PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Un problema di programmazione lineare (LP) è un problema di ottimizzazione del tipo

$$z = \max\{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\} \quad \text{oppure} \quad z = \min\{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

in cui

- la funzione obiettivo
$$c(x) : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$$
è **lineare**, in cui
  - $c(0) = 0$
  - $c(\alpha x + \beta y) = \alpha c(x) + \beta c(y)$

  Ciò comporta che $c(x) = cx$ sia un vettore in $\mathbb{R}^n$.
- L'insieme X delle soluzioni ammissibili è definito tramite dei vincoli lineare come, ad esempio $h(x) = \gamma$, oppure $h(x) \leq \gamma$, oppure $h(x) \geq \gamma$ in cui
$$h(x) : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$$
è una funzione lineare, mentre γ è uno scalare in $\mathbb{R}$.

Esempio: Un problema di programmazione lineare può essere formulato in forma sintetica:

$$\begin{aligned} \max c^t x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

in cui c^t indica la trasposta del vettore della funzione obiettivo, in modo tale da disporre di un prodotto righe per colonne. Altrimenti, in modo più esteso si ha

$$\begin{aligned} \max z = & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \\ & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \leq b_1 \\ & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \leq b_2 \\ \cdots & \qquad\qquad \cdots \\ & a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \leq b_m \\ & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

in cui

- m è il numero di righe della matrice A;
- n è la dimensione del vettore x e il numero di colonne della matrice A;
- c è il vettore della funzione obiettivo;
- A è la cosiddetta "matrice tecnica o tecnologica";
- b è il vettore dei termini noti (generalmente ≥ 0 nella forma standard);
- x è il vettore delle variabili decisionali;

- $X = \{x \ : \ Ax \leq b, \ x \geq 0\}$ è l'insieme delle soluzioni ammissibili (detto anche **regione ammissibile**).

5.1 Proprietà della programmazione lineare

Di seguito si espongono le quattro principali proprietà che devono essere soddisfatte in programmazione lineare:

5.1.1 Proporzionalità

La funzione obiettivo e tutti i vincoli devono essere lineari rispetto ad ogni variabile decisionale; in altre parole, la misura dell'efficacia e l'uso delle risorse deve essere proporzionale al livello di ogni attività portata a termine individualmente.
Pertanto, se $x_j \neq 0$ e $x_1 = x_2 = \cdots = x_{j-1}, x_{j+1} = \cdots = x_{n-1} = x_n = 0$, deve essere necessariamente che $X = c_j \cdot x_k$ e $a_{i,j} \cdot x_j \leq b_i, \forall i, \forall j$.
Per tale ragione, le proprietà seguenti devono essere sempre soddisfatte:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_j} = c_j, \forall j \quad \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \geq a_{i,j}, \forall j$$

ovverosia, la misura marginale dell'efficacia e l'uso marginale di ciascuna risorsa risorsa deve essere costante rispetto all'intero range di variazione dei livelli di ciascuna attività.

Osservazione: Un caso in cui non è possibile applicare la programmazione lineare è quando si ha una spesa fissa. Ciò accade quando vi è una spesa di preparazione, oppure una spesa di configurazione associata all'attività di interesse.
In questo modo, se x è il livello di una certa attività e la funzione obiettivo è

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ K + cx & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Allora in questo caso la proprietà di proporzionalità viene violata. Infatti, la funzione $f(x)$ non è continua per $K \neq 0$, e quindi nemmeno derivabile.

5.1.2 Additività

Non ci deve essere interazione diretta tra le diverse attività; in altre parole, la misura totale dell'efficacia, derivante dall'unione (somma logica) dei risultati delle diverse attività, deve essere uguale alla somma delle quantità risultanti da ciascuna attività portata a termine individualmente.
In pratica, se $c_1x_1, c_2x_2, \ldots, c_nx_n$ è la misura dell'efficacia per le attività $1, 2, \ldots, n$ condotte individualmente, deve essere che

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

dove Z è la misura totale dell'efficacia. Similmente dovrà essere per l'uso totale delle risorse, definito tramite vincoli non dissimili dalla funzione obiettivo, se non per l'uso di operatori di disuguaglianza.

5.1.3 Divisibilità (o continuità)

I valori x_j delle variabili decisionali sono numeri reali, ovvero $x \in \mathbb{R}^n$.
Da notare, inoltre, che ciò non sempre assume significato nei problemi di programmazione lineare, in quanto, molto spesso, si dovrà operare con variabili decisionali che assumono valori interi.
Tuttavia, in questo caso, se la ragione ammissibile non è vuota, è sempre possibile individuare un vettore x che rispetta i vincoli, anche se esso non è intero. Vero è che vengono sempre esclusi i casi in cui le variabili decisionali sono complesse.

5.1.4 Certezza

Tutti i coefficienti del problema sono numeri reali noti a priori. Non vi è nulla di stocastico o di casuale.

5.2 Possibili esiti di un problema di programmazione lineare

Dato un problema di programmazione lineare, in vui

$$\max\{cx : x \in X\}$$
$$X = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

Vi possono essere due ramificazioni:

1. Non esiste una regione ammissibile: $X = \varnothing$
2. Esiste una regione ammissibile: $X \neq \varnothing$
   (a) Non esiste una soluzione ottimale
   (b) Esiste una soluzione ottimale
      i. Esiste una sola soluzione ottimale
      ii. Esistono infinite soluzioni ottimali

Esempio 1: La funzione

$$\max z = c_1x_1 + c_2^2x_2 + c_3x_3$$

è una funzione lineare che non viola la proporzionalità.

Esempio 2: Tutti i coefficienti sono costanti reali noti a priori.

Esempio 3: Un esempio in cui le soluzione ottime sono infinite è quando voglio ottenere il minimo di una delle variabili decisionali: da $(0,0)$ a $(0,5)$ sono soluzioni ottime.

Esempio 4: Una soluzione ottima unica è il minimo di $x_1 + x_2$, che produce l'origine.

Esempio 5: Un esempio in cui ci sono infinite soluzioni ottime è quando **la funzione obiettivo è parallela ad uno dei vincoli**.

5.3 Iperpiano

Di seguito si espone la definizione di **iperpiano**, **poliedro** e **politopo**:

IPERPIANO

Si chiama **iperpiano** l'insieme

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x = b\}$$

dove $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$.
Le regioni $X^- = \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x \leq b\}$ and $X^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a^t x \geq b\}$ prendono il nome di **semi-spazi** delimitati dall'iperpiano di supporto.

POLIEDRO

Si chiama **poliedro (convesso)** l'intersezione di un numero finito di semi-spazi e iperpiani.

POLITOPO

Si chiama **politopo** un poliedro **limitato** P, ossia tale per cui esiste una costante $M > 0$ tale che

$$||x|| \leq M, \ \ \forall x \in P$$

Lemma 5.1 *La regione ammissibile di un problema di programmazione lineare è un* ***poliedro convesso****.*

5.4 La soluzione ottimale su un vertice

Posto che **i punti estremi di un poliedro convesso sono chiamati vertici**, si espone di seguito un fondamentale teorema:

SOLUZIONE OTTIMALE SU UN VERTICE

Dato un problema di programmazione lineare, così formulato

$$\max cx$$

$$Ax = b (b \geq 0)$$

$$x \geq 0$$

in cui $X \neq \varnothing$ e presenta un numero finito di soluzioni ottimali, allora esiste un vertice di X che è soluzione ottimale.

Osservazione: La dimostrazione di ciò, ovviamente, si basa sul fatto che X è un poliedro convesso. Pertanto, dato un problema di programmazione lineare che presenta una soluzione ottimale e finita, poiché ne esiste certamente una su un vertice, si può pensare di limitare la ricerca della soluzione ottima all'insieme dei vertici.
Si pone quindi il problema di come identificare (potenzialmente tutti) i vertici a partire da una rappresentazione del poliedro delle soluzioni ammissibili:

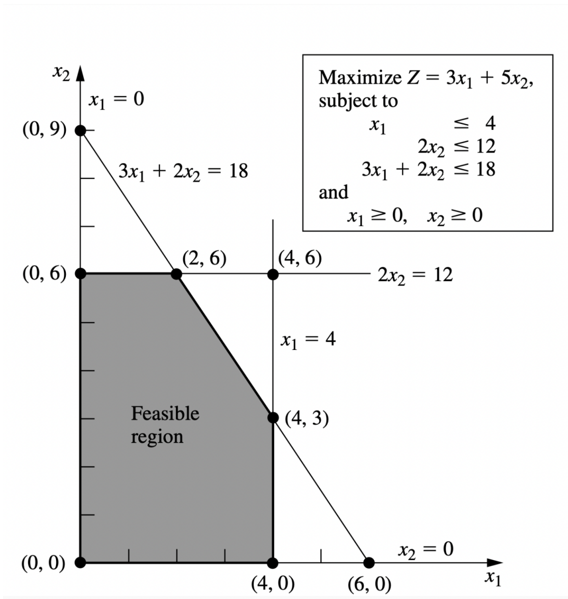


Figura 1: Frontiera di un vincolo & Soluzioni di vertice

13 Ottobre 2022

6 Algoritmo del simplesso

Nell'algoritmo del simplesso si forniscono le seguenti definizioni:

- la **frontiera** di un vincolo è una linea che forma il confine di ciò che è permesso dal vincolo corrispondente.
- i punti di intersezione sono le **soluzioni di vertice** del problema. Le cinque che si trovano agli angoli della regione ammissibile della Figura 1 - (0, 0), (0, 6), (2, 6), (4, 3) e (4, 0) - sono le **soluzioni ammissibile di vertici** (**soluzioni CPF**).
  Le altre tre - (0, 9), (4, 6) e (6, 0) - sono chiamate soluzioni non ammissibili in un angolo.

Nell'esempio di Figura 1, ogni soluzione di vertice si trova all'intersezione della frontiera di 2 vincoli. Per un problema di programmazione lineare con n variabili decisionali, ciascuna delle sue soluzioni di vertice si trova all'intersezione di n frontiere di vincolo.

6.1 Soluzioni adiacenti

Alcune coppie di soluzioni CPF condividono un confine di vincolo, mentre altre coppie non lo condividono. Sarà importante distinguere tra questi casi utilizzando la seguente definizione generale:

SOLUZIONI ADIACENTI

Per qualsiasi problema di programmazione lineare con n variabili decisionali, due **soluzioni CPF sono adiacenti** se condividono $n-1$ vincoli.
Le due soluzioni CPF adiacenti sono collegate da un segmento di linea che giace su queste stesse frontiere di vincolo condivise. Tale segmento di linea viene definito **bordo (spigolo)** della regione ammissibile.

Posto nell'esempio $n = 2$, due delle sue soluzioni CPF sono adiacenti se condividono un confine di vincolo; ad esempio, (0, 0) e (0, 6) sono adiacenti perché condividono il confine di vincolo $x_1 = 0$, com'è facile vedere dall'immagine:

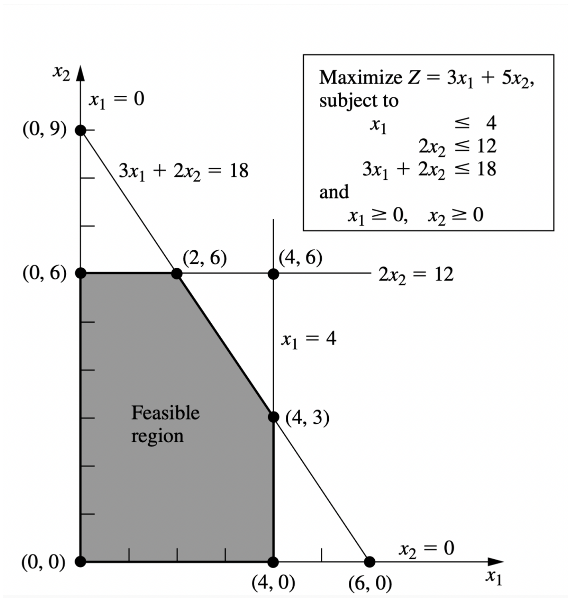


Figura 2: Frontiera di un vincolo & Soluzioni di vertice

La regione ammissibile ha cinque spigoli, costituiti dai cinque segmenti di linea che formano il confine di tale regione. Si noti che da ogni soluzione CPF partono due spigoli. Pertanto, ogni soluzione CPF ha due soluzioni CPF adiacenti (ognuna delle quali si trova all'altra estremità di uno dei due spigoli), come elencato nella Tabella 1:

Soluzione CPF	Soluzioni CPF adiacenti
(0,0)	(0,6) e (4,0)
(0,6)	(0,0) e (2,6)
(2,6)	(4,3) e (0,6)
(4,3)	(4,0) e (2,6)
(4,0)	(0,0) e (4,3)

Tabella 1: Soluzioni CPF adiacenti

6.2 La soluzione ottima in un vertice

Come esposto in precedenza, valgono le seguenti proprietà:

SOLUZIONE OTTIMA IN UN VERTICE

1. Se esiste esattamente una soluzione ottima, allora deve essere una soluzione CPF.
2. Se esistono più soluzioni ottime (e una regione ammissibile delimitata), almeno due devono essere soluzioni CPF adiacenti.

Dimostrazione 1: Per assurdo, si assuma che esista esattamente una soluzione ottima e che non sia una soluzione CPF. Dal momento che, secondo la definizione, una soluzione CPF è una soluzione ammissibile che non si trova su nessun segmento di linea che collega altre due soluzioni ammissibili, dal momento che si è assunto che la soluzione ottima x^* non è una soluzione CPF, ciò implica che devono esistere altre due soluzioni ammissibili tali che il segmento di retta che le unisce contenga la soluzione ottima.
I vettori x' e x'' denotano tali altre due soluzioni ammissibili e Z_1 e Z_2 i rispettivi valori della funzione obiettivo. Come ogni altro punto del segmento di retta che collega x' e x''

$$x^* = \alpha x'' + (1 - \alpha)x'$$

per un valore di α tale che $0 < \alpha < 1$. Pertanto

$$Z^* = \alpha \cdot Z_2 + (1 - \alpha) \cdot Z_1$$

Poiché i pesi α e $1 - \alpha$ sommano a 1, le uniche possibilità di confronto tra Z^*, Z_1 e Z_2 sono

1. $Z^* = Z_1 = Z_2$
2. $Z_1 < Z^* < Z_2$
3. $Z_1 > Z^* > Z_2$

La prima possibilità implica che anche x' e x'' siano ottimali, il che contraddice l'ipotesi che esista esattamente una soluzione ottimale. Entrambe le ultime possibilità contraddicono l'ipotesi che x^* (che non è una soluzione CPF) sia ottimale. La conclusione che ne deriva è che è impossibile avere un'unica soluzione ottimale che non sia una soluzione CPF.

Dimostrazione 2: Ciò che accade quando si risolve graficamente è che la linea della funzione obiettivo continua ad alzarsi finché non contiene il segmento di linea che collega le due soluzioni CPF.

La stessa cosa accadrebbe in dimensioni superiori, tranne per il fatto che un iperpiano della funzione obiettivo continuerebbe a essere innalzato fino a contenere il segmento o i segmenti di linea che collegano due (o più) soluzioni CPF adiacenti.
Di conseguenza, tutte le soluzioni ottimali possono essere ottenute come medie ponderate di soluzioni CPF ottimali.

6.3 Numero finito di soluzioni CPF

Di seguito si espone la proprietà di **finitezza del numero di soluzioni CPF**:

FINITEZZA DI SOLUZIONI CPF

C'è solo un numero finito di soluzioni CPF.

Ogni soluzione CPF è la soluzione simultanea di un sistema di n delle $m+n$ equazioni vincolate. Il numero di combinazioni diverse di $m+n$ equazioni prese n alla volta è

$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$$

che è un numero finito.
Un'enumerazione esaustiva potrebbe non essere possibile: un problema di programmazione lineare piuttosto piccolo con solo $m = 50$ e $n = 50$ avrebbe

$$\frac{100!}{(50!) \cdot 2} \cong 10^{29}$$

sistemi di equazioni da risolvere!
Al contrario, il metodo del simplesso (esposto di seguito) dovrebbe esaminare solo circa 100 soluzioni CPF per un problema di queste dimensioni.

6.4 La regione ammissibile è convessa

Di seguito si espone la proprietà di **convessità della regione ammissibile**:

CONVESSITÀ DELLA REGIONE AMMISSIBILE

Se una soluzione CPF non ha soluzioni CPF adiacenti migliori (misurate da Z), allora non esistono soluzioni CPF migliori per la funzione obiettivo: la migliore è quella considerata in principio.
Pertanto, tale soluzione CPF è garantita come soluzione ottimale (dalla proprietà § 6.2), assumendo solo che il problema possieda almeno una soluzione ottimale (garantita se il problema possiede soluzioni ammissibile e una regione ammissibile limitata).

6.5 Test di ottimalità

Di seguito si espone il funzionamento del **test di ottimalità**:

TEST DI OTTIMALITÀ

Dato un qualsiasi problema di programmazione lineare che possieda almeno una soluzione ottimale. Se una soluzione CPF non ha soluzioni CPF adiacenti migliori (misurate da Z), allora deve essere una soluzione ottimale.

Osservazione: Quindi, ancora una volta, dato l'esempio seguente

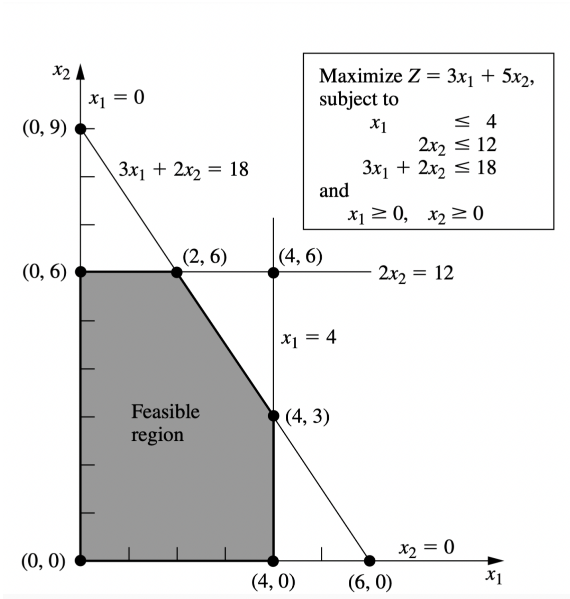


Figura 3: Frontiera di un vincolo & Soluzioni di vertice

Il vertice $(2, 6)$ deve essere ottimale semplicemente perché il suo corrispondente valore per la funzione obiettivo è $Z = 36$ che, ovviamente, è maggiore di $Z = 30$ per $(0, 6)$ e di $Z = 27$ per $(4, 3)$. Questo test di ottimalità è quello utilizzato dal metodo del simplesso per determinare quando è stata raggiunta una soluzione ottimale.

6.6 Algoritmo del simplesso

Di seguito si espongono i passi dell'**algoritmo del simplesso**, specificatamente nell'esempio preso in considerazione fino a questo momento:

- **Inizializzazione**: Si sceglie $(0, 0)$ come soluzione CPF iniziale da esaminare. Ovviamente $(0, 0)$ è una scelta conveniente perché non sono necessari calcoli per identificare tale soluzione CPF.
- **Test di ottimalità**: Si conclude che $(0, 0)$ non è una soluzione ottimale, in quanto le soluzioni CPF adiacenti $(4, 0)$ e $(0, 6)$ sono migliori: per la prima $Z = 12$, per la seconda $Z = 30$.
- **Iterazione 1**: Si consideri la soluzione CPF adiacente migliore che, in questo caso, è proprio $(0, 6)$. Per farlo, si eseguono le tre fasi seguenti:
  - Considerando i due bordi della regione ammissibile che partono da $(0, 0)$, ci si sposta lungo il bordo che conduce all'asse x_2.
    Questo perché, con una funzione obiettivo pari a $Z = 3x_1 + 5x_2$, l'aumento marginale di Z è maggiore per x_2 rispetto ad uno spostamento lungo l'asse x_1.
  - Fermarsi al primo nuovo limite di vincolo, dato da $2x_2 = 12$. Infatti, spostandosi oltre nella direzione selezionata nel passo precedente, si esce dalla regione ammissibile; nell'esempio considerato, spostandosi lungo x_2, ma fermandosi al secondo nuovo limite di vincolo, si ottiene $(0, 9)$, che è una soluzione non ammissibile in un vertice.
  - Risolvendo l'intersezione del nuovo insieme di vincoli: $x_1 = 0$ e $2x_2 = 12$ si ottiene immediatamente la soluzione $(0, 6)$.
- **Test di ottimalità**: Ancora una volta si conclude che $(0, 6)$ non è una soluzione ottimale, in quanto la soluzioni CPF adiacente $(2, 6)$ non ancora analizzata (in quanto $(0, 0)$ era la soluzione CPF di partenza) è migliore, in quanto $Z = 36$.

- **Iterazione 2**: Si consideri la soluzione CPF adiacente migliore che, ossia $(2,6)$. Per farlo, si eseguono le tre fasi seguenti:
  - Considerando i due bordi della regione ammissibile che partono da $(0,6)$, si sceglie di spostarsi lungo il bordo che porta a destra, in quanto lo spostamento lungo tale bordo aumenta Z, mentre l'indietreggiare lungo l'asse x_2 diminuisce Z.
  - Ci si arresta al primo nuovo limite di vincolo incontrato muovendosi in quella direzione: $3x_1 + 2x_2 = 18$. Infatti, spostandosi ulteriormente nella direzione selezionata al passo precedente, si esce dalla regione ammissibile.
  - Risolvendo l'intersezione del nuovo insieme di vincoli: $3x_1 + 2x_2 = 18$ e $2x_2 = 12$ si ottiene immediatamente la soluzione $(2,6)$.
- **Test di ottimalità**: Infine si conclude che $(2,6)$ è la soluzione ottimale, in quanto nessuna delle soluzioni CPF adiacenti (ossia $(0,6)$ e $(4,3)$) è migliore: per la prima $Z = 30$, per la seconda $Z = 27$.

6.7 Relazione tra soluzioni ottimali e CPF

Di seguito si espone la **relazione tra soluzioni ottimali e CPF**:

RELAZIONE TRA SOLUZIONI OTTIMALI E CPF

Il metodo del simplesso si concentra esclusivamente sulle soluzioni CPF. Per qualsiasi problema che abbia almeno una soluzione ottimale, per trovarla è sufficiente trovare la migliore soluzione CPF.

Osservazione: Poiché il numero di soluzioni fattibili è generalmente infinito, la riduzione del numero di soluzioni da esaminare a un piccolo numero finito (solo tre nell'esempio considerato) rappresenta un'enorme semplificazione.

6.8 Flusso del metodo del simplesso

Il metodo del simplesso è un algoritmo iterativo con la seguente struttura:

- Configurare l'algoritmo andando a determinare una prima soluzione CPF ammissibile;
- Se la soluzione CPF è ottimale, ci si arresta. Altrimenti si prosegue con un'ulteriore iterazioni fino a trovare una migliore soluzione CPF.

