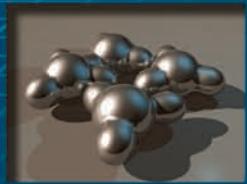


Segunda edición

Riesgos financieros y económicos

Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0$$



Francisco Venegas Martínez

Riesgos financieros y económicos

Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre

Segunda Edición

Francisco Venegas Martínez



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

Riesgos financieros y económicos

*Productos derivados y decisiones económicas
bajo incertidumbre, Segunda edición.*
Francisco Venegas Martínez

Presidente de Cengage Learning**Latinoamérica:**

Javier Arellano Gutiérrez

Director general México y**Centroamérica:**

Héctor Enrique Galindo Iturribarria

Director editorial Latinoamérica:

José Tomás Pérez Bonilla

Director de producción:

Raúl D. Zendejas Espejel

Editor senior:

Javier Reyes Martínez

Editora de producción:

Abril Vega Orozco

Composición tipográfica:

EDITEC S.A. de C.V.

© D.R. 2008 por Cengage Learning Editores,

S.A. de C.V.,

una Compañía de Cengage Learning, Inc.

Corporativo Santa Fe

Av. Santa Fe núm. 505, piso 12

Col. Cruz Manca, Santa Fe

C.P. 05349, México, D.F.

Cengage Learning™ es una marca registrada
usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de
este trabajo amparado por la Ley Federal del
Derecho de Autor, podrá ser reproducida,
transmitida, almacenada o utilizada en
cualquier forma o por cualquier medio, ya sea
gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo,
pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado,
reproducción, escaneo, digitalización,
grabación en audio, distribución en Internet,
distribución en redes de información o
almacenamiento y recopilación en sistemas
de información a excepción de lo permitido
en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal
del Derecho de Autor, sin el consentimiento
por escrito de la Editorial.

Datos para catalogación bibliográfica:

Venegas Martínez, Francisco.

Riesgos financieros y económicos.

*Productos derivados y decisiones económicas
bajo incertidumbre, Segunda edición.*

ISBN-13: 978-607-481-369-2

ISBN-10: 607-481-369-8

Visite nuestro sitio web en:

<http://latinoamerica.cengage.com>

COMENTARIOS SOBRE EL LIBRO

“Una vez más Francisco Venegas nos demuestra con hechos que no le gusta hacer las cosas a medias, siempre se lanza a profundidad. En este libro expone una gama muy amplia de temas en el campo de las finanzas modernas y no se conforma con tratar los temas de manera superficial. Su libro profundiza tanto en los aspectos teórico-conceptuales como en los prácticos. Estoy seguro que en breve éste será un clásico de las finanzas en el mundo de habla hispana.”

Enrique de Alba
Director de la División Académica de Actuaría, Estadística y Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México

“La literatura en español sobre economía financiera, que es la base de las finanzas es escasa y la que existe es poco rigurosa. Francisco Venegas es, hasta donde yo sé, la primera persona que realiza un gran esfuerzo para presentar un recorrido por este campo con gran rigurosidad y, a la vez, amabilidad para con los lectores. Es sin duda alguna, la primera referencia para aquellos interesados en la materia que deseen profundizar y, al mismo tiempo, entender los fundamentos de este campo de gran interés actual.”

Fausto Hernández Trillo
Profesor-Investigador del Centro de Investigación y Docencia Económicas
Director del Trimestre Económico

“El Dr. Francisco Venegas Martínez nos presenta una de las obras más importantes sobre el tratamiento de la incertidumbre en las decisiones económicas y financieras que toman los agentes que participan en los diferentes mercados. El Dr. Venegas Martínez, especialista en economía financiera y reiteradamente distinguido con los premios más importantes en dicha disciplina, ha escrito este libro orientado a la investigación y a la docencia de nivel avanzado en temas de macroeconomía estocástica y administración de riesgos. Se trata de una contribución fundamental a la economía financiera, tanto por situarse en la frontera del conocimiento, como por su calidad didáctica. Su incorporación a la bibliografía básica de los cursos de economía financiera y administración de riesgos es altamente recomendable por su contenido y su claridad.”

Fernando Antonio Noriega Ureña
Coordinador de la Maestría y el Doctorado en Ciencias Económicas
Universidad Autónoma Metropolitana

“Los mercados de instrumentos financieros derivados se han desarrollado de manera impresionante en las últimas décadas y México no ha sido la excepción. Un gran número de modelos de cobertura y fórmulas de valuación se utilizan diariamente en la operación de estos mercados. Quién mejor que Francisco Venegas, con una amplia trayectoria en docencia, investigación y trabajo práctico, para escribir de manera amena una obra que trata tanto los aspectos teóricos de estos instrumentos, sin descuidar el rigor analítico, así como su aplicación en los mercados financieros modernos, combinación que difícilmente se logra y que en su libro lo consigue.”

Jorge Alegría F.
Director General
MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S. A. de C. V.

“La Industria de los productos financieros derivados ha presentado un crecimiento de gran importancia en el mundo desde hace varias décadas. El uso de estos productos ha permitido a las empresas financieras y no financieras flexibilizar la administración de sus tesorerías y administrar los riesgos financieros que enfrentan. Este proceso ha requerido contar con capital humano especializado en estas áreas. Por ello, la obra del Dr. Francisco Venegas viene a contribuir en dicha capacitación. El contenido de esta obra sobre derivados y riesgos es muy completo y versátil, razón por la cual es una referencia obligada para los administradores de riesgos y para estudiantes de pregrado y posgrado. En una forma generosa y didáctica, el Dr. Venegas plantea en este libro su experiencia profesional y docente. Asimismo, proporciona un mapa completo de los complejos senderos matemáticos para la correcta utilización de los derivados.”

Jaime Díaz Tinoco
Director General de Asigna, Compensación y Liquidación
Cámara de Compensación del MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S. A. de C. V.

“Con rigor matemático el Dr. Francisco Venegas aborda de forma muy completa el tema de los riesgos financieros y económicos. Su experiencia académica, estudios e investigaciones de muchos años se incorporan afortunadamente en este libro, el cual representa una aportación bibliográfica en la materia de riesgos. La comprensión, medición y administración de los riesgos son aspectos de enorme relevancia en el entorno actual caracterizado por la complejidad, la globalización, la apertura económica y financiera y la automatización de los procesos y las operaciones. El conocimiento de estos temas es indispensable para la eficaz administración financiera y de la operación diaria; siendo la lectura del libro un requisito para un mejor aprovechamiento de las herramientas de cobertura y valuación.”

Pedro Zorrilla Velasco
Director General Adjunto
Bolsa Mexicana de Valores, S. A. de C. V.

“En esta obra el Dr. Venegas, como estudiioso, docente e investigador en administración de riesgos, proporciona las bases matemáticas de esta disciplina, exponiendo en forma clara y simple los conceptos primordiales de valuación y cobertura. Su libro es un trabajo comprensivo en riesgos financieros y económicos que fusiona el rigor con la intuición. El detalle con el que trata los modelos y los ejemplos concretos expande el universo de sus lectores mucho más allá de los artículos originales. Sin duda alguna, su libro se convertirá en una referencia básica sobre ingeniería financiera e instrumentos derivados.”

Maurilio Patiño García
Director de Administración de Riesgos
Bank of America, México

“Escrito por un respetado experto en riesgos, la obra del Dr. Francisco Venegas Martínez, estructurada lógica y didácticamente, comprende un amplio espectro de tópicos de las matemáticas financieras modernas y de la administración de riesgos financieros. Por la profundidad y amplitud con que el Dr. Venegas trata los avances más recientes en estos temas, este trabajo será una referencia obligada tanto para académicos como para financieros profesionales.”

Fausto Membrillo Hernández
Director Regional GARP México
Director General de Administración de Riesgos IPAB México

“Ante los incesantes cambios en los mercados internacionales y nacionales se presenta una revolución en la administración de riesgos. Adicionalmente, el restrictivo ambiente regulatorio ha incentivado el desarrollo de nuevos métodos y modelos para la medición de riesgos financieros. Las instituciones financieras están fijando nuevos estándares para el control de riesgos que requieren de mejores modelos de valuación. En una forma muy didáctica, el Dr. Francisco Venegas expone en este libro su experiencia en investigación y docencia. El autor logra llevar de la mano al lector desde los modelos matemáticos más sencillos hasta los más sofisticados, pasando por múltiples aplicaciones prácticas en materia de medición de riesgos.”

Osvaldo Ascencio Gascón
Director Adjunto de Riesgos de Crédito y Liquidez
Scotiabank Inverlat

“El avance que en las últimas décadas han tenido las técnicas de administración de riesgos de mercados, así como la regulación que ha impulsado el marco de Basilea II en temas de riesgo crédito y operacional, obligan a estudiados y profesionales de la administración de riesgos a contar con un marco de referencia que conjunte los fundamentos de matemáticas financieras modernas, con un tratamiento comprensivo de los diversos riesgos que enfrentan las corporaciones. La obra del Dr. Venegas nos proporciona una visión exhaustiva de los conocimientos necesarios para contar con una formación integral, tanto en el uso de modelos matemáticos como en el análisis de los distintos tipos de riesgos financieros, constituyéndose así en una referencia obligada para todo profesional o académico del ramo.”

Edgar I. Castillo Hernández
Director de Modelos y Metodologías de Administración de Riesgos
BBVA Bancomer

“La diferencia de esta obra con otras similares, es su contenido explícito respecto a los temas financieros relevantes. Es una referencia completa y formal para el análisis de riesgos financieros y económicos. Los lectores que tengan la oportunidad de adentrarse en ella, encontrarán una verdadera guía para comprender las bases de los nuevos enfoques cuantitativos en el mundo de las finanzas y la economía, con un especial enfoque en la administración de riesgos financieros con productos derivados.”

Jesús Bravo Pliego
Director de Riesgos de Mercado
Grupo Financiero HSBC México

“Los administradores de riesgos seguramente encontrarán en la obra del Dr. Francisco Venegas Martínez el apoyo necesario para el desarrollo de sus tareas diarias. La sencillez con la que se tratan los temas en su libro facilita la construcción de estrategias y modelos para la administración integral de riesgos de las instituciones financieras. Esta obra es un esfuerzo formidable del autor que se agradece profundamente.”

Román Vega Martínez
Subdirector de Administración de Riesgos
Grupo Financiero Inbursa

PRÓLOGO (FOREWORD)

In this book, Professor Venegas-Martínez makes a compendium of his long career as teacher, researcher and consultant in areas such as Operations Research, Mathematics, Statistics, Economics and Finance. His book departs from the classic models, the origin of the financial mathematics and the continuous-time economics, arriving at those contemporary discussions that enhance the state of the art. Professor Venegas-Martínez uses a clear and plain language belonging to the teacher who deeply understands the fundamental ideas, emphasizing the essential links among them, and who has the sensitivity to take some additional minutes to explain the details that most original papers omit. His book is a comprehensive treatise on financial and economic risks, combining mathematical rigorousness with practical intuition, and translating formal language into simple words to the reader. Needless to say, this work will become an obligate reference in financial risk management and stochastic economics.

Arnold Zellner
 Professor Emeritus of Economics and Statistics
 Graduate School of Business
 University of Chicago
 January, 2006

En este libro, el profesor Venegas Martínez hace un recuento de su amplia trayectoria como profesor, investigador y consultor en áreas tales como investigación de operaciones, matemáticas, estadística, economía y finanzas. Su libro inicia con los modelos clásicos, el origen de las matemáticas financieras y la economía en tiempo continuo, hasta alcanzar aquellas discusiones contemporáneas que incrementan la frontera del conocimiento. El profesor Venegas Martínez utiliza un lenguaje claro y sencillo perteneciente al docente que entiende profundamente las ideas fundamentales, acentuando las relaciones esenciales entre ellas, y que tiene la sensibilidad para tomar algunos minutos a fin de explicar los detalles que la mayoría de los artículos originales omiten. Su libro es un tratado exhaustivo sobre riesgos financieros y económicos, el cual combina el rigor matemático con la intuición práctica, y traduce el lenguaje formal en palabras simples para el lector. Seguramente, esta obra se convertirá en una referencia obligada en la administración de riesgos financieros y la economía estocástica.

Arnold Zellner
 Profesor Emérito de Economía y Estadística
 Escuela de Posgrado en Negocios
 Universidad de Chicago
 Enero, 2006

PREFACIO

Por favor toma unos minutos y léeme

A principios de la década de los sesenta, el preeminente economista Paul Samuelson, en una visita a la “Sorbonne” de París, durante el tradicional “tour” que se ofrece a los conferencistas invitados para conocer la Universidad, encontró casualmente en la biblioteca la tesis de doctorado en matemáticas de Louis Bachelier (1870-1946), titulada “Théorie de la Spéculation” y presentada en 1900. La lectura de Paul Samuelson de esta tesis, la cual había permanecido en el anonimato durante más de 60 años, y las investigaciones posteriores de Samuelson constituyen el inicio de un nuevo paradigma sobre el riesgo de mercado y su cobertura con productos derivados.

Muchos años después, en 1997, Robert Merton y Myron Scholes comparten el premio Nobel de economía por sus contribuciones a la teoría de valuación de productos derivados y su aplicación en la cobertura del riesgo de mercado. Lamentablemente, Fischer Black (1938-1995), con quien Myron Scholes participó en la investigación laureada, había fallecido dos años antes. Este reconocimiento, sin duda, revitalizó el paradigma sobre la administración de riesgos de mercado.

Este libro proporciona una visión alternativa de las finanzas y la economía que reconoce explícitamente el papel que el riesgo y la incertidumbre desempeñan en las decisiones de portafolio y consumo de los agentes económicos. Asimismo, esta visión resalta que cuando estos agentes tienen acceso a mercados de productos derivados (seguros contra contingencias financieras), entonces los riesgos asociados a diversas variables económicas y financieras pueden administrarse, es decir, pueden reducirse y en el mejor de los casos eliminarse. En un intento de fomentar la cultura de la administración de riesgos, el libro reúne para su estudio diversas herramientas, modelos y técnicas útiles en la identificación, cuantificación, prevención y control de los diferentes riesgos a los que los agentes están expuestos.

El objetivo principal de esta obra consiste en presentar de manera simple y atractiva el análisis de riesgos financieros y económicos, ya que la mayor parte de la literatura especializada sobre estos temas contiene desarrollos matemáticos muy sofisticados y con escasa conexión con la intuición y la práctica. El reto es llevar de la mano al lector por un camino ameno, lleno de intuición y explicaciones didácticas que lo inviten a seguir incursionando en el apasionante mundo de la administración de riesgos, aun cuando no cuente con un conocimiento avanzado en matemáticas.

Algunas características de este libro

Una característica esencial de este libro es el uso de un lenguaje sencillo y claro, sin descuidar el rigor científico. En un intento de autosuficiencia, el libro proporciona los prerrequisitos necesarios para el análisis de riesgos financieros y el estudio de los modelos económicos de riesgos. Los detalles, parte crucial de los resultados analíticos, se proporcionan sin escatimar espacio con el fin de que el lector no pierda continuidad en su estudio. Asimismo, para entender al proceso evolutivo de los conceptos de derivado y cobertura, el libro hace recuentos históricos sobre las contribuciones en el área de riesgos por parte de distintos científicos.

Por último, el contenido de esta obra se ha enriquecido con múltiples aplicaciones y ejercicios ilustrativos. El libro contiene aproximadamente 500 ejercicios, los cuales se encuentran al final de cada capítulo. Estos ejercicios varían en grado de dificultad y los hay desde los muy sencillos hasta los que llegan a ser todo un desafío para el lector; en la mayoría de ejercicios se incluyen sus soluciones.

A quién va dirigido este libro

Los intermediarios y reguladores financieros demandan cada vez más capital humano especializado en las áreas de riesgos. Este libro pretende ser una referencia para aquellos que deseen entender los fundamentos de la administración de riesgos, así como para los interesados en profundizar en esta disciplina. El material del libro es muy versátil y está diseñado para cubrir una amplia gama de tópicos, por lo que puede utilizarse como texto en diversas asignaturas relacionadas con la administración de riesgos de los últimos semestres de las carreras de economía, finanzas, actuaria, matemáticas, ingeniería industrial, administración financiera y otras disciplinas afines con el área de negocios. Asimismo, el libro contiene material avanzado para posgrados en economía, finanzas, matemáticas, matemáticas financieras, investigación de operaciones, etcétera.

La herramienta principal de este libro: el movimiento Browniano

En 1827, el botánico escocés Robert Brown (1773-1858) examinaba partículas de polen en el microscopio y observó que cuando éstas se encontraban suspendidas en agua se movían sin cesar en forma errática. No fue sino hasta principios del siglo XX cuando se demostró que este movimiento irregular se debía al golpeteo constante de las moléculas invisibles de agua sobre las partículas visibles de polen. En 1905, Albert Einstein escribió un artículo sobre mecánica estadística que proporciona la formulación matemática del movimiento Browniano, de la cual se desprende que la dispersión promedio del desplazamiento de la partícula, en un tiempo dado, es proporcional a dicho tiempo. No obstante, en 1900, Louis Bachelier, abordando un problema completamente diferente al del movimiento errático de partículas, en su tesis doctoral sobre el modelado del comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la bolsa de París se anticipó a Einstein proporcionando un planteamiento matemático del movimiento Browniano, aunque esta contribución permaneció en el anonimato durante más 60 años.

A partir del encuentro fortuito de Samuelson con el trabajo de Bachelier y, más recientemente, con las investigaciones de Merton, Black y Scholes, el movimiento Browniano, así como sus aspectos teóricos y prácticos, han sido objeto de numerosos estudios en muchas y muy diversas áreas de las finanzas y la economía. Sin lugar a dudas, el movimiento Browniano se encuentra implícita o explícitamente en casi toda la teoría financiera y económica en tiempo continuo y en ambientes estocásticos.

Estructura del libro

El contenido de este libro está organizado como sigue. La obra contiene 91 capítulos divididos en 19 partes. La parte I presenta el trabajo de Robert Brown sobre el movimiento errático de partículas de polen en el agua. La parte II revisa los prerrequisitos necesarios para el análisis de riesgos financieros. La parte III presenta el trabajo desarrollado por los clásicos: Louis Bachelier, Paul Samuelson, Fischer Black, Myron Scholes y Robert C. Merton. En la parte IV se introducen los derivados financieros simples. La parte V trata sobre la valuación de opciones con volatilidad estocástica. En el transcurso de la parte VI se valúan las opciones americanas. La parte VII reúne diversos tópicos avanzados de valuación de opciones. A través de la parte VIII se estudian diferentes tipos de opciones exóticas. En la parte IX se introducen los modelos de tasas corta y forward para la valuación de bonos cupón cero. En la parte X se revisan algunas técnicas de ajuste y estimación de curvas de rendimiento de bonos cupón cero. En el transcurso de la parte XI se lleva a cabo un análisis comparativo sobre las diferentes medidas de riesgo y se discute el concepto de medida coherente de riesgo. En la parte XII se estudian los conceptos de riesgo crédito y derivados de crédito. El contenido de la parte XIII consiste en la metodología de opciones reales. En la parte XIV se valúan diversos derivados de tasas de interés y notas estructuradas. En la parte XV se presentan varios métodos numéricos para valuar productos derivados. En la parte XVI se introduce la noción de riesgo operativo. En el transcurso de la parte XVII se extiende el análisis de valor en riesgo para incluir valores extremos. En la parte XVIII se establecen los prerrequisitos para el estudio de los modelos económicos de riesgos, los cuales comprenden fundamentalmente diversas técnicas de optimización dinámica, ya sea determinista o estocástica. Por último en la parte XIX, se estudian distintos modelos económicos de riesgos en los que la noción de agentes racionales maximizadores de utilidad desempeña un papel primordial.

Agradecimientos

La elaboración del presente libro ha tomado diez años. Diez largos años de arduo trabajo y de gran entusiasmo. Cuando se comienza a escribir un libro, el autor es el amo de la situación, pero al ir avanzando pierde dominio y termina siendo el esclavo. La atención y el tiempo que demanda el libro se convierten en una cadena que impide moverse en cualquier otra dirección que no sea el libro mismo. Este libro tiene su origen en una enorme pila de notas acumuladas de cursos y seminarios impartidos, durante muchos años, tanto en instituciones financieras como de educación superior: Bancomer, MexDer, UNAM, UAM, COLMEX, CIDE, COLEF, IPN, UP, Universidad Anáhuac, Universidad Chapultepec, Washington State University, Oxford University e ITESM, entre otras. Todos mis alumnos, cientos de ellos, así como mis asistentes de investigación han contribuido con diversos comentarios y sugerencias en la elaboración y revisión de este libro.

Me gustaría también comentar que cuando se escribe un libro tan extenso, al transcurrir el tiempo diversas situaciones cotidianas influyen en el ánimo del autor. En algunas ocasiones, el autor puede sentirse extenuado, triste, preocupado, etc. Sin duda, estos sentimientos pueden afectar la esencia en el contenido de algún párrafo. No obstante, siempre se procuró escribir todo el libro con el mayor entusiasmo posible.

El tiempo que se le quita a la familia para destinarlo a la escritura de este libro representa un enorme adeudo que hay que subsanar inmediatamente como un acto de agradecimiento.

Aun cuando se tuvo mucho cuidado para que la obra no contuviera errores, es altamente probable que subsistan algunos de ellos. Cualquier comentario para corregir o mejorar el texto será bienvenido ¡El autor espera que disfruten la lectura de este libro!

Francisco Venegas Martínez
Julio, 2006

Prefacio a la Segunda Edición

El acelerado desarrollo de una gran cantidad de nuevos productos financieros aunado al asombroso avance de las tecnologías de información y a la sorprendente aparición de decenas y decenas de nuevas revistas especializadas en los temas de matemáticas financieras, economía financiera, productos derivados y administración de riesgos, obligan al autor a actualizar varios capítulos y secciones, así como a incorporar nuevos ejercicios en una Segunda Edición. Al respecto, el autor desea agradecer las sugerencias y comentarios, de cientos de lectores, para incluir nuevas aplicaciones, mejorar el texto y corregir errores. Asimismo, debido a que la primera impresión y la segunda reimpresión de la primera edición se agotaron rápidamente, el autor siente un enorme compromiso y una gran responsabilidad con todos sus lectores y espera que esta nueva edición siga siendo de su agrado. Como antes, cualquier comentario es bienvenido a los correos electrónicos: fvenegas1111@yahoo.com.mx y fvenegas.mtz@gmail.com ¡El autor desea que disfruten la lectura de su libro!

Francisco Venegas Martínez
Marzo, 2008

ACERCA DEL AUTOR

El autor tiene post-doctorado en finanzas en Oxford University, doctorado en matemáticas en Washington State University, doctorado en economía en Washington State University, maestría en economía en el Instituto Tecnológico Autónomo de México, maestría en matemáticas, maestría en investigación de operaciones y licenciatura en matemáticas en la Universidad Nacional Autónoma de México, además cuenta con estudios de posgrado en física en la Universidad Autónoma Metropolitana.

El autor ha sido profesor-investigador de tiempo completo en la Universidad Nacional Autónoma de México, Universidad Autónoma Metropolitana (Unidades Iztapalapa, Azcapotzalco y Xochimilco), Washington State University, Centro de Investigación y Docencia Económicas, Oxford University, Tecnológico de Monterrey e Instituto Politécnico Nacional; instituciones en donde el autor ha dirigido más de 100 tesis: licenciatura (20), maestría (50) y doctorado (30). Es importante destacar que cuatro de estas tesis han participado en el Premio Nacional de Investigación en Derivados que otorga el MexDer (Mercado Mexicano de Derivados) obteniendo en 2006 el primer lugar y una mención especial en la categoría de tesis de doctorado y el segundo lugar en la categoría de tesis de maestría, y ganando en 2007 el primer lugar en la categoría de tesis de doctorado.

Asimismo, el Dr. Venegas Martínez ha ofrecido cursos y asignaturas en el Colegio de México, Universidad Anáhuac, Colegio de la Frontera Norte, Universidad Chapultepec, Universidad Panamericana, Universidad de Quintana Roo, Universidad de Colima, Universidad de Guadalajara, Universidad Autónoma de San Luis Potosí y Universidad de Medellín (Colombia).

Con respecto a su experiencia en el sector público, ha sido asesor financiero del Tesorero del Gobierno del Distrito Federal y del Subsecretario de Desarrollo y Programas Energéticos de la Secretaría de Energía. En el sector privado, fue director de investigación y nuevos productos del Mercado Mexicano de Derivados.

El autor ha publicado más de 100 artículos en revistas arbitradas de investigación nacionales e internacionales, entre las que destacan: “The Brazilian Journal of Probability”, “Journal of the Inter-American Statistical Institute”, “Contributions to Probability and Mathematical Statistics”, “Recent Advances in Bayesian Statistics and Econometrics”, “Journal of Economic Dynamics and Control”, “International Journal of Theoretical and Applied Finance”, “Journal of Economic Modelling”, “Journal of World Economic Review”, “International Journal of Economic Research” e “Indian Development Review”, entre otros. También participa en diversos comités editoriales de revistas de investigación nacionales e internacionales y es editor fundador de la Revista Mexicana de Economía y Finanzas. Asimismo, el autor ha contribuido con ponencias en más de 50 congresos nacionales e internacionales.

