

Fundamentos teóricos del Análisis Modal Experimental

Enrique García-Macías

Universidad de Granada

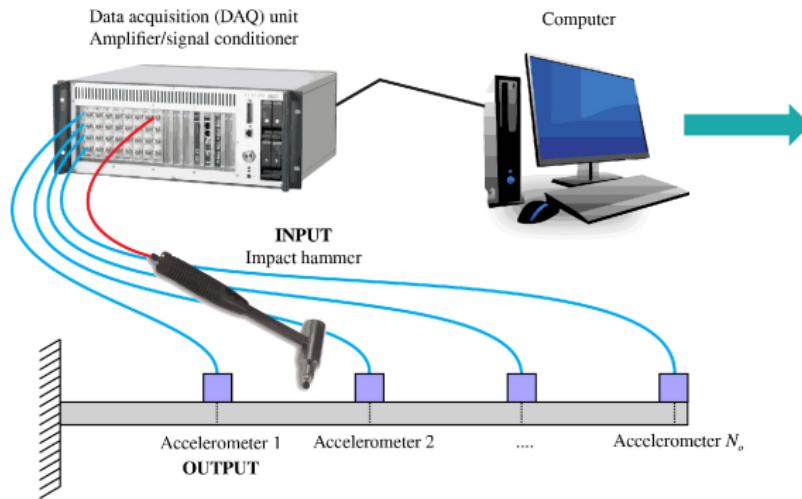
enriquegm@ugr.es

February 21, 2021

Índice

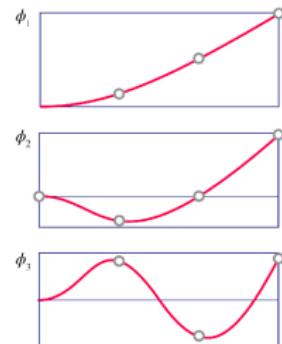
- 1 Introducción
- 2 Sistemas de 1 GDL
- 3 Sistemas de múltiples grados de libertad
- 4 Identificación modal
- 5 Métodos locales
- 6 Validación de formas modales
- 7 Métodos globales
 - Breve introducción al método LSCF

Esquema general del EMA

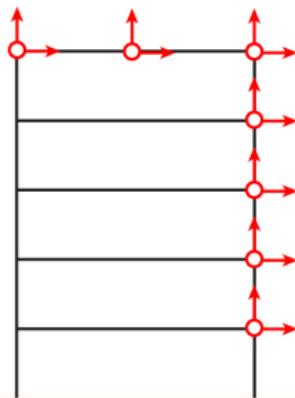


Procedimiento a través del cual se caracteriza el comportamiento dinámico de una estructura en términos de sus propiedades modales

- ❖ Frecuencias de resonancia
- ❖



Características de los análisis experimentales



- Número de puntos de medida (grados de libertad): N_i
- Número de puntos de excitación (input): N_o
- Número de modos identificables: $N_m \leq \max(N_i, N_o)$
- No se suelen incluir grados de libertad de giro por su dificultad práctica.

Hipótesis fundamentales:

- Linealidad del sistema (Linear Time Invariant LTI).
 - Se puede aplicar superposición.
 - Sistema de ecuaciones lineales.
- Invarianza temporal (Ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes).
- Observabilidad → Importancia de una elección adecuada de puntos de medida.
- Se verifica el principio de reciprocidad.

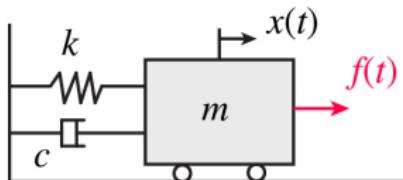
Métodos de identificación dinámica mediante EMA

- Clasificación basada en el **número de inputs y outputs**:
 - SISO
 - SIMO
 - MIMO
 - MISO
- Clasificación basada en el **tipo de propiedades identificadas**:

Métodos directos	Métodos indirectos
Mecánico k, m, c	Modal $\omega_i, \zeta_i, \varphi_i$

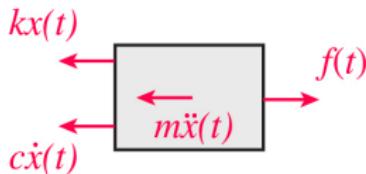
Sistemas de 1 GDL

Función transferencia de sistemas de 1 GDL:



El equilibrio dinámico de un sistema de un grado de libertad (Single Degree Of Freedom SDOF) expresa el balance entre fuerzas exteriores, fuerzas iniciales, de amortiguamiento, y elásticas:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t), \quad (1)$$



- m : masa
- c : amortiguamiento
- k : rigidez
- \ddot{x} , \dot{x} , x : aceleración, velocidad, desplazamiento
- f : fuerza externa
- t : variable tiempo

Transformando la ecuación de equilibrio dinámico en el dominio del tiempo en el dominio de Laplace (variable p) con condiciones de desplazamiento y velocidad inicial nulos:

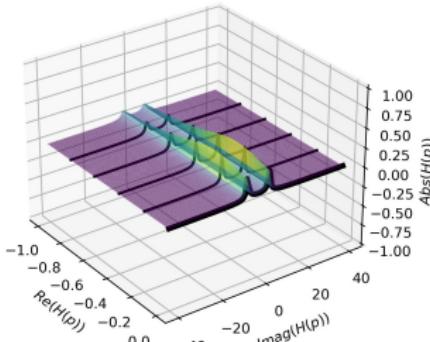
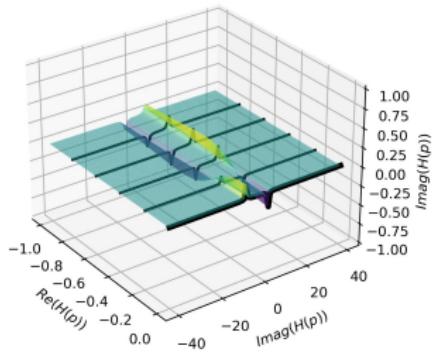
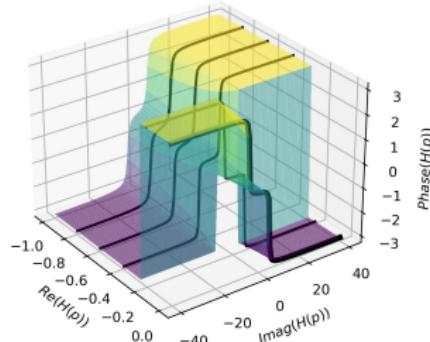
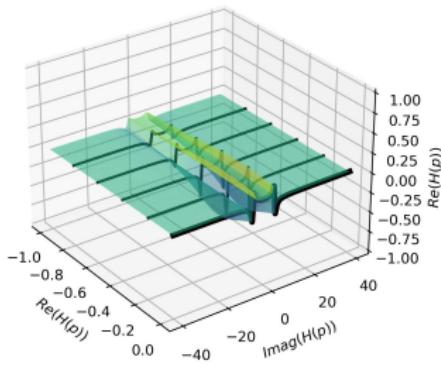
$$(mp^2 + cp + k) x(p) = F(p), \quad (2)$$

De la ecuación anterior el término $Z(p) = (mp^2 + cp + k)$ se denomina rigidez dinámica. Invirtiendo la ecuación (2) se llega a la definición de función de transferencia $H(p) = Z^{-1}(p)$:

$$H(p) = \frac{1/m}{p^2 + (c/m)p + (k/m)} \quad (3)$$

La función de transferencia es una función de variable compleja ($p \in \mathbb{C}$).