Per la risoluzione dell'esempio risolto, tale diagramma di flusso è stato seguito attraverso due iterazioni fino a trovare una soluzione ottimale.

6.9 Inizializzazione dell'algoritmo del simplesso

Di seguito si espone il concetto chiave di **inizializzazione dell'algoritmo del simplesso**:

INIZIALIZZAZIONE DELL'ALGORITMO DEL SIMPLESSO

Quando possibile, per l'inizializzazione dell'algoritmo del simplesso, si sceglie l'origine $(0,0)$, ponendo tutte le variabili decisionali pari a 0 come soluzione CPF iniziale.
Infatti, quando le variabili decisionali sono troppe per trovare una soluzione CPF iniziale graficamente, tale scelta elimina la necessità di utilizzare procedure algebriche per trovare e risolvere una prima soluzione CPF.

Osservazione: La scelta dell'origine è comunemente possibile quando tutte le variabili decisionali hanno vincoli di non negatività, perché l'intersezione dei confini di questi vincoli produce l'origine

come soluzione angolare: tale soluzione è quindi una soluzione CPF, a meno che non sia inaffrontabile perché viola uno o più vincoli.
Se non è ammissibile, sono necessarie procedure speciali per trovare la soluzione CPF iniziale: in particolare, nel caso in cui $(0, 0)$ non sia una soluzione ammissibile, si creerà un problema alternativo, forzando $(0, 0)$ come vertice ammissibile iniziale, tramite l'individuazione di variabili artificiali.

6.10 Scelta di una soluzione CPF migliore ad ogni iterazione

Di seguito si espone la logica alla base della **scelta di una soluzione CPF migliore ad ogni iterazione**:

SCELTA DEL MIGLIORE VERTICE CPF AD OGNI ITERAZIONE

Data una soluzione CPF, è molto più veloce, dal punto di vista computazionale, raccogliere informazioni sulle **soluzioni CPF adiacenti** che sulle altre soluzioni CPF.
Pertanto, ogni volta che l'algoritmo del simplesso esegue un'iterazione per passare dalla soluzione CPF corrente ad una migliore, si sceglie **sempre** una **soluzione CPF adiacente** a quella corrente, escludendo altre soluzioni CPF; di conseguenza, l'intero percorso seguito per raggiungere una soluzione ottimale è **lungo i bordi della regione ammissibile**.
Dopo aver identificato la soluzione CPF corrente, l'algoritmo del simplesso esamina ciascuno degli spigoli della regione ammissibile che si diramano da questa soluzione CPF e identifica il tasso di miglioramento per Z che si otterrebbe spostandosi lungo tale spigolo. Tra gli spigoli con un tasso di miglioramento positivo per Z, si sceglie quindi di spostarsi lungo quello con il tasso di miglioramento maggiore per Z.
L'iterazione viene, dunque, completata risolvendo prima la soluzione CPF adiacente all'altra estremità di questo spigolo e poi considerando tale nuova soluzione CPF adiacente come soluzione CPF corrente per il test di ottimalità e (se necessario) per l'iterazione successiva.

Osservazione: Riprendendo in considerazione l'esempio di partenza:

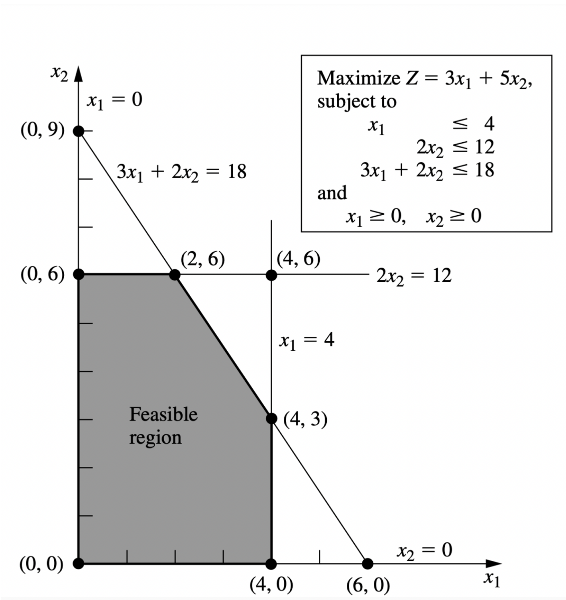


Figura 4: Frontiera di un vincolo & Soluzioni di vertice

Osservazione 1: Nella prima iterazione, spostandosi da $(0, 0)$ lungo il bordo sull'asse x_1 si otterrebbe un tasso di miglioramento di Z pari a 3, in quanto

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = 3$$

per cui Z aumenta di 3 per ogni aumento unitario di x_1, mentre spostandosi lungo il bordo sull'asse x_2 si otterrebbe un tasso di miglioramento di Z pari a 5, in quanto

$$\frac{\partial Z}{\partial x_2} = 5$$

per cui Z aumenta di 5 per ogni aumento unitario di x_2; da tale evidenza è facile decidere di spostarsi lungo quest'ultimo bordo.
Alla seconda iterazione, invece, l'unico bordo che si dirama da $(0, 6)$ e che produce un tasso di miglioramento positivo in Z è il bordo che porta a $(2, 6)$, per cui si decide di spostarsi lungo tale bordo.

Osservazione 2: Tuttavia, non è sempre garantito a priori che sia una buona strada quella di spostarsi lungo il bordo con il maggior tasso di miglioramento per Z.
Pertanto, in generale, tutte le scelte sono arbitrarie ed ugualmente valide, dal punto di vista della correttezza, ma non dell'efficienza.

6.11 Eseguire il test di ottimalità efficacemente

Di seguito si espone il metodo con cui eseguire il **test di ottimalità efficacemente**:

TEST DI OTTIMALITÀ EFFICACE

Un tasso di miglioramento positivo per la funzione obiettivo Z implica che la soluzione CPF adiacente sia migliore della soluzione CPF corrente, mentre un tasso di miglioramento negativo in Z implica che la soluzione CPF adiacente sia peggiore.
Pertanto, il test di ottimalità consiste semplicemente nel verificare se uno qualsiasi degli spigoli produce un tasso di miglioramento positivo per Z. Se nessuno di essi lo dà, allora la soluzione CPF attuale è ottimale.

Osservazione 1: Nell'esempio considerato, infatti, spostandosi lungo uno dei due bordi che si diramano da $(2, 6)$, il valore della funzione obiettivo Z diminuisce. Poiché le richieste del problema prevedono di massimizzare Z, questo fatto porta immediatamente alla conclusione che $(2, 6)$ è ottimale.

Osservazione 2: Il vertice CPF $(2, 6)$ è il punto di intersezione tra $2x_2 = 12$ (cioè $x_2 = 6$) e $3x_1 + 2x_2 = 18$; quest'ultimo vincolo può anche essere scritto come

$$x_1 = 6 - \frac{2}{3}x_2$$

Quindi, quando $Z = 3x_1 + 5x_2$ si muove lungo tale vincolo, si ha che

$$Z = 3 \cdot \left(6 - \frac{2}{3}\right) x_2 + 5x_2 \quad \rightarrow \quad Z = 18 + 3x_2$$

Se $x_2 = 6$, pertanto, si ottiene che $Z = 36$. Quindi, se $x_2 < 6$, Z diminuisce e quindi non è un'opzione praticabile. Poiché anche spostarsi lungo $x_2 = 6$ non consente di aumentare Z, ne consegue che (2, 6) è la soluzione ottimale.
Analogamente, se si considera

$$x_2 = 9 - \frac{3}{2}x_1 \quad \text{allora} \quad Z = 45 - \frac{9}{2}x_1$$

per cui in $x_1 = 2$, $Z = 36$ e tale valore diminuisce finché x_1 aumenta.

Esercizio: Un ragionamento analogo può essere eseguito ponendo come funzione obiettivo $Z = 3x_1 + x_2$. In questo caso si osserverà che (2, 6) non è ottimale.

14 Ottobre 2022

È noto che la soluzione ottima si trova sempre su un vertice. Secondo l'algoritmo del simplesso, in particolare, partendo da un vertice della regione ammissibile, ci si sposta verso un vertice adiacente, senza analizzare tutti i vertici ammissibili, necessariamente, in modo tale da massimizzare la funzione obiettivo. Per la convessità della regione ammissibile, ogni qualvolta ci si sposta da un vertice ad un altro adiacente, e il valore della funzione obiettivo non migliora, allora la soluzione CPF considerata in principio è quella ottimale.

6.12 Forma standard e soluzioni di base

Un qualunque problema di programmazione lineare può sempre essere espresso in **forma standard**, come segue

$$\begin{aligned} \max z &= cx \\ Ax &= b (b \geq 0) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Pertanto, dato un problema formulato come sopra, posto il $rg(A) = m$, ossia il numero di colonne linearmente indipendenti della matrice A è m. Giacché $m < n$, eventualmente riordinando le colonne, si può porre

$$A = [B|N]$$

in cui

- B è una matrice quadrata non singolare $m \times m$ detta **matrice delle colonne in base**;
- N è una matrice $m \times (n-m)$ detta **matrice delle colonne fuori base**;

La matrice B è composta da m colonne di A linearmente indipendenti che formano una base nello spazio vettoriale ad m dimensioni delle colonne di A.
In corrispondenza di una scelta di B ed N si può partizionare anche il vettore delle x, ottenendo

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ \\ x_N \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{con } m \text{ componenti} \\ \\ \text{con } m-n \text{ componenti} \end{array}$$

in cui

- x_B è detto **vettore delle variabili in base** (**vettore di base**);
- x_N è detto **vettore delle variabili fuori base**.

Il sistema di equazioni lineari $Ax = b$ si può riscrivere come

$$[B|N] \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ \\ x_N \end{bmatrix} = b \quad \rightarrow \quad Bx_B + Nx_N = b$$

Moltiplicando per l'inversa della matrice delle colonne in base B, si ottiene

$$\boxed{x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N}$$

Per ogni base B ogni soluzione del sistema $Ax = b$ corrisponde a determinare il valore per m variabili x_B avendo fissato arbitrariamente il valore per le restanti $n - m$ variabili x_N.
Una scelta particolarmente importante è porre $x_N = 0$, da cui si ottiene la corrispondente soluzione di base

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

per cui se $B^{-1}b \geq 0$ si ottiene una soluzione di base ammissibile (BFS) per il sistema

$$Ax = b, \quad x \geq 0$$

6.13 Vertici e BFS

Si espone di seguito un importante considerazione in merito alla relazione tra **vertici e BFS**:

VERTICI E BFS

Dato il problema $Ax = b, x \geq 0$, una soluzione x è un vertice del poliedro $P(A, b)$ **se e solo se** x è una BFS.
Questo perché un punto di un poliedro è un vertice (punto estremo) se e solo se soddisfa all'uguaglianza n vincoli linearmente indipendenti, quindi basta dimostrare che ogni BFS soddisfa n vincoli linearmente indipendenti tra $Ax = b, x \geq 0$.
Per definizione ogni BFS soddisfa all'uguaglianza $(n - m)$ vincoli $x \geq 0$ e gli m vincoli di $Ax = b$. I vincoli stringenti sono linearmente indipendenti poiché la matrice dei loro coefficienti è certamente non singolare essendo della forma

$$\begin{pmatrix} B & N \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

Esempio: Si consideri il seguente problema, così formulato:

$$\begin{aligned} \max z = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Tale sistema non è in forma standard, ma espresso solo in termini delle variabili strutturali (cioè quelle che hanno un immediata corrispondenza fisica col sistema reale che viene modellato).
Per manipolarlo opportunamente, lo si trasforma in forma standard introducendo le **variabili di slack** x_3, x_4, x_5, ottenendo

$$\begin{aligned} \max z = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

in cui è essenziale capire che le variabili di slack sono sempre **non negative**, per dei vincoli di $\leq$. È fondamentale ciò, perché se fossero negative, significherebbe, nel caso della prima diseguaglianza, per esempio, che $x_1 + x_2 \geq 5$, che contraddice il vincolo di partenza.
Per ogni vincolo $\leq$, pertanto, si deve introdurre una variabile di slack non negativa. Ecco che ora si è trasformato il problema in forma standard, per cui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Per individuare i vertici, avendo $n = 5$ variabili e $m = 3$ vincoli, si pongono a 0 due variabili (le cosiddette **variabili fuori base**) in tutti i modi possibili, ottenendo un sistema di equazioni con $m = 3$ equazioni e 3 incognite che è risolubile e, non solo, la soluzione è un punto, ossia il vertice cercato.

Esercizio: Si pongano a 0 le variabili x_4, x_5 di slack, considerando

$$x_N = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = 0$$

Ciò porta a dover determinare

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot b$$

Giacché B è la matrice quadrata dei corrispondenti vettori dei coefficienti per x_1, x_2 e x_3, si ottiene, dalla matrice A di partenza

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Per invertire tale matrice, se ne calcola il determinante e la matrice dei cofattori, per cui

$$\det(B) = -1 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = -8 \quad \text{e} \quad \text{cof}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 2 & -6 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

per cui la matrice inversa cercata è

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \text{cof}^t(B) = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

pertanto si può ottenere il vettore x_B come segue

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \frac{1}{\det(B)} \cdot \text{cof}^t(B) = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & -1 \\ -8 & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{8} \\ \frac{21}{8} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Tuttavia, tale soluzione non risulta ammissibile in quanto si è ottenuto vettore con componenti non tutte ≥ 0, come richiesto dai vincoli.

Osservazione: Attenzione che, con questo approccio, si individuano tutti i vertici possibili, pari a

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Tuttavia non è detto che siano tutte ammissibili, in quanto per essere un vertice ammissibile deve soddisfare tutti i vincoli del problema. Non solo, ma è anche possibile che con questo metodo si individui un numero di vertici ammissibile maggiore del numero effettivo dei vertici, in quanto uno stesso vertice può essere intersezione di più di due vincoli.

Per esempio, nel caso di una prima intersezione, denotata con P_1, le variabili poste a 0 sono x_1, x_2 e x_4, per cui le coppie di vincoli che producono come intersezione P_1 sono x_1 e x_2, x_1 e x_4, x_2 e x_4, per un totale di

$$\binom{3}{2} = 3$$

Pertanto, siccome il limite superiore delle possibili basi è

$$\binom{n}{n-m} = \binom{5}{2} = 10$$

non tutte le basi corrispondono ad una soluzione ammissibile BFS, ma solamente 6 sono ammissibili. Siccome i vertici sono 4, vi saranno BFS **degeneri**.

6.14 Variabili di surplus

Se in un problema di programmazione lineare vi sono dei vincoli di $\geq$, per trasformare il problema in forma standard si introducono delle **variabili di surplus** con segno opposto, ad esempio

$$-3x_1 + 2x_2 \geq 5 \quad \rightarrow \quad -3x_1 + 2x_2 - x_6 = 5$$

in modo tale da rispettare il vincolo di ≥ 0 di partenza.

6.15 Funzione obiettivo in forma matriciale

Esplicitando la funzione obiettivo

$$z = cx = [c_B \cdot c_N] \cdot \begin{bmatrix} x_b \\ \\ x_N \end{bmatrix} = c_B x_B + c_N x_N$$

e sostituendo a x_B la forma ottenuta in precedenza, ossia

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

si ottiene

$$z = c_B B^{-1} b - \left(c_B B^{-1} N - c_N\right) \cdot x_N$$

per cui il valore dell'obiettivo corrispondente alla base B è quindi

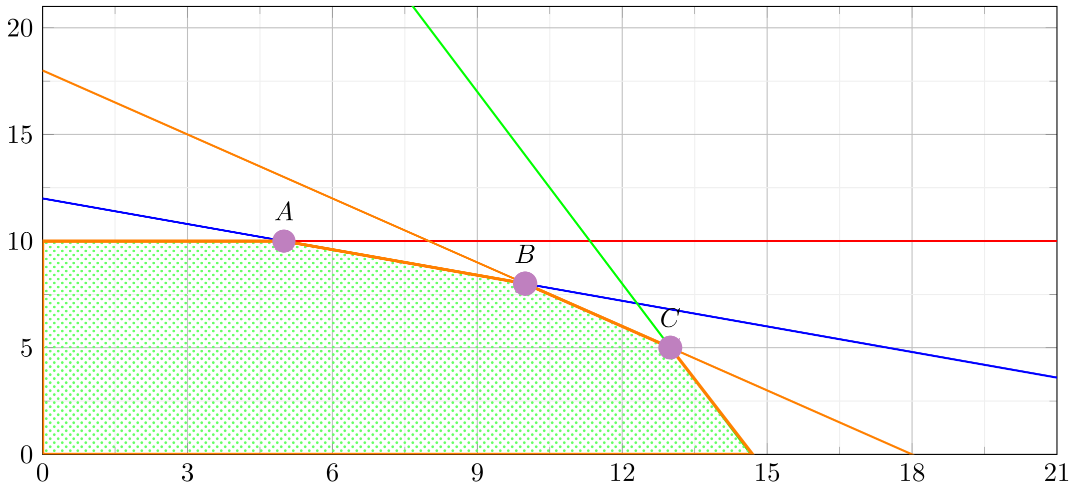
$$\boxed{Z(B) = c_B B^{-1} b}$$

17 Ottobre 2022

Esercizio 1: Si consideri il seguente problema di programmazione lineare, così formalizzato

$$\begin{aligned}&\max z = 2x_1 + x_2\\&x_2 \leq 10\\&2x_1 + 5x_2 \leq 60\\&x_1 + x_2 \leq 18\\&3x_1 + x_2 \leq 44\\&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

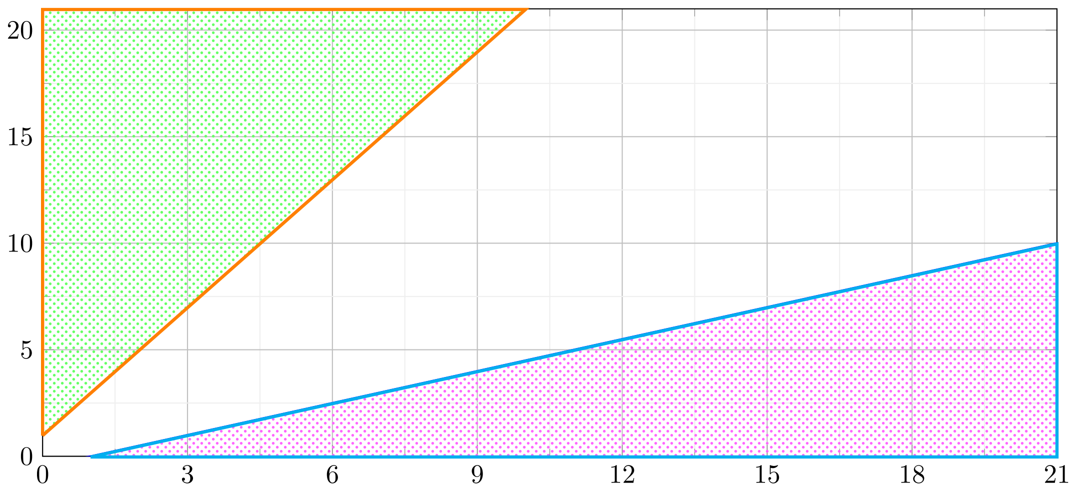
Allora si rappresenti sul diagramma seguente la regione ammissibile, considerando x_1 in ascissa e x_2 in ordinata



Esercizio 3: Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned}&\max z = 5x_1 + 2x_2\\&2x_1 - x_2 \leq -1\\&-x_1 + 2x_2 \leq -1\\&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

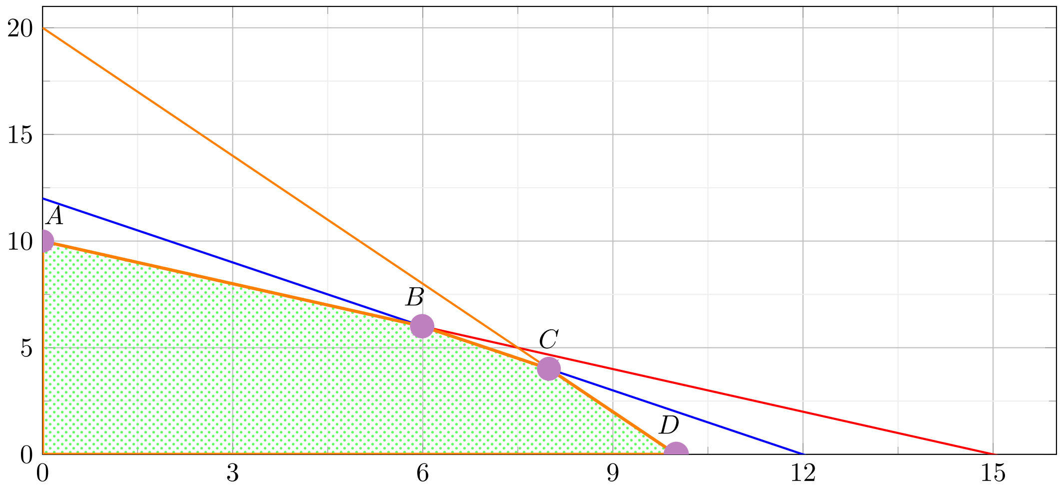
La rappresentazione grafica produce il risultato seguente:



Esercizio 4: Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$
\begin{aligned}
&\min z = 40x_1 + 50x_2\\
&2x_1 + 3x_2 \geq 30\\
&x_1 + x_2 \geq 12\\
&2x_1 + x_2 \geq 20\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

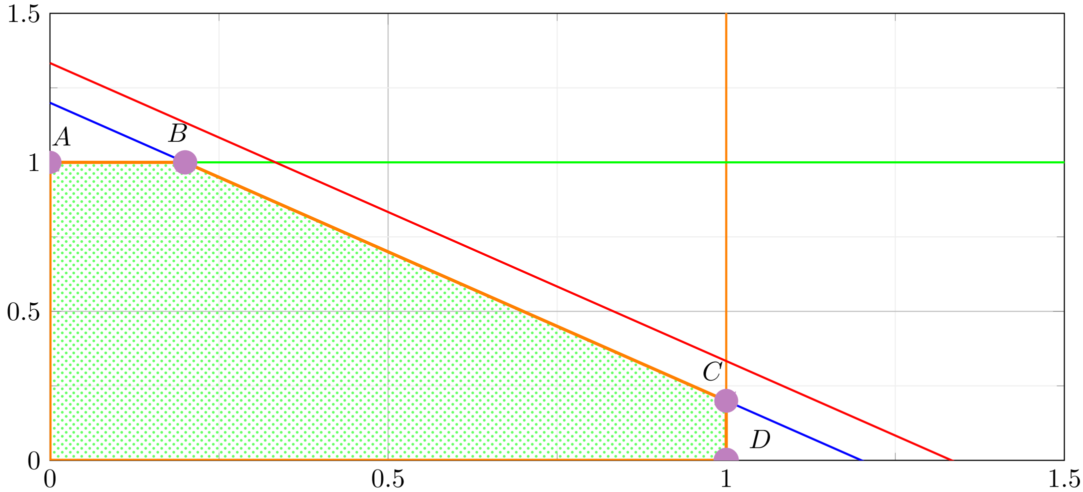
La rappresentazione grafica produce il risultato seguente:



