

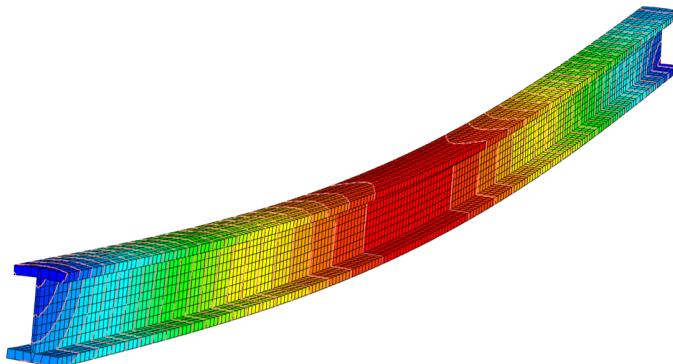


# Flexión recta pura y simple: Análisis de Deformaciones. Normativa para metálicas

Enrique García Macías

## Índice

1. Introducción	2
2. Análisis de deformaciones en flexión pura. Ecuación diferencial de la elástica	2
3. Determinación de las constantes de integración en la ecuación diferencial de la elástica	6
4. Ecuación Universal de la Elástica	14
5. Dimensionamiento y comprobación de vigas a estados límite de servicio según el CTE	27
6. Aplicación al cálculo de vigas hiperestáticas	33



## 1. Introducción

En el tema anterior afrontamos el estudio de la distribución de tensiones en piezas prismáticas de línea media rectilínea, solicitadas a flexión simple. Con ello, estamos en disposición de analizar las deformaciones que se produce en la pieza cuando se le somete a estos tipos de solicitud, con lo que analizaremos el concepto de rigidez. Cabe notar que en el diseño de elementos estructurales en edificación viene en muchos casos determinada más por su rigidez que por su resistencia. Este tema nos permitirá verificar la aptitud de elementos tipo viga ante estados de servicio de deformaciones, a través del cual evitaremos que las vigas deformen excesivamente con el consiguiente desconfort para los usuarios o la apariencia de la obra, aunque ello no supusiese un peligro de rotura y por tanto no afecte a la seguridad de las personas (figura 1).

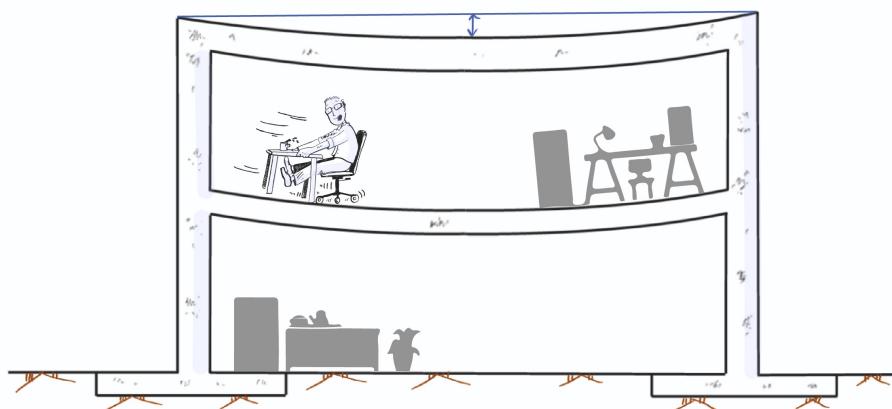


Figura 1: Estado Límite de Servicio de deformaciones.

En este tema estudiaremos dos métodos que nos permitirán determinar la deformación de vigas solicitadas a flexión bajo un sistema de cargas transversales externas, conocidas las condiciones de borde o sustentación. En primer lugar, obtendremos la deformada del eje de la viga (notada comúnmente como línea elástica o simplemente **elástica**) mediante el método clásico de la doble integración de la denominada *ecuación diferencial de la elástica (EDE)*. A continuación, extenderemos este método a un procedimiento más moderno y general llamado *ecuación universal de la elástica (EUE)*, el cual simplificará notablemente el cálculo de las constantes de integración que intervienen en la elástica. Existen otros métodos clásicos para el cálculo de deformaciones en vigas, que no veremos en esta lección, como los teoremas de Mohr o los teoremas energéticos. Para más información sobre estos, se recomienda consultar el capítulo 5 del libro *Resistencia de Materiales* de Luis Ortíz Berrocal.

## 2. Análisis de deformaciones en flexión pura. Ecuación diferencial de la elástica

Consideremos la viga plana de sección constante, inicialmente recta, como se muestra en la figura 2. Tomemos el sistema cartesiano ortogonal de la figura con origen de coordenadas en el baricentro de la sección extrema  $A$ , siendo  $y$  el eje transversal y el eje  $x$  longitudinal coincidente con la línea media de la viga antes de producirse la deformación. Ante la acción de sistema genérico de cargas transversales  $q(x)$ , la viga experimenta una deformación transversal inducida por flexión simple. En cada sección, el eje  $z$  representa el eje neutro, es decir, el lugar geométrico de los puntos de la sección donde se anula la tensión normal debida al momento flector. La superficie formada por los ejes neutros de todas las secciones rectas del prisma se conoce como la superficie neutra. Esta superficie contiene las fibras longitudinales de la viga que han experimentado desplazamiento debido a las fuerzas externas, pero no han variado en longitud. La intersección de la superficie neutra con el plano medio da lugar a la línea media o directriz deformada de la viga, a la que nos referimos como la *línea elástica* o simplemente *elástica*.

Para estudiar la deformación de la viga, obtendremos la ecuación de la línea elástica referida

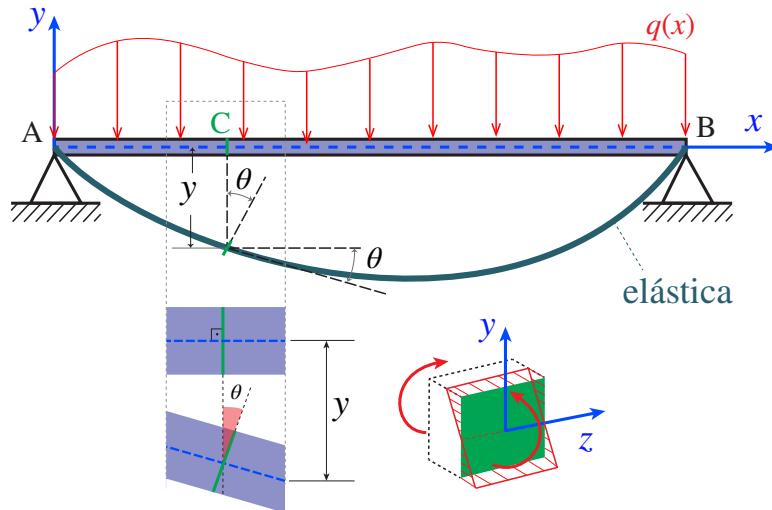


Figura 2: Elástica de una viga plana sometida a flexión simple.

al sistema cartesiano ortogonal de la figura. Toda sección  $C$  a un distancia  $x$  de  $A$  experimentará un desplazamiento que tendrá, en general, componentes horizontal y vertical. En el caso de únicamente tener cargas verticales, único caso que analizaremos en este tema, supondremos despreciables los desplazamientos horizontales en la dirección del eje longitudinal de la viga. Por tanto, la deformación de cualquier sección  $C$  quedará unívocamente definida por dos magnitudes:

1. Desplazamiento vertical  $y$  (*flecha*) perpendicular al eje longitudinal.
2. Ángulo  $\theta$  girado por la sección.

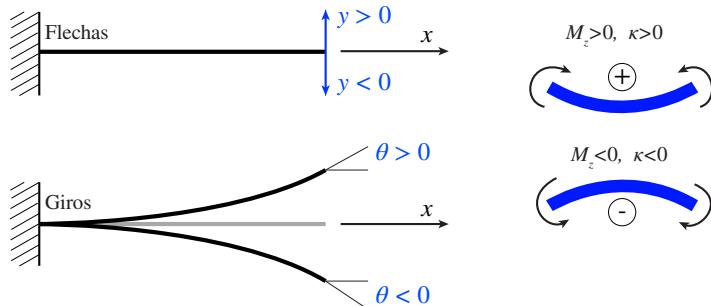


Figura 3: Criterio de signos: flechas y giros.

Al adoptar el sistema de referencia especificado, se establece un convenio de signos tanto para las flechas como para los ángulos girados por las secciones. En este convenio, el signo del desplazamiento será determinado por su ordenada en la ecuación de la elástica (desplazamiento vertical hacia arriba  $y > 0$ , y hacia abajo  $y < 0$ ). Respecto a los ángulos girados, que equivalen al ángulo formado por la tangente a la elástica con el eje  $x$ , serán considerados positivos si el giro se efectúa en sentido antihorario ( $\theta > 0$ ), y viceversa si el giro se realiza en sentido horario ( $\theta < 0$ ) (Fig. 3).

Para determinar la ecuación de la línea elástica, consideremos dos secciones rectas adyacentes  $C$  y  $D$  separadas por un diferencial de arco  $ds$  (Fig. 4). Si notamos por  $\theta$  el ángulo que forma la tangente en  $C$  con el eje  $x$ , el ángulo que forman las normales a la elástica en  $C$  y  $D$  será  $d\theta$ . El punto  $O$  de intersección de estas normales da el centro de curvatura y define la longitud  $\rho$  del radio de curvatura. Recordando la definición de curvatura  $\kappa$  de una curva plana:

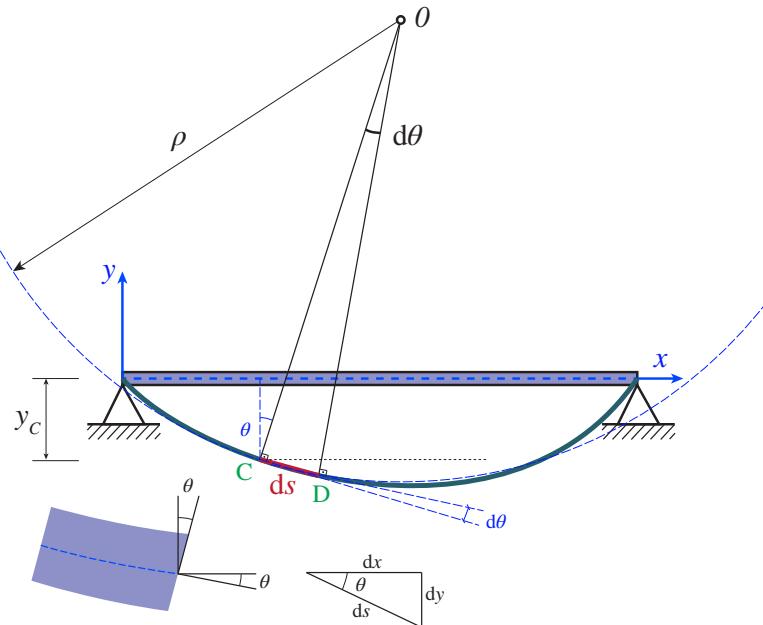


Figura 4: Curvatura de una viga plana sometida a flexión simple.

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{dy'}{dy} \frac{dy'}{dx} \frac{dx}{ds}, \quad (1)$$

y sabiendo que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{dy}{dx} = y' \rightarrow \theta = \operatorname{arctg}(y') \rightarrow \frac{d\theta}{dy'} &= \frac{1}{1 + (y')^2}, \\ ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx \rightarrow \frac{dx}{ds} &= (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2)$$

podemos escribir:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Ahora bien, del tema anterior, conocemos la relación entre la curvatura y el momento flector  $M_z$ , por lo que podemos escribir:

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M_z}{I_z} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (4)$$

Nótese que en la expresión (4) va implícito el convenio de signos para la curvatura (Fig. 3). Diremos que la viga deformada presenta una curvatura positiva (cóncava,  $M_z > 0 \rightarrow \kappa > 0$ ), cuando la elástica presenta concavidad respecto del punto del infinito del semieje  $y$  positivo como en la figura 4. En cambio, tendrá curvatura negativa cuando la elástica sea convexa hacia arriba ( $M_z < 0 \rightarrow \kappa < 0$ ).

De las ecuaciones (2) y (4), se deduce:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M_z}{EI_z}, \quad (5)$$

expresión que representa la *ecuación diferencial exacta de la línea elástica*. El denominador del término de la derecha en la ecuación (5), que depende del material empleado y de la inercia de la sección, recibe el nombre de *módulo de rigidez a flexión de la viga*.

Observe que la ecuación diferencial en (5) es no lineal, por lo que resulta complejo determinar su solución analítica, siendo necesario emplear métodos numéricos o integrales elípticas tabuladas. Cuando estudiemos la deformación de piezas muy esbeltas, será necesario resolver esta ecuación. No obstante, en el caso de admitir la hipótesis de pequeños desplazamientos (como es usual en la fase de diseño de estructuras de edificación), podemos asumir  $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$  y  $dx \approx ds$ , con lo que la ecuación (1) se puede reducir a:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \approx y'', \quad (6)$$

dando lugar a la que denominamos *ecuación diferencial aproximada de la elástica*:

$$y'' = \frac{M_z}{EI_z}. \quad (7)$$

Nótese que la ecuación (7) es equivalente a asumir que el término  $y'^2$  en la ecuación (5) es despreciable frente a la unidad. La solución de esta ecuación diferencial aproximada no representa ninguna dificultad, siendo suficiente con integrar dos veces la ecuación (7) para obtener la función de la flecha,  $y(x)$ , que nos indica cuánto ha bajado (o subido) el centro de gravedad de una sección arbitraria localizada a una distancia  $x$  del origen. Asimismo, podremos determinar la ley de giros simplemente derivando la función de la flecha,  $\theta(x) = \frac{dy(x)}{dx}$ .

Una primera consecuencia que se desprende de la ecuación (7) es que en las secciones de la viga donde el momento flector se anula, la curva elástica exhibe puntos de inflexión ( $M_z = 0 \rightarrow y'' = 0$ ). Por otra parte, si la rigidez  $EI_z$  es variable a lo largo de la viga (como en el caso de vigas de sección variable o vigas compuestas por varios materiales a lo largo de su longitud), es necesario expresarla como una función de la abscisa  $x$  antes de integrar la ecuación diferencial (7).

