

# Fundamentos teóricos del Análisis Modal Operacional

Enrique García-Macías

Universidad de Granada

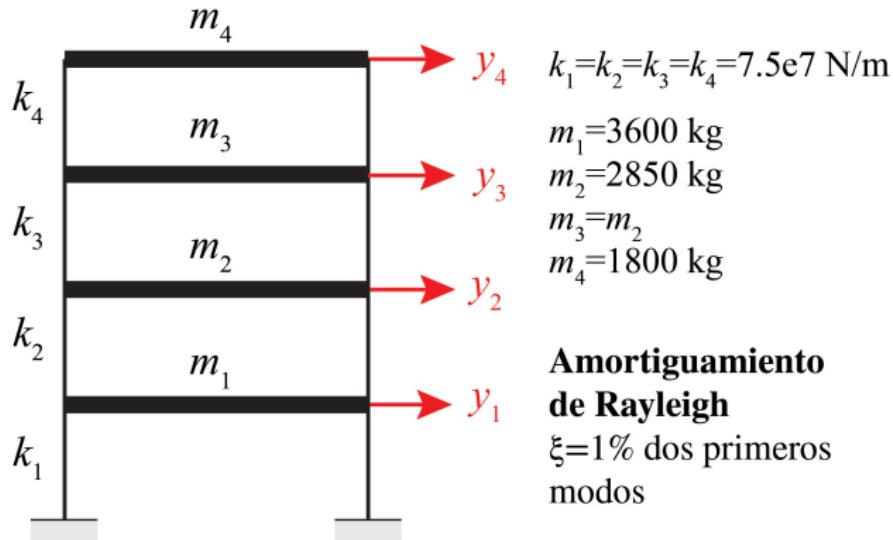
*enriquegm@ugr.es*

March 15, 2021

# Índice

- 1 Caso de estudio básico: shear building
- 2 OMA en el dominio del tiempo (time-based OMA)
  - Sistema no-amortiguado: vibraciones libres
  - Sistema con amortiguamiento proporcional
  - Sistema con amortiguamiento general
  - Continuous-Time State-Space Models
  - Discrete-Time State-Space Models
  - Stochastic State-Space Models
  - Covariance-based Stochastic Subspace Identification (COV-SSI)
- 3 OMA en el dominio de la frecuencia (frequency-based OMA)
  - Frequency Domain Decomposition (FDD)

# Caso de estudio básico: shear building



Descripción del sistema dinámico mediante elementos finitos (vibración libre):

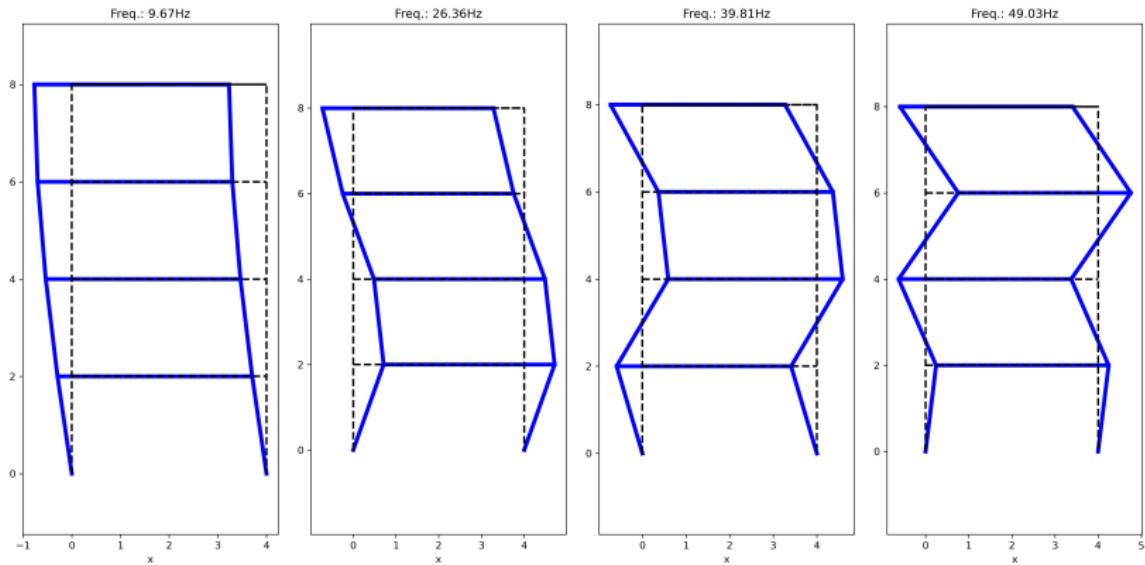
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Análisis modal: problema de autovalores/autovectores

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Theta = 0 \quad (3)$$

[Frame\\_structure\\_undamped\\_modal.py](#)



## Sistema no-amortiguado: vibraciones libres

Un sistema dinámico estructural genérico modelado mediante FEM ( $n_2$  grados de libertad) se define como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_2\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) = \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \quad (4)$$

donde  $\mathbf{M}, \mathbf{C}_2, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema, y  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$  es el vector de desplazamientos para un instante de tiempo  $t$ . El vector  $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$  es el vector que contiene las fuerzas exteriores actuando sobre el sistema. Este último se puede factorizar mediante la matriz  $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$  especificando las localizaciones discretas de un conjunto de  $m$  inputs (fuerzas) incluidas en un vector  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ .

En el caso de sistemas no amortiguados en vibración libre:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (5)$$

Podemos encontrar soluciones a la ecuación (5) de la forma  $\mathbf{q}(t) = \varphi_i e^{\lambda_i t}$ . Sustituyendo en (5):

$$\mathbf{K}\varphi_i = \mathbf{M}\varphi_i (-\lambda_i^2) \quad (6)$$

donde los autovalores  $\varphi_i \in \mathbb{R}^{n_2}$  y autovectores  $\lambda_i = j\omega_i$  son magnitudes reales. Podemos reorganizar la ecuación (6) de forma matricial compacta:

$$\mathbf{K}\Theta = \mathbf{M}\Theta\Omega^2 \quad (7)$$

siendo  $\Theta \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  la matriz modal contiendo los autovectores por columnas, y  $\Omega = \text{diag}(\omega_i) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  una matriz diagonal conteniendo los autovalores  $\omega_i$ .