Esercizio 5: Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$
\begin{aligned}
&\max z = 4500x_1 + 4500x_2\\
&x_1 \leq 1\\
&x_2 \geq 1\\
&4500x_1 + 4500x_2 \leq 6000\\
&500x_1 + 500x_2 \leq 600\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

La rappresentazione grafica produce il risultato seguente:



20 Ottobre 2022

6.16 Metodo del simplesso in forma matriciale

L'insieme dei vincoli e della funzione obiettivo possono essere scritti come un sistema lineare rispetto al quale si può supporre di aver individuato una base B ammissibile, ovvero

$$\begin{bmatrix} 1 & -c^T \\ 0 & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -c_B{}^T & -c_N{}^T \\ 0 & B & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

La quasi (manca la prima colonna) matrice estesa di questo sistema, composto dalle righe dei vincoli e dalla riga della funzione obiettivo, è detta **tableau**:

$$\begin{bmatrix} -c^T & 0 \\ A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_B{}^T & -c_N{}^T & 0 \\ B & N & b \end{bmatrix}$$

6.16.1 Tableau iniziale

Il **tableau iniziale**, prima della relativizzazione rispetto alla base B scelta, si presenta come segue

	x_{B_1}	$\dots$	x_{B_r}	$\dots$	x_{B_m}	$\dots$	x_j	$\dots$	x_k	$\dots$	
z	c_{B_1}	$\dots$	c_{B_r}	$\dots$	c_{B_m}	$\dots$	c_j	$\dots$	c_k	$\dots$	0
x_{B_1}	a_{1,B_1}	$\dots$	a_{1,B_r}	$\dots$	a_{1,B_m}	$\dots$	$a_{1,j}$	$\dots$	$a_{1,k}$	$\dots$	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_{B_r}	a_{r,B_1}	$\dots$	a_{r,B_r}	$\dots$	a_{r,B_m}	$\dots$	$a_{r,j}$	$\dots$	$a_{r,k}$	$\dots$	b_r
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_{B_m}	a_{m,B_1}	$\dots$	a_{m,B_r}	$\dots$	a_{m,B_m}	$\dots$	$a_{m,j}$	$\dots$	$a_{m,k}$	$\dots$	b_m

in cui

- le variabili $x_{B_1}, \dots, x_{B_m}$ denotate in rosso chiaro sono le variabili in base B;
- i coefficienti $a_{1,B_1}, \dots, a_{m,B_m}$ denotati in rosso scuro sono i coefficienti delle variabili in base B;
- le variabili $x_j, \dots, x_k$ denotate in blu chiaro sono le variabili fuori base N;
- i coefficienti $a_{1,j}, \dots, a_{m,k}$ denotati in blu scuro sono i coefficienti delle variabili fuori base N;
- i coefficienti $c_{B_1}, \dots, c_{B_m}, \dots, c_j, \dots, c_k$ denotati in verde chiaro sono i coefficienti della funzione obiettivo;
- il valore 0 denotato in verde scuro è il valore della funzione obiettivo, ossia il valore della soluzione corrente;
- i coefficienti $b_1, \dots, b_m$ denotati in arancione chiaro sono i valori delle variabili in base, sempre in funzione della soluzione corrente;

Esempio: Sia dato il problema di programmazione lineare formalizzato come segue:

$$\begin{aligned}
&\max z = 2x_1 + x_2 \\
&x_1 + x_2 \leq 5 \\
&-x_1 + x_2 \leq 0 \\
&6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Tale sistema, ovviamente, **non** è in **forma standard**, ma espresso solo in termini delle variabili strutturali (cioè quelle che hanno un immediata corrispondenza fisica col sistema reale che viene modellato).
Pertanto lo si trasforma in forma standard introducendo le **variabili di slack** x_3, x_4 e x_5, ottenendo

$$\begin{aligned}
&\max z = 2x_1 + x_2 \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\
&-x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\
&6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Pertanto ora è possibile realizzare il **tableau iniziale**:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	-2	-1	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	0	5
x_4	-1	1	0	1	0	0
x_5	6	2	0	0	1	21

Sapendo, però, per ipotesi che le colonne 3,4,1 formano una base iniziale ammissibile, è possibile riordinare le colonne del **tableau iniziale**, ottenendo:

	x_3	x_4	x_1	x_5	x_2	
z	0	0	-2	0	-1	0
x_3	1	0	1	0	0	1
x_4	0	1	-1	0	0	1
x_1	0	0	6	1	1	2

Esplicitando la funzione obiettivo

$$z = cx = [c_B \cdot c_N] \cdot \begin{bmatrix} x_b \\ \\ x_N \end{bmatrix} = c_B x_B + c_N x_N$$

e sostituendo a x_B la forma ottenuta in precedenza, ossia

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

si ottiene

$$z = c_B B^{-1} b - \left(c_B B^{-1} N - c_N\right) \cdot x_N$$

per cui il valore dell'obiettivo corrispondente alla base B è quindi

$$\boxed{Z(B) = c_B B^{-1} b}$$

Le ultime due relazioni esprimono rispettivamente i vincoli e la funzione obiettivo in funzione delle variabili fuori base. Raccogliendo le $m+1$ equazioni (in quanto m sono per x_B e 1 per z) di tali relazioni in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} z \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B \cdot B^{-1} \cdot b \\ B^{-1} \cdot b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_B \cdot B^{-1} \cdot N - c_N \\ B^{-1} \cdot N \end{bmatrix} \cdot x_N$$

per cui il corrispondente tableau risulta essere

$$\begin{bmatrix} 0 & c_B \cdot B^{-1} \cdot N - c_N & c_B \cdot B^{-1} \cdot b \\ I & B^{-1} \cdot N & B^{-1} \cdot b \end{bmatrix}$$

Nell'esempio considerato, per costruire il tableau di lavoro, si deve partire dal tableau iniziale riordinato:

	x_3	x_4	x_1	x_5	x_2	
z	0	0	-2	0	-1	0
x_3	1	0	1	0	0	1
x_4	0	1	-1	0	0	1
x_1	0	0	6	1	1	2

E considerare la base B evidenziata in rosso scuro e calcolare la sua inversa, ovvero

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \mathrm{cof}^T(B) = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Ciò permette facilmente di costruire il nuovo tableau:

	x_3	x_4	x_1	x_5	x_2	
z	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	7
x_3	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
x_4	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{2}$
x_1	0	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{2}$

Al fine di una scrittura più compatta, si ponga $\mathcal{S}$ l'insieme degli indici delle variabili in base (ossia le colonne di B) e $\mathcal{R}$ l'insieme degli indici delle variabili fuori base (ossia le colonne di N), e si definisca

$$y_0 = \begin{bmatrix} c_B B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{0,0} \\ y_{1,0} \\ \vdots \\ y_{m,0} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y_j = \begin{bmatrix} c_B B^{-1} A_{\cdot,j} - c_j \\ B^{-1} A_{\cdot,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{0,j} \\ y_{1,j} \\ \vdots \\ y_{m,j} \end{bmatrix} \quad \forall j \in \mathcal{R}$$

dove $A_{\cdot,j}$ e c_j sono rispettivamente la colonna di N ed il coefficiente di c che moltiplicano la j-ma variabile fuori base.
La componente i-ma della BFS e la funzione obiettivo si possono quindi riscrivere come

$$z = y_{0,0} - \sum_{j \in \mathcal{R}} y_{0,j} \cdot x_j \quad \text{e} \quad x_{B_i} = y_{i,0} - \sum_{j \in \mathcal{R}} y_{i,j} \cdot x_j$$

per cui il nuovo tableau, adattato alla notazione appena introdotta, diviene:

	x_{B_1}	$\dots$	x_{B_r}	$\dots$	x_{B_m}	$\dots$	x_j	$\dots$	x_k	$\dots$	
z	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$\dots$	$y_{0,j}$	$\dots$	$y_{0,k}$	$\dots$	$y_{0,0}$
x_{B_1}	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$\dots$	$y_{1,j}$	$\dots$	$y_{1,k}$	$\dots$	$y_{1,0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_{B_r}	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$\dots$	$y_{r,j}$	$\dots$	$y_{r,k}$	$\dots$	$y_{r,0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$	$y_{m,j}$	$\dots$	$y_{m,k}$	$\dots$	$y_{m,0}$

Nell'esempio considerato, pertanto, la funzione obiettivo può essere descritta come

$$z = y_{0,0} - \sum_{j \in \mathcal{R}} y_{0,j} \cdot x_j = 7 - \frac{1}{3} x_5 + \frac{1}{3} x_2$$

e le variabili in base saranno sempre ottenute come

$$x_{B_i} = y_{i,0} - \sum_{j \in \mathcal{R}} y_{i,j} \cdot x_j$$

che si traduce in

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{6} x_5 - \frac{2}{3} x_2 \\ x_4 &= \frac{7}{2} - \frac{1}{6} x_5 - \frac{4}{3} x_2 \\ x_1 &= \frac{7}{2} - \frac{1}{6} x_5 - \frac{1}{3} x_2 \end{aligned}$$

6.17 Verifica dell'ottimalità della soluzione corrente

L'obiettivo

$$z = y_{0,0} - \sum_{j \in \mathcal{R}} y_{0,j} \cdot x_j$$

data la corrente BFS vale $z(B) = y_{0,0}$.
Se esiste un coefficiente $y_{0,k} < 0$ con $k \in \mathcal{R}$, facendo diventare positiva la variabile fuori base x_k attualmente nulla, l'obiettivo aumenta di valore

$$z = y_{0,0} - y_{0,k} \cdot x_k > y_{0,0} = z(B)$$

allora, compatibilmente col rispetto dei vincoli, conviene aumentare il più possibile il valore della variabile x_k.

6.18 Rispetto dell'ammissibilità

Il vincolo generico associato all'elemento in base i-esimo

$$x_{B,i} = y_{i,0} - \sum_{j \in \mathcal{R}} y_{i,j} \cdot x_j \geq 0$$

è rispettato dalla BFS corrente, poiché $y_{i,0} \geq 0$ e $x_j = 0$ per $j \in \mathcal{R}$. Tale vincolo, rispetto alla variabile fuori base che si vuole incrementare, diventa

$$x_{B,i} = y_{i,0} - y_{i,k} \cdot x_k \geq 0$$

per cui

- se il coefficiente $y_{i,k}$ è non positivo, x_k può incrementare a piacere senza violare la non negatività di $x_{B,i}$,
- se il coefficiente $y_{i,k}$ è positivo, x_k, per rispettare la non negatività di $x_{B,i}$, può incrementare solo fino al valore
  $$\frac{y_{i,0}}{y_{i,k}}$$
  che si ottiene quando la variabile $x_{B,i}$ va a 0

Pertanto, il massimo valore che x_k può assumere è quindi

$$x_k \leftarrow \min \left\{ \frac{y_{i,0}}{y_{i,k}} \text{ tale che } k \in \mathcal{R}, \text{ con } y_{i,k} > 0 \right\}$$

Esempio: Per esempio, data la soluzione corrente

$$z = 7 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_2$$

il coefficiente di x_2 è positivo, quindi conviene rendere il più positivo possibile x_2, compatibilmente con i vincoli:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{6}x_5 - \frac{2}{3}x_2 \geq 0 & &\rightarrow \frac{3}{2} - \frac{2}{3}x_2 \geq 0 \\ x_4 &= \frac{7}{2} - \frac{1}{6}x_5 - \frac{4}{3}x_2 \geq 0 & &\rightarrow \frac{7}{2} - \frac{4}{3}x_5 \geq 0 \\ x_1 &= \frac{7}{2} - \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{3}x_2 \geq 0 & &\rightarrow \frac{7}{2} - \frac{1}{3}x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

per cui il valore massimo che può assumere x_2 è

$$x_2 = \min \left\{ \frac{9}{2}, \frac{21}{8}, \frac{21}{2} \right\} = \frac{9}{4}$$

6.19 Cambio di base

Sia $y_{r,k}$ il valore per cui si ottiene il

$$\min\left\{\frac{y_{i,0}}{y_{i,k}} \text{ tale che } k \in \mathcal{R}, \text{ con } y_{i,k} > 0\right\}$$

allora tale valore è detto **pivot**. Se x_k assume il massimo valore ammissibile, allora i valori delle componenti di x, in particolare quelle in base che, quindi, dipendono da x_k, variano nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
&x_k \leftarrow \frac{y_{r,0}}{y_{r,k}} \\
&x_j \leftarrow 0, \; \forall j \in \mathcal{R} - \{k\} \\
&x_{B_i} \leftarrow y_{i,0} - y_{i,k} \cdot \frac{y_{r,0}}{y_{r,k}}, \; \forall i \in \mathcal{S}
\end{aligned}$$

e quindi

$$x_{B_r} \leftarrow 0$$

Per potere iterare il ragionamento conviene esprimere le soluzioni del sistema $Ax = b$, in funzione delle variabili che dopo l'aggiornamento hanno certamente valore nullo. Le equazioni associate alla componente i-ma della BFS e l'obiettivo si dovranno quindi riscrivere come:

$$\begin{aligned}
&z = y_{0,0} - y_{0,k} \cdot \frac{y_{r,0}}{y_{r,k}} - \sum_{j \in \mathcal{R}-\{k\}} \left(y_{0,j} - y_{0,k} \cdot \frac{y_{r,j}}{y_{r,k}}\right) \cdot x_j + \frac{y_{0,k}}{y_{r,k}} \cdot x_{B_r} \\
&x_{B_i} = y_{i,0} - y_{j,k} \cdot \frac{y_{r,0}}{y_{r,k}} - \sum_{j \in \mathcal{R}-\{k\}} \left(y_{i,j} - y_{i,k} \cdot \frac{y_{r,j}}{y_{j,k}}\right) \cdot x_j + \frac{y_{j,k}}{y_{r,k}} \cdot x_{B_r} \qquad \forall \in\in \mathcal{S} \\
&x_k = \frac{y_{r,0}}{y_{r,k}} - \sum_{j \in \mathcal{R}-\{k\}} \left(\frac{y_{r,j}}{y_{r,k}} \cdot x_j + \frac{1}{y_{r,k}} \cdot x_{B_r}\right)
\end{aligned}$$

ovvero si è cambiata la base:

$$\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{k\} - \{r\} \quad \text{e} \quad \mathcal{R} = \mathcal{R} \cup \{r\} - \{k\}$$

Dovendo uscire x_3 dalla base B ed entrare x_2, si ricostruisce nuovamente il tableau, riutilizzando il medesimo approccio di partenza, andando ad individuare la base B (e successivamente la sua inversa), la base N

	x_2	x_4	x_1	x_5	x_3	
z	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	7
x_3	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
x_4	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{2}$
x_1	0	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{2}$

Esempio: Si consideri il seguente problema di programmazione lineare, formalizzato come segue:

$$\begin{aligned}
&\max z = 3x_1 + 5x_2 \\
&x_1 \leq 4 \\
&2x_2 \leq 12 \\
&3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Tale sistema non è in forma standard, ma espresso solo in termini delle variabili strutturali (cioè quelle che hanno un immediata corrispondenza fisica col sistema reale che viene modellato).
Per manipolarlo opportunamente, lo si trasforma in forma standard introducendo le **variabili di slack** x_3, x_4, x_5, ottenendo

$$\begin{aligned} &\max z = 3x_1 + 5x_2 \\ &x_1 + x_3 = 4 \\ &2x_2 + x_4 = 12 \\ &3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ovviamente è noto il metodo per individuare quali vertici costituiscono delle soluzioni ammissibili. Ma senza svolgere alcun calcolo, inizialmente, è possibile partire da un vertice che sicuramente appartiene alla regione ammissibile, con soluzione $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ (ovvero queste ultime sono le variabili fuori base). Ciò permette facilmente di capire che le altre variabili (che sono le variabili in base B), avranno valore

- $x_3 = 4$
- $x_4 = 12$
- $x_5 = 18$

Il tableau opportunamente riordinato è

	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	
z	0	0	0	-3	-5	0
x_3	1	0	0	1	0	4
x_4	0	1	0	0	2	12
x_5	0	0	1	3	2	18

Ciò permette di evincere che

$$z = 0 + 3x_1 + 5x_2$$

per cui, ovviamente, non si è ottenuta la soluzione ottima, in quanto aumentando sia x_1 che x_2 la soluzione ottima può aumentare. Tuttavia, conviene procedere aumentando x_2, per cui x_2 entra in base e per capire chi esce, si calcola

$$\begin{aligned} &x_3 = 4 - x_1 \geq 0 && \\ &x_4 = 12 - 2x_2 \geq 0 && \rightarrow x_2 \geq 6 \\ &x_5 = 18 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0 && \rightarrow x_2 \leq 9 \end{aligned}$$

e il minimo valore tra quelli ottenuti è ovviamente 6, per cui si ottiene che il valore 2 è della seconda riga è il pivot. Per cui la variabile uscente è x_4. Si deve ora ricostruire il tableau, in modo tale da ottenere i coefficienti della funzione obiettivo delle variabili in base pari a 0, mentre la matrice dei coefficienti delle variabili in base corrisponda esattamente ad una matrice unità I_n. Per farlo si effettuano delle operazioni elementari in modo tale da rendere unitario il pivot corrispondente della variabile x_2 che è entrata in base. Non solo, ma dovendo creare una colonna con un solo un 1 si somma o si sottrae in modo tale da annullare il coefficiente cercato.
Dopodiché, per esprimere la funzione obiettivo in funzione unicamente delle variabili fuori base x_1 e x_4 si esegue sempre una somma o sottrazione, in modo tale da annullare il coefficiente cercato.
Dato, quindi, il sistema seguente:

	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	
z	0	0	0	-3	-5	0
x_3	1	0	0	1	0	4
x_4	0	1	0	0	2	12
x_5	0	0	1	3	2	18

Bisogna rendere la colonna di x_2 esattamente identica alla colonna di x_4, essendo la prima variabile entrante e la seconda uscente. Basterà sostituire la penultima riga con la sua metà, per cui

	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	
z	0	0	0	-3	-5	0
x_3	1	0	0	1	0	4
x_4	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	6
x_5	0	0	1	3	2	18

Ma l'ultima coordinata per x_2 è pari a 2, ma dovrebbe essere 0. Basterà sostituire l'ultima riga con se stessa meno 2 volte la penultima, ovvero:

	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	
z	0	0	0	-3	-5	0
x_3	1	0	0	1	0	4
x_4	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	6
x_5	0	-1	1	3	0	6

Anche la prima riga, per z, deve essere modificata, in quanto la funzione obiettivo deve essere espressa unicamente in funzione delle variabili fuori base x_1 e x_4. Allora si sostituisce ad essa se stessa più 5 volte la penultima riga, da cui:

	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	
z	0	$\frac{5}{2}$	0	-3	0	30
x_3	1	0	0	1	0	4
x_4	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	6
x_5	0	-1	1	3	0	6

Ecco che quindi si è ottenuto esattamente ciò che si cercava. Riordinando il tableau si ottiene

	x_3	x_2	x_5	x_1	x_4	
z	0	0	0	-3	$\frac{5}{2}$	30
x_3	1	0	0	1	$\frac{5}{2}$	4
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	6
x_5	0	0	1	3	1	6

Osservazione: Partendo dal tableau, è immediato evincere che, se esso presenta una particolare configurazione, allora automaticamente è possibile affermare che la regione ammissibile è infinita e non esiste soluzione ottima.
Ciò si capisce se facendo uscire una variabile dalla base, nessun'altra vi entra in quanto non si annulla mai, in quanto nella sua colonna del tableau si hanno solamente termini non positivi.

6.19.1 Iterazione e condizioni di ottimalità

Al cambiamento di base, si ridefiniscono i vettori y_j e y_0 e si verifica l'ottimalità o meno della base, ovvero

- se esistono dei coefficienti $y_{0,k} < 0$ e $y_{r,k} > 0$ si itera, ponendo attenzione al cycling se $y_{r,k} = 0$
- se esistono dei coefficienti $y_{0,k} < 0$, ma non esiste alcun $y_{r,k} > 0$, il problema è illimitato
- se non esiste alcun coefficiente $y_{0,k} < 0$ la soluzione correntemente in base è ottima

In questo modo, quindi, dato un problema di programmazione lineare, in forma standard una soluzione di base x^*, relativa alla base B, è ottima se si verificano le seguenti condizioni:

1. $B^{-1} \cdot b = y_0 \geq 0$ implica l'ammissibilità
2. $c_B \cdot B^{-1} \cdot A_j - c_j \leq 0$ implica $y_{0,j} \geq 0, \forall j$, ossia la non migliorabilità

In realtà la condizione 2 può essere praticamente verificata per le sole variabili fuori base, infatti le variabili in base hanno per costruzione costi ridotti sempre nulli e quindi soddisfano certamente la condizione data. La condizione 2 quindi, diventa

$$c_B \cdot B^{-1} \cdot N_j - c_j \leq 0 \quad \text{implica} \quad y_{0,j} \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{R}$$

24 Ottobre 2022

6.20 Riepilogo operativo - Algoritmo del simplesso

L'algoritmo del simplesso fino ad ora esposto si articola in cinque fasi principali:

1. **Inizializzazione**: Determinare una soluzione di base ammissibile;
2. **Verifica dell'ottimalità**: Se $y_{0,j} \geq 0, \forall j \in \mathcal{R}$, la soluzione corrente è ottima e l'algoritmo termina, altrimenti prosegue al passo successivo;
3. **Scelta della variabile entrante in base**: Scegliere una variabile fuori base x_k tale che $y_{0,k} < 0$ e proseguire al passo successivo;
4. **Scelta della variabile uscente dalla base**: Scegliere una variabile x_{B_r} tale che
$$\frac{y_{i,0}}{y_{i,r}} = \min\left\{\frac{y_{i,0}}{y_{i,k}} \text{ tale che } k \in \mathcal{R}, \text{ con } y_{i,k} > 0\right\}$$
Se $y_{i,k} < 0, \quad \forall i$, la soluzione del problema è illimitata, e l'algoritmo termina (in quanto non vi è nessuna variabile uscente dalla base), altrimenti si procede al passo successivo;
5. **Pivoting**: Risolvere i vincoli di uguaglianza esprimendo le nuove variabili in base x_k e $x_{B_i} \quad \forall i \neq k$, in funzione delle nuove variabili fuori base x_{B_i} e $x_j \quad \forall j \in \mathcal{R} - \{k\}$. La nuova BFS si ottiene ponendo le nuove variabili fuori base a zero. Il procedimento ora si ripete a partire dal passo 2.

Osservazione: Nell'algoritmo del simplesso si distinguono due fasi

1. La fase I consiste nel passo di inizializzazione in cui viene individuata una prima BFS;
2. La fase II consiste nel determinare la BFS ottima a partire dalla prima BFS.