### 3. Determinación de las constantes de integración en la ecuación diferencial de la elástica

Como hemos visto en el epígrafe anterior, es posible obtener la ecuación de la elástica a través de la doble integración de la ecuación (7). En concreto, si asumimos un módulo de rigidez constante, podemos obtener la *ecuación general de la pendiente* o la *ecuación de giros* integrando una vez:

$$EI_z y'(x) = EI_z \theta(x) = \int M_z dx + C_1, \quad (8)$$

que, integrando de nuevo, nos permitirá determinar la *ecuación general de flechas*:

$$EI_z y(x) = \int \int M_z dx + C_1 x + C_2. \quad (9)$$

En esta doble integración, por tanto, aparecen dos constantes de integración,  $C_1$  y  $C_2$ , que deberemos determinar imponiendo las condiciones de contorno. En la figura 5 podemos encontrar un resumen de las principales condiciones de sustentación vistas en el primer tema. Nótese que estas constantes de integración están relacionadas con el giro y la flecha en el origen de abscisas ( $x = 0$ ), como se deduce trivialmente de las ecuaciones (8) y (9):

$$y(x = 0) = y_0 = \frac{C_2}{EI_z}, \quad \theta(x = 0) = \theta_0 = \frac{C_1}{EI_z}, \quad (10)$$

con lo que podemos reescribir la ecuación (9) como:

$$EI_z y(x) = \int \int M_z dx + EI_z \theta_0 x + EI_z y_0. \quad (11)$$

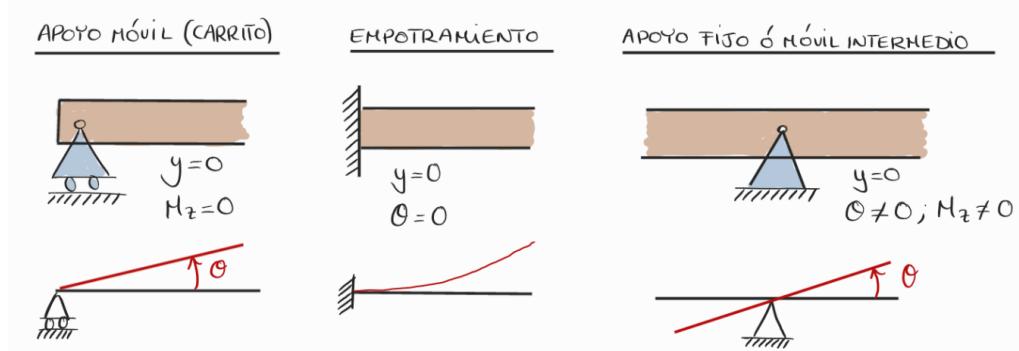


Figura 5: Condiciones de sustentación en vigas planas.

□ **Ejemplo 1:** Veamos un ejemplo sencillo sobre el que ilustrar la determinación de las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$ . Consideremos la viga simplemente apoyada de la figura 6, de luz  $L$ , rigidez a la flexión  $EI$ , sometida a una carga uniformemente repartida  $p$ . La ley de momentos flectores se puede determinar mediante un único corte para toda la viga ( $0 \leq x \leq L$ ) como:

$$M(x) = \frac{pL}{2}x - \frac{p}{2}x^2, \quad (12)$$

de modo que la ecuación diferencial de la elástica resulta:

$$EI y'' = M(x) = \frac{pL}{2}x - \frac{p}{2}x^2, \quad (13)$$

Integrando una vez obtenemos la *ley de giros*:

$$y' = \theta(x) = \frac{1}{EI} \int \left( \frac{pL}{2}x - \frac{p}{2}x^2 \right) dx + C_1 = \frac{1}{EI} \left( \frac{pL}{4}x^2 - \frac{p}{6}x^3 \right) + C_1, \quad (14)$$

y volviendo a integrar se obtiene la *ley de flechas*:

$$y(x) = \frac{1}{EI} \int \left( \frac{pL}{4}x^2 - \frac{p}{6}x^3 \right) dx + C_1x + C_2 = \frac{1}{EI} \left( \frac{pL}{12}x^3 - \frac{p}{24}x^4 \right) + C_1x + C_2, \quad (15)$$

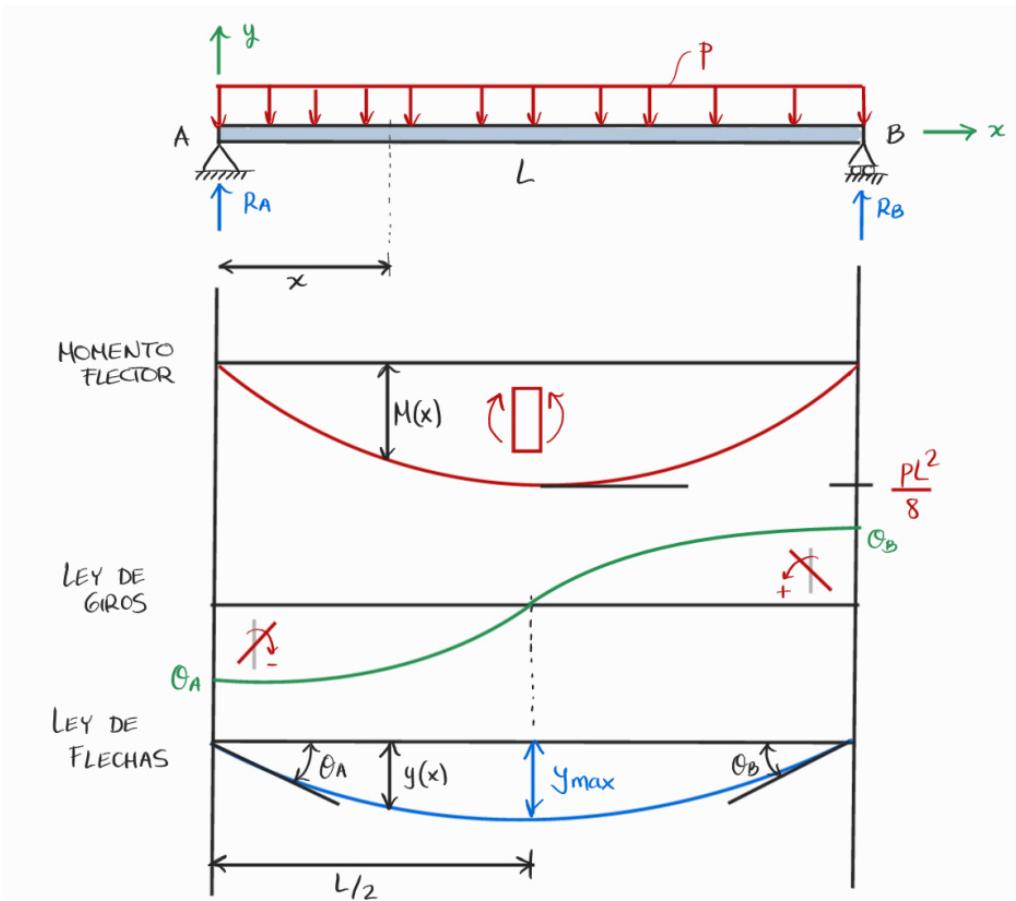


Figura 6: Ejemplo 1: Viga simplemente apoyada con carga uniforme.

Para determinar las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$  debemos imponer las condiciones de contorno, que en este caso son  $y(0) = y(L) = 0$ . Con ello, se obtienen las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\Rightarrow C_2 = 0 \\ y(L) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{EI} \left( \frac{pL^4}{12} - \frac{pL^4}{24} \right) + C_1L = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ C_1 = -\frac{pL^3}{24EI} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (16)$$

Por lo que resulta:

- Ley de giros  $\rightarrow \theta(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{pL}{4} x^2 - \frac{p}{6} x^3 \right) - \frac{1}{EI} \frac{pL^3}{24}$ ,
- Ley de flechas  $\rightarrow y(x) = \frac{1}{EI} \left( \frac{pL}{12} x^3 - \frac{p}{24} x^4 \right) - \frac{1}{EI} \frac{pL^3}{24} x$ .

Para representar las leyes de giros y flechas, determinamos sus valores en los extremos:

$$\begin{aligned} y(0) &= y(L) = 0 \\ \theta(0) &= \theta_A = -\frac{pL^3}{24EI}, \\ \theta(L) &= \theta_B = \frac{pL^3}{24EI}, \end{aligned}$$

así como la presencia de mínimos/máximos relativos en la flecha, por lo que buscamos las secciones donde  $y'(x) = 0$ , o lo que es lo mismo, las secciones donde el giro  $\theta(x)$  se hace cero:

$$\theta(x) = 0 \rightarrow x = \frac{L}{2} \rightarrow y\left(\frac{L}{2}\right) = y_{\max} = -\frac{5pL^4}{384EI}. \quad (17)$$

Se observa claramente que, dada la simetría del problema, el giro se hace 0 en centro de vano, y los giros de las secciones extremas A y B tienen igual valor absoluto y signo opuesto.

□ **Ejemplo 2:** Un ejemplo similar al anterior es el de la viga en voladizo de longitud  $L$ , rígida a flexión  $EI$ , y sometida a una carga uniformemente distribuida  $q$  como se muestra en la figura 7. Al igual que en el caso anterior, la ley de momentos flectores se puede determinar mediante un único corte válido para toda la viga ( $0 \leq x \leq L$ ) como:

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + qLx - \frac{qL^2}{2}, \quad (18)$$

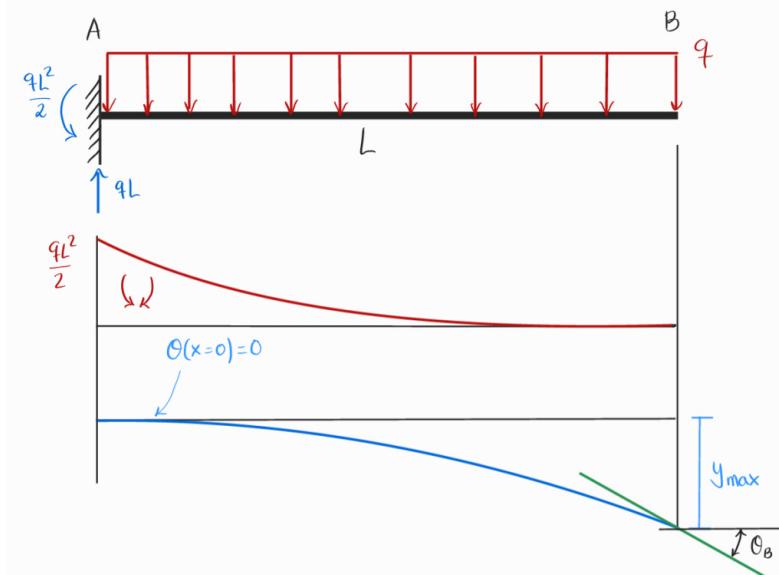


Figura 7: **Ejemplo 2:** Viga en voladizo sometida a carga uniforme repartida.

de modo que la ecuación diferencial de la elástica resulta:

$$EI y'' = -\frac{qx^2}{2} + qLx - \frac{qL^2}{2}, \quad (19)$$

$$EI y' = EI \theta(x) = -\frac{qx^3}{6} + \frac{qLx^2}{2} - \frac{qL^2x}{2} + C_1, \quad (20)$$

$$EI y(x) = -\frac{qx^4}{24} + \frac{qLx^3}{6} - \frac{qL^2x^2}{4} + C_1x + C_2. \quad (21)$$

Ahora, imponiendo las condiciones de borde:

$$y(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \quad (22)$$

$$\theta(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0 \quad (23)$$

$$(24)$$

las constantes de integración resultan trivialmente nulas dadas las relaciones entre dichas constantes y la flecha y el giro en el origen vistas anteriormente. Para representar la deformada de la viga, buscamos la presencia de máximos/mínimos relativos, así como el valor de la flecha en el extremo B del voladizo (en A es nula). Para determinar la existencia de máximos/mínimos relativos, buscamos las secciones donde el giro se hace cero. Igualando a cero la ley de giros de la ecuación (20), es sencillo determinar que únicamente se anula en el empotramiento ( $x = 0$ ). Únicamente restaría determinar el valor de la flecha en el extremo del voladizo:

$$EIy(L) = -\frac{qL^4}{24} + \frac{qL^4}{6} - \frac{qL^4}{4} \rightarrow y(L) = -\frac{qL^4}{8EI}. \quad (25)$$

Para completar la representación de la deformada (figura 7), determinamos el giro de la sección en el extremo del voladizo:

$$EI\theta(L) = -\frac{qL^3}{6} + \frac{qL^3}{2} - \frac{qL^3}{2} \rightarrow \theta_B = \theta(L) = -\frac{qL^3}{6EI}. \quad (26)$$

□ **Ejemplo 3:** Analicemos ahora un caso en que la ley de momentos flectores esté definida a trozos. En particular, considere la viga simplemente apoyada de la figura 8, de luz  $L = a + b$ , rigidez a flexión  $EI$  constante, sometida a una carga puntual  $P$  aplicada sobre la sección situada a una distancia  $a$  del extremo izquierdo  $A$ . La ley de momentos flectores es, este caso:

$$M(x) = \begin{cases} \frac{Pb}{L}x, & 0 \leq x < a \\ \frac{Pb}{L}x - P(x-a), & a \leq x \leq L \end{cases} \quad (27)$$

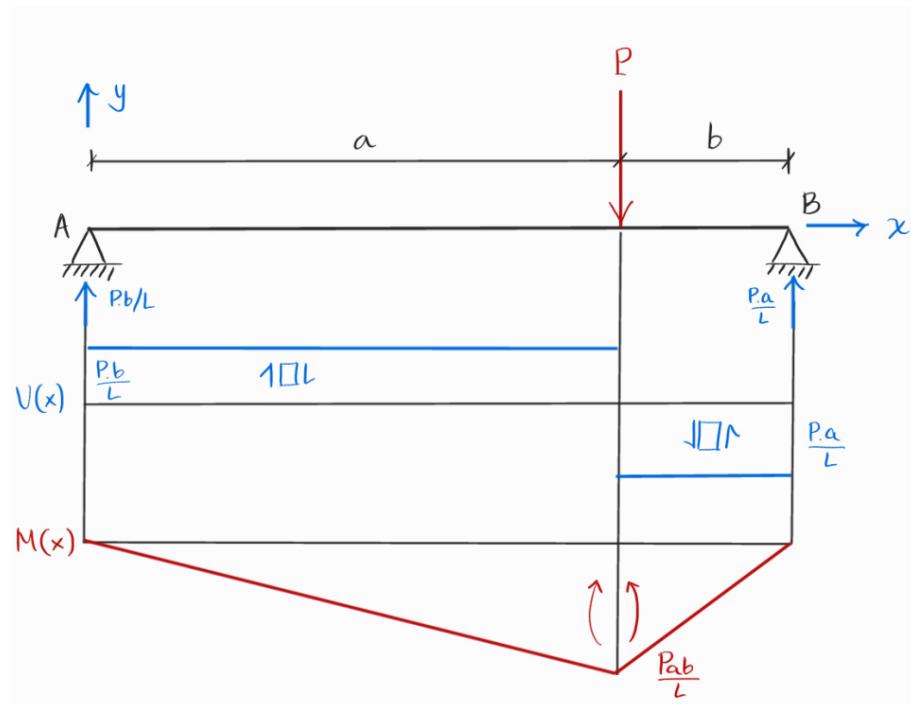


Figura 8: **Ejemplo 3:** Viga simplemente apoyada con carga puntual.