Se verifican las condiciones de ortogonalidad:

$$\Theta^T \mathbf{M} \Theta = \begin{bmatrix} & \\ & m_i \\ & & \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\Theta^T \mathbf{K} \Theta = \begin{bmatrix} & \\ & k_i \\ & & \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde los términos  $m_i$  y  $k_i$  son las masas y rigideces modales, cumpliendo  $\omega_i^2 = k_i/m_i$ .

## Sistema con amortiguamiento proporcional

Realizando el cambio de coordenadas  $\mathbf{q}(t) = \Theta\mathbf{q}_m(t)$  ( $\mathbf{q}_m(t)$  desplazamientos modales), podemos desacoplar las ecuaciones del movimiento como:

$$\Theta^T \mathbf{M} \Theta \ddot{\mathbf{q}}_m(t) + \Theta^T \mathbf{C}_2 \Theta \dot{\mathbf{q}}_m(t) + \Theta^T \mathbf{K} \Theta \mathbf{q}_m(t) = \Theta^T \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \quad (10)$$

Al tratarse de un amortiguamiento proporcional diagonalizable, la matriz  $\Theta^T \mathbf{C}_2 \Theta$  puede escribirse como:

$$\Theta^T \mathbf{C}_2 \Theta = \begin{bmatrix} c_i \\ & \ddots \\ & & c_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\zeta_i \omega_i m_i \\ & \ddots \\ & & 2\zeta_i \omega_i m_i \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} m_i \\ & \ddots \\ & & m_i \end{bmatrix} \quad (11)$$

con

$$\Gamma = \text{diag}(2\zeta_i \omega_i) \quad (12)$$

Premultiplicando la ecuación (10) por  $(\Theta^T \mathbf{M} \Theta)^{-1}$

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}}_m(t) + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\mathbf{q}}_m(t) + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{q}_m(t) = \begin{bmatrix} 1/m_1 \\ \vdots \\ 1/m_i \\ \vdots \end{bmatrix} \Theta^T \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \quad (13)$$

Al igual que en el caso no-amortiguado, podemos encontrar soluciones a la parte homogénea de la ecuación (13) de la forma  $q_m(t) = \varphi_i e^{\lambda_i t}$ , llegando al polinomio característico:

$$\lambda_i^2 + 2\zeta_i \omega_i \lambda_i + \omega_i^2 = 0 \quad (14)$$

de soluciones:

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\zeta_i \omega_i \pm j\omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}. \quad (15)$$

## Sistema con amortiguamiento general

Los métodos experimentales de identificación modal se basan en la asunción de un modelo de amortiguamiento viscoso general. Con el fin de encontrar los autovalores de una estructura con amortiguamiento general, es necesario reformular la ecuación del movimiento de segundo orden (4) en una ecuación equivalente de primer orden. Para ello, sencillamente añadimos la identidad  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t)$ . Si además, definimos un nuevo vector  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  ( $n = 2n_2$ ) que llamaremos vector de estado:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

y las matrices:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Con ello, podemos reescribir la ecuación (4) como:

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (18)$$

De aquí, el problema de autovalores/autovectores asociado resulta:

$$\mathbf{P}\Psi\Lambda_c + \mathbf{Q}\Psi = \mathbf{0} \quad (19)$$

donde  $\Psi \in \mathbb{C}^{n \times n}$  contiene los  $n = 2n_2$  autovectores complejos en sus columnas y  $\Lambda_c = \text{diag}(\lambda_i) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es una matriz diagonal conteniendo los  $n$  autovalores complejos  $\lambda_o$ . Se puede demostrar que  $\Lambda_c$  y  $\Psi$  adquieren la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \Lambda_c &= \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix}, & \Psi &= \begin{bmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta\Lambda & \Theta^*\Lambda^* \end{bmatrix} \\ \Lambda &= \text{diag}(\lambda_i), & \Theta &= [\dots \quad \varphi_k \quad \dots], \quad k = 1, \dots, n_2 \end{aligned} \quad (20)$$

Los autovalores complejos  $\lambda_i$ ; los podemos escribir como:

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\zeta_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (21)$$

Además, es fácil demostrar que se verifican las siguientes condiciones de ortogonalidad:

$$\Psi^T \mathbf{P} \Psi = \begin{bmatrix} & \\ & a_i \\ & & \end{bmatrix}; \quad \Psi^T \mathbf{Q} \Psi = \begin{bmatrix} & \\ & b_i \\ & & \end{bmatrix} \quad (22)$$

Introduciendo la ecuación (22) en (19) se obtiene que:

$$\Lambda_c = \begin{bmatrix} & \\ & \lambda_i \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & 1/a_i \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & b_i \\ & & \end{bmatrix}. \quad (23)$$

# Continuous-Time State-Space Models

## Ecuación de estado

Premultiplicando la forma de primer orden de la ecuación (19) por  $\mathbf{P}^{-1}$ , podemos escribir la ecuación del movimiento de segundo orden como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(t) \quad (24)$$

donde  $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la llamada **matriz de estado - state matrix** y  $\mathbf{B}_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Usando la descomposición modal de  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  (22),  $\mathbf{A}_c$  se puede escribir como:

$$\mathbf{A}_c = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} = -\Psi \begin{bmatrix} 1/a_i & & \\ & \ddots & \\ & & 1/a_i \end{bmatrix} \Psi^T \Psi^{-T} \begin{bmatrix} b_i & & \\ & \ddots & \\ & & b_i \end{bmatrix} \Psi^{-1} = \Psi \Lambda_c \Psi^{-1} \quad (25)$$

Lo que muestra que  $\Lambda_c$  y  $\Psi$  contienen los autovalores y autovectores de  $\mathbf{A}_c$ .