Mentre la fase II è stata già illustrata, la fase I viene illustrata in seguito. Inoltre, la verifica se il problema è illimitato può anche venire fatta durante la fase II controllando tutte le colonne associate a costi ridotti positivi (e quindi coefficienti nel tableau negativi); ovviamente, se le colonne sono numerose questa verifica può essere onerosa.

6.21 Fase I - Individuazione della prima BFS

In alcuni casi una prima base ammissibile è immediata. Si supponga, infatti,che il problema sia formulato come segue

$$\begin{aligned} &\max z = cx \\ &Hx \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

con $b \geq 0$; allora la sua trasformazione in forma standard introduce delle **variabili di slack** s le cui corrispondenti colonne formano la prima base ammissibile, ottenendo

$$\begin{aligned} &\max z = cx \\ &Hx + Is = b \\ &x \geq 0, s \geq 0 \end{aligned}$$

Riordinando le colonne si ottiene

$$A = [I|H] \quad \text{con} \quad B = I \quad \text{e} \quad N = H$$

in cui, chiaramente

$$\text{rg}A = m \quad \text{e} \quad B^-1 \cdot b \geq 0$$

Si osservi che, in questo esempio, B è la matrice identica, per la sua inversa è ancora la matrice identica, quindi $B^{-1} \cdot b = b$ che deve essere maggiore o uguale a 0.

6.22 Forma canonica

Di seguito si espone la definizione di **forma canonica**:

FORMA CANONICA

Qualora un problema di programmazione lineare, ridotto in **forma standard**, presenti la matrice A che si può esprimere come

$$A = [I|H] \quad \text{con} \quad B = I \quad \text{e} \quad N = H$$

allora il problema è detto essere espresso in **forma canonica**

Osservazione: Si osservi che non è immediato esprimere un problema di programmazione lineare in forma canonica in presenza di disuguaglianze di verso opposto, infatti le variabili di surplus hanno coefficienti negativi, o in presenza di vincoli di uguaglianza.

Esempio: Per esempio, si consideri il problema di programmazione lineare formalizzato come segue:

$$\begin{aligned} &\min z = 4x_1 + x_2 \\ &3x_1 + x_2 = 3 \\ &4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Trasformando tale problema in forma standard, introducendo tanto variabili di slack, quanto di surplus, si ottiene

$$\begin{aligned} &\max z = -4x_1 - x_2 \\ &3x_1 + x_2 = 3 \\ &4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ &x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Tuttavia, tale formulazione standard NON è una forma canonica, in quanto la matrice A si presenta come segue

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Osservazione: Se il problema è nella forma standard, ottenuto solo da vincoli di tipo $=$ e $\geq$, si introducono **al più** m variabili artificiali u e si formula il problema in modo tale da ricondurlo alla fase I:

$$\begin{aligned} &\max z = cx & & \min w = Iu \\ &Ax = b & \rightarrow \quad &\textbf{fase I} Ax + Iu = b \\ &x \geq 0, s \geq 0 & & x \geq 0, u \geq 0 \end{aligned}$$

Per il problema di fase I è immediato determinare una base iniziale ammissibile.
Inoltre, il problema di fase I ammette una soluzione ottima w^* non negativa per costruzione

- se $w^* > 0$, allora il problema di fase I non ha soluzioni ammissibili x,u tale che $u = 0$ e quindi non esiste x tale che

$$Ax + I0 = b \quad \rightarrow \quad Ax = b$$

da cui il sistema $Ax = b$ non è compatibile e il problema di programmazione lineare non ha soluzioni ammissibili;

- se $w^* = 0$, allora la componente della soluzione ottima x^*, u^* è tale che $u = 0$ e quindi x^* è tale che
$$Ax^* + I0 = b \quad \rightarrow \quad Ax^* = b$$
Poiché x^* ha al più m componenti non nulle essa può essere presa come prima BFS del problema originale.

Esempio: Si consideri, nuovamente, la seguente formulazione del problema di programmazione lineare introdotto in principio, già ridotto in forma standard:

$$\begin{aligned}
&\max z = -4x_1 - x_2 \\
&3x_1 + x_2 = 3 \\
&4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\
&x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

A tale problema si associa la matrice dei coefficienti seguente

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in cui $m = 3$. Dal momento che l'ultima colonna è già un vettore della base canonica (grazie alla presenza di una **variabile di slack**), in particolare e_3, è sufficiente introdurre due sole variabili artificiali, u_1 e u_2, ottenendo la forma canonica seguente

$$\begin{aligned}
&\min z = u_1 + u_2 \\
&3x_1 + x_2 + u_1 = 3 \\
&4x_1 + 3x_2 - x_3 + u_2 = 6 \\
&x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Preferendo, tuttavia, massimizzare la funzione obiettivo, invece di minimizzarla, si procede alla trasformazione esposta nel seguito

$$\begin{aligned}
&\max z = -u_1 - u_2 \\
&3x_1 + x_2 + u_1 = 3 \\
&4x_1 + 3x_2 - x_3 + u_2 = 6 \\
&x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Ecco che, quindi, si è già ottenuta una base iniziale, in quanto essa è data dalle variabili u_1, u_2 e x_4. Ecco che, quindi, può essere realizzato il tableau iniziale seguente:

	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	
z	0	0	0	0	1	1	0
u_1	3	1	0	0	1	0	3
u_2	4	3	-1	0	0	1	6
x_4	1	2	0	1	0	0	4

in cui la riga dei coefficienti della funzione obiettivo è tale in quanto essa è $z = -u_1 - u_2$. Attenzione che i vettori di base sono u_1, u_2 e x_4 e per poter esprimere il tableau rispetto alla base scelta, la funzione obiettivo deve essere espressa in funzione delle variabili fuori base x_1, x_2 e x_3.
Sarà sufficiente, quindi, eseguire delle semplici operazioni elementari per ricondursi al tableau cercato. Facendo prima riga meno la seconda e prima riga meno la terza, si ottiene

	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	
z	-7	-4	1	0	0	0	-9
u_1	3	1	0	0	1	0	3
u_2	4	3	-1	0	0	1	6
x_4	1	2	0	1	0	0	4

27 Ottobre 2022

6.23 Problema di produzione

Un'impresa produce n beni diversi utilizzando m materie prime diverse:

- Sia b_i, con $i = 1, \ldots, m$ la quantità disponibile dell'i-esima materia prima
- Il j-esimo bene, con $j = 1, \ldots, n$ richiede $a_{i,j}$ unità dell'i-esima materia e determina un ricavo c_j per unità prodotta.

L'impresa deve decidere quanto produrre di ciascun bene per massimizzare i ricavi totali.
La scelta della variabile decisionale è semplice. Sia x_j, con $j = 1, \ldots, n$ la quantità del j-esimo bene da produrre.
Una formulazione primaria potrebbe essere la seguente:

$$
\begin{aligned}
&\max z = c_1 \cdot x_1 + \cdots + c_n \cdot x_n \\
&a_{i,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{i_n} \cdot x_n \leq b_i && \text{con } i = 1, \ldots, m \\
&x_j \geq 0 && \text{con } j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

in cui le variabili decisionali sono la quantità di beni prodotti, ossia $x_j \in \mathbb{R}$ con $j = 1, \ldots, n$, assumendo che queste variabili siano continue.
La funzione obiettivo da massimizzare è il profitto, dato da

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot k_j$$

Mentre i vincoli sono i seguenti:

- Per ogni materiale estratto, la quantità di materiale utilizzato per la produzione non può superare la disponibilità di materiale, per cui

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \leq b_i \quad \text{con} \quad i = 1, \ldots, m$$

- Per ogni bene, la quantità è sempre non negativa, ovvero

$$x_j \geq 0 \quad \text{con} \quad j = 1, \ldots, n$$

Osservazione: Nell'affrontare un problema di produzione, prima ancora di decidere cosa produrre per ottenere il massimo profitto, ci si dovrebbe chiedere se sia meglio produrre o se, viceversa, non sia conveniente vendere (o utilizzare in altro modo) le risorse disponibili.
Si dovrebbe porre, quindi, la seguente domanda: **Qual è il prezzo minimo al quale tutte le risorse disponibili dovrebbero essere vendute piuttosto che prodotte?** A questa domanda si risponde con il **problema duale**:

- nell'ipotesi di linearità, il profitto complessivo che si può ottenere dalla vendita delle risorse è pari alla somma dei profitti che si ottengono vendendo le singole risorse, queste ultime pari al prezzo unitario di vendita moltiplicato per la quantità di risorse disponibili.
- un bene P_1 garantisce un profitto di 15 e consuma un'unità di R_p, un'unità di R_q e 2 unità di R_r. Pertanto, per rendere conveniente vendere le risorse (o almeno rimanere alla pari) invece di produrre, la vendita complessiva di un'unità di R_p, un'unità di R_q e 2 unità di R_r deve fornire un guadagno non inferiore a 15.
- i prezzi di vendita delle risorse devono essere non negativi.

Ecco che quindi la formulazione duale del problema introduce come **variabili decisionali**, il prezzo unitario di ogni risorsa

$$\pi_i \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad i = p, q, r$$

che sono variabili continue.
La **funzione obiettivo** è il profitto ottenuto dalla vendita di tutte le risorse, ovvero

$$2000\pi_p + 1000\pi_q + 3000\pi_r$$

I **vincoli duali** da tenere in considerazione sono i seguenti:

- Per ogni bene il guadagno ottenuto dalla vendita delle risorse necessarie per produrlo, non deve essere inferiore al profitto ottenibile dalla vendita del bene stesso, ovvero

$$\sum_{i=i}^{m} a_{i,j} \cdot \pi_i \geq c_j \quad \text{con} \quad j = 1, 2$$

- Il prezzo di vendita della risorsa deve essere non negativo, da cui

$$\pi_i \geq 0 \quad \text{con} \quad i = p, q, r$$

per cui si ottiene

$$\begin{aligned}
&\min q = 2000\pi_p + 1000\pi_q + 3000\pi_r \\
&\pi_p + \pi_q + 2\pi_r \geq 15 \\
&\pi_p - 0.5\pi_q + \pi_r \geq 10 \\
&\pi_p, \pi_q, \pi_r \geq 0
\end{aligned}$$

In generale, pertanto, il problema duale viene formalizzato come segue

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{m} b_i \pi_i \\
&\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \cdot \pi_i \geq c_j && \text{con } j = 1, dots, n \\
&\pi_i \geq 0 && \text{con } i = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

e in forma matriciale si ha

$$\begin{aligned}
&\min b^T \pi \\
&A^T \pi \geq c \\
&\pi \geq 0
\end{aligned}$$

È intuitivamente evidente che

- ogni soluzione fattibile per il duale permette di realizzare un profitto non inferiore al massimo profitto ottenuto risolvendo il problema primale (cioè producendo). Quindi è conveniente vendere (o alla peggio non perdere) se si trova qualcuno disposto ad acquistare tutte le risorse e a pagarle complessivamente in modo da soddisfare i vincoli duali;
- la soluzione ottima del duale non può essere inferiore alla soluzione ottima del primale (altrimenti ci sarebbero prezzi che, pur soddisfacendo i vincoli, renderebbero la produzione ancora conveniente).

6.24 Problema primale e duale

Ad ogni problema di programmazione lineare (primale) è associato un problema duale, che presentano la corrispondenza seguente

Problema primale (P)	Problema duale (D)
$\max z = c_1 x_1 + \cdots + x_n x_n$	$\min w = b_1 \pi_1 + \cdots + b_m \pi_m$
$a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,n} x_n \leq b_i$	$a_{1,1} \pi_1 + \cdots + a_{m,1} \pi_m \geq c_1$
$\vdots$	$\vdots$
$a_{m,1} x_1 + \cdots + a_{m,n} x_n \leq b_m$	$a_{1,n} \pi_1 + \cdots + a_{m,n} \pi_m \geq c_n$
$x_1, \ldots, x_n \geq 0$	$\pi_1, \ldots, \pi_m \geq 0$
m vincoli e n variabili	m variabili e n vincoli

Pertanto il problema duale (D) ha tante variabili quanti sono i vincoli nel problema primale (P) e tanti vincoli quante sono le variabili nel problema primale (P).
In forma di matrice, è facile capire vediamo che i vettori b e c si scambiano le posizioni e la matrice dei coefficienti A viene trasposta.
Pertanto si ottiene

Problema primale (P)	Problema duale (D)
$\max z = c^T x$	$\min w = b^T \pi$
$Ax \leq b$	$A^T \pi \geq c$
$x \geq 0$	$\pi \geq 0$
$x \in \mathbb{R}^n$	$\pi \in \mathbb{R}^m$

La dualità non deriva solo da giustificazioni economiche, ma anche dall'applicazione delle condizioni di **Kuhn-Tucker** ai problemi di programmazioni lineare o dal **rilassamento di Lagrange**.
La dualità è importante perché

- il problema duale corrisponde a una visione diversa dello stesso problema (per il quale si deve sempre cercare un'interpretazione economica della formulazione ottenuta);
- su di essa si basano algoritmi, come il Dual Simplex e l'Algoritmo Primal-Dual, alternativo al Simplex (Primal), che sono utili per alcune classi di problemi;
- in alcuni casi può essere conveniente risolvere il problema duale (D) invece di quello primale (P) (può essere meglio risolvere il problema con meno vincoli).

Si ottiene, quindi, la corrispondenza seguente

PRIMALE	massimizzazione	minimizzazione	DUALE
	$\leq b_i$	≥ 0	
	$\geq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	libere	
	$\geq b_i$	$\geq c_j$	
	$\leq b_i$	$\leq c_j$	
	libere	$=$	

6.25 Teorema di dualità (debole)

TEOREMA DI DUALITÀ (DEBOLE)

Se x è una soluzione ammissibile del problema primale e π è una soluzione ammissibile del problema duale, allora

$$c^T x \leq b^T \pi$$

in quanto

$$c^T x \leq (A^T \pi)^T x = \pi^T A x \leq \pi^T b = b^T \pi$$

6.25.1 Corollario sul problema duale

Il teorema precedente presenta il seguente corollario

COROLLARIO DEL TEOREMA DI DUALITÀ (DEBOLE)

Dal teorema di dualità (debole) segue che

- Se il valore ottimale nel problema primale è $+\infty$, allora il problema duale deve essere non ammissibile;
- Se il valore ottimale nel problema duale è $-\infty$, allora il problema primale deve essere non ammissibile.

Inoltre si ha che

COROLLARIO DEL TEOREMA DI DUALITÀ (DEBOLE)

Siano

Dimostrazione:

6.26 Teorema di dualità (forte)

TEOREMA DI DUALITÀ (FORTE)

Se un problema di programmazione lineare ha una soluzione ottimale, ce l'ha anche il suo duale e i rispettivi valori ottimali sono uguali.

In altre parole, se x^* è una soluzione ottima finita per il primale anche il duale ha una soluzione ottima finita π^* ed è sempre vero che

$$c^T x^* = b^T \pi^*$$

6.27 Relazione tra problema primale e duale

Si ricordi che in un problema di programmazione lineare si verifica esattamente una delle tre possibilità seguenti:

- Esiste una soluzione ottimale;
- Il problema è "non vincolato", cioè il valore ottimale è $+\infty$ (per i problemi di massimizzazione) o $-\infty$ (per i problemi di minimizzazione);
- Il problema è irrealizzabile

Questo porta a nove possibili combinazioni per il primale e il duale: Ottimo finito Non vincolato Ottimo finito Non vincolato Non fattibile Possibile Impossibile Impossibile Impossibile Impossibile Possibile Impossibile Possibile Possibile Tabella 2: Le diverse possibilità per il primale (righe) e il duale (colonne)

6.28 Condizioni di complementarietà

CONDIZIONI DI COMPLEMENTARIETÀ

Siano x e π soluzioni fattibili del problema primale e di quello duale, rispettivamente. I vettori x e π sono soluzioni ottimali per i due rispettivi problemi **se e solo se**

$$\pi_i \cdot (b_i - A_{(i)}^T x = 0 \quad \forall i$$

$$(\pi^T A^{(j)} - c_j) \cdot x_j = 0 \quad \forall j$$

dove $A^{(j)}$ è la j-esima colonna e $A_{(i)}$ è l'i-esima riga della matrice A.
In altre parole la prima condizione è ciò che si ottiene introducendo le variabili di slack. Mentre la seconda condizione è ciò che si ottiene introducendo le variabili di surplus.

28 Ottobre 2022

6.29 Dualità e analisi di sensitività

Si consideri il problema formalizzato in forma standard

$$\begin{aligned} &\min c^T c \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

che si chiama **problema primale**, e sia x^* una soluzione ottimale, che si presume esista. Introduciamo un problema rilassato in cui il vincolo $Ax = b$ è sostituito da una penalità $p^T \cdot (b - Ax)$, dove p è un vettore della stessa dimensione di b. Ci si trova, quindi, di fronte al problema

$$\begin{aligned} &\min c^T x + p^T \cdot (b - Ax) \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Sia $g(p)$ il costo ottimale per il problema rilassato, in funzione del vettore p. Il problema rilassato consente un maggior numero di opzioni rispetto a quelle presenti nel problema primale (avendo rimosso i vincoli), e ci si aspetta che $g(p)$ non sia più grande del costo ottimale $c^T x^*$.
Infatti,

$$g(p) = \min_{x \geq 0} \left[c^T x + p^T (b - Ax)\right] \leq c^T x^* + p^T (b - Ax^*) = c^T x^*$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che x^* è una soluzione ammissibile del problema primario e soddisfa $Ax^x = b$ (per cui $b - Ax^* = 0$). Pertanto, qualunque sia il valore della penalità p, essa porta a un limite inferiore $g(p)$ per il costo ottimale $c^T x^*$ del problema iniziale.

6.30 Problema duale

Il problema

$$\max g(p)$$

non soggetto ad alcun vincolo, può essere interpretato come una ricerca del limite inferiore più stretto possibile di questo tipo (cioè il limite inferiore che più si avvicina al valore della funzione obiettivo iniziale) ed è noto come **problema duale**.
Dalla definizione di $g(p)$, si ha che

$$g(p) = \min_{x \geq 0} \left[c^T x + p^T (b - Ax)\right] = p^T b + \min_{x \geq 0} (c^T - p^T A) x$$

Si noti che

$$\min_{x \geq 0} (c^T - p^T A) x = \begin{cases} 0 & \text{se} \qquad c^T - p^T A \geq 0 \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per massimizzare $g(p)$, quindi, bisogna considerare solamente i valori di p per i quali $g(p)$ non è uguale a $-\infty$. Si può concludere, quindi, che il **problema duale** è uguale a

$$\begin{aligned} &\max p^T b \\ c^T - p^T A \geq 0 \to &\, p^T A \leq c^T \end{aligned}$$

Nell'esempio, sono stati introdotti i vincoli di uguaglianza $Ax = b$ e ci si è ritrovati senza vincoli sul segno del vettore p. Se il problema primale avesse invece vincoli di disuguaglianza della forma $Ax \geq b$, questi potrebbero essere sostituiti da $Ax - s = b$, con $s \geq 0$. I vincoli di uguaglianza possono essere scritti nella forma

$$[A| - I] \cdot \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = b$$

che porta ai vincoli duali

$$p^T \cdot [a| - I] \leq [c^T | 0^T]$$

o equivalentemente,

$$p^T A \leq c^T \quad \text{con} \quad p \geq 0$$

... continua ...

6.31 Analisi di sensitività

Lo scopo principale dell'**analisi di sensibilità** è identificare i parametri sensibili (cioè quelli che non possono essere modificati senza cambiare la soluzione ottimale). I parametri sensibili sono quelli che devono essere stimati con particolare attenzione per minimizzare il rischio di ottenere una soluzione ottimale errata.
I parametri del modello in esame sono $a_{i,j}$, b_i e c_j per $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$:

- I problemi di programmazione lineare spesso possono essere interpretati come l'allocazione di risorse alle attività.
- Quando i vincoli sono in forma $\leq$, abbiamo interpretato i b_i (i termini noti) come le quantità delle rispettive risorse rese disponibili per le attività in esame.
- In molti casi, i valori di b_i utilizzati nel modello iniziale possono rappresentare la decisione iniziale provvisoria del management su quanta parte delle risorse dell'organizzazione sarà fornita alle attività considerate nel modello.
- Da questa prospettiva più ampia, alcuni dei valori di b_i possono essere aumentati in un modello rivisto, ma solo se si riesce a convincere il management che questa revisione sarebbe vantaggiosa.

6.32 Prezzo ombra

Di seguito si fornisce la definizione di **prezzo ombra**:

PREZZO ombra

Il prezzo ombra della risorsa i (indicato con Y_I^*) misura il valore marginale di tale risorsa, cioè il tasso al quale la funzione obiettivo z potrebbe aumentare aumentando (leggermente) la quantità di tale risorsa (b_i) resa disponibile.

Nel caso di un vincolo funzionale in forma $=$ o $\geq$, il suo prezzo ombra è nuovamente definito come il tasso al quale z potrebbe essere aumentato aumentando (leggermente) il valore di b_i, anche se l'interpretazione di b_i ora sarebbe normalmente qualcosa di diverso dalla quantità di una risorsa resa disponibile.

Esempio: Il grafico mostra che il prezzo ombra è $y_2^* = \dfrac{3}{2}$ per la risorsa 2. I due punti rappresentano le soluzioni ottimali per $b_2 = 12$ o $b_2 = 13$ e inserendo tali soluzioni nella funzione obiettivo si scopre che aumentando b_2 di 1 aumenta z di $y_2^* = \dfrac{3}{2}$.
Ciò dimostra che $y_2^* = \dfrac{3}{2}$ è la velocità con cui z potrebbe aumentare aumentando "leggermente" b_2. Tuttavia, dimostra anche il fenomeno comune che tale interpretazione vale solo per un piccolo aumento di b_2: una volta che b_2 viene aumentato oltre 18, si esce dalla regione ammissibile e la soluzione ottimale rimarrebbe a $(0, 9)$ senza ulteriori aumenti di z; in altre parole, $z = 45$ per qualsiasi b_2 tale che $b_2 \geq 18$, per cui il vincolo $2x_2 = b_2$ diventa ridondante.

Osservazione: Si noti che $y_1^* = 0$, poiché il vincolo sulla risorsa 1, con $x_1 \leq 4$, non è vincolante per la soluzione ottimale $(2, 6)$, c'è un surplus di tale risorsa; pertanto, aumentando b_1 oltre 4 non

si può ottenere una nuova soluzione ottimale con un valore di z maggiore.
Al contrario, i vincoli sulle risorse 2 e 3, ovvero

$$2x_2 \leq 12 \quad \text{e} \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

sono **vincoli stringenti** (vincoli che si mantengono uguali nella soluzione ottimale). Poiché l'offerta limitata di queste risorse ($b_2 = 12$ e $b_3 = 18$) vincola z a non aumentare ulteriormente, esse hanno prezzi ombra positivi Si può facilmente dimostrare che Possiamo facilmente dimostrare che $y_3^* = 1$.
Gli economisti si riferiscono a tali risorse come a **beni scarsi**, mentre le risorse disponibili in eccedenza (come la risorsa 1) sono **beni liberi** (ossia risorse con un prezzo ombra nullo).