Ejemplo: $k=25 \text{ N/m}$, $c = 0.5 \text{ Ns/m}$, $m = 1 \text{ kg}$



Polos del sistema, frecuencias naturales y tasas de amortiguamiento:

El denominador de la ecuación (3) se denomina como *polinomio característico*.

Sus raíces definen los polos del sistema dinámico:

$$p^2 + pc/m + k/m = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (4)$$

Esta ecuación permite introducir algunos aspectos importantes. Si el sistema no presenta amortiguamiento (sistema conservativo $c = 0$), la frecuencia natural sin amortiguamiento se define como:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

El amortiguamiento crítico, c_{cr} , es aquel para el cual se anula el término bajo la raíz cuadrada de la ecuación (4):

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} \quad (6)$$

y, con ello, se define la tasa de amortiguamiento ζ como:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} \quad (7)$$

La ecuación (4) proporciona la solución homogénea (fuerza externa nula) de la ecuación del movimiento:

$$x(t) = C_0 e^{\lambda_1 t} + C_1 e^{\lambda_2 t} \quad (8)$$

donde C_0 y C_1 son constantes de integración definidas por las condiciones iniciales del movimiento (desplazamiento y velocidad iniciales). Dependiendo del valor de la tasa de amortiguamiento ζ , el sistema se clasifica como:

- Sistema sobreamortiguado ($\zeta > 1$).
- Sistema subamortiguado ($\zeta < 1$).
- Sistema críticamente amortiguado ($\zeta = 1$)

Los sistemas mecánicos reales normalmente presentan tasas de amortiguamiento en torno al 1-5%, por lo que únicamente consideraremos sistemas subamortiguados. En este caso, la ecuación (4) arroja dos raíces complejas conjugadas:

$$\lambda_1 = \sigma_1 + j\omega_d; \lambda_1^* = \sigma_1 - j\omega_d \quad (9)$$

Residuos:

Conocidas las raíces del polinomio característico, la función de transferencia en la ecuación (3) puede reescribirse como:

$$H(p) = \frac{1/m}{(p - \lambda_1)(p - \lambda_1^*)} \quad (10)$$

que a su vez podremos expandir en fracciones elementales como sigue:

$$H(p) = \frac{A_1}{(p - \lambda_1)} + \frac{A_1^*}{(p - \lambda_1^*)} \quad (11)$$

donde los términos A_1 y A_1^* se denominan residuos.

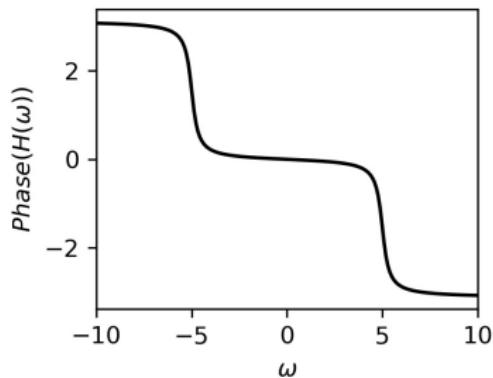
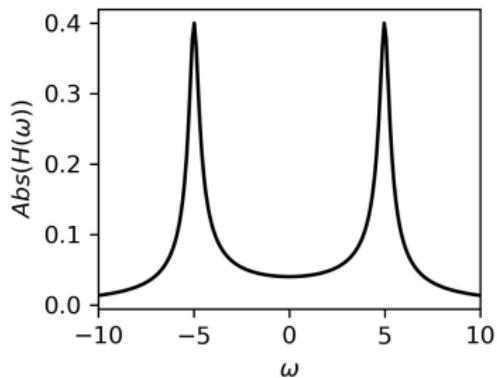
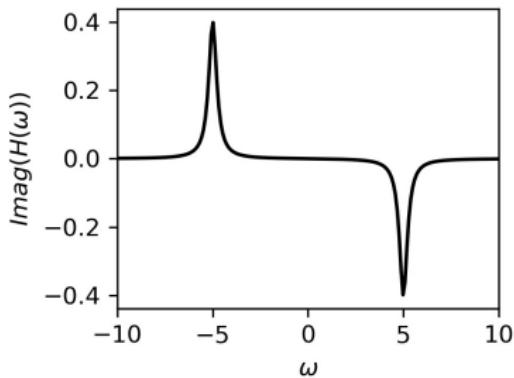
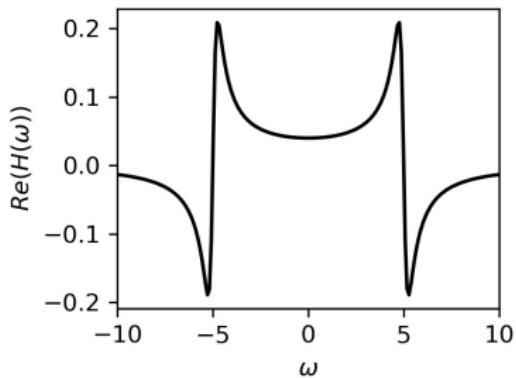
Función de respuesta en frecuencia y función de respuesta impulsiva:

La función de transferencia previamente analizada en el dominio de Laplace, se puede analizar en dominio de la frecuencia o el tiempo. La función de transferencia evaluada en el dominio de la frecuencia ($p \rightarrow j\omega$) se denomina función de respuesta en frecuencia (Frequency Response Function FRF):

$$H(p)|_{p=j\omega} = H(\omega) = \frac{1/m}{-\omega^2 + j\omega c/m + k/m} = \frac{A_1}{(j\omega - \lambda_1)} + \frac{A_1^*}{(j\omega - \lambda_1^*)} \quad (12)$$

La FRF es un caso particular de función de transferencia: es un corte a lo largo del eje de la frecuencia ($j\omega$).

