A x M
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

26 - septiembre - 2025

2.5 Propiedades adicionales

2.5.1. Función de riesgo

La función de riesgo (**hazard rate**) o también conocida como tasa de falla (**failure rate**) se define como

$$h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{f(x)}{S(x)} = -\frac{d}{dx}\ln(1-F(x))$$

y se usa para describir la probabilidad instantánea de que ocurra un evento a un tiempo x, dado que no ha ocurrido hasta ese momento.

2.5.2 Independencia de v.a.

Si dos v.a. X y Y son independientes (**independent random variables**) entonces

$$\mathbb{P}[(a<X<b)\cap(c<Y<d)] = \mathbb{P}(a<X<b)\cdot\mathbb{P}(c<Y<d)$$

2.5.3 Distribución condicional

Dada una variable aleatoria X con función de densidad $f(x)$, si A es un evento entonces la función de densidad de probabilidad condicional de X dado A (**conditional pdf of X given A**) es:

$$f_{X|A}(x|A) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{\mathbb{P}(A)} & \text{si } x \text{ es un resultado del evento } A \\ 0 & \text{si } x \text{ NO es un resultado del evento } A \end{cases}$$

$\bar{A}_x M$
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

Let $Y = 100X$ and let X have the following probability density function

$$f(x) = \begin{cases} c\sqrt{x}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where c is a constant.

Calculate $P(Y > 35 | Y > 19)$.

solución:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^1 c\sqrt{x}\,dx = c\int_0^1 x^{1/2}dx = c\cdot \frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1$$

$$= c\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1^{3/2} - 0^{3/2}\right) = c\cdot\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\rightarrow 1 = c(2/3) \rightarrow \boxed{c = 3/2 = 1.5}$$

$$\mathbb{P}(Y>35 \mid Y>19) = \frac{\mathbb{P}[(Y>35)\cap(Y>19)]}{\mathbb{P}(Y>19)} = \frac{\mathbb{P}(Y>35)}{\mathbb{P}(Y>19)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(100X > 35)}{\mathbb{P}(100X>19)} = \frac{\mathbb{P}(X>0.35)}{\mathbb{P}(X>0.19)}$$

1

$$\mathbb{P}(X>a) = \int_a^1 \frac{3}{2}x^{1/2}dx = \cancel{\frac{3}{2}}\cdot\left(\cancel{\frac{2}{3}}\right)x^{3/2}\Big|_a^1 = 1 - a^{3/2}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(Y>35 \mid Y>19) = \frac{\mathbb{P}(X>0.35)}{\mathbb{P}(X>0.19)} = \frac{1-0.35^{3/2}}{1-0.19^{3/2}} = 0.86}$$

2

Retomando que de forma general (sin encontrar a c):

$$\mathbb{P}(X>a) = \int_a^1 c\cdot x^{1/2}dx = c\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\left(1-a^{3/2}\right)$$

$$\mathbb{P}(Y>35 \mid Y>19) = \frac{\mathbb{P}(X>0.35)}{\mathbb{P}(X>0.19)} = \frac{\cancel{c}\cdot\cancel{(2/3)}(1-0.35^{3/2})}{\cancel{c}\cdot\cancel{(2/3)}(1-0.19^{3/2})}$$

2.4 Función de distribución acumulada

Continuando con **TOPIC 2**, revisaremos algunas propiedades de la función de distribución acumulada F :

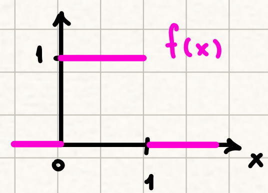
*) Es no decreciente

*) Cumple ser continua por la derecha

*) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

ejemplo distribución continua:

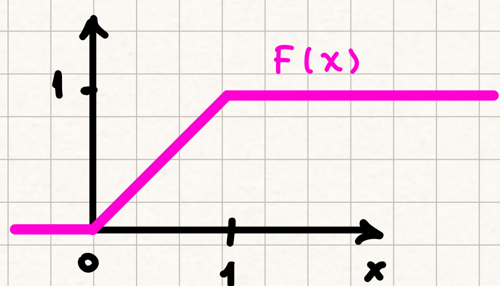
Supongamos $f_x(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$



entonces, como $F(x_0) = \int_0^{x_0} f(x)dx$,

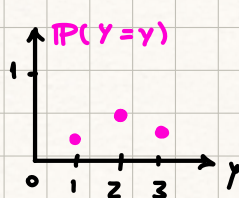
$$F(x_0) = \int_0^{x_0} f(x)dx = \int_0^{x_0} 1\, dx = x_0$$

