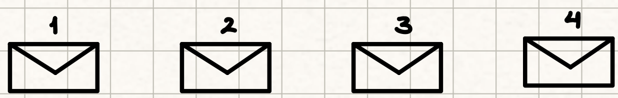
22 - septiembre - 2025

Four letters to different insureds are prepared along with accompanying envelopes. The letters are put into the envelopes randomly.

Calculate the probability that at least one letter ends up in its accompanying envelope.

(A) 27/256
(B) 1/4
(C) 11/24
(D) 5/8
(E) 3/4

solución:



C1
C2
C3
C4

1. (C2 , C1 , C4 , C3)
2. (C4 , C1 , C2 , C3)
3. (C3 , C1 , C4 , C2)
4. (C2 , C4 , C1 , C3)
5. (C3 , C4 , C1 , C2)
6. (C4 , C3 , C1 , C2)
7. (C4 , C3 , C2 , C1)
8. (C2 , C3 , C4 , C1)
9. (C3 , C4 , C2 , C1)

Hemos hallado 9 arreglos en los que ninguna carta está en su respectivo sobre.

Sea A el evento en el que ninguna carta está en sobre.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{9}{4!} = \frac{9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9}{24}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{9}{24} = 5/8}$$

From a standard deck of 52 playing cards, five cards are chosen without replacement.

Calculate the probability of obtaining at least two kings, but no aces or jacks.

(A) 0.0174
(B) 0.0228
(C) 0.0240
(D) 0.0298
(E) 0.0417

solución:

52 cartas en total

4 Kings

$\boxed{\begin{array}{l} 4 \text{ Aces} \\ 4 \text{ Jacks} \end{array}} \to$ No queremos de estas 8 cartas

Restan $(52-8) = 44$ cartas de cuáles elegir.

De ésas 44, 4 son Kings y 40 son "libres".

$$\mathbb{P}(K=2;\ A=0;\ J=0) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{40}{3}\cancelto{1}{\binom{8}{0}}}{\binom{52}{5}}$$

$$\mathbb{P}(K=3;\ A=0;\ J=0) = \frac{\binom{4}{3}\binom{40}{2}\binom{8}{0}}{\binom{52}{5}}$$

$$\mathbb{P}(K=4;\ A=0;\ J=0) = \frac{\binom{4}{4}\binom{40}{1}\binom{8}{0}}{\binom{52}{5}}$$

$$\mathbb{P}(K\geq 2;\ A=0;\ J=0) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{40}{3}\cancelto{1}{\binom{8}{0}}}{\binom{52}{5}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{40}{2}\binom{8}{0}}{\binom{52}{5}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{40}{1}\binom{8}{0}}{\binom{52}{5}}$$

$\boxed{\mathbb{P}(K\geq 2;\ A=0;\ J=0) = 0.024 \text{ Ⓒ}}$

TOPIC 2: UNIVARIATE RANDOM VARIABLES

Dado un espacio muestral Ω, será a través de una variable aleatoria (**random variable**) X que lograremos describir los posibles valores asociados al experimento y la probabilidad de que estos valores ocurran.

Una definición más formal plantea que la variable aleatoria X es una función definida sobre el espacio muestral que asigna un valor real a cada punto muestral $\omega \in \Omega$.

ejemplo:

Supongamos que un experimento consiste en lanzar una moneda tres veces. Por cada lanzamiento se gana \$1 si cae águila y se pierde \$1 si cae sol. La probabilidad de que un tiro caiga águila es de $0 < p < 1$.