6.33 Problema primale e duale

Ad ogni problema di programmazione lineare (primale) è associato un problema duale, che presentano la corrispondenza seguente

Problema primale (P)	Problema duale (D)
$\max z = 3x_1 + 5x_2$	$\min w = 4\pi_1 + 12\pi_2 + 18\pi_3$
$x_1 \leq 4$	$\pi_1 + 3\pi_3 \geq 0$
$2x_2 \leq 12$	$2\pi_2 + 2\pi_3 \geq 5$
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$	π_1, π_2, π_3
$x_1, x_2 \geq 0$	$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0$

La soluzione ottima del problema duale è $x_1^* = 2$, $x_2^* = 6$ e $z^* = 36$. Dalla dualità forte, si ha che $w^* = 36$, ma come si possono determinare i valori delle variabili duali? Usando le condizioni di complementarietà.

6.34 Condizioni di complementarietà

Le condizioni di complementarietà sono le seguenti:

$$\begin{aligned} &\pi_i^* \cdot (b_i - (A_{(i)})^T x^*) = 0 && \forall i \\ &((x^*)^T A^{(j)} - c_j) \cdot x_j^* = 0 && \forall j \end{aligned}$$

che ne caso reale preso in esame si traducono in

$$\begin{aligned} &\pi_1^* \cdot (4 - x_1^*) = 0 && 2 \cdot \pi_1^* = 0 \\ &\pi_2^* \cdot (12 - 2x_2^*) = 0 && 0 \cdot \pi_2^* = 0 \\ &\pi_3^* \cdot (12 - 3x_1^* - 2x_2^*) = 0 && 0 \cdot \pi_3^* = 0 \\ &(\pi_1^* - 2\pi_3^* - 3) \cdot x_1^* = 0 && 2 \cdot (\pi_1^* + 3\pi_3^* - 3) = 0 \\ &(2\pi_2^* + 2\pi_3^* - 5) \cdot x_2^* = 0 && 6 \cdot (2\pi_2^* + 2\pi_3^* - 5) = 0 \end{aligned}$$

Da cui segue che

$$\begin{aligned} &\pi_1 = 0 && \rightarrow && \pi_1^* = 0 \\ &(\pi_1^* + 3\pi_3^* - 3) = 0 && \rightarrow && \pi_3^* = 1 \\ &(2\pi_2^* + 2\pi_3^* - 5) = 0 && \rightarrow && \pi_2^* = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Infatti, $w^* = 4 \cdot 0 + 12 \cdot \frac{3}{2} + 18 \cdot 1 = 36$. Non solo, ma è facile capire che

$$y_i^* = \pi_i^* \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3$$

per cui le variabili duali sono esattamente i prezzi ombra.

Osservazione: È stato dimostrato che ogni variabile duale ottimale rappresenta la velocità con cui la funzione obiettivo z varia al variare del corrispondente valore del vettore dei termini noti. Se si varia un valore del vettore dei termini noti, il valore delle variabili duali ottimali rimane costante finché la soluzione ottimale si trova sull'intersezione degli stessi vincoli.
Nell'esempio preso in esame

- se $b_2 > 18$ la soluzione ottimale è sempre $(0, 9)$. Pertanto, le duali ottimali sono $\left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$
- se b_2 varia nell'intervallo $6 < b_2 < 18$ la soluzione ottimale si trova sull'intersezione tra $2x_2 = b_2$ e $3x_1 + 2x_2 = 18$ e le variabili duali ottimali sono $\left(0, \frac{3}{2}, 1\right)$.
- $0 < b_2 < 6$ la soluzione ottimale giace sull'intersezione tra $2x_2 = b_2$ e $x_1 = 4$. Le variabili duali ottimali sono $\left(3, \frac{5}{2}, 0\right)$.
- se $b_2 = 6$ o $b_2 = 18$, la soluzione è detta degenere, in quanto le variabili nulle sono più del numero di variabili fuori base o, in altre parole, vi è una variabile in base che si annulla.

6.35 Variazione dei coefficienti della soluzione obiettivo

Il grafico mostra l'analisi della sensibilità di c_1 e c_2 per il problema. Partendo dalla linea della funzione obiettivo originale, in cui $c_1 = 3$, $c_2 = 5$ e la soluzione ottimale è $(2, 6)$, le altre due linee nere mostrano gli estremi di quanto può cambiare la pendenza della linea della funzione obiettivo e mantenere ancora $(2, 6)$ come soluzione ottimale. Quindi,

- con $c_2 = 5$, l'intervallo consentito per c_1 è $0 \leq c_1 \leq 7.5$;
- con $c_1 = 3$, l'intervallo consentito per c_2 è $c_2 \geq 2$.

10 Novembre 2022

Le condizioni di complementarietà valgono sempre per ogni base. Ossia per ogni base esiste sempre una corrispondenza con una base duale.

Esercizio 1: Si consideri il problema seguente

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$
$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ovviamente in forma standard tal problema viene formalizzato come segue:

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$
$$x_1 + s_1 = 4$$
$$2x_2 + s_3 = 12$$
$$3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

ovviamente la rappresentazione di tale problema è la seguente:

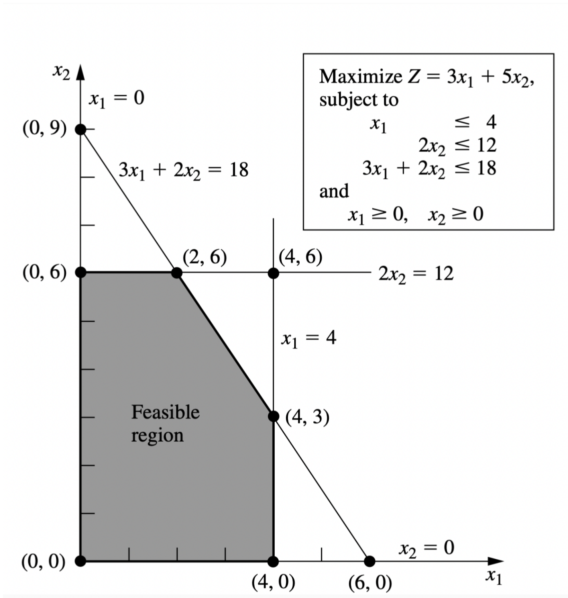


Figura 5: Problema 1

Per la determinazione della soluzione ottimale che massimizza la funzione obiettivo, sarà sufficiente individuare tutti i vertici della regione ammissibile (ponendo a 0 di volta in volta 2 variabili, che in $\mathbb{R}^2$ significa trovarsi su un vertice), per un totale di

$$\binom{5}{2} = 10$$

possibili soluzioni (anche se sono 8 in quanto due vincoli paralleli) e calcolarne il corrispondente valore della funzione obiettivo:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	z
0	0	0	4	12	18	0
A	0	4	4	0	6	30
B	2	6	2	0	0	36
C	4	3	0	6	0	27
D	4	0	0	12	6	12
E	0	3	4	-6	0	45
F	6	0	-2	12	0	18
G	4	6	0	0	-4	42

In cui, ovviamente, non possono essere considerate soluzioni ammissibili quelle in cui i coefficienti sono negative.

Si realizzi, ora, il duale di tale problema:

$$\begin{aligned} \min w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\ y_1 + 3y_3 \geq 3 \\ 2y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

che ridotto in forma standard diviene

$$\begin{aligned} \min w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\ y_1 + 3y_3 - r_1 = 3 \\ 2y_2 + 2y_3 - r_2 = 5 \\ y_1, y_2, y_3, r_1, r_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Avendo in questo caso 3 variabili incognite e 2 vincoli non è possibile prendere in considerazione la rappresentazione grafica di tale problema. Per trovare la soluzione ottimale si pongono di volta in volta a 0, 3 variabili (che in $\mathbb{R}^3$ significa trovarsi in un vertice del poliedro descritto), per un totale di

$$\binom{5}{3} = 10$$

anche se ovviamente non saranno tutte, in quanto alcune basi sono non ammissibili. Da ciò si evince che

	y_1	y_2	y_3	r_1	r_2	z
0	0	0	0	-3	-5	0
A	0	$\frac{5}{2}$	0	-3	6	30
B	0	$\frac{3}{2}$	1	0	0	36
C	$-\frac{9}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	0	27
D	3	0	0	0	-5	12
E	0	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	45
F	0	0	1	0	-3	18
G	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	0	42

in cui è immediato osservare che esiste una corrispondenza tra la base originaria e la base duale ottenuta in questo caso, in quanto i valori della funzione obiettivo ottenuti nel problema primale corrispondono a quelli ottenuti nel problema duale.
Ovviamente le basi ammissibili, sia nel problema di partenza che in quello duale, sono tutte quelle in cui le variabili decisionali, comprese quelle fittizie, tutte non negative.
Ovviamente la soluzione ottimale del problema duale è 36 per il teorema di dualità forte. Non solo, ma in corrispondenza del valore 36 della funzione obiettivo esiste una base ammissibile sia per il problema primale che duale. Ad ogni base ammissibile del problema primale, invece, la corrispondente base duale è non ammissibile. Nell'esempio considerato, inoltre, esiste un solo caso in cui tanto una base del problema primale è non ammissibile, tanto è non ammissibile anche per il problema duale corrispondente.
Si osservi, inoltre, che per il problema primale di massimizzazione, sono ammissibili tutti i casi che sono minori della soluzione ottimale 36. Tutti i casi in cui il valore della soluzione obiettivo è maggiore di 36, a cui corrispondono basi non ammissibili per il problema primale, saranno ammissibili per il problema duale, in quanto essendo un problema di minimizzazione, si dovranno considerare soluzioni maggiori di quella ottimale, ossia maggiore di 36.
Si ottiene, quindi, la schematizzazione seguente:

		Duale	
		Ammissibile	Non Ammissibile
Primale	Ammissibile	Siamo nella soluzione ottima	Soluzione minore di 36
	Non Ammissibile	Soluzione maggiore di 36	I coefficienti non sono tutti non negativi per entrambi

Le condizioni di complementarietà prevedono che date due variabili poste a 0 nel problema primale, le corrispondenti variabili duali saranno non nulle e viceversa. Tali condizioni sono valide sempre, indipendentemente dal fatto che si considerino soluzioni di base ammissibili e non ammissibili.

Esercizio 2: Si consideri il problema seguente

$$\begin{aligned}
&\max z = 4x_1 + 2x_2\\
&2x_1 \leq 16\\
&x_1 + 3x_2 \leq 17\\
&x_1 \leq 5\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

È molto semplice realizzare graficamente tale problema, in cui è immediato evincere che la soluzione ottima è $C(8, 3) \rightarrow 37$.
Si realizzi, ora, il problema duale corrispondente

$$\begin{aligned}
&\min w = 16y_1 + 17y_2\\
&2y_1 + y_2 \geq 4\\
&3y_2 + y_3 \geq 2\\
&y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Ma è immediato evincere quale sia la base duale corrispondente alla funzione obiettivo. Siccome la soluzione ottimale nel problema primale non è sul vincolo $x_1 \leq 5$, ossia $s_3 > 0$, ciò significa che la corrispondente variabile decisionale duale $y_3 = 0$. Allora da ciò è facile capire dalle equazioni seguenti

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 \geq 4 \\ 3y_2 + y_3 \geq 2 \end{aligned}$$

che i valori delle restanti variabili decisionali saranno

$$y_2 = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad y_1 = \frac{5}{3}$$

Ci si chiede, ora, quante unità supplementari della risorsa 1 sono necessarie per aumentare di 15 il valore di z. È noto che la funzione obiettivo z vale 38 in corrispondenza del valore $y_1^* = \frac{5}{3}$, ma si chiede che

$$53 = z = 35 + y_1 * \cdot \underbrace{\Delta b_1}_{15}$$

Sapendo che il valore della variabili duale $y_1^* = \frac{5}{3}$, si ottiene che

$$\frac{5}{3} \cdot \Delta b_1 = 15 \quad \rightarrow \quad \Delta b_1 = 9$$

per cui il primo vincolo di $\leq$ dovrà passare da 16 a $16 + 9 = 25$.
Ovviamente, però, è fondamentale capire che non è possibile aumentare indefinitamente il primo vincolo, in quando quando non vi è più intersezione con il secondo, il primo diviene ridondante e quindi la variabile duale sarebbe 0.
Spostando, quindi, a destra il primo vincolo, la nuova intersezione C sarà data dall'intersezione del primo e del secondo vincolo, da cui

$$\begin{aligned} &2x_1 = 25 && \rightarrow x_1 = 12.5 \\ &x_2 + 3x_2 = 17 && \rightarrow x_2 = 1.5 \end{aligned}$$

e sostituendo nella funzione obiettivo i due valori trovati si ottiene $z = 4 \cdot 12.5 + 2 \cdot 1.5 = 53$, ossia il valore cercato.

Osservazione: Fondamentale osservare che la variabile duale y_1 vale $\frac{5}{3}$ solamente in un intorno di due intersezioni di vincoli, ossia quando il primo vincolo

$$4 \leq b_1 \leq 34$$

cioè persa la x della intersezione a sinistra, ossia B, in cui $x = 2$, si ha che $b_1 = 2x = 4$, e tra l'intersezione del secondo vincolo obliquo con l'asse x si ottiene $x = 17$, per cui $b_1 = 2x = 34$.

11 Novembre 2022

Esercizio 1: Si consideri il problema di programmazione lineare formalizzato come segue

$$\begin{aligned} &\max z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ &x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Di fronte a tale problema si possono trovare due modalità di risoluzione

- impiegare il metodo del simplesso, realizzando il tableau;
- essendo il problema con 3 variabili e 2 vincoli, il problema duale avrà 2 variabili e 3 vincoli.

Si sceglie, ovviamente, la seconda strada, per cui

$$\begin{aligned} \min w = 12y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_2 \geq -2 \\ 2y_1 - y_2 \geq -1 \end{aligned}$$

Si realizza la rappresentazione grafica dei vincoli e della funzione obiettivo, prestando attenzione ad individuare la corretta regione ammissibile. È facile capire che la regione ammissibile è infinita, in cui si individuano due vertici ammissibili

$$A = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) \quad \text{e} \quad B = (2, 0)$$

a cui corrispondono i seguenti valori della funzione obiettivo

$$w_A = \frac{17}{3} \quad \text{e} \quad w_B = 24$$

ovviamente il minimo si ha in A.
Per il teorema di dualità forte si ha che anche

$$z^* = \frac{17}{3}$$

per determinare, ora, i valori delle variabili decisionali delle variabili duali si usano le condizioni di complementarietà. Siccome si ha che $y_1 \neq 0$ e $y_2 \neq 0$ è immediato che le variabili di slack saranno 0. Non solo, ma siccome la soluzione ottima del problema duale sta nell'intersezione dei vincoli b_1 e b_3, in cui le variabili di surplus saranno $= 0$, da cui le variabili x_1^* e x_3^* saranno non nulle, mentre $x_2^* = 0$. Ciò permette facilmente di risolvere il sistema seguente

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 = 12 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{aligned}$$

che permette di ottenere $x_1 = \dfrac{14}{3}$ e $x_2 = \dfrac{11}{3}$ che produce proprio il valore $x^* = \dfrac{17}{3}$.

Esercizio 2: Si consideri il problema formalizzato nel seguente modo:

$$\begin{aligned} &\max z = 6x_1 + 8x_2 \\ &5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ &x_1 - 2x_2 \leq 10 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

è immediato ricavare il duale

$$\begin{aligned}
&\min w = 20y_1 + 10y_2\\
&5y_1 + y_2 \geq 6\\
&2y_1 - 2y_2 \geq 8\\
&y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Realizzando graficamente i due problemi appena descritti si ottiene facilmente che nel problema primale vi sono in totale 6 vertici, tra ammissibili e non ammissibili, così come nel problema duale, come ci si aspettava dal calcolo

$$\binom{4}{2} = 6$$

in cui vi sono 2 variabili decisionali e 2 variali fittizie, con sempre 2 vincoli.
Si ottiene la schematizzazione seguente:

Vertice	x_1	x_2	s_1	s_2	z	w	y_1	y_2	r_1	r_2
0	0	0	10	0	0	0	0	-4	-6	
A	0	5	10	0	40	40	0	4	-2	0
B	$\frac{5}{2}$	$\frac{15}{4}$	0	0	45	45	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0
C	4	0	0	6	24	24	$\frac{6}{5}$	0	0	$-\frac{28}{5}$
D	0	10	0	-10	80	80	4	0	14	0
E	10	0	-30	0	60	60	0	6	0	4

in cui per il primo problema, ovviamente, le basi ammissibili sono solamente le prime 4. Viceversa, per il problema duale, si avrà che le basi ammissibili per il primale saranno non ammissibili per il duale e viceversa (anche se potrebbero essere tutte e due non ammissibili). L'unica corrispondenza si avrà nel caso della soluzione ottima. Le condizioni di complementarietà sono:

$$\begin{aligned}
x_1 r_1 &= 0\\
x_2 r_2 &= 0\\
s_1 y_1 &= 0\\
s_2 y_2 &= 0
\end{aligned}$$

per cui se un fattore è $\neq 0$, l'altro dovrà essere $= 0$ e viceversa.

Esercizio 3: Sia dato il problema seguente

$$\begin{aligned}
&\max z = 2x_1 - 7x_2 + 4x_3\\
&x_2 + 2x_2 + x_2 \leq 10\\
&3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10\\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Si ottiene il problema duale seguente

$$\begin{aligned}
&\min w = 10y_1 + 10y_2\\
&y_1 + 3y_2 \geq 2\\
&2y_1 + 3y_2 \geq -7\\
&y_1 + 2y_2 \geq 4\\
&y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Realizzando il grafico del problema duale si ottiene facilmente che il numero di vertici totali è

$$\binom{4}{3} = 4$$

Dovendo dimostrare che la soluzione ottima del problema primale deve essere $z^* \leq 25$, sarà sufficiente trovare una soluzione ammissibile del problema duale che vale 25 (o anche meno); allora per dualità le soluzioni ammissibili del problema primale, compresa la soluzione ottima, dovranno essere ≤ 25 (o comunque minore di ogni valore della funzione obiettivo del problema duale in corrispondenza di una base ammissibile).

Esercizio 4: Si consideri il problema seguente

$$\begin{aligned} &\max z = x_1 + 2x_2 \\ &x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ &x_1 - x_2 \leq 4 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dalla rappresentazione grafica appare evidente che i vertici ammissibili trovati sono

$$\begin{aligned} &A = \left(0, \frac{3}{5}\right) && \rightarrow z = \frac{20}{3} \\ &B = (2,2) && \rightarrow z = 6 \\ &C = (1,1) && \rightarrow z = 1 \end{aligned}$$

Nell'ipotesi in cui il primo vincolo venga aumentato di $\delta_1 = 1$, mentre tutti gli altri vincoli rimangono costanti, per calcolare il prezzo ombra corrispondente, ossia il valore della variabile duale associata al primo vincolo, si ottiene che

$$\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 = 9 \\ &x_1 - x_2 = 4 \end{aligned}$$

in cui si è potuto mettere il segno di $=$ in quando si è nell'intersezione di due vincoli, per cui s_1 e s_2 sono entrambi nulli. Si ottiene che $x_1 = \frac{21}{4}$ e $x_2 = \frac{5}{4}$.
Ne segue che, dato il problema duale

$$\begin{aligned} &\min z = 8y_1 + 5y_2 \\ &y_1 + y_2 \geq 1 \\ &3y_1 - y_2 \geq 2 \\ &y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Siccome $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$, per le condizioni di complementarietà, segue che $r_1 = 0$ e $r_2 = 0$. È fa

18 Novembre 2022

6.36 Problemi di programmazione intera

Per risolvere un problema di programmazione intera, non è possibile procedere tramite **enumerazione**, per cui vengono identificate tutte le soluzioni praticabili e viene scelta la migliore.
Ovviamente, tale processo potrebbe non essere praticabile. Per esempio, per risolvere il TSP (Travelling Salesman Problem) in un grafo completo con n nodi ci sono $(n-1)!$ tour fattibili. Quindi,

n	$n!$
10	3.6×10^6
100	9.33×10^{157}
1000	4.02×10^{2567}

Per cui è opportuno trovare delle soluzioni migliori.

Esempio: Nel problema TSP (Travelling Salesman Problem) viene fornito un insieme di noti $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ che sarebbero le città e un insieme di archi $\mathcal{A}$. Gli archi rappresentano le coppie ordinate di città tra cui è possibile viaggiare direttamente.
Per $(i, j) \in \mathcal{A}$ si ha che $c_{i,j}$ è il tempo di percorrenza diretto dalla città i alla città j.
Il problema TSP mira a trovare un tour, partendo dalla città 1, che visiti ogni altra città esattamente una volta e poi ritorni alla città di partenza e impieghi il minor tempo di viaggio totale.

TRAVELLING SALESMAN PROBLEM (TSP)

Un tour che visita tutti i nodi esattamente una volta è detto tour **hamiltoniano**. Il TSP identifica il tour hamiltoniano di costo minimo.

6.36.1 Formulazione del TSP

Le variabili decisionali sono

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 \quad \text{se} & j \text{ segue immediatamente } i \text{ nel tour} \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

per cui $x \in \{0, 1\}^{|\mathcal{A}|}$. La funzione obiettivo, ovviamente, è

$$\min \sum_{(i,j) in \mathcal{A}} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$$

Per quanto riguarda i vincoli, si deve richiedere che bisogna entrare e uscire da ogni città una e una sola volta, da cui

$$\sum_{i:(i,j)\in\mathcal{A}} x_{i,j} = 1 \quad \forall j \in V$$
$$\sum_{j:(i,j)\in\mathcal{A}} x_{i,j} = 1 \quad \forall i \in V$$

Tuttavia, i vincoli di cui sopra non sono sufficienti a definire i tour, poiché sono soddisfatti anche dai sottocicli. Per eliminare i sottocicli, quindi, in ogni ciclo deve esserci un arco che va da $\{1, 2, 3\}$

al suo complementare $\{4,5,6\}$ e un arco che va da $\{4,5,6\}$ al suo complementare $\{1,2,3\}$. In generale, per qualsiasi $U \subseteq V$ con

$$2 \leq |U| \leq |V| - 2$$

i vincoli seguenti

$$\sum_{\{(i,j)\in\mathcal{A}: i\in U, j\in V-U\}} x_{i,j} \geq 1$$

sono soddisfatti da tutti i cicli, ma ogni sottociclo ne viola almeno uno, in quanto il numero di vincoli è molto elevato, dal momento che il numero di sottoinsiemi è $2^{|V|}$.
Un modo alternativo per eliminare i sottocicli è quello di introdurre vincoli

$$\sum_{\{(i,j)\in\mathcal{A}: i\in U, j\in U\}} x_{i,j} \leq |U| - 1 \quad \forall U \subset V : 2 \leq |U| \leq |V| - 2$$

Ma ancora una volta si necessita di un vincolo per ogni $U \subset V$ tale che $2 \leq |U| \leq |V| - 2$. Per qualunque formulazione dei vincoli, il numero dei vincoli è prossimo a $2^{|V|}$, o più precisamente

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\binom{|V|}{2} + \binom{|V|}{3} + \cdots + \binom{|V|}{|V|-2} \right]$$

6.36.2 Risoluzione di un problema di programmazione intera

Un modo per risolvere un problema di programmazione intera è quella di disattendere i vincoli di integrità delle variabili: non sapendo risolvere un problema di programmazione intera si considera tale problema come uno di programmazione continua.
Si consideri il seguente problema:

$$\begin{aligned} &\max z = 1.00x_1 + 0.64x_2 \\ &50x_1 + 31x_2 \leq 250 \\ &3x_1 - 2x_2 \geq -4 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \text{ interi} \end{aligned}$$

Allora

- la soluzione ottimale intera è $(5, 0)$;
- la soluzione ottimale senza considerare i vincoli di integrità delle variabili è

$$\left(\frac{376}{193}, \frac{950}{193}\right) = (1.948, 4.922)$$

Ovviamente non è possibile utilizzare il simplesso per risolvere un problema di programmazione intera, in quanto la regione ammissibile non è un poliedro e non esiste nemmeno il concetto di vertice.