Para el ejemplo anterior ($k=25 \text{ N/m}$, $c = 0.5 \text{ Ns/m}$, $m = 1 \text{ kg}$):



Las raíces del polinomio característico $p^2 + pc/m + k/m = 0$ en el dominio de la frecuencia se obtiene como:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = \sigma_1 \pm j\omega_d \quad (13)$$

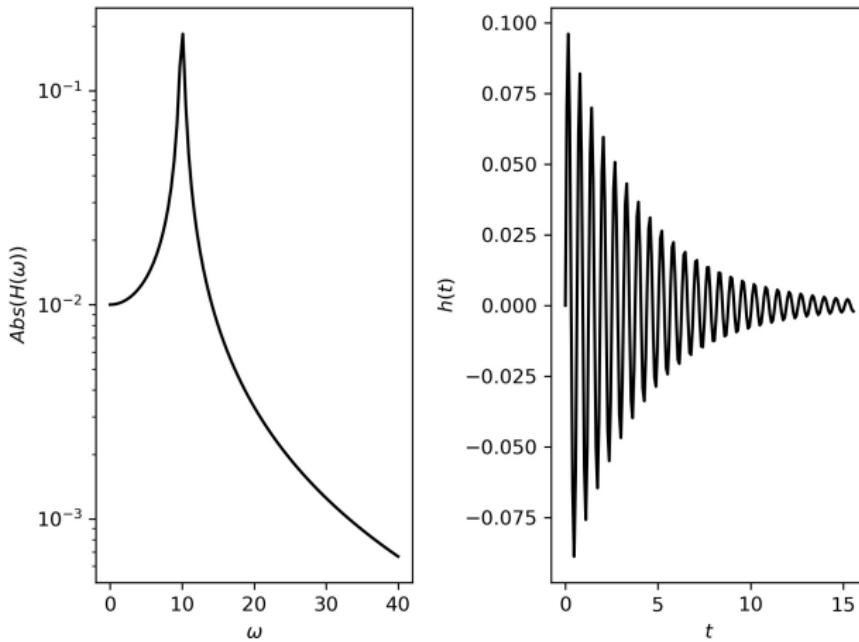
donde podemos extraer las siguientes relaciones útiles:

- Frecuencia amortiguada: $\omega_d = \omega_o \sqrt{1 - \xi^2}$
- $\sigma_1 = -\xi\omega_o$
- Residuo: multiplicando la ecuación (12) para el valor $j\omega = \lambda_1$ por $(\lambda_1 - \lambda_1)$ se obtiene:

$$A_1 = \frac{1}{2m\omega_d j} \quad (14)$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación (12) permite obtener su expresión en el dominio del tiempo: *función de respuesta impulsiva* $h(t)$:

$$h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_1^* e^{\lambda_1^* t} = e^{\sigma_1 t} (A_1 e^{j\omega_d t} + A_1^* e^{-j\omega_d t}) \quad (15)$$



Es interesante observar en la ecuación (15) el papel que juega el residuo A_1 en la respuesta. Para ello, basta con aplicar las relaciones de Euler de las exponenciales complejas:

$$e^{j\omega_d t} = \cos \omega_d t + j \sin \omega_d t \quad (16)$$

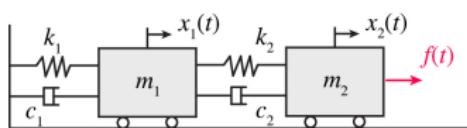
con lo que se llega a:

$$h(t) = \frac{e^{\sigma_1 t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t = 2 |A_1| e^{\sigma_1 t} \sin \omega_d t \quad (17)$$

Es decir, el residuo A_1 define la amplitud inicial de la IRF. Por otra parte, la parte real del polo σ_1 determina la tasa de decaimiento de la respuesta, mientras la parte imaginaria ω_d define la frecuencia de la oscilación.

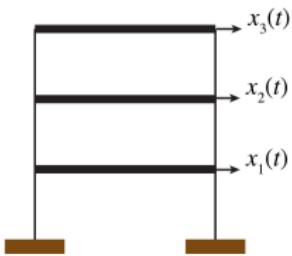
La IRF define la respuesta del sistema dinámico a un fuerza impulsiva (delta de Dirac $\delta(t)$) en el instante $t = 0$.

Sistemas de múltiples grados de libertad



El equilibrio dinámico de un sistema de múltiples grados de libertad (Multiple Degrees Of Freedom MDOF) expresa matricialmente del siguiente modo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (18)$$



- **M:** Matriz de masa
- **C:** Matriz de amortiguamiento
- **K:** Matriz de rigidez
- $\ddot{\mathbf{X}}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}$: Vectores de aceleración, velocidad, desplazamiento
- **F:** Vector de fuerzas externas

Transformando la ecuación (18) en el dominio de Laplace (p) considerando condiciones iniciales nulas:

$$(p^2\mathbf{M} + p\mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{X}(p) = \mathbf{F}(p), \quad (19)$$

o, de un modo más compacto:

$$\mathbf{Z}(p)\mathbf{X}(p) = \mathbf{F}(p), \quad (20)$$

se define la matrix de rigidez dinámica $\mathbf{Z}(p)$. Invertiendo la ecuación (20) se llega a la definición de función de transferencia $\mathbf{H}(p)$:

$$\mathbf{X}(p) = \mathbf{H}(p)\mathbf{F}(p), \quad (21)$$

donde $\mathbf{H}(p)$ se puede obtener a través de cálculo estándar como:

$$\mathbf{H}(p) = \mathbf{Z}(p)^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{Z}(p))}{|\mathbf{Z}(p)|} \quad (22)$$

Polos del sistema, frecuencias naturales, y tasas de amortiguamiento:

El denominador de la ecuación (22) representa la ecuación característica del sistema. Para obtener dichos polos, resulta conveniente transformar el sistema de ecuaciones (18) en su forma estado-espacio equivalente. Para ello, definimos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} &= \mathbf{F}, \\ \dot{\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{23}$$

Ahora, transformando la ecuación (23) al dominio de Laplace con CI nulas:

$$\begin{aligned} (p^2\mathbf{M} + p\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{X}(p) &= \mathbf{F}(p), \\ p\mathbf{M}\mathbf{X}(p) - p\mathbf{M}\mathbf{X}(0) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{24}$$

podemos reescribir el sistema de ecuaciones como un sistema acoplado:

$$\left(p \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} p\mathbf{X}(p) \\ \mathbf{X}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}(p) \end{bmatrix} \quad (25)$$

o de forma más compacta como:

$$(p\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{Y}(p) = \mathbf{F}'(p) \quad (26)$$

Los polos del sistema se pueden obtener resolviendo el problema de autovalores/autovectores asociados a:

$$|p\mathbf{A} + \mathbf{B}| = 0 \quad (27)$$

Trabajando esta expresión se puede observar fácilmente que las raíces de esta ecuación son las raíces de la ecuación característica ($|\mathbf{Z}(p)| = 0$).

El problema de autovalores anterior genera $2N$ (N =número de grados de libertad del sistema) autovalores complejos, apareciendo en pares conjugados:
 Matriz de autovalores:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_N & & & \\ & & & \lambda_1^* & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_N^* \end{bmatrix} \quad (28)$$

con $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_{d,i}$ y $\lambda_i^* = \sigma_i - j\omega_{d,i}$.