Operando algebraicamente,  $\mathbf{A}_c$  y  $\mathbf{B}_c$  pueden escribirse como:

$$\mathbf{A}_c = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Ejemplo: *Frame\_structural\_Modal\_State\_space.py*

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -41666.7 & 20833.3 & -0 & -0 & -0.46 & 0.18 & -0 & -0 \\ 26315.8 & -52631.6 & 26315.8 & -0 & 0.23 & -0.55 & 0.23 & -0 \\ -0 & 26315.8 & -52631.6 & 26315.8 & -0 & 0.23 & -0.55 & 0.23 \\ -0 & -0 & 41666.7 & -41666.7 & -0 & -0 & 0.37 & -0.46 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Haciendo la descomposición en autovalores/autovectores de  $\mathbf{A}_c$ :

- **Autovalores:**

$(-4.63+308.05j), (-4.63-308.05j), (-3.21+250.14j), (-3.21-250.14j), (-1.66+165.65j), (-1.66-165.65j), (-0.61+60.74j), (-0.61-60.74j)$

- **Frecuencias resonantes (Hz):**  $f_i = |\lambda_i| / 2\pi$

9.67, 9.67, 26.36, 26.36, 39.81, 39.81, 49.03, 49.03

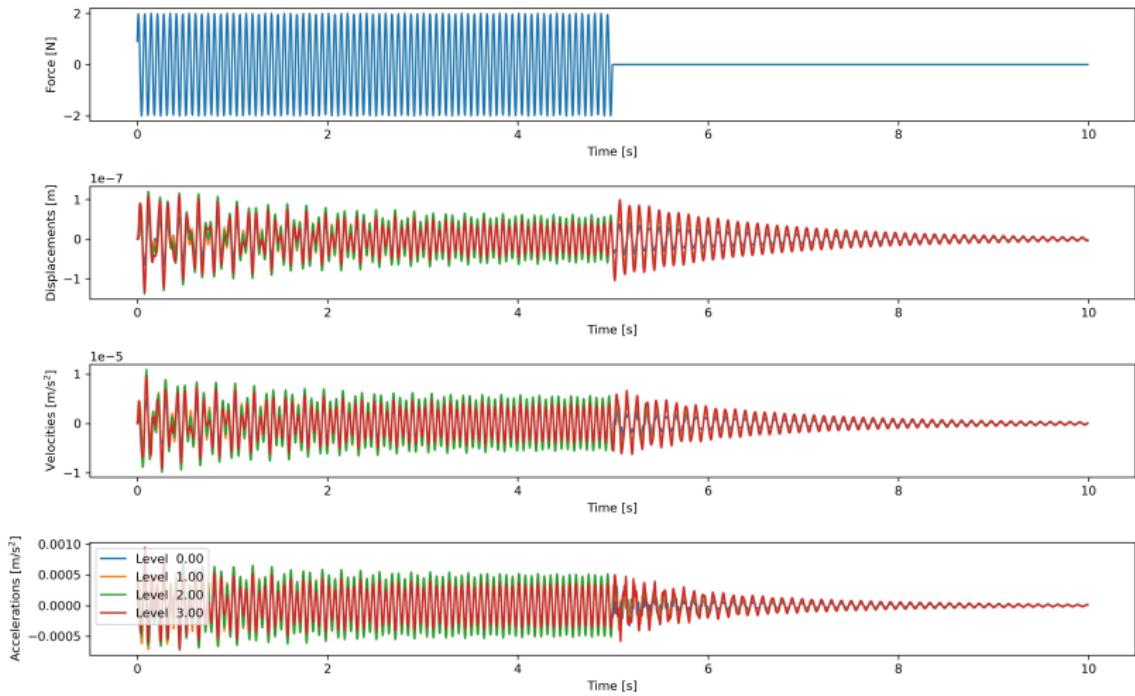
- **Tasas de amortiguamiento (%):**  $\zeta_i = -\text{Re}(\lambda_i) / \omega_i$

0.15, 0.15, 0.13, 0.13, 0.10, 0.10, 0.10, 0.10

Se comprueba que las frecuencias resonantes, tasas de amortiguamiento, y modos de vibración coinciden con los valores teóricos (en el modelo estado-espacio aparecen en pares conjugados).

Ejemplo: *Example\_solve\_EDO.py*

Ejemplo: *Frame\_structure\_Modal\_proportional\_damping\_general.py*



## Ecuación de observación

En un ensayo real, nunca es posible monitorizar los  $n_2$  grados de libertad de la estructura, sino un conjunto limitado de puntos. Si se asume que las mediciones se toman en  $l$  localizaciones y que los sensores pueden ser tanto acelerómetros, como velocímetros o transductores de desplazamiento, la ecuación de observación se define como:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_d \mathbf{q}(t) \quad (29)$$

donde  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$  son las mediciones registradas (outputs);  $\mathbf{C}_a$ ,  $\mathbf{C}_v$ ,  $\mathbf{C}_d \in \mathbb{R}^{l \times n_2}$  se denominan matrices de localización de salida (output location matrices) para aceleración, velocidad y desplazamiento, respectivamente.

Usando la ecuación del movimiento (4) para eliminar  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ , la ecuación (29) se puede escribir de manera más compacta usando la definición del vector de estado (16) como:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \quad (30)$$

donde  $\mathbf{C}_c \in \mathbb{R}^{l \times n}$  y  $\mathbf{D}_c \in \mathbb{R}^{l \times m}$  se denominan matriz de salida (output matrix) y matriz de transmisión directa (direct transmission matrix). Estas matrices se pueden relacionar fácilmente con las matrices del sistema FEM:

$$\mathbf{C}_c = [\mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \quad \mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}] , \quad \mathbf{D}_c = \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_2 \quad (31)$$

## Modelo Estado-Espacio (State-Space Model)

Juntando las ecuaciones de estado y observación, se obtiene el denominado modelo de estado-espacio continuo (continuous-time state-space model):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{32}$$

El orden del modelo  $n$  se define como la dimensión del vector de estado. El modelo estado-espacio se puede escribir en una nueva coordenada  $\mathbf{z}(t)$  definida a partir de una transformación de similaridad (similarity transformation)  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\mathbf{z}(t)$ , donde  $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es una matriz compleja cuadrada no singular.

Introduciendo esta transformación de coordenadas en (32) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_c \mathbf{T} \mathbf{z}(t) + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{T} \mathbf{z}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{33}$$

Es importante observar que las matrices transformadas ( $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_c \mathbf{T}$  y  $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}_c$ ) describen la misma relación input-output de las matrices originales.