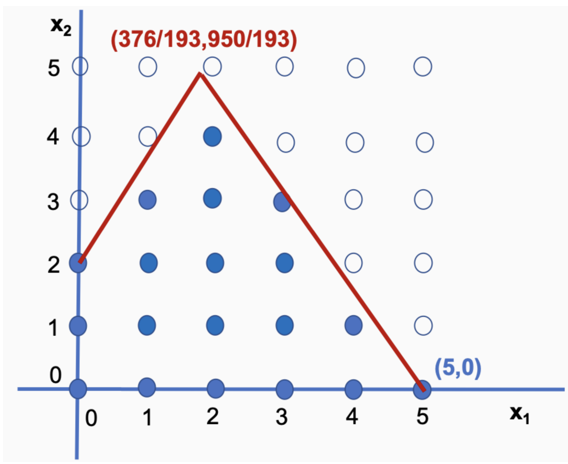


Figura 6: FRappresentazione di un problema di programmazione intera

Ci si potrebbe chiedere se non sia possibile arrotondare per eccesso e/o per difetto la soluzione lineare, in modo tale da ricondursi ad una soluzione intera

- la parte intera superiore $(\lceil 1.948 \rceil, \lceil 4,922 \rceil) = (2,5)$ non è ammissibile (il primo vincolo è violato);
- la parte intera inferiore $(\lfloor 1.948 \rfloor, \lfloor 4.922 \rfloor) = (1,4)$ non è ammissibile (il secondo vincolo è violato);
- la scelta mista $(\rfloor 1.948 \lfloor, \lceil 4.922 \rceil) = (1,5)$ non è ammissibile (il secondo vincolo è violato).
- la scelta mista $(\lceil 1.948 \rceil, \lfloor 4.922 \rfloor) = (2,4)$ è ammissibile ma non ottima: $z(2,4) = 4.56$, mentre $z(5,0) = 5$.

Non solo, nessun arrotondamento dà come risultato $z(5,0)$, per cui, in conclusione, la soluzione lineare sembra essere inutile per trovare la soluzione intera.

6.36.3 Ottimalità

Dato un problema di programmazione intera, come è possibile dimostrare che un dato punto x^* è ottimale?
Tale domanda è fondamentale in quanto si è visto che l'enumerazione delle soluzioni potrebbe non essere possibile, mentre ignorare i vincoli di integrità delle variabili potrebbe non fornire informazioni utili. Bisogna, quindi trovare delle alternative (cioè degli algoritmi) per risolvere un problema di programmazione intera.

6.36.4 Limiti

L'approccio più comune per risolvere i problemi di programmazione intera è quello di trovare sequenze di limiti fino a quando non sono "abbastanza vicini", per cui si definisce

LIMITE SUPERIORE

Se z è il valore ottimo di un problema di progrmmazione intera, un limite superiore è un valore $\overline{z}$ tale che $\overline{z} \geq z$.

LIMITE INFERIORE

Se z è il valore ottimo di un problema di progrmmazione intera, un limite inferiore è un valore $\underline{z}$ tale che $\underline{z} \leq z$.

Idealmente, si vorrebbe trovare $\overline{z}$ e $\underline{z}$ tali che $\underline{z} = z = \overline{z}$.
Da un punto di vista meramente pratico, qualsiasi algoritmo cercherà una sequenza decrescente di limiti superiori

$$\overline{z_1} > \overline{z_2} > \cdots > \overline{z_s} \geq z$$

e una sequenza crescente di limiti inferiori

$$\underline{z_1} < \underline{z_2} < \cdots < \underline{z_t} \leq z$$

e ci si ferma quando

$$\overline{z_s} - \underline{z_t} \leq \epsilon$$

dove ϵ è un valore appropriato non negativo.

Osservazione 1: Si osservi che ogni soluzione ammissibile $\hat{x} \in X$ fornisce un limite inferiore (o primale) $z = c(\hat{x}) \leq z$.

Per il problema

$$\begin{aligned}
&\max z = 1.00x_1 + 0.64x_2 \\
&50x_1 + 31x_2 \leq 250 \\
&3x_1 - 2x_2 \geq -4 \\
&x_1, x_2 \geq 0 \text{ interi}
\end{aligned}$$

si è visto che arrotondando la soluzione lineare ottimale, ossia $\hat{x} = (2, 4)$ è una soluzione ammissibile tale che $z = c(\hat{x}) = 4.56 \leq z$.

Osservazione 2: La ricerca di limiti superiori potrebbe essere meno ovvia. L'idea più comune è quella di sostituire un problema di programmazione intera "difficile" con un problema di ottimizzazione più semplice, il cui valore ottimale sia almeno pari a z. Il problema più semplice può essere ottenuto con un "**rilassamento**", cioè

- allargando l'insieme delle soluzioni ammissibili in modo da ottimizzare su un insieme più ampio;
- sostituendo la funzione obiettivo con una funzione che abbia ovunque lo stesso valore o un valore maggiore.

RILASSAMENTO

Un problema

$$(RP) x^R = \max\{f(x) : x \in T \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

è un **problema di rilassamento** di

$$(IP) z = \max\{c(x) : x \in X \subseteq \mathbb{Z}^n\}$$

se

- $X \subseteq T$;
- $f(x) \geq c(x) \quad \forall x \in X$.

In questo modo, se x^* è la soluzione ottimale di un problema di programmazione intera, xon $x^* \in X \subseteq T$ e con $x = c(x^*) \leq f(x^*)$; pertanto, come $x^* \in T$, allora $f(x^*)$ è un limite inferiore per x^R, e quindi

$$z \leq f(x^*) \leq z^R$$

per cui z^R è un limite superiore.

6.36.5 Rilassamento lineare

Per programma intero

$$\max\{cx : x \in X = P \cap \mathbb{Z}^n\}$$

con formulazione

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$$

il **rilassamento di programmazione lineare** è il programma lineare

$$z^{LP} = \max\{cx : x \in P\}$$

Poiché $X = P \cap \mathbb{Z}^n \subseteq P$ e la funzione obiettivo è invariata, si tratta chiaramente di un rilassamento.

Esempio 1: Si consideri il seguente esempio di rilassamento

Problema di programmazione intera originario	Rilassamento lineare
$\max z = 1.00x_1 + 0.64x_2$	$\max z^{LP} = 1.00x_1 + 0.64x_2$
$50x_1 + 31x_2 \leq 250$	$50x_1 + 31x_2 \leq 250$
$3x_1 - 2x_2 \geq -4$	$3x_1 - 2x_2 \geq -4$
$x_1, x_2 \geq 0$ interi	$x_1, x_2 \geq 0$

Allora, per quanto osservato, si ha che

- la soluzione intera ottimale è $(5, 0)$ e $z = 5$;
- La soluzione ottimale del rilassamento lineare è

$$\left(\frac{376}{193}, \frac{950}{193}\right) \quad \text{e} \quad z^{LP} = \frac{948}{193} = 5.098$$

Allora è noto che il limite inferiore è $\underline{z} = 4.560$ e il limite superiore è $\overline{z} = 5.098$. Il valore ottimale z è quindi compreso tra

$$\underline{z} = 4.560 \leq z \leq 5.098 = \overline{z}$$

In effetti, $z = 5$. Le informazioni che si ottengono trascurando i vincoli di integrità delle variabili possono essere, quindi, davvero molto utili.

Esempio 2: Si consideri il seguente problema di programmazione intera

$$\begin{aligned}
&z = \max 4x_1 - x_2 \\
&7x_1 - 2x_2 \leq 14 \\
&x_2 \leq 3 \\
&2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\
&x_1, x_2 \geq 0 \text{ interi}
\end{aligned}$$

È facile vedere che $(2, 1)$ è una soluzione ammissibile, e quindi si ottiene il limite inferiore $\underline{z} = 7$. La soluzione ottimale del rilassamento lineare è $x^* = \left(\frac{20}{7}, 3\right)$ che produce il limite superiore $\overline{z} = \frac{59}{7} = 8.43$.

Poiché **tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono interi** (cioè $(4, -1)$), anche il valore ottimale z deve essere intero. Quindi, è possibile considerare come limite superiore $\overline{z} = \lfloor 8,43 \rfloor = 8$. Quindi

$$\underline{z} = 7 \leq z \leq 8 = \overline{z}$$

24 Novembre 2022

Quando si deve risolvere un problema di programmazione intera, la prima cosa che si fa è provare a risolvere il problema di programmazione lineare associato.
Tuttavia, un punto di partenza naturale nella risoluzione di programmi interi lineari

$$(IP) \quad \max\{cx : Ax \leq b, \quad x \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

con dati interi (A, b) è chiedersi quando si avrà la fortuna che il rilassamento di programmazione lineare

$$(LP) \quad \max\{cx : Ax \leq b, \quad x \in \mathbb{R}_+^n\}$$

avrà una soluzione ottimale che è intera.

6.37 Matrice totalmente unimodulare

Di seguito si fornisce la definizione di **matrice totalmente unimodulare**:

MATRICE TOTALMENTE UNIMODULARE

Una matrice A è **totalmente unimodulare** (TU) se ogni sottomatrice quadrata di A ha determinante $+1$, -1 o 0.
In particolare, se A è TU, allora $a_{i,j} \in \{+1, -1, 0\}$.

Osservazione 1: In particolare si ha che A è una matrice TU **se e solo se**

- la matrice trasposta A^T è TU;
- la matrice $[A|I]$ è TU.

Osservazione 2: In particolare si ha che una matrice A è TU se

1. $a_{i,j} \in \{+1, -1, 0\}$;
2. ogni colonna contiene al massimo due coefficienti non nulli, cioè
$$\sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}| \leq 2$$
3. esiste una partizione (M_1, M_2) delle M righe tale che ogni colonna j contenente due coefficienti non nulli soddisfa
$$\sum_{i \in M_1} a_{i,j} - \sum_{i \in M_2} a_{i,j} = 0$$

In cui la condizione 3 significa che se i coefficienti non nulli sono nella riga i e k, e se $a_{i,j} = -a_{k,j}$ allora $\{i, k\} \in M_1$ o $\{i, k\} \in M_2$, mentre se $a_{i,j} = a_{k,j}$ con $i \in M_1$ e $k \in M_2$ o viceversa.

6.38 Soluzione intera con matrice totalmente unimodulare

Si espone di seguito un risultato fondamentale

SOLUZIONE INTERA CON MATRICE TOTALMENTE UNIMODULARE

Il problema di programmazione lineare

$$\max\{cx : Ax \leq b, \quad x \in \mathbb{R}_+^n\}$$

ha una soluzione ottimale intera per tutti i vettori interi b per i quali ha un valore ottimale finito **se e solo se** A è totalmente unimodulare.

6.39 Problema del flusso di rete a costo minimo

Dato un digrafo $D = (V, A)$ con capacità degli archi $h_{i,j}$ per tutti $(i, j) \in A$, richieste b_i (afflussi positivi o deflussi negativi) in ogni nodo $i \in V$, e costi unitari di flusso $c_{i,j}$ per tutti $(i, j) \in A$, il **problema del flusso di rete a costo minimo** consiste nel trovare un flusso fattibile che soddisfi tutte le richieste al costo minimo.
La formulazione è la seguente

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$$
$$\sum_{k\in V^*(i)} x_{i,k} - \sum_{k\in V^-(i)} x_{k,i} = b_i \quad \forall i \in V$$
$$0 \leq x_{i,j} \leq h_{i,j} \quad \forall (i, j) \in A$$

dove $x_{i,j}$ denota il flusso nell'arco (i, j), con

$$V^+(i) = \{k : (i, k) \in A\} \quad \text{e} \quad V^-(i) = \{k : (k, i) \in A\}$$

La formalizzazione permette di ottenere il risultato seguente, in cui ad ogni riga corrisponde un nodo e le colonne rappresentano gli archi della forma $x_{i,j}$ che avranno segno positivo se sono uscenti, negativo se entranti e nullo se nessuno dei due.

$x_{1,2}$	$x_{1,4}$	$x_{2,3}$	$x_{3,1}$	$x_{3,2}$	$x_{3,5}$	$x_{3,6}$	$x_{4,5}$	$x_{5,1}$	$x_{5,3}$	$x_{6,5}$

I vincoli aggiuntivi sono i vincoli di capacità $0 \leq x_{i,j} \leq h_{i,j}$.

Osservazione: Per ogni colonna vi devono essere almeno due termini non negativi e i termini non negativi devono appartenere alla medesima classe. Ma questo è ovvio in quanto ogni arco ha molteplicità 1 ed entra in un nodo ed esce da un altro, per cui la matrice sarà sempre totalmente unimodulare.

MATRICE TOTALMENTE UNIMODULARE PER PROBLEMA DI FLUSSO DI RETE A COSTO MINIMO

La matrice di vincoli A di un problema di flusso di rete a costo minimo è totalmente unimodulare.

Dimostrazione: La matrice A è della forma

$$\begin{pmatrix} C \\ I \end{pmatrix}$$

dove C deriva dai vincoli di conservazione del flusso e I è una matrice identica derivante dai vincoli di capacità, avente ordine n.
È quindi sufficiente dimostrare che C è TU. Le condizioni sufficienti per la totale unimodularità della proposizione precedentemente esposta sono soddisfatte con $M_1 = M$ e $M_2 = \varnothing$.

COROLLARIO

In un problema di flusso di rete a costo minimo, se le richieste $\{b_i\}$ e le capacità $\{h_{i,j}\}$ sono interi

- ogni punto estremo è intero;
- i vincoli (2) e (3) descrivono l'insieme convesso dei flussi fattibili interi.

Tale corollario, quindi, significa che il rilassamento lineare del problema del flusso di rete a costo minimo fornisce sempre una soluzione intera a condizione che tutte le capacità $\{h_{i,j}\}$ e le richieste $\{b_i\}$ siano integrali.

Esempio: Esempi tipici di particolari casi di problemi di flusso di rete a costo minimo sono

- **Problema del percorso più breve**
  Dato un digrafo $D = (V, A)$, due nodi distinti $s, t \in V$, e costi degli archi non negativi $c_{i,j}$ per $(i, j) \in A$, trovare un percorso di costo minimo $s - t$.
- **Problema del flusso massimo**
  Dato un digrafo $D = (V, A)$, due nodi distinti $s, t \in V$, e capacità non negative $h_{i,j}$ per $(i, j) \in A$, trovare un percorso di flusso massimo da s a t.
- **Problema del trasporto**
  Siano presenti m fornitori e n consumatori. Il fornitore i-esimo può fornire a_i unità di un certo bene e il consumatore j-esimo ha una domanda di b_j unità. Se $c_{i,j}$ è il costo di trasporto di un'unità di bene dall'i-esimo fornitore al j-esimo consumatore, il problema consiste nel trasportare i beni dai fornitori ai consumatori al costo minimo.
- **Problema dell'assegnazione**
  È un caso speciale del problema del trasporto, in cui il numero di fornitori è uguale al numero di consumatori, ogni fornitore ha un'offerta unitaria e ogni consumatore ha una domanda unitaria.

25 Novembre 2022

7 Teoria dei giochi - Strategie pure

Fino a questo momento sono stati analizzati prevalentemente problemi in cui il decisore era unico. Si considerino, ora, casi in cui si abbiano più decisori che agiscono sullo stesso sistema, ma con interessi fra loro non coincidenti, cioè in situazioni di conflitto.
Il risultato di ogni decisore viene a dipendere dalle sue scelte ma anche da quelli degli altri decisori, il che è appunto ciò che accade in situazioni di conflitto: il primo tentativo sistematico di studiare questi problemi è stato condotto dal matematico **Von Neumann** negli anni che precedettero la seconda guerra mondiale e ha dato vita ad una fortunata branca della matematica applicata nota con il nome di **teoria dei giochi**.

TEORIA DEI GIOCHI

In un gioco ciascuno dei decisori che vengono normalmente chiamati **giocatori** ha una funzione obiettivo (che può essere un costo o un beneficio) detto spesso **funzione di payoff**.
Esistono giochi anche con n giocatori ognuno dei quali fa le sue scelte conoscendo completamente o solo in parte (informazione incompleta) le caratteristiche del problema.
Un gioco è detto **deterministico** se in esso non interviene il caso, per cui il risultato di un gioco deterministico, cioè il valore delle varie funzioni di payoff

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

per tutti gli n giocatori, è perfettamente noto una volta che siano note le scelte dei vari giocatori.
Se ogni giocatore ha a disposizione un numero infinito di scelte il gioco si dice **continuo** per distinguerlo dal caso, detto **discreto**, in cui le variabili hanno numero finito di possibili valori e quindi anche il gioco presenta un numero finito di possibili conclusioni. A seconda del tipo di situazione si possono avere

- Casi di conflitto puro;
- Casi in cui è possibile la cooperazione tra i giocatori;
- Casi in cui alcuni giocatori posso coalizzarsi con altri.

7.1 Giochi a somma nulla

Di seguito si espone il significato di **giochi a somma nulla**:

GIOCHI A SOMMA NULLA

Se la somma delle funzioni di payoff di tutti i giocatori è uguale a 0 si dirà che si tratta di un gioco a **somma nulla**.
Se invece è diversa da 0 si dirà che il gioco è a **somma non nulla**.
Esiste una sostanziale differenza tra questi due casi: nel secondo infatti può accadere che si abbiano soluzioni vantaggiose per tutti gli n giocatori, purché questi cooperino, mentre nel primo caso ciò è escluso: qualcuno vince qualcun altro perde.

Osservazione: Nel caso particolare di **due giocatori**, se risulta

$$f_1 + f_2 = 0$$

e quindi $f_1 = -f_2$: si dice, in questo caso, che il gioco è **a due persone** e **a somma nulla**. In questo caso non è possibile né la cooperazione né la coalizione fra i due giocatori perché ciò che un giocatore vince viene perso dall'altro.

Esempio: Lucy e Linus giocano. Ciascuno di loro compie l'azione di mostrare contemporaneamente all'altro uno o due dita: Linus paga a Lucy tanti centesimi quant'è la somma delle dita.
Si tratta di un gioco con scarse probabilità di successo poiché nessuna persona sana di mente accetterebbe il ruolo di Linus. Le coppie di strategie possibili sono quattro e precisamente, indicando prima la scelta di Lucy e poi quella di Linus:

- 1 dito - 1 dito;
- 1 dito - 2 dita;
- 2 dita - 1 dito;
- 2 dita - 2 dita;

Il gioco si esaurisce con una coppia di mosse dei due giocatori dopodiché si può stabilire il risultato. Le vincite di Lucy (che poi sono le perdite di Linus) si possono esprimere mediante una matrice 2×2 molto semplice (sulle righe sono elencate le mosse di Lucy e sulle colonne quelle di Linus), come mostrato di seguito:

		Linus	
		$1d$	$2d$
Lucy	$1d$	2	3
	$2d$	3	4

In ogni partita se Lucy sceglie la strategia $1d$ (cioè mostra un dito) il minimo che vince e 2, se sceglie $2d$ (cioè mostra due dita) il minimo che vince è 3. Per ogni strategia di Lucy esiste un valore minimo della sua vincita indipendentemente dalle scelte di Linus. Il massimo di questi minimi è detto **max-min** che significa, appunto, massimo dei minimi (delle vincite). Nell' esempio considerato, il max-min è 3 e Lucy lo ottiene giocando $2d$.
Dal punto di vista di Linus, se egli sceglie di giocare $1d$ può perdere al massimo 3. Se sceglie di giocare $2d$ può perdere al massimo 4. Il minimo di questi massimi è quindi 3 e Linus lo tiene giocando $1d$: questo valore viene detto **min-max**, cioè il minimo dei massimi (delle perdite).
In conclusione, a Lucy conviene sempre giocare $2d$, mentre a Linus converrà sempre giocare $1d$: a entrambi conviene fare la scelta corrispondente alla mossa che dà il **max-min** o il **min-max** rispettivamente, per tutte le partite future. La casella che corrisponde alle due strategie dà come risultato $+3$ per Lucy e -3 per Linus: nessuno dei due ha interesse a modificare la sua scelta durante le varie partite del gioco perché peggiorerebbe il suo risultato. Questa casella rappresenta quindi un punto di equilibrio per il gioco.

7.2 Gioco

Di seguito si espone la definizione di **gioco**:

GIOCO

Un gioco è un insieme di partite fatte seguendo un sistema di regole; una partita è un insieme di azioni dette **mosse** fatte secondo le **regole**, che si conclude con un risultato per ciascuno dei partecipanti, detti **giocatori**.
Le **regole** devono essere non ambigue e non contraddittorie e devono permettere di precisare lo stato iniziale e quello finale del gioco. Ogni gioco è quindi analizzabile in linea di principio con un sistema in grado di evolversi nel tempo, compiendo una serie di transizioni definite dalle regole del gioco.

7.3 Strategie

Di seguito si espone la definizione di **strategia**:

STRATEGIA

Una strategia è costituita da uno o più principi di scelta in base ai quali il giocatore decide l'insieme delle azioni secondo cui sviluppare il gioco.
Una strategia deve essere in grado di determinare le scelte di tutte le situazioni che possono presentarsi. Quindi una strategia è l'insieme dei principi che determinano le mosse durante il gioco:

- se una strategia adotta a priori la decisione di fare sempre la stessa scelta per tutte le partite, essa viene detta **pura**;
- se la scelta viene fatta di volta in volta in base allo sviluppo del gioco o qualche altro criterio, si parla di **strategia mist**a.