$$\longrightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$



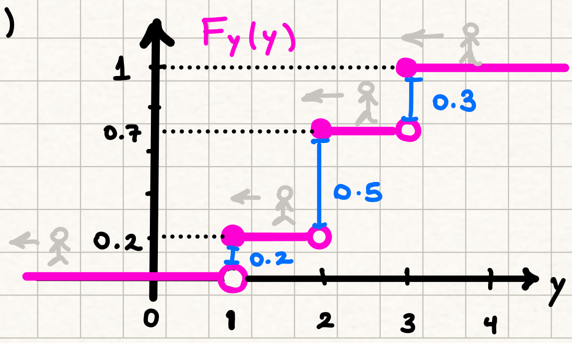
ejemplo distribución discreta:

Tenemos que $\mathbb{P}(Y = y) = \begin{cases} 0.2 & \text{si } y = 1 \\ 0.5 & \text{si } y = 2 \\ 0.3 & \text{si } y = 3 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$



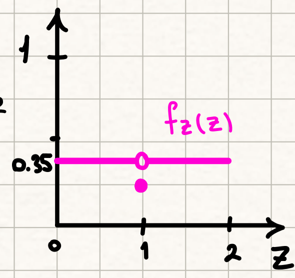
y como $F(y_0) = \sum_{y=1}^{y_0} \mathbb{P}(Y=y)$

$$\longrightarrow F(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ 0.2 & \text{si } 1 \leq y < 2 \\ 0.7 & \text{si } 2 \leq y < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq y \end{cases}$$



ejemplo distribución mixta:

Partimos de $f_Z(z) = \begin{cases} 0.35 & \text{si } 0<z<2 \text{ y } z\neq 1 \\ 0.3 & \text{si } z=1 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$

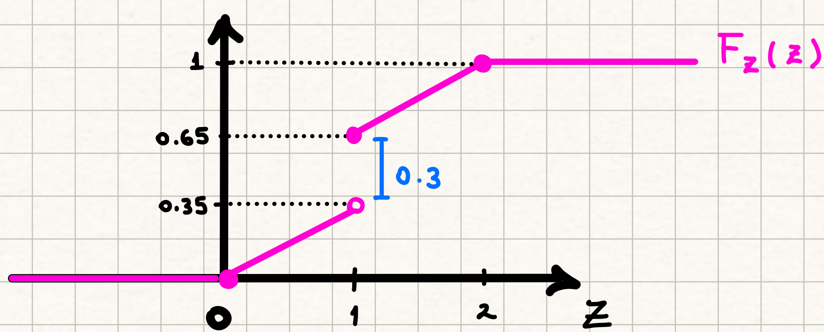


$$\rightarrow F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z<0 \\ 0.35z & \text{si } 0\leq z<1 \\ 0.65 & \text{si } z=1 \\ 0.35z+0.3 & \text{si } 1<z<2 \\ 1 & \text{si } 2\leq z \end{cases}$$

Si $0\leq z_0<1 \Rightarrow F(z_0) = \int_0^{z_0} f(z)dz = \int_0^{z_0} 0.35dz = 0.35z_0$

Si $z_0=1 \Rightarrow F(z_0) = \int_0^1 f(z)dz + \mathbb{P}(Z=1) = \int_0^1 0.35dz + 0.3 = 0.65$

Si $1<z_0<2 \Rightarrow F(z_0) = 0.65 + \int_1^{z_0} 0.35dz = 0.65+0.35z_0-0.35$



Ahora, ¿podrías afirmar que tipo de distribución tienen X y Y si sabemos que

$$\underset{\text{CONTINUA}}{f(x)} = \begin{cases} x+1 & -1<x<0 \\ 2x-6 & 3<x<\frac{6+\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases} \quad ; \quad \underset{\text{MIXTA}}{Y} = \min(\overset{\text{CONTINUA}}{X}, 3)\ ?$$

NOTA: Sólo conociendo la función de distribución acumulada se puede determinar con certeza si una v.a. es discreta, continua o mixta.

2.6 Esperanza

Una v.a. es el resultado numérico de un experimento aleatorio. Si es posible repetir el experimento aleatorio muchas veces, obviamente los resultados fluctuarán entre los distintos valores del soporte de la v.a., pero a como observamos más y más resultados, la proporción en la encontramos cada resultado se irá estabilizando.

Para una v.a. X, el valor esperado o esperanza (**expected value** or **expectation**) corresponde al 1er momento de X, denotado por μ_X o μ o $\mathbb{E}(X)$, y se interpretará como el promedio de los resultados aleatorios del exp.