Matriz de autovectores:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \lambda_1 \varphi_1 & \dots & \lambda_N \varphi_N & \lambda_1^* \varphi_1^* & \dots & \lambda_N^* \varphi_N^* \\ \varphi_1 & \dots & \varphi_N & \varphi_1^* & \dots & \varphi_N^* \end{bmatrix} \quad (29)$$

Los autovectores diagonalizan las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} de la ecuación (27):

$$\begin{aligned}\Phi^T \mathbf{A} \Phi &= \text{diag}(a_j) \\ \Phi^T \mathbf{B} \Phi &= \text{diag}(b_j)\end{aligned}\tag{30}$$

Además, los autovalores/autovectores verifican:

$$(\lambda_r^2 \mathbf{M} + \lambda_r \mathbf{C} + \mathbf{K}) \varphi_r = \mathbf{Z}(\lambda_r) \varphi_r = \mathbf{0}\tag{31}$$

con lo que se concluye que λ_r son las soluciones (polos) de la ecuación característica ($|\mathbf{Z}(p)| = 0$).

Los modos de vibración son en general **vectores complejos**. Para entender su significado, tomemos la ecuación dinámica homogénea (sin forzamiento):

$$\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = 0, \quad (32)$$

En general, se puede asumir una solución del tipo $\mathbf{X} = \mathbf{A}e^{rt}$. Sustituyendo en la ecuación (32), llegamos a un problema de autovalores/autovectores como sigue:

$$(r^2\mathbf{M} + r\mathbf{C} + \mathbf{K})\varphi = 0, \quad (33)$$

donde r_j y φ_j serán en general magnitudes complejas. Con ello, la solución final resultará de la forma:

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{2N} A_j \begin{bmatrix} \varphi_{1j} \\ \vdots \\ \varphi_{lj} \\ \vdots \\ \varphi_{Nj} \end{bmatrix} e^{(a_j+ib_j)t} = \quad (34)$$

$$= \sum_{j=1}^{2N} A_j \begin{bmatrix} |\varphi_{1j}| e^{i\alpha_{1j}} \\ \vdots \\ |\varphi_{lj}| e^{i\alpha_{lj}} \\ \vdots \\ |\varphi_{Nj}| e^{i\alpha_{Nj}} \end{bmatrix} e^{(a_j + i b_j)t} = \sum_{j=1}^{2N} A_j e^{a_j t} \begin{bmatrix} |\varphi_{1j}| e^{i(b_j t + \alpha_{1j})} \\ \vdots \\ |\varphi_{lj}| e^{i(b_j t + \alpha_{lj})} \\ \vdots \\ |\varphi_{Nj}| e^{i(b_j t + \alpha_{Nj})} \end{bmatrix} \quad (35)$$

lo que indica que existe un desfase α_{lj} entre los movimientos de los distintos puntos l .

NOTA: En la práctica, normalmente los modos en ingeniería civil suelen ser bastante reales (con componentes modales alineadas en el plano complejo). Modos complejos pueden aparecer cuando existen elementos disipadores en la estructura o por errores en la identificación.

Conocidas las raíces del polinomio característico, podemos expandir la función de transferencia como sigue:

$$\mathbf{H}(p) = \frac{\text{adj}(\mathbf{Z}(p))}{\prod_{r=1}^N E(p - \lambda_r)(p - \lambda_r^*)} \quad (36)$$

donde E es un valor constante, que se puede demostrar igual a $\det(\mathbf{M})$. Además, al igual que hicimos en el sistema de 1 GDL, podemos expandir la función de transferencia en fracciones elementales:

$$\mathbf{H}(p) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\mathbf{A}_r}{p - \lambda_r} + \frac{\mathbf{A}_r^*}{p - \lambda_r^*} \right) \quad (37)$$

donde las matrices \mathbf{A}_r son ahora matrices de residuos. Las matrices \mathbf{A}_r se pueden obtener particularizando el valor de la función de transferencia en el polo correspondiente (λ_r):

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{H}(\lambda_r)(\lambda_r - \lambda_r) = \frac{\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r))}{\prod_{s=1, s \neq r}^{2N} E(\lambda_r - \lambda_s)} = P_r \text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r)) \quad (38)$$

Expresión de los residuos en función de los modos:

Si analizamos con detalle el término $\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r))$, podemos observar que existe una relación entre la matriz de funciones de transferencia $\mathbf{H}(p)$ y los vectores modales Φ_r . Si premultiplicamos los términos de la ecuación (22) por $\mathbf{Z}(p)$:

$$\mathbf{Z}^{-1}(p) = \mathbf{H}(p) = \frac{\text{adj}(\mathbf{Z}(p))}{|\mathbf{Z}(p)|} \rightarrow \mathbf{Z}(p)\text{adj}(\mathbf{Z}(p)) = |\mathbf{Z}(p)|\mathbf{I} \quad (39)$$

Particularizando para los polos:

$$\mathbf{Z}(\lambda_r)\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r)) = \mathbf{0} \quad (40)$$

Siendo cierto para cualquier columna i de $\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r))$. Además hemos visto que los autovalores/autovectores cumplen:

$$(\lambda_r^2\mathbf{M} + \lambda_r\mathbf{C} + \mathbf{K})\varphi_r = \mathbf{Z}(\lambda_r)\varphi_r = \mathbf{0} \quad (41)$$

Por lo que podemos concluir que las columnas de $\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r))$ son proporcionales a φ_r .

$$\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r)) = \varphi_r \mathbf{L}_r \quad (42)$$

con \mathbf{L}_r un vector de constantes de proporcionalidad.

Además, dado que las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento son simétricas (los sistemas mecánicos deben obedecer el principio de reciprocidad de Maxwell), la matriz de rigidez dinámica y su adjunta también serán simétricas ($\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r)) = \text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r))^T \propto \varphi_r^T$). Por lo tanto, podemos concluir que las filas de $\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r))$ también son proporcionales al vector modal φ_r , con lo que podemos escribir:

$$\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r)) = R_r \varphi_r \varphi_r^T = R_r \begin{bmatrix} \varphi_r^1 \varphi_r^1 & \varphi_r^1 \varphi_r^2 & \dots & \varphi_r^1 \varphi_r^N \\ \varphi_r^2 \varphi_r^1 & \varphi_r^2 \varphi_r^2 & \dots & \varphi_r^2 \varphi_r^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_r^N \varphi_r^1 & \varphi_r^N \varphi_r^2 & \dots & \varphi_r^N \varphi_r^N \end{bmatrix} \quad (43)$$

Incluyendo esta expresión en la ecuación (36), y combinando las constantes R_r y P_r como $Q_r = R_r P_r$, es posible escribir:

$$\mathbf{H}(p) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{Q_r \varphi_r \varphi_r^T}{(p - \lambda_r)} + \frac{Q_r^* \varphi_r^* \varphi_r^{*T}}{(p - \lambda_r^*)} \right) \quad (44)$$

de donde se extrae que los residuos quedan definidos como:

$$\mathbf{A}_r = Q_r \varphi_r \varphi_r^T \quad (45)$$

Dado que todas las columnas de \mathbf{A}_r son proporcionales entre sí, cada columna contiene suficiente información para construir esta matrix. Esto no ocurre así cuando alguno de los grados de libertad medidos coincide con un nodo de la estructura, para el que la columna y fila correspondientes serán nulas. Se debe de evitar esta situación mediante una selección adecuada de los puntos de excitación. La ecuación (37) muestra que los residuos \mathbf{A}_r son unidades absolutas. Junto con la ecuación (53), se observa que los vectores modales φ_r son vectores escalados con coeficiente de escala Q_r .