Se puede emplear una transformación de similaridad espacial para relacionar el modelo estado-espacio con las propiedades modales del sistema. Dicha transformación relaciona el vector de estado con los desplazamientos modales  $\mathbf{x}_m \in \mathbb{C}^n$ :  $\mathbf{x}(t) = \Psi \mathbf{x}_m(t)$ . Substituyendo  $\mathbf{T}$  por  $\Psi$  en la ecuación (33) e insertando la descomposición modal de  $\mathbf{A}_c$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_m(t) &= \Lambda_c \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{L}_c^T \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{V}_c \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{34}$$

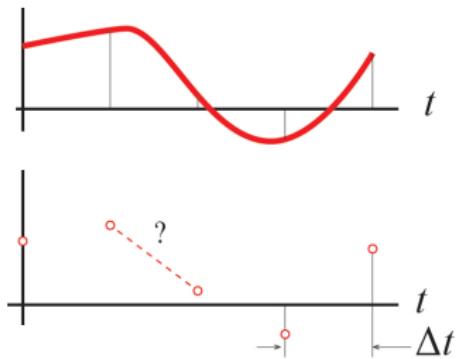
con

$$\mathbf{L}_c^T = \Psi^{-1} \mathbf{B}_c; \quad \mathbf{V}_c = \mathbf{C}_c \Psi\tag{35}$$

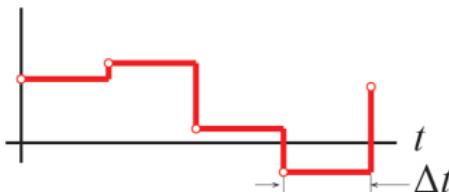
Nótese que la matriz de autovectores  $\Psi$  y autovalores  $\Lambda_c$  son las mismas vistas previamente en la ecuación (20). También es importante observar el papel de la matriz  $\mathbf{V}_c$ , la cual define la parte de los modos que podemos observar dados los sensores empleados en la monitorización.

# Discrete-Time State-Space Models

Hasta el momento, todas las ecuaciones se han expresado en el dominio continuo del tiempo. No obstante, en la práctica real, únicamente podremos tomar medidas en instantes discretos de tiempo. Por lo tanto, debemos convertir el modelo anterior a su versión de tiempo discreto. En concreto, fijaremos cierto paso de tiempo  $\Delta t$  [s] o frecuencia de muestreo  $f_s = 1/\Delta t$  [Hz]. Es decir, únicamente tendremos la respuesta del sistema para instantes de tiempo  $t = k\Delta t$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .



Zero-Order Hold (ZOH)



Dado que desconocemos el comportamiento del sistema entre dos instantes de tiempo  $k\Delta t$  y  $(k + 1)\Delta t$ , será necesario establecer una hipótesis de comportamiento. Entre las distintas opciones posibles, es común asumir que las señales de medida se definen constantes a trozos como se muestra en la figura anterior (Zero-Order Hold ZOH). Con esta hipótesis, el modelo estado-espacio continuo en el tiempo (32) se convierte en el modelo estado-espacio discreto en el tiempo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{k+1}(t) &= \mathbf{Ax}_k(t) + \mathbf{Bu}_k(t) \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{Cx}_k(t) + \mathbf{Du}_k(t)\end{aligned}\tag{36}$$

donde  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\Delta t) = (\mathbf{q}_k^T, \dot{\mathbf{q}}_k^T)^T$ . Las matrices de estado-espacio discretas se relacionan con sus versiones en tiempo continuo como (demostración en Ljung L. (1999)):

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c \Delta t}; \quad \mathbf{B} = (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{B}_c; \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_c; \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_c\tag{37}$$

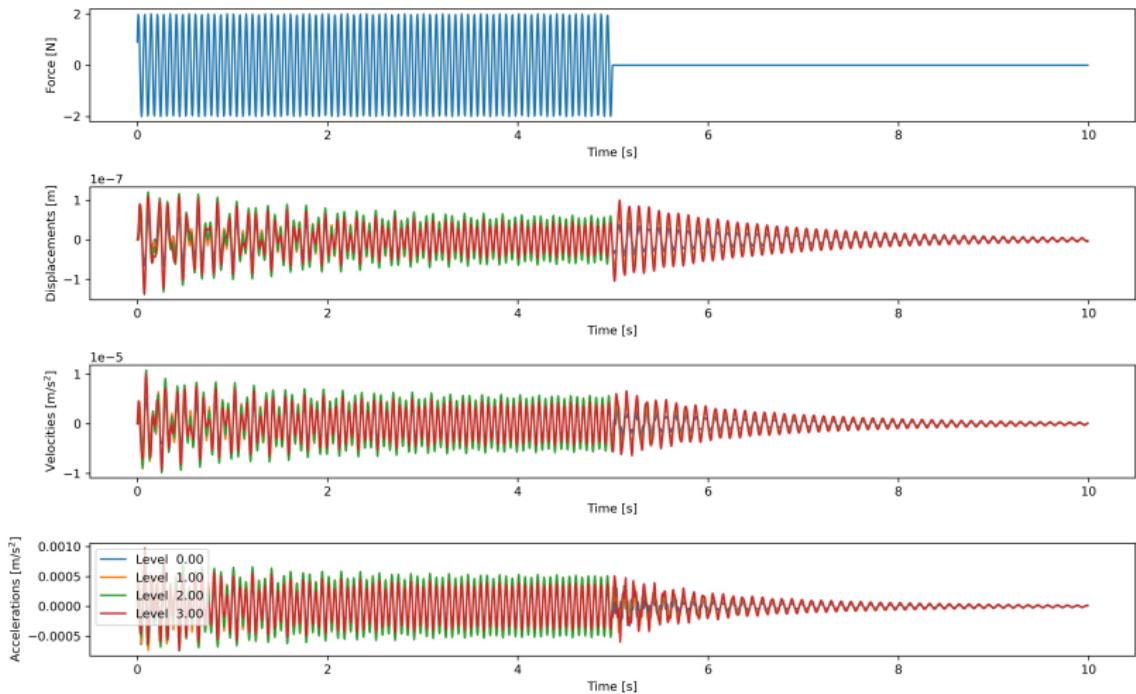
Los parámetros modales en el modelo estado-espacio discreto se puede obtener fácilmente introduciendo la descomposición en autovalores/autovectores de  $\mathbf{A}_c$  (25) en la ecuación (37):

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c \Delta t} = \Psi e^{\Lambda \Delta t} \Psi^{-1} = \Psi \Lambda_d \Psi^{-1} = \Psi \begin{bmatrix} \diagdown & \\ & \mu_i & \diagdown \\ & & \end{bmatrix} \Psi^{-1} \quad (38)$$

donde  $\mu_i$  se puede obtener como:

$$\mu_i = e^{\lambda_i \Delta t} \Leftrightarrow \lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t} \quad (39)$$

Ejemplo ( $F_s = 200$  Hz): *Frame \_structure \_Modal \_proportional \_damping \_general \_discrete.py*