7.4 Matrice del gioco

Per giochi a due persone a somma nulla, se sono di tipo discreto, essi sono completamente descritti assegnando una sola matrice che è detta **matrice del gioco**. A ogni coppia di strategie è possibile associare una funzione di beneficio (cioè una vincita) o di costo (cioè una perdita) che dipende dalle scelte dei due giocatori: di solito si preferisce usare solo la funzione di beneficio del primo giocatore (che è anche la funzione di costo del secondo), indicando in essa con segno "$-$" i benefici negativi (cioè i costi) per lui.
Dato un gioco di tipo discreto con due giocatori A e B, a somma nulla, se il giocatore A dispone di m' scelte $a_1, a_2, \ldots, a_{m'}$ e il giocatore B di m'' scelte $b_1, b_2, \ldots, b_{m''}$ il gioco si dice $m' \times m''$ dalle dimensioni della matrice del gioco che lo rappresenta.
La matrice è descritta dal punto di vista di A. Se ci si riferisce a B si dovrà cambiare segno a tutti gli elementi della matrice. Da ora in poi si chiameranno tali elementi con $c_{i,j}$, per $1 \leq i \leq m'$ e $1 \leq j \leq m''$.

	b_1	b_2	$\dots$	$b_{m''}$
a_1	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$\dots$	$c_{1,m''}$
a_2	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$\dots$	$c_{2,m''}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_{m'}$	$c_{m',1}$	$c_{m',2}$	$\dots$	$c_{m',m''}$

1. A gioca cercando di vincere il più possibile, ma sa che B cerca di minimizzare le perdite. Quindi A determina riga per riga la sua **vincita nel caso peggiore**, cioè determina il valore minimo di ogni riga. Sia v_i la vincita peggiore nella riga i-esima, cioè

$$v_i = \min_{j=1,\ldots,m''} c_{i,j} \quad \text{per} \quad i = 1, \ldots, m'$$

   Siccome A vuole vincere il massimo possibile qualunque cosa faccia B, egli sceglie una strategia (cioè la riga) che gli dà il massimo valore di v_i, cioè la vincita massima del caso peggiore. In definitiva secondo questa logica è possibile definire le vincite di A nel modo seguente:

$$v^\circ = \max_{i=1,\ldots,m'} v_i = \max_{i=1,\ldots,m'} \left(\min_{j=1,\ldots,m''} c_{i,j} \right)$$

   Il valore c° viene chiamato **valore inferiore del gioco** o valore di **max-min** per A: con questa strategia egli non può vincere meno di v°.

2. B gioca cercando di perdere il meno possibile. Quindi B determina colonna per colonna la sua perdita maggiore, cioè determina il valore massimo di ogni colonna. Sia w_j la perdita maggiore nella colonna j-esima, cioè

$$w_j = \max_{i=1,\ldots,m'} c_{i,j} \quad \text{per} \quad j = 1, \ldots, m''$$

Siccome B vuole perdere il meno possibile qualunque cosa faccia A, egli sceglie una strategia (cioè la colonna) che gli dà il minimo valore di w_j , cioè la perdita minima del caso peggiore. Si possono quindi definire le perdite di B nel modo seguente:

$$w^\circ = \in_{j=1,\ldots,m''} w_i = \min_{j=1,\ldots,m''} \left(\max_{i=1,\ldots,m'} c_{i,j} \right)$$

Il valore w° viene chiamato **valore superiore del gioco** o valore di **min-max** per B: con questa strategia egli non può perdere più di w°.

Esempio: Si consideri il gioco a somma nulla 3×4 cui viene associata la seguente matrice delle vincite:

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	2	-3	6	2
a_2	-1	-5	-6	8
a_3	3	4	3	1

7.5 Punto di sella

Può succedere che $v^\circ = w^\circ$ e cioè che il valore inferiore e il valore superiore coincidono. Quando ciò accade si è in presenza di un **punto di sella**.

VALORE OTTIMO

Si dice punto di sella di una matrice a due dimensioni l'elemento della matrice (se esiste) che è contemporaneamente il minimo della sua riga e il massimo della sua colonna. Lo si indica con $<< \, ^\circ >>$ e lo si chiama valore ottimo del gioco.

7.6 Equilibrio di Nash

Se un gioco possiede un punto di sella le strategie di A e di B che lo determinano sono dette strategie ottime e la soluzione (cioè il punto di sella) è un punto di equilibrio.

PUNTO DI EQUILIBRIO

Un **punto di equilibrio** o **punto di Nash** è una coppia di strategie pure che determinano una soluzione nella quale nessuno dei due giocatori ha interesse a spostarsi se non lo fa anche il suo avversario.

La coppia di strategie che determinano un punto di equilibrio costituiscono la soluzione ottima del gioco.
In altre parole se esiste un punto di equilibrio è conveniente giocare sempre la coppia di strategie pure che lo realizzano.
I punti di equilibrio rappresentano infatti situazioni di stabilità nel senso che, una volta che i due giocatori hanno deciso di giocare le strategie di equilibrio, nessuno dei due è più interessato a muoversi.

Esempio 1: Si consideri il gioco con la seguente matrice

	b_1	b_2	b_3
a_1	2	1	4
a_2	2	0	1

Si osserva che nessun elemento della prima riga è inferiore a quello corrispondente della seconda riga. Si dice quindi che la prima riga è **dominante**, allora il primo giocatore sceglie certamente la prima riga, e $v^\circ = 1$.
Analogamente si osserva che la seconda colonna domina le altre due (ha tutti i coefficienti più piccoli di quelli corrispondenti sulle altre colonne) e quindi consente la minor perdita. Il secondo giocatore sceglie certamente la seconda colonna, e $w^\circ = 1$.
$c_{1,2}$ è il minimo della sua riga e il massimo della sua colonna: in altre parole è un punto di equilibrio di Nash.

$$c_{1,2} = \max_i \min_j c_{i,j} = \min_j \max_i c_{i,j} = 1$$

Esempio 2: Si consideri il gioco con la seguente matrice

	b_1	b_2	b_3	min
a_1	-3	-2	6	-3
a_2	2	0	2	0
a_3	5	-2	-4	-4
max	5	0	6	

In questo caso, no c'è nessuna riga o colonna dominante. Tuttavia, $c_{2,2}$ è il minimo della sua riga e il massimo della sua colonna. Pertanto è un punto di equilibrio di Nash.

$$c_{2,2} = \max_i \min_j c_{i,j} = \min_j \max_i c_{i,j} = 0$$

Esempio 3: Si consideri il gioco con la seguente matrice

	b_1	b_2	b_3	min
a_1	0	-2	2	-2
a_2	5	4	-3	-3
a_3	2	3	-4	-4
max	5	4	2	

Si osserva che

$$v^\circ = \max_i \min_j c_{i,j} = -2$$

mentre

$$w^\circ = \min_j \max_i c_{i,j} = 2$$

quindi $v^\circ \neq w^\circ$: infatti $v^\circ = c_{1,2}$, mentre $w^\circ = c_{3,1}$. Si ottiene un **gioco instabile** o **ciclico**.
Si supponga che ogni giocatore sappia che l'altro gioca in maniera razionale (minor perdita). Se

quindi B si aspetta che A scelga a_1, B sceglierà b_2. Ma sospettando ciò A gioca a_2 e quindi B giocherà b_3, ma allora A sceglie a_1 e si ritorna al punto di partenza.

7.7 Dilemma del prigioniero

Due malfattori, accusati di aver commesso una serie di delitti, vengono catturati e rinchiusi in due celle separate, senza alcuna possibilità di comunicazione.
Entrambi sanno che le prove contro di loro non sono conclusive e conoscono bene il sistema giudiziario del loro paese, che tiene in grande considerazione la confessione dell'imputato.
Ogni prigioniero ha due alternative: non confessare (N) oppure confessare (C); se entrambi non confessano (N, N) sanno che potranno venire accusati solo di qualche reato minore e ognuno dovrà scontare un anno di prigione. Se entrambi confessano (C, C) verranno condannati a 8 anni di prigione dal momento che il giudice commina una pena inferiore al massimo previsto (10 anni). Se invece un prigioniero non confessa e l'altro sì, il primo riceverà il massimo della pena (10 anni) mentre colui che ha tradito il compagno se la caverà con mezzo anno di prigione.
Il gioco presenta pertanto la seguente tabella di perdite:

	N	C
N	$1, 1$	$10, \frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{2}, 10$	$8, 8$

È interessante notare che l'unico punto di equilibrio del gioco è la coppia di strategie (C, C) che dà risultati peggiori per entrambi giocatori rispetto alla coppia (N, N) che non è un punto di equilibrio. Infatti ogni prigioniero preso singolarmente, nella situazione (N, N), ha interesse a confessare dal momento che ciò migliora la sua posizione qualsiasi sia la scelta del'altro su cui egli non può influire.
Il caso (N, N), che consente complessivamente il risultato migliore, si ha solo se ciascuno è disposto a sacrificare qualcosa rispetto la propria situazione ottimale (mezzo anno di prigione) e se ha fiducia nel fatto che lo farà anche un altro, cioè i due giocatori devono cooperare.

28 Novembre 2022

Si è visto che nella teoria dei giochi vi sono due giocatori, il primo cercherà di massimizzare le vincite e il secondo di minimizzare le perdite. Non sempre c'è un equilibrio delle giocate: se c'è equilibrio il gioco termina, altrimenti si cicla all'infinita perseguendo la giocata migliore.
Tuttavia, esistono anche altre strategie di gioco, che prevedono di associare ad ogni scelta una probabilità.

7.8 Strategie miste

Si indichi con $x(i)$ la probabilità che il primo giocatore scelga la strategia i-esima, in cui $i = 1, \dots, m$. Si indica, invece, con $y(j)$ la probabilità che il secondo giocatore scelga la strategia j-esima, in cui $j = 1, \dots, n$.
Ovviamente, per definizione di probabilità si ha che

$$\sum_i x(i) = 1 \quad \text{e} \quad \sum_j y(j) = 1$$

e naturalmente si ha che $x(i) \geq 0\ \forall i$, così come $y(j) \geq 0\ \forall j$.
Indicando con $p(i,j)$ gli elementi della matrice A, associato ad una vincita del giocatore A, oppure ad una perdita del giocatore B, si osserva che

$$\max_x \min_y \sum_i \sum_j x(i) \cdot y(j) \cdot p(i,j) = \min_y \max_x \sum_i \sum_j x(i) \cdot y(j) \cdot p(i,j)$$

ed è sempre vero che tale uguaglianza è verificata. Ciò suggerisce, quindi, che con le strategie miste l'equilibrio esiste sempre.

Esempio: Si consideri il gioco con la seguente matrice

	y_1	y_2	y_3	min
x_1	0	-2	2	-2
x_2	5	4	-3	-3
max	5	4	2	

Con questa schematizzazione è facile evincere che

$$v_0 = \max_i \min_j p(i,j) = -2 \quad \text{e} \quad w_0 = \min_j \max_i p(i,j) = 2$$

Siccome la probabilità di ogni scelta è non negativa e la loro somma è sempre 1, si evince che

$$x_1 + x_2 = 1 \quad \text{e} \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

in cui è evidente come $x_2 = 1 - x_1$.
Si ottiene che

$$\max_x \min_j x_1 y_1 p_{1,1} + x_1 y_2 p_{1,2} + x_1 y_3 p_{1,3} + x_2 y_1 p_{2,1} + x_2 y_2 p_{2,2} + x_2 y_3 p_{2,3}$$

che per la relazione $x_2 = 1 - x_1$ può essere riscritta come

$$\max_x \min_j x_1 y_1 p_{1,1} + x_1 y_2 p_{1,2} + x_1 y_3 p_{1,3} + (1 - x_1) \cdot y_1 p_{2,1} + (1 - x_1) \cdot y_2 p_{2,2} + (1 - x_1) \cdot y_3 p_{2,3}$$

raccogliendo opportunamente si può scrivere

$$(x_1 p_{1,1} - x_1 p_{2,1} + p_{2,1}) y_1 + (x_1 p_{1,2} - x_1 p_{2,2} + p_{2,2}) y_2 + (x_1 p_{1,3} - x_1 p_{2,3} + p_{2,3}) y_3$$

Sostituendo opportunamente i valori di $p_{i,j}$ si ottiene

$(-5x_1+5)y_1+[(-2-4)x_1+4]\,y_2+[(2+3)x_1-3]\,y_3=(-5x_1+5)y_1+(-6x_1+4)y_2+(5x_1-3)y_3$

Si sono, quindi, ottenute delle rette in funzione di x_1, che possono essere rappresentate in un piano xy, annullando prima x_1 e poi vedendo quando il prodotto si può annullare con $x_1 \neq 0$. Pertanto

1. $(-5x_1+5)y_1$ interseca gli assi in $(0,5)$ e $(1,0)$;
2. $(-6x_1+4)y_2$ interseca gli assi in $(0,4)$ e $\left(\frac{2}{3},0\right)$;
3. $(5x_1-3)y_3$ interseca gli assi in $(0,-3)$ e $\left(\frac{3}{5},0\right)$.

Individuando, ora, per ciascun x_1 del piano qual'è la retta che ha il valore minimo corrispondente, andando a scegliere di volta in volta la retta di interesse: si ottiene, quindi, una spezzata di cui si può individuare il valore massimo, che sta sempre in un vertice: questa sarebbe la probabilità di giocare la prima scelta che massimizza il la vincita. Per trovare tale punto x_1^* si calcola l'intersezione della seconda e della terza retta

$$\begin{cases} -6x_1+4=y \\ 5x_1-3=y \end{cases} \quad \rightarrow \quad x_1^*=\frac{7}{11} \quad \text{e} \quad x_2^*=\frac{4}{11}$$

Il valore della vincita corrispondente a tale scelta sarà

$$5x_1^*-3=5\cdot\frac{35}{11}-\frac{33}{11}=\frac{2}{11}$$

Osservazione: In questo caso sono stati trovati i valori di probabilità ottimi per il primo giocatore, nella condizione in cui il primo presenti due scelte possibili. Ma in generale, quando si hanno più di 2 scelte per ciascun giocatore, si deve risolvere un vero e proprio problema di programmazione lineare.
Pertanto, ponendosi dal punto di vista del primo giocatore, egli deve eseguire

$$undersetx\max\min_j \sum_i \sum_j x(i)y(j)p(i,j)$$

in cui vi sono dei vincoli imposti dal problema ed esposti in precedenza

- $x(i) \geq 0$ con $i=1,\ldots,m$
- $\sum_{i=1}^{m} x(i)=1$
- $\sum_{y=1}^{n} y(j)=1$

Lavorando rispetto al minimo sulle colonne, un primo problema richiede che

$$\min_j \sum_i x(i)\cdot p(i,j)$$

ossia la minima vincita attesa per il primo giocatore, denotato come u. Ma siccome si cerca il massimo valore possibile della minima vincita attesa, ovvero si cerca

$$\begin{aligned} &\max u \\ &\sum_j x(i)p(i,j) \geq u \quad \forall j \qquad\qquad \sum_i x(i)=1 \\ &x(i) \geq 0 \quad \forall j \end{aligned}$$

in cui il secondo vincolo deriva, ovviamente, dal fatto che u è la minima vincita attesa, per cui tutte le altre vincite saranno maggiori di u. Gli ultimi due vincoli riguardano la probabilità, che è sempre non negativa e siccome una scelta viene sempre fatta, la probabilità somma a 1.
Si noti, infine, che questo è uno e un solo problema, in cui u è una variabile decisionale come le altre, solo che non presenta il vincolo di non negatività come le altre variabili decisionali.
Se ora si risolvesse il problema precedente con questa formalizzazione si otterrebbe

$$x^*(1) = \frac{7}{11} \quad x^*(2) = \frac{4}{11} \quad u^* = \frac{2}{11}$$

Se ora si volesse realizzare il duale di tale problema, si potrebbe riscriverlo in forma standard come segue

$$\begin{aligned}
&\max u \\
&\sum_j x(i)p(i,j) - u \geq 0 \quad \forall j \\
&\sum_i x(i) = 1 \\
&x(i) \geq 0 \quad \forall i
\end{aligned}$$

e volendo avere dei vincoli di $\leq$ si ottiene

$$\begin{aligned}
&\max u \\
&-\sum_j x(i)p(i,j) + u \leq 0 \quad \forall j \\
&\sum_i x(i) = 1 \\
&x(i) \geq 0 \quad \forall i
\end{aligned}$$

In questa forma, allora, è possibile realizzare il problema duale; per cui

$$\begin{aligned}
&\min v \\
&\sum_j y(j) = 1 \\
&y(j) \geq 0 \quad \forall j \\
&-\sum_j y(j)p(i,j) + v \geq 0 \quad \forall j
\end{aligned}$$

che può essere riscritto come

$$\begin{aligned}
&\min v \\
&\sum_j y(j) \cdot p(i,j) \leq v \\
&\sum_j y(j) = 1 \\
&y(j) \geq 0 \quad \forall j
\end{aligned}$$

che è esattamente il problema del secondo giocatore. Per il teorema di dualità forte si ha che il $\max u = \min v$, che è esattamente la relazione scritta all'inizio della dissertazione. Si osservi, infine, che esiste sempre la soluzione ottima finita primale che deve corrispondere alla soluzione ottima finita duale.

1 Dicembre 2022

8 Formulazione generale di un problema di programmazione non-lineare

Si vuole determinare l'insieme delle variabili $x \in \mathbb{R}^n$ soluzione del problema

$$\begin{aligned} &\max f(x) \\ &g(x) \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

con $b \in \mathbb{R}^m$. Purtroppo, non esiste un metodo generale per risolvere un qualunque problema di programmazione non lineare.

8.1 Programmazione frazionaria

Si supponga che la funzione obiettivo sia una funzione frazionaria, cioè il rapporto di due funzioni

$$\max f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

con $f_2(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Per semplicità si consideri il caso in cui sia $f_1(x)$ che $f_2(x)$ sono lineari, cioè

$$\begin{aligned} f_1(x) &= c^T x + c_0 \\ f_2(x) &= d^T x + d_0 \end{aligned}$$

con $f_2(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
Si consideri, a questo punto, il problema formulato come segue

$$\max f(x) = \frac{c^T x + c_0}{d^T x + d_0} Ax \leq bx \geq 0$$

Si introduce, quindi, la variabile y, definita come segue

$$y = \frac{x}{d^T x + d_0}$$

e lo scalare

$$t = \frac{1}{d^T x + d_0}$$

da cui $y = tx$. La funzione obiettivo, quindi, diventa

$$\max f(x) = c^T y + x_0 t$$

Moltiplicando per t (che è positivo, in quanto $f(x) > 0$ per ipotesi) ambedue i termini nei vincoli si ha

$$\begin{aligned} &Ay \leq bt \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

e si ottiene, così, il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} &\max f(x) = c^T y + x_0 t \\ &Ay - bt \leq 0 \\ &y \geq 0, t \geq 0 \end{aligned}$$

8.2 Condizioni di Kuhn-Tucker

Si espongono di seguito le **condizioni di Kuhn-Tucker**:

CONDIZIONI DI KUHN-TUCKER

Esistono delle condizioni **necessarie** che devono essere soddisfatte dalla soluzione ottima di un qualunque problema di programmazione non lineare, le **condizioni di Kuhn-Tucker (KKT)**.
Non si dimostrano rigorosamente tali condizioni, ma si illustra nel seguito una dimostrazione intuitiva.

Dimostrazione: Si supponga di avere una regione ammissibile e una funzione obiettivo (in verde le linee di livello) come nella Figura 7 seguente

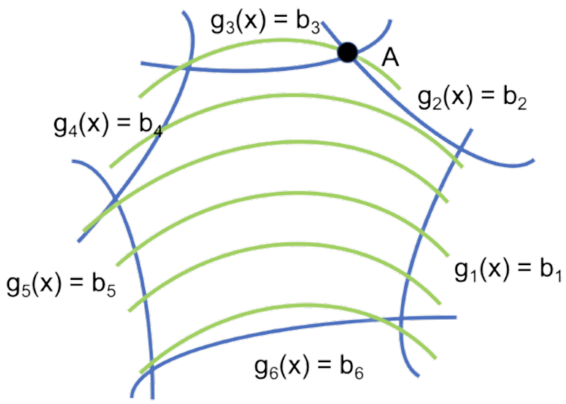


Figura 7: Dimostrazione delle condizioni di Kuhn-Tucker - 1

in cui il valore ottimo si ha nel punto A. Si osservi che nel punto A il ∇f è compreso tra i gradienti di $g_2(x) = b_2$ e di $g_3(x) = b_3$, come illustrato nella Figura 8 seguente

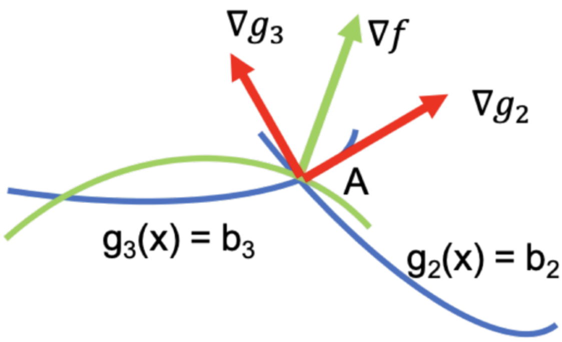


Figura 8: Dimostrazione delle condizioni di Kuhn-Tucker - 2

Quindi se A è il punto della soluzione ottima, deve verificarsi che ∇f sia una combinazione lineare di ∇g_2 e ∇g_3. Devono cioè esistere dei valori λ_2 e λ_3 tali che

$$\nabla f = \lambda_2 \nabla g_2 + \lambda_3 \nabla g_3 \quad \text{in } A \quad \text{con} \quad \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

Quindi se x_0 è la soluzione ottima di un problema di programmazione lineare, deve certamente essere verificata la condizione

$$\begin{cases} \nabla f(x_0) - \lambda^T \nabla g(x_0) = 0 \quad \text{con} \quad g(x) \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}^m \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Così facendo, però, sono state prese in considerazione tutte le g, ossia tutti i vincoli, mentre si era osservato che ∇f è combinazione lineare solamente dei gradienti di g_2 e g_3. Per ottenere la medesimo espressione, basta porre $\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 = \cdots = \lambda_m = 0$, mentre $\lambda_2, \lambda_3 \geq 0$.
La condizione sugli scalari λ_i, con $i = 1, \dots, m$ può essere espressa come

$$\lambda^T \cdot [g(x_0) - b] = 0$$

Infatti se $g_i(x_0) - b_i \neq 0$, cioè x_0 non appartiene a tale vincolo, allora deve essere $\lambda_i = 0$.
Se invece $g_i(x_0) - b_i = 0$, cioè x_0 è un punto del vincolo (come g_2 e g_3 nell'esempio preso in considerazione), allora basterà che sia $\lambda_i \geq 0$.
Dato che x_0 è ammissibile sarà $g_i(x_0) - b_i \leq 0$, $\forall i$, quindi se $\lambda_i = 0$ dovrà essere $g_i(x_0) - b_i \leq 0$; se invece $\lambda_i \neq 0$ sarà sicuramente $g_i(x_0) - b_i = 0$.
Analogamente la condizione $x \geq 0$ si esprime con

$$\begin{cases} x_0^T \cdot \left[\nabla f(x_0) - \lambda^T \cdot \nabla g(x_0)\right] = 0 \\ \nabla f(x_0) - \lambda^T \cdot \nabla g(x_0) \leq 0 \end{cases}$$

Siano, allora

$$f(x), g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$$

funzioni differenziabili che soddisfano condizioni di regolarità (ossia il gradiente è non nullo in ogni punto).
Il punto

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)^T$$

è una soluzione ottima per un problema di programmazione non lineare solo se esistono m numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ tali che tutte le seguenti condizioni KKT sono soddisfatte:

$$\begin{array}{lll}
1. & x_j^* > 0 \rightarrow & \dfrac{\partial f(x_i^*)}{\partial x_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \dfrac{\partial g_i(x_i^*)}{\partial x_j} = 0 j = 1, \dots, n \\
2. & x_j^* = 0 \rightarrow & \dfrac{\partial f(x_i^*)}{\partial x_j} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \dfrac{\partial g_i(x_i^*)}{\partial x_j} \leq 0 j = 1, \dots, n \\
3. & \lambda_i > 0 \rightarrow & g_i(x^*) - b_i = 0 i = 1, \dots, m \\
4. & \lambda_i = 0 \rightarrow & g_i(x^*) - b_i \leq 0 i = 1, \dots, m \\
5. & x_j^* \geq 0 & j = 1, \dots, n \\
6. & \lambda_i \geq 0 & i = 1, \dots, m
\end{array}$$

Tali condizioni possono essere espresse in forma più compatta

1. $x^T \cdot \left[\nabla f(x) - \lambda^T \cdot \nabla g(x)\right] = 0$
2. $\nabla f(x) - \lambda^T \cdot \nabla g(x) \leq 0$
3. $\lambda^T \cdot (g(x) - b) = 0$
4. $g(x) - b \leq 0$
5. $x \geq 0$
6. $\lambda \geq 0$

8.3 Condizioni di Kuhn-Tucker sufficienti

Di seguito si espone la casistica in cui le condizioni di Kuhn-Tucker, oltre ad essere necessarie, sono anche sufficienti:

CONDIZIONI DI KUHN-TUCKER NECESSARIE

Sia $f(x)$ una funzione concava e siano $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ funzioni convesse (cioè il problema considerato è un problema di programamzione convessa). Allora x^* è una soluzione ottima del problema di programamzione non lineare **se e solo se** soddisfa tutte le condizioni KKT.

