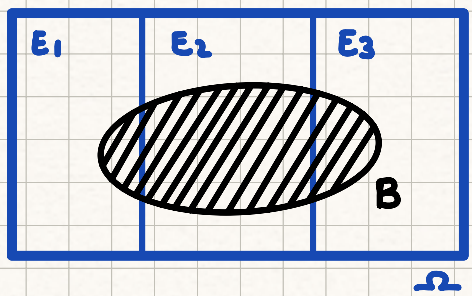
10 - septiembre - 2025

En el caso en el que $A = \Omega$, entonces podemos expresar a cualquier evento como una unión de conjuntos disjuntos.



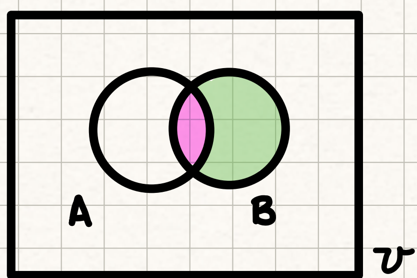
$E_1 \cap E_2 = \emptyset$
$E_2 \cap E_3 = \emptyset$
$E_1 \cap E_3 = \emptyset$

$E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \Omega$

$$B = (B \cap E_1) \cup (B \cap E_2) \cup (B \cap E_3)$$

Tengamos muy presente que si $A \cup A' = \Omega$ y $A \cap A' = \emptyset$ para cualquier conjunto A en Ω, entonces si B es otro conjunto en Ω se tiene que

$$\boxed{B = (B \cap A) \cup (B \cap A')}$$



NOTA: A y A' forman una partición de Ω pero son $(B \cap A)$ y $(B \cap A')$ los que forman una partición de B.

1.2 Función de probabilidad

A cada resultado del experimento aleatorio podemos asignarle un "peso" proporcional a que tan viable es obtenerlo a través de la función de probabilidad $\mathbb{P}$/P/Pr.

Así, si A es un evento compuesto por $a_1, a_2, \dots, a_n$ puntos muestrales luego

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(a_1) + \mathbb{P}(a_2) + \dots + \mathbb{P}(a_n)$$

La función $\mathbb{P}$ cumple ciertas propiedades...

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

3) $\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A)$ / $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A')$

4.1) Si $C_1, C_2, \dots, C_m$ son eventos mutuamente excluyentes

ent. $\mathbb{P}(C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m) = \mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}(C_2) + \dots + \mathbb{P}(C_m)$

4.2) Si $E_1, E_2, \dots, E_k$ forman una partición de Ω
ent. para cualquier $B \subset \Omega$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap E_1) + \mathbb{P}(B \cap E_2) + \dots + \mathbb{P}(B \cap E_k)$$

4.3) En particular, $\boxed{\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap E) + \mathbb{P}(B \cap E')}$

5) Si $A \subset B$ ent. $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

6) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = {} & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

— ∘ —

Para calcular la probabilidad de un evento A cuando Ω es un conjunto finito en el que todos los resultados del experimento aleatorio tengan la misma probabilidad de ocurrir usaremos que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

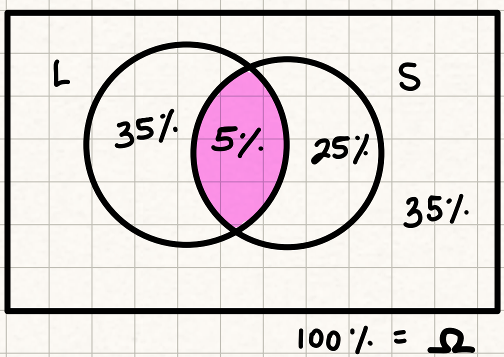
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

The probability that a visit to a primary care physician's (PCP) office results in neither lab work nor referral to a specialist is 35%. Of those coming to a PCP's office, 30% are referred to specialists and 40% require lab work.

Calculate the probability that a visit to a PCP's office results in both lab work and referral to a specialist.

(A) 0.05
(B) 0.12
(C) 0.18
(D) 0.25
(E) 0.35

solución:



$\mathbb{P}(S) = 30\%$

$\mathbb{P}(L) = 40\%$

$\rightarrow \mathbb{P}(S \cap L) \neq 0$

$\mathbb{P}((L \cup S)^c) = \mathbb{P}(L^c \cap S^c) = 35\%$

$\rightarrow \mathbb{P}(L \cup S) = 100\% - 35\% = 65\%$

$\rightarrow \mathbb{P}(L \cup S) = \mathbb{P}(L) + \mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(L \cap S)$

$\rightarrow \mathbb{P}(L \cap S) = \mathbb{P}(L) + \mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(L \cup S)$

$\rightarrow \boxed{\mathbb{P}(L \cap S) = 40\% + 30\% - 65\% = 5\%}$

ĀxM
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

You are given $P[A \cup B] = 0.7$ and $P[A \cup B'] = 0.9$.