Para $n \geq 1$, n entero, el <u>n-ésimo momento de X</u> se define como $\mathbb{E}[X^n]$ y el <u>n-ésimo momento central de X</u> como $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^n]$.

— o —

<u>**Error relativo**</u> $= \dfrac{|\text{valor real} - \text{valor aproximado}|}{|\text{valor real}|}$

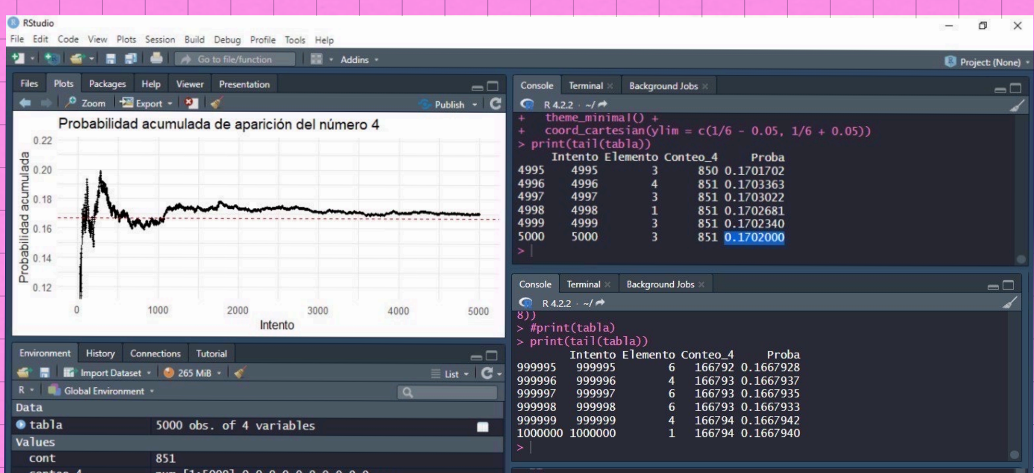
— o —

<u>**Frecuencia relativa**</u>: número de veces que ocurrió el evento de interés entre el número total de repeticiones del experimento.

<u>*ejemplo*</u>:

Un experimento consiste en lanzar un dado justo. Sea A el evento en el que ocurre que la cara superior del dado es 4. La probabilidad teórica resulta 1/6 y vemos que, simulando 5,000 tiros la probabilidad empírica ronda por 0.1702 que implica un error relativo de 2.12%. Al aumentar el número de tiros a 1'000,000 la probabilidad empírica se acerca aún más a la probabilidad teórica reduciendo el error a tan solo 0.0764%. ü

Aquí se ilustra como la probabilidad teórica puede interpretarse como el valor esperado de la frecuencia relativa de un evento, cuando éste se repite muchas veces. Por lo tanto, la esperanza de una variable indicadora del evento A no sólo coincide con la probabilidad de que ocurra A, sino que también se interpreta como el promedio empírico de muchas observaciones de dicha variable.



¿Cómo vamos a calcular la esperanza?

Para v.a. DISCRETAS, $\mathbb{E}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbb{P}(X = x_i)$

Para v.a. CONTINUAS, $\mathbb{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) \, dx$

Para v.a. MIXTAS usaremos una combinación de las ant.

<u>NOTA</u>: Existirán v.a. para las que $\mathbb{E}(X) = +\infty$ o $\mathbb{E}(X) = -\infty$ pero estos casos no suelen incluirse al nivel del ex. P.

La esperanza es una función lineal por lo que se cumple para a, b son constantes

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b$$

De manera general, si $h_i(X)$ es una función que transforma a la v.a. X para $i \in \{1,2\}$ entonces para a_1, a_2, b ctes.:

$$\mathbb{E}[a_1 h_1(x) + a_2 h_2(x) + b] = a_1 \mathbb{E}(h_1(x)) + a_2 \mathbb{E}(h_2(x)) + b$$

Si tenemos una v.a. X continua con soporte en $[a, \infty)$ ent.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)\,dx = \int_{a}^{\infty} x \cdot f_x(x)\,dx = x(-S(x))\Big|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} S(x)\,dx$$

$$= -x(1 - F(x))\Big|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} (1 - F(x))\,dx$$

$$= 0 - [-a(1 - \cancel{F(a)}^{0})] + \int_a^{\infty} (1 - F(x))\,dx$$

$$= a + \int_a^{\infty} (1 - F(x))\,dx$$

Si $X \in [a, \infty) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = a + \int_a^{\infty} (1 - F(x))\,dx$