Factores de participación modal:

Definiendo la matriz de modos como:

$$\mathbf{V} = [\varphi_1 \dots \varphi_N \varphi_1^* \dots \varphi_N^*] \quad (46)$$

podemos definir la matriz de factores de participación modal \mathbf{L} como:

$$\mathbf{L} = [Q_1 \varphi_1 \dots Q_N \varphi_N Q_1^* \varphi_1^* \dots Q_N^* \varphi_N^*]^T = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & Q_r \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \quad (47)$$

Si además definimos la matriz de términos $\frac{1}{(p - \lambda_r)}$ y $\frac{1}{(p - \lambda_r^*)}$ como:

$$[p\mathbf{I} - \Lambda]^{-1} \quad (48)$$

la ecuación (51) queda reducida a:

$$\mathbf{H}(p) = \mathbf{V} [p\mathbf{I} - \Lambda]^{-1} \mathbf{L} = \mathbf{V} [p\mathbf{I} - \Lambda]^{-1} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & Q_r \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \quad (49)$$

Finalmente, podemos expresar la relación entre las fuerzas de entrada $\mathbf{F}(p)$ y los desplazamientos $\mathbf{X}(p)$ como:

$$\mathbf{X}(p) = \mathbf{H}(p)\mathbf{F}(p) = \mathbf{V} [p\mathbf{I} - \Lambda]^{-1} \mathbf{L}\mathbf{F}(p) = \mathbf{V} [p\mathbf{I} - \Lambda]^{-1} \begin{bmatrix} \diagdown & Q_r \\ \diagup & \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \mathbf{F}(p) \quad (50)$$

En este contexto, la matriz \mathbf{L} se relaciona con los inputs o fuerzas de entrada. Es una medida de la eficiencia de la excitación en cada grado de libertad y modo de vibración.

Matriz de funciones de respuesta en frecuencia y matriz de función de respuesta impulsiva:

La matriz de funciones de transferencia se puede obtener fácilmente evaluando la ecuación (51) en el dominio de la frecuencia ($p \rightarrow j\omega$):

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{Q_r \varphi_r \varphi_r^T}{j\omega - \lambda_r} + \frac{Q_r^* \varphi_r^* \varphi_r^{*T}}{j\omega - \lambda_r^*} \right) \quad (51)$$

En análisis modal experimental, rara vez se mide la matriz completa $\mathbf{H}(\omega)$ por limitaciones prácticas. El número de modos, N_m , será siempre menor que el número de puntos de medida, $N_o < N$. Asimismo, el número de inputs, N_i , suele ser considerablemente inferior al número de respuestas medidas. Con ello, las dimensiones de las matrices en la ecuación (51) resultan:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\omega)_{N_o \times 1} &= \mathbf{H}(\omega)_{N_o \times N_i} \mathbf{F}(\omega)_{N_o \times 1} \\ \mathbf{V}_{N_m \times 2N_m} [p\mathbf{I} - \Lambda]_{2N_m \times 2N_m}^{-1} \mathbf{L}_{2N_m \times 2N_i} \mathbf{F}(\omega)_{N_i \times 1} \end{aligned} \quad (52)$$

La transformada inversa de Laplace de la matriz de funciones de transferencia arroja la matriz de funciones de respuesta impulsiva:

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{r=1}^N \left(Q_r \varphi_r \varphi_r^T e^{\lambda_r t} + Q_r^* \varphi_r^* \varphi_r^{*T} e^{\lambda_r^* t} \right) \quad (53)$$

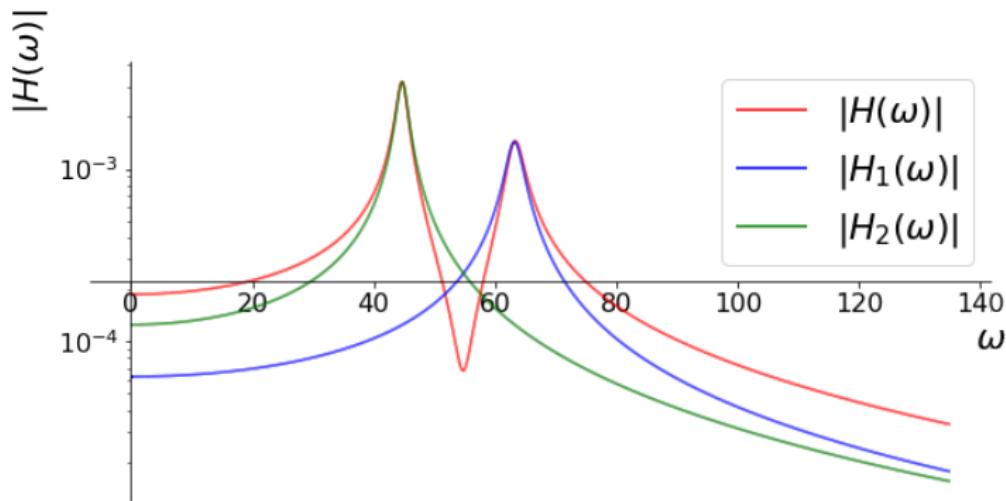
o, de acuerdo a la ecuación (56):

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{V} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_N t} \end{bmatrix} \mathbf{L} \quad (54)$$

donde

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{\lambda_N t} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & e^{\lambda_1^* t} \\ & & & & & & \\ & & & & & & e^{\lambda_N^* t} \end{bmatrix} = \quad (55)$$

De acuerdo con la ecuación (51), las funciones de respuesta en frecuencia se pueden interpretar como la suma de un número de componentes, cada una equivalente a la respuesta de un sistema de un único grado de libertad.