Calculate $P[A]$.

solución:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B')$$

$$0.7 = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$+ \quad 0.9 = \mathbb{P}(A \cup B') = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B') - \mathbb{P}(A \cap B')$$

$$1.6 = 2\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B') - [\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B')]$$

$$\rightarrow 1.6 = 2\mathbb{P}(A) + \cancel{\mathbb{P}(B)} + 1 - \cancel{\mathbb{P}(B)} - \mathbb{P}(A)$$

$$\rightarrow 1.6 = \mathbb{P}(A) + 1$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(A) = 1.6 - 1$$

$$\rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A) = 0.6}$$

A mattress store sells only king, queen and twin-size mattresses. Sales records at the store indicate that the number of queen-size mattresses sold is one-fourth the number of king and twin-size mattresses combined. Records also indicate that three times as many king-size mattresses are sold as twin-size mattresses.

Calculate the probability that the next mattress sold is either king or queen-size.

(A) 0.12
(B) 0.15
(C) 0.80
(D) 0.85
(E) 0.95

$3n(T) = n(K)$

solución:

Sean K el evento que describe vender un colchón King,
Q " Queen
y T " Twin.

i) $n(Q) = \frac{1}{4}(n(K) + n(T))$

ii) $\boxed{\cancel{n(K) = \frac{1}{3}n(T) \rightarrow 3n(K) = n(T)}}$

$3n(T) = n(K)$

De i)

$$n(Q) = \frac{1}{4}(n(K) + n(T)) = \frac{1}{4}(3n(T) + n(T)) = n(T)$$

$$\boxed{n(Q) = n(T)}$$

$$\mathbb{P}(K \cup Q) = \mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(Q) - \underbrace{\mathbb{P}(K \cap Q)}_{0}$$

$$= \frac{n(K)}{n(\Omega)} + \frac{n(Q)}{n(\Omega)}$$

$$= \frac{3n(T)}{n(\Omega)} + \frac{n(T)}{n(\Omega)} = \frac{4n(T)}{n(\Omega)}$$

$$= \frac{4n(T)}{n(K) + n(T) + n(Q)} = \frac{4\cancel{n(T)}}{5\cancel{n(T)}} = \frac{4}{5}$$

$$n(\Omega) = n(T) + n(K) + n(Q) = n(T) + 3n(T) + n(T) = 5n(T)$$

$$\boxed{\mathbb{P}(K \cup Q) = 4/5 = 0.8 = 80\% \quad \text{C}}$$

A x M
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

1.3 Probabilidad condicional

Definimos a la probabilidad condicional (**conditional prob.**) de un evento A dado un evento B como

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

siempre y cuando $\mathbb{P}(B) > 0$.

Empleamos probabilidad condicional cuando los eventos pudieran estar relacionados de alguna forma. la probabilidad de un evento A cambia cuando se tiene la información adicional de que el evento B ha ocurrido.

An experiment consists of rolling a die. Let A be the event that the face shows the number 2. Let B be the event that the face shows an even number. Find P(A | B).

solución:

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{matrix}}_{\ \Omega}$$

espacio muestral: $\{1,2,3,4,5,6\}$

evento A: $\{2\}$

evento B: $\{2,4,6\}$

evento $A\cap B$: $\{2\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\dfrac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}}{\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{\dfrac{1}{\cancel{6}}}{\dfrac{3}{\cancel{6}}} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \cancel{1} & 2 \\ \cancel{3} & 4 \\ \cancel{5} & 6 \end{matrix}}_{\ \Omega^*}$$

$\mathbb{P}(\text{"obtener 2"}) = \frac{1}{3}$

$\Omega = \{\cancel{1},2,\cancel{3},4,\cancel{5},6\}$

$\mathbb{P}(3) = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{3}$

$0 \leq \mathbb{P}(A|B) \leq 1$

$\mathbb{P}(A|A) = 1$

$\mathbb{P}(A|\Omega) = \mathbb{P}(A)$

$\mathbb{P}(\Omega|A) = 1$

$\mathbb{P}(A'|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$

si $A \subset B$ ent.

$\mathbb{P}(B|A) = 1$

$$\mathbb{P}(A\cup B|C) = \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(B|C) - \mathbb{P}(A\cap B|C)$$

$$\mathbb{P}(A_1\cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B)$$

sii $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

i) You are given $P(A) = 0.30$, $P(B) = 0.25$ and $P(B|A) = 0.50$.

Calculate $P\left(A^C \cap B^C\right)$

ii) Suppose $P(A) = 0.60$, $P(B) = 0.47$ and $P(A \cap B) = 0.19$.