Si $a = 0$ ent. para $X \in [0, \infty)$, $\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))\,dx$

$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$

$-\frac{d}{dx} S(x) = f(x)$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$u = x \quad du = dx$

$v = -S(x) \quad dv = f(x)$

Estudiamos con anterioridad que dada una v.a. X y un evento A, podemos definir la distribución condicional de x dado A. Ahora definimos la esperanza condicionada a un evento A como

Para v.a. DISCRETAS, $\mathbb{E}[X|A] = \sum x \cdot f(x|A)$

Para v.a. CONTINUAS, $\mathbb{E}[X|A] = \int x \cdot f(x|A)$

con la restricción de que la suma/integral solo se hará sobre el conjunto de valores para los que esté definida la probabilidad condicional.

Recordamos también la ley de probabilidad total y formulamos la ley de esperanza total (**law of total expectation**) como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X | A_i)\, \mathbb{P}(A_i)$$

donde $A_1, A_2, \dots, A_n$ forman una partición de Ω.

Considerando que para cualquier evento B, B y B' forman una partición de Ω, se da el caso:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}(X|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{E}(X|B')\,\mathbb{P}(B')$$

ĀxM
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

An insurance policy on an electrical device pays a benefit of 4000 if the device fails during the first year. The amount of the benefit decreases by 1000 each successive year until it reaches 0. If the device has not failed by the beginning of any given year, the probability of failure during that year is 0.4.

Calculate the expected benefit under this policy.

solución:

Sea X la v.a. que modela el monto de pago bajo esta póliza.

$$\mathbb{P}(X=x) = \begin{cases} 0.4 & \text{si} \quad x = 4000 \\ (1-0.4)(0.4) & \text{si} \quad x = 3000 \\ (1-0.4)^2(0.4) & \text{si} \quad x = 2000 \\ (1-0.4)^3(0.4) & \text{si} \quad x = 1000 \\ (1-0.4)^4 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = 4000(0.4) + 3000(0.6)(0.4) + 2000(0.6)^2(0.4)$$

$$+ 1000(0.6)^3(0.4) + 0(0.6)^4 = 2694.4$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 2{,}694.4}$$

Let X have the density function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{k^2}, & \text{for } 0 \leq x \leq k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

For what value of k is the expected value of X equal to 2?

solución:

$$2 = \mathbb{E}(X) = \int_0^k x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^k x \cdot \frac{2x}{k^2}\,dx = \frac{2}{k^2}\int_0^k x^2\,dx$$

$$= \frac{2}{k^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^k = \frac{2}{k^2} \cdot \frac{k^3}{3} = \frac{2}{3} \cdot k \rightarrow \cancel{2} = \frac{\cancel{2}}{3} k$$

$$\rightarrow 1 = \frac{1}{3} \cdot k \rightarrow \boxed{k = 3}$$

ĀxM
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

2.7 Varianza y desviación estándar

En probabilidad, la manera en la que medimos qué tanto se alejan las observaciones de la media es a través de la varianza (**variance**). Para una v.a. X, este valor se denota por σ^2, σ_x^2, $Var(x)$ o por $V(x)$.

$$Var(x) = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}(x))^2]$$

pero obsérvese que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(x-\mathbb{E}(x))^2] &= \mathbb{E}[x^2 - 2\cdot x\cdot \mathbb{E}(x) + \mathbb{E}(x)^2] \\
&= \mathbb{E}[x^2] - 2\mathbb{E}(x)\mathbb{E}(x) + \mathbb{E}(x)^2 \\
&= \mathbb{E}(x^2) - 2\mathbb{E}(x)^2 + \mathbb{E}(x)^2 \\
&= \mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(X)^2
\end{aligned}$$

así que

$$Var(x) = \mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(x)^2$$

NOTA: Cuando la esperanza de una v.a. X no converge, $Var(x) = +\infty$.

A diferencia de la esperanza, la varianza no es lineal. Dadas dos constantes a y b, para cualquier v.a. X

$$Var(a + bX) = b^2\, Var(x)$$

La desviación estándar de una v.a. X (**standard deviation**) es la raíz cuadrada de la varianza y se denota por σ, σ_x, $\sqrt{Var(x)}$.

El coeficiente de variación (**coefficient of variation**) de X es $\sigma_x / \mathbb{E}(x)$ y se usa para medir la dispersión relativa de X respecto a su media.

ĀxM
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

The number of claims X on a health insurance policy is a random variable with $E[X^2]=61$ and $E[(X-1)^2]=47$.