Definimos a X como la v.a. que mide la ganancia por partida.

$$\Omega = \{AAA, AAS, ASA, SAA, SSS, SSA, SAS, ASS\}$$

ω	$X(\omega)$	$\mathbb{P}(X = \omega)$
AAA	3	p^3
AAS	1	$p^2(1-p)$
ASA	1	$p^2(1-p)$
SAA	1	$p^2(1-p)$
SSS	-3	$(1-p)^3$
SSA	-1	$p(1-p)^2$
SAS	-1	$p(1-p)^2$
ASS	-1	$p(1-p)^2$

Podemos verificar que

$$\sum p(x) = 1$$

desarrollando

$$p^3 + 3 \cdot p^2(1-p) + (1-p)^3 + 3p(1-p)^2$$

Al conjunto de posibles valores que puede tomar una variable aleatoria se le conoce como soporte de la v.a. (**support of a r.v.**).

Dependiendo de cómo sean los valores en el soporte es clasificaremos a la v.a. como:

- ⋆) discreta
- ⋆) continua
- ⋆) mixta

Para un mismo experimento aleatorio pueden definirse varias variables aleatorias y cada una de éstas puede ser discreta, continua o mixta, dependiendo de cómo se construya.

2.1 $\boxed{\text{V.A. DISCRETAS}}$

Diremos que una v.a. X es discreta (**discrete**), o tiene una distribución discreta (**discrete distribution**) si toma valores en un conjunto finito o en uno infinito numerable.

Una vez definida la v.a. discreta, será de interés conocer la información que ésta proporciona acerca del experimento que modela. Mediante la función de masa de probabilidad (**probability mass function**), podemos determinar con qué probabilidad ocurre cada resultado, o bien, un conjunto de ellos. Usualmente, está función se denota como $p(x)$, $f(x)$, $f_X(x)$, p_x o $\mathbb{P}(X = x)$.

La función de masa de probabilidad debe satisfacer:

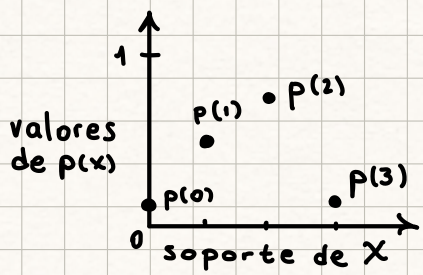
(i) $0 \leq p(x) \leq 1$ para cualquier x

(ii) $\sum_x p(x) = p(x_1) + p(x_2) + \dots = 1$

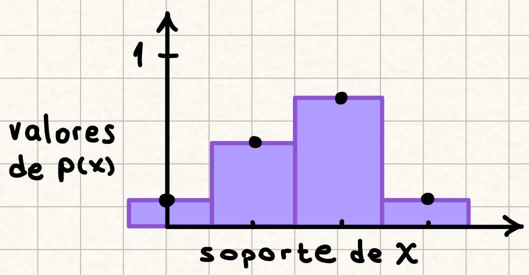
Dado un evento A, se consideran todos los posibles valores que puede tomar la v.a. X sobre dicho evento, y se expresa que la probabilidad de que X tome alguno de esos valores es

$$\mathbb{P}[X \in A] = p(a_1) + p(a_2) + \dots = \mathbb{P}[A]$$

Para representar gráficamente la distribución de una v.a. discreta se usa:



Gráfica de probabilidad
(probability plot)



Histograma
(histogram)

COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

In modeling the number of claims filed by an individual under an automobile policy during a three-year period, an actuary makes the simplifying assumption that for all integers $n \geq 0$, $p(n+1) = 0.2\,p(n)$ where $p(n)$ represents the probability that the policyholder files n claims during the period.