Identificación modal

En general, la identificación modal en EMA consiste en determinar las propiedades modales de la estructura (frecuencias resonantes, tasas de amortiguamiento, y modos de vibración) a partir de las funciones de respuesta en frecuencia determinadas experimentalmente. Para ello, en general se debe construir un modelo que reproduzca las FRFs vistas en la ecuación (51). En general, los métodos de identificación se pueden clasificar en:

- Métodos locales o basados en hipótesis de sistemas de 1 GDL.
- Métodos globales

Métodos locales - Motivación a través del análisis modal de sistemas con amortiguamiento proporcional

Consideremos un sistema dinámico de N grados de libertad con amortiguamiento proporcional:

$$\ddot{\mathbf{M}\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (56)$$

Dado que la matriz de amortiguamiento es proporcional, es posible desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales anterior mediante superposición modal. Para ello, definimos el vector desplazamientos \mathbf{X} a través de las coordenadas modales y_j :

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^N \varphi_j y_j = \Phi \mathbf{Y} \quad (57)$$

Con ello, desacoplamos el sistema premultiplicando por la transpuesta de la matriz modal Φ :

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{Y}} + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{Y}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{Y} = \Phi^T \mathbf{F} \quad (58)$$

Donde podemos identificar las siguientes matrices diagonales:

- Matriz de masa modal $\mathbf{M}_d = \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \text{diag}(M_j)$.
- Matriz de rigidez modal $\mathbf{K}_d = \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \text{diag}(M_j)$.
- Matriz de amortiguamiento modal $\mathbf{C}_d = \Phi^T \mathbf{C} \Phi = \text{diag}(C_j)$.

Esta descomposición nos permite desacoplar el sistema en N ecuaciones equivalentes a un sistema de 1 GDL (para $j = 1, 2, \dots, N$):

$$\begin{aligned} M_j \ddot{y}_j + C_j \dot{y}_j + K_j y_j &= F_j^* \\ \ddot{y}_j + 2\zeta_j \omega_{o,j} \dot{y}_j + \omega_{o,j}^2 y_j &= F_j^*/M_j \end{aligned} \tag{59}$$

donde F_j^* es la proyección del vector fuerza sobre el modo de vibración j .

NOTA: si los modos de vibración se normalizan a la matriz de masa ($\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}$), $M_j = 1$.

Pasando la ecuación (59) al dominio de la frecuencia mediante la transformada de Fourier, llegamos a:

$$(-\omega^2 + j2\zeta\omega\omega_{o,j} + \omega_{o,j}^2) Y_j(\omega) = F_j^*(\omega)/M_j \quad (60)$$

de donde podemos extraer la FRF del modo j como:

$$H_j(\omega) = \frac{1/M_j}{-\omega^2 + j2\zeta\omega\omega_{o,j} + \omega_{o,j}^2} = \frac{A_1}{j\omega - \lambda_{1,j}} + \frac{A_1^*}{j\omega - \lambda_{1,j}^*} \quad (61)$$

Organizando las FRFs de los modos en una matriz diagonal $\mathbf{H}(\omega)$, es posible relacionar los desplazamientos de la estructura con las coordenadas modales:

$$\mathbf{X}(\omega) = \Phi \mathbf{Y}(\omega) = \Phi \mathbf{H}(\omega) \Phi^T \mathbf{F}(\omega) = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{F}(\omega) \quad (62)$$

La matriz de funciones de transferencia $\mathbf{G}(\omega)$ de la ecuación (61) presenta la siguiente forma:

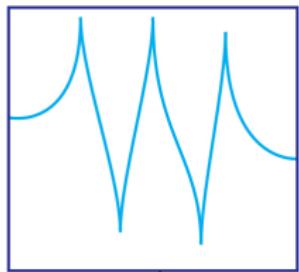
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \dots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \quad (63)$$

donde los términos $H_{ik}(\omega)$ se pueden determinar como:

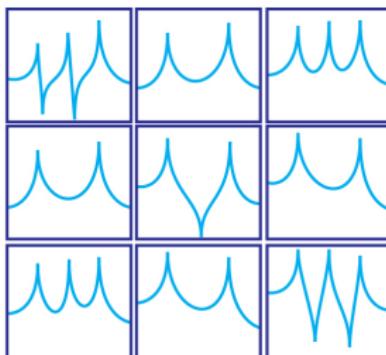
$$H_{ik}(\omega) = \sum_{j=1}^N H_j(\omega) \varphi_{ij} \varphi_{kj} \quad (64)$$



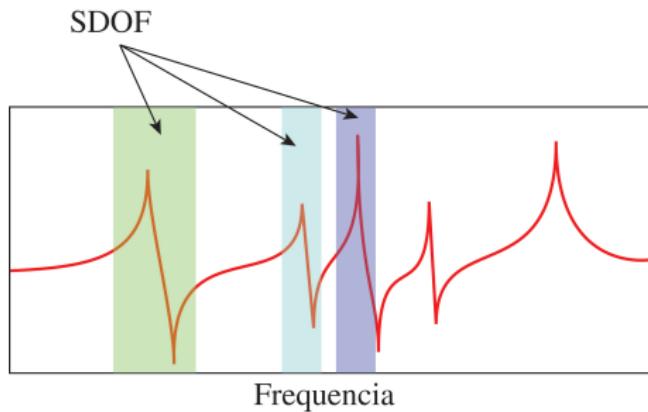
H_{33} [Output₃/Input₃]



$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix}$$

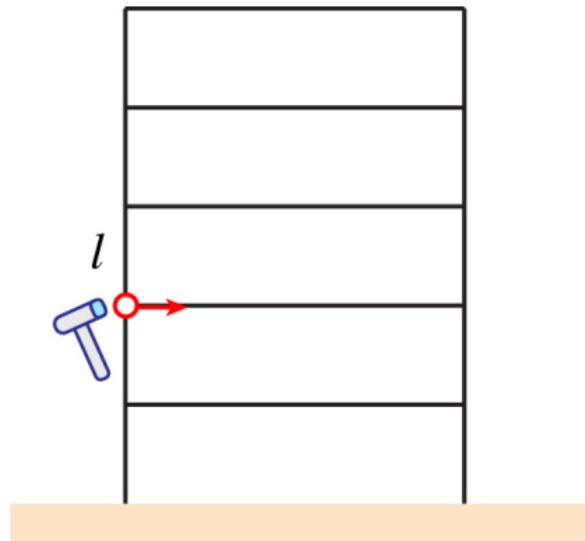


Esta base teórica nos permite explotar la evidencia de que, en la vecindad de los picos resonantes, las FRFs están dominadas por la contribución de un modo, siendo despreciable la contribución del resto.