Calculate $P\left(A|B^C\right)$ ¿ $\mathbb{P}(A \cap B^c)$?

solución:

i) $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B)$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$$0.5 = \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{0.30}$$

$\rightarrow (0.5)(0.3) = \mathbb{P}(A \cap B)$

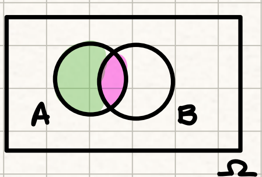
$\rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0.15$

$\rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = 0.3 + 0.25 - 0.15 = 0.4$

$\rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - 0.4 = 0.6}$

ii) $$\mathbb{P}(A|B^c) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{1 - \mathbb{P}(B)}$$

$\mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - 0.47 = 0.53$



$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$

$\rightarrow \mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.41$

$$\rightarrow \mathbb{P}(A|B^c) = \frac{0.41}{0.53} = \frac{41}{53}$$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

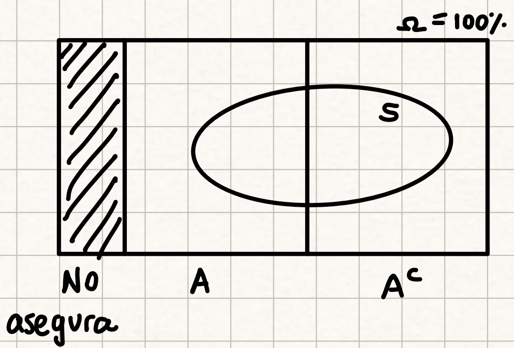
$\boxed{\mathbb{P}(A|B^c) = 0.7736}$

An insurance company examines its pool of auto insurance customers and gathers the following information:

(i) All customers insure at least one car. ≥ 1
(ii) 70% of the customers insure more than one car. > 1
(iii) 20% of the customers insure a sports car.
(iv) Of those customers who insure more than one car, 15% insure a sports car.

Calculate the probability that a randomly selected customer insures exactly one car and that car is not a sports car. $\mathbb{P}(A \cap S^c)$

solución:



A: aseguran exactamente un coche

A^c: aseguran más de un coche

i) $\mathbb{P}(A \cup A^c) = \Omega$; $A \cap A' = \emptyset$

iii) $\mathbb{P}(S) = 0.2$

ii) $\mathbb{P}(A^c) = 0.7$; $\mathbb{P}(A) = 0.3$

iv) $\mathbb{P}(S \mid A^c) = 0.15$

iv) $\mathbb{P}(S \mid A^c) = \dfrac{\mathbb{P}(S \cap A^c)}{\mathbb{P}(A^c)} \rightarrow \mathbb{P}(S \cap A^c) = (0.15)(0.7)$

$\rightarrow \mathbb{P}(S \cap A^c) = 0.105$

$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S \cap A) + \mathbb{P}(S \cap A^c) \rightarrow \mathbb{P}(S \cap A) = 0.2 - 0.105$

$\rightarrow \mathbb{P}(S \cap A) = 0.095$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap S) + \mathbb{P}(A \cap S^c) \longrightarrow \mathbb{P}(A \cap S^c) = 0.3 - 0.095$

$\rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A \cap S^c) = 0.205}$

1.3.1 Probabilidad Total

Habiendo cubierto el concepto de probabilidad condicional, introducimos ahora la ley de probabilidad total (**law of total probability**).

Esta herramienta se emplea cuando no podemos calcular de manera directa con qué probabilidad ocurrirá un evento, pero sí tenemos manera de conocer cómo es la ocurrencia del evento bajo ciertas condiciones.

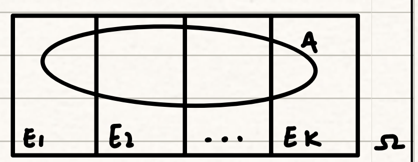
Por ejemplo, en el experimento en el que se observa si un estudiante se queda dormido en clase, queremos calcular con qué probabilidad ocurre este fenómeno pero sólo sabemos que de los alumnos que duermen menos de 5 h, el 60% se queda dormido durante la clase de proba. En cambio, de los que duermen al menos 5 h, sólo el 10% duerme durante la clase.