Under this assumption, calculate the probability that a policyholder files more than one claim during the period.

solución:

$$\boxed{p(n+1) = 0.2 \cdot p(n) \quad \text{para } n \geq 0}$$

$$p(1) = 0.2\,p(0)$$

$$p(2) = 0.2\,p(1) = 0.2\,(0.2\,p(0)) = (0.2)^2\,p(0)$$

$$p(3) = 0.2\,p(2) = 0.2\,[(0.2)^2\,p(0)] = (0.2)^3\,p(0)$$

$$\vdots$$

$$p(n) = (0.2)^n\,p(0) \quad \text{para } n \geq 0$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = p(0) + p(1) + p(2) + \dots$$

$$= p(0) + (0.2)\,p(0) + (0.2)^2\,p(0) + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (0.2)^i \cdot p(0)$$

$$= p(0) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (0.2)^i = p(0) \cdot \frac{1}{1-(0.2)}$$

$$= p(0) \cdot \frac{1}{0.8} = p(0) \cdot (1.25)$$

suma geométrica si $r \neq 1$

$$\sum_{i=0}^{k} r^i = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$$

si $|r| < 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$$

serie geométrica

$$\rightarrow 1 = p(0)\,(1.25) \rightarrow p(0) = (1.25)^{-1} \rightarrow p(0) = 0.8$$

$$R: \; p(2) + p(3) + p(4) + \dots = 1 - [p(0) + p(1)]$$

$$= 1 - [0.8 + (0.2)(0.8)]$$

$$\boxed{R: \; p(2) + p(3) + p(4) + \dots = 0.04 = 4\%}$$

COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

Suppose non-negative integer variable X follows a probability distribution such that $P(X=0) = 0.75$ and, for each $i \geq 1$, $P(X = i+1) = \frac{1}{6}P(X = i)$.

Calculate $P(X \leq 2)$.

solución:

$$\mathbb{P}(X=0) = 0.75$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \left(\tfrac{1}{6}\right)\mathbb{P}(X=1)$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \left(\tfrac{1}{6}\right)\mathbb{P}(X=2) = \left(\tfrac{1}{6}\right)\left[\left(\tfrac{1}{6}\right)\mathbb{P}(X=1)\right] = \left(\tfrac{1}{6}\right)^2\mathbb{P}(X=1)$$

$$\mathbb{P}(X=4) = \left(\tfrac{1}{6}\right)\mathbb{P}(X=3) = \left(\tfrac{1}{6}\right)\left[\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\mathbb{P}(X=1)\right] = \left(\tfrac{1}{6}\right)^3\mathbb{P}(X=1)$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{P}(X=n) = \left(\tfrac{1}{6}\right)^{n-1}\mathbb{P}(X=1) \quad \text{para } n \geq 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=i) = \mathbb{P}(X=0) + \sum_{i=1}^{\infty}(1/6)^{i-1}\,\mathbb{P}(X=1)$$

$j = i - 1$

$$= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1)\cdot\sum_{j=0}^{\infty}(1/6)^j$$

$$= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1)\cdot\left(\frac{1}{1-(1/6)}\right)$$

$$= 0.75 + \mathbb{P}(X=1)(6/5)$$

$$\rightarrow 1 = 0.75 + \mathbb{P}(X=1)\cdot(6/5)$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(X=1) = (1-0.75)(5/6) \rightarrow \mathbb{P}(X=1) = 5/24 \approx 0.21$$

$$\mathbb{P}(X\leq 2) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)$$

$$= 0.75 + (5/24) + (1/6)^{2-1}\cdot(5/24)$$

$$= 0.993\overline{055}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X\leq 2) = 0.9930\overline{55}}$$

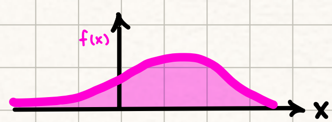
2.2 V.A. CONTINUAS

Una variable aleatoria continua (**continuous**) tomará valores de uno o más intervalos de números reales o incluso de todo el conjunto.