Sustituyendo esta ley de flectores en la ecuación de la elástica, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 \leq x < a & \quad a \leq x \leq b \\ EIy_1''(x) = \frac{Pb}{L}x & \quad EIy_2''(x) = \frac{Pb}{L}x - P(x-a) \\ EIy_1'(x) = \frac{Pb}{2L}x^2 + C_1 & \quad EIy_2'(x) = \frac{Pb}{2L}x^2 - \frac{P}{2}(x-a)^2 + C_2 \\ EIy_1(x) = \frac{Pb}{6L}x^3 + C_1x + K_1 & \quad EIy_2(x) = \frac{Pb}{6L}x^3 - \frac{P}{6}(x-a)^3 + C_2x + K_2 \end{aligned} \quad (28)$$

con lo que obtenemos cuatro constantes de integración  $\{C_1, K_1, C_2, K_2\}$ , por lo que no bastará con imponer las condiciones de sustentación ( $y(0) = y(L) = 0$ ). No obstante, sabemos que la línea elástica debe ser continua, de modo que la flecha y el giro deben ser únicos en cada sección. Por tanto, en la sección  $x = a$  que separa los dos tramos de la ley de momentos flectores, la flecha y el giro deben de ser iguales en ambos tramos de la elástica:

$$y'_1(a) = y'_2(a) \Rightarrow \frac{Pb}{2L}x^2 + C_1 = \frac{Pb}{2L}x^2 - \frac{P}{2}(x-a)^2 + C_2, \Rightarrow C_1 = C_2, \quad (29)$$

$$y_1(a) = y_2(a) \Rightarrow \frac{Pb}{6L}a^3 + C_1a + K_1 = \frac{Pb}{6L}a^2 + C_2a + K_2, \Rightarrow K_1 = K_2, \quad (30)$$

$$y_1(0) = 0 \Rightarrow K_1 = 0, \quad (31)$$

$$y_2(L) = 0 \Rightarrow \frac{Pb}{6L}L^3 - \frac{P}{6}(L-a)^3 + C_2L = 0, \Rightarrow C_2 = \frac{Pb}{6L}(b^2 - L^2), \quad (32)$$

(33)

lo que resulta:

$$EIy_1(x) = \frac{Pb}{6L}x^3 + \frac{Pb}{6L}(b^2 - L^2)x \quad \text{para } 0 \leq x < a \quad (34)$$

$$EIy_2(x) = \frac{Pb}{6L}x^3 - \frac{P}{6}(x-a)^3 + \frac{Pb}{6L}(b^2 - L^2)x \quad \text{para } a \leq x \leq b \quad (35)$$

Para determinar la flecha máxima, buscamos la sección de giro nulo. Considerando  $a > L/2$ , es de esperar que esta sección se encuentre en el primer tramo. En este caso:

$$y'_1(x) = 0 \rightarrow \frac{Pb}{2L}x_{y_{max}}^2 + \frac{Pb}{6L}(b^2 - L^2) = 0, \quad (36)$$

de donde se extrae:

$$x_{y_{max}} = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} = \sqrt{\frac{(L-b)(L+b)}{3}} = \sqrt{\frac{a(L+b)}{3}}. \quad (37)$$

Por tanto, el valor máximo de la flecha resulta:

$$\begin{aligned} y_{\max} = y_1(x = x_{y_{max}}) &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pb}{6L} \left( \sqrt{\frac{a(L+b)}{3}} \right)^3 + \frac{Pb}{6L}(b^2 - L^2) \left( \sqrt{\frac{a(L+b)}{3}} \right) \right] = \\ &= -\frac{Pb}{9L\sqrt{3}EI} (L^2 - b^2)^{3/2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Si la carga estuviese centrada ( $a = b = L/2$ ), la flecha máxima se daría en la sección media de la viga. Ésta se puede obtener particularizando la ecuación (38) para el caso  $a = b = L/2$ :

$$y_{\max} = -\frac{PL/2}{9L\sqrt{3}EI} \left( \frac{3L^2}{4} \right)^{3/2} = -\frac{PL^3}{48EI}. \quad (39)$$

Con ello, podremos pasar a representar la línea elástica de la figura 9.

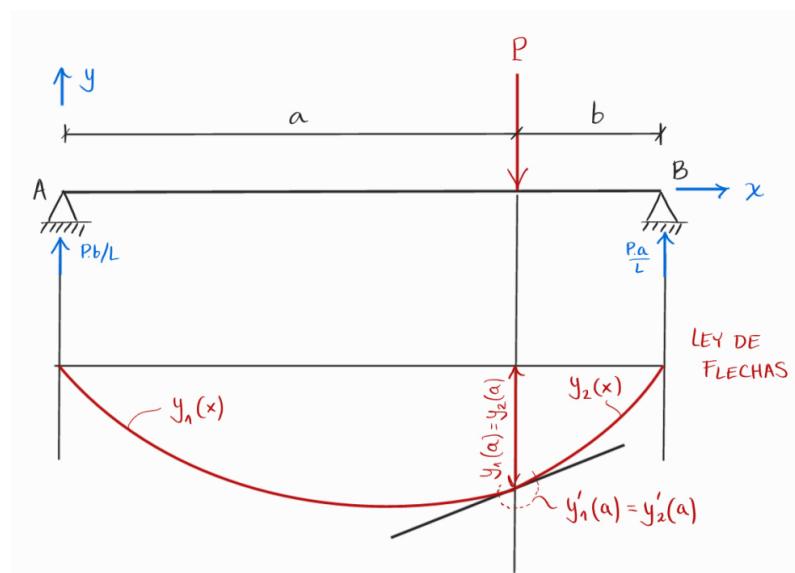


Figura 9: **Ejemplo 3:** Ley de flechas de viga simplemente apoyada con carga puntual.

## 4. Ecuación Universal de la Elástica

El último ejemplo de la sección anterior ilustra las dificultades que surgen al obtener la ecuación de la línea elástica cuando la ley de momentos flectores está definida a trozos. Específicamente, si hay  $n$  tramos, se requiere imponer  $2n$  ecuaciones de continuidad y de contorno para determinar  $2n$  constantes de integración. Para simplificar este proceso, en esta sección buscamos establecer una ecuación universal que, independientemente del número de tramos en la viga, solo requiera determinar dos constantes de integración.

Para la formulación de esta *ecuación universal de la elástica* (EUE), utilizaremos las llamadas *funciones de discontinuidad*. En general, la función de discontinuidad de orden  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n(x)$ , se define como sigue:

$$F_n(x) = \langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{si } (x - a) \leq 0 \\ (x - a)^n & \text{si } (x - a) > 0 \end{cases} \quad (40)$$

donde  $a \in \mathbb{R}$  es el valor a partir del cual la función de discontinuidad presenta valores no nulos. Los paréntesis angulares  $\langle \cdot \rangle$  en la ecuación (40), se denominan formalmente *paréntesis de Macaulay*. Estos representan un operador que toma el valor cero cuando la expresión entre paréntesis es negativa, y toma el valor  $(x - a)^n$  para valores de  $x$  iguales o superiores a  $a$ . En la figura 10 podemos observar las diferencias entre las funciones  $x^2$  y  $\langle x \rangle^2$  ( $a = 0$ ), así como las funciones  $(x - a)^2$  y  $\langle x - a \rangle^2$

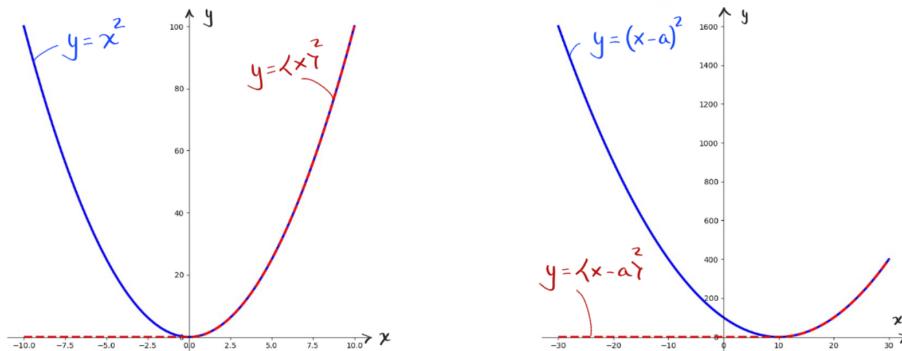


Figura 10: Ejemplos de funciones de discontinuidad.

Ahora intentaremos aprovechar estas funciones de discontinuidad para reformular la ecuación diferencial de la elástica. Para ello, analicemos la viga de sección transversal constante de la figura 11. En esta viga, encontramos todos los tipos de cargas elementales posibles, incluyendo un momento puntual exterior  $M$ , una fuerza concentrada  $P$ , una carga uniformemente repartida  $p$ , y una carga triangular de valor máximo  $q$ . Es importante notar que el sentido de todas estas cargas se ha definido en relación al signo del momento flector resultante. Es decir, el momento exterior puntual  $M$  será positivo si es en sentido horario, y las demás cargas serán positivas si actúan en sentido ascendente. La posición de estas cargas está determinada por las longitudes desde  $a$  hasta  $f$ .

Pasemos a determinar la ley de momentos flectores de esta viga. Para ello, definiendo el extremo izquierdo de la viga como origen de abscisas  $x$ , iremos realizando cortes en los siete tramos definidos en la figura 11. En primer tramo resulta trivial, pues sencillamente obtendremos un momento nulo:

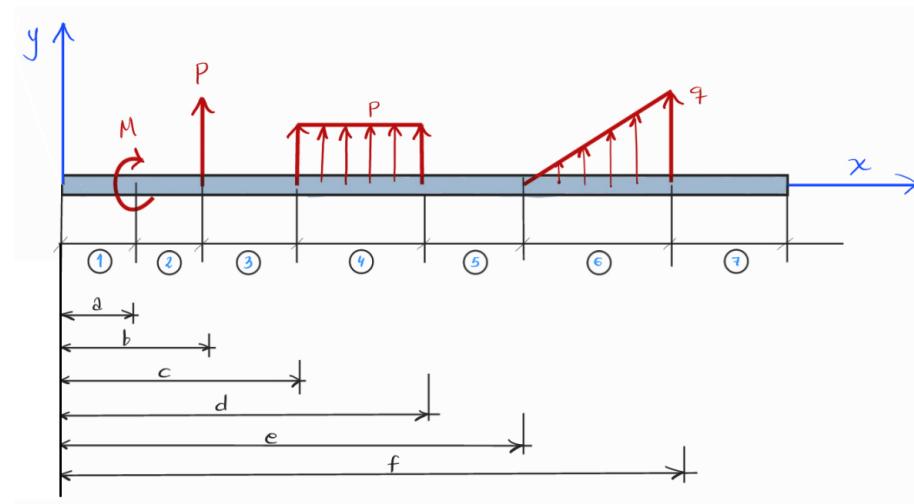


Figura 11

Tramo 1:  $0 \leq x \leq a$

$$\begin{aligned} EIy_1''(x) &= 0, \\ EIy_1'(x) &= C_1, \\ EIy_1(x) &= C_1x + K_1. \end{aligned} \tag{41}$$

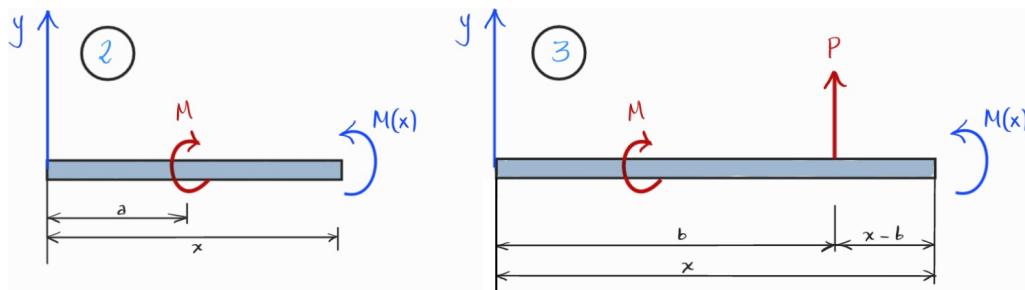


Figura 12

En el segundo tramo ya entra en juego el momento puntual aplicado a una distancia  $a$  del origen (figura 12), obteniendo  $M(x) = M$ . Para tratar de escribir la ecuación de la elástica a través de funciones de discontinuidad, trataremos de reescribir todos los términos de la forma  $\langle x - a \rangle^n$ . En este caso, resulta trivial darse cuenta que  $M(x) = M \langle x - a \rangle^0$ . Por tanto:

Tramo 2:  $a < x \leq b$

$$\begin{aligned} EIy_2''(x) &= M \langle x - a \rangle^0, \\ EIy_2'(x) &= M \langle x - a \rangle^1 + C_2, \\ EIy_2(x) &= \frac{M \langle x - a \rangle^2}{2} + C_2x + K_2. \end{aligned} \tag{42}$$

En el tercer tramo interviene la carga puntual  $P$  aplicada a una distancia  $b$  del origen de abscisas (figura 12). En este caso, el momento flector incorpora al anterior el término  $P(x-b)$ , que podremos reescribir como  $P \langle x-b \rangle^1$ , con lo que obtenemos:

Tramo 3:  $b < x \leq c$

$$\begin{aligned}
 EIy_3''(x) &= M \langle x-a \rangle^0 + P \langle x-b \rangle^1, \\
 EIy_3'(x) &= M \langle x-a \rangle^1 + \frac{P \langle x-b \rangle^2}{2} + C_3, \\
 EIy_3(x) &= \frac{M \langle x-a \rangle^2}{2} + \frac{P \langle x-b \rangle^3}{3!} + C_2x + K_3.
 \end{aligned} \tag{43}$$

En el cuarto tramo (figura 13) interviene la carga uniforme con el término  $p(x-c)^2/2$  que podremos escribir como  $p \langle x-c \rangle^2/2$ :

Tramo 4:  $c < x \leq d$

$$\begin{aligned}
 EIy_4''(x) &= M \langle x-a \rangle^0 + P \langle x-b \rangle^1 + \frac{p \langle x-c \rangle^2}{2}, \\
 EIy_4'(x) &= M \langle x-a \rangle^1 + \frac{P \langle x-b \rangle^2}{2} + \frac{p \langle x-c \rangle^3}{3!} + C_4, \\
 EIy_4(x) &= \frac{M \langle x-a \rangle^2}{2} + \frac{P \langle x-b \rangle^3}{3!} + \frac{p \langle x-c \rangle^4}{4!} + C_4x + K_4.
 \end{aligned} \tag{44}$$

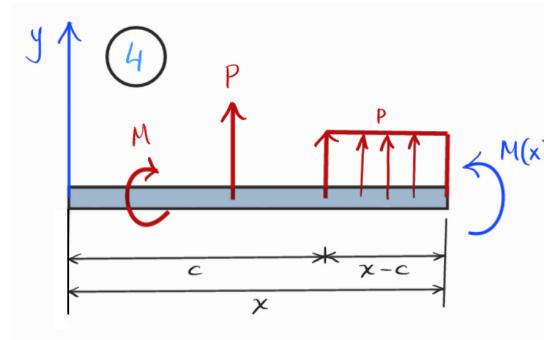


Figura 13

Pasemos ahora al quinto tramo (figura 14) una vez termina la carga uniforme. Nótese que de mantenerse la expresión del momento flector que obtuvimos en el tramo anterior, estaríamos suponiendo que la carga uniforme se prolonga hasta  $x$  (carga en rojo con línea discontinua). Por tanto, deberemos eliminar la parte añadida mediante una carga uniforme repartida en  $[d, x]$  (carga en verde con línea discontinua). Para ello, podemos incluir sencillamente el término  $p \langle x-d \rangle^2/2$ . Con ello:

Tramo 5:  $d < x \leq e$

$$\begin{aligned} EIy_5''(x) &= M \langle x - a \rangle^0 + P \langle x - b \rangle^1 + \frac{p [\langle x - c \rangle^2 - \langle x - d \rangle^2]}{2}, \\ EIy_5'(x) &= M \langle x - a \rangle^1 + \frac{P \langle x - b \rangle^2}{2} + \frac{p [\langle x - c \rangle^3 - \langle x - d \rangle^3]}{3!} + C_5, \\ EIy_5(x) &= \frac{M \langle x - a \rangle^2}{2} + \frac{P \langle x - b \rangle^3}{3!} + \frac{p [\langle x - c \rangle^4 - \langle x - d \rangle^4]}{4!} + C_5x + K_5. \end{aligned} \quad (45)$$