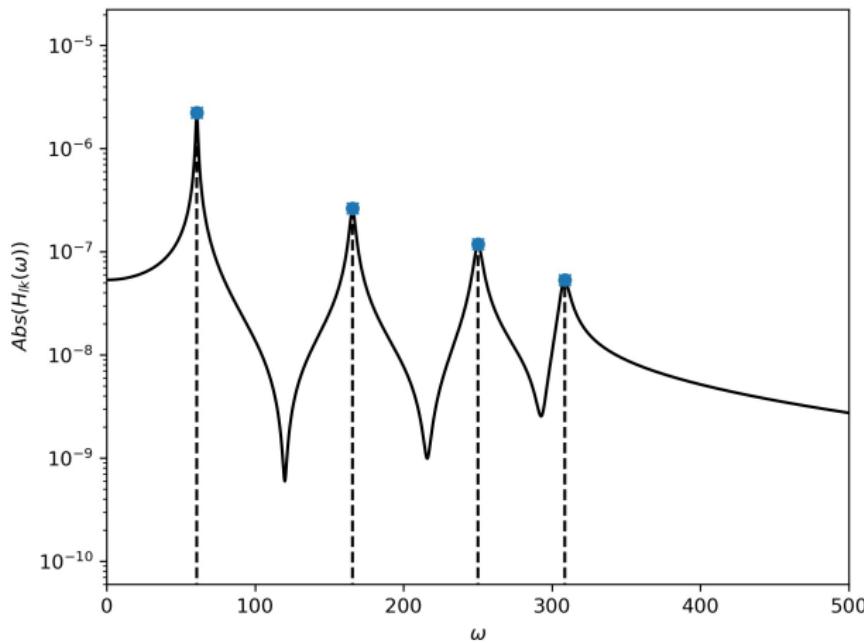


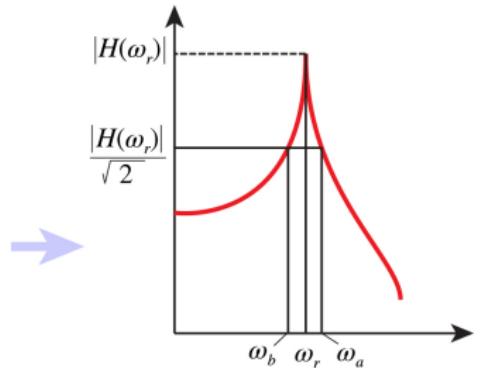
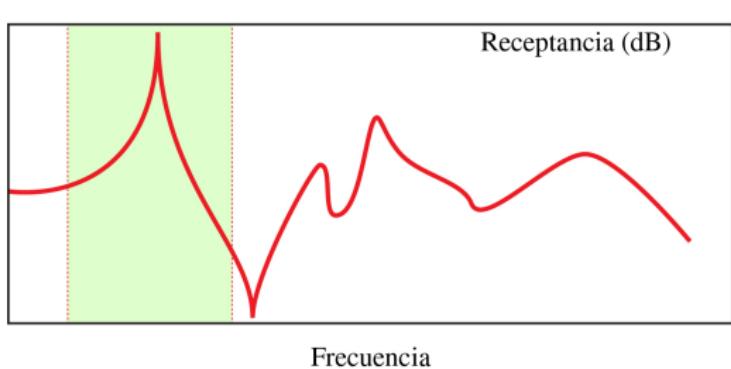
Método de toma de picos o peak-picking: (Procedimiento MISO)

- ① Dar un impulso en el grado de libertad l (F_l).
- ② Registro y cálculo de $x_l(\omega)$.
- ③ Cálculo de $H_{ll}(\omega) = x_l(\omega)/F_l(\omega)$.



- ④ Identificar ω_j en los picos de $H_{II}(\omega)$.
- ⑤ Identificar ζ_j en cada pico (e.j. método del ancho de banda, circle fit).

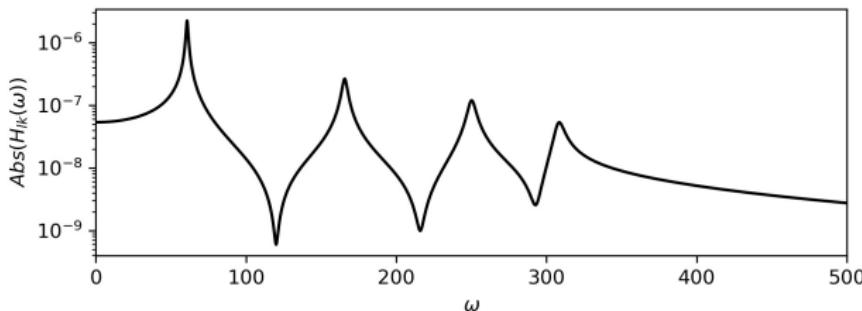
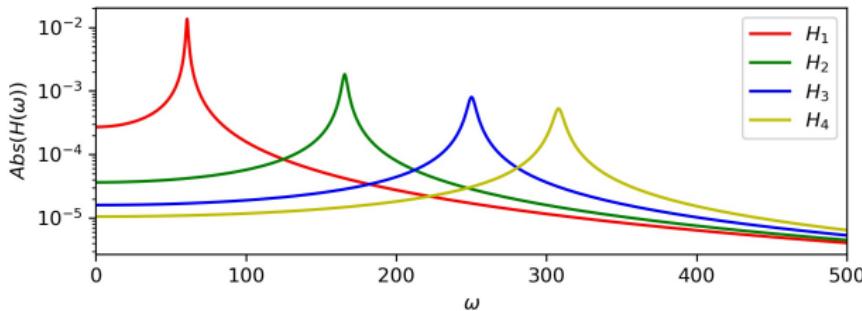




$$\zeta_r = \frac{\omega_a - \omega_b}{2\omega_r} \quad (65)$$

⑥ Calcular las funciones $H_j(\omega)$ a partir de los datos anteriores

$$H_r(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + j2\zeta\omega\omega_{o,r} + \omega_{o,r}^2} \quad (66)$$



- 7 Calcular φ_{lj} a partir de H_{ll} y H_j :

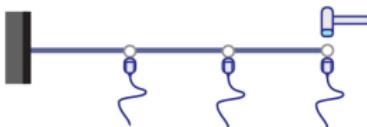
$$\begin{aligned} H_{ll}(\omega_1) &= H_1(\omega_1)\varphi_{l1}^2/M_1 + \dots + H_N(\omega_1)\varphi_{lN}^2/M_N \\ \dots &= \dots \\ H_{ll}(\omega_N) &= H_1(\omega_N)\varphi_{lN}^2/M_1 + \dots + H_N(\omega_N)\varphi_{lN}^2/M_N \end{aligned} \tag{67}$$

Del sistema de ecuaciones anterior podremos determinar φ_{lj}^2/M_j , $j = 1, \dots, N$. Nótese que el término $1/M_j$ actúa como un factor de escala que no afecta a la estimación del modo.

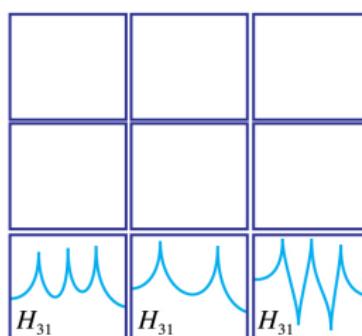
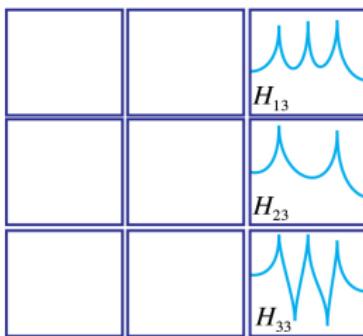
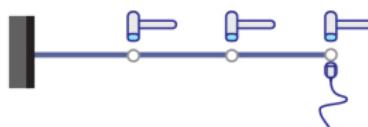
- 8 Aplicamos una nueva fuerza F_k y obtenemos x_l y H_{lk} .
- 9 Calculamos los valores de φ_{kj} a partir de H_{lk} , H_j y φ_{lj} .
- 10 Se siguen aplicando fuerzas en cada punto hasta tener todas las componentes de todos los modos.