8.4 Programmazione quadratica

Un problema di programmazione quadratica è definito come

$$\begin{aligned} &\max f(x) = c^T x - \frac{1}{2} x^T Q x \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

con Q matrice simmetrica, cioè $q_{i,j} = q_{j,i}$. Se la funzione obiettivo è concava questo problema si può risolvere con il **metodo del simplesso modificato**.
Un modo per verificare la concavità della funzione obiettivo è quello di verificare l'equivalente condizione che $x^T Q x \geq 0$ per ogni x, e cioè che Q sia una matrice semi-definita positiva.
Poiché $\nabla f = c - Qx$ e $\nabla g = A$, le condizioni KKT diventano

1. $x^T \cdot \left[\nabla f(x) - \lambda^T \cdot \nabla g(x)\right] = 0 \quad \rightarrow \quad x^T \cdot \left[x - Qx - A^T \lambda\right] = 0$
2. $\nabla f(x) - \lambda^T \cdot \nabla g(x) \leq 0 \quad \rightarrow \quad x - Qx - A^T \lambda \leq 0$
3. $\lambda^T \cdot (g(x) - b) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^T \cdot [Ax - b] = 0$
4. $g(x) - b \leq 0 \quad \rightarrow \quad Ax - b \leq 0$
5. $x \geq 0$
6. $\lambda \geq 0$

Si introducano, ora, le variabili di slack y e v rispettivamente per le condizioni 2 e 4. Si ottiene, così

$$\begin{aligned} &y = Qx - c + A^t \lambda \\ &v = b - Ax \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} &x^T y = 0 \\ &\lambda^T v = 0 \\ &Qx + A^T \lambda - y = c \\ &Ax + v = b \\ &x, \lambda, y, v \geq 0 \end{aligned}$$

Poiché tutte le variabili decisionali sono non negative le condizioni di ortogonalità (o complementarità), cioè le due prime condizioni, possono anche essere scritte nella forma

$$x^T t + \lambda^T v = 0$$

Poiché si è ipotizzato che la funzione obiettivo del problema originario sia concava e poiché i vincoli sono lineari e quindi convessi, le condizioni necessarie di KKT sono anche sufficienti.
Quindi x sarà una soluzione ottima **se e solo se** esistono valori di y, λ, v tali che (insieme a x) soddisfano contemporaneamente tali condizioni.

8.5 Metodo del simplesso modificato

Il **metodo del simplesso modificato** è basato sull'osservazione che, a eccezione della condizione di complementarità, le condizioni KKT nella forma ottenuta sopra non sono altro che vincoli lineari.
Inoltre la condizione di complementarità richiede semplicemente che **non è ammissibile che entrambe le variabili complementari siano variabili di base** (le sole variabili strettamente positive).
Pertanto, il problema si riduce a determinare una soluzione di base ammissibile iniziale per un qualsivoglia problema di programmazione lineare con questi vincoli, con questa ulteriore restrizione sulla scelta delle variabili di base.
Nel caso banale in cui $c \leq 0$ e $b \geq 0$, le variabili di base iniziali sono gli elementi di y e v e quindi la soluzione desiderata è $x = 0$, $\lambda = 0$, $y = -c$ e $v = b$. Negli altri casi, occorre modificare il problema introducendo una variabile artificiale in ciascuna delle equazioni cui $c_j > 0$ oppure $b_i < 0$ allo scopo di usare queste variabili artificiali come variabili di base iniziali per il problema modificato (si noti che questa scelta di variabili di base iniziali soddisfa le condizioni di complementarità poiché $x = 0$, $\lambda = 0$ in quanto sono variabili fuori base).
Successivamente si userà la prima fase del metodo del simplesso per determinare la soluzione di base ammissibile per il problema reale, cioè si applicherà il metodo del simplesso (con una piccola modifica) al seguente problema di programmazione lineare

$$\min z = \sum_j z_j$$

soggetto ai vincoli lineari ottenuti dalle condizioni KKT, con l'aggiunta delle variabili artificiali. La sola variazione del metodo del simplesso è la modifica della procedura per la selezione di una variabile entrante.

REGOLA DI SCELTA DELLA VARIABILE ENTRANTE

Quando si sceglie una variabile entrante non si deve tener conto delle variabili fuori base la cui variabile complementare è già una variabile di base. La scelta è ristretta alle altre variabili fuori base secondo il criterio standard utilizzato dal metodo del simplesso.

2 Dicembre 2022

Si espongono, nel seguito, alcuni esempi di programmazione secondo le leggi di KKT.

Esempio 1: Si calcoli

$$\begin{aligned}&\max f(x) = \frac{8x_1 + 6x_2 - 5}{-4x_1 + 2x_2 - 40}\\&x_1 + x_2 \leq 10\\&3x_1 - 5x_2 \leq 6\\&x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

Si introducono, allora la variabile y e lo scalare t come segue

$$y = \frac{x}{d^T x + d_0} \quad \text{e} \quad t = \frac{1}{d^T x + d_0}$$

che si traduce, quindi in

$$y_1 = \frac{x_1}{-4x_1 + 2x_2 - 40} \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{x_2}{-4x_1 + 2x_2 - 40} \quad \text{e} \quad t = \frac{1}{-4x_1 + 2x_2 - 40}$$

per cui si ottiene

$$\begin{aligned}&\max z = 8y_1 + 6y_2 - 5t\\&x_1 t + x_2 t \leq 10t\\&3x_1 t - 5x_1 t \leq 6t\\&x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

in cui la seconda e la terza condizione derivano dal fatto che sono stati moltiplicati i vincoli per t. Tuttavia, tutto ciò ha significato e i segni delle disuguaglianze rimangono inalterati solamente se il denominatore $-4x_1 + 2x_2 - 40$ è strettamente positivo; per capirlo, allora, si considerano i vincoli del problema

$$\begin{aligned}&x_1 + x_2 \leq 10\\&3x_1 - 5x_2 \leq 6\\&x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

e ci si chiede se con tale regione ammissibile il denominatore si effettivamente positivo o meno. Non è difficile capire che con tali condizioni il denominatore $-4x_1 + 2x_2 - 40$ è sempre negativo. Pertanto il segno delle disuguaglianze precedentemente esposte è sbagliato, ossia è invertito, per cui si sostituisce il $\leq$ con $\geq$, da cui

$$\begin{aligned}&\max z = 8y_1 + 6y_2 - 5t\\&x_1 t + x_2 t \geq 10t\\&3x_1 t - 5x_1 t \geq 6t\\&x_1, x_2 \geq 0, t \leq 0\end{aligned}$$

Osservazione: Una delle condizioni necessarie di Kuhn-Tucker afferma che

$$\lambda^T \cdot [g(x) - b] = 0$$

e siccome si sta risolvendo un problema che impone il vincolo $g(x) \leq b$ e $\lambda \geq 0$, allora il prodotto $\lambda^T \cdot [g(x) - b]$ è sempre negativo: l'unica possibilità per cui sia uguale a zero è che $\lambda_i \cdot (g_i(x) - b_i) = 0$ $\forall i$.

Esempio 2: Si consideri il seguente problema

$$\begin{aligned}
&\max f(x) = \log(x_1+1) + x_2 \\
&2x_1 + x_2 \le 3 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

Com'è noto, le condizioni di Kuhn-Tucker possono essere scritte come

$$\begin{array}{lll}
1. & x_j^* > 0 \rightarrow & \dfrac{\partial f(x_i^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \dfrac{\partial g_i(x_i^*)}{\partial x_j} = 0 j = 1, \dots, n \\
2. & x_j^* = 0 \rightarrow & \dfrac{\partial f(x_i^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \dfrac{\partial g_i(x_i^*)}{\partial x_j} \le 0 j = 1, \dots, n \\
3. & \lambda_i > 0 \rightarrow & g_i(x^*) - b_i = 0 i = 1, \dots, m \\
4. & \lambda_i = 0 \rightarrow & g_i(x^*) - b_i \le 0 i = 1, \dots, m \\
5. & x_j^* \ge 0 & j = 1, \dots, n \\
6. & \lambda_i \ge 0 & i = 1, \dots, m
\end{array}$$

Tali condizioni, rispetto al problema considerato, si traducono in

$$\frac{1}{x_1+1} - \lambda - 2\lambda \le 0 \tag{1}$$

$$x_1 \cdot \left(\frac{1}{x_1+1} - 2\lambda \right) = 0 \tag{2}$$

$$1 - \lambda \le 0 \tag{3}$$

$$x_2 \cdot (1 - \lambda) = 0 \tag{4}$$

$$\lambda \cdot (2x_1 + x_2 - 3) = 0 \tag{5}$$

$$2x_1 + x_2 \le 3 \tag{6}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda \ge 0 \tag{7}$$

Dalla disequazione (3) si evince che $\lambda \ge 1$, per cui in base alla (5) è facile capire che $2x_1 + x_2 = 3$. Siccome dalla (3) è noto che $\lambda \ge 1$, si può osservare dalla (1) che

$$\frac{1}{x_1+1} - 2\lambda < 0$$

Ciò, implica, dalla (2) che $x_1 = 0$, per cui $2x_1 + x_2 = 3 \rightarrow x_2 = 3$ e quindi dalla (4) $\lambda = 1$.

Esempio 3: Si consideri il seguente problema

$$\begin{aligned}
&\max f(x) = x_1 + 2x_2 - x_2^3 \\
&x_1 + x_2 \le 1 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

Allora le condizioni di Kuhn-Tucker sono le seguenti

$$1 - \lambda \le 0 \tag{8}$$

$$x_1 \cdot (1 - \lambda) = 0 \tag{9}$$

$$2 - 3x_2^2 - \lambda \le 0 \tag{10}$$

$$x_2 \cdot (2 - 3x_2^2 - \lambda) = 0 \tag{11}$$

$$\lambda \cdot (x_1 + x_2 - 1) = 0 \tag{12}$$

$$x_1 + x_2 \le 1 \tag{13}$$

$$x_1, x_2, \lambda \ge 0 \tag{14}$$

Dalla (1) è immediato che $\lambda \geq 1$, per cui dalla (5) si capisce che $x_1 + x_2 = 1$.
Si formulino, ora, delle ipotesi esecutive. Si supponga, allora che $x_1 > 0$, allora dalla (1) segue che $\lambda = 1$; allora dalla (3) segue che $2x_2^2 \geq 1$, per cui $x_2 \neq 0$ e quindi $x_2 > 0$. Dalla (4) si ottiene che, quindi che

$$2 - 3x_2^2 - \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{in quanto} \quad x_2 > 0$$

Allora si ottiene che

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \lambda = 1$$

Questa è una soluzione che concorda con le ipotesi assunte dal problema; tuttavia bisogna anche considerare l'ipotesi che $x_1 = 0$; siccome $\lambda \geq 1$ dalla (1), si ottiene dalla (5) che $x_2 = 1$; ma ciò implica, per la (4) che

$$2 - 3x_2^3 - \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1$$

che è assurdo, per cui $x_1 \neq 0$.

Esempio 4: Si consideri il seguente problema

$$\begin{aligned} &\max f(x) = 20x_1 + 10x_2 \\ &x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ &x_2 + 2x_2 \leq 2 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Siccome si hanno due vincoli, si dovranno considerare sia λ_1 che λ_2; allora le condizioni sono

$$20 - 2\lambda_1 x_2 - \lambda_1 \leq 0 \tag{15}$$
$$x_1 \cdot (20 - 2\lambda_1 x_2 - x_2) = 0 \tag{16}$$
$$10 - 2\lambda_1 x_2 - 2\lambda_2 \leq 0 \tag{17}$$
$$x_2 \cdot (10 - 2\lambda_1 x_2 - 2\lambda_2) = 0 \tag{18}$$
$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \tag{19}$$
$$x_2 \cdot (\lambda_1 + 2x_2 - 2) = 0 \qquad x_1 + 2x_2 \leq 2 \tag{20}$$
$$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \tag{21}$$

In questo caso più complesso sono da formulare tutte le ipotesi su λ_1 e λ_2. Allora si procede come segue

1. se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ si ottiene dalla (1) una contraddizione, per cui è assurdo;
2. se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$, allora dalla (1) si ha che $\lambda_2 \geq 20$ e dalla (3) si ha che $\lambda_2 \geq 5$. Dalla (7) si ha che

   $$x_1 + 2x_2 = 2 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2 - 2x_2$$

   Dalla (6) si evince che

   $$4 - 8x_2 + 4x_2^2 + x_2^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 5x^2 - 8x_2 + 3 \leq 0$$

   Risolvendo l'equazione associata si ottiene che gli estremi sono

   $$x_2 = 1 \quad \text{oppure} x_2 = \frac{3}{5}$$

   per cui la disequazione è verificata per $x \in \left[\frac{3}{5}, 1\right]$. Tuttavia, per ciascuno di tali valori $x_1 > 0$ e quindi si ottiene dalla (2) e dalla (5) che $\lambda_2 = 5$ e $\lambda_2 = 20$, che è impossibile.
3. Nell'ipotesi in cui $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 = 0$. Pertanto, essendo $\lambda_1 > 0$, dalla (5) che

   $$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Non solo, ma dalla (1) e dalla (3) si ottiene che

$$\begin{aligned} 20 - 2\lambda_1 x_1 \leq 0 \quad &\rightarrow \quad x_1 > 0 \\ 10 - 2\lambda_1 x_2 \leq 0 \quad &\rightarrow \quad x_2 > 0 \end{aligned}$$

Ciò permette di sfruttare la (2) e la (4) per affermare che

$$10 = \lambda_1 x_1 \quad \text{e} \quad 5 = \lambda_1 x_2$$

ovvero

$$\lambda_1 x_1 = 2\lambda_1 x_2 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2x_2$$

da ciò segue che

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

È facile capire che

$$5 = \lambda_1 x_2 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 5\sqrt{5}$$

5 Dicembre 2022

Esempio 1: Si consideri il problema formalizzato come segue

$$\begin{aligned}&\max f(x) = c^T x - \frac{1}{2}x^T Q x\\ &Ax \le b\\ &x \ge 0\end{aligned}$$

Allora le condizioni di Kuhn-Tucker si formalizzano come

$$\begin{aligned}&Q^T x + A^T U - y = c^T\\ &Ax + v = b\\ &x^T y + x^T u = 0\\ &x, y, v, u \ge 0\end{aligned}$$

Si risolva, allora, il problema

$$\begin{aligned}&\max f(x) = 3x_1 - x_1^2 - 4x_2 - x_2^2\\ &x_1 + x_2 \le 2\\ &x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

Allora è immediato evincere che

$$\begin{aligned}A &= [1 \quad 1]\\ b &= [2]\\ c &= [8 \quad 4]\end{aligned}$$

Per conoscere Q si deve calcolare

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,1} & q_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (\textit{...continua...})$$

per cui è facile capire che

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pertanto le condizioni di Kuhn Tucker divengono

$$\begin{cases} 2x_1 + u - y_2 = 8 \\ 2x_2 + u - y_2 = 4 \\ x_1 + x_2 + v = 2 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + vu = 0 \\ x, y, u, v \ge 0 \end{cases}$$

Si adotta, ora, il metodo del simplesso, ponendo a 0 le variabili x_1, x_2, u. Si devono, allora, introdurre delle variabili artificiali ai soli vincoli che presentano delle variabili in base negative

$$\begin{cases} \min z_1 + z_2 2x_1 + u - y_2 + z_1 = 8 \\ 2x_2 + u - y_2 + z_2 = 4 \\ x_1 + x_2 + v = 2 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + vu = 0 \\ x, y, u, v, z \geq 0 \end{cases}$$

Con il metodo del simplesso modificato bisogna stare attenti a fare in modo che quando si fa entrare, per esempio, x_1 in base, anche y_1 non lo sia, altrimenti l'ultima uguaglianza non è più verificata.

Esempio 2: Si consideri il problema formalizzato come segue

$$\max f(x) = 20x_1 - 20x_1^2 + 50x_2 - 50x_2 + 18x_2x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Allora si ha che

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

mentre

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c \begin{bmatrix} 20 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Per trovare la matrice Q si deve calcolare

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,1} & q_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [..continua...]$$

Essendo Q una matrice quadrata simmetrica, si ottiene

$$Q = \begin{bmatrix} 40 & -18 \\ -18 & 40 \end{bmatrix}$$

Allora le condizioni di Kuhn-Tucker divengono:

$$\begin{bmatrix} 40 & -18 \\ -18 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 50 \end{bmatrix}$$

a cui segue

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Si procederà, allora, alla risoluzione del problema seguente

$$
\begin{aligned}
&\min z_1 + z_2\\
&40x_1 - 18x_2 + u_1 + u_2 - y_1 + z_1 = 20\\
&-18x_1 + 18x_2 + u_1 + 4u_2 - y_2 + z_2 = 50\\
&\lambda_1 + x_2 + v_1 = 6\\
&x_1 + 4x_2 + v_2 = 18\\
&x_1 y_1 + v_1 u_1 + v_2 u_2 = 0\\
&x_1, x_2, y_1, y_2, u_1, u_2, v_1, v_2, z_1, z_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Se ora si riesce a minimizzare $z_1 + z_2$ tale per cui la loro somma è 0, una qualsiasi soluzione che soddisfa i vincoli è una soluzione ammissibile.

9 Ottimizzazione

com'è noto, un problema di ottimizzazione del tipo min $f(x)$ può essere di due tipologie:

- se $x \in \mathbb{R}^n$ è un problema non vincolato;
- se $x \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ è un problema vincolato.

In tale contesto, un **problema di programmazione convessa** è un problema di ottimizzazione con una funzione obiettivo $f(x)$ convessa e una regione ammissibile convessa. La La programmazione lineare è un caso speciale di programmazione convessa, in quanto essendo la funzione obiettivo lineare, essa è anche convessa; non solo, ma la regione ammissibile è un insieme convesso in quanto intersezione di disuguaglianze lineari.
La **programmazione quadratica**, invece, è a metà strada tra la programmazione lineare e la programmazione non lineare in quanto la funzione obiettivo è quadratica, mentre i vincoli sono lineari.

Osservazione: se le variabili non sono continue (o reali), si possono distinguere due tipologie di programmazione

- programmazione intera lineare, in cui la regione ammissibile non è convessa;
- programmazione intera non lineare, per cui la funzione obiettivo è non lineare e/o i vincoli sono non lineari.

9.1 Algoritmi di ottimizzazione

Al fine di trovare trovare l'ottimo, sono necessari degli algoritmi, i quali, a seconda della precisione con la quale forniscono la soluzione, si dividono in

- algoritmi esatti, i quali, se il tempo e la memoria sono sufficienti, forniscono sempre la soluzione ottimale, come l'algoritmo del simplesso per la programmazione continua lineare o l'algoritmo B and B per la programmazione intera lineare; è chiaro che un algoritmo esatto potrebbe essere lento, soprattutto per la programmazione lineare;
- algoritmi approssimativi, i quali non è detto forniscano la soluzione ottima, ma è noto l'errore massimo che si può commettere; la loro esecuzione potrebbe essere veloce (una complessità polinomiale) per LP - iterativo (NLP; minimi locali)

- Euristica - Non si sa nemmeno qual è l'errore rispetto all'ottimo - Potrebbe essere veloce (polinomiale) per LP - diversi approcci (NLP; minimi locali)

Sappiamo tutto all'inizio? - Ottimizzazione deterministica (senza incertezza) - Ottimizzazione in condizioni di incertezza - Programmazione stocastica - Ottimizzazione robusta - Ottimizzazione e apprendimento automatico "L'interazione tra ottimizzazione e apprendimento automatico è uno degli sviluppi più importanti della moderna scienza computazionale. Le formulazioni e i metodi di ottimizzazione si stanno rivelando fondamentali nella progettazione di algoritmi per estrarre conoscenze essenziali da enormi volumi di dati." (da Optimization for Machine Learning, a cura di Suvrit Sra, Sebastian Nowozin e Stephen J. Wright, 2011)

È tutto qui? NO! - Ottimizzazione a obiettivo singolo - Ottimizzazione multi-obiettivo (2-4 funzioni obiettivo) - Ottimizzazione multi-obiettivo (¿ 4 funzioni obiettivo) - Programmazione stocastica multi-obiettivo per un problema di selezione di un fornitore di tipo misto integrale (M. Ekhtiari e S. Poursafary, 2013)

Classificazione sintetica - Funzione obiettivo - Singola, multipla, multipla - Convesso (lineare), non convesso - Regione fattibile - NO: non vincolata - SÌ: convessa (equazioni lineari), non convessa - Variabili: continue, intere (binarie) - Parametri: deterministici, incerti (distribuzione prob. nota, ignota) - Per ogni problema, è necessario un algoritmo su misura - Tempo di calcolo - Qualità della soluzione: ottimale globale o locale, approssimativa o euristica

Tradotto con www.DeepL.com/Translator (versione gratuita)