Si el 80% de los estudiantes duermen menos de 5h, ¿con que frecuencia un alumno se quedará dormido en la clase?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Dormido}) &= \mathbb{P}(<5h)\,\mathbb{P}(D \mid <5h) + \mathbb{P}(\geq 5h)\,\mathbb{P}(D \mid \geq 5h)\\ &= (0.8)(0.6) + (0.2)(0.1)\\ &= 0.5 = 50\%\end{aligned}$$

De manera general, si $E_1, E_2, \ldots, E_k$ forman una partición del espacio muestral Ω y A es un evento entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap \Omega)\\ &= \mathbb{P}(A \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k))\\ &= \mathbb{P}((A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \ldots \cup (A \cap E_k))\\ &= \mathbb{P}(A \cap E_1) + \mathbb{P}(A \cap E_2) + \ldots + \mathbb{P}(A \cap E_k)\\ &= \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(A \mid E_1) + \mathbb{P}(E_2)\mathbb{P}(A \mid E_2) + \ldots + \mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}(A \mid E_k)\\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(E_i)\,\mathbb{P}(A \mid E_i)\end{aligned}$$



Si

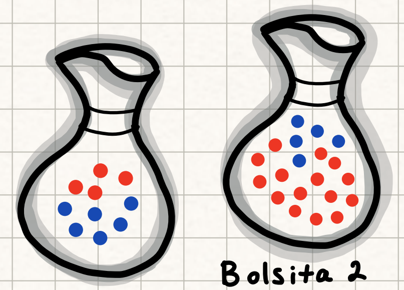
$$\mathbb{P}(A \mid E_i) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E_i)}{\mathbb{P}(E_i)}$$

entonces

$$\mathbb{P}(A \cap E_i) = \mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}(A \mid E_i)$$

A bag contains 10 balls: 4 red and 6 blue. A second bag contains 15 red balls and 5 blue balls. A bag is chosen at random, and a ball is randomly selected from that bag.
Find the probability that the ball select is blue.

solución:



Bolsita 1
Total: 10

Bolsita 2
Total: 20

$$\mathbb{P}(\text{blue}) = \mathbb{P}(\text{blue} \mid B_1)\,\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(\text{blue} \mid B_2)\,\mathbb{P}(B_2)$$

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2} = 50\% = \mathbb{P}(B_2)$$

$$\mathbb{P}(\text{blue} \mid B_1) = \frac{6}{10}$$

$$\mathbb{P}(\text{blue} \mid B_2) = \frac{5}{20}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{blue}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)(6/10) + (1/2)(5/20) = 17/40}$$

1.3.2 Teorema de Bayes

Una extensión de probabilidad condicional que se le atribuye a Thomas Bayes establece cómo proceder si sabemos que un evento que ha ocurrido pudo originarse por varias causas, sean A, B, C.

La pregunta que se plantea es, ¿cuál es la probabilidad de que se haya tratado de la causa A dado que el evento ha ocurrido?

Siguiendo con el experimento de los alumnos dormilones, podríamos descubrir que Maury está dormida y ent. nos preguntamos... ¿con qué probabilidad Maury durmió al menos 5h?

$$\mathbb{P}(\geq 5h \mid \text{Dormida}) = \frac{\mathbb{P}(\geq 5h \cap D)}{\mathbb{P}(D)}$$

$$\mathbb{P}(\geq 5h \mid D)\,\mathbb{P}(D)$$

$$\mathbb{P}(D \mid \geq 5h)\,\mathbb{P}(\geq 5h)$$

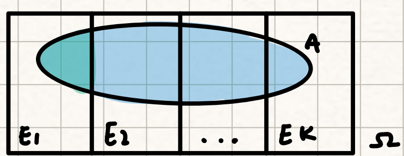
$$= \frac{\mathbb{P}(D \mid \geq 5h)\,\mathbb{P}(\geq 5h)}{\mathbb{P}(D)}$$

$$= \frac{(0.10)(0.2)}{(0.5)} = 0.04 = 4\%$$

De manera general, si $E_1, E_2, \dots, E_k$ forman una partición del espacio muestral Ω y A es un evento entonces

$$\mathbb{P}(E_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid E_i)\,\mathbb{P}(E_i)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A \mid E_i)\,\mathbb{P}(E_i)}{\mathbb{P}(A \mid E_1)\,\mathbb{P}(E_1) + \dots + \mathbb{P}(A \mid E_k)\,\mathbb{P}(E_k)}$$



In one company, 30% of males and 20% of females contribute to a supplemental retirement plan. Furthermore, 45% of the company's employees are female.

Calculate the probability that a randomly selected employee is female, given that this employee contributes to a supplemental retirement plan.

solución:

	En la compañía	Aportan al R
♂ males	100% − 45% = 55%	30%
♀ females	45%	20%

$$\mathbb{P}(♀ \mid R) = \frac{\mathbb{P}(♀ \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(R \mid ♀)\,\mathbb{P}(♀)}{\mathbb{P}(R \mid ♀)\,\mathbb{P}(♀) + \mathbb{P}(R \mid ♂)\,\mathbb{P}(♂)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(♀ \mid R) = \frac{(0.2)(0.45)}{(0.2)(0.45) + (0.3)(0.55)} \approx 0.3529}$$