A continuación se destacan algunos de los logros académicos del Dr. Venegas Martínez: miembro de la Comisión Dictaminadora del Área de Ciencias Sociales del Sistema Nacional de Investigadores (SNI), miembro del SNI con Nivel III, miembro distinguido de la Academia Mexicana de Ciencias, ganador del primer lugar del Premio Nacional en Investigación Económica Maestro Jesús Silva Herzog 2002 que otorga el Instituto de Investigaciones Económicas de la UNAM, ganador del primer lugar del Premio Nacional de Derivados MexDer 2004 en la categoría de investigación, ganador del segundo lugar del Premio Nacional de Derivados MexDer 2005 en investigación, ganador de una Mención Especial del Premio Rómulo Garza por Investigación en 2005 del Tecnológico de Monterrey, beneficiario del Programa de Repatriación de CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), miembro de diversos Claustros Doctorales en la UNAM, miembro de diversas comisiones de CONACyT y Fulbright-García Robles, miembro del Comité de Evaluación de Metodologías de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), miembro del Consejo de Administración del MexDer, miembro del Comité de Riesgos de Valmer (Valor de Mercado, S. A.), miembro del Jurado del Premio Nacional de Derivados MexDer y Miembro del Consejo de Riesgos de la Asociación Mexicana de Intermediarios Bancarios (AMIB).

El Dr. Venegas Martínez es fundador de los Programas de Maestría y Doctorado en Ciencias Financieras (con orientación en Administración de Riesgos) del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Ciudad de México.

Por último, en su trayectoria académica el autor ha pertenecido a diversas asociaciones: “American Mathematical Society”, “Econometric Society”, “Latin American and Caribbean Economic Association”, Sociedad Matemática Mexicana y Colegio Nacional de Economistas, entre otras.

CONTENIDO

	Pág.
PRÓLOGO	v
PREFACIO	vii
INTRODUCCIÓN	xix
I. DÓNDE, CUÁNDO Y CÓMO SE INICIA LA HISTORIA QUE ESTE LIBRO CONTARÁ	
1. Robert Brown y el movimiento errático de partículas de polen en el agua.....	1
II. PRERREQUISITOS PARA RIESGOS FINANCIEROS	
2. Conceptos básicos de teoría de probabilidad	17
3. Movimiento Browniano y proceso de Wiener.....	31
4. Elementos del cálculo estocástico.....	43
5. Diferenciación estocástica.....	67
6. Martingalas y movimiento Browniano.....	87
7. Teorema de Girsanov.....	95
8. Ecuación de difusión de calor	107
III. LOS CLÁSICOS	
9. Los clásicos: Louis Bachelier, Paul Samuelson, Fischer Black, Myron Scholes y Robert C. Merton.....	113
IV. DERIVADOS FINANCIEROS SIMPLES	
10. Rendimientos de activos e índices bursátiles: movimiento geométrico Browniano.....	147
11. Contratos forward sobre diversos subyacentes	161
12. Contratos futuros	179
13. Swaps de tasas de interés y de tipo de cambio	183
14. Modelo de Black-Scholes (I): enfoque probabilista	193
15. Modelo de Black-Scholes (II): enfoque de ecuaciones diferenciales parciales	203
16. Modelo de Black-Scholes (III): ecuación de calor.....	217
17. Modelo de Black-Scholes (IV): portafolios replicantes	225
18. Modelo de Black-Scholes (V): teorema de Girsanov.....	229
19. Modelo de Black-Scholes (VI): pago continuo de dividendos	237

20. Teorema de Feynman-Kač	247
21. Ecuaciones diferenciales parciales de Kolmogorov y Fokker-Planck	251
22. Griegas del modelo de Black-Scholes	255
23. Funciones de Green y ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.....	265
24. Modelo binomial de Cox, Ross y Rubinstein.....	269
25. Convergencia del modelo binomial al modelo Black-Scholes	281
V. OPCIONES CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA	
26. Modelo de Hull-White de opciones con volatilidad estocástica	291
27. Modelo de Heston de opciones con volatilidad estocástica	305
28. Valuación de opciones con información a priori sobre volatilidad estocástica	315
VI. OPCIONES AMERICANAS	
29. Modelo de Barone-Adesi y Whaley de opciones americanas	335
30. Modelo de Whaley de opciones americanas	343
VII. TÓPICOS AVANZADOS DE OPCIONES	
31. Modelo de Schroder-Cox-Ross de opciones con elasticidad constante de la varianza.....	353
32. Modelo de Geske de opciones compuestas.....	367
33. Opciones potencia	371
34. Modelo de Merton de opciones con procesos de difusión con saltos	377
35. Valuación de opciones con costos de transacción: modelo de Leland, Hoggard Whalley y Wilmott	393
36. Valuación de opciones con procesos de Lévy.....	399
VIII. OPCIONES EXÓTICAS	
37. Opciones asiáticas	417
38. Tiempos de paro, tiempos de primera visita y principio de reflexión	423
39. Máximo y mínimo del movimiento Browniano, teorema de Girsanov y principio de reflexión	431

40. Modelo de Goldman-Sosin-Gatto de opciones lookback (I): precios de ejercicio flotantes.....	439
41. Modelo de Conze-Viswanathan de opciones lookback (II): precios de ejercicio fijos.....	449
42. Modelo de Merton de opciones con Barreras	453
IX. TASAS Y BONOS	
43. Valuación de bonos cupón cero: marco determinista.....	465
44. Ecuación diferencial parcial de Garman-Vasicek	475
45. Modelo de tasa corta de Merton para valuar bonos.....	483
46. Modelo de tasa corta de Vasicek para valuar bonos (I).....	495
47. Modelo de tasa corta de Vasicek para valuar bonos (II): enfoque de ecuaciones diferenciales parciales.....	503
48. Modelo de tasa corta de Vasicek para valuar bonos (III): enfoque probabilista	519
49. Modelo de tasa corta de Cox-Ingersoll-Ross para valuar bonos (I): enfoque de ecuaciones diferenciales parciales	527
50. Modelo de tasa corta de Cox-Ingersoll-Ross para valuar bonos (II): resultados adicionales	541
51. Modelo de tasa corta de Ho-Lee para valuar bonos: calibración con precios actuales	549
52. Modelo de tasa corta de Hull-White para valuar bonos: calibración con precios actuales	563
53. Modelo de tasa corta de Longstaff para valuar bonos: modelo de doble raíz	571
54. Modelo de tasa corta de Brennan y Schwartz para valuar bonos: modelo de dos factores.....	583
55. Modelo de tasa corta de Black-Derman-Toy para valuar bonos	589
56. Modelo de tasa forward de Heath-Jarrow-Morton para valuar bonos	617
57. Teorema de Girsanov y valuación de bonos cupón cero.....	629
58. Inmunización de flujos de efectivo esperados mediante un portafolio de bonos: duración y convexidad.....	637
X. TÉCNICAS DE AJUSTE DE CURVAS DE RENDIMIENTO	
59. El modelo de Nelson Siegel	647
60. Polinomios de Chebyshev	659
61. Estimación no paramétrica de curvas de rendimiento: núcleos de suavización	673
62. “Splines” cúbicos.....	679
63. Mínimos cuadrados con restricciones	685

XI. MEDIDAS DE RIESGO

64. Valor en riesgo	693
65. Medidas coherentes de riesgo: axiomática de Artzner, Delbaen, Eber y Heath.....	725

XII. RIESGO CRÉDITO Y DERIVADOS DE CRÉDITO

66. Riesgo Crédito (I): probabilidad de incumplimiento y derivados de crédito	751
67. Riesgo Crédito (II): enfoque de ecuaciones diferenciales parciales.....	771
68. Riesgo Crédito (III): modelos de migración de crédito.....	783

XIII. OPCIONES REALES

69. Opciones reales, valuación financiera de proyectos de inversión y estrategias de negocios.....	799
---	-----

XIV. DERIVADOS DE TASAS Y NOTAS ESTRUCTURADAS

70. Derivados de tasas de interés y notas estructuradas	819
--	-----

XV. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA VALUAR DERIVADOS

71. Métodos de diferencias finitas	841
72. Simulación Monte Carlo.....	851

XVI. RIESGO OPERATIVO

73. Riesgo operativo, distribuciones de frecuencia y severidad.....	861
--	-----

XVII. VALORES EXTREMOS Y VALOR EN RIESGO

74. Valores extremos y valor en riesgo	873
--	-----

**XVIII. PRERREQUISITOS PARA MODELOS ECONÓMICOS
DE RIESGOS**

75. Optimización determinista en tiempo continuo (I): cálculo de variaciones.....	889
76. Optimización determinista en tiempo continuo (II): control óptimo.....	913
77. Optimización determinista en tiempo continuo (III): programación dinámica.....	937

78. Consumidor intertemporal determinista(I): tasas de interés	953
79. Consumidor intertemporal determinista(II): decisiones económicas diversas.....	983
80. Modelos macroeconómicos deterministas de determinación de tasas de interés	997
81. Programación dinámica estocástica en tiempo continuo	1011
XIX. MODELOS ECONÓMICOS DE RIESGOS	
82. Decisiones de consumo e inversión bajo condiciones de riesgo e incertidumbre (I): modelos de difusión	1029
83. Decisiones de consumo e inversión bajo condiciones de riesgo e incertidumbre (II): difusión con saltos	1035
84. Decisiones de consumo e inversión bajo condiciones de riesgo e incertidumbre (III): generalizaciones diversas.....	1045
85. Modelo de Cox-Ingersoll-Ross de equilibrio general para determinar el proceso de tasa corta.....	1049
86. Modelo de tasa corta de Dothan	1055
87. Modelo de Fisher de riesgo de inflación con bonos indexados	1065
88. Riesgo no diversificable de tipo de cambio (I): difusión con saltos	1071
89. Riesgo no diversificable de tipo de cambio (II): política fiscal incierta.....	1089
90. Riesgo no diversificable de tipo de cambio (III): ingreso laboral incierto.....	1101
91. Maximización de utilidad y valuación de opciones con volatilidad estocástica	1111
BIBLIOGRAFÍA	1121
ÍNDICE POR AUTOR	1131
ÍNDICE POR TEMA	1135

INTRODUCCIÓN

La palabra riesgo tiene sus raíces en el latín *risicare* (o *resecare*) que significa atreverse y en el griego *rizha* (o *riza*) que significa navegar por un acantilado para alcanzar la costa. Se trata entonces de atreverse a navegar por un acantilado para alcanzar la costa; una labor que puede resultar muy peligrosa, pero que en ocasiones es necesaria. Existe un refrán popular que nos permite describir esta situación, “el que no arriesga no gana”, es decir, “el que no arriesga no alcanza la costa”. De la misma manera, navegar por un acantilado, sin revisar otras alternativas, es como lanzarse contra los gigantes que alguna vez enfrentó Don Quijote; otra labor casi imposible. En este caso, la única alternativa que Don Quijote consideró fue precipitarse contra los gigantes montado en Rocinante, lo que casi le cuesta la vida. Sin embargo, Don Quijote bien pudo pedirle al agudo Sancho un consejo sobre otra alternativa para enfrentar a los gigantes, Sancho pudo haber contestado –“muchos pocos hacen un mucho”–, es decir, Don Quijote y Sancho juntos podrían hacer mejor frente contra los gigantes. Existe también en este caso, otro refrán popular que describe la consideración de distintas alternativas: “no hay que poner todos los huevos en la misma canasta”. Cuando se conjugan estas máximas, “el que no arriesga no gana” y “no hay que poner todos los huevos en la misma canasta”, el nombre del juego es “diversificar riesgos”, parte esencial de lo que hoy se conoce como administración de riesgos.

Aristóteles (384aC-322aC) en su libro Ética a Nicómaco planteó la noción de virtud en términos de las actitudes de tres personajes: el cobarde, el valiente y el temerario. En el contexto del párrafo anterior, el cobarde nunca asumirá riesgo alguno y, por lo tanto, nunca alcanzará la costa, el temerario se lanzará sin importarle ningún riesgo y podría morir en el intento, mientras que el valiente es aquel que toma acciones intermedias, lo que Aristóteles llama virtud. Así pues, el valiente revisa diferentes alternativas y considera sus posibles consecuencias; esta es justo la tarea diaria que realiza el administrador de riesgos.

Por otro lado, la palabra compuesta incertidumbre proviene del prefijo latino *in* que indica negación y de la voz latina *certitudo* (o *certitinis*) que significa conocimiento seguro y claro. En consecuencia, incertidumbre es desconocimiento. Existe en la literatura especializada una discusión permanente sobre las diferencias entre riesgo e incertidumbre. El riesgo es asociado con peligro (o amenaza), mientras que la incertidumbre es asociada con el desconocimiento de eventos futuros. Por ejemplo, cuando Cristóbal Colón zarpó del puerto de Palos, el 3 de agosto de 1492, en su expedición a las Indias, sabía que estaría expuesto a muchos riesgos y a una gran incertidumbre, es decir, estaría expuesto a muchos peligros (tormentas, acantilados, etc.) y a un gran desconocimiento de eventos futuros (tierras descubiertas, fecha de retorno, etc.). El lector inquieto podría plantearse la siguiente pregunta ¿el desconocimiento de un evento futuro no es en sí mismo un peligro? cualquier posible respuesta dependerá del tipo de evento en consideración. Otra cuestión acerca de la discusión entre riesgo e incertidumbre es si éstas pueden medirse. La respuesta vuelve, de nuevo, a ser dependiente del contexto. Por ejemplo, la probabilidad misma podría verse como una medida de incertidumbre. En efecto, si las probabilidades de dos eventos ajenos, *A* y *B*, son 0.0000001 y 0.9999999, respectivamente, entonces sería difícil apoyar la ocurrencia de *A* sobre la de *B*, en otras palabras, *A* tiene mayor incertidumbre que *B* (equivalentemente, *B* tiene mayor certeza de ocurrir que *A*). Si la probabilidad de los dos eventos fuera 0.5, sería difícil apoyar la ocurrencia o no ocurrencia de cualquiera de los eventos y en este caso la incertidumbre sobre ambos sería máxima. Una medida sobre la incertidumbre de estos eventos podría tomarse como el negativo del logaritmo de la probabilidad, así eventos con probabilidades próximas a uno tendrán incertidumbres cercanas a cero y eventos con probabilidades que tienden a cero tendrán incertidumbres tendiendo a infinito. Además, si se consideran dos eventos con probabilidades *p* y *1 - p*, el valor esperado de sus medidas de incertidumbre se maximiza justo cuando ambos tienen una misma probabilidad de ocurrir igual a 0.5.

El riesgo de mercado significa peligro por fluctuaciones adversas en el precio de un activo e incertidumbre fiscal significa desconocimiento de si habrá o no una reforma fiscal que incluya un impuesto sobre ganancias por la tenencia de dicho activo. Por supuesto, los potenciales niveles que la tasa impositiva pudiera tomar representan un riesgo económico. En este mismo marco, el peor rendimiento potencial de un activo en un periodo dado y bajo un cierto nivel de

confianza, podría verse como una medida de riesgo (o de amenaza). Observe que la frase “en un periodo dado y bajo un cierto nivel de confianza” le da un contexto particular a esta forma de medir el riesgo. Similarmente, la probabilidad de que se lleve a cabo una reforma fiscal que incluya un impuesto sobre ganancias por la tenencia de algún activo puede asociarse con una medida de incertidumbre. Como puede observarse, los ejemplos anteriores utilizan connotaciones particulares para diferenciar el riesgo de la incertidumbre y la forma de medirlas. Como el debate se centra en el contexto y este puede cambiar, lo más sano es no tomar una postura inicial sobre cualquier distinción entre riesgo e incertidumbre y la forma de medirlos, y esperar a que la teoría proporcione el contexto, lo cual evitara discusiones inútiles.

Por otro lado, la administración de riesgos de mercado y de crédito con productos derivados (futuros, opciones, warrants, “swaps”, notas estructuradas, “swaps” de incumplimiento de crédito, etc.) ha mostrado un crecimiento importante impulsado por al acelerado desarrollo de las tecnologías de información, lo cual, a su vez, ha facilitado su operación y diversificación. Así, las bolsas en las que se negocian y cotizan productos derivados listados y los mercados sobre mostrador proporcionan mayores alternativas de inversión y de cobertura con más y mejor información. Hoy, los productos derivados se negocian en los mercados en forma continua y con movilidad casi perfecta.

El tamaño considerable que han alcanzado los mercados de productos derivados se debe, en gran medida, a la flexibilidad que estos instrumentos proporcionan a sus usuarios para entrar o salir rápidamente del mercado debido a su liquidez, ya que siempre es posible encontrar compradores y vendedores, y al apalancamiento que éstos presentan, pues la inversión inicial es pequeña comparada con la que requieren otros instrumentos. Además, cuando las transacciones se efectúan con derivados listados, el riesgo contraparte es mínimo debido a la asociación del mercado con una cámara de compensación y liquidación que garantiza el cumplimiento de las obligaciones adquiridas a través de una cuenta de márgenes o aportaciones iniciales. Así, los productos derivados listados permiten llevar a cabo una administración adecuada del riesgo con costos bajos de transacción.

Las finanzas, como una rama de la economía, es la ciencia que estudia cómo en una sociedad los individuos intercambian activos y riesgos bajo condiciones de escasez. De esta forma, el estudio de riesgos posee la categoría de ciencia social empírica y positiva, la cual: 1) es racional y objetiva; 2) parte de los hechos y siempre regresa a ellos; 3) produce nuevos hechos, es decir, trasciende a los hechos; 4) es analítica; 5) es especializada y define sus propios conceptos y términos; 6) es comunicable; 7) trata de explicar los hechos a través de leyes generales y las leyes a través de principios; y 8) es verificable y por lo tanto fiable, es decir, es provisional.

Para verificar un enunciado sobre riesgos financieros o económicos (hipótesis o teorías) no es posible recurrir a la experimentación en el laboratorio, como en el caso de la física, sino que hay que esperar a que el paso del tiempo proporcione observaciones suficientes para confirmar o rechazar algún enunciado y, aún así, nueva evidencia en el futuro podría cambiar los resultados. Por supuesto, el grado de dificultad para recoger observaciones no es determinante para llevar a cabo la investigación científica. Por último, es importante destacar que cuando se quiere estudiar algo tan complejo como los riesgos financieros y económicos es necesario abstraer de la realidad aquellos aspectos que sean de interés. El siguiente paso es recurrir al control óptimo estocástico y al cálculo estocástico para establecer en forma precisa el comportamiento de los agentes, la dinámica de los factores de riesgo y las condiciones de equilibrio. Este libro ofrece una visión alternativa de las finanzas y la economía que reconoce explícitamente los efectos del riesgo y la incertidumbre en las decisiones de portafolio y consumo de los agentes económicos a través de diferentes planteamientos teóricos sobre la administración de riesgos.

CAPÍTULO 1

DÓNDE, CUÁNDO Y CÓMO SE INICIA LA HISTORIA QUE ESTE LIBRO CONTARÁ

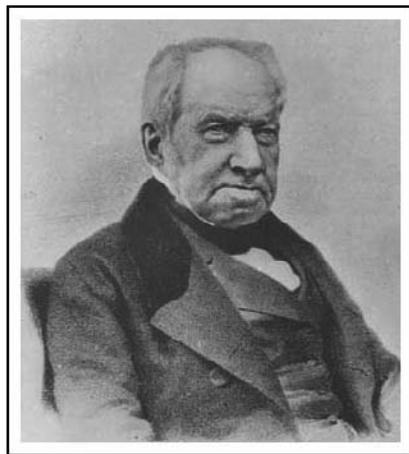
1.1 Introducción

Toda historia tiene un inicio en tiempo y espacio. La historia que contará este libro se origina en 1827. En ese entonces, en Inglaterra, un botánico de nombre Robert Brown (1773-1858) examinaba bajo el microscopio partículas de polen, de 0.0001 centímetros, de una planta con flores color lavanda y hojas alargadas de la especie *Clarkia pulchella* (o *Clarkia pulchella*).¹ Con gran sorpresa encontró que cuando dichas partículas estaban suspendidas en agua y en otros líquidos se movían sin cesar y se desplazaban en forma errática, lo que hoy se conoce como movimiento Browniano. Desde entonces este fenómeno ha cautivado la atención de un sinnúmero de importantes científicos en muchas y muy diversas disciplinas. Desde luego, el inicio de esta historia no puede ser mejor contada que por el mismo Robert Brown...



Clarkia pulchella

¹ Meriwether Lewis y William Clark en su expedición por el noroeste de Estados Unidos en 1803-1806, encontraron la planta *Clarkia pulchella* a lo largo del río Idaho. El género *Clarkia* toma el nombre del capitán William Clark y el de la especie *pulchella* tiene el significado de hermosa.



(Fuente: <http://en.wikipedia.org>)

Robert Brown

UN
BREVE INFORME
DE
OBSERVACIONES MICROSCÓPICAS

Realizado en los meses de junio, julio y agosto, 1827,
SOBRE LAS PARTÍCULAS CONTENIDAS EN EL
POLEN DE LAS PLANTAS
Y
DE LA EXISTENCIA GENERAL DE MOLÉCULAS
ACTIVAS
EN CUERPOS ORGÁNICOS E INORGÁNICOS

POR

ROBERT BROWN

MIEMBRO DE LA REAL SOCIEDAD DE LONDRES
MIEMBRO DE LA REAL SOCIEDAD DE EDIMBURGO

MIEMBRO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS DE SUECIA, DE LA REAL SOCIEDAD
DE DINAMARCA Y DE LA ACADEMIA IMPERIAL DE CURIOSIDAD NATURAL
MIEMBRO CORRESPONDIENTE DE LOS REALES INSTITUTOS
DE FRANCIA Y DE LOS PAÍSES BAJOS, Y DE LA
ACADEMIA IMPERIAL DE CIENCIAS DE
SAN PETESBURGO, Y DE LA REAL
ACADEMIA DE PRUSIA Y
BAVARIA, ETC.

OBSERVACIONES MICROSCÓPICAS

Robert Brown relata²...

Las observaciones, de las cuales pretendo dar un resumen en las siguientes páginas, han sido hechas con un microscopio simple, y con una misma lente, la cual tiene una distancia focal alrededor de 1/32 de pulgada.³

El examen de óvulos de vegetales no fecundados, cuyo informe fue publicado a principios de 1826,⁴ me llevó a considerar más detenidamente lo que yo había hecho antes sobre la estructura del polen, así como a indagar sobre el funcionamiento del pistilo de la plantas Fanerógamas.

En el ensayo antes referido, se encontró que el ápice de los núcleos de los óvulos, la parte que es universalmente aceptada como el lecho del futuro embrión, estaba generalmente en contacto con las terminaciones de los probables canales de fecundación; siendo éstos: la superficie de la placenta, la extremidad del conducto descendiente del estilo y, más raramente, la superficie del cordón umbilical. Sin embargo, a partir de los hechos encontrados en este ensayo, hubo casos en donde las partículas contenidas en los granos de polen difícilmente podían ser llevadas a ese punto del óvulo a través de los vasos o del tejido celular del ovario; y el conocimiento de estos casos, tanto como de la estructura de las anteras (parte del estambre de las flores con la forma de un saco pequeño, sencillo o doble, en donde se produce y se guarda el polen) en *Asclepiadas* me había llevado a dudar de la certeza de las observaciones hechas por Stiles y Gleichen sesenta años atrás, así como de aseveraciones muy recientes, respecto a la forma en que el polen actúa en el proceso de fecundación.

No fue sino hasta finales del otoño de 1826, que pude abordar este tema; la estación estaba bastante avanzada para permitirme seguir con la investigación. Sin embargo, al encontrar que en una de las plantas que examinaba, las formas de las partículas contenidas en los granos de polen eran claramente distinguibles, con formas no esféricas sino alargadas, yo esperaba, con cierta confianza, encontrarme plantas con otros aspectos más favorables a la investigación, en las cuales estas partículas, de forma peculiar, pudieran ser seguidas a través de toda su trayectoria y entonces, quizás, verificar si las partículas en cualquier caso alcanzan el ápice del óvulo, o si su acción directa está limitada a otras partes del órgano femenino.

Mi investigación en este tema comenzó en junio de 1827, y la primera planta que examiné mostró en ciertos aspectos ser notablemente consistente con el objetivo planteado.

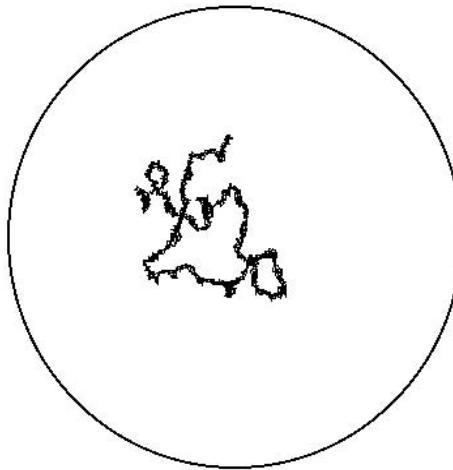
Esta planta fue de la especie *Clarckia pulchella*, de la cual sus granos de polen tomados de las anteras completamente crecidas, pero antes de abrirse, estaban llenos de partículas o gránulos de tamaño inusualmente grande, que iban de 1/4000 a 1/3000 de pulgada, y con una forma entre cilíndrica y alargada, quizás ligeramente aplanaada, y con extremidades redondeadas e iguales. Mientras examinaba la forma de estas partículas inmersas en agua, observaba que muchas de ellas se encontraban en evidente movimiento, el cual consistía no sólo de un cambio de lugar en el fluido, manifestado por alteraciones en su posición relativa, sino también, frecuentemente, de un cambio de forma de la partícula en sí misma; una contracción o curvatura que tiene lugar repetidamente en su centro, acompañada por un correspondiente abultamiento o convexidad en el lado opuesto de dicha partícula. En pocas ocasiones, se observó que la partícula giraba sobre

² La traducción del trabajo de R. Brown (1827) se ha llevado a cabo de manera casi literal, incluyendo puntuación, a fin de que el lector pueda apreciar cómo se elaboraba un informe científico en esa época, lo cual dista mucho de la estructura actual de un artículo de investigación.

³ Esta lente doble convexa, la cual ha estado por varios años en mi posesión, la obtuve del laboratorio óptico del Sr. Bancks. Después de realizar avances considerables en mi investigación, expliqué la naturaleza de la misma al Sr. Dollond, quien me hizo un microscopio de bolsillo que permitía un ajuste fino y con lentes excelentes, dos de las cuales son de mayor potencia en comparación con las mencionadas anteriormente. Para esto, he guardado registros frecuentes de varios objetivos diminutos con un gran avance en la investigación. Sin embargo, para dar mayor consistencia a mis conclusiones y con la finalidad de mantener el tema de investigación al alcance de la observación general, en la medida de lo posible, seguí empleando las lentes originales durante toda la investigación.

⁴ En el "Botanical Appendix to Captain King's Voyages to Australia", Vol. II, p. 534, *et seq* (*ante p. 435*).

su eje más largo. Después de frecuentes y repetidas observaciones, me convencí, de que dichos desplazamientos no se debían a corrientes en el fluido ni provenían de su gradual evaporación, sino que pertenecían a la partícula misma (es decir, se trataba de una partícula animada).⁵



Gráfica 1.1 Movimiento Browniano.

Los granos de polen de esta misma planta que se tomaron de las anteras inmediatamente después de abrir, contenían partículas cilíndricas similares, pero en menor número, mezcladas con otras partículas en al menos el mismo número que las anteriores y de un tamaño mucho más pequeño, aparentemente esféricas y con un movimiento oscilatorio muy rápido.

Al observar por primera vez estas partículas más pequeñas, o *moléculas* como las llamaré en lo sucesivo, pensé que eran algunas de las partículas cilíndricas que nadaban verticalmente en el fluido. Pero, la observación minuciosa y frecuente aminoró la confianza en mi suposición. Continué observándolas hasta que el agua se evaporó por completo y las partículas cilíndricas o esféricas se depositaban en la base del portaobjetos del microscopio.

Extendiendo mis observaciones a diferentes plantas de la misma familia, las Onagrarias (plantas acuáticas), comprobé la existencia de unas partículas con formas y movimientos similares sobre todo en especies de *Enothera*. Además, en los granos de polen obtenidos de anteras justo después de abrir, observé una reducción manifiesta en la proporción de las partículas cilíndricas y un correspondiente incremento en la proporción de moléculas, aunque en menor grado que en *Clarkia*.

El gran incremento en el número de moléculas y la reducción de las partículas cilíndricas justo antes de que el grano de polen pudiera establecer contacto con el estigma, fueron circunstancias desconcertantes en esta etapa de la investigación; y ciertamente, no eran favorables a la suposición de que las partículas cilíndricas actúan directamente en el óvulo (una opinión que decidí adoptar cuando las observé por primera vez en movimiento). Estas circunstancias, sin embargo, me condujeron a multiplicar mis observaciones y a examinar numerosas especies de muchas de las familias más importantes de dos de las grandes divisiones primarias de las plantas Fanerógamas.

En todas estas plantas se encontraron partículas que para las diferentes familias o géneros iban de forma oblonga (más largo que ancho) a esférica, y cuyos movimientos eran similares al descrito con anterioridad: excepto que el cambio en la forma de las partículas oblongas y ovaladas era menos obvio que en las Onagrarias y que en las partículas esféricas no era observable.⁶ Una gran proporción de estas plantas presentaron la misma reducción de partículas grandes y un aumento de moléculas después de que las anteras se abrieran: las moléculas, con un tamaño y

⁵ La expresión dentro del paréntesis es sólo una apreciación del autor del libro.

⁶ Sin embargo, en *Lolium perenne*, la cual he examinado recientemente, aunque la partícula era ovalada y más pequeña que en una Onagraria, este cambio de forma fue notable, consistente en una contracción al centro de la partícula, de tal manera que era dividida en dos partes casi esféricas.

forma aparentemente uniformes, siempre estaban presentes y en algunos casos, no se observaba ningún otro tipo de partícula ni en éste ni en otro proceso del órgano secretor.

En muchas plantas pertenecientes a diferentes familias, pero especialmente a las Gramíneas, la membrana del grano de polen es tan transparente que el movimiento de las partículas grandes a través de toda la semilla era completamente visible. También, en los ángulos más transparentes de los granos de las Onagrarias se podían vislumbrar dichas partículas.

En las *Asclepiadeas*, la masa de polen que llena cada célula de la antera no se puede separar en granos. Sin embargo, su membrana celular se encuentra llena de partículas esféricas de dos tamaños diferentes. Cuando ambos tipos de partículas se sumergen en agua, se observa un movimiento vívido; aunque los aparentes movimientos de las partículas más grandes pueden ser ocasionados por la rápida oscilación de las moléculas más numerosas. La masa de polen en este tipo de planta no es lanzada por ninguna abertura, pero se conecta en un punto determinado (que frecuentemente es semitransparente) de la glándula del correspondiente ángulo del estigma.

En *Periploceas*, y en algunas *Apocineas*, el polen, el cual está separado en granos compuestos llenos de las partículas esféricas móviles, es aplicado al estigma, como en las *Asclepiadeas*. Un proceso similar existe en las *Orchideas*, en dicho proceso las masas de polen son siempre, al menos en una etapa temprana, granulares; los granos, sean simples o compuestos, contienen diminutas partículas casi esféricas, pero toda la masa está, con pocas excepciones, conectada en un punto determinado de su superficie con el estigma, o con alguna parte glandular de ese órgano.

Tras encontrar movimiento en las partículas de polen de todas las plantas vivas que había examinado, me propuse posteriormente investigar si esta propiedad se manifestaba después de la muerte de la planta, y por cuánto tiempo.

En plantas secas o inmersas en alcohol por sólo algunos días, las partículas de polen de los dos tipos se encontraron en claro movimiento, igual al observado en las plantas vivientes; especímenes de varias plantas, algunas de las cuales habían sido disecadas y preservadas en un herbario por más de 20 años, y otras por más de un siglo, aún exhibían moléculas o pequeñas partículas esféricas en número considerable, y en evidente movimiento, junto con algunas de las partículas grandes, cuyo movimiento se manifestó mucho menos, y en algunos casos no fue observable.⁷

Habiendo encontrado en esta etapa de la investigación una característica peculiar en el movimiento de las partículas de polen en el agua de todas las plantas vivas, se me ocurrió revisar esta peculiaridad en ciertas familias de plantas Criptógamas, particularmente, Musgo, y del género de los *Equisetum*, en los que la existencia de órganos sexuales no ha sido admitida universalmente.

En el supuesto órgano reproductor de ambas familias, particularmente, en las anteras cilíndricas o en el polen del Musgo, y en la superficie de los cuatro cuerpos espátulados que rodean el óvulo desnudo, como podría ser considerado en el caso del *Equisetum*, encontré diminutas partículas esféricas, aparentemente del mismo tamaño que la molécula descrita en las Onagrarias, y con un movimiento vívido tras la inmersión en agua; este movimiento se pudo observar en ambos especímenes, de Musgo y de *Equisetum*, que permanecieron disecados por más de cien años.

El muy inesperado hecho de que estas partículas diminutas pudieran retener aparente vitalidad mucho tiempo después de la muerte de la planta quizás no hubiera disminuido sustancialmente mi confianza en la supuesta característica. Pero al mismo tiempo, observé que al moler el óvulo o las semillas del *Equisetum*, lo cual al principio ocurrió accidentalmente, incrementé de tal forma el número de partículas en movimiento, que la cantidad agregada no ponía en duda la supuesta característica. Encontré también que moliendo primero las hojas florales de los Musgos, y luego las demás partes de esas plantas, se obtenían fácilmente partículas similares, no en iguales cantidades, pero sí en igual movimiento. Por lo tanto, mi supuesto sobre la existencia del órgano masculino fue necesariamente desecharlo.

⁷ Mientras esta hoja estaba pasando a través de la prensa, he analizado el polen de varias flores las cuales habían sido inmersas en un líquido poco denso cerca de once meses, particularmente de *Viola tricolor*, *Zizania aquatica* y *Zea Mays*; en todas estas plantas, las partículas peculiares del polen, las cuales son de forma ovalada o alargada, aunque un poco reducidas en número, mantienen perfectamente su forma y se mantienen en movimiento, aunque creo que no tan vívido como aquellas partículas pertenecientes a las plantas vivas. En *Viola tricolor*, así como en otras especies del mismo género, el polen tiene una forma muy característica, el grano inmerso en ácido nítrico aún descargaba su contenido por sus cuatro ángulos, aunque con menos fuerza.

Reflexionando acerca de los hechos con los que ahora me había familiarizado, estaba dispuesto a creer que las diminutas partículas esféricas o moléculas de tamaño aparentemente uniforme, primero vistas en las etapas avanzadas del polen de Onagrarias, y en muchas otras plantas Fanerógamas,—luego en las anteras del Musgo y sobre la superficie de los cuerpos considerados como los órganos reproductores del *Equisetum*,—y luego en porciones molidas de otras partes de las mismas plantas, eran en realidad moléculas elementales de los cuerpos orgánicos, primero consideradas por Buffon y Needham, y luego por Wrisberg con gran precisión, poco tiempo después y aún con más detalle por Müller y, muy recientemente, por el Dr. Milne Edwards, quien ha revivido la doctrina y la ha apoyado con gran interés. Consecuentemente, yo esperaba encontrarme estas moléculas en todos los cuerpos orgánicos; de acuerdo con el examen de varios tejidos animales y vegetales, ya fuera vivos o muertos, siempre se encontró su existencia; y sencillamente al moler estas sustancias y ponerlas en agua, siempre me aseguré de tener un número suficiente de moléculas para comprobar su identidad en tamaño, forma y movimiento.

Examiné también varios cuerpos orgánicos, particularmente las resinas de goma, y sustancias de origen vegetal, extendiendo mi investigación hasta el carbón; y en todos estos cuerpos las moléculas fueron encontradas en abundancia. Se destaca además, como precaución para aquellos que pudieran en el futuro interesarse en esta investigación, que el polvo o el hollín depositado en todos los cuerpos, sobre todo en Londres, está completamente compuesto de estas moléculas.

Una de las sustancias examinadas, fue un espécimen de fósil de madera, encontrado en Wiltshire, en un estado aceptable para quemarse; y como encontré estas moléculas en forma abundante y en movimiento en este espécimen, supuse que su existencia, aunque en una cantidad menor, estaba determinada por los restos de vegetales mineralizados. Con este punto de vista, una porción diminuta de madera petrificada, la cuál exhibía la estructura de las Coníferas, fue molida, y partículas esféricas, o moléculas en todos los aspectos como se han mencionado, fueron rápidamente obtenidas de ésta; sin embargo, dichas partículas fueron obtenidas en tal cantidad que toda la sustancia en petrificación parecía estar formada de ellas. De tal forma que inferí que estas moléculas no estaban limitadas a cuerpos orgánicos.

Establecer la exactitud de esta inferencia, y determinar hasta qué punto las moléculas existían en cuerpos minerales, se convirtió en el siguiente objetivo de la investigación. La primer sustancia examinada fue un fragmento diminuto de vidrio de ventana, del cual tras morderlo, obtuve fácilmente abundantes moléculas que concordaban en tamaño, forma y movimiento con las que ya había observado.

Procedí entonces a examinar otros materiales, obteniendo resultados similares. Revisé algunos minerales que tenía a la mano o que pudiera obtener fácilmente, incluyendo varios metales y no metales simples, en muchas de sus combinaciones.

Piedras de todas las épocas, incluyendo aquellas en las que nunca se han encontrado restos orgánicos, mostraron moléculas en abundancia. Su existencia fue determinada en cada uno de los minerales constituyentes del granito, siendo un fragmento de la Esfinge (de Giza en Egipto) uno de los especímenes examinados.

Mencionar todas las sustancias minerales en las cuales he encontrado estas moléculas, sería tedioso; y me limitaré en este resumen a numerar algunas de las más notables. Éstas eran de origen acuoso y volcánico, como las stalactitas, la lava, la obsidiana, piedra pómez, cenizas volcánicas, y meteoritos de varias localidades.⁸ De metales puedo mencionar el manganeso, níquel, plomo, bismuto, antimonio y arsénico. En una palabra, en cada mineral que podía reducir a un polvo lo suficientemente fino para suspenderse temporalmente en el agua, encontré estas moléculas más o menos de manera abundante; y en algunos casos, particularmente en los cristales de silicio, el cuerpo entero sometido a prueba parecía estar compuesto de ellas.

En muchas de las sustancias examinadas, especialmente en las de estructura fibrosa, como el asbestos, actinolita, tremolita, zeolita e incluso esteatita, junto con las moléculas esféricas, otros corpúsculos fueron encontrados, como fibras cortas cuyo diámetro transversal parecía no exceder al de una molécula, y que parecían estar hechas de combinaciones de éstas. Estas fibras estaban generalmente en movimiento, sobre todo cuando su longitud aparentaba que las fibras estaban probablemente compuestas de no más de cuatro o cinco moléculas, y el movimiento era todavía más evidente cuando parecían estar formadas de dos o tres moléculas únicamente;

⁸ También he encontrado las moléculas en el hacinamiento de arena por relámpagos, provenientes de Drig en Cumberland.

dicho movimiento podría decirse que era de alguna forma vermicular (parecía un gusano), dado el cambio constante de posición de la fibra en el fluido y su curvatura ocasional.

En otros cuerpos que no exhibieron estas fibras, partículas ovaladas de un tamaño casi igual al de dos moléculas, y las cuales también me hacían pensar que estaban formadas a partir de combinaciones de dichas moléculas, fueron frecuentemente encontradas y su movimiento generalmente era más vívido que el de una molécula simple. Dicho movimiento consistía normalmente en girar sobre su eje mayor y entonces a menudo parecían ser aplanas. Se encontró que tales partículas ovaladas eran numerosas y extremadamente activas en el arsénico blanco.

Como los cuerpos minerales que habían sido fundidos contenían las moléculas en movimiento en forma tan abundante como aquellos de depósitos aluviales, yo quería determinar si la movilidad existente de las partículas en cuerpos orgánicos era afectada en algún grado por la aplicación de calor intenso a la sustancia que contenían. Con esta idea, pequeñas partículas de madera, lino, papel, algodón, lana, seda, cabello y fibras musculares, fueron expuestas a la flama de una vela o quemadas en fórceps de platino, calentadas por fuele, y en todos estos cuerpos calientes, templados en agua e inmediatamente sometidos a examen, las moléculas fueron encontradas y en evidente movimiento como el presentado en las mismas sustancias antes de quemarse.

En algunos de los cuerpos vegetales quemados de esta manera, en adición a las moléculas simples, fueron observadas combinaciones primarias de éstas formadas de fibras que tenían contracciones transversales, correspondiendo en número, tal como lo había pensado, al de las moléculas que las componían; y cuando esas fibras no consistían de un número mayor a 4 ó 5 moléculas, mostraban un movimiento parecido en tipo y vivacidad al de las fibras minerales ya descritas, mientras que las fibras más largas del mismo diámetro estaban en reposo.

La sustancia que encontré y que producía estas fibras activas en mayor proporción y con movimientos más intensos fue la mucosa interpuesta entre la piel y los músculos del abadejo (un pez marino) especialmente después de la coagulación por el calor.

El polvo fino producido en la superficie de troncos de helechos, particularmente del *Acrostichum calomelanos* y las especies cercanas relacionadas a éste, mostró estar compuesto de moléculas simples y de compuestos primarios fibrosos, ambos en evidente movimiento.

Hay tres puntos de gran importancia que yo estaba ansioso por averiguar respecto a estas moléculas, estos eran: su forma, si son de tamaño uniforme, y su magnitud absoluta. No obstante, no estoy enteramente satisfecho con lo que he sido capaz de averiguar sobre cualquiera de ellos.

Con respecto a la forma, he establecido que la molécula es esférica y esto lo he hecho con cierta seguridad; admitiendo las aparentes excepciones, a mi parecer, por la explicación que he dado anteriormente sobre el supuesto de que muchas partículas son compuestas. Este supuesto en algunos de los casos es de hecho apenas conciliable con sus tamaños aparentes, y requiere para su respaldo admitir posteriormente que la forma de la molécula pueda ser cambiada. En las partículas antes consideradas como combinaciones primarias de moléculas, un cierto cambio de forma debe ser permitido; e incluso la molécula simple por sí misma me ha parecido que algunas veces sufre ligeras modificaciones en este sentido cuando está en movimiento.

Mi manera de estimar la magnitud absoluta y uniformidad de las moléculas, encontradas en varios cuerpos sometidos a examen, consistía en colocarlas sobre un micrómetro dividido en 5 milésimas de pulgada en las cuales las líneas eran muy distintivas y ocasionalmente sobre un micrómetro dividido en líneas de 10 milésimas, no fácilmente visibles sin la aplicación de un contraste, como el empleado por el Dr. Wollaston, pero el cual en mi investigación fue infructuoso.

Los resultados así obtenidos sólo pueden ser considerados como aproximaciones, los cuales, quizás por obvias razones, no son totalmente confiables. Sin embargo, dado el número y de acuerdo con el grado de concordancia de mis observaciones, estoy completamente dispuesto a creer que la molécula simple es de tamaño uniforme, aunque ya que existe en varias sustancias y los exámenes fueron hechos en circunstancias más o menos favorables, es necesario indicar que su diámetro pareció variar entre 1/13000 y 1/20000 de pulgada.⁹

⁹ El Sr. Dollond, a mi solicitud, analizó el supuesto polen de *Equisetum virgatusu* con su microscopio acromático teniendo en su foco un vidrio dividido en 10,000 milésimas de pulgada, por encima del cual el objeto es colocado; y aunque el mayor número de partículas o moléculas vistas fueron de alrededor de 120,000 milésimas, aun la más pequeña no excedió las 130,000 milésimas de pulgada.

No entraré en detalles adicionales, ni me arriesgaré a hacer alguna conjeta con respecto a estas moléculas, las cuales parecen existir tanto en cuerpos orgánicos como inorgánicos; y además es necesario mencionar las principales sustancias de las cuales no he sido capaz de obtener dichas moléculas. Estos son aceite, resina, cera y sulfuro, de metales que no he podido reducir a aquel estado de división necesaria para su separación y, por último, cuerpos solubles en agua.

Regresando al objetivo con el cual mi investigación comenzó, y que en realidad era el único que originalmente tenía en mente, todavía tenía que examinar el modo probable de acción de las partículas más grandes (peculiares) del polen, las cuales aunque en muchos casos disminuyeron en número antes de que el grano pudiera haber sido aplicado al estigma, y particularmente en *Clarckia*, la primera planta examinada, aparecieron en mayores proporciones en muchas otras plantas, y en casi todos los casos puede suponerse su existencia en cantidades suficientes como para ser agentes esenciales en el proceso de fecundación.

Tenía ahora que averiguar si sus acciones estaban limitadas al órgano externo, o si era posible seguirlas al núcleo mismo del óvulo. Sin embargo, después de mis esfuerzos por seguirlas a través del tejido del estilo en las plantas que tenían características favorables para esta investigación, tanto en el tamaño y la forma de las partículas como en el desarrollo de las partes femeninas, particularmente las Onagrarias, no tuve éxito; ni en éste ni en ningún otro grupo examinado, no he sido capaz de encontrarlas en cualquier otra parte del órgano femenino que no sea el estigma. Incluso, en aquellas familias en las cuales he supuesto que el óvulo se encuentra al descubierto, particularmente en las Cicadeas (árboles considerados fósiles vivientes) y Coníferas, estoy inclinado a pensar que la acción directa de estas partículas, o del polen que las contiene, se ejerce más bien sobre el orificio de la membrana que en el ápice del núcleo. Una opinión en parte fundada por el marchitamiento parcial confinado en un lado del orificio de aquella membrana en el alerce (un pino); apariencia que he resaltado durante varios años.

Para observadores sin el conocimiento de la existencia de las moléculas activas elementales, tan fácilmente separables por presión en todos los tejidos vegetales, y que son liberadas y llegan a manifestarse al descomponerse las partes semitransparentes, no sería difícil seguir los gránulos a través de todo el estilo: y como estos gránulos no son siempre visibles en los estados tempranos y de madurez del órgano, naturalmente esto hace suponer que se derivan del polen, al menos en los casos en los cuales las partículas contenidas no son notablemente diferentes en tamaño y forma de las moléculas bajo estudio.

Es necesario también observar que en muchas, o en casi todas las plantas, en adición a las moléculas separables del estigma y estilo antes de la aplicación del polen, otros gránulos de mayor tamaño son obtenidos por presión, los cuales en algunos casos son muy parecidos a las partículas del polen en la misma planta, y en pocos casos llegan a excederlas en tamaño: estas partículas pueden ser consideradas como la combinación primaria de las moléculas, análogas a las observadas en cuerpos minerales y en varios tejidos orgánicos.

Del recuento anteriormente hecho sobre las observaciones en las *Asclepiadeas*, *Periplocareas* y *Orquídeas*, y particularmente en las *Asclepiadeas*, es difícil imaginar, al menos en esta familia, que pueda haber una transmisión de partículas de la masa del polen, las cuales no se rompen en ninguno de los procesos del estigma; y aún en estos procesos nunca he podido observarlas, aunque en general sean lo suficientemente transparentes para mostrar que hay partículas presentes. Pero si esto es un planteamiento correcto de la estructura de los órganos sexuales en las *Asclepiadeas*, la pregunta respectiva a esta familia no sería si las partículas en el polen son transmitidas a través del estigma y estilo al óvulo, más bien la pregunta sería si es necesario un contacto de estas partículas con la superficie del estigma para la fecundación.

Por último, puede destacarse que en aquellos casos ya examinados, en los cuales el ápice del núcleo del óvulo nunca llega a tener contacto con los probables canales de fecundación, son casos más desfavorables a la opinión de la transmisión de las partículas del polen al óvulo, que aquellos en los que se considera la acción directa de estas partículas sobre las partes externas del órgano femenino.

Las observaciones, de las cuales he dado un breve resumen, fueron hechas en los meses de junio, julio y agosto de 1827. Aquellas relacionadas simplemente con la forma y el movimiento de las partículas peculiares de polen fueron ya establecidas, y varios de los resultados obtenidos durante estos meses fueron mostrados a muchos de mis amigos, particularmente al Sr. Bauer, Sr. Bicheno, Dr. Bostock, Dr. Fitton, Sr. E. Forster, Dr. Henderson, Sir Everard Home, Capitán Home, Dr. Horsfield, Sr. Koenig, Sr. Lagasca, Sr. Lindley, Dr. Maton, Sr. Menzies, Dr. Prout, Sr. Renouard, Dr. Roget, Sr. Stokes y Dr. Wollaston; y la existencia general de la moléculas

activas en cuerpos tanto orgánicos como inorgánicos, su aparente indestructibilidad por calor, y varios de los hechos respecto a las combinaciones primarias de las moléculas fueron comunicadas al Dr. Wollaston y al Dr. Stokes en la última semana de agosto.

Ninguna de estas personas es mencionada para reforzar la validez de las declaraciones hechas; el único objeto de citarlas es demostrar el periodo en que mis observaciones fueron hechas dentro de las fechas dadas en el título del presente trabajo.

La averiguación de los hechos respecto de los movimientos de las partículas de polen nunca fueron consideradas por mí como completamente originales; yo sabía que este movimiento había sido visto por Needham e independientemente por Gleichen. Needham no sólo observó el movimiento de las partículas de polen en el agua, sino también en muchos casos destacó un cambio de lugar dentro del grano. Sin embargo, no proporcionó resultados satisfactorios de la forma y ni de los movimientos de estas partículas, y en algunos casos parece que las partículas habían sido confundidas con las moléculas elementales, cuya existencia no se conocía.

Antes de que me dedicara a esta investigación en 1827, estaba informado sólo del resumen que me había proporcionado el Sr. Adolphe Brongniart, de una valiosa memoria bien elaborada, titulada "Recherches sur la Génération et le Développement de l'Embrión dans les Végétaux Phanérogames", la cual él ya había leído para la Academia de Ciencias de París, y había sido publicada en "Annales des Sciences Naturelles".

Ni en el resumen ni en el cuerpo de la memoria, la cual me fue entregada por el Sr. Brongniart con gran imparcialidad en su estado original, había algún tipo de observación que apareciera importante para el autor, sobre el movimiento o formas de las partículas; y su intento por seguir estas partículas al óvulo con un conocimiento tan imperfecto de sus características distintivas estaba lejos de ser satisfactorio. Sin embargo, a finales del otoño de 1827, el Sr. Brongniart, teniendo en mano un microscopio construido por Amici, el célebre profesor de Modena, tuvo la oportunidad de averiguar varios hechos importantes sobre estos puntos y sus resultados en las notas anexas a su memoria. Acerca de la precisión general de sus observaciones sobre el movimiento, forma y tamaño de los gránulos, como él llama a las partículas, le tengo mucha confianza. Pero en el intento de seguir a estas partículas a través de todo su recorrido, él ha pasado por alto dos puntos muy importantes de la investigación.

En efecto, en primer lugar, evidentemente no estaba familiarizado con el hecho de que las moléculas esféricas activas generalmente existen en el grano del polen junto con sus partículas propias; tampoco aparece en ninguna parte de su memoria que él se hubiera dado cuenta de la existencia de moléculas con movimientos espontáneos o inherentes y distintos de las partículas peculiares del polen, aunque él indudablemente las vio, y en algunos casos, a mi parecer, las describió como las partículas propias del grano de polen.

Segundo, él ha quedado satisfecho con la apariencia externa al llegar a la conclusión de que las partículas no son capaces de tener movimiento en el estilo o estigma antes de la fecundación.

El que tanto las moléculas simples como las partículas más grandes de formas diferentes, e igual capacidad de movimiento, si existían en el estilo puede comprobarse fácilmente en muchas de las plantas sometidas a investigación; particularmente en el *Antirrhinum majus*, del cual él destaca que dichas moléculas o partículas provienen de los granos de polen que se adhieren al estigma.

Hay otros aspectos sobre los granos del polen y de las partículas contenidas en ellos en los cuales también difiero del Sr. Brongniart; por ejemplo en su suposición de que las partículas no son formadas en el grano en sí mismo, sino en la cavidad de la antera; en su aserción respecto a la presencia de poros en la superficie del grano en su estado primario, a través de los cuales las partículas formadas entran a la cavidad de la antera; y por último, difiero de la existencia de una membrana que forma una masa cilíndrica y que es expulsada del grano del polen.

Sin embargo, reservo mis observaciones sobre éstos y varios otros tópicos conectados con el objeto de la presente investigación para un recuento más detallado, el cual tengo intención de dar más adelante.

————— * ———

OBSERVACIONES ADICIONALES SOBRE MOLÉCULAS ACTIVAS

POR ROBERT BROWN, Miembro de la Real Sociedad de Londres

Hace aproximadamente doce meses escribí un recuento de las observaciones microscópicas hechas en el verano de 1827, sobre las partículas contenidas en el polen de plantas; y sobre la existencia general de moléculas activas en cuerpos orgánicos e inorgánicos.

En el presente suplemento mis objetivos son: explicar y modificar algunas de sus declaraciones, y referirme a algunos de los comentarios que se han hecho sobre la exactitud u originalidad de las observaciones y sobre las causas que se han considerado suficientes para la explicación del fenómeno.

En primer lugar, tengo que resaltar una aserción errónea de más de un investigador, a saber, que yo he establecido que las moléculas activas se encuentran animadas (así lo estableció).¹⁰ Este error probablemente surgió por haber comunicado los hechos en el mismo orden en que ocurrieron, acompañados por los puntos de vista que se presentaron en las distintas etapas de la investigación; y en un caso, en haber adoptado cierto lenguaje, al referirme a la opinión de otro investigador en la primera parte del tema.

Aunque me he esforzado estrictamente en limitarme a la declaración de los hechos observados, al hablar sobre las moléculas activas, no he podido, en todos los casos, evitar la introducción de una hipótesis, pues tal es la suposición de que las partículas de mayor tamaño, igualmente activas y frecuentemente de formas muy diferentes, son compuestos primarios de estas moléculas; una suposición en la cual hice mucha insistencia, siendo sólo una conjetura, de lo cual me arrepiento, especialmente porque parece estar conectada con la opinión de la identidad absoluta de las moléculas, sin importar la fuente de la que fueron obtenidas.

En este último tema, los únicos dos puntos en que me concentré eran su tamaño y forma: y aunque estaba, en general, inclinado a pensar que en este punto las moléculas eran similares sin importar de qué sustancias eran obtenidas, la evidencia entonces presentada como soporte para esa suposición era más que insatisfactoria; y podría agregar, que estoy todavía menos satisfecho ahora que esto es un hecho. Pero aunque la uniformidad de las moléculas en esos dos aspectos hubiera sido absolutamente establecida, eso no necesariamente hubiera significado, ni lo establecí en ningún momento, como se me ha imputado, que ellas también coincidieran en todas sus demás propiedades y funciones.

He destacado que ciertas sustancias, particularmente el sulfuro, la resina y la cera, no arrojaron partículas activas, lo cual, sin embargo, se debió a una manipulación defectuosa. Desde entonces, he obtenido dichas partículas de todos estos cuerpos: al mismo tiempo, debo notar que ya había sido informado de la existencia de partículas en el sulfuro por parte de mi amigo el Sr. Lister.

En mi investigación posterior a la publicación de mis observaciones he empleado principalmente el microscopio simple mencionado en mi primer informe hecho para mí y por el Sr. Dollond y del cual los tres lentes que yo generalmente utilicé fueron de 40, 60 y 70 milésimas de pulgada de enfoque.

Muchas de las observaciones se han repetido y confirmado con otros microscopios simples con lentes de poderes similares, también con los mejores microscopios compuestos acromáticos, de mi propiedad o de mis amigos.

El resultado de la investigación, al momento, esencialmente concuerda con lo que se puede encontrar en mi informe impreso y podría ser puesto brevemente en los siguientes términos, a saber:

¹⁰ La expresión dentro del paréntesis es sólo una apreciación del autor del libro.

Que partículas extremadamente diminutas de materia sólida, ya sea obtenidas de sustancias orgánicas o inorgánicas, cuando se encuentran suspendidas en agua, o en algún otro fluido acuoso exhiben movimientos que no puedo explicar, y que por su irregularidad y su aparente independencia se parecen en gran medida a los movimientos más lentos de algunos de los más simples corpúsculos en infusiones.

Que las partículas más pequeñas en movimiento, observadas, y que yo he nombrado moléculas activas, parecen ser esféricas o casi esféricas y tienen un diámetro de entre 1/20,000 y 1/30,000 milésimas de pulgada, y que otras partículas de tamaños considerablemente mayores y de diversos tamaños, de formas similares o diferentes, también presentan movimientos análogos en circunstancias similares.

Ya he establecido mi opinión de que estos movimientos de las partículas no son provocados por corrientes en los fluidos que las contienen, ni dependen del movimiento interno que podría suponerse que acompaña a su evaporación.

Sin embargo, estas causas de movimiento, simples o combinadas con otras, como atracciones y repulsiones entre las partículas por sí mismas, el equilibrio inestable en el fluido en el cual están suspendidas, su acción capilar y en algunos casos la separación de materia volátil o de diminutas burbujas de aire, han sido considerados por varios observadores como evidencia suficiente.

Algunas de las presuntas causas aquí declaradas, junto con otras que he considerado que no es necesario mencionar, no deben ser pasadas por alto o engañar a los observadores en cualquier experiencia en investigaciones microscópicas; y la insuficiencia de estas causas puede ser demostrada satisfactoriamente, creo yo, por medio de un experimento simple.

Este experimento consiste en reducir la gota de agua que contiene a las partículas a un tamaño microscópico y prolongar su existencia sumergiéndola en algún fluido transparente de inferior densidad, con el cual no sea miscible (no se pueda mezclar), y en el cual su evaporación sea extremadamente lenta. Si se agrega una proporción considerablemente menor de agua debidamente impregnada con partículas de aceite de almendra, el cual es un fluido que tiene estas propiedades, y los dos fluidos se agitan juntos, se producirán inmediatamente gotas de agua de varios tamaños de 1/50 a 1/2000 milésimas de pulgada de diámetro. De estas, las más diminutas necesariamente contendrán pocas partículas y algunas ocasionalmente podrán ser observadas con una sola partícula. De esta manera, gotas diminutas que serían disipadas en menos de un minuto si se expusieran al aire podrán ser retenidas por más de una hora. Pero en todas las gotas de esta manera obtenidas y protegidas, el movimiento de las partículas tiene lugar con una actividad no disminuida, mientras que dos de las posibles causas del movimiento, evaporación y atracción-repulsión mutua, ambas son anuladas.

Cabe destacar, que las corrientes del centro hacia la circunferencia, al principio apenas perceptibles, luego más obvias y al final muy rápidas, las cuales existen constantemente en gotas expuestas al aire y que pueden alterar completamente el movimiento usual de las partículas, se pueden prevenir totalmente en gotas pequeñas sumergidas en aceite, un hecho que sin embargo es sólo aparente en las gotas que son aplanas, como resultado de estar cerca o absolutamente en contacto con el portaobjetos del microscopio.

El hecho de que el movimiento de las partículas no es producido por ninguna causa actuando sobre la superficie de la gota, puede ser probado mediante el experimento inverso: mezclando una pequeña proporción de aceite con el agua que contiene a las partículas hará que se formen gotas diminutas de aceite, algunas de ellas no excederán en tamaño a las mismas partículas, sobre la superficie de la gota de agua, y éstas gotas se encontrarán casi o completamente en reposo mientras que las partículas en el centro o en el fondo de las gotas continuarán moviéndose con el usual grado de actividad.

Gracias a esta idea tan ingeniosa para reducir el tamaño y prolongar la existencia de las gotas que contienen a las partículas, la cual fue tan simple y no se me había ocurrido hasta hace poco, se ha obtenido un gran conocimiento sobre el tema, quizás el suficiente como para permitir determinar la causa real de los movimientos en cuestión.

De los pocos experimentos que he hecho desde que esta manera de realizar observaciones fue adoptada, algunos me han parecido tan curiosos que no me aventuraré a comentarlos hasta que sean verificados con repeticiones frecuentes y cuidadosas.

Concluiré los comentarios supplementarios a mis anteriores observaciones haciendo notar cuánto éstas han sido anticipadas.

Que el movimiento molecular haya sido algunas veces confundido con movimiento animado por varios de los investigadores anteriores parece extremadamente probable en varios pasajes de los trabajos de Leeuwenhoek (1632-1723), así como en el muy interesante trabajo de Stephen Gray publicado en el volumen 19 de "Philosophical Transactions".

Incluso Needham y Buffon, quienes dieron origen a la hipótesis de partículas orgánicas, parecen haber cometido, en ocasiones, el mismo error. Y me inclino a creer que Spallanzani, a pesar de uno de sus comentarios con respecto de Needham y Buffon, incluye tanto a moléculas activas como a "animales minúsculos" en su informe "Animaletti d'ultimo ordine" (Animales de último orden).

Asimismo, puedo mencionar que Gleichen, el descubridor del movimiento de las partículas de polen, también observó movimientos similares en las partículas del óvulo de *Zea Mays*.

Wrisberg y Müller, quienes adoptaron en parte la hipótesis de Buffon, establecen que los glóbulos, de los cuales suponen que están formados todos los cuerpos orgánicos, tienen capacidad de movimiento; y Müller distingue estos glóbulos orgánicos en movimiento entre los verdaderos "animales minúsculos" que, según agrega, han sido confundidos por algunos observadores muy respetados.

En 1814 el Dr. James Drimmond de Belfast, publicó en el séptimo volumen de "Transactions of the Royal Society of Edinburgh", un artículo muy valioso titulado "On Certain Appearances Observed in the Dissections of the Eye of Fish" (Sobre ciertas apariencias observadas en la disección de los ojos de pescado).

En este ensayo, el cual me arrepiento de haber desconocido totalmente cuando publiqué el informe de mis observaciones, el autor da un reporte notable de los movimientos de corpúsculos de la parte plateada del humor coroideo de los ojos de los pescados.

Estos corpúsculos fueron examinados con un microscopio simple y, dado que son objetos opacos, se iluminó con una fuerte luz a la gota de agua en la cual estaban suspendidas. Las apariencias son detalladamente descritas, y un muy ingenioso razonamiento es empleado para mostrar que, para explicar los movimientos, la conjectura menos probable es suponer que la partícula se encontraba animada.

Como estos cuerpos fueron vistos por el reflejo y no por la transmisión de luz, no era posible obtener una idea correcta de sus movimientos específicos. Las partículas esféricas más diminutas o moléculas activas, las cuales he podido encontrar en abundancia junto con este tipo de partículas, se observan mejor cuando se incrementa el alcance de los instrumentos de medición.

Las investigaciones del Dr. Drummond se limitaron estrictamente a los ojos y escamas de los pescados; y como no parece haber sospechado que pudieran existir partículas con movimientos análogos en otros cuerpos orgánicos, y mucho menos en materia inorgánica, me considero anticipado por este agudo observador únicamente al mismo grado que por Gleichen y en menor grado que Müller, de cuyas declaraciones ya he hecho referencia.

Todos los investigadores mencionados se han limitado al estudio de partículas de cuerpos orgánicos. Sin embargo, en 1819 el Sr. Bywater, de Liverpool, publicó un reporte sobre Observaciones Microscópicas, en las que afirmó que no solamente los tejidos orgánicos, sino también substancias inorgánicas, consisten de lo que él denomina partículas animadas o irritables.

Una segunda edición de su ensayo apareció en 1828, probablemente modificado en algunos aspectos, pero que concuerda esencialmente con las afirmaciones de la edición de 1819, la cual nunca he visto, y cuya existencia yo ignoraba cuando publiqué mi informe.

De la edición de 1828, la cual conseguí hasta hace poco, parece que el Sr. Bywater empleó un microscopio compuesto de una construcción llamada "Culpepper", en el que el objetivo fue examinado con luz de sol brillante y con la luz del espejo dirigida en forma oblicua sobre el portaobjetos como para dar un color azul a la infusión.

El primer experimento lo cito en sus propias palabras:

"Una porción pequeña de harina debe ser puesta en una placa de vidrio y mezclada con una gota de agua, después debe ser examinada inmediatamente al microscopio; si es revuelta y vista bajo la luz de sol, como se describió antes, aparecerá evidentemente llena de innumerables cuerpos lineales pequeños, moviéndose y girando alrededor con intensa actividad".

Cuerpos similares, e igualmente en movimiento, fueron obtenidos a partir de tejidos vegetales y animales, de moho vegetal, de roca silícea tras calentarla al rojo vivo, de carbón, de cenizas y otros cuerpos inorgánicos.

Considero que al detallar la forma en la que los experimentos del Sr. Bywater fueron realizados, he dejado a otros investigadores que juzguen hasta qué punto y a qué clase de ilusión óptica pudo él estar sujeto, de lo cual él no parece haberse percatado. Sólo tengo que agregar que esto no es una cuestión de prioridad; ya que si se va a depender de sus observaciones, las mías deben hacerse totalmente a un lado.

28 de julio de 1829.

1.2 Bibliografía sugerida

- Brown, R. (1828). "A Brief Account on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies". *Edinburgh New Philosophical Journal*, July-September, pp. 358-371.
- Brown, R. (1828). "A Brief Account of Microscopical Observations on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies". Unpublished.
- Brown, R. (1829). "Additional Remarks on Active Molecules". Unpublished.

II. PREREQUISITOS PARA EL ANÁLISIS DE RIESGOS FINANCIEROS

- 2. Conceptos básicos de teoría de probabilidad
 - 3. Movimiento Browniano y proceso de Wiener
 - 4. Elementos del cálculo estocástico
 - 5. Diferenciación estocástica
 - 6. Martingalas y movimiento Browniano
 - 7. Teorema de Girsanov
 - 8. Ecuación de difusión de calor

CAPÍTULO 2

CONCEPTOS BÁSICOS DE TEORÍA DE PROBABILIDAD

Conceptos básicos de este capítulo:

- Experimento aleatorio
- Espacio muestral
- σ -álgebra
- Medida de probabilidad
- σ -álgebra de Borel en \mathbb{R}
- Variable aleatoria
- Función de distribución
- Esperanza condicional
- Convergencia estocástica
- Enfoque Bayesiano

2.1 Introducción

La teoría moderna de probabilidad se debe a Andrei (o Andrey) Kolmogorov (1903-1987). Uno de los matemáticos más reconocidos del siglo XX. Kolmogorov proporcionó los axiomas que fundamentan la teoría de probabilidad. Esta contribución aparece en el artículo “Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung”, publicado en 1933. Kolmogorov también hizo contribuciones cruciales en: mecánica estadística, procesos estocásticos, teoría de información, mecánica de fluidos y sistemas dinámicos no lineales.

Kolmogorov se graduó en la Universidad Estatal de Moscú en 1925. Posteriormente, en 1931, llegó a ser profesor de la misma. En 1939, fue electo miembro en la Academia Soviética de Ciencias y recibió el Premio Lenin en 1965 y la Orden Lenin en siete ocasiones.



Fuente: www.exploratorium.edu
Andrei Kolmogorov (1903-1987)

En este capítulo se presentan varios de los conceptos de probabilidad que se emplean en teoría financiera. Se discuten los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral, σ -álgebra, espacio medible, medida de probabilidad, espacio de probabilidad, σ -álgebra aumentada, variable aleatoria, independencia estocástica, probabilidad condicional, esperanza condicional y convergencia estocástica.

2.2 Experimento aleatorio

El concepto básico sobre el que descansa toda la teoría de probabilidad es el de experimento aleatorio. Un experimento aleatorio \mathcal{E} es un experimento que presenta las siguientes tres propiedades:

- (i) tiene al menos dos posibles resultados,
- (ii) el conjunto de posibles resultados se conoce antes de que el experimento se realice, y
- (iii) puede repetirse esencialmente bajo las mismas condiciones.

Como puede observarse, la definición de experimento aleatorio requiere de algunos supuestos que permitan la elaboración de una teoría matemática de la probabilidad. Si no es posible determinar de antemano el conjunto de posibles resultados, el experimento no es aleatorio de acuerdo con (ii), y no será objeto de estudio de la teoría de probabilidad. Por ejemplo, considere el experimento de observar la bóveda celeste a través de un telescopio nuevo, el cual tiene potencia superior a todos sus antecesores. En este caso, es difícil predecir lo que se puede observar, y es todavía más difícil predeterminar al conjunto de posibles resultados y, por lo tanto, el experimento no es aleatorio y no es objeto de estudio de la teoría de probabilidad. Ahora bien, si el experimento consiste en observar el precio de una acción después de una semana, por lo menos se sabe que el precio no será un número negativo. Si se adopta una posición exagerada y se escribe $\Omega = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como el conjunto de posibles precios, entonces se obtendrá un experimento aleatorio. Por supuesto, el espacio muestral podría describirse en forma más realista estableciendo una cota superior para el precio de una (sola) acción, quizás el capital social de la empresa, aunque todavía es muy grande.

Por otro lado, con respecto a la característica (iii), la más delicada de todas, si una misma persona lanza una misma moneda en varias ocasiones, se podría aceptar, sin ser muy exigente, que el experimento se estará repitiendo esencialmente bajo las mismas condiciones. Sin embargo, si se cambia de moneda y se mantiene la misma persona, el experimento no se estará repitiendo bajo las mismas condiciones, y por definición tampoco es aleatorio. ¿Qué sucede si se cambia al lanzador de la moneda? un adulto por un adolescente. En este caso, el experimento todavía podría considerarse aleatorio. No obstante, si se es demasiado exigente en replicar las condiciones del experimento, entonces ningún experimento que se lleve a cabo será aleatorio, a menos que se vea como un ente ideal, es decir, como algo que sólo existe en la mente. Sin embargo, no hay problema con esto, sino por el contrario, ésta es la mejor posición para iniciar la teoría matemática de la probabilidad, pues los objetos de estudio de las matemáticas son precisamente los entes ideales.

2.3 Espacio muestral

El conjunto de todos los posibles resultados, o estados de la naturaleza, de un experimento aleatorio, \mathcal{E} , es llamado espacio muestral y será denotado por Ω . Los subconjuntos de Ω son llamados eventos, y en ocasiones sucesos. Por ejemplo, si \mathcal{E} consiste en observar el resultado de lanzar una moneda, entonces $\Omega = \{a, s\}$ donde a representa águila y s sol (cara y cruz). Es decir, el conjunto de todos los posibles resultados se circunscribe a águila o sol. En el caso extremo de que un posible resultado fuera que la moneda cayera de canto, se tendría $\Omega = \{a, s, c\}$, donde c representa que la moneda cayó de canto. ¿Existe alguna razón para no considerar a c como un posible resultado?

2.4 σ -álgebra

El concepto de σ -álgebra es otro de los pilares de la teoría matemática de la probabilidad. Una σ -álgebra es un conjunto que tiene como elementos a aquellos eventos que contienen información relevante para el experimentador. En este marco, sólo se tienen que asignar probabilidades a los

elementos de la σ -álgebra, de otra manera se estaría simplemente trabajando de más. ¿Para qué calcular probabilidades de eventos sin interés para el experimentador? El cálculo de la probabilidad de algún evento requiere, en general, del conteo de los resultados que sean favorables a la ocurrencia de dicho evento. Por esta razón, el concepto de σ -álgebra requiere de un procedimiento para contar, el cual está disponible en el concepto de sucesión.

Sea Ω un espacio muestral, no vacío. Una σ -álgebra de Ω es un conjunto de subconjuntos de Ω , denotado por \mathcal{F} , que cumple las siguientes tres propiedades:

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- (ii) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de \mathcal{F} , entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F};$$

- (iii) Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\} \in \mathcal{F}$.

Es importante destacar que la condición (ii) es aplicable solamente a sucesiones, concretamente a familias numerables de eventos, y no a familias arbitrarias de elementos de \mathcal{F} . La pareja (Ω, \mathcal{F}) es llamada un espacio medible, debido a que es posible definir una medida de probabilidad sobre dicho espacio. Algunas propiedades de las σ -álgebras se mencionan a continuación:

- (a) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- (b) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de \mathcal{F} , entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F};$$

- (c) Si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{F}$.

Dado un espacio muestral Ω , la σ -álgebra más pequeña está dada por $\{\Omega, \emptyset\}$ y la más grande por el conjunto potencia, 2^{Ω} , es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de Ω . Por ejemplo, $2^{\mathbb{R}}$ es una σ -álgebra realmente enorme.

Las σ -álgebras son utilizadas para representar estructuras de información. Por ejemplo, si $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ se carece completamente de información, si $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ se cuenta con información completa. En general, no hay agentes que carecen completamente de información, ni que lo sepan todo, así que una σ -álgebra intermedia podría representar lo poco o mucho de la información disponible. En el caso de la moneda con $\Omega = \{a, s, c\}$, una σ -álgebra de interés podría ser $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, s\}, \Omega\}$, en donde la información que se tiene es si la moneda cayó de canto o no.

2.5 σ -álgebra generada por un conjunto

Claramente, la unión de σ -álgebras no es σ -álgebra y la intersección de σ -álgebras sí lo es. Sea \mathcal{D} una familia de subconjuntos de Ω . Se define la σ -álgebra generada por \mathcal{D} como:

$$\sigma(\mathcal{D}) = \bigcap \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra sobre } \Omega \text{ con } \mathcal{D} \subset \mathcal{F}\}$$

es fácil verificar que $\sigma(\mathcal{D})$ es una σ -álgebra, ya que la intersección de σ -álgebras es también una σ -álgebra. Por otro lado, $\sigma(\mathcal{D})$ es la σ -álgebra más pequeña que contiene a \mathcal{D} , pues cualquier otra σ -álgebra que contenga a \mathcal{D} debe contener a $\sigma(\mathcal{D})$. Si \mathcal{F} es una σ -álgebra y \mathcal{D} es una familia de subconjuntos de Ω , se dice que \mathcal{D} genera la σ -álgebra \mathcal{F} si $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{F}$.

Por otro lado, observe que si $B \subset \Omega$ y \mathcal{F} es una σ -álgebra de Ω , entonces

$$\mathcal{F}_B = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{F}\}$$

es una σ -álgebra de Ω . La σ -álgebra \mathcal{F}_B es llamada la σ -álgebra inducida por B . Por último, si \mathcal{A} es una familia de subconjuntos de Ω , la cual genera la σ -álgebra \mathcal{F} , entonces

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$$

genera la σ -álgebra \mathcal{F}_B .

2.6 Medida de probabilidad

El concepto de medida de probabilidad cuantifica la creencia sobre la ocurrencia del evento $A \in \mathcal{F}$. Una medida de probabilidad definida sobre un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) es una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ que satisface los siguientes tres axiomas, introducidos por Kolmogorov (1933):

- (i) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$;
- (ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- (iii) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en \mathcal{F} con $A_n \cap A_m = \emptyset$ para $n \neq m$, entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n). \quad (2.1)$$

Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ constituida por un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) y una medida de probabilidad \mathbb{P} definida sobre \mathcal{F} . Los ejemplos de espacios de probabilidad son numerosos porque el concepto de espacio de probabilidad es demasiado general. Éste puede ser aplicado a diversas situaciones que se presentan en el estudio de los fenómenos financieros. La medida $\mathbb{P}(A)$ cuantifica la creencia acerca de la ocurrencia del evento $A \in \mathcal{F}$. Algunas propiedades importantes de \mathbb{P} son:

- (i) Si $A, B \in \mathcal{F}$ con $A \subset B$, entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$. En efecto, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$.
- (ii) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de elementos en \mathcal{F} , en el sentido $A_n \subset A_{n+1}$ para toda n , entonces

$$\mathbb{P}(A_n) \rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

cuando $n \rightarrow \infty$. En efecto, considere la sucesión $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ definida mediante $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$ y, en general, $B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$. De esta manera, los eventos B_n son ajenos entre sí,

$$\bigcup_{k=1}^n B_k = A_n$$

para toda n y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

En virtud de (2.1), se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k) \\ &\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

- (iii) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de elementos de \mathcal{F} , en el sentido $A_{n+1} \subset A_n$ para toda n , entonces

$$\mathbb{P}(A_n) \rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

- (iv) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión arbitraria de elementos de \mathcal{F} , entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n),$$

ya que puede presentarse doble conteo en la suma.

2.7 Conjuntos nulos y σ -álgebra aumentada

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Se dice que A es un evento nulo de \mathcal{F} si $\mathbb{P}(A) = 0$. Sea \mathcal{N} el conjunto de todos los eventos nulos de \mathcal{F} , es decir,

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F} \mid \mathbb{P}(A) = 0\}.$$

Se dice que una σ -álgebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ es aumentada con respecto de \mathcal{F} si \mathcal{G} contiene todos los eventos nulos de \mathcal{F} , es decir, $\mathcal{N} \subset \mathcal{G}$. Asimismo, si $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, lo cual significa que \mathcal{D} es una familia de conjuntos de \mathcal{F} , se define la σ -álgebra aumentada generada por \mathcal{D} , denotada por $\tilde{\sigma}(\mathcal{D})$, como la σ -álgebra generada por \mathcal{D} y \mathcal{N} , es decir,

$$\tilde{\sigma}(\mathcal{D}) = \sigma(\mathcal{D} \cup \mathcal{N}).$$

Ésta es la σ -álgebra aumentada más pequeña contenida en \mathcal{F} , la cual contiene a \mathcal{D} . Cualquier otra σ -álgebra aumentada que contenga a \mathcal{D} deberá contener a $\tilde{\sigma}(\mathcal{D})$.

2.8 σ -álgebra de Borel en \mathbb{R} y espacios métricos

En esta sección se introduce la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R} . Considere los intervalos semiabiertos, o semicerrados, de la forma $(a, b]$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. La σ -álgebra de Borel en \mathbb{R} , denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ -álgebra generada por los intervalos $(a, b]$. Es decir, si $\mathcal{D} = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, entonces $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{D})$. Es fácil mostrar que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contiene todos los intervalos de la forma (a, ∞) ó $[a, \infty)$, ya que

$$(a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, a+n]$$

y

$$[a, \infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - (1/n), \infty).$$

También, observe que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contiene todos los intervalos de la forma $(-\infty, b]$ y $(-\infty, b)$, pues sus complementos corresponden a los conjuntos anteriores. Cualquier intervalo acotado es una intersección de dos intervalos de las formas expuestas anteriormente.

Un espacio métrico es un par (M, d) , donde M es un conjunto y d una función, $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$, que cumplen las siguientes tres condiciones:

- (i) Si $x, y \in M$, entonces $d(x, y) = d(y, x)$.
- (ii) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- (iii) Si $x, y, z \in M$, entonces $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

De esta manera, es posible cuantificar qué tan lejos se encuentran dos elementos de M entre sí. Sin embargo, una métrica no siempre coincide con lo que intuitivamente es una distancia. Por ejemplo, si d es una métrica en M , entonces

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

es también una métrica (normalizada), en M , que además cumple con $0 \leq d'(x, y) < 1$, es decir, todos los puntos se encuentran a distancias menores que la unidad. Un espacio métrico sobre \mathbb{R} se puede definir mediante $d(x, y) = |x - y|$.

Un espacio topológico es un par (\mathcal{U}, τ) , donde \mathcal{U} es un conjunto y τ es una familia de subconjuntos de \mathcal{U} , llamados conjuntos abiertos, tal que:

- (i) $\mathcal{U} \in \tau$ y $\emptyset \in \tau$.
- (ii) Si $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ es una familia arbitraria de elementos de τ , entonces

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \tau.$$

- (iii) Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$.

Se dice que un conjunto es cerrado si su complemento es abierto. \mathcal{U} y \emptyset son al mismo tiempo abiertos y cerrados. Considere, en particular, la siguiente topología τ en \mathbb{R} inducida por la métrica $d(x, y) = |x - y|$. En este caso, se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es abierto si para cada punto $x \in A$ existe un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < \epsilon\} \subset A.$$

Este conjunto es llamado una vecindad de x . La σ -álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es también generada por los conjuntos abiertos o por

$$\mathcal{A} = \{(q, r] \mid q, r \text{ números racionales}\}.$$

En efecto, sea \mathcal{G}_τ la σ -álgebra generada por los subconjuntos abiertos de \mathbb{R} , y sea $\sigma(\mathcal{A})$ la σ -álgebra generada por \mathcal{A} . Se verá que

$$\mathcal{G}_\tau = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Efectivamente, si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto y $x \in A$, entonces existen q y r racionales en A tal que $q < r$ y $x \in (q, r) \subset A$. Por lo tanto,

$$A = \bigcup (q, r].$$

Esta unión es numerable y, por lo tanto, cada conjunto abierto A pertenece a $\sigma(\mathcal{A})$, entonces $\mathcal{G}_\tau \subset \sigma(\mathcal{A})$. Asimismo, los intervalos de la forma $(q, r]$ están en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces se sigue que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Basta ahora demostrar que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}_\tau$ note que \mathcal{G}_τ contiene cada intervalo de la forma $(a, b]$, sin importar si a y b son racionales o no, y debido a que

$$(a, b] = \bigcap_n (a, b + 1/n),$$

es una intersección numerable de conjuntos abiertos, se sigue que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}_\tau$.

2.9 Funciones medibles y variables aleatorias

Esta sección define el concepto de función medible de un espacio medible a otro. Esta clase de funciones es importante porque las variables aleatorias son también funciones medibles.

Si (Ω, \mathcal{F}) y (Ω', \mathcal{F}') son dos espacios medibles y g una función, $g : \Omega \rightarrow \Omega'$, se dice que g es medible si $g^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ para toda $A \in \mathcal{F}'$. En particular, si (Ω, \mathcal{F}) es un espacio medible y se considera el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ y $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que X es $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -medible si $g^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Si $A \subset \Omega$, entonces la función indicadora de A definida por

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A, \end{cases}$$

es medible si y sólo si $A \in \mathcal{F}$. Es importante destacar que, en el caso general, la medibilidad de $g : \Omega \rightarrow \Omega'$ no implica que las imágenes directas $g(B)$ de subconjuntos medibles $B \in \Omega$ sean

subconjuntos medibles en Ω' . La medibilidad trata sobre las imágenes inversas de $g^{-1}(A)$ de conjuntos medibles $A \subset \Omega'$.

Considere ahora una función $g : \Omega \rightarrow \Omega'$, no necesariamente medible, la σ -álgebra generada por g , denotada por $\sigma(g)$, es la mínima σ -álgebra de Ω que hace a g una función medible. De esta manera,

$$\sigma(g) = \{g^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}'\}.$$

Si \mathcal{F} es σ -álgebra de Ω y $g : \Omega \rightarrow \Omega'$, se dice que g genera la σ -álgebra \mathcal{F} si $\sigma(g) = \mathcal{F}$.

Por último, vale la pena destacar que si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y (Ω', \mathcal{F}') son dos espacios medibles, $g : \Omega \rightarrow \Omega'$ y \mathcal{A}' es una familia de subconjuntos de Ω' , se define

$$\mathcal{A} = \{g^{-1}(B) : B \in \mathcal{A}'\}.$$

Si \mathcal{A}' genera la σ -álgebra \mathcal{F}' , entonces \mathcal{A} genera la σ -álgebra $\sigma(g)$. Evidentemente, la función g es medible si y sólo si $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$.

2.10 Funciones de distribución y densidad

Considere un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, X es $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -medible. En este caso, la función de distribución de X se define mediante

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\} = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} = \mathbb{P}\{X^{-1}((-\infty, x])\}.$$

Evidentemente, $F_X(-\infty) = 0$ y $F_X(\infty) = 1$. Claramente, F_X es continua por la derecha. En particular, si X es una variable aleatoria continua, entonces existe una función de densidad $f_X(x) \geq 0$ tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt.$$

De esta manera,

$$\mathbb{P}\{a < X \leq b\} = \int_a^b f_X(x)dx = \int_a^b dF_X(x) = F_X(b) - F_X(a).$$

2.11 Esperanza matemática, función generatriz de momentos y función característica

Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria continua y g una función Borel-medible ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -medible) tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty.$$

En este caso, se dice que la esperanza matemática

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$$

existe. Asimismo, se define la función generatriz de momentos de X como $\mathbb{E}[e^{uX}]$, $u \in \mathbb{R}$. Por último, se define la función característica de X mediante $\mathbb{E}[e^{iuX}]$, $i = \sqrt{-1}$, $u \in \mathbb{R}$, la cual siempre existe.

2.12 Vectores de variables aleatorias e independencia

Considere un vector de variables aleatorias (X, Y) definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que toman valores reales. La función de distribución conjunta de (X, Y) , se define como

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\}.$$

En este caso, $F_{X,Y}(-\infty, y) = F_{X,Y}(x, -\infty) = 0$ y $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$. Si X y Y son variables aleatorias continuas, entonces existe una función de densidad $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ tal que para todo $A \subset \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\mathbb{P}\{(X, Y) \in A\} = \int \int_A f_{X,Y}(x, y)dxdy. \quad (2.2)$$

Se dice que X y Y son independientes si $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Es fácil verificar que, en este caso, $\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)]$ para toda g y h Borel-mediables para las cuales $\mathbb{E}[|g(X)|]$ y $\mathbb{E}[|h(Y)|]$ son finitas.

2.13 Esperanza condicional

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Es decir, Ω representa al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio \mathcal{E} , \mathcal{F} es una σ -álgebra (*v.g.* el conjunto potencia de Ω) y \mathbb{P} es una medida de probabilidad, esto es, \mathbb{P} es una función con dominio en \mathcal{F} que toma valores en el intervalo $[0, 1]$, tal que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ y $\mathbb{P}(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$, así como la llamada propiedad σ -aditiva, $\mathbb{P}(\cup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$ para cualquier sucesión numerable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de \mathcal{F} .

Si A y B son dos eventos, esto es, si $A, B \in \mathcal{F}$ y si $\mathbb{P}(B) > 0$, se define la probabilidad condicional de A , dado B , mediante el número $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$. Observe que $A \mapsto \mathbb{P}(A|B)$ define una nueva medida de probabilidad en \mathcal{F} . Por lo tanto, si X es una variable aleatoria, es natural definir la esperanza condicional con respecto a B como la esperanza condicional con respecto a esta nueva medida de probabilidad, es decir,

$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{\mathbb{E}[X 1_B]}{\mathbb{P}(B)},$$

donde 1_B denota la función característica de B , es decir, 1_B es una función definida en Ω que toma el valor de 1 en B y 0 en su complemento, B^c . Observe que, en este caso, se cumple que

$$\mathbb{E}(1_A|B) = \frac{\mathbb{E}[1_A 1_B]}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{E}[1_{A \cap B}]}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B).$$

Considere ahora una partición (A_n) , finita o infinita numerable de Ω ($\cup_n A_n = \Omega$ y $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$) con $\mathbb{P}(A_n) > 0$ para toda n . Sea \mathcal{B} la σ -álgebra generada por todas las A_n . Se define la esperanza condicional de una variable aleatoria X con respecto a \mathcal{B} como una nueva variable aleatoria Y que toma el valor $\mathbb{E}[X|A_n]$ para cualquier evento A_n de la partición que genera a \mathcal{B} . Es decir,

$$Y = \sum_n \mathbb{E}[X|A_n] 1_{A_n}. \quad (2.3)$$

Para que Y sea una función medible con respecto a la σ -álgebra \mathcal{B} se requiere que $Y^{-1}(A) := \{\omega : Y(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}$ para cada intervalo de A en \mathbb{R} . Dada la σ -álgebra generada por la partición (A_n) , la función Y es \mathcal{B} -medible si y sólo si es constante sobre cada A_n , es decir, si es de la forma $Y = \sum_n a_n 1_{A_n}$ con $a_n \in \mathbb{R}$. Para cada variable aleatoria Y definida en (2.3) las siguientes propiedades son triviales:

- (i) Y es \mathcal{B} -medible,
- (ii) $\mathbb{E}[Y 1_{A_n}] = \mathbb{E}[X 1_{A_n}]$,
- (iii) $\mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[XZ]$ para toda variable Z acotada y \mathcal{B} -medible,
- (iv) $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]$.

La σ -álgebra \mathcal{B} tiene propiedades muy especiales, ya que ésta es generada por una partición finita o numerable de eventos, cada uno con una probabilidad estrictamente positiva. No obstante, frecuentemente, es necesario condicionar con respecto a una σ -álgebra que tiene eventos con probabilidad cero, y lo establecido anteriormente carece de sentido. Por ejemplo, suponga que se tiene un vector de variables aleatorias continuas (X, Y) que toman valores reales, con una densidad $f_{X,Y}(x, y)$, lo cual significa que para todo subconjunto de $A \subset \mathbb{R}^2$ se cumple que

$$\mathbb{P}\{(X, Y) \in A\} = \int \int_A f_{X,Y}(x, y) dx dy. \quad (2.4)$$

Comúnmente, es necesario calcular la probabilidad de Y dado que se conoce $X = x$, y más generalmente la esperanza de una función $g(Y)$ dado que se conoce $X = x$. En este caso, el evento $\{X = x\}$ tiene probabilidad cero para cada x . Se define la esperanza condicional de $g(Y)$ dado que $X = x$ como:

$$\mathbb{E}[g(Y)|X = x] = \frac{\int f_{X,Y}(x, y) g(y) dy}{\int f_{X,Y}(x, y) dy} \quad (2.5)$$

siempre y cuando el denominador sea distinto de cero. Con el propósito de formalizar lo anterior en situaciones generales, se hará lo siguiente: Si \mathcal{B} es una sub- σ -álgebra arbitraria de \mathcal{F} y X es una variable aleatoria integrable, entonces existe una variable aleatoria Y , denotada por $E[Y|\mathcal{B}]$, la cual es única excepto por un conjunto de probabilidad cero, llamada la esperanza condicional de la variable X con respecto de \mathcal{B} , tal que se caracteriza por las siguientes propiedades:

- (a) Y es \mathcal{B} -medible,
- (b) $E[YZ] = E[XZ]$ para toda variable Z acotada y \mathcal{B} -medible.

Observe que Y no es única, estrictamente hablando, ya que cualquier otra variable Y' la cual es \mathcal{B} -medible e igual a Y casi dondequiera es también una versión de $E[X|\mathcal{B}]$. Recíprocamente, cualesquiera dos versiones Y y Y' de la esperanza condicional de X son iguales casi dondequiera. Las siguientes propiedades son fáciles de deducir a partir de las condiciones anteriores. Observe primero que (b) se cumple para toda Z \mathcal{B} -medible tal que YZ es integrable.

- (1) $E[Y] = E[X]$,
- (2) $E[X|\mathcal{B}] = X$ si X es \mathcal{B} -medible,
- (3) $E[XZ|\mathcal{B}] = ZE[X|\mathcal{B}]$ si Z es \mathcal{B} -medible,
- (4) $E[aY + Z|\mathcal{B}] = aE[Y|\mathcal{B}] + E[Z|\mathcal{B}]$ si $a \in \mathbb{R}$ y Y, Z son integrables.

Observe también que si \mathcal{C} es una sub- σ -álgebra de \mathcal{B} , se tiene que

$$E[E[X|\mathcal{B}]|\mathcal{C}] = E[X|\mathcal{C}].$$

Evidentemente, la esperanza condicional de una constante es igual a dicha constante.

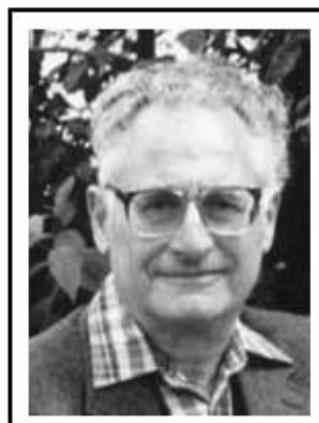
Considere nuevamente un vector de variables aleatorias (X, Y) que toman valores reales con densidad $f(x, y)$. Denote por \mathcal{B} la σ -álgebra generada por X . Debido a que $E[h(X)] = \int f(x, y)h(x)dxdy$ y $E[h(X)g(Y)] = \int f_{X,Y}(x, y)h(x)g(y)dxdy$, se tiene que:

$$E[g(Y)|\mathcal{B}] = \frac{\int f_{X,Y}(X, y)g(y)dy}{\int f_{X,Y}(X, y)dy},$$

lo cual justifica la fórmula (2.5).

2.14 Enfoque Bayesiano de probabilidad

En el enfoque Bayesiano, la probabilidad cuantifica, de manera subjetiva, el grado de credibilidad sobre la ocurrencia de un evento. Dicho enfoque también se puede fundamentar en los axiomas de Kolmogorov, sólo que la regla de multiplicación de la probabilidad condicional, la cual es un teorema que se deriva de los axiomas de Kolmogorov, se tiene que añadir como un axioma en el enfoque Bayesiano. Uno de los economistas que más contribuciones ha hecho al desarrollo de inferencia Bayesiana (más de 250 artículos) es Arnold Zellner (1927-). Entre sus aportaciones destacan el método de regresión de ecuaciones aparentemente no relacionadas (seemingly unrelated regression equations) y el método Bayesiano de Momentos (BMOM Analysis). Zellner obtuvo la licenciatura en física en Harvard y el doctorado en economía en la Universidad de California en Berkeley. Actualmente, se encuentra adscrito en el “Graduate School of Business”, de la Universidad de Chicago, como profesor emérito (H. G. B. Alexander) de economía y estadística.



Arnold Zellner

En el enfoque Bayesiano, es usual hacer inferencia sobre un parámetro desconocido $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ de una distribución P_θ , de la cual se cuenta con un valor x . En este caso, se supone que P_θ tiene densidad $f(x|\theta)$ (derivada de Radon-Nikodým) con respecto de una medida (fija) dominante λ definida sobre \mathbb{R} para toda $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$, esto es, $dP_\theta/d\lambda = f(x|\theta)$ para toda $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$, así

$$P_\theta(A) = \int_A f(x|\theta) d\lambda(x)$$

para todos los conjuntos de Borel $A \in \mathbb{R}$. Es típico en el enfoque Bayesiano contar con una densidad *a priori*, $\pi(\theta)$, que describa el conocimiento inicial sobre el grado de credibilidad de potenciales valores del parámetro θ . Se supone que $\pi(\theta)$ es una densidad con respecto de una medida μ definida sobre \mathbb{R} .

Una vez que una densidad *a priori*, $\pi(\theta)$, ha sido prescrita, entonces la información que proporciona la observación x sobre el parámetro es utilizada para modificar el conocimiento inicial, $\pi(\theta)$, mediante el teorema de Bayes a fin de obtener una distribución *a posteriori*, o simplemente distribución posterior, de θ , esto es,

$$f(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Es importante destacar que se ha utilizado la notación genérica f para representar diferentes densidades, las cuales se distinguen mediante sus argumentos. La distribución posterior es entonces utilizada para hacer inferencias sobre θ .

2.15 Convergencia estocástica

En el estudio de los números reales, el concepto de convergencia de una sucesión es único. Sin embargo, en el caso de sucesiones de variables aleatorias la situación es diferente, ya que existen diferentes posibilidades de convergencia, las cuales pueden ser: en distribución, en probabilidad, en L^q y casi seguramente (casi dondequiera), entre otras. En el transcurso de la presente sección se discuten varios tipos de convergencia de una sucesión de variables aleatorias.

2.15.1 Convergencia en distribución

Sea $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de distribución. Si existe una función de distribución F tal que, cuando $n \rightarrow \infty$, $F_n(x) \rightarrow F(x)$ en cada punto x en donde F es continua, se dice que $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a F . Este hecho se expresa frecuentemente como $F_n \xrightarrow{w} F$.

Si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias definidas sobre algún espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la correspondiente sucesión de funciones de distribución, se dice que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en distribución a una variable aleatoria X con función de distribución F si $F_n(x) \xrightarrow{w} F(x)$, lo cual se puede expresar mediante $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

2.15.2 Convergencia en probabilidad

Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias definidas sobre algún espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se dice que la sucesión $\{X_n\}$ converge en probabilidad a la variable aleatoria X si para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Lo anterior se puede escribir como $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Cabe señalar que la definición anterior se refiere a la convergencia de una sucesión de probabilidades.

2.15.3 Convergencia en \mathcal{L}^q

Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias definidas sobre algún espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tales que $E[|X_n|^q] < \infty$, con $q > 0$. Se dice que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en media q a una variable aleatoria X si $E[|X|^q] < \infty$ y

$$E[|X_n - X|^q] \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

lo cual es común denotar como $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^q} X$.

2.15.4 Convergencia con probabilidad 1

Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias definidas sobre algún espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se dice que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge casi seguramente a una variable aleatoria X si y sólo si

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \text{ cuando } n \rightarrow \infty\} = 1,$$

lo cual se puede expresar como $X_n \xrightarrow{\text{c.s.}} X$ o más explícitamente como $X_n \rightarrow X$ con probabilidad 1.

2.16 Bibliografía sugerida

- Bauer, H. (1981). Probability Theory and Elements of Measure Theory. Academic Press, London.
- Kolmogorov, A. (1933). “Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung”. *Ergeb. Math.*, Vol. 2, No. 3.
- Rohatgi, V. K. (1976). An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Zellner, A. (1971). An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics, New York: Wiley.
- Zellner, A. (2004). Statistics, Econometrics and Forecasting, Cambridge University Press.
- Zellner, A. and Palm, F. C. (eds.) (2004). The Structural Econometric Modeling, Time Series Analysis (SEMTSA) Approach, Cambridge University Press.

2.17 Ejercicios

2.1 Sea Ω un espacio muestral, no vacío, y \mathcal{F} una σ -álgebra de Ω muestre que si $(A_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de elementos de \mathcal{F} , entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

2.2 ¿Es la unión de σ -álgebras una σ -álgebra?

2.3 Encuentre una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que no sea variable aleatoria.

2.4 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Se dice que los eventos $A, B \in \mathcal{F}$ son independientes si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ ¿Será cierto que $A \cap B = \emptyset$ implica que A y B son independientes?

2.5 Considere un espacio métrico (M, d) , muestre que

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in M,$$

2.6 Si X es una variable aleatoria con densidad

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0,$$

encuentre $E[X|a < X < b]$, donde a y b son constantes.

2.7 Sea (X, Y) un vector de variables aleatorias con densidad conjunta

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) = & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ & \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}, \end{aligned}$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ y $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Encuentre $E[X|Y = y]$ y $E[Y|X = x]$.

2.8 Muestre que

$$E[h(X)|Y = y] = \int h(x)f_{X|Y}(x|y)dx,$$

donde

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad y \quad f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)dx.$$

2.9 Si $E[X^2] < \infty$ y Y es una variable aleatoria, muestre que

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[E[X|Y]] + E[\text{Var}[X|Y]].$$

2.10 Considere una variable aleatoria $X \sim b(n, p)$ (binomial con parámetros n y p), es decir,

$$f(x|p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < p < 1.$$

Suponga que la distribución *a priori* de p es uniforme, $p \sim \mathcal{U}(0, 1)$, i.e.,

$$\pi(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in [0, 1], \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Muestre utilizando el teorema de Bayes, $f(x, p) \propto f(x|p)\pi(p)$, que la distribución posterior de p está dada por

$$f(p|x) = \begin{cases} (n+1)\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } p \in [0, 1], \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Asimismo, si se escribe

$$f(p|x) = \frac{f(x|p)\pi(p)}{f(x)},$$

muestre que $f(x) = \int_0^1 f(x|p)\pi(p)dp = 1/(n+1)$. Por último, con la distribución posterior estime el valor de p a través de $\hat{p} = E(p|x)$, en cuyo caso muestre que

$$\hat{p} = \frac{x+1}{n+2}.$$

2.11 Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias que toman valores enteros. Defina $p_n(k) = \mathbb{P}\{X_n = k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$, y $p(k) = \mathbb{P}\{X = k\}$ para alguna variable aleatoria X . Muestre que

$$p_n(x) \rightarrow p(x) \text{ para toda } x \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X.$$

2.12 Sean X_n , $n \in \mathbb{N}$, y X variables aleatorias continuas tales que

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ para (casi) toda } x \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

donde f_n y f son las correspondientes funciones de densidad de X_n y X . Muestre que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

2.13 Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ y sea c una constante. Muestre que:

$$(i) \quad X_n + c \xrightarrow{\mathcal{D}} X + c,$$

$$(ii) \quad cX_n \xrightarrow{\mathcal{D}} cX, \quad c \neq 0.$$

2.14 Pruebe cada una de las siguientes afirmaciones:

$$(i) \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Leftrightarrow X_n - X \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

$$(ii) \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X, X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \Rightarrow \mathbb{P}\{X = Y\} = 1,$$

$$(iii) \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow X_n - X_m \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ cuando } n, m \rightarrow \infty,$$

$$(iv) \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X, Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \Rightarrow X_n \pm Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \pm Y,$$

$$(v) \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X, k \text{ constante} \Rightarrow kX_n \xrightarrow{\mathbb{P}} kX,$$

$$(vi) \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} k \Rightarrow X_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} k^2,$$

$$(vii) \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a, Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b; a, b \text{ constantes} \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} ab,$$

$$(viii) \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1 \Rightarrow X_n^{-1} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1,$$

$$(ix) \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a, Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b; a, b \text{ constantes}, b \neq 0 \Rightarrow X_n Y_n^{-1} \xrightarrow{\mathbb{P}} ab^{-1},$$

$$(x) \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X, Y \text{ una variable aleatoria} \Rightarrow X_n Y \xrightarrow{\mathbb{P}} XY,$$

$$(xi) \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X, Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} XY.$$

2.15 Sea $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ y g una función continua definida en \mathbb{R} . Demuestre que $g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

2.16 Suponga que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Muestre que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

2.17 Sea k una constante. Pruebe que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} k \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} k$.

2.18 Suponga que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^q} X$ para algún $q > 0$. Demuestre que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

2.19 Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} X$. Pruebe que

$$\mathbb{E}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}[X] \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[X_n^2] \rightarrow \mathbb{E}[X^2] \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

2.20 Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^q} X$, demuestre que

$$\mathbb{E}[|X_n|^q] \rightarrow \mathbb{E}[|X|^q] \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

2.21 Sea $r > s$. Pruebe que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^s} X$.

2.22 Muestre que $X_n \xrightarrow{\text{c.s.}} X$ si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left\{ \sup_{m \geq n} |X_m - X| > \varepsilon \right\} = 0 \quad \text{para toda } \varepsilon > 0.$$

2.23 Si $X_n \xrightarrow{\text{c.s.}} X$, demuestre que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

2.24 Sea $\{X_n\}$ una sucesión estrictamente decreciente de variables aleatorias positivas y suponga que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Muestre que $X_n \xrightarrow{\text{c.s.}} 0$.

2.25 Sean $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de variables aleatorias. Demuestre que

$$|X_n - Y_n| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ y } Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y.$$

2.26 Sean $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de variables aleatorias y c una constante. Pruebe que

$$(i) \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X, *Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c \Rightarrow X_n \pm Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \pm c,$$

$$(ii) \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X, *Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c \Rightarrow \begin{cases} X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} cX & \text{si } c \neq 0, \\ X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 & \text{si } c = 0, \end{cases}$$

$$(iii) \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X, *Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c \Rightarrow X_n / Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X/c \quad \text{si } c \neq 0.$$

CAPÍTULO 3

MOVIMIENTO BROWNIANO Y PROCESO DE WIENER

Conceptos básicos de este capítulo:

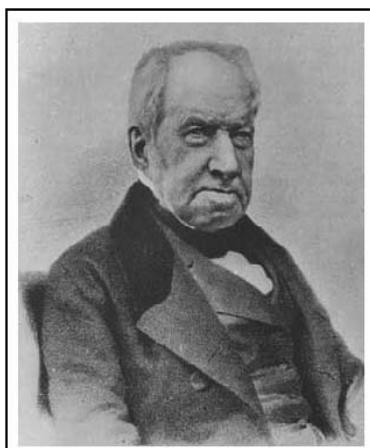
- Movimiento Browniano
- Filtración aumentada del movimiento Browniano
- Proceso de Wiener
- Procesos estocásticos adaptados a una filtración
- Equivalencia entre el Proceso de Wiener y el movimiento Browniano
- Medida de Wiener sobre el espacio medible canónico

3.1 Introducción

En este capítulo se presentan las definiciones de movimiento Browniano y proceso de Wiener y se discuten las condiciones bajo las cuales éstos coinciden. Asimismo, se presenta el concepto de medida de Wiener. Es importante destacar que el concepto de filtración desempeña un papel esencial en el desarrollo del presente capítulo. De hecho, a diferencia del movimiento Browniano, el proceso de Wiener se define justo a través de una filtración.

3.2 Breve reseña histórica del movimiento Browniano

En 1827, el médico y botánico escocés Robert Brown (1773-1858) mientras examinaba partículas de polen (de *Clarckia Pulchella*) en el microscopio, observó que cuando éstas se encontraban suspendidas en agua y en otros líquidos se movían sin cesar en forma errática. En un principio, Brown pensó que las partículas tenían movimiento propio e incluso vida. Posteriormente, el fenómeno se asoció no sólo con partículas de polen, sino también con partículas de materia inorgánica como polvo fino de algunos minerales (vidrio, carbón, roca, etc.). Su investigación “A Brief Account on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies” fue publicada en el “Edinburgh New Philosophical Journal”, July-September (1828), pp. 358-371.



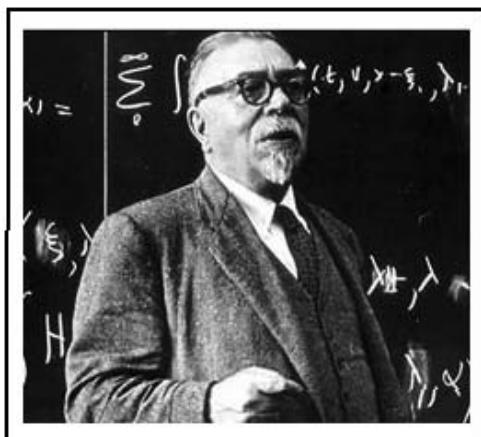
Fuente: <http://en.wikipedia.org>

Robert Brown

No fue sino hasta principios del siglo XX, cuando se demostró que el movimiento irregular de las partículas de polen se debía al golpeteo constante de las moléculas invisibles de agua sobre las moléculas visibles de las partículas de polen. En 1905, el físico judío-alemán Albert Einstein (1879-1955) escribe un artículo sobre mecánica estadística que proporciona la formulación matemática del movimiento Browniano, de la cual se deriva que la dispersión promedio del desplazamiento de la partícula en un líquido, en un tiempo dado, es proporcional a dicho tiempo.

En 1900, el matemático francés Louis Bachelier (1870-1946) en su tesis “Theorie de la spéculation” sobre el modelado del comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la bolsa de París, se anticipó a Einstein con la formulación matemática del movimiento Browniano, abordando un problema completamente diferente al de la mecánica estadística o al del movimiento errático de partículas de polen suspendidas en agua. Sin embargo, su trabajo no fue reconocido como una contribución relevante por sus profesores y compañeros en la “Sorbonne” de París. Su vida transcurrió en el anonimato, hasta la fecha poco se sabe de este enigmático y misterioso personaje. La relevancia del trabajo de Bachelier fue reconocida hasta 1960, tristemente después de su muerte. El movimiento Browniano, así como sus aspectos teóricos y prácticos, es objeto de numerosos estudios en muchas y muy diversas áreas de las finanzas. Sin lugar a dudas, el movimiento Browniano se encuentra implícita o explícitamente en casi toda la teoría financiera en tiempo continuo en ambientes estocásticos. Para ser más precisos el movimiento Browniano ocupa el 99% en la teoría de valuación de portafolios y productos derivados en tiempo continuo; el 1% restante se refiere a detalles sin importancia.

Otro destacado matemático asociado con una axiomática del movimiento Browniano, en términos de filtraciones, es Norbert Wiener (1894-1964), de origen estadounidense, nacido en Columbia, Missouri. Wiener obtuvo su doctorado en Harvard en 1912, a la edad de 18 años, presentando una tesis sobre lógica matemática. Al concluir sus estudios en Harvard se fue a Cambridge, Inglaterra, donde fue alumno de Bertrand Russell y G. H. Hardy. Y, posteriormente, en 1914, se trasladó a Göttingen, Alemania, a trabajar bajo la dirección David Hilbert y Edmund Landau. Es importante destacar que Norbert Wiener también ha sido reconocido como el Padre de la cibernetica. Una anécdota famosa sobre el profesor Norbert Wiener quien, frecuentemente, se mantenía absorto en sus pensamientos es que en una ocasión que se había cambiado de casa su esposa le recordó que después de salir del trabajo no fuera a la casa anterior. El le contestó, —sí querida. Sin embargo, al salir de su trabajo, Norbert se dirigió a la casa anterior y le causó cierta extrañeza que la cena no estuviera lista y que los muebles fueran diferentes. Salió y encontró una niña desconocida jugando en la calle. El Profesor Wiener le preguntó —¿Quién vive en esta casa?— La niña le respondió —Ay papi, mi mami ya me había dicho que olvidarías ir a la casa nueva.



Fuente: <http://en.wikipedia.org>

Norbert Wiener

3.3 Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es un modelo matemático del comportamiento en el tiempo de un fenómeno aleatorio. La aleatoriedad del fenómeno se captura a través de un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) , es decir, un espacio muestral, o conjunto de posibles resultados, y una σ -álgebra del espacio muestral, o conjunto de eventos o sucesos relevantes. En este contexto, un proceso estocástico es un conjunto de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$, donde \mathcal{T} es un conjunto, finito o infinito, de tiempos. Cada una de estas variables aleatorias X_t está definida sobre un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) y toma valores en otro espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, en donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ -álgebra de Borel¹ sobre \mathbb{R} . En este caso, el subíndice t se refiere al tiempo. La σ -álgebra de Borel es la mínima σ -álgebra que contiene a todos los intervalos de la forma $(-\infty, x]$ con $x \in \mathbb{R}$, es decir, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a los intervalos de la forma $(-\infty, x]$ con $x \in \mathbb{R}$.

El concepto de proceso estocástico es fundamental para el desarrollo de la teoría financiera en tiempo continuo y en ambientes de riesgo e incertidumbre. Los procesos estocásticos son útiles para describir el comportamiento aleatorio de las variables financieras en el tiempo: los precios de los activos, las tasas de interés, los tipos de cambio, los índices bursátiles, etc. A continuación se presenta la definición formal de proceso estocástico en tiempo continuo.

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, es decir, Ω es un espacio muestral, \mathcal{F} es una σ -álgebra sobre Ω y $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ es una medida de probabilidad. Sea \mathcal{T} un intervalo de tiempo, específicamente se supone que $\mathcal{T} = [0, \infty)$. Un proceso estocástico (de dimensión 1) es un mapeo $X : \Omega \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada $t \in \mathcal{T}$ la función

$$X_t : \omega \rightarrow X(\omega, t) \equiv X_t(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

satisface $X_t^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$ para toda $x \in \mathbb{R}$, es decir, X_t es una función \mathcal{F} -medible. Si X_t es un proceso estocástico, entonces para cada $\omega \in \Omega$ la función $t \mapsto X(\omega, t) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, es llamada una trayectoria del proceso. Por último, se dice que un proceso es continuo si cada trayectoria es continua en cada punto de \mathcal{T} .

3.4 Movimiento Browniano

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad fijo, el movimiento Browniano (estándar y unidimensional) es una función

$$W : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que para cada $t \geq 0$, la función

$$W(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

es una variable aleatoria definida en (Ω, \mathcal{F}) . Mientras que para cada $\omega \in \Omega$ la función

$$W(\cdot, \omega) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

es continua en $[0, \infty)$. La familia de variables aleatorias $W(t, \cdot)$ es denotada, cuando no existe confusión, en forma breve como $\{W_t\}_{t \geq 0}$. Las funciones $W(\cdot, \omega)$ son llamadas trayectorias y se denotan por $\omega(t)$. La familia $\{W_t\}_{t \geq 0}$ satisface adicionalmente las siguientes condiciones:

(i) $W_0 = 0$ casi dondequiera (o casi en todas partes), es decir,

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid W_0(\omega) = 0\} = 1.$$

En palabras más simples, el proceso empieza en $t = 0$ con probabilidad uno;

¹ El matemático francés Émile Borel (1871-1956) fue profesor de la “École Normale Supérieure” y de la “Sorbonne” de París. El nombre completo de este destacado matemático del siglo XX es Félix Édouard Justin Émile Borel. Borel creó la teoría de la medida de conjuntos. Su trabajo, junto con el de otros dos prominentes matemáticos franceses René Baire y Henri Lebesgue, marcó el principio de la teoría moderna del análisis real. Borel publicó también una serie de trabajos sobre teoría de juegos, siendo el primero en definir el concepto de estrategia de un juego. Asimismo, en 1955, un año antes de su muerte, Borel fue galardonado por su trabajo científico con la primera medalla de oro del “Centre National de la Recherche Scientifique”.

(ii) Para cualquier conjunto de tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, los incrementos

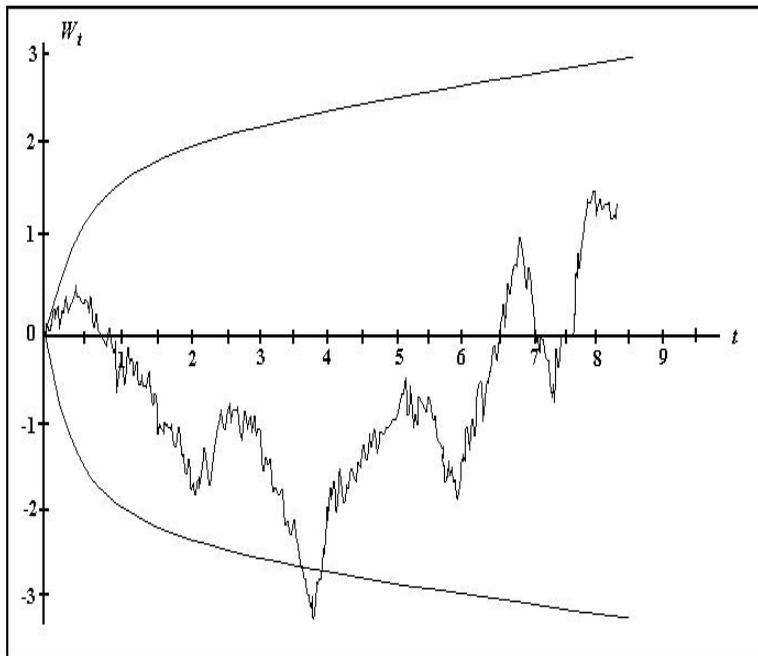
$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

son estocásticamente independientes;

(iii) Para cualquier par de tiempos t y s con $0 \leq s < t$, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

Se puede definir el movimiento Browniano no estándar si la condición (iii) se sustituye por $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, c(t - s))$, donde c es una constante positiva. La extensión de la definición al caso multidimensional es inmediata.

La Gráfica 3.1 muestra una trayectoria de un movimiento Browniano de dimensión uno, así como las curvas de desviación estandar $\pm\sqrt{t}$. El tiempo t corre a lo largo del eje horizontal y los posibles valores del movimiento Browniano son representados en el eje vertical. La media incondicional del valor del proceso en cada punto del tiempo es cero. La probabilidad incondicional de que el proceso tome un valor dentro de estas curvas, en un punto dado en el tiempo, es de aproximadamente 66%.



Gráfica 3.1 Una trayectoria del movimiento Browniano.

3.5 Propiedades adicionales del movimiento Browniano

A continuación se estudian algunas propiedades adicionales del movimiento Browniano. Observe, primero, que si W_t es un movimiento Browniano, entonces el proceso

$$Z_t = \begin{cases} tW_{1/t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

es también un movimiento Browniano estándar. Claramente, Z_t es continuo para $t > 0$. Asimismo, por la ley de los grandes números para el movimiento Browniano se sigue que

$$Z_t = \frac{W_{1/t}}{1/t} \rightarrow 0 = Z_0$$

con probabilidad uno cuando $t \rightarrow 0$. Es decir, Z_t es continua en cero. Si $0 < s < t$, se verá que el incremento $Z_t - Z_s$ es normalmente distribuido con media cero y varianza de $t - s$. Note primero que

$$Z_t - Z_s = tW_{1/t} - sW_{1/s} = -s(W_{1/s} - W_{1/t}) - (t - s)W_{1/t}$$

sigue una distribución normal con

$$\mathbb{E}[Z_t - Z_s] = 0$$

y

$$\text{Var}[Z_t - Z_s] = (-s)^2 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{t} \right) + \frac{(t-s)^2}{t} = s - \frac{s^2}{t} + \frac{t^2 - 2ts + s^2}{t} = t - s.$$

Lo anterior también es cierto si $s = 0$, en consecuencia W_t es normalmente distribuida con media cero y varianza $t^2(1/t) = t$. Se verá ahora que dos incrementos consecutivos no están correlacionados entre sí. Si $0 \leq s \leq t \leq u$, entonces

$$\begin{aligned} u - s &= \text{Var}(Z_u - Z_s) = \text{Var}[(Z_u - Z_t) + (Z_t - Z_s)] \\ &= \text{Var}(Z_u - Z_t) + \text{Var}(Z_t - Z_s) + 2\text{Cov}(Z_u - Z_t, Z_t - Z_s) \\ &= u - t + t - s + 2\text{Cov}(Z_u - Z_t, Z_t - Z_s) \\ &= u - s + 2\text{Cov}(Z_u - Z_t, Z_t - Z_s), \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\text{Cov}(Z_u - Z_t, Z_t - Z_s) = 0.$$

Asimismo, incrementos que no se traslapan, son no correlacionados. En efecto, si $0 \leq s \leq t \leq u \leq v$, entonces

$$\begin{aligned} v - s &= \text{var}(Z_v - Z_s) = \text{var}[(Z_v - Z_u) + (Z_u - Z_t) + (Z_t - Z_s)] \\ &= \text{Var}(Z_v - Z_u) + \text{Var}(Z_u - Z_t) + \text{Var}(Z_t - Z_s) \\ &\quad + 2\text{Cov}(Z_v - Z_u, Z_u - Z_t) + 2\text{Cov}(Z_u - Z_t, Z_t - Z_s) \\ &\quad + 2\text{Cov}(Z_v - Z_u, Z_t - Z_s) \\ &= v - u + u - t + t - s + 2\text{Cov}(Z_v - Z_u, Z_t - Z_s) \\ &= v - s - 2\text{Cov}(Z_v - Z_u, Z_t - Z_s). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Cov}(Z_v - Z_u, Z_t - Z_s) = 0.$$

En consecuencia, todos los incrementos son mutuamente no correlacionados.

3.6 Filtraciones del movimiento Browniano e información actual relevante

Muy frecuentemente, cuando se trabaja con procesos estocásticos, es necesario especificar el tipo de información que está disponible en cada punto en el tiempo. Por ejemplo, si se quiere calcular la esperanza, condicional a la información disponible, de valores futuros de un proceso, entonces es necesario especificar de manera precisa la información que se utiliza en los cálculos. Usualmente, en los modelos financieros se requiere que los precios, presentes y pasados, de los activos sean conocidos para producir un pronóstico. Esta idea es formalizada con el concepto de filtración.

Una filtración es una familia $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ de σ -álgebras tales que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para toda $t \in \mathcal{T}$. La familia \mathbb{F} es creciente en el sentido de que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ cuando $s, t \in \mathcal{T}$ y $s \leq t$. Una filtración puede ser pensada como una estructura de información dinámica. La interpretación es que \mathcal{F}_t representa la información disponible al tiempo t . El hecho de que la filtración esté aumentando significa que hay más y más información conocida conforme el tiempo transcurre y que la información pasada no se olvida.

A continuación se estudia el concepto de filtración del movimiento Browniano. Para $t \geq 0$ fijo, considere la siguiente familia de subconjuntos de Ω :

$$\mathcal{A}_t = \{A_{x,t} \mid x \in \mathbb{R}\},$$

donde

$$A_{x,t} = \{\omega \in \Omega \mid \omega(s) \leq x, \quad 0 \leq s \leq t\}.$$

La σ -álgebra generada por \mathcal{A}_t , es decir, la mínima σ -álgebra que hace que las funciones W_s , con $0 \leq s \leq t$, sean variables aleatorias, se denota mediante

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(\mathcal{A}_t) = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t). \quad (3.1)$$

En este caso \mathcal{F}_0^W contiene sólo conjuntos de probabilidad cero o uno. Claramente, si $t \leq u$, entonces $\mathcal{F}_t^W \subseteq \mathcal{F}_u^W$. La familia creciente de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$ es llamada la filtración natural generada por $\{W_t\}_{t \geq 0}$. Si \mathcal{N} es el conjunto de eventos $B \in \mathcal{F}$ tales que $\mathbb{P}(B)=0$, se define la filtración aumentada de $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$ mediante la familia de σ -álgebras

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N}). \quad (3.2)$$

De hecho, basta que este procedimiento se efectúe únicamente para $t = 0$, ya que si $\mathcal{F}_0 = \sigma(\mathcal{F}_0^W \cup \mathcal{N})$, entonces $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$. Por último, observe que la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ es continua por la derecha, esto es,

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{u \geq t} \mathcal{F}_u$$

y continua por la izquierda en el sentido de que

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(\bigcup_{0 \leq s \leq t} \mathcal{F}_s\right).$$

Sin embargo, $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$ es continua por la izquierda, pero no por la derecha.

Frecuentemente, los agentes requieren de la información disponible en cada punto en el tiempo para hacer pronósticos. En este caso, \mathcal{F}_t representa la información relevante disponible hasta el tiempo t , ya que si al tiempo t ocurre $\omega \in \Omega$, entonces los agentes saben si ω está o no en $A \in \mathcal{F}_t$, para algún A dado, a fin de efectuar pronósticos. El hecho de que la filtración esté aumentando significa que hay más y más información conforme el tiempo transcurre y que la información pasada no se olvida. Por último, es importante mencionar que si $s \leq t$, $W_t - W_s$ es independiente de la σ -álgebra \mathcal{F}_s .

3.7 Procesos estocásticos adaptados a una filtración

Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ se dice que es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ si para cada $t \geq 0$, X_t es \mathcal{F}_t -medible, es decir, si para cada $t \geq 0$,

$$\{X_t \leq x\} \equiv \{\omega | X_t(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}_t \text{ para toda } x \in \mathbb{R}.$$

Esto significa que el valor que toma X_t en t depende solamente de la información disponible al tiempo t . Como puede observarse, adaptabilidad es una propiedad muy importante y afortunadamente la mayoría de los procesos que se utilizan en finanzas la tienen. Claramente, todo proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0}$.

Se dice que $\{\tilde{X}_t\}_{t \geq 0}$ es una modificación de $\{X_t\}_{t \geq 0}$ si para toda $t \geq 0$, $\mathbb{P}\{X_t = \tilde{X}_t\} = 1$, es decir, para toda $t \geq 0$ se cumple que $X_t = \tilde{X}_t$ casi seguramente con respecto de \mathbb{P} . Por último, si $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t > 0}$ y $\{\tilde{X}_t\}_{t \geq 0}$ es una modificación de $\{X_t\}_{t \geq 0}$, entonces $\{\tilde{X}_t\}_{t \geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t > 0}$.

3.8 Proceso de Wiener

Sea $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ una filtración. Un proceso esocástico $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Wiener relativo a \mathbb{F} si cumple las siguientes condiciones:

- (i) $W_0 = 0$ con probabilidad uno, es decir, $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid W_0(\omega) = 0\} = 1$;
- (ii) W_t es continuo en t ;
- (iii) W_t es adaptado a la filtración \mathbb{F} ;
- (iv) Si $0 \leq s < t$, el incremento $W_t - W_s$ es independiente de \mathcal{F}_s y normalmente distribuido con media cero y varianza $t - s$.

Una primera diferencia entre el proceso de Wiener y el movimiento Browniano es que el primero considera una filtración \mathbb{F} y el segundo no. En otras palabras, el movimiento Browniano es independiente del concepto de filtración. La segunda diferencia que se observa es la ausencia del requerimiento de incrementos independientes en el proceso de Wiener.

3.9 Condiciones de equivalencia entre el Proceso de Wiener y el movimiento Browniano

A continuación se presentan las condiciones bajo las cuales el movimiento Browniano estándar coincide con el proceso de Wiener. Primero se verá que todo proceso de Wiener es un movimiento Browniano estándar. En efecto, un proceso $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Wiener relativo a \mathbb{F} si y sólo si

- (i) W_t es un movimiento Browniano;
- (ii) W_t es adaptado a la filtración \mathbb{F} ;
- (iii) $W_t - W_s$ es independiente de \mathcal{F}_s cuando $0 \leq s \leq t$.

Suponga, primero, que $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Wiener relativo a \mathbb{F} . Sólo se tiene que ver que si $0 \leq t_0 < \dots < t_n$, entonces los incrementos $W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son independientes. Es suficiente verificar que estos incrementos son independientes dos a dos. Si $0 \leq k \leq \ell \leq n$, los incrementos $W_{t_{\ell+1}} - W_{t_\ell}$ son independientes de \mathcal{F}_{t_ℓ} . En consecuencia, los incrementos $W_{t_{\ell+1}} - W_{t_\ell}$ son también independientes de los incrementos $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$. El recíproco es inmediato.

Por otro lado, si $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano, entonces $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Wiener relativo a la filtración aumentada que éste genera. Todo lo que se necesita ver es que el incremento $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s^{(t)}$ siempre que $0 \leq s < t$. Considere los tiempos $0 = t_0 \leq t_1 < \dots < t_n < s$, entonces las variables aleatorias

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, W_t - W_s$$

son independientes. Por lo tanto, la σ -álgebra

$$\sigma(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_n}) = \sigma(W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$$

es independiente de $W_t - W_s$. Considere la siguiente familia de eventos:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq s, n \in \mathbb{N}} \sigma(W_{t_1}, \dots, W_{t_n}),$$

la cual es independiente de $W_t - W_s$. Claramente, en este caso,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}_s$$

es independiente de $W_t - W_s$.

Por último, observe que un movimiento Browniano puede ser un proceso de Wiener con respecto de una filtración distinta a la filtración aumentada del movimiento Browniano.

3.10 Medida de Wiener sobre el espacio medible canónico

En el transcurso de esta sección se especifica un espacio de probabilidad natural para el movimiento Browniano, en lugar de considerar un espacio de probabilidad arbitrario, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sea $\Omega = C[0, \infty)$ el conjunto de todas las funciones continuas $\omega(t)$ en $[0, \infty)$. Considere la función W que mapea el vector $(t, \omega) \in [0, \infty] \times \Omega$ en su segunda coordenada, es decir, $W(\cdot, \omega) = \omega(\cdot)$. Considere también la filtración \mathcal{F}_t^W como en (3.1). Asimismo, se define

$$\mathcal{F}_\infty^W = \sigma \left(\bigcup_{0 \leq t < \infty} \mathcal{F}_t^W \right).$$

Sea \mathbb{P}_w la probabilidad bajo la cual $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano. En este caso, \mathbb{P}_w es llamada la medida de Wiener. Si se denota por

$$\mathcal{N} = \left\{ A \in \mathcal{F}_\infty^W \mid \text{existe } B \in \mathcal{F}_\infty^W \text{ tal que } A \subset B \text{ y } \mathbb{P}_w(B) = 0 \right\},$$

y se define

$$\mathcal{F}^{(c)} = \sigma \left(\mathcal{F}_\infty^W \cup \mathcal{N} \right),$$

el espacio de probabilidad $(C([0, \infty), \mathcal{F}^{(c)}, \mathbb{P}_w)$ es llamado el espacio canónico del movimiento Browniano. La filtración aumentada en este caso está dada por

$$\mathcal{F}_t^{(c)} = \sigma \left(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N} \right).$$

Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$, entonces dado que $\{\mathcal{F}_t^{(c)}\}_{t \geq 0}$ es una familia creciente de σ -álgebras, se garantiza que $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_t$ para toda t .

3.11 Movimiento Browniano definido en horizontes finitos

Cuando toda la actividad económica se lleva a cabo durante $[0, T]$, es conveniente definir la filtración natural generada por $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ a través de

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(\mathcal{A}_t) = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Como antes, si $t \leq u \leq T$, entonces $\mathcal{F}_t^W \subseteq \mathcal{F}_u^W$. Asimismo, si \mathcal{N} es el conjunto de eventos $B \in \mathcal{F}_T$ tales que $\mathbb{P}(B)=0$, se define la filtración aumentada de $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$ mediante la familia de σ -álgebras

$$\mathcal{F}_t = \sigma \left(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N} \right) \quad 0 \leq t \leq T.$$

Como antes, observe que la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es continua por la derecha, esto es,

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{u \geq t} \mathcal{F}_u$$

y continua por la izquierda, es decir,

$$\mathcal{F}_t = \sigma \left(\bigcup_{0 \leq s \leq t} \mathcal{F}_s \right).$$

3.12 Movimiento geométrico Browniano

Aun cuando el movimiento Browniano es una de las bases en la construcción de los modelos de riesgos financieros y económicos, éste no puede, por sí mismo, representar el comportamiento de todas las variables financieras que se encuentran en finanzas. Los precios de los activos, por ejemplo, no son descritos apropiadamente por el movimiento Browniano estándar, ya que los precios no parten de cero. Sus incrementos podrían tener medias distintas de cero, o bien podrían tener varianzas que no necesariamente son proporcionales al tiempo. En general, los precios de los activos comienzan en valores diferentes de cero, tienen incrementos con medias diferentes de cero, varianzas que no son proporcionales al tiempo y covarianzas diferentes de cero.

El movimiento geométrico Browniano se obtiene por una transformación exponencial del movimiento Browniano estándar. Específicamente, si W_t es un movimiento Browniano estándar, μ es una constante (tendencia), σ es una constante positiva (volatilidad) y S_0 es un precio inicial conocido, entonces el proceso

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}$$

es llamado movimiento geométrico Browniano. Este proceso es frecuentemente utilizado para describir el cambio porcentual (rendimiento) del precio de un activo. Observe que

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t.$$

Por lo tanto, la distribución de $\ln(S_t)$ es normal con

$$\mathbb{E}[\ln(S_t)] = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t$$

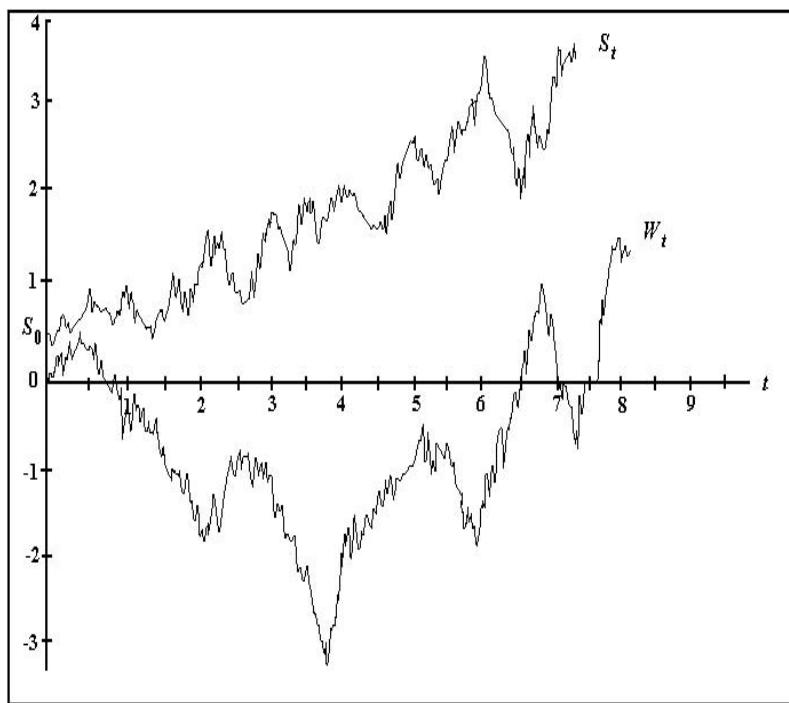
y

$$\text{Var}[\ln(S_t)] = \sigma^2 t.$$

En este caso, la tasa de rendimiento continuamente capitalizable, por unidad de tiempo, sobre un intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$, es

$$\frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{1}{\Delta t} \sigma (W_{t+\Delta t} - W_t).$$

Este rendimiento, por unidad de tiempo, se distribuye normalmente con media $\mu - (1/2)\sigma^2$, varianza $\sigma^2/\Delta t$ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{\Delta t}$. Note que la varianza tiende a cero cuando $\Delta t \rightarrow \infty$. De hecho, la tasa de rendimiento, por unidad de tiempo, converge a $\mu - (1/2)\sigma^2$ con probabilidad uno cuando $\Delta t \rightarrow \infty$. Esto proviene de la ley de los grandes números del movimiento Browniano. La Gráfica 3.2 muestra una trayectoria de un movimiento Browniano, W_t , y un movimiento geométrico Browniano, S_t , con $\mu = 0.1$ y $\sigma = 0.3$. El tiempo t corre a lo largo del eje horizontal y los posibles valores del movimiento Browniano y del movimiento geométrico Browniano son representados en el eje vertical. En este caso, el movimiento geométrico Browniano parte de un valor positivo $S_0 = 0.4$.



Gráfica 3.2 Trayectorias de movimiento Browniano y del movimiento geométrico Browniano.

3.13 Bibliografía sugerida

- Brown, R. (1828). "A Brief Account on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies". *Edinburgh New Philosophical Journal*, July-September, pp. 358-371.
- Karatzas, I. and S. E. Shreve (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer.
- Revuz, D. and M. Yor (1991). Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer.

3.14 Ejercicios

- 3.1** Sea W_t un movimiento Browniano estándar de dimensión uno y β un número positivo. Encuentre $\alpha > 0$ tal que el proceso

$$X_t = \alpha W_{t/\beta^2}$$

sea también un movimiento Browniano.

- 3.2** Pruebe la ley de los logaritmos iterados para el movimiento Browniano. Es decir, si W_t es un movimiento Browniano estándar muestre que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2 t \ln(\ln(t))}} = 1$$

con probabilidad uno.

3.3 Pruebe la ley de los grandes números para el movimiento Browniano. Si W_t es un movimiento estándar Browniano, entonces

$$\frac{W_t - \mathbb{E}[W_t]}{t} = \frac{W_t - \mathbb{E}[W_t]}{\text{Var}[W_t]} \rightarrow 0$$

con probabilidad uno, cuando $t \rightarrow \infty$.

3.4 Sea

$$W_t = \begin{pmatrix} W_{1t} \\ W_{2t} \end{pmatrix}$$

donde W_{1t} y W_{2t} son movimientos Brownianos estándar. Sea $Y_t = AW_t$, donde

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+\rho}{2}} & \sqrt{\frac{1-\rho}{2}} \\ \sqrt{\frac{1+\rho}{2}} & -\sqrt{\frac{1-\rho}{2}} \end{pmatrix}$$

y $\rho \in [-1, 1]$. Muestre que si $0 < s \leq t$, entonces $W_{1t} - W_{1s}$ y $W_{2t} - W_{2s}$ tienen varianza $t-s$ y covarianza $(t-s)\rho$, donde ρ es el coeficiente de correlación.

Solución: Observe que

$$Y_t = \begin{pmatrix} W_{1t} \\ W_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+\rho}{2}}W_{1t} + \sqrt{\frac{1-\rho}{2}}W_{2t} \\ \sqrt{\frac{1+\rho}{2}}W_{1t} - \sqrt{\frac{1-\rho}{2}}W_{2t} \end{pmatrix}$$

es un movimiento Browniano de dimensión dos con matriz de varianzas-covarianzas:

$$AA^T = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+\rho}{2}} & \sqrt{\frac{1-\rho}{2}} \\ \sqrt{\frac{1+\rho}{2}} & -\sqrt{\frac{1-\rho}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+\rho}{2}} & \sqrt{\frac{1+\rho}{2}} \\ \sqrt{\frac{1-\rho}{2}} & -\sqrt{\frac{1-\rho}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, si Y_t es un movimiento Browniano correlacionado de dimensión dos con coeficiente de correlación ρ , entonces el proceso $W_t = A^{-1}Y_t$ es un movimiento Browniano estándar correlacionado de dimensión dos. La inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1-\rho}{2}} & \sqrt{\frac{1-\rho}{2}} \\ \sqrt{\frac{1+\rho}{2}} & -\sqrt{\frac{1+\rho}{2}} \end{pmatrix}.$$

3.5 Sean W_{1t} y W_{2t} dos movimientos Brownianos estándar con coeficiente de correlación ρ , donde $-1 < \rho < 1$. Sean $\beta_1 > 0$ y $\beta_2 > 0$, encuentre α tal que

$$W_t = \alpha(-\beta_1 W_{1t} + \beta_2 W_{2t})$$

sea un movimiento Browniano estándar.

3.6 Discuta el concepto de filtración aumentada en un proceso $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aleatorias binomiales con parámetros p y n .

CAPÍTULO 4

ELEMENTOS DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO, INTEGRAL DE ITÔ

Conceptos básicos de este capítulo:

- Caminata aleatoria
- Martingala
- Propiedad Markoviana
- Movimiento Browniano (proceso de Wiener)
- Integral estocástica
- Convergencia cuadrática media (convergencia en media cuadrática)

4.1 Introducción

Para modelar adecuadamente la dinámica de las variables financieras se requiere, sin duda alguna, de la teoría de procesos estocásticos. Una de las ramas de esta teoría que ha cobrado creciente importancia, debido a su gran utilidad en el modelado en tiempo continuo, es el cálculo estocástico. El objetivo de este capítulo consiste en presentar en forma accesible e intuitiva el cálculo estocástico, de tal manera que el lector se familiarice con sus conceptos básicos y técnicas de análisis, así como con sus aplicaciones en el modelado de diversos fenómenos financieros y económicos.

En la actualidad, la mayor parte de la literatura de investigación en finanzas tiene un contenido importante de cálculo estocástico. Aunque la tendencia es resaltar el rigor matemático de la disciplina, es siempre recomendable enfatizar en la parte intuitiva de los resultados que se desprenden del marco teórico, por sofisticado que parezca, siendo éste el espíritu del presente capítulo.

4.2 Motivación

En esta sección se presenta, en detalle, la noción de ganancia acumulada o caminata aleatoria, la cual es crucial para introducir el concepto de movimiento Browniano. Considere el experimento aleatorio \mathcal{E} de lanzar una moneda. En este caso, el conjunto de posibles resultados, o espacio muestral, está dado por $\Omega = \{a, s\}$, donde $a=\text{águila}$ (cara) y $s=\text{sol}$ (cruz). Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{s\}, \Omega\}$ el conjunto de todos los posibles eventos, es decir, todos los subconjuntos de Ω (también conocido como el conjunto potencia de Ω). La familia \mathcal{F} representa una σ -álgebra de Ω . Defina ahora una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, de tal manera que

$$\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}(\{s\}) = \frac{1}{2}.$$

En este caso, la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ define un espacio de probabilidad asociado a \mathcal{E} . Suponga que se realizan n repeticiones independientes del experimento. Cada vez que el resultado del lanzamiento sea águila se gana $1/\sqrt{n}$, y cada vez que sea sol se pierde $1/\sqrt{n}$. Sea $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, la variable aleatoria que representa la ganancia o pérdida en el i -ésimo lanzamiento. Es decir, $X_i(a) = 1/\sqrt{n}$ y $X_i(s) = -1/\sqrt{n}$. De esta manera,

$$\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}\{X_i = 1/\sqrt{n}\} = \frac{1}{2}$$

y

$$\mathbb{P}(\{s\}) = \mathbb{P}\{X_i = -1/\sqrt{n}\} = \frac{1}{2}.$$

En este caso, trivialmente, se cumple que:

$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \quad \text{y} \quad \text{Var}[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Asimismo, si $1 \leq i < j \leq n$, se satisface que

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = 0.$$

Es decir, el resultado de cada experimento es independiente de los resultados de los lanzamientos anteriores. Si resultaran, por ejemplo, i águilas seguidas, ésto no afectaría el resultado del lanzamiento $i + 1$.

Ahora bien, si se denota por S_n a la ganancia acumulada en n lanzamientos, entonces se puede escribir

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad (4.1)$$

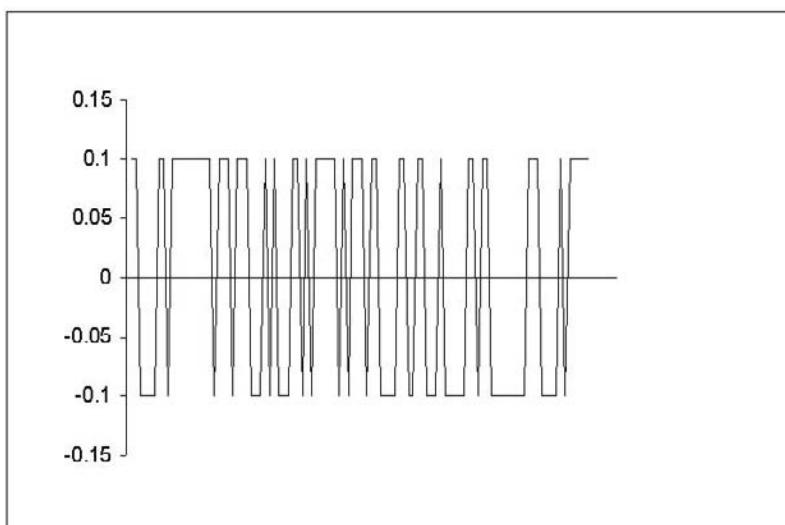
donde el valor inicial $S_0 = X_0 \equiv 0$. En este caso, la esperanza y varianza incondicionales de S_n están dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = 0$$

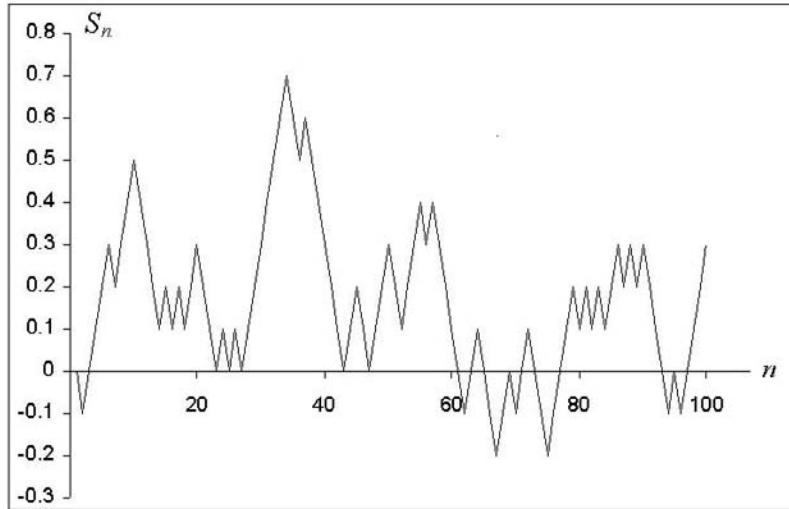
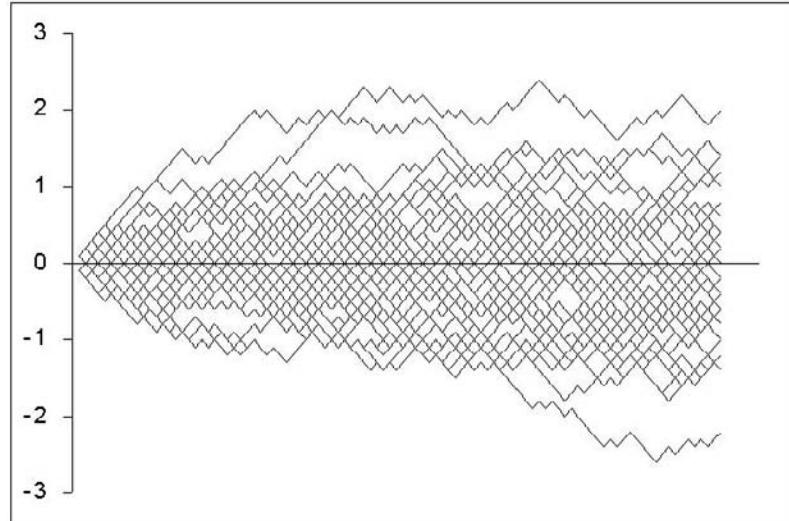
y

$$\text{Var}[S_n] = \mathbb{E}[S_n^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2] = 1.$$

Este experimento puede verse también como una caminata aleatoria discreta y simétrica, en donde con la misma probabilidad se da un paso de longitud 1 a la derecha que un paso de longitud 1 a la izquierda. La Gráfica 4.1 presenta una muestra simulada de lanzamientos de una moneda. Se generaron 100 números aleatorios de una distribución uniforme $\mathcal{U}[0, 1]$. Si un número aleatorio u es mayor que 0.5 el resultado es águila, en caso contrario es sol. La Gráfica 4.2 presenta una realización de la ganancia acumulada de 100 lanzamientos de una moneda, en cada repetición la apuesta es $\frac{1}{10}$. En la Gráfica 4.3 se aprecia una muestra de 50 realizaciones de la ganancia acumulada. En este caso, se observa que las realizaciones tienden a concentrarse alrededor del cero, como era de esperarse.



Gráfica 4.1 Realización de $n = 100$ lanzamientos de una moneda.

Gráfica 4.2 Una realización de la ganancia acumulada, $n = 100$.Gráfica 4.3 Muestra de 50 realizaciones de la ganancia acumulada, $n = 100$.

Observe que el resultado del n -ésimo lanzamiento, X_n , es independiente del resultado del lanzamiento anterior, X_{n-1} . Sin embargo, el resultado de la ganancia acumulada en el n -ésimo lanzamiento, S_n , sí depende de la ganancia acumulada en el lanzamiento anterior, S_{n-1} . En este caso, la esperanza condicional de S_n , dada la ganancia acumulada de los $n-1$ primeros lanzamientos, es

$$\mathbb{E}[S_n|S_{n-1}] = \mathbb{E}[S_n|S_0, S_1, \dots, S_{n-1}] = S_{n-1}. \quad (4.2)$$

En efecto, note primero que

$$\mathbb{P} \left\{ S_n = S_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} \middle| S_{n-1} \right\} = \mathbb{P} \left\{ S_n = S_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} \middle| S_0, S_1, \dots, S_{n-1} \right\} = \frac{1}{2} \quad (4.3)$$

y

$$\mathbb{P} \left\{ S_n = S_{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \middle| S_{n-1} \right\} = \mathbb{P} \left\{ S_n = S_{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \middle| S_0, S_1, \dots, S_{n-1} \right\} = \frac{1}{2}. \quad (4.4)$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[S_n | S_{n-1}] = \frac{1}{2} \left(S_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{2} \left(S_{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = S_{n-1}.$$

Equivalentemente, y en forma más simple,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n | S_{n-1}] &= \mathbb{E}[S_{n-1} + X_n | S_{n-1}] \\ &= \mathbb{E}[S_{n-1} | S_{n-1}] + \mathbb{E}[X_n | S_{n-1}] \\ &= S_{n-1} + \mathbb{E}[X_n] \\ &= S_{n-1} + 0 = S_{n-1}. \end{aligned}$$

En otras palabras, el mejor pronóstico de S_n , dada la información hasta el presente, es su valor actual, S_{n-1} .

4.3 Propiedades de Martingala y de Markov

Los resultados de la sección anterior, aunque sencillos, son muy importantes en el modelado de muchas variables financieras. En la ecuación (4.2), la esperanza condicional de la variable aleatoria S_n , dados sus valores pasados, depende únicamente del valor inmediato anterior S_{n-1} . De hecho, la esperanza condicional es igual a S_{n-1} . Esto significa que la esperanza condicional de las ganancias en el siguiente lanzamiento, es únicamente la cantidad con que se cuenta hasta antes del siguiente lanzamiento. En este caso, se dice que el juego es un juego justo. A esto se le conoce como la propiedad de martingala. Por otro lado, en virtud de (4.3) y (4.4), el juego no tiene memoria más allá de donde se encuentra hasta antes del siguiente lanzamiento. A esta característica se le llama propiedad de Markov.

4.4 Caminata aleatoria discreta en una unidad de tiempo

Cuando se realizan n repeticiones de un experimento, el tiempo aparece en forma implícita, pues repeticiones consecutivas tienen que estar separadas, forzosamente, por intervalos de tiempo, no necesariamente de la misma magnitud. En esta sección se incorpora el tiempo en forma explícita en una caminata aleatoria y las repeticiones se realizan en intervalos de tiempo de la misma magnitud. El siguiente proceso estocástico se define para cada $n \in \mathbb{N}$. Se supone que se llevan a cabo n lanzamientos en una unidad de tiempo, de tal manera que estos se realizan en intervalos de tiempo de magnitud $1/n$. La ganancia acumulada en el primer, segundo y n -ésimo lanzamiento, respectivamente, se definen como:

$$\begin{aligned} W_n \left(\frac{1}{n} \right) &= X_1, \\ W_n \left(\frac{2}{n} \right) &= W_n \left(\frac{1}{n} \right) + X_2, \\ W_n \left(\frac{3}{n} \right) &= W_n \left(\frac{2}{n} \right) + X_3, \\ &\vdots \\ W_n(1) &= W_n \left(\frac{n-1}{n} \right) + X_n. \end{aligned} \quad (4.5)$$

En general, se satisface que

$$W_n \left(\frac{i}{n} \right) = S_i, \quad (4.6)$$

donde $S_i = X_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_i$. Se supone además que $W_n(0) = 0$ para toda n .

4.5 Variación cuadrática media de una caminata aleatoria en una unidad de tiempo

El concepto de variación cuadrática media es fundamental en el desarrollo del cálculo estocástico. La variación cuadrática de W_n se define mediante:

$$\begin{aligned}\nu_n^2 &= \sum_{i=1}^n \left[W_n\left(\frac{i}{n}\right) - W_n\left(\frac{i-1}{n}\right) \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (S_i - S_{i-1})^2.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Observe que

$$E[(S_i - S_{i-1})^2] = E[X_i^2] = \frac{1}{n}.$$

A partir de (4.7) y del resultado anterior se sigue que

$$\nu^2 = E[\nu_n^2] = 1.\tag{4.8}$$

Es importante destacar que la variación cuadrática media de W_n , ν^2 , es igual al tiempo total, en este caso una unidad.

4.6 Caminata aleatoria y convergencia a la distribución normal estándar

Esta sección se concentra en la aplicación del teorema del límite central a una caminata aleatoria discreta. En virtud de (4.5) y dado que $E[S_n] = 0$ y $\text{Var}[S_n] = 1$, se tiene que

$$W_n(1) = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\text{Var}[S_n]}}.\tag{4.9}$$

Por el teorema del límite central, si $n \rightarrow \infty$,

$$W_n(1) = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\text{Var}[S_n]}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

El símbolo “ $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ ” denota convergencia en distribución.

4.7 Caminata aleatoria discreta en un intervalo de tiempo arbitrario

En la sección anterior se tomó en cuenta una unidad de tiempo. De ahora en adelante se considera un intervalo arbitrario de tiempo $[0, t]$. Se supone que se llevan a cabo n lanzamientos en el intervalo $[0, t]$, de tal manera que cada lanzamiento se realiza cada t/n unidades de tiempo. El monto de la apuesta también es modificado, ya no será 1, sino $\sqrt{t/n}$. En este caso, $E[S_n] = 0$ y $\text{Var}[S_n] = t$. Este nuevo experimento conserva, por supuesto, las propiedades de Martingala y de Markov. La ganancia estandarizada en el primer, segundo y n -ésimo lanzamiento está dada, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}W_n\left(\frac{t}{n}\right) &= X_1, \\ W_n\left(\frac{2t}{n}\right) &= W_n\left(\frac{t}{n}\right) + X_2, \\ &\vdots \\ W_n(t) &= W_n\left(\frac{(n-1)t}{n}\right) + X_n = S_n.\end{aligned}$$

4.8 Variación cuadrática media en un tiempo arbitrario

En el transcurso de la presente sección se estudia la variación cuadrática media de $W_n(t)$ en el intervalo $[0, t]$. Un resultado relevante es que su valor es igual al tiempo total, t . En efecto, la variación cuadrática media satisface

$$\begin{aligned}\nu_n^2(t) &= \sum_{i=1}^n \left[W_n\left(\frac{it}{n}\right) - W_n\left(\frac{(i-1)t}{n}\right) \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (S_i - S_{i-1})^2.\end{aligned}$$

Observe también que, en este caso, se cumple

$$\mathbb{E}[(S_i - S_{i-1})^2] = \mathbb{E}[X_i^2] = \frac{t}{n}.$$

Por lo tanto,

$$\nu_t^2 = \mathbb{E}[\nu_n^2(t)] = t. \quad (4.10)$$

Al igual que en la sección 4.5, la variación cuadrática media de $W_n(t)$, ν_t^2 , es igual al tiempo total, en este caso t .

4.9 Caminata aleatoria en tiempo continuo y movimiento Browniano

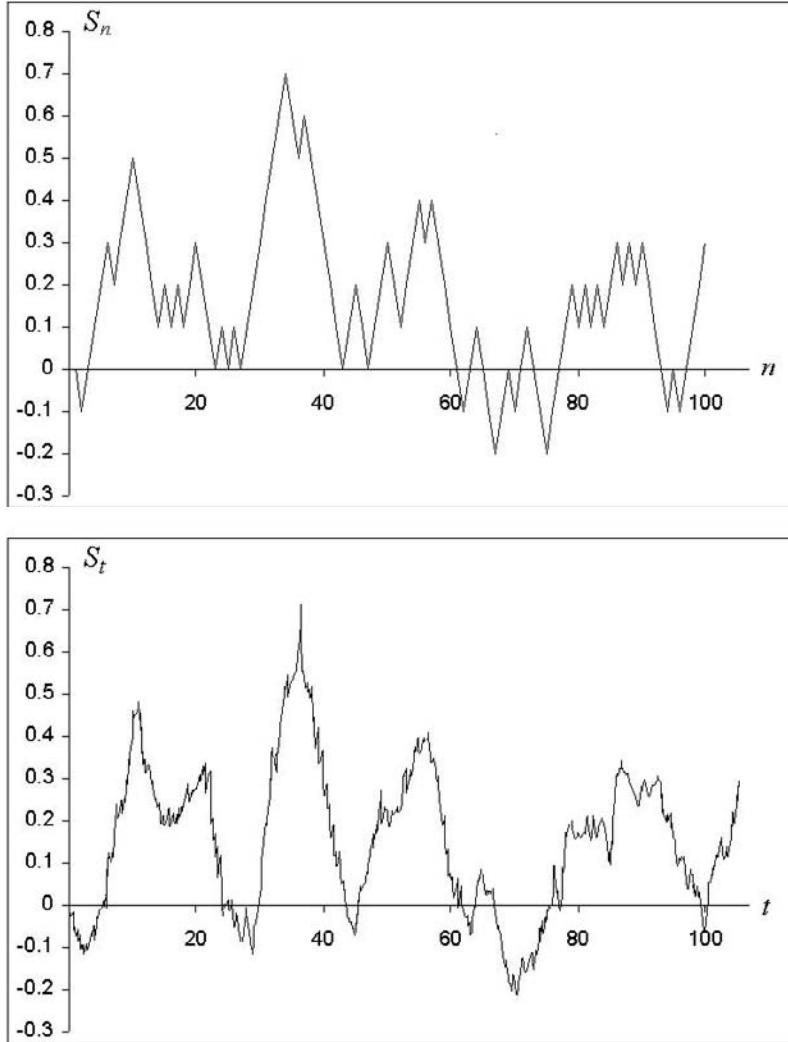
A continuación se aplica el teorema del límite central a una caminata aleatoria discreta en un intervalo de tiempo $[0, t]$ a fin de obtener su versión continua. Dicha versión es conocida como movimiento Browniano. Observe primero que

$$W_n(t) = \sqrt{t} \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\text{Var}[S_n]}} \xrightarrow{\mathcal{D}} W_t \sim \mathcal{N}(0, t) \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

es decir, $W_n(t)$ converge en distribución a una variable aleatoria W_t normal con media cero y varianza t . Por último, observe que si $t_i = it/n$, $i = 1, 2, \dots, n$, es una partición del intervalo $[0, t]$ en subintervalos de igual magnitud, entonces la variación cuadrática media de W_t satisface

$$\begin{aligned}\nu_t^2 &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] \\ &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= t.\end{aligned}$$

De esta manera, el valor de la variación cuadrática media se preserva en el límite.



Gráfica 4.4 Comparación entre una realización discreta y su límite continuo.

4.10 Definición formal del movimiento Browniano

La familia de variables aleatorias $(W_t)_{t \geq 0}$ es llamada movimiento Browniano estándar. Las trayectorias de este proceso son continuas pues el movimiento Browniano es el límite en tiempo continuo de una caminata aleatoria discreta. La Gráfica 4.4 muestra al movimiento Browniano como el límite continuo de una realización discreta. Es importante destacar que las propiedades de martingala y de Markov son heredadas al movimiento Browniano. Obviamente, $W_0=0$ se mantiene. Además, si el intervalo de tiempo bajo consideración es $[s, t]$, entonces $W_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, t-s)$. Si se consideran dos intervalos anidados $[0, s]$ y $[0, t]$, $0 < s < t$, entonces W_s y $W_t - W_s$ son variables aleatorias independientes. Equivalentemente, $W_s - W_0$ y $W_t - W_s$ son variables aleatorias independientes. Asimismo, es fácil verificar que $W_t - W_s = W_{t-s}$. Evidentemente, este razonamiento puede extenderse a tres o más intervalos anidados.

A continuación se establece la definición formal de movimiento Browniano. Un movimiento Browniano estándar (de dimensión 1) es un proceso W_t , definido en un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, que satisface:

- 1) $W_0 = 0$ con probabilidad uno;
- 2) W_t es una función continua en t ;
- 3) Si $0 \leq t_0 < \dots < t_n$, los incrementos $W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son variables aleatorias independientes;
- 4) Si $0 < s < t$, los incrementos $W_t - W_s$ son normalmente distribuidos con media cero y varianza $t - s$.

4.11 Motivación de la integral estocástica

En esta sección se ilustra el concepto de integral estocástica. El ejemplo que se desarrolla a continuación, aunque es muy sencillo, constituye la “regla” esencial del cálculo estocástico. Considere el movimiento Browniano $(W_s)_{0 \leq s \leq t}$, definido en un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y una partición $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ del intervalo $[0, t]$, tal que $t_i = it/n$. Así, $t_i - t_{i-1} = t/n$, $i = 1, 2, \dots, n$. Considere la siguiente sucesión de variables aleatorias:

$$V_n = \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Se desea encontrar V_t tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(V_n - V_t)^2] = 0. \quad (4.11)$$

Se propone como posible candidato del límite en cuestión a

$$V_t = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \right].$$

Una de las razones que justifica esta elección es que la cantidad

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] \\ &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= t \end{aligned}$$

es independiente de n . En este caso, la ecuación (4.11) se transforma en el error cuadrático medio, a saber, $\mathbb{E}[(V_t - \mathbb{E}[V_t])^2]$. Observe ahora que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_n - t]^2 &= \\ \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^4 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\Delta W_{t_i})^2 (\Delta W_{t_j})^2 + t^2 - 2t \sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 \right], \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde se ha utilizado la notación estándar $\Delta W_{t_i} = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$. Considere ahora el lado derecho de la ecuación anterior. En virtud de que los incrementos $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$, $i = 1, 2, \dots, n$, son variables aleatorias independientes, se obtiene

$$\mathbb{E}[(\Delta W_{t_i})^2 (\Delta W_{t_j})^2] = (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}),$$

y como

$$\mathbb{E} [(\Delta W_{t_i})^4] = 3(t_i - t_{i-1})^2,$$

ya que si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, se sigue que $\mathbb{E}[(X/\sigma)^4] = 3$. En consecuencia, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [V_n - t]^2 &= 3 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) \\ &\quad + t^2 - 2t \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Si ahora se utiliza el hecho de que $t_i - t_{i-1} = t/n$, para toda i , es decir, todos los intervalos son del mismo tamaño, se tienen entonces los siguientes resultados:

$$\sum_{i=1}^n 3(t_i - t_{i-1})^2 = n3 \left(\frac{t}{n}\right)^2 = \frac{3t^2}{n}$$

y

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) = \binom{n}{2} \left(\frac{t}{n}\right)^2 = \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{t}{n}\right)^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2n}.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 - t \right]^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3t^2}{n} + t^2 - \frac{t^2}{n} + t^2 - 2t^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2t^2}{n} = 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Parece razonable escribir el límite V_t como

$$\int_0^t (\mathrm{d}W_s)^2 \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 \stackrel{\mathcal{L}_t^2}{=} t,$$

donde, de acuerdo con (4.11), la convergencia es en media cuadrática, es decir, en $\mathcal{L}_t^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En otras palabras,

$$\int_0^t (\mathrm{d}W_s)^2 = t. \tag{4.14}$$

Observe que (4.14) se puede escribir, con cierto abuso en la notación, en forma diferencial como:

$$(\mathrm{d}W_t)^2 = \mathrm{d}t. \tag{4.15}$$

Es también frecuente encontrar la siguiente notación alternativa a (4.14):

$$\int_0^t \mathrm{d}\langle W_s \rangle = t.$$

En términos estrictos, los objetos de estudio del cálculo estocástico son integrales y no diferenciales. Cuando se escribe una ecuación diferencial estocástica, realmente se está pensando en una integral estocástica. Así pues la ecuación (4.15) es una notación simplificada de (4.14).

4.12 Integral de Itô

Después de motivar la idea de integral estocástica, a continuación se proporciona la definición formal. La integral estocástica, o integral de Itô,

$$V_t \equiv \int_0^t f(s) dW_s,$$

es el proceso estocástico tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - V_t \right]^2 = 0, \quad (4.16)$$

donde $(W_s)_{s \geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar y $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ es una partición del intervalo $[0, t]$, tal que $t_i - t_{i-1} = t/n$, $i = 1, 2, \dots, n$. Como antes, la convergencia es en media cuadrática, es decir, en $L_t^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Es sumamente importante enfatizar que el integrando, $f(s)$, el cual puede ser determinista o estocástico, está evaluado en el extremo izquierdo del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Esta elección es natural en finanzas, ya que con ello se asegura que el futuro no interviene en las acciones presentes. Un ejemplo típico de la función f es $f(s) = g(W_s)$. Observe que en el caso de la integral de Riemann-Stieltjes, se obtiene el mismo valor para la integral cuando se toma cualquier punto extremo del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, incluso cualquier punto intermedio. Sin embargo, en el caso de la integral estocástica, los resultados pueden cambiar dependiendo de si se utiliza $f(t_{i-1})$ ó $f(t_i)$, como se verá más adelante. La definición de integral estocástica requiere que la función $f(s)$ se valúe siempre en t_{i-1} . Cuando $f(s) = g(W_s)$, se supondrá que el valor de $f(s)$ depende sólo de los valores pasados de W_u , $u \leq s$. En este caso, se dice que f es predecible. Asimismo, se supondrá que

$$\int_0^t f(s)^2 ds < \infty \text{ casi dondequiera}$$

y

$$\int_0^t E[f^2(s)] ds < \infty.$$

La condición sobre la primera integral garantiza que la integral de Itô, $\int_0^t f(s) dW_s$, esté bien definida y la condición sobre la segunda integral asegura que la varianza de $\int_0^t f(s) dW_s$ se mantenga finita. Evidentemente, si $f(s)$ es determinista, las dos condiciones anteriores coinciden. Por último, observe también que si se denota

$$V_n = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}),$$

la desigualdad de Chebychev conduce a

$$\mathbb{P}\{|V_n - V| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E[(V_n - V)^2]$$

para toda $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, convergencia en L_t^2 implica convergencia en probabilidad. Por último, es fácil verificar que la integral estocástica tiene las siguientes propiedades:

(i) Linealidad: Si f y g son tales que sus integrales de Itô existen y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

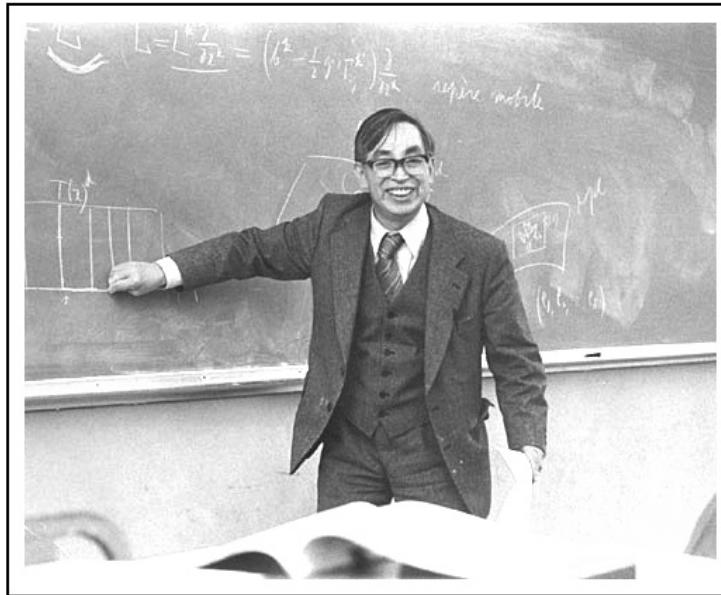
$$\int_0^t (\alpha f(s) + \beta g(s)) dW_s = \alpha \int_0^t f(s) dW_s + \beta \int_0^t g(s) dW_s.$$

(ii) Isometría: Si f es tal que la integral de Itô existe, entonces

$$E \left[\left(\int_0^t f(s) dW_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t f(s)^2 ds \right] = \int_0^t E[f(s)^2] ds.$$

(iii) Propiedad de martingala: Si f es tal que la integral de Itô existe, entonces

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t f(s) dW_s \mid \mathcal{F}_u \right] = \int_0^u f(s) dW_s.$$



Fuente: www.abelprisen.no

Kiyosi Itô (1915-)

4.13 Un segundo ejemplo de integración estocástica

En esta sección se desarrolla otro ejemplo de integración estocástica con el propósito de ilustrar diferentes procedimientos para encontrar límites en \mathcal{L}_t^2 . En lo que sigue, se estará interesado en encontrar el límite en \mathcal{L}_t^2 de la siguiente sucesión:

$$V_n = \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}), \quad n = 1, 2, \dots$$

En este caso, de acuerdo con (4.16), $f(t_{i-1}) = W_{t_{i-1}}$. Claramente, V_n es una variable aleatoria. Observe primero que para cualquier a y b se cumple la identidad

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

ó

$$ab = \frac{1}{2} [(a + b)^2 - a^2 - b^2].$$

Si se utiliza la fórmula anterior con $a = W_{t_{i-1}}$ y $b = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$, se tiene que

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[(W_{t_{i-1}} + W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - W_{t_{i-1}}^2 - (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[W_{t_i}^2 - W_{t_{i-1}}^2 - (\Delta W_{t_i})^2 \right]. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Observe que la primera parte de la suma anterior satisface

$$\sum_{i=1}^n \left(W_{t_i}^2 - W_{t_{i-1}}^2 \right) = W_t^2 - W_0^2 = W_t^2.$$

Por lo tanto,

$$V_n = \frac{1}{2} \left[W_t^2 - \sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 \right].$$

De acuerdo con (4.13), se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} \left(W_t^2 - \sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 \right) - \frac{1}{2} (W_t^2 - t) \right] = 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \stackrel{\mathcal{L}_t^2}{=} \frac{1}{2} (W_t^2 - t), \quad (4.18)$$

donde el límite se interpreta de acuerdo con (4.16). En conclusión,

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} (W_t^2 - t).$$

4.14 Ejemplo de un límite en \mathcal{L}_t^2 cuando se evalúa el integrando en el extremo derecho

En esta sección se destaca el hecho de que el límite de $\sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$ puede cambiar si, en lugar de $f(t_{i-1})$, se utiliza $f(t_i)$. En efecto, considere la sucesión

$$\sum_{i=1}^n W_{t_i} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}),$$

se desea encontrar su límite en el sentido de convergencia cuadrática media. Observe, primero, que para valores arbitrarios de a y b siempre se cumple que

$$b(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a-b)^2.$$

De esta manera, si $a = W_{t_{i-1}}$ y $b = W_{t_i}$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n W_{t_i} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (W_{t_i}^2 - W_{t_{i-1}}^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta W_{t_i})^2 \\ &= \frac{1}{2} W_t^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 \end{aligned}$$

y un posible candidato para el límite está dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n W_{t_i} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \right] \stackrel{\mathcal{L}_t^2}{=} \frac{1}{2} W_t^2 + \frac{1}{2} t.$$

En virtud de (4.13) se tiene que

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 - t \right]^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 \right]^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} (W_t^2 + t) - \frac{1}{2} \left(W_t^2 + \sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 \right) \right]^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} \left(W_t^2 + \sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 \right) - \frac{1}{2} (W_t^2 + t) \right]^2.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_{t_i} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \stackrel{\mathcal{L}_t^2}{=} \frac{1}{2} (W_t^2 + t).$$

Observe también que

$$\begin{aligned}
 t &\stackrel{\mathcal{L}_t^2}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_{t_i} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_{t_i} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - \frac{1}{2} (W_t^2 - t).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_{t_i} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \stackrel{\mathcal{L}_t^2}{=} \frac{1}{2} (W_t^2 + t). \tag{4.20}$$

Después de contrastar el resultado anterior con (4.18), se pone en evidencia la relevancia de fijar un extremo del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ para valuar $f(s)$ a fin de eliminar cualquier ambigüedad. Asimismo, se supondrá que el valor de $f(s)$ depende sólo de los valores pasados de W_u , $u \leq s$. En este caso, se dice que la función $f(s)$ es predecible. Por último, observe que al conjuntar (4.18) y (4.19), se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [(1-\epsilon)W_{t_{i-1}} - \epsilon W_{t_i} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})] \stackrel{\mathcal{L}_t^2}{=} \frac{1}{2} W_t^2 + \left(\epsilon - \frac{1}{2}\right) t. \tag{4.20}$$

4.15 Un tercer ejemplo de integración estocástica

Los ejemplos que hasta ahora se han presentado, aunque sencillos, han ayudado a familiarizarse con las técnicas de análisis del cálculo estocástico. Con base en la idea de que muchos ejemplos ilustrativos ayudan a reforzar mejor los conceptos básicos de la teoría, se presenta otro ejemplo de integración estocástica. En esta ocasión, se desea encontrar el límite en \mathcal{L}_t^2 de la siguiente sucesión de variables aleatorias:

$$V_n = \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}}^2 (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \quad n = 1, 2, \dots$$

En este caso, es conveniente utilizar la siguiente identidad que es válida para todo $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a^2(b-a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - a(b-a)^2 - \frac{1}{3}(b-a)^3.$$

Si en la fórmula anterior $a = W_{t_{i-1}}$ y $b = W_{t_i}$, se tiene que

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \left(W_{t_i}^3 - W_{t_{i-1}}^3 \right) - \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^3 \\ &= \frac{1}{3} W_t^3 - \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} \left[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}) \right] \\ &\quad - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^3. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Los límites en \mathcal{L}_t^2 de las tres sumas en la expresión anterior están dados por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) \stackrel{\mathcal{L}_t^2}{=} \int_0^t W_s ds, \quad (4.22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} \left[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}) \right] \stackrel{\mathcal{L}_t^2}{=} 0 \quad (4.23)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^3 \stackrel{\mathcal{L}_t^2}{=} 0. \quad (4.24)$$

En efecto, la desigualdad de Cauchy-Schwartz implica que

$$\begin{aligned} &E \left[\left(\sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) - \int_0^t W_s ds \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (W_{t_{i-1}} - W_s) ds \right)^2 \right] \\ &\leq n E \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} (W_{t_{i-1}} - W_s) ds \right)^2 \right] \\ &= n \sum_{i=1}^n E \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} (W_{t_{i-1}} - W_s) ds \right]^2 \\ &\leq n \sum_{i=1}^n E \left[(t_i - t_{i-1}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} (W_{t_{i-1}} - W_s)^2 ds \right] \\ &= n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} E [W_{t_{i-1}} - W_s]^2 ds \\ &= n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} E [W_s - W_{t_{i-1}}]^2 ds \\ &= n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} (s - t_{i-1}) ds \\ &= n \sum_{i=1}^n \frac{(t_i - t_{i-1})^3}{2} \\ &= \frac{n^2}{2} \left(\frac{t}{n} \right)^3 \\ &= \frac{t^3}{2n} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La primera desigualdad de la expresión anterior se sigue de

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

En particular, si $a_i = 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

La segunda desigualdad se obtiene de

$$\left(\int_a^b f(s)g(s)ds \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(s)^2 ds \right) \left(\int_a^b g(s)^2 ds \right).$$

En particular, si $f(s) \equiv 1$ en $[a, b]$, entonces

$$\left(\int_a^b g(s)ds \right)^2 \leq (b-a) \left(\int_a^b g(s)^2 ds \right).$$

El segundo límite en \mathcal{L}_t^2 se verifica como sigue

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} [(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})] \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [W_{t_{i-1}}^2 [(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})]^2] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[W_{t_{i-1}}^2] \mathbb{E} [(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n t_{i-1} \mathbb{E} [(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^4 - 2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2(t_i - t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})^2] \\ &= \sum_{i=1}^n t_{i-1} \mathbb{E} [3(t_i - t_{i-1})^2 - 2(t_i - t_{i-1})^2 + (t_i - t_{i-1})^2] \\ &= 2 \sum_{i=1}^n t_{i-1} (t_i - t_{i-1})^2 \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)t}{n} \left(\frac{t}{n} \right)^2 \\ &= 2 \left(\frac{t}{n} \right)^3 \sum_{i=1}^n (i-1) \\ &= 2 \left(\frac{t}{n} \right)^3 \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{(n-1)}{n^2} t^3 \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) t^3 \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por último, para el tercer límite se tiene que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^3 \right)^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^6] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E} [(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^3] \mathbb{E} [(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^3] \\
&= 15 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^3 \\
&= 15 \sum_{i=1}^n \frac{t^3}{n^3} \\
&= \frac{15t^3}{n^2} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}}^2 (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \xrightarrow{\mathcal{L}_t^2} \frac{1}{3} W_t^3 + \int_0^t W_s ds.$$

Es decir

$$\int_0^t W_s^2 dW_s = \frac{1}{3} W_t^3 + \int_0^t W_s ds.$$

4.16 Lema de Itô

A continuación se presenta un resultado básico del cálculo estocástico, el llamado lema de Itô sobre cambio de variable. Sea

$$X_t := x_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

con $X_0 = x_0$, donde $\mu_s = \mu(X_s, s)$ y $\sigma_s = \sigma(X_s