CARRER PATH IN FINANCE

Portafolios de Inversión – Tutorial “Álgebra de Matrices”
Dr. Jesús Cuauhtémoc Téllez Gaytán

RENDIMIENTO ESPERADO Y VARIANZA: PORTAFOLIO CON *N* ACTIVOS

Representación General:

$$E(R_P) = \sum_{j=1}^{N} w_j E(R_j)$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{j=1}^{N} w_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{N} w_j w_h \sigma_{jh}$$

Notación matricial

1. Vector columna:

$$A_{3\times1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Vector renglón:

$$B_{1\times3} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

3. Escalar (arreglo de 1x1):

$$C_{1\times1} = [15]$$

4. Matriz (4 renglones x 3 columnas):

$$D_{4\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \\ 5 & 9 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Representación general de una matriz:

$$E_{n\times m} = \begin{bmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \cdots & e_{nm} \end{bmatrix}$$

e_{nm}: elemento “e” en la matriz ubicado en el reglón *n* de la columna *m*

Álgebra de matrices

1. Multiplicación de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 17 & 29 & 41 \\ 25 & 43 & 61 \\ 8 & 15 & 22 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

2. Traspuesta de una matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Álgebra de matrices

3. Sea el caso de dos matrices que no tienen la misma dimensión, y buscamos multiplicarlas. Entonces:

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad F = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 10 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

3.1 Buscamos la traspuesta de F, la cual cambia su dimensión a (2x3):

$$F' = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

3.2 Aplicamos la multiplicación:

$$EF' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \times \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow EF' = \begin{bmatrix} 57 & 64 & 71 \\ 87 & 98 & 109 \\ 39 & 45 & 51 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Aplicación financiera

Estimación de la varianza de los rendimientos de Grupo LALA:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i^N (x_i - \mu)^2}{N-1}$$

donde:

$\sigma^2 = [a]_{1\times 1}$ "es un escalar"

$[x_i - \mu]$ "es un vector columna", que le llamaremos Excesos

$$E = [x_i - \mu] = \begin{bmatrix} -4.14\% - (-0.39\%) \\ -1.07\% - (-0.39\%) \\ 1.01\% - (-0.39\%) \\ \vdots \\ 1.59\% - (-0.39\%) \end{bmatrix}_{85\times 1}$$

Para obtener el escalar, se requiere multiplicar dos arreglos matriciales de [1x85] y [85x1]:

Aplicación financiera

Por lo anterior, se Traspone el vector columna original:

$$E = [x_i - \mu]_{85\times 1} \quad \Rightarrow \quad E' = [x_i - \mu]_{1\times 85}$$

La multiplicación: $E'_{(1\times 85)} \times E_{(85\times 1)} = [A]_{1\times 1}$

El resultado anterior se divide con *(N-1)*: $\dfrac{[A]}{(N-1)}$

Hemos obtenido la varianza de los rendimientos: σ^2

Finalmente, la raíz cuadrada proporciona la desviación estándar, esto es, el *riesgo del activo de capital*.