Cada variable aleatoria continua tiene una función de densidad de probabilidad, fdp (**probability density function, pdf**) asociada. Esta función, generalmente denotada por $f(x)$ o por $f_X(x)$, es una función continua excepto en un conjunto finito de puntos y satisface que:

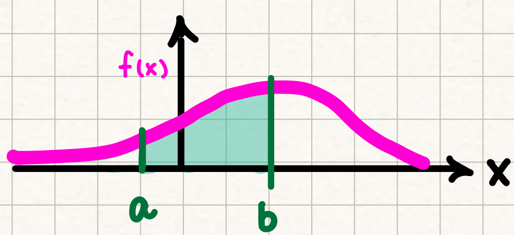
(i) $f(x) \geq 0$ para cualquier x en los núm. reales

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$



La probabilidad de que el valor observado en la v.a. X esté en el intervalo (a,b) es

$$\mathbb{P}[X \in (a,b)] = \mathbb{P}[a < X < b] = \int_a^b f_X(x)\,dx$$



Nótese que, a diferencia de lo establecido para $p(x)$, los valores de la función de densidad pueden ser mayores a 1 porque NO representan probabilidades, sino densidades.

Para cualquier variable aleatoria continua, la probabilidad de que la variable tome un valor exacto es cero, ya que un solo punto no tiene área bajo la curva de densidad.

Entonces, si X es una variable aleatoria con distribución continua, puede ocurrir que $f(x_0) > 1$ para algún x_0, pero $\mathbb{P}(X = x) = 0$ para todo valor x.

Si X es continua, ent.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathbb{P}(a < X < b)$$
$$\mathbb{P}(a \leq X < b)$$
$$\mathbb{P}(a < X \leq b)$$
$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$$

Si X es discreta, ent.
$\mathbb{P}(X < a) \neq \mathbb{P}(X \leq a)$

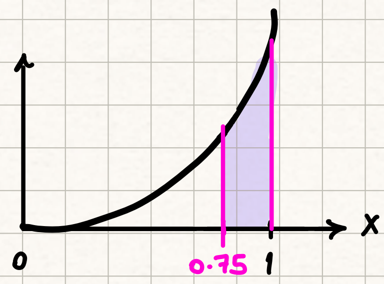
X is a random variable with the following probability density function,

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Calculate the probability of X being greater than 0.75.

solución:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$



$$\mathbb{P}(X > 0.75) = \mathbb{P}(0.75 < x < 1)$$

$$= \int_{0.75}^{1} f_X(x)\,dx = \int_{0.75}^{1} 3x^2\,dx$$

$$= 3 \cdot \int_{0.75}^{1} x^2\,dx = \cancel{3} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}} \Big|_{0.75}^{1}$$

$$= \cancel{3} \cdot \left[1^3/\cancel{3} - 0.75^3/\cancel{3} \right] = 1 - (0.75)^3$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X > 0.75) = 0.578125}$$

COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

The random future lifetime of a newborn calico kitten is denoted by X. Your are given that $f_X(x) = Ke^{-2x}$ for $0 < x < 10$ and $f_X(x) = 0$ otherwise, where K is a constant.

Calculate the probability that a newborn calico kitten survives to age two.

solución:

$$f_x(x) = \begin{cases} K \cdot e^{-2x} & \text{si} \quad x \in (0, 10) \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(2 \leq X \leq 10) = \int_2^{10} f_x(x)\,dx = \int_2^{10} K \cdot e^{-2x}\,dx$$

¿Cuánto vale K?

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,dx = \int_0^{10} K \cdot e^{-2x}\,dx = K \int_0^{10} e^{-2x}\,dx$$

$u = -2x$

$du = -2dx \rightarrow dx = \frac{du}{-2}$

si $x = 0 \rightarrow u = 0$

si $x = 10 \rightarrow u = -20$

$$= K \int_0^{-20} e^u \cdot \frac{du}{-2} = \frac{K}{2} \int_{-20}^{0} e^u\,du = \frac{K}{2} \cdot e^u \Big|_{-20}^{0}$$

$$= \frac{K}{2} \cdot (e^0 - e^{-20}) = \frac{K}{2}(1 - e^{-20})$$

$$\rightarrow 1 = \frac{K}{2}(1 - e^{-20}) \rightarrow K = \frac{2}{1 - e^{-20}} \approx 2$$

$$f_x(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si} \quad x \in (0,10) \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

si $x = 2 \rightarrow u = -4$

si $x = 10 \rightarrow u = -20$

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = \int_2^{10} 2e^{-2x}\,dx = \frac{\cancel{2}}{-\cancel{2}} \int_{-4}^{-20} e^u\,du = \int_{-20}^{-4} e^u\,du$$

$$= e^{-4} - e^{-20} \approx 0.01831$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq 2) = 0.01831}$$