$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c \Delta t} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.54 & 0.21 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.26 & 0.45 & 0.26 & 0.02 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.02 & 0.26 & 0.46 & 0.27 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.03 & 0.42 & 0.55 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -162.16 & 65.73 & 9.72 & 0.39 & 0.52 & 0.21 & 0.01 & 0.00 \\ 83.02 & -184.48 & 78.68 & 12.27 & 0.27 & 0.43 & 0.26 & 0.02 \\ 12.27 & 78.68 & -174.77 & 83.41 & 0.02 & 0.26 & 0.44 & 0.27 \\ 0.77 & 19.43 & 132.07 & -152.29 & 0.00 & 0.03 & 0.43 & 0.54 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Haciendo la descomposición en autovalores/autovectores de  $\mathbf{A}$ :

- **Autovalores:**  $(\mu_i)$

$(0.03+0.98j), (0.03-0.98j), (0.31+0.93j), (0.31-0.93j), (0.67+0.73j), (0.67-0.73j), (0.95+0.30j), (0.95-0.30j)$

- **Autovalores:**  $(\lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t})$

$(-4.63+308.05j), (-4.63-308.05j), (-3.21+250.14j), (-3.21-250.14j), (-1.66+165.65j), (-1.66-165.65j), (-0.61+60.74j), (-0.61-60.74j)$

- **Frecuencias resonantes (Hz):**  $f_i = |\lambda_i| / 2\pi$

$9.67, 9.67, 26.36, 26.36, 39.81, 39.81, 49.03, 49.03$

- **Tasas de amortiguamiento (%):**  $\zeta_i = -\text{Re}(\lambda_i) / \omega_i$

$0.15, 0.15, 0.13, 0.13, 0.10, 0.10, 0.10, 0.10$

Se comprueba que las frecuencias resonantes, tasas de amortiguamiento, y modos de vibración coinciden con los valores teóricos (en el modelo estado-espacio aparecen en pares conjugados).

# Stochastic State-Space Models

El paso final para la adaptación de los modelos anteriores a la realidad experimental refiere a la consideración del ruido. En concreto, definimos dos fuentes de ruido distintas: ruido en la excitación de la estructura ( $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$ ) y ruido en las mediciones ( $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^l$ ). Con ello, podemos adaptar el caso discreto para obtener las ecuaciones estado-espacio estocástico:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{k+1}(t) &= \mathbf{Ax}_k(t) + \mathbf{Bu}_k(t) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{Cx}_k(t) + \mathbf{Du}_k(t) + \mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{41}$$

Las fuentes de ruido se asumen como ruido blanco con las siguientes propiedades:

$$E[\mathbf{w}_k] = 0; \quad E[\mathbf{v}_k] \quad (42)$$

$$\begin{aligned} E\left(\begin{bmatrix} \mathbf{w}_p \\ \mathbf{v}_p \end{bmatrix} \quad [\mathbf{w}_p^T \quad \mathbf{v}_p^T]\right) &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \\ E\left(\begin{bmatrix} \mathbf{w}_p \\ \mathbf{v}_p \end{bmatrix} \quad [\mathbf{w}_q^T \quad \mathbf{v}_q^T]\right) &= 0, \quad p \neq q \end{aligned} \quad (43)$$

En el contexto de OMA en ingeniería civil, la única información con la que contamos es la respuesta de la estructura solicitada por un sistema de fuerzas desconocidas (viento, tráfico, etc.). Dado que desconocemos el input del sistema  $\mathbf{u}(t)$ , será imposible distinguirlo de los términos de ruido  $\mathbf{w}_k$  y  $\mathbf{v}_k$  de la ecuación (41). Si asumimos que la solicitud de la estructura también se puede describir como un ruido blanco, podemos fusionar los términos de solicitud y ruido en la ecuación (41) a través de dos procesos estocásticos  $\mathbf{w}_k$  y  $\mathbf{v}_k$ :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{k+1}(t) &= \mathbf{Ax}_k(t) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{Cx}_k(t) + \mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{44}$$

Los términos de ruido  $\mathbf{w}_k$  y  $\mathbf{v}_k$  deben cumplir las propiedades de ruido blanco definidas en (42) y (43). Además, el vector de estado debe ser un proceso estocástico estacionario de media cero:

$$E [\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T] = \Sigma, \quad E [\mathbf{x}_k] = 0 \quad (45)$$

donde la matriz de covarianza de estado  $\Sigma$  es independiente del instante de tiempo  $k$ . Asimismo, dado que  $\mathbf{w}_k$  y  $\mathbf{v}_k$  tienen media cero y son independientes del estado, también se cumplirá:

$$E [\mathbf{x}_k \mathbf{w}_k^T] = E [\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k^T] = 0 \quad (46)$$

Las matrices de covarianza del output del sistema  $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{I \times I}$  se definen como:

$$\mathbf{R}_i = E [\mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T] \quad (47)$$

donde  $i$  es un desfase de tiempo (time lag) arbitrario. La matriz de covarianza del vector estado y el vector de observación (next state-output) a su vez se define como  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times I}$ :

$$\mathbf{G} = E [\mathbf{x}_{k+i} \mathbf{y}_k^T] \quad (48)$$

Dadas las propiedades de estacionaridad del vector de estado y del ruido, las siguientes relaciones se pueden deducir fácilmente:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \\ \mathbf{R}_0 &= \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \\ \mathbf{G} &= \mathbf{A}\Sigma\mathbf{C}^T + \mathbf{S}\end{aligned}\tag{49}$$

y para desfases de tiempo (time lags) mayores  $i = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_i &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G} \\ \mathbf{R}_{-i} &= \mathbf{G}^T (\mathbf{A}^{i-1})^T \mathbf{C}^T\end{aligned}\tag{50}$$

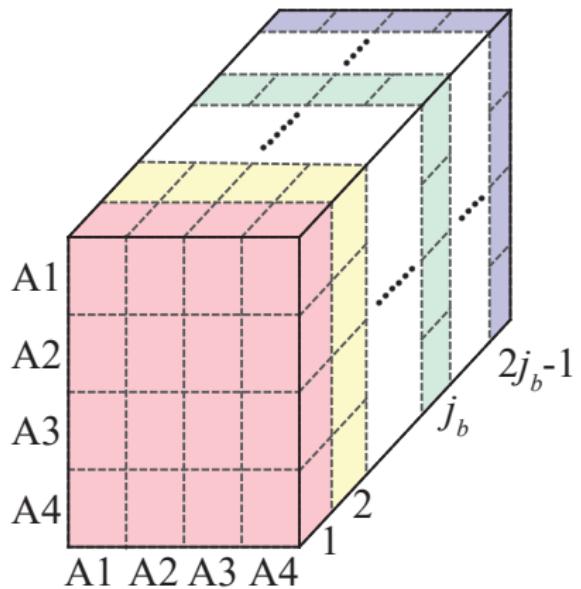
Esta última propiedad es enormemente importante. La covarianza de las señales de salida se pueden estimar a partir de las mediciones, por lo que podremos identificar la matriz de estado  $\mathbf{A}$ . Ésta es, de hecho, la base fundamental del método de identificación COV-SSI que veremos a continuación.