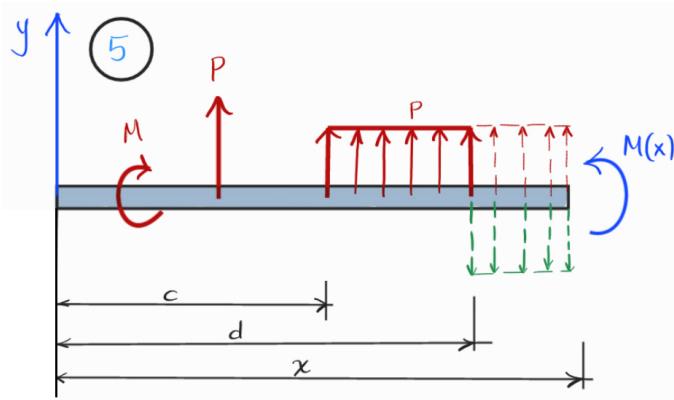


Figura 14

En el sexto tramo (figura 15) interviene la carga triangular con el término  $\frac{1}{2}(x-e)\frac{x-e}{f-e}q \cdot \frac{1}{3}(x-e)$  que podemos reescribir como  $q\frac{\langle x-e \rangle^3}{3!(f-e)}$  obteniendo:

tramo 6:  $e < x \leq f$

$$\begin{aligned} EIy_6''(x) &= M \langle x - a \rangle^0 + P \langle x - b \rangle^1 + \frac{p [\langle x - c \rangle^2 - \langle x - d \rangle^2]}{2} + \frac{q \langle x - e \rangle^3}{3!(f - e)}, \\ EIy_6'(x) &= M \langle x - a \rangle^1 + \frac{P \langle x - b \rangle^2}{2} + \frac{p [\langle x - c \rangle^3 - \langle x - d \rangle^3]}{3!} + \frac{q \langle x - e \rangle^4}{4!(f - e)} + C_6, \\ EIy_6(x) &= \frac{M \langle x - a \rangle^2}{2} + \frac{P \langle x - b \rangle^3}{3!} + \frac{p [\langle x - c \rangle^4 - \langle x - d \rangle^4]}{4!} + \frac{q \langle x - e \rangle^5}{5!(f - e)} + C_6x + K_6. \end{aligned} \quad (46)$$

Finalmente en el tramo 7 en la figura 16, al igual que en el tramo 5, si mantenemos la expresión anterior del momento flector, estaríamos asumiendo que la carga triangular se extiende hasta  $x$  (carga en rojo con línea discontinua). Por tanto, deberemos eliminar la carga trapezoidal añadida mediante una carga uniforme de valor  $q$  y una carga triangular de altura  $\hat{q} = q\frac{x-f}{f-e}$ . Con ello, podremos escribir:

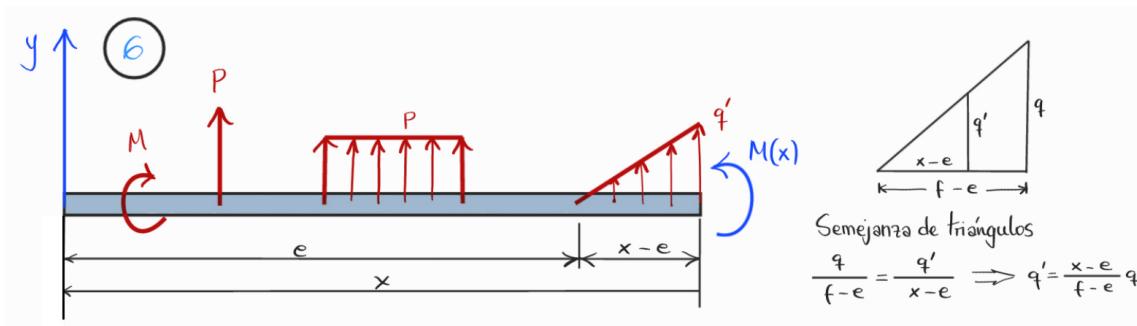


Figura 15

Tramo 7:  $f < x$

$$\begin{aligned}
 EIy_7''(x) &= M \langle x-a \rangle^0 + P \langle x-b \rangle^1 + \frac{p \left[ \langle x-c \rangle^2 - \langle x-d \rangle^2 \right]}{2} + \frac{q \left[ \langle x-e \rangle^3 - \langle x-f \rangle^3 \right]}{3!(f-e)} - \frac{q \langle x-f \rangle^2}{2}, \\
 EIy_7'(x) &= M \langle x-a \rangle^1 + \frac{P \langle x-b \rangle^2}{2} + \frac{p \left[ \langle x-c \rangle^3 - \langle x-d \rangle^3 \right]}{3!} + \frac{q \left[ \langle x-e \rangle^4 - \langle x-f \rangle^4 \right]}{4!(f-e)} - \frac{q \langle x-f \rangle^3}{3!} + C_7, \\
 EIy_7(x) &= \frac{M \langle x-a \rangle^2}{2} + \frac{P \langle x-b \rangle^3}{3!} + \frac{p \left[ \langle x-c \rangle^4 - \langle x-d \rangle^4 \right]}{4!} + \frac{q \left[ \langle x-e \rangle^5 - \langle x-f \rangle^5 \right]}{5!(f-e)} - \frac{q \langle x-f \rangle^4}{4!} + C_7x + K_7.
 \end{aligned} \tag{47}$$

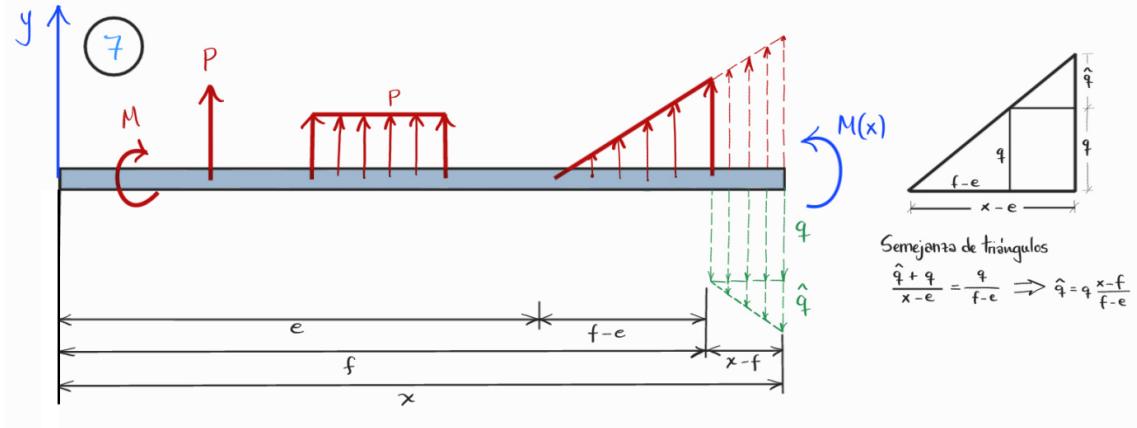


Figura 16

Para obtener las catorce constantes de integración  $\{C_i, K_i\}$  ( $2n = 2 \cdot 7$ ), imponemos las condiciones de continuidad de la línea elástica y de la ley de giros en los puntos de unión de los tramos:

$$x=a \rightarrow \begin{cases} y'_1(a) = y'_2(a) \Rightarrow C_1 = C_2 \\ y_1(a) = y_2(a) \Rightarrow C_1a + K_1 = C_2a + K_2 \Rightarrow K_1 = K_2 \end{cases} \tag{48}$$

$$x=b \rightarrow \begin{cases} y'_2(b) = y'_3(b) \Rightarrow C_2 = C_3 \\ y_2(b) = y_3(b) \Rightarrow C_2b + K_2 = C_3b + K_3 \Rightarrow K_3 = K_2 \end{cases} \tag{49}$$

$$x=c \begin{cases} y'_3(c) = y'_4(c) \Rightarrow C_3 = C_4 \\ y_3(c) = y_4(c) \Rightarrow C_3c + K_3 = C_4c + K_4 \Rightarrow K_3 = K_4 \end{cases} \quad (50)$$

$$x=d \begin{cases} y'_4(d) = y'_5(d) \Rightarrow C_4 = C_5 \\ y_4(d) = y_5(d) \Rightarrow C_4d + K_4 = C_5d + K_5 \Rightarrow K_4 = K_5 \end{cases} \quad (51)$$

$$x=e \begin{cases} y'_5(e) = y'_6(e) \Rightarrow C_5 = C_6 \\ y_5(e) = y_6(e) \Rightarrow C_5e + K_5 = C_6e + K_6 \Rightarrow K_5 = K_6 \end{cases} \quad (52)$$

$$x=f \begin{cases} y'_6(f) = y'_7(f) \Rightarrow C_6 = C_7 \\ y_6(f) = y_7(f) \Rightarrow C_6f + K_6 = C_7f + K_7 \Rightarrow K_6 = K_7 \end{cases} \quad (53)$$

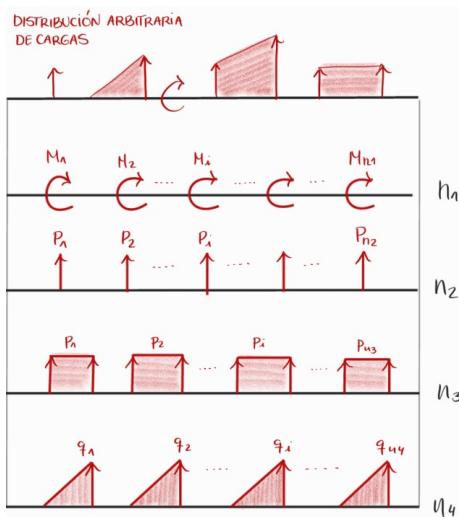
Vemos, en efecto, que las 14 constantes de integración quedan reducidas a únicamente 2 constantes  $C$  y  $K$ :

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 = \dots = C_7 = C, \\ K_1 &= K_2 = \dots = K_7 = K, \end{aligned} \quad (54)$$

que, al igual que en la EDE, están relacionadas con el giro  $\theta_0$  y la flecha  $y_0$  de la sección inicial ( $x = 0$ ):

$$C = EI\theta_0, \quad K = EIy_0. \quad (55)$$

Los resultados anteriores los podremos emplear para representar cualquier estado de carga formado por la suma de un número finito de los anteriores tipos de carga como se muestra en la parte superior de la figura de abajo. En concreto, asumimos que la viga está solicitada por un número  $n_1$  de momentos puntuales  $M_i$ , aplicados en secciones de abscisa  $a_i$ ;  $n_2$  cargas concentradas  $P_i$  con puntos de aplicación  $b_i$ ;  $n_3$  cargas uniformes  $p_i$ , actuando en tramos que empiezan en las secciones de abscisas  $c_i$  y finalizan en las de abscisas  $d_i$ ; y un número  $n_4$  de cargas triangulares que varían desde cero hasta valores  $q_i$  en tramos  $(e_i, f_i)$ . Con ello, empleando las funciones de discontinuidad vistas anteriormente, la ley de momentos flectores de la viga se puede expresar como:



$$\begin{aligned}
 M(x) = & \underbrace{\sum_{i=1}^{n_1} M_i (x - a_i)^0}_{\text{Momentos puntuales}} + \\
 & + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_2} P_i (x - b_i)^1}_{\text{Cargas concentradas}} + \\
 & + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_3} \frac{p_i [(x - c_i)^2 - (x - d_i)^2]}{2}}_{\text{Cargas uniformes}} + \\
 & + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_4} \frac{q_i [(x - e_i)^3 - (x - f_i)^3]}{3!(f_i - e_i)} - \frac{q_i (x - f_i)^2}{2!}}_{\text{Cargas triangulares}}
 \end{aligned} \tag{56}$$

Integrando la expresión anterior es posible obtener la *ecuación universal para los ángulos de giro*:

$$\begin{aligned}
 EI\theta(x) = & EI\theta_0 + \sum_{i=1}^{n_1} M_i (x - a_i)^1 + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{P_i (x - b_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^{n_3} \frac{p_i [(x - c_i)^3 - (x - d_i)^3]}{3!} + \\
 & + \sum_{i=1}^{n_4} \frac{q_i [(x - e_i)^4 - (x - f_i)^4]}{4!(f_i - e_i)} - \frac{q_i (x - f_i)^3}{3!},
 \end{aligned} \tag{57}$$

la cual, mediante una segunda integración, nos permitirá obtener la *ecuación universal de la elástica (EUE)*:

$$\begin{aligned}
 EIy(x) = & EIy_0 + xEI\theta_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{M_i (x - a_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{P_i (x - b_i)^3}{3!} + \sum_{i=1}^{n_3} \frac{p_i [(x - c_i)^4 - (x - d_i)^4]}{4!} + \\
 & + \sum_{i=1}^{n_4} \frac{q_i [(x - e_i)^5 - (x - f_i)^5]}{5!(f_i - e_i)} - \frac{q_i (x - f_i)^4}{4!}.
 \end{aligned} \tag{58}$$

En la figura 17 se encuentra un cuadro resumen con las expresiones de la EUE para cada uno de los tipos de cargas considerado. Tenga en cuenta que, en base a estas expresiones, se pueden derivar fácilmente las leyes de esfuerzos flectores para otros tipos de cargas mediante composición de figuras, tales como cargas triangulares decrecientes o cargas trapezoidales (véase la figura 18).