Se debe comenzar por un término de la diagonal y luego seguir con una columna completa fila completa.

SIMO



MISO



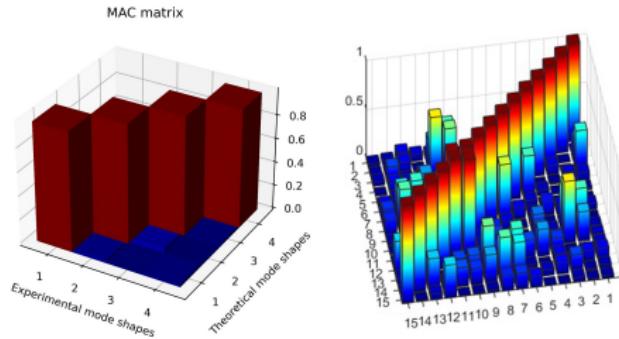
Desventajas:

- El método de toma de picos se basa en el valor de los picos de las FRFs, los cuales son difíciles de medir con precisión.
- Como consecuencia de la anterior, el método de toma de picos no suele producir datos modales precisos.
- Para la estimación del amortiguamiento, se toman únicamente puntos discretos. Estos puntos se suelen obtener a través de interpolación la cual puede producir errores en la estimación.
- La presencia de ruido en las señales afecta las estimaciones modales.
- Cuando los modos no están bien separados, la premisa básica de descomposición de la respuesta en sistemas de 1 GDL deja de ser cierta.

Validación de formas modales

Modal Assurance Criterion (MAC): métrica que mide la correlación entre modos de vibración. Se puede emplear para comparar mediciones experimentales con resultados teóricos, así como evaluar la similitud entre modos experimentales. El valor del MAC puede estar entre 0 (modos no correlacionados en absoluto) y 1 (modos perfectamente correlacionados). Se define entre dos modos de vibración φ_r y φ_q como:

$$MAC(\varphi_r, \varphi_q) = \frac{|\varphi_r^T \varphi_q^*|^2}{(\varphi_r^T \varphi_R^*) (\varphi_Q^T \varphi_q^*)} \quad (68)$$



Métodos globales

Para solventar las limitaciones del método anterior, surgen toda una familia de métodos paramétricos basados en el ajuste de ciertos modelos modales a las FRFs experimentales. En términos generales, los métodos paramétricos se pueden clasificar como:

- Métodos basados en el dominio del tiempo.
 - Least-squares time domain method.
 - Ibrahim time domain (ITD) method.
 - Random decrement method.
 - ARMA time series method.
 - Least-squares complex exponential (LSCE) method.
- Métodos basados en el dominio de la frecuencia.
 - Circle fit method.
 - Dobson's method.
 - Least-squares complex frequency (LSCF) method.
- Métodos multi-input multi-output.
 - Frequency domain poly-reference modal analysis method (polymax - p-LSCF).

La idea principal del método LSCF es la de reproducir las FRFs de la ecuación (51) a través de funciones racionales como sigue:

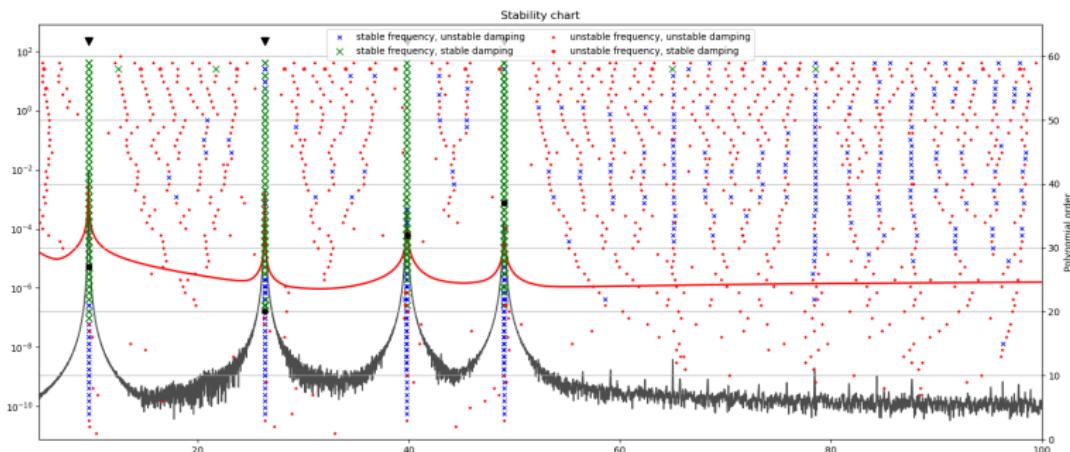
$$\hat{H}_k(\omega) = \frac{B_k(\omega, \theta)}{A(\omega, \theta)} \quad (69)$$

con:

$$\begin{aligned} B_k(\omega, \theta) &= \sum_{j=0}^n b_{kj} (\omega)^j, \quad k = 1, 2, \dots, N_o N_i \\ A(\omega, \theta) &= \sum_{j=0}^n a_j (\omega)^j \end{aligned} \quad (70)$$

siendo b_{kj} y a_j los parámetros del modelo a determinar. Dichos parámetros se pueden obtener mediante un ajuste de mínimos cuadrados de las FRFs experimentales.

La consideración de polinomios de orden creciente (n), permite obtener la estabilidad de los polos obtenidos en términos de frecuencia resonante, amortiguamiento, y modos de vibración, dando como resultado un **diagrama de estabilización**. Los diagramas de estabilización son herramientas esenciales en las técnicas paramétricas de identificación modal para separar modos ficticios (modos espúreos) de los modos reales o físicos.



References

-  Fu, Zhi-Fang and He, Jimin (2001)
Modal analysis
Elsevier 12(3), 45 – 678.
-  Avitabile, P. (2018)
Introduction to experimental modal analysis: A simple non-mathematical presentation.
Modal Testing: A Practitioner's Guide; The Society for Experimental Mechanics and John Wiley & Sons Ltd.: Chichester, UK, 6.
-  Heylen, W., & Sas, P. (2006).
Modal analysis theory and testing.
Katholieke Universiteit Leuven, Departement Werktuigkunde; Leuven.
-  Craig Jr, R. R., & Kurdila, A. J. (2006).
Fundamentals of structural dynamics.
John Wiley & Sons.

The End