# COV-SSI

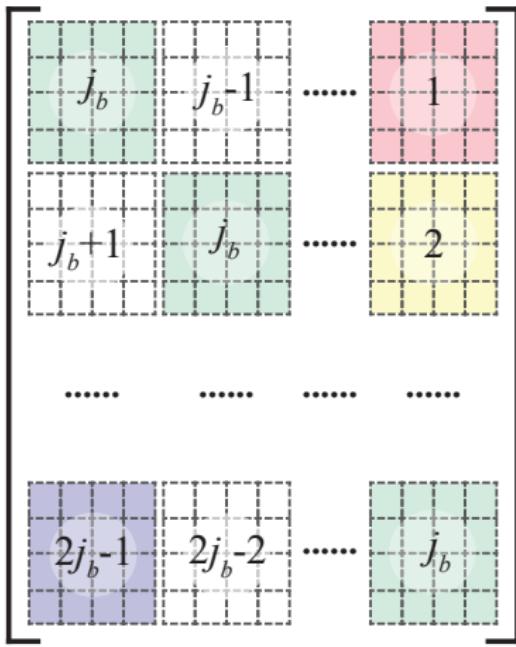
El método SSI-COV method identifica el modelo estado-espacio discreto a partir de la matriz de covarianza de las medidas. El método comienza por calcular la matriz de correlación de las mediciones para desfases de tiempo (time-lags) positivos variando desde  $\Delta t$  a  $(2j_b - 1)\Delta t$ , notando las correspondientes matrices desde  $\mathbf{R}_1$  hasta  $\mathbf{R}_{2j_b-1}$ . A continuación, la matriz de covarianza se organiza en una matriz de Toeplitz formada por bloques de dimensiones  $j_b$ -por- $j_b$  tal y como se muestra en la figura de la siguiente diapositiva.

$$\mathbf{T}_{1|j_b} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{j_b} & \mathbf{R}_{j_b-1} & \dots & \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_{j_b+1} & \mathbf{R}_{j_b} & \dots & \mathbf{R}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{R}_{2j_b-1} & \mathbf{R}_{2j_b-2} & \dots & \mathbf{R}_{j_b} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Correlation matrix



Toeplitz matrix



Aprovechando la propiedad de la ecuación (50)  $\mathbf{R}_i = \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G}$ , la matriz de correlación  $\mathbf{T}_{1|j_b}$  la podemos factorizar como sigue:

$$\mathbf{T}_{1|j_b} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{j_b} & \mathbf{R}_{j_b-1} & \dots & \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_{j_b+1} & \mathbf{R}_{j_b} & \dots & \mathbf{R}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{R}_{2j_b-1} & \mathbf{R}_{2j_b-2} & \dots & \mathbf{R}_{j_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{j_b-1} \end{bmatrix} [\mathbf{A}^{j_b-1}\mathbf{G} \quad \dots \quad \mathbf{AG} \quad \mathbf{G}] = \mathbf{O}\Gamma. \quad (52)$$

donde  $\mathbf{O}$  se denomina la matriz de observabilidad extendida (extended observability matrix), y  $\Gamma$  la matriz de controlabilidad (reversed extended stochastic controllability matrix). La matriz de observabilidad está formada  $j_b$  bloques de dimensiones  $l$ -by- $n$ . La matriz de controlabilidad está formada por  $j_b$   $n$ -por- $l$  matrices organizadas en una fila.

Por otra parte, la descomposición en valores singulares (Singular Value Decomposition SVD) de la matriz de Toeplitz:

$$\mathbf{T}_{1|j_b} = \mathbf{USV}^T = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T. \quad (53)$$

Si comparamos las ecuaciones (52) y (53) nos damos cuenta de que las matrices de observabilidad y controlabilidad se pueden obtener a partir de la decomposición SVD como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{O} &= \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2}, \\ \mathbf{\Gamma} &= \mathbf{S}_1^{1/2} \mathbf{V}_1^T \end{aligned} \quad (54)$$

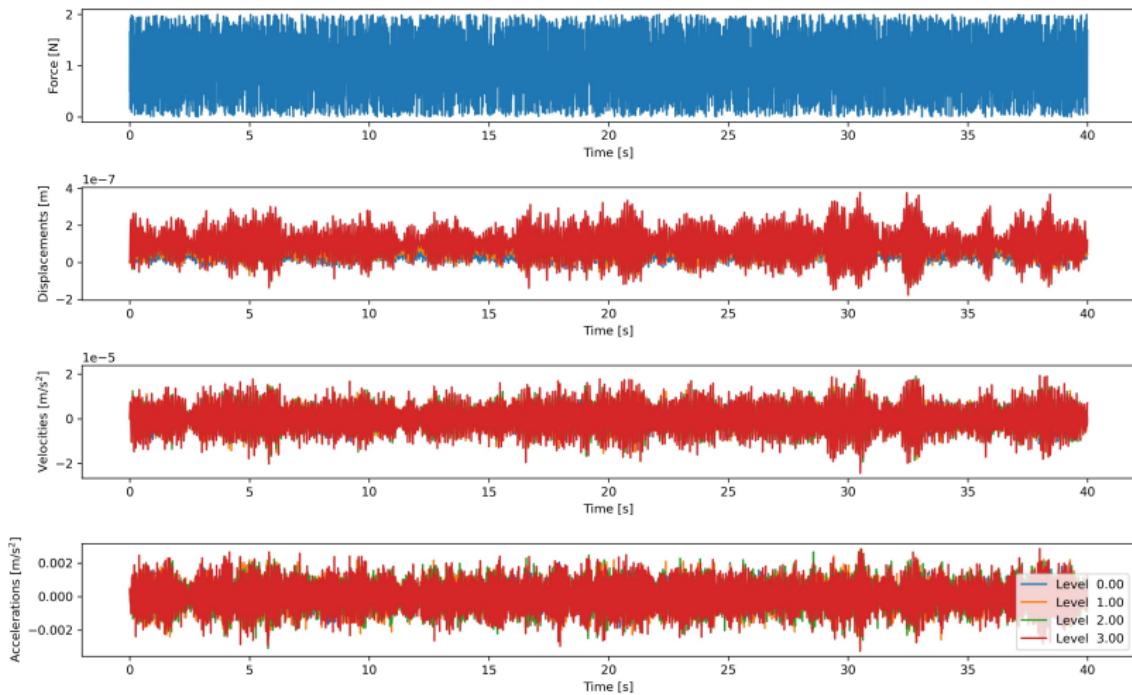
Una vez tenemos calculadas las matrices de observabilidad y controlabilidad, la identificación de las matrices del sistema estado-espacio **A** y **C** es directa.