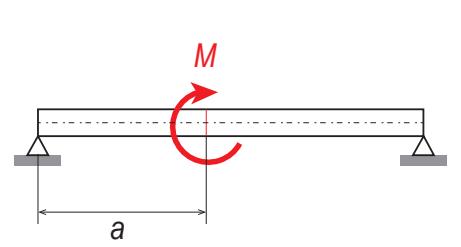
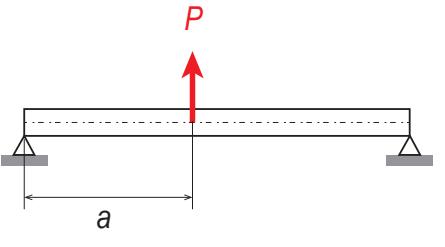
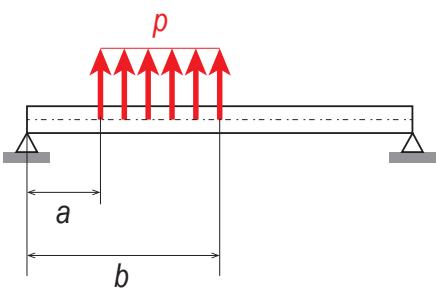
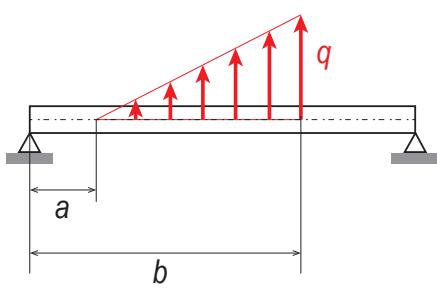
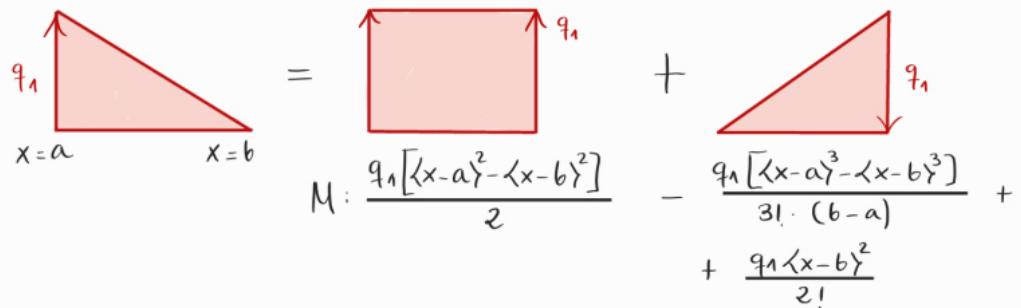
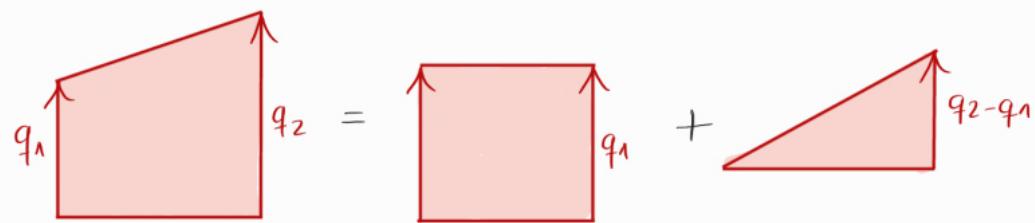
		
Momento $M$	$M = M(x-a)^0$	$M = P(x-a)$
Giro $\theta$	$\theta = M(x-a)^1$	$\theta = \frac{P(x-a)^2}{2!}$
Flecha $y$	$y = \frac{M(x-a)^2}{2!}$	$y = \frac{P(x-a)^3}{3!}$
		
Momento $M$	$M = \frac{p[(x-a)^2 - (x-b)^2]}{2!}$	$M = \frac{q[(x-a)^3 - (x-b)^3]}{(b-a)3!} - \frac{q(x-b)^2}{2!}$
Giro $\theta$	$\theta = \frac{p[(x-a)^3 - (x-b)^3]}{3!}$	$\theta = \frac{q[(x-a)^4 - (x-b)^4]}{(b-a)4!} - \frac{q(x-b)^3}{3!}$
Flecha $y$	$y = \frac{p[(x-a)^4 - (x-b)^4]}{4!}$	$y = \frac{q[(x-a)^5 - (x-b)^5]}{(b-a)5!} - \frac{q(x-b)^4}{4!}$

Figura 17: EUE - Fórmulas elementales.

EJEMPLO : CARGA TRIANGULAR DECRECIENTE



EJEMPLO : CARGA TRAPEZOIDAL CRECIENTE



EJEMPLO : CARGA TRAPEZOIDAL DECRECIENTE

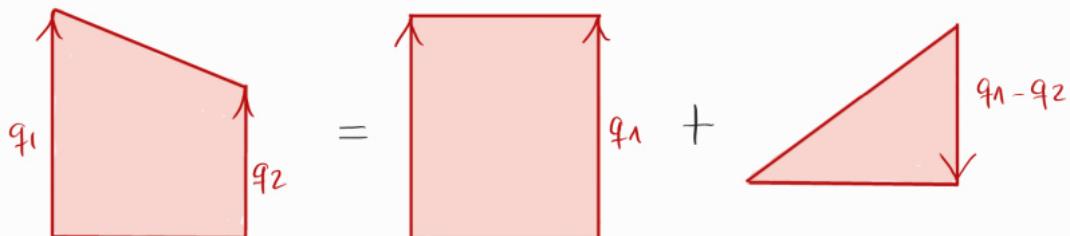


Figura 18: EUE - Ejemplos de composición de figuras.

□ **Ejemplo 4:** Se pide determinar el IPN más adecuado de la viga simplemente apoyada de luz  $L = 6\text{ m}$  de la figura 19, sabiendo que la tensión admisible es  $\sigma_{adm} = 1000 \text{ kp/cm}^2$  y el módulo elástico  $E = 2E+6 \text{ kp/cm}^2$ . Una vez determinado el perfil, nos piden calcular las flechas en los puntos A, C y D, así como los giros en las secciones extremas A y E.

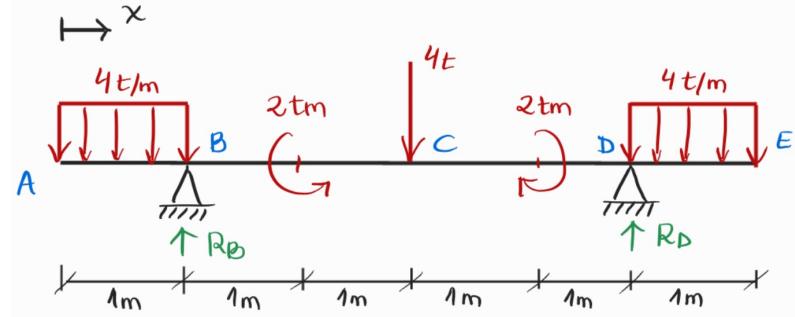


Figura 19: Ejemplo 4.

Empezamos por el cálculo de las reacciones en los apoyos, el cual resulta inmediato, ya que son iguales por razón de simetría:

$$R_A + R_B = 12 \text{ t} \Rightarrow R_A = R_B = 6 \text{ t}.$$

Para determinar las leyes de esfuerzos, en lugar de realizar 6 cortes (o 3 aprovechando la simetría del problema), emplearemos las expresiones de la EUF en la figura 17. Con ello, podremos escribir directamente:

$$M(x) = -2 \langle x - 2 \rangle^0 + 2 \langle x - 4 \rangle^0 - 4 \langle x - 3 \rangle^1 + 6 \langle x - 1 \rangle^1 + 6 \langle x - 5 \rangle^1 - \\ - \frac{4 [\langle x - 0 \rangle^2 - \langle x - 1 \rangle^2]}{2} - \frac{4 [\langle x - 5 \rangle^2 - \langle x - 6 \rangle^2]}{2}.$$

En la ecuación anterior, podemos observar que el término  $\langle x - 6 \rangle$  nunca tendrán valores distintos de cero para el dominio de la viga ( $x \in [0, 6]$  m). Asimismo, el término  $\langle x - 0 \rangle$  es exactamente igual que  $x$ , por lo que podremos simplificar la expresión anterior como:

$$M(x) = -2 \langle x - 2 \rangle^0 + 2 \langle x - 4 \rangle^0 - 4 \langle x - 3 \rangle^1 + 6 \langle x - 1 \rangle^1 + 6 \langle x - 5 \rangle^1 - \\ - \frac{4 [x^2 - \langle x - 1 \rangle^2]}{2} - \frac{4 \langle x - 5 \rangle^2}{2}.$$

Para representar las leyes de esfuerzos, basta con ir particularizando la expresión anterior para cada uno de los tramos. Asimismo, las leyes de cortantes se pueden determinar derivando las leyes de flectores, en virtud de las condiciones de equilibrio de la rebanada. Con ello:

- Tramo 1:  $0 \leq x < 1 \text{ m}$

$$M(x) = -2x^2,$$

$$V(x) = -4x,$$

- Tramo 2:  $1 \leq x < 2$  m

$$M(x) = -\frac{2[x^2 - (x-1)^2]}{2} + 6(x-1)^1 = 2x - 4,$$

$$V(x) = 2,$$

- Tramo 3:  $2 \leq x < 3$  m

$$M(x) = 2x - 4 - 2 = 2x - 6,$$

$$V(x) = -4x,$$

- Tramo 4:  $3 \leq x < 4$  m

$$M(x) = 2x - 6 - 4(x-3) = -2x + 6,$$

$$V(x) = -2,$$

- Tramo 5:  $4 \leq x < 5$  m

$$M(x) = -2x + 6 + 2 = -2x + 8,$$

$$V(x) = -2,$$

- Tramo 6:  $5 \leq x \leq 6$  m

$$M(x) = -2x + 8 + 6(x-5)^1 - \frac{4(x-5)^2}{2} = -2x^2 + 24x - 72,$$

$$V(x) = -4x + 24.$$

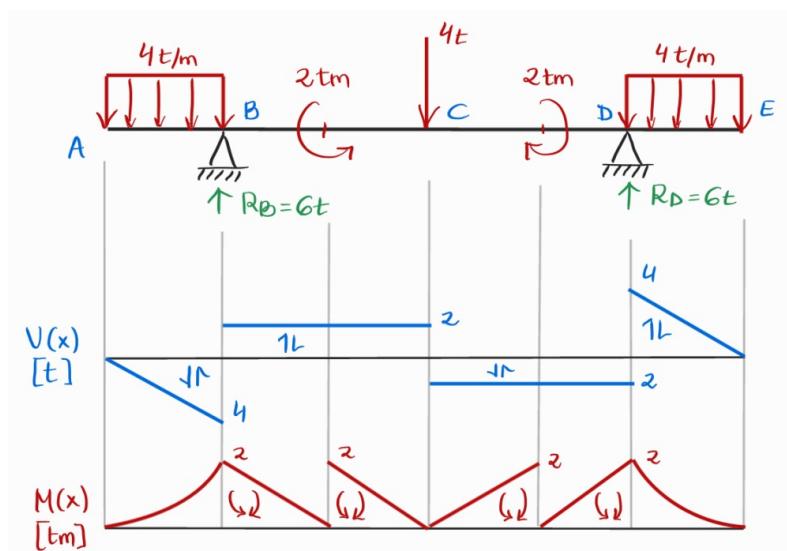


Figura 20

Si representamos estas leyes de esfuerzos como se muestra en la figura 20, observamos que las secciones más limitantes son aquellas sobre los apoyos, con máximo valor absoluto del momento flector de  $M_{z,max} = 2 \text{ tm}$ . El módulo resistente necesario será por tanto:

$$W_z = \frac{M_{z,max}}{\sigma_{adm}} = \frac{2 \times 10^5 \text{ kp} \cdot \text{cm}}{10^3 \text{ kp/cm}^3} = 200 \text{ cm}^3.$$

El valor más próximo por exceso dado por las tablas de perfiles laminados es  $W_z = 214 \text{ cm}^3$ , que corresponde a un IPN 200 y cuyo momento de inercia respecto al eje  $z$  es  $I_z = 2140 \text{ cm}^4$ . Para este perfil, podemos determinar el área a cortante como  $A_v = 20 \cdot 0,75 \text{ cm}^3$ , con lo que la tensión de comparación de Von Mises teniendo en cuenta el cortante  $V_{max} = 4 \text{ t}$  de las secciones resulta:

$$\sigma_{co} = \sqrt{\left(\frac{2 \times 10^5}{214}\right)^3 + \left(\frac{4 \times 10^5}{20 \times 0,75}\right)} = 1043,5 \text{ kp/cm}^3,$$

el cual supera la tensión admisible. Por ello, consideramos el siguiente perfil IP 220, con propiedades mecánicas  $W_z = 278 \text{ cm}^3$ ,  $I_z = 3060 \text{ cm}^4$ , y  $A_v = 22 \cdot 0,81 \text{ cm}^3$ , para el que se obtiene una tensión de comparación:

$$\sigma_{co} = \sqrt{\left(\frac{2 \times 10^5}{278}\right)^3 + \left(\frac{4 \times 10^5}{22 \times 0,81}\right)} = 817,6 \text{ kp/cm}^3,$$

el cual sí verifica el ELU. Por tanto, el perfil necesario es el **IPN 200**.

Para calcular las deformaciones pedidas, simplemente integraremos la expresión anterior de la ley de momentos flectores:

$$\begin{aligned} EIy''(x) &= -2\langle x-2\rangle^0 + 2\langle x-4\rangle^0 - 4\langle x-3\rangle^1 + 6\langle x-1\rangle^1 + 6\langle x-5\rangle^1 - \\ &\quad - \frac{4[x^2 - \langle x-1\rangle^2]}{2} - \frac{4\langle x-5\rangle^2}{2}. \\ EI\theta(x) &= -2\langle x-2\rangle^1 + 2\langle x-4\rangle^1 - \frac{4}{2}\langle x-3\rangle^2 + \frac{6}{2}\langle x-1\rangle^2 + \frac{6}{2}\langle x-5\rangle^2 - \\ &\quad - \frac{4[x^3 - \langle x-1\rangle^3]}{3!} - \frac{4\langle x-5\rangle^3}{3!} + C_1. \\ EIy(x) &= -\langle x-2\rangle^2 + \langle x-4\rangle^2 - \frac{4}{3!}\langle x-3\rangle^3 + \frac{6}{3!}\langle x-1\rangle^3 + \frac{6}{3!}\langle x-5\rangle^3 - \\ &\quad - \frac{4[x^4 - \langle x-1\rangle^4]}{4!} - \frac{4\langle x-5\rangle^4}{4!} + C_1x + C_2. \end{aligned}$$

Las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$  se determinan imponiendo las condiciones de contorno. En lugar de imponer  $y(1) = y(5) = 0$ , impondremos  $y(1) = 0$  y  $\theta(3) = 0$  aprovechando la evidente simetría del problema, con lo que resulta:

$$\left. \begin{array}{l} y(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0 \\ \theta(3) = 0 \Rightarrow -4\frac{3^3 - 2^3}{6} - 2 + 3 \cdot 2^2 + C_1 = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} C_1 = \frac{8}{3} \\ C_2 = -\frac{5}{2} \end{array} \quad (59)$$

Las deformaciones pedidas las podemos obtener particularizando las ecuaciones de la elástica para  $x = 0$  ( $A, E$ ) y  $x = 3 \text{ m}$  ( $C$ ):

$$\delta_0 = y(0) = -\frac{5 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3060} = -0,4085 \text{ cm},$$

$$\delta_1 = y(3) = \frac{1}{EI_z} \left[ -1 + 2^3 - \frac{1}{6} (3^4 - 2^4) + 8 - \frac{5}{2} \right] = 0,2723 \text{ cm} .$$

El ángulo que ha girado la sección extra A se determina particularizando la ley de giros para  $x = 0$ :

$$\theta_E = y'(0) = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3060} = 4,36 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

El signo positivo nos indica que el giro en el extremo C tiene sentido antihorario. Por simetría, el giro en la otra sección extrema E será sencillamente  $\theta_E = -\theta_C$ , con lo que podremos representar la configuración deformada de la viga como se muestra en la figura 21.