Calculate the standard deviation of the number of claims.

solución:

$$Var(x) = \mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(x)^2$$

* $\mathbb{E}[(x-1)^2]$ No es el 2do momento central

$$47 = \mathbb{E}[(x-1)^2] = \mathbb{E}[x^2 - 2x + 1]$$
$$= \mathbb{E}(x^2) - 2\mathbb{E}(x) + 1$$
$$= 61 - 2\mathbb{E}(x) + 1$$

$$\rightarrow 47 = 61 - 2\mathbb{E}(x) + 1 \rightarrow \mathbb{E}(x) = \frac{61-47+1}{2} = 7.5$$

$$\rightarrow Var(x) = 61 - (7.5)^2 = 4.75$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma_x = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{4.75} = 2.1794}$$

A recent study indicates that the annual cost of maintaining and repairing a car in a town in Ontario averages 200 with a variance of 260.

A tax of 20% is introduced on all items associated with the maintenance and repair of cars (i.e., everything is made 20% more expensive).

Calculate the variance of the annual cost of maintaining and repairing a car after the tax is introduced.

solución:

Sea X el costo anual de mantener y reparar un coche.
$\mathbb{E}(X) = 200$
$Var(X) = 260$

$$Var(X + 20\% X) = Var(1.2X) = \mathbb{E}((1.2X)^2) - \mathbb{E}(1.2X)^2$$

$$\mathbb{E}((1.2x)^2) = \mathbb{E}(1.2^2 \cdot X^2) = 1.2^2 \cdot \mathbb{E}(X^2) = (1.2)^2(260 + 200^2)$$

$Var(x) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(x)^2$
$\rightarrow \mathbb{E}(X^2) = Var(x) + \mathbb{E}(X)^2$

$$\rightarrow \mathbb{E}[(1.2X)^2] = 57{,}974.4$$

$$\mathbb{E}(1.2X) = 1.2\,\mathbb{E}(X) = 1.2(200) = 240$$

$$\boxed{Var(1.2X) = 57{,}974.4 - (240)^2 = 374.4}$$

Otra alternativa más directo: $Var(1.2X) = (1.2)^2\, Var(X) = (1.2)^2(260)$ ü

A X M
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

An actuary has discovered that policyholders are three times as likely to file two claims as to file four claims. The number of claims follows the following probability mass function,

$$P(N=n)=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!},$$

with $\lambda>0$, for $n\in\{0,1,2,3,\ldots\}$.

Calculate the variance of the number of claims filed.

solución:

Sea N la v.a. que cuenta el número de reclamaciones.

$$3\,N_4 = N_2 \rightarrow 3\,\mathbb{P}(N=4)=\mathbb{P}(N=2)$$

$$\mathbb{E}(N)=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot\mathbb{P}(N=n)=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{n}\cdot\lambda^n}{\cancel{n}\cdot(n-1)!}=e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\overset{k=n-1}{=}e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{k!}$$

$$=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda}=\lambda\cdot e^{-\lambda+\lambda}=\lambda$$

Serie de Taylor
de la función exponencial
centrada en el cero

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}=e^x$$

$$\boxed{\mathbb{E}(N)=\lambda}$$

$$\mathbb{E}(N^2)=\mathbb{E}(N(N-1))+\mathbb{E}(N)$$

$$\mathbb{E}(N(N-1))=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\cdot\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}=e^{-\lambda}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cancel{n(n-1)}\,\lambda^n}{\cancel{n(n-1)}(n-2)!}$$

$$\overset{j=n-2}{=}e^{-\lambda}\cdot\lambda^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda^2 e^{\lambda}=\lambda^2$$

$$\boxed{\mathbb{E}(N^2)=\lambda^2+\lambda}$$

$$Var(N)=\mathbb{E}(N^2)-\mathbb{E}(N)^2=(\lambda^2+\lambda)-\lambda^2=\lambda \quad \boxed{Var(N)=\lambda}$$

$$3\cdot\mathbb{P}(N=4)=\mathbb{P}(N=2)\rightarrow 3\cdot\frac{\lambda^4\cancel{e^{-\lambda}}}{4!}=\frac{\lambda^2\cancel{e^{-\lambda}}}{2!}$$

$$\rightarrow\frac{\cancel{3}\cdot\lambda^2\cdot\cancel{\lambda^2}}{4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}=\frac{\cancel{\lambda^2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{1}}\rightarrow\frac{\lambda^2}{4}=1\rightarrow\lambda^2=4\rightarrow\lambda=\pm2$$

$$\rightarrow\boxed{\lambda=2}\rightarrow\boxed{Var(N)=\lambda=2}$$