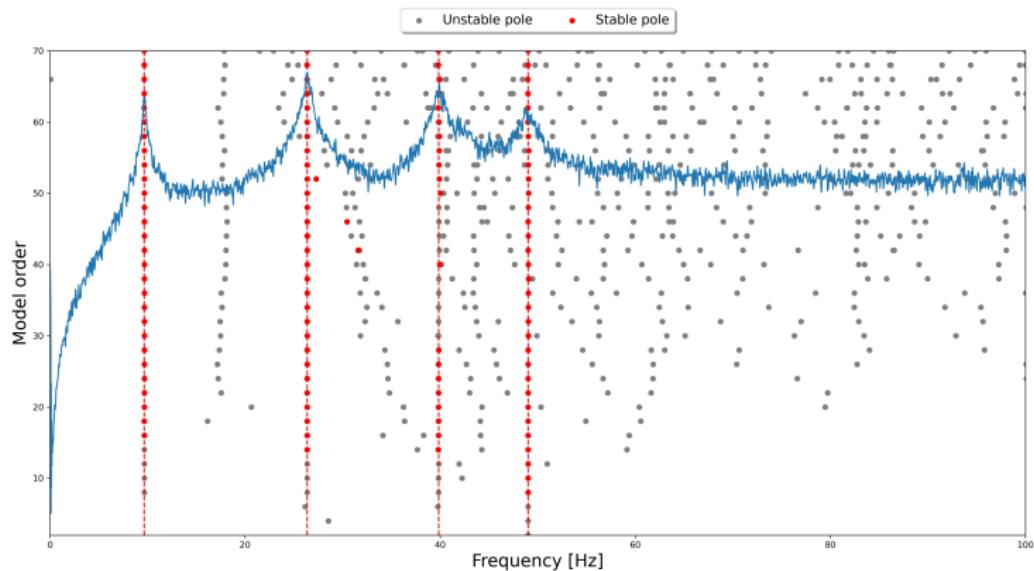
Por un lado, la matriz **C** se puede obtener a partir de las  $l$  primeras filas de la matriz de observabilidad. Por otra parte, la matriz de estado **A** se puede obtener de diversas maneras. Una manera es aprovechar la estructura recursiva de la matriz de observabilidad:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{j_b-2} \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{j_b-1} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{j_b-2} \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{j_b-1} \end{bmatrix} = \mathbf{O}^{to\dagger} \mathbf{O}^{bo}, \quad (55)$$

donde  $\mathbf{O}^{to}$  contiene las primeras  $l(j_b - 1)$  líneas de  $\mathbf{O}$ , y  $\mathbf{O}^{bo}$  contiene las últimas  $l(j_b - 1)$  líneas de  $\mathbf{O}_{j_b}$ . El símbolo  $\dagger$  representa la pseudo-inversa de Moore-Penrose.

Ejemplo ( $F_s = 200$  Hz): [Generate \\_measurements.py](#)



*OMA\_COV\_SSI.py*

# FDD

El método de identificación FDD se basa en el análisis de las matrices de densidad espectral (Power Spectral Density PSD matrices) calculadas a través de mediciones de vibración ambiental. Para el estudio de las ecuaciones de estado-espacio en el dominio de la frecuencia, comenzamos aplicando la transformada de Laplace con condiciones iniciales a la ecuación (32):

$$\begin{aligned} s\mathbf{x}(s) &= \mathbf{A}_c\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(s) \\ \mathbf{y}(s) &= \mathbf{C}_c\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}_c\mathbf{u}(s) \end{aligned} \tag{56}$$

Eliminando  $\mathbf{x}(s)$  de la primera ecuación:

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(s) \tag{57}$$

Y sustituyendo el resultado de (57) en la segunda ecuación de (56):

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(s) &= \mathbf{C}_c (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(s) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(s) = \\ &= \underbrace{\left[ \mathbf{C}_c (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(s) + \mathbf{D}_c \right]}_{\mathbf{H}_c(s)} \mathbf{u}(s)\end{aligned}\quad (58)$$

donde identificamos la función de transferencia  $\mathbf{H}_c(s)$ . Podemos obtener la función de respuesta en frecuencia (Frequency Response Function FRF) a través de  $s \leftarrow j\omega$ .

En OMA ya hemos visto que el input del sistema  $\mathbf{u}(t)$  se asume como un ruido blanco de media cero, i.e.  $E[\mathbf{u}(t)] = 0$ . La función de covarianza  $\mathbf{R}_u(\tau)$  se puede determinar como:

$$\mathbf{R}_u(\tau) = E[\mathbf{u}(t + \tau)\mathbf{u}^T(t)] = \mathbf{R}_u\delta(\tau) \quad (59)$$

donde  $\mathbf{R}_u \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz constante, y  $\delta(\tau)$  es la función delta de Dirac. Con ello, el espectro  $\mathbf{S}_u(s)$  del proceso estocástico estacionario  $\mathbf{u}(t)$  se define como:

$$\mathbf{S}_u(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_u\delta(\tau)e^{-st}dt = \mathbf{R}_u \quad (60)$$

el cual se denomina espectro plano (flat spectrum). Los elementos de la diagonal de la matriz  $\mathbf{S}_u(s)$  se denominan espectros de potencia (power spectra) y los miembros fuera de la diagonal se denominan espectros cruzados (cross spectra).

En vista de la relación de los procesos  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$  a través de la función de transferencia  $\mathbf{H}_c(s)$  según la ecuación (58), se puede demostrar que sus espectros están relacionados a través de la siguiente expresión:

$$\mathbf{S}_y(s) = \mathbf{H}_c(s)\mathbf{S}_u(s)\mathbf{H}_c(s^*)^T \quad (61)$$

o, en el caso específico de inputs definidos como ruido blanco:

$$\mathbf{S}_y(s) = \mathbf{H}_c(s)\mathbf{R}_u\mathbf{H}_c(s^*)^T \quad (62)$$

Ya vimos en el tema de EMA que la función de transferencia puede escribirse en base a los polos del sistema y matrices de residuos como:

$$\mathbf{H}_c(\omega) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\mathbf{A}_n}{j\omega - \lambda_n} + \frac{\mathbf{A}_n^*}{j\omega - \lambda_n^*} \right) \quad (63)$$

El método FDD asume la descomposición modal de los outputs del sistema como  $\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{q}_m(t)$ . Con ello, la función de correlación de  $\mathbf{y}(t)$  se obtiene como:

$$\mathbf{R}_y(\tau) = E [\mathbf{y}(t + \tau) \mathbf{y}^T(t)] = \boldsymbol{\Psi} E [\mathbf{q}(t + \tau) \mathbf{q}^T(t)] \boldsymbol{\Psi}^T = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{R}_q(\tau) \boldsymbol{\Psi}^T \quad (64)$$

Dado que las componentes de desplazamiento modal no están correlacionadas, la matriz  $\mathbf{R}_q(\tau)$  será diagonal. Con ello, la matriz de densidad espectral  $\mathbf{S}_y(\omega)$  se obtiene aplicando la transformada de Fourier a la ecuación (64):

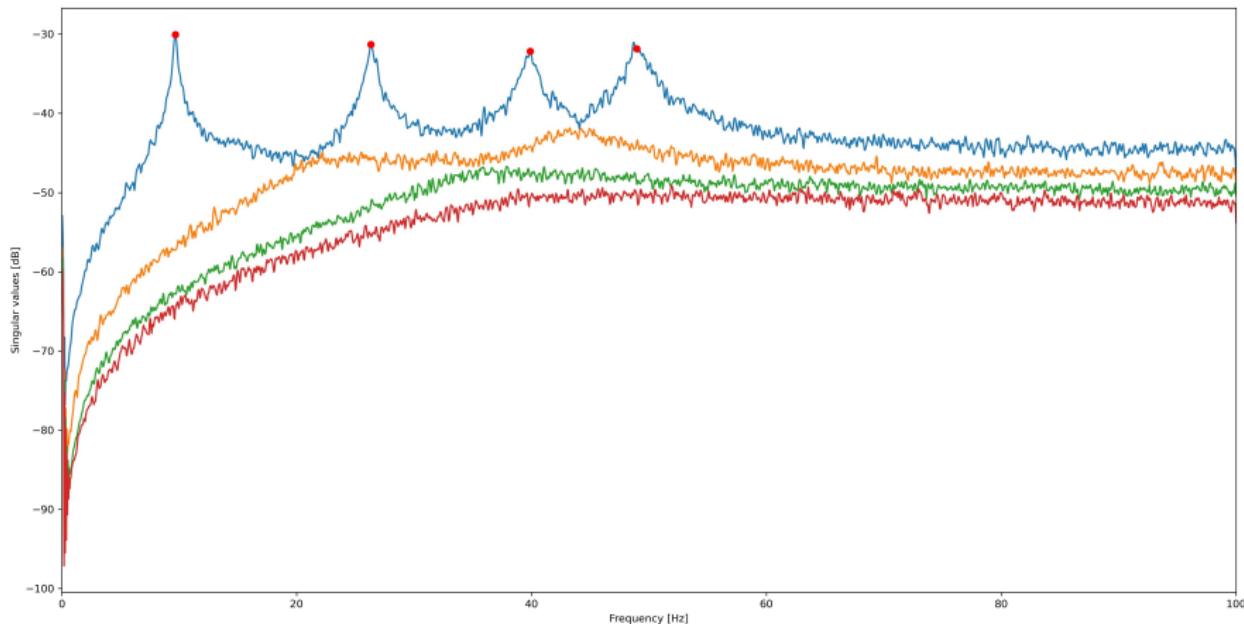
$$\mathbf{S}_y(\omega) = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{S}_q(\omega) \boldsymbol{\Psi}^T. \quad (65)$$

donde la matriz  $\mathbf{S}_q(\omega)$  (spectrum matrix of the modal coordinates) será también una matriz diagonal.

El método FDD se basa en la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz de densidad espectral como:

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{G}_{uu}(\omega)\mathbf{H}(\omega)^H \quad (66)$$

Comparando la ecuación (66) con (65) observamos que ambas tienen la misma forma. Por tanto, podemos entender que los valores singulares presentan estimaciones de los modos naturales de vibración y los valores singulares correspondientes representan la respuesta de cada modo. Si realizamos la descomposición en (66) para cada frecuencia y ordenamos los valores y vectores singulares en orden decreciente, las frecuencias resonantes las podemos determinar a través de la toma de picos en el primer valor singular, mientras que los modos de vibración los obtenemos evaluando el primer vector singular en las frecuencias determinadas en el paso previo.

*OMA \_FDD.py*

# References I

 Magalhães, Filipe and Cunha, Alvaro (2011)  
Explaining operational modal analysis with data from an arch bridge.  
*Mechanical Systems and Signal Processing*, 25 (5), 1431–1450.

 García-Macías, E., and Ubertini, F. (2020)  
MOVA/MOSS: Two integrated software solutions for comprehensive Structural Health Monitoring of structures.  
*Mechanical Systems and Signal Processing*, 143, 106830.

 Magalhães, Filipe and Cunha, Alvaro (2011)  
Explaining operational modal analysis with data from an arch bridge.  
*Mechanical systems and signal processing* 25 (5), 1431–1450.

 Rainieri, Carlo and Fabbrocino, Giovanni (2014)  
Operational modal analysis of civil engineering structures.  
Springer, New York.

 Peeters, B. (2000)  
PHD - System identification and damage detection in civil engineering.  
KU Leuven.

## References II

-  Ljung L. (1999)  
System Identification: Theory for the User.  
Second edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.
-  Juang J. N. (1994)  
Applied System Identification.  
Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
-  Brincker, R., and Ventura, C. (2015).  
Introduction to operational modal analysis.  
John Wiley & Sons.

# The End