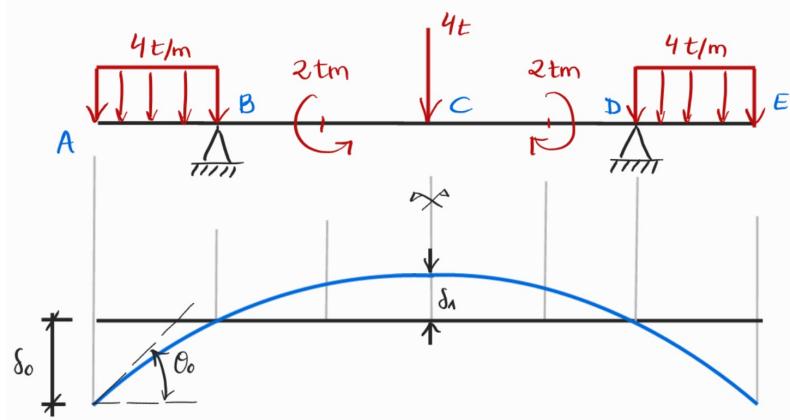


Figura 21

## 5. Dimensionamiento y comprobación de vigas a estados límite de servicio según el CTE

En el Documento Básico sobre Seguridad Estructural (DB SE) del CTE se define la *Aptitud al Servicio* (Art. 10.2.) como la exigencia básica de que, conforme al uso previsto del edificio, no se produzcan *deformaciones inadmisibles*, se limite a un nivel aceptable la probabilidad de un *comportamiento dinámico inadmisible*, y no se produzcan *degradaciones o anomalías inadmisibles*. Denominaremos **estados límite de servicio (ELS)** a aquellas situaciones límite que comprometen dichas exigencias. En general, podemos entender los estados límite de servicio como aquellos que, de ser superados, afectan negativamente al bienestar de las personas o a la apariencia de la construcción. De sobrepasarse, no originan riesgo para las personas, aunque sí pueden conllevar pérdidas económicas por agrietamiento o rotura de elementos no estructurales como tabiques o cerramientos. La figura 22 recoge el *Apartado 3.2.3.* del *CTE-DB-SE* donde se recogen los tres tipos de ELS considerados en el CTE, incluyendo ELS de deformaciones, vibraciones, así como otros daños o deterioros que pueden influir negativamente sobre la apariencia, durabilidad y funcionalidad de la obra. Estos estados límite tiene como objeto verificar el cumplimiento de la exigencia básica de aptitud al servicio:

- Limitar daños en elementos constructivos no estructurales habituales, mediante el control de la deformación acumulada desde el momento de su puesta en obra (flecha activa).
- Manteniendo la apariencia, limitando las desviaciones por deformación total respecto a la geometría con que el usuario reconoce la estructura.

Estas verificaciones suelen realizarse en el dominio elástico, tanto en términos de deformaciones como vibraciones, ya que los movimientos se producen en este rango en condiciones de normal funcionamiento.

Documento Básico SE Seguridad Estructural

---

**3.2.2 Estados límite de servicio**

- 1 Los estados límite de servicio son los que, de ser superados, afectan al confort y al bienestar de los usuarios o de terceras personas, al correcto funcionamiento de del edificio o a la apariencia de la construcción.
- 2 Los estados límite de servicio pueden ser reversibles e irreversibles. La reversibilidad se refiere a las consecuencias que excedan los límites especificados como admisibles, una vez desaparecidas las acciones que las han producido.
- 3 Como estados límite de servicio deben considerarse los relativos a:
  - a) las deformaciones (flechas, asientos o desplomes) que afecten a la apariencia de la obra, al confort de los usuarios, o al funcionamiento de equipos e instalaciones;
  - b) las vibraciones que causen una falta de confort de las personas, o que afecten a la funcionalidad de la obra;
  - c) los daños o el deterioro que pueden afectar desfavorablemente a la apariencia, a la durabilidad o a la funcionalidad de la obra.

Figura 22: Apartado 3.2.3. CTE-DB-SE.

Como adelantamos al principio del tema, nos centraremos en el ELS de deformaciones verticales. En el caso de estructuras de acero, estas deformaciones deben limitarse no tanto por problemas asociados al acero, sino por las características de los elementos constructivos que sustentan. Tenga en cuenta que el acero admite deformaciones relativamente importantes sin experimentar daño permanente. No obstante, otros elementos constructivos como tabiques, cerramientos, o forjados, son poco deformables y se agrietan si hay movimientos sensibles. La figura 23 recoge el *Apartado 4.3.3.1.* del *CTE-DB-SE* sobre deformaciones verticales o flechas. Este apartado nos indica que para verificar la integridad de los elementos constructivos, considerando cualquier *combinación característica de acciones (sin mayorar)* y solo las deformaciones posteriores a la puesta en obra del elemento, la flecha relativa *flecha/luz* debe ser menor que:

- 1/500 en pisos con tabiques frágiles (losas de gran formato, rasillones o placas) o pavimentos rígidos sin juntas.
- 1/400 en pisos con tabiques ordinarios o pavimentos rígidos con juntas.
- 1/300 en el resto de casos.

Para analizar el confort de los usuarios, con cualquier combinación característica de acciones, la flecha relativa debe ser inferior a 1/350. Finalmente, para analizar la apariencia de la obra, con la combinación casi permanente de acciones, la flecha relativa deberá ser inferior a 1/300.

Estas restricciones deben verificarse entre cualesquiera dos puntos de la planta, tomando como *luz el doble de la distancia* entre ellos. Para ilustrar esto, la figura 24 muestra el caso de una viga isostática y una viga empotrada de longitud  $L$ . En el primer ejemplo, en el caso de darse la flecha máxima  $y_{\max}$  en el centro de vano de la viga (por ejemplo en el caso de una carga uniformemente repartida) a una distancia  $L/2$  de los apoyos, la flecha relativa en este caso se calculará como  $y_{\max}/L$ . En cambio, en el caso del voladizo, si la flecha máxima aparece en el extremo libre, la flecha relativa se calculará como  $y_{\max}/2L$ .

Documento Básico SE Seguridad Estructural

#### 4.3.3.1 Flechas

- 1 Cuando se considere la integridad de los elementos constructivos, se admite que la estructura horizontal de un piso o cubierta es suficientemente rígida si, para cualquiera de sus piezas, ante cualquier combinación de acciones característica, considerando sólo las deformaciones que se producen después de la puesta en obra del elemento, la flecha relativa es menor que:
  - a) 1/500 en pisos con tabiques frágiles (como los de gran formato, rasillones, o placas) o pavimentos rígidos sin juntas;
  - b) 1/400 en pisos con tabiques ordinarios o pavimentos rígidos con juntas;
  - c) 1/300 en el resto de los casos.
- 2 Cuando se considere el confort de los usuarios, se admite que la estructura horizontal de un piso o cubierta es suficientemente rígida si, para cualquiera de sus piezas, ante cualquier combinación de acciones característica, considerando solamente las acciones de corta duración, la flecha relativa, es menor que 1/350.
- 3 Cuando se considere la apariencia de la obra, se admite que la estructura horizontal de un piso o cubierta es suficientemente rígida si, para cualquiera de sus piezas, ante cualquier combinación de acciones casi permanente, la flecha relativa es menor que 1/300.
- 4 Las condiciones anteriores deben verificarse entre dos puntos cualesquiera de la planta, tomando como luz el doble de la distancia entre ellos. En general, será suficiente realizar dicha comprobación en dos direcciones ortogonales.
- 5 En los casos en los que los elementos dañables (por ejemplo tabiques, pavimentos) reaccionan de manera sensible frente a las deformaciones (flechas o desplazamientos horizontales) de la estructura portante, además de la limitación de las deformaciones se adoptarán medidas constructivas apropiadas para evitar daños. Estas medidas resultan particularmente indicadas si dichos elementos tienen un comportamiento frágil.

Figura 23: Apartado 4.3.3.1. CTE-DB-SE.

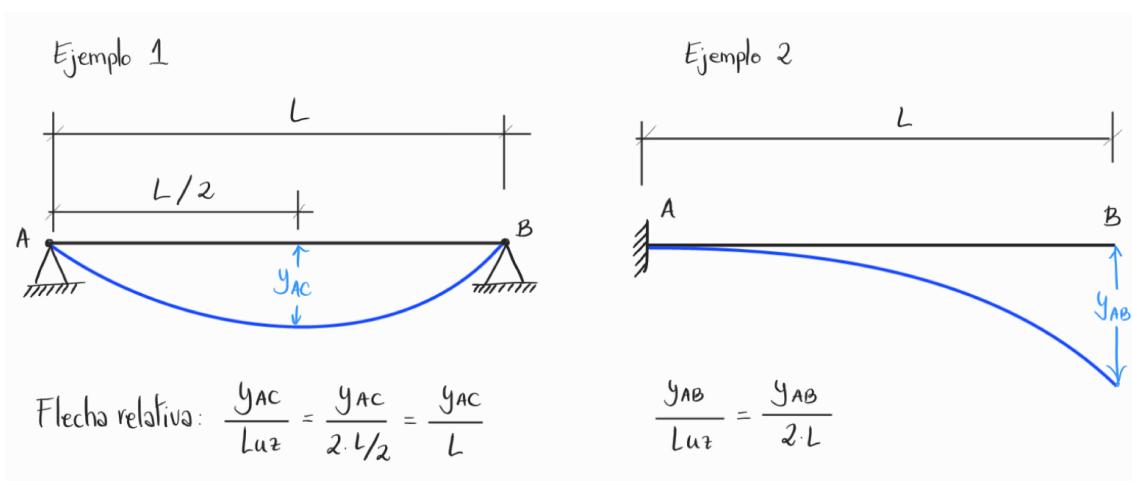


Figura 24: Ejemplos de cálculo de flecha relativa.

A continuación, mostraremos un ejemplo de cómo combinar los métodos de cálculo de flechas estudiados anteriormente para la comprobación del ELS de flechas de una viga de acero.

□ **Ejemplo 5:** Dada la viga de acero ( $E = 210 \text{ GPa}$ ) simplemente apoyada de la figura 25 de longitud 5 m y módulo de rigidez  $EI_z$  constante, determinar el perfil de la serie IPN óptimo que verifique el ELS de deformaciones considerando un edificio de tabiques ordinarios (flecha relativa máxima de 1/400). Las cargas de la figura están expresadas en valores característicos.

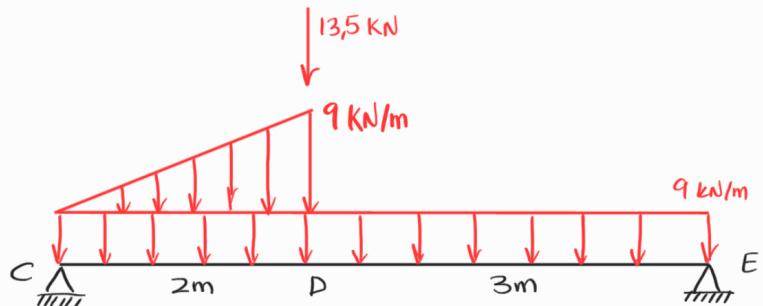


Figura 25: **Ejemplo 5.** Diseño de viga a ELS de flechas.

En primer lugar, planteamos equilibrio externo para determinar el valor de las reacciones:

$$\begin{aligned} \sum F_v = 0 &\rightarrow R_C + R_E = 13,5 + 9 \frac{2}{2} + 9 \cdot 5 \\ \sum M_C = 0 &\rightarrow 5R_E = 2 \cdot 13,5 + 9 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} + 9 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} R_E = 30,30 \text{ kN} \\ R_C = 37,20 \text{ kN} \end{cases}$$

Ecuación Universal de la Elástica:

$$\begin{aligned} EI_z y'' &= 37,2 \cdot x - 9 \frac{x^2}{2} - 13,5 \langle x - 2 \rangle - \frac{9}{3!} \frac{[x^3 - \langle x - 2 \rangle^3]}{2} + \frac{9}{2} \langle x - 2 \rangle^2, \\ EI_z \theta(x) &= \frac{37,2 \cdot x^2}{2} - 9 \frac{x^3}{3!} - \frac{13,5}{2} \langle x - 2 \rangle^2 - \frac{9}{4!} \frac{[x^4 - \langle x - 2 \rangle^4]}{2} + \frac{9}{3!} \langle x - 2 \rangle^3 + C_1, \\ EI_z y(x) &= \frac{37,2 \cdot x^3}{3!} - 9 \frac{x^4}{4!} - \frac{13,5}{3!} \langle x - 2 \rangle^3 - \frac{9}{5!} \frac{[x^5 - \langle x - 2 \rangle^5]}{2} + \frac{9}{4!} \langle x - 2 \rangle^4 + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Determinamos las constantes de integración aplicando las condiciones de borde:

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(5) = 0 \Rightarrow 37,2 \frac{5^3}{3!} - 9 \frac{5^4}{4!} - \frac{13,5}{3!} 3^3 - \frac{9}{5!} \frac{[5^5 - 3^5]}{2} + \frac{9}{4!} 3^4 + C_1 5 = -80,44 \text{ kNm}^2 \text{rad}$$

Ahora, para determinar la flecha máxima, debemos evaluar la sección de abscisa  $x = 2 \text{ m}$  que separa los dos tramos de la elástica:

$$EI_z y(2) = 37,2 \frac{2^3}{3!} - 9 \frac{2^4}{4!} - \frac{9}{5!} \frac{2^5}{2} - 2 \cdot 80,44 = -118,47 \rightarrow y(2) = -\frac{118,47}{EI_z}.$$

Además, deberemos buscar máximos/mínimos locales en la flecha (secciones de giro igual a 0). En este caso, la ley de giros está definida por un polinomio de orden 4, por lo que en general

deberemos resolverlo mediante métodos numéricos. Para ello, usaremos la función *fsolve* del paquete *scipy.optimize* de *Python*:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import fsolve
from math import factorial as fact

# Rot. Tramo 1
Rot_ft = lambda x : 37.20*x**2/2-9*x**3/fact(3)-9*x**4/(2*fact(4))-80.44
# Rot. Tramo 2
Rot_st = lambda x : 37.20*x**2/2-13.5*(x-2)**2/2-9*x**3/fact(3)
                    -9*(x**4-(x-2)**4)/(2*fact(4))+9*(x-2)**3/fact(3)-80.44

# Lo representamos
x_ft = np.linspace(0, 2, 201)
x_st = np.linspace(2, 5, 201)

plt.plot(x_ft, Rot_ft(x_ft))
plt.plot(x_st, Rot_st(x_st))
plt.plot([0,5],[0,0], '--k')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("theta/EI")
plt.grid()
plt.show()

# Buscamos la raíz del giro en el segundo tramo
x_initial_guess = 2
x_solution = fsolve(Rot_st, x_initial_guess)

print("La solución es x = %f" % x_solution)
```

Únicamente obtenemos una raíz válida en el segundo tramo, en  $x = 2,42$  m. La flecha en esta sección resulta  $EI_z y(2,42) = -122,92$ , superior en valor absoluto a la flecha calculada anteriormente para la sección en  $x = 2$  m. En esta sección, la flecha no podrá superar el límite impuesto por la norma<sup>1</sup>:

$$y(2,42) = \left| \frac{-122,92}{EI_z} \right| \leq \frac{L}{400} \rightarrow$$

$$\rightarrow I_z \geq \frac{400 \cdot 122,92 \cdot 10^6 \text{ kNm}^3}{EL} = \frac{400 \cdot 122,92 \cdot 10^6 \text{ kNm}^3}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^2 \text{ kN/cm}} = 4682,67 \text{ cm}^4,$$

para lo cual necesitaríamos un perfil **IPN 260** con una inercia de valor  $I_z = 5740 \text{ cm}^4$ .

---

<sup>1</sup>Para ser estrictos con la normativa, deberíamos comparar los desplazamientos entre los puntos de coordenadas  $x = 2,42$  m y  $x = 0$  m, con lo que la luz a considerar en la flecha relativa debería ser  $2 \cdot 2,42 = 4,84$  m, algo inferior a los 5 m considerados. No obstante, por sencillez, en vigas biapoyadas, consideraremos la luz igual a la longitud de la viga.

Para representar la deformada, completamos determinando los giros en las secciones extremas  $\theta(0) = -\frac{80,44}{EI_z}$  y  $\theta(5) = \frac{74,81}{EI_z}$ , con lo que obtenemos la elástica de la figura 26.

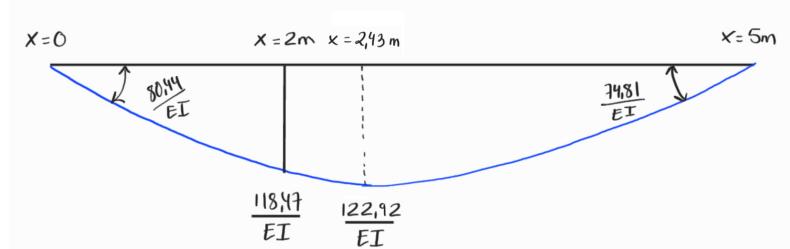


Figura 26

## 6. Aplicación al cálculo de vigas hiperestáticas

En todos los casos de flexión de vigas estudiados hasta ahora hemos supuesto que éstas eran isostáticas. En estos casos, la sola aplicación de las ecuaciones de la Estática permite determinar las reacciones de las ligaduras y apoyos, así como la distribución de esfuerzos. Sin embargo, hay infinidad de casos como los de la figura 27 en los que las ecuaciones de equilibrio resultan insuficientes para determinar las reacciones de las ligaduras. En el caso de vigas planas, siempre contaremos con tres ecuaciones de equilibrio, dos que expresan la nulidad de las fuerzas resultantes exteriores y las reacciones de las ligaduras ( $\sum F_H$  y  $\sum F_V$ ), y una tercera de momento resultante nulo de todas las fuerzas respecto a cualquier punto ( $\sum M_C = 0$  para cualquier punto C). Si el número de incógnitas que determinan la totalidad de las reacciones sobre la viga es superior a tres (dos en el caso de tener únicamente cargas verticales), se dice que la viga está indeterminada desde el punto de vista estático. En estos casos, es posible eliminar ligaduras sin que la viga deje de estar en equilibrio. Se dice, por tanto, que existen ligaduras que son superfluas o redundantes para mantener el equilibrio.

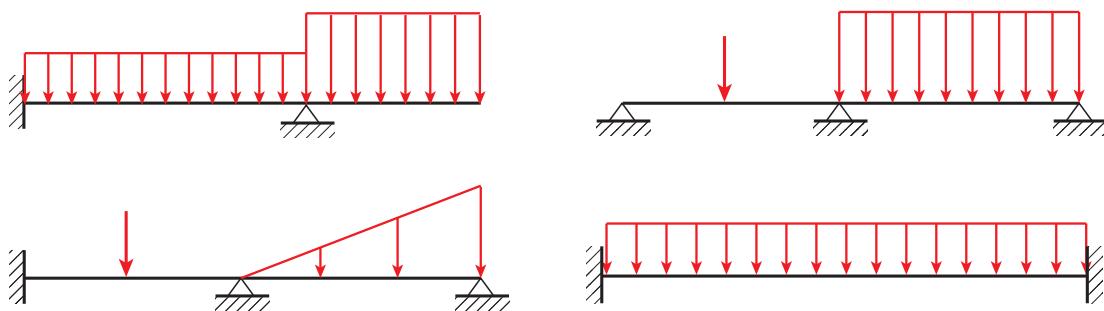


Figura 27: Ejemplos de vigas hiperestáticas planas.

Estas vigas reciben el nombre de vigas *hiperestáticas* o *estáticamente indeterminadas*. Llamaremos *grado de hiperestaticidad* al número de incógnitas superfluas, es decir, a la diferencia entre el número de incógnitas y el número de ecuaciones de equilibrio estático. En estos casos, es evidente que las ecuaciones de equilibrio no serán suficientes para determinar las reacciones de las ligaduras. Habrá pues que completarlas con tantas ecuaciones adicionales como el grado de hiperestaticidad de la viga. Tales ecuaciones relacionarán las restricciones de movimiento de ciertas secciones de la estructura, por lo que las denominaremos *ecuaciones de compatibilidad de deformaciones*. Con este principio, nos centraremos en esta parte del tema en el uso de la EDE y la EUE para la resolución de vigas hiperestáticas.

El procedimiento a seguir es esencialmente el mismo que el descrito para vigas isostáticas. En primer lugar, escribiremos las ecuaciones de equilibrio estático. A continuación, buscaremos completar el sistema de ecuaciones con tantas ecuaciones de compatibilidad como el grado de hiperestaticidad de la viga. Para ello, podemos pensar en liberar tantas ligaduras como grados de hiperestaticidad tenga el sistema, considerando las reacciones de ligadura de éstas como cargas externas de valor desconocido. Tras ello, mediante la EDE o la EUE, obtendremos la elástica de la viga mediante doble integración. Finalmente, impondremos las condiciones de contorno en la ecuación de la elástica, considerando tanto las ligaduras persistentes como las liberadas. Generalmente, esto dará lugar a un sistema lineal de ecuaciones que podremos resolver mediante métodos clásicos de reducción, igualación, o sustitución, así como mediante métodos matriciales. Veamos un par de ejemplos:

□ **Ejemplo 6:** Dimensionar la viga de acero de la figura 28 con un perfil IPE (S-275) para que verifique ELU y ELS (flecha relativa  $\leq 1/400$ ). Se trata de un ejercicio académico donde no se indica la naturaleza de las solicitudes, por lo que obviaremos la mayoración de cargas en ELU.

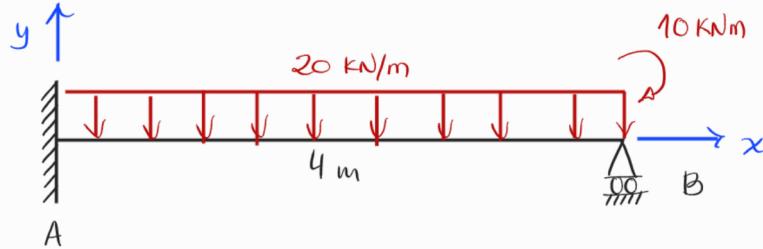


Figura 28: Ejemplo 6.

Empezamos imponiendo las condiciones de equilibrio externo:

$$\sum F_v = 0 \rightarrow V_A + V_B = 20 \cdot 4 = 80 [1]$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A + 4V_B = 20 \cdot 4 \cdot 2 + 10 = 170 [2]$$

Observamos que tenemos 3 reacciones desconocidas  $\{V_A, V_B, M_A\}$ , y únicamente dos ecuaciones de equilibrio, por lo que tenemos una viga hiperestática con grado de hiperestaticidad 1. Deberemos por tanto liberar una ligadura e imponer una ecuación de compatibilidad. Podemos optar por liberar el grado de libertad de giro en la sección A como se muestra en la figura 29, considerando el momento de empotramiento  $M_A$  como una acción externa de valor desconocido.

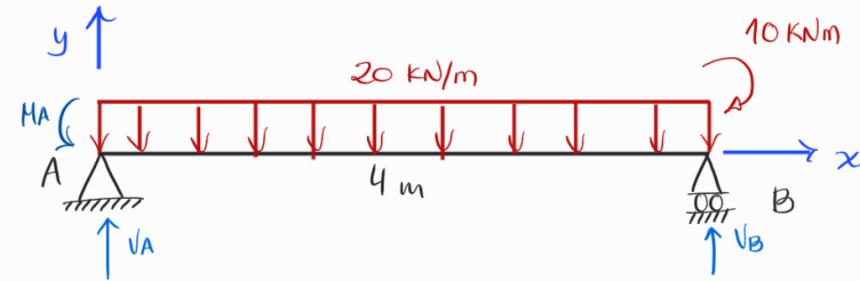


Figura 29

Pasamos por tanto a determinar la ecuación de la elástica. En este caso, dado que con un único corte podemos determinar la ley de flectores, emplearemos la EDE. Es trivial obtener:

$$EI_z y'' = M(x) = -10x^2 + V_A x - M_A,$$

$$EI_z \theta(x) = -\frac{10}{3}x^3 + \frac{V_A}{2}x^2 - M_A x + C_1,$$

$$EI_z y(x) = -\frac{10}{12}x^4 + \frac{V_A}{6}x^3 - \frac{M_A}{2}x^2 + C_1 x + C_2.$$

Vemos que aunque hemos ganado dos incógnitas nuevas,  $C_1$  y  $C_2$ , contamos con tres condiciones de borde, por lo que podremos completar el sistema de ecuaciones. Imponiendo las condiciones de ligadura de los apoyos:

$$y(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0,$$

$$y(4) = 0 \rightarrow -\frac{10 \cdot 4^4}{12} + V_A \frac{4^3}{6} - M_A \frac{4^2}{2} + 4 \cdot C_1 = 0, [3]$$

$$\theta(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0.$$

La segunda ecuación anterior, junto con las dos ecuaciones de equilibrio [1-3], completa el sistema lineal de ecuaciones. Tras simplificar las expresiones eliminando factores comunes, podemos escribir:

$$\begin{cases} V_A + V_B = 80 \\ 4V_B + M_A = 170 \\ 4V_A - 3M_A = 80 \end{cases}$$

Resolveremos este sistema de ecuaciones matricialmente. Para ello, reescribimos el sistema anterior en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ M_A \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 80 \\ 170 \\ 80 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

por lo que deberemos determinar la matriz inversa de  $\mathbf{A}$ . Para ello:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A})}{|\mathbf{A}|} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -12 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ -16 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 46,25 \\ 33,75 \\ 35,00 \end{bmatrix},$$

con lo que obtenemos  $V_A = 46,25$  kN,  $V_B = 33,75$  kN y  $M_A = 35$  kNm. En lugar de realizar el cálculo de manera manual, resulta trivial determinar la inversa de una matriz cuadrada mediante el paquete *numpy* de *Python*:

```
import numpy as np

A = np.array([[1, 1, 0], [0, 4, 1], [80, 170, 80]])
np.linalg.inv(A)
```

Una vez determinado el valor de las reacciones, podemos representar los diagramas de esfuerzos cortantes y flectores como se muestra en la figura 30. En esta figura, se observa que la sección crítica es la sección A donde aparece el máximo momento flector y máximo cortante. Dimensionamos el perfil considerando únicamente las tensiones normales debidas al momento flector:

$$W_z = \frac{M_{\max}}{f_{yd}} = \frac{35 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \text{ Ncm}}{\frac{275}{1,05} \cdot 10^2 \text{ N/cm}^2} = 133,6 \text{ cm}^3,$$

para el que necesitaremos un perfil IPE 180 con un módulo resistente  $W_z = 146 \text{ cm}^3$  y área a cortante  $A_v = 180 \cdot 5,3 \text{ mm}^2$ .

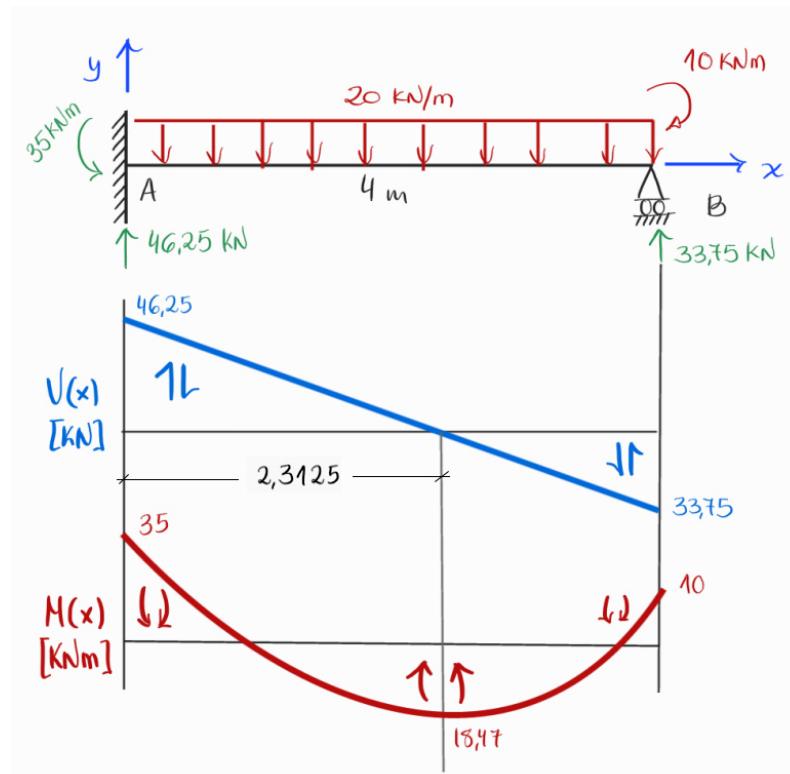


Figura 30

Comprobamos ahora el perfil mediante la tensión de comparación de Von Mises:

$$\sigma_n = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{35 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{146 \cdot 10^3 \text{ mm}^3} = 239,72 \text{ MPa}$$

$$\tau_{CTE} = \frac{V_{\max}}{A_v} = \frac{46,25 \cdot 10^3 \text{ N}}{180 \cdot 5,3 \text{ mm}^2} = 48,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{co} = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_{CTE}^2} = 254,0 \text{ MPa}$$

por lo que podemos afirmar que el perfil **IPE 180** verifica el ELU de resistencia dado que  $\sigma_{co} < f_{yd} = 261,9 \text{ MPa}$ .

Pasamos pues ahora a verificar el ELS de deformaciones. Para ello, tratamos de encontrar la flecha máxima en la viga. En este caso, dado que en los extremos la flecha es cero, buscamos únicamente la sección de giro nulo:

$$EI_z \theta(x) = 0 = -\frac{10x^3}{3} + V_A \frac{x^2}{2} - M_A x = x \cdot \left( -\frac{10x^2}{3} + V_A \frac{x}{2} - M_A \right).$$

Esta ecuación presenta una solución trivial en  $x = 0$ , siendo ésta la sección en el empotramiento. Asimismo, el segundo factor del término de la derecha arroja otras dos soluciones:

$$0 = -\frac{10x^2}{3} + V_A \frac{x}{2} - M_A = \frac{-V_A/2 \pm \sqrt{(V_A/2)^2 - 4 \cdot \frac{10}{3} M_A}}{-\frac{20}{3}} = \begin{cases} 2,23 \text{ m} \\ 4,70 \text{ m} \end{cases}$$

cuya única solución válida es  $x = 2,23 \text{ m}$  ya que la sección  $x = 4,70$  no pertenece a la viga (figura 31). Imponiendo pues que la flecha en  $x = 2,23 \text{ m}$  no supere el límite  $L/400$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 EI_z y(2,23) &= -\frac{10 \cdot 2,23^4}{12} + V_A \frac{2,23^3}{6} - M_A \frac{2,23^2}{2} = -22,152 \rightarrow, \\
 \rightarrow |y(2,23)| &= \left| -\frac{22,152}{EI_z} \right| \leq \frac{4}{400} \rightarrow I \geq 1054,84 \text{ cm}^4.
 \end{aligned}$$

El perfil **IPE 180** tiene una inercia de 1320 cm<sup>4</sup>, por lo que podemos confirmar que dicho perfil verifica simultáneamente el ELU de resistencia y el ELS de deformación vertical. Para dicho perfil, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 y(2,23) &= -0,8 \text{ cm}, \\
 \theta_B &= \theta(5) = 6,012 \cdot 10^{-3} \text{ rad},
 \end{aligned}$$

con lo que podremos representar la elástica de la viga como se muestra en la figura 31.

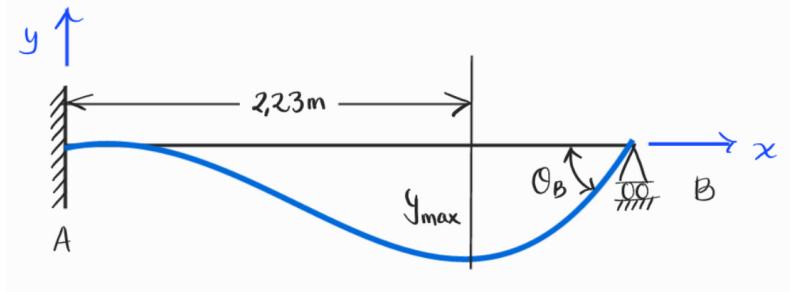
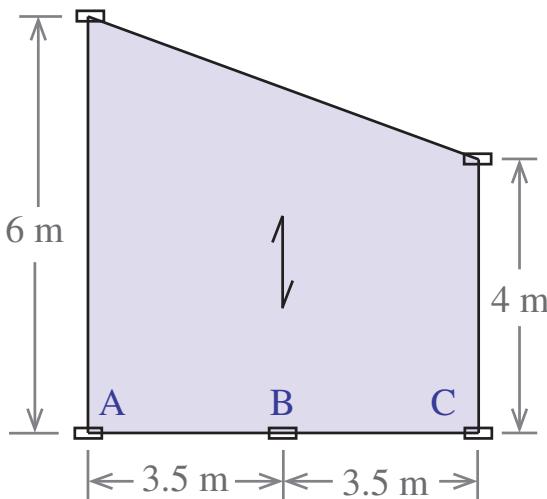


Figura 31

□ **Ejemplo 7:** Dado el forjado de la figura 32, determinar el perfil metálico de acero S-275 para la viga ABC para que verifique tanto el ELU de resistencia como el ELS de flechas.



Considerese los siguientes datos:

- Peso propio del forjado: 4 kN/m<sup>2</sup>.
- Peso de solería: 0.5 kN/m<sup>2</sup>.
- Sobrecarga de uso: 1 kN/m<sup>2</sup>.
- No considere cargas de cerramiento.
- Piso con tabiques ordinarios.

Figura 32: Ejemplo 7

En primer lugar determinamos la carga por unidad de superficie para la combinación de cargas característica y de diseño:

$$Q_k = (4 + 0,5) + 1 = 5,50 \text{ kN/m}^2,$$

$$Q_d = 1,35 \cdot (4 + 0,5) + 1,5 \cdot 1 = 7,58 \text{ kN/m}^2,$$

lo que nos permite determinar el coeficiente de proporcionalidad entre ambas cargas de valor  $\gamma_f = Q_d/Q_k = 1,377$ . Esto nos permitirá trabajar con la combinación característica, únicamente mayorando por  $\gamma_f$  los esfuerzos máximos a la hora de realizar la comprobación a ELU.

A continuación debemos determinar el esquema de carga de la viga ABC, la cual, dada la disposición de viguetas del forjado unidireccional, estará sometida a una distribución de cargas trapezoidal como se muestra en la figura 33.

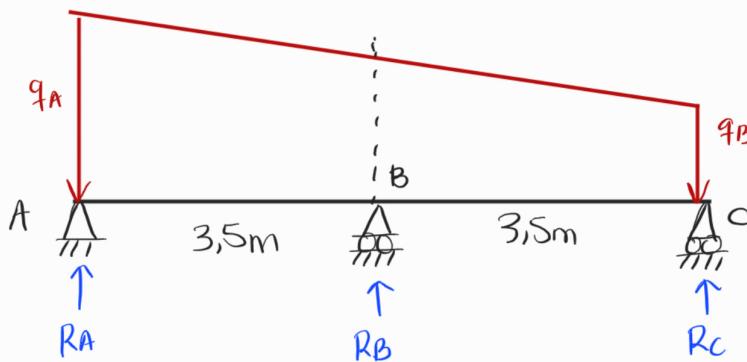


Figura 33

cuyos valores de carga  $q_A$  y  $q_B$  se pueden determinar como:

$$q_A = Q_k \frac{6}{2} \sin 90^\circ = 16,5 \text{ kN/m},$$

$$q_B = Q_k \frac{4}{2} \sin 90^\circ = 11,0 \text{ kN/m}.$$

Las ecuaciones de equilibrio externo resultan:

$$\sum F_v = 0 \rightarrow R_A + R_B + R_C = q_B \cdot 7 + (q_A - q_B) \frac{7}{2}, \quad [1]$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 3,5R_B + 7R_C = q_B \frac{7^2}{2} + (q_A - q_B) \frac{7^2}{6}, \quad [2]$$

donde tenemos tres reacciones incógnita, por lo que tenemos una viga hiperestática de grado de hiperestaticidad 1. Debemos pues completar estas ecuaciones con una ecuación de compatibilidad. Dado que la ley de momentos flectores está definida en dos tramos, emplearemos en este caso la EUF. Dado que desconocemos la expresión para el caso de carga trapezoidal, descompondremos dicha carga mediante la composición de una carga uniforme y una triangular, tal y como se muestra en la figura 34.

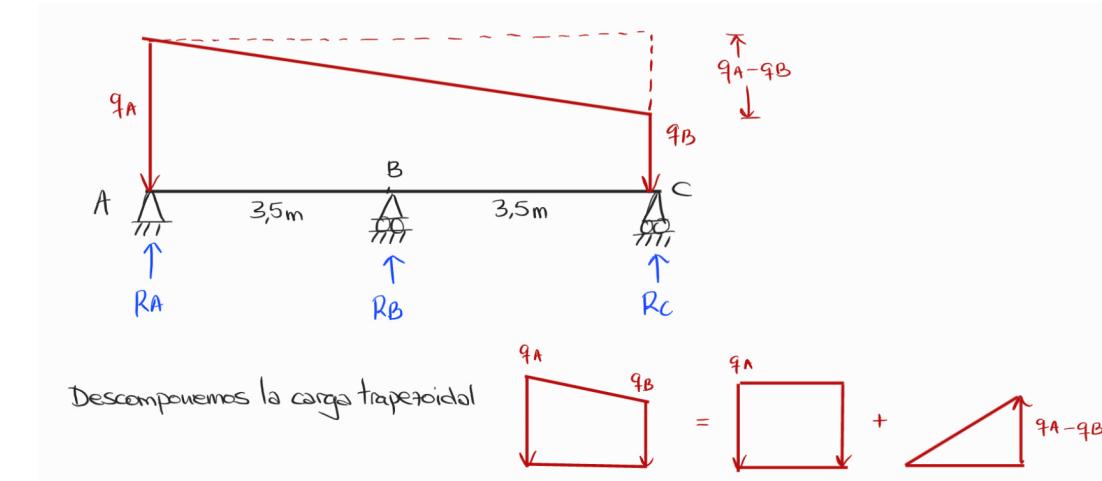


Figura 34

Podremos por tanto escribir:

$$EIz y''(x) = M(x) = R_A x + R_B \langle x - 3, 5 \rangle - \frac{q_A x^2}{2} + \frac{(q_A - q_B)x^3}{7!3!},$$

$$EI_z \theta(x) = - R_A \frac{x^2}{2} + R_B \frac{\langle x-3,5 \rangle^2}{2} - \frac{q_A x^3}{3!} + \frac{(q_A - q_B)x^4}{7 \cdot 4!} + C_1,$$

$$EI_{\bar{z}}y(x) = R_A \frac{x^3}{3!} + R_B \frac{(x-3,5)^3}{3!} - \frac{q_A x^4}{4!} + \frac{(q_A - q_B)x^5}{5!} + C_1 x + C_2.$$

Ahora, imponiendo las condiciones de borde:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \\ y(3,5) = 0 \rightarrow R_A \frac{3,5^3}{3!} - \frac{q_A 3,5^4}{4!} + \frac{(q_A - q_B) 3,5^5}{7 \cdot 5!} + 3,5 C_1 & [3] \\ y(7) = 0 \rightarrow R_A \frac{7^3}{2!} + R_B \frac{3,5^3}{2!} - \frac{q_A 7^4}{4!} + \frac{(q_A - q_B) 7^5}{7 \cdot 5!} + 7 C_1 & [4] \end{cases}$$

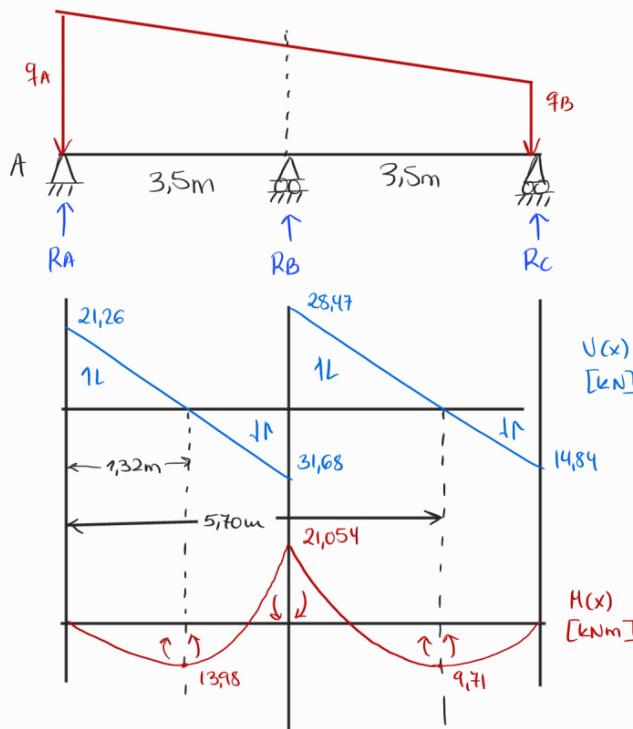
Podremos montar un sistema de 4 ecuaciones [1-4] y 4 incógnitas  $\{R_A, R_B, R_C, C_1\}$ :

$$\begin{cases} R_A + R_B + R_C = q_B \cdot 7 + (q_A - q_B) \frac{7}{2} = 96,25 \\ 3,5R_B + 7R_C = q_B \frac{7^2}{2} + (q_A - q_B) \frac{7^2}{6} = 314,42 \\ R_A \frac{3,5^3}{3!} + 3,5C_1 = \frac{q_A 3,5^4}{4!} - \frac{(q_A - q_B) 3,5^5}{7 \cdot 5!} = 99,73 \\ R_A \frac{7^3}{3!} + R_B \frac{3,5^3}{3!} + 7C_1 = \frac{q_A 7^4}{4!} - \frac{(q_A - q_B) 7^5}{7 \cdot 5!} = 1540,64 \end{cases}$$

con el cual, una vez resuelto, obtendremos:

$$\begin{cases} R_A = 21,26 \text{ kN}, \\ R_B = 60,16 \text{ kN}, \\ R_C = 18,84 \text{ kN}, \\ C_1 = -14,9 \text{ kNm}^2\text{rad}. \end{cases}$$

Podremos ahora determinar los diagramas de esfuerzos de la viga:



Sección crítica: B

$$\begin{aligned} M_{k,\max} &= 21,054 \text{ kNm}, \\ V_{k,\max} &= 31,68 \text{ kN}, \\ \downarrow \\ M_{d,\max} &= \gamma_f M_{k,\max}, \\ V_{d,\max} &= \gamma_f V_{k,\max}. \end{aligned}$$

Esto nos permite identificar la sección B como la sección crítica, registrando los máximos esfuerzos cortante y fletor. Dimensionamos el perfil considerando únicamente el momento fletor:

$$W = \frac{M_{d,\max}}{f_{yd}} = 111,66 \text{ cm}^3 \rightarrow \text{IPE } 180 \quad (W_z = 146 \text{ cm}^3, I_z = 1320 \text{ cm}^4).$$

con el que comprobaremos a partir de la tensión de comparación de Von Mises:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_n = 198,68 \text{ MPa}, \\ \tau_{CTE} = 45,74 \text{ MPa}, \end{array} \right\} \sigma_{co} = 213,83 \text{ MPa} \leq f_{y,d}.$$

Pasamos ahora a verificar el ELS. Para ello, particularizamos la EUE determinada anteriormente (combinación característica de carga) para los dos tramos en que se define el momento flector:

tramo 1:  $0 \leq x \leq 3,5$  m,

$$EI_z\theta_1(x) = R_A \frac{x^2}{2} - \frac{q_A x^3}{3!} + \frac{(q_A - q_B)x^4}{7 \cdot 4!} + C_1,$$

$$EI_z y_1(x) = R_A \frac{x^3}{3!} - \frac{q_A x^4}{4!} + \frac{(q_A - q_B)x^5}{7 \cdot 5!} + C_1 x.$$

tramo 2:  $3,5 \text{ m} \leq x \leq 7,0 \text{ m}$ ,

$$EI_z\theta_2(x) = R_A \frac{x^2}{2} + \frac{R_B (x - 3,5)^2}{2} - \frac{q_A x^3}{3!} + \frac{(q_A - q_B)x^4}{7 \cdot 4!} + C_1,$$

$$EI_z y_2(x) = R_A \frac{x^3}{3!} + \frac{R_B (x - 3,5)^3}{3!} - \frac{q_A x^4}{4!} + \frac{(q_A - q_B)x^5}{7 \cdot 5!} + C_1 x.$$

Dado que las flechas en los extremos de los tramos es cero, la flecha máxima aparecerá en las secciones de giro cero. Resolviendo numéricamente, obtenemos:

$$\theta_1(x) = 0 \rightarrow x = 1,51 \text{ m} \rightarrow y_1(1,51 \text{ m}) = -7,6 \text{ mm},$$

$$\theta_2(x) = 0 \rightarrow x = 5,60 \text{ m} \rightarrow y_2(5,60 \text{ m}) = -4,7 \text{ mm},$$

con lo que podremos esbozar la línea elástica de la figura 35. El tramo AB será el más limitante ( $y_{\max} = -7,6 \text{ mm}$ ), por lo que verificamos:

$$|y_{\max}| \leq \frac{L}{400} = \frac{3500}{400} \text{ mm} = 8,75 \text{ mm},$$

por lo que podemos afirmar que el perfil seleccionado **IPE 180** verifica tanto el ELU de resistencia como el ELS de flechas.

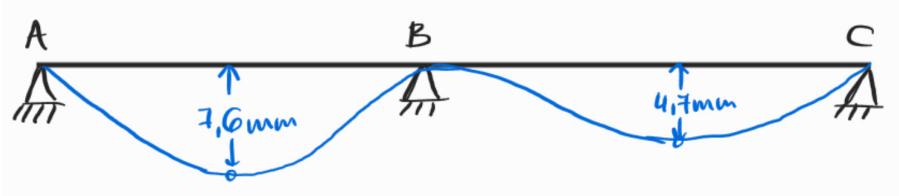


Figura 35