ĀxM
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

The distribution of the size of claims paid under an insurance policy has probability density function

$$f(x)=\begin{cases} cx^a, & 0<x<5 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

Where $a>0$ and $c>0$.

For a randomly selected claim, the probability that the size of the claim is less than 3.75 is 0.4871.

Calculate the probability that the size of a randomly selected claim is greater than 4.

solución:

i) $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,dx = 1$

$$\int_0^5 c\cdot x^a\,dx = c\int_0^5 x^a\,dx = c\cdot \left.\frac{x^{a+1}}{(a+1)}\right|_0^5$$

$$= c\cdot\left(\frac{5^{a+1}}{(a+1)} - \cancel{\frac{0^{a+1}}{(a+1)}}\right) = c\cdot\frac{5^{a+1}}{(a+1)}$$

$$\rightarrow 1 = c\cdot\frac{5^{a+1}}{(a+1)} \rightarrow \boxed{c = \frac{(a+1)}{5^{a+1}} \approx 0.04472}$$

ii) $\mathbb{P}(X<3.75) = 0.4871$

$$\mathbb{P}(0<X<3.75) = \int_0^{3.75} c\cdot x^a\,dx = \frac{(a+1)}{5^{a+1}}\int_0^{3.75} x^a\,dx$$

$$= \frac{\cancel{(a+1)}}{5^{a+1}}\cdot\left.\frac{x^{a+1}}{\cancel{(a+1)}}\right|_0^{3.75} = \frac{(3.75)^{a+1}}{5^{a+1}}$$

$$\rightarrow 0.4871 = \frac{3.75^{a+1}}{5^{a+1}} \rightarrow \left(\frac{3.75}{5}\right)^{a+1} = 0.4871$$

$$\rightarrow \ln\left[\left(\frac{3.75}{5}\right)^{a+1}\right] = \ln(0.4871)$$

$$\rightarrow (a+1)\ln\left(\frac{3.75}{5}\right) = \ln(0.4871) \rightarrow (a+1) = \frac{\ln(0.4871)}{\ln(3.75/5)}$$

$$\rightarrow \boxed{a+1 = 2.5} \rightarrow a = 1.5$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X>4) = \int_4^{10} c\cdot x^a\,dx = 0.04472\left(\frac{10^{2.5}}{2.5} - \frac{4^{2.5}}{2.5}\right) = 0.43}$$

2.3 V.A. MIXTAS

Una variable aleatoria que tenga puntos en los que tome valores con probabilidad positiva (como en el caso discreto), y tenga también una parte continua, en la que su comportamiento se describa mediante una función de densidad, tendrá una distribución mixta (**mixed distribution**). Estas variables satisfacen:

(i) $p(x),\ f(x) \geqslant 0$ para cualquier x en los núm. reales

(ii) $\sum_{x} p(x) + \int_{x} f_x(x)\,dx = 1$

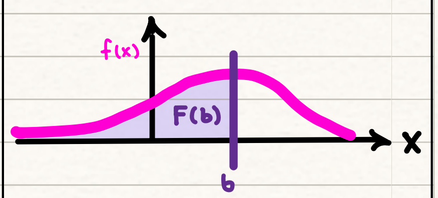
NOTA: Para la mayoría de los ejercicios del examen P, la SOA empleará la notación $f(x)$ para representar la función asociada a la v.a., independientemente de si esta es continua o mixta.

2.4 Función de distribución acumulada

Dada una v.a. X, la función de distribución acumulada, fda (**cumulative distribution function, cdf**) de X es

$$F(b) = F_X(b) = \mathbb{P}(X \leq b)$$

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$



y equivale al acumulado de toda la probabilidad a la izquierda de (e incluyendo a) b.

★) Si X es discreta, $F(b) = \sum_{x \leq b} p(x)$

★) Si X es continua, $F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

★) Si X tiene distribución mixta, se aplica una combinación de las anteriores.

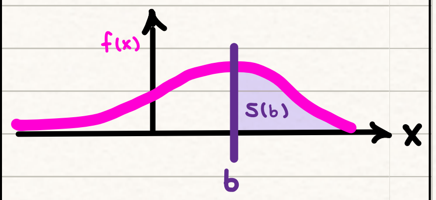
Para toda fda se cumple que

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

La función de supervivencia (survival function) es el complemento de la función de distribución

$$S(b) = S_x(b) = 1 - F_x(b) = \mathbb{P}(X > b)$$

$$-\frac{d}{dx} S(x) = f(x)$$



— • —

Let X be a random variable with the following cumulative distribution function:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

Determine $P(0 \leq e^X \leq 3)$

<u>solución</u>:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(0 \leq e^x \leq 3) &= \mathbb{P}(\ln(0) \leq \ln(e^x) \leq \ln(3)) \\
&= \mathbb{P}(\ln(0) \leq x \leq \ln(3)) \\
&= F_x(\ln(3)) - F_x(\ln(0)) \\
&= 1 - e^{-\ln(3)} - 0 \\
&= 1 - \cancel{e}^{\cancel{\ln}(3^{-1})} \\
&= 1 - 3^{-1} \\
&= 1 - \frac{1}{3} \\
&= 2/3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(0 \leq e^x \leq 3) = 2/3}$$

The lifetime X of a machine, measured in years, has probability density function

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

for some constant $\lambda > 0$. It is known that the probability the machine is still functioning after one year is 0.80. Let F be the cumulative distribution function (CFD) of X.

Determine $F(x)$ for $x \geq 0$.

solución:

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$; p.a. $\lambda > 0$

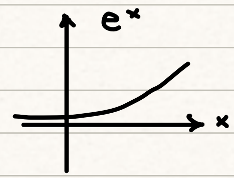
$\mathbb{P}(X > 1) = 0.80$

$$\mathbb{P}(X > 1) = \int_1^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \int_{-\lambda}^{-\infty} e^u(-du) = \int_{-\infty}^{-\lambda} e^u\,du = e^u \Big|_{-\infty}^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda}$$

$u = -\lambda x$
$du = -\lambda dx \rightarrow \lambda dx = -du$
si $x = 1$ ent. $u = -\lambda$
si $x \rightarrow \infty$ ent. $u \rightarrow -\infty$



$\rightarrow e^{-\lambda} = 0.8 \rightarrow \ln(e^{-\lambda}) = \ln(0.8) \rightarrow \lambda = -\ln(0.8)$

$\rightarrow f_X(x) = -\ln(0.8)\, e^{-(-\ln(0.8)x)}$ para $x \geq 0$

$$F_X(a) = \int_0^a f_X(x)\,dx = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -\int_0^{-\lambda a} e^u\,du$$

$u = -\lambda x$
$du = -\lambda dx \rightarrow \lambda dx = -du$
si $x = 0 \rightarrow u = 0$
si $x = a \rightarrow u = -\lambda a$

$$= \int_{-\lambda a}^{0} e^u\,du = e^0 - e^{-\lambda a} = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$= 1 - e^{-(-\ln(0.8))\cdot a} = 1 - e^{a \cdot \ln(0.8)}$$

$$= 1 - e^{\ln(0.8^a)} = 1 - 0.8^a$$

$\rightarrow \boxed{F_X(x) = 1 - (0.8)^x \text{ para } x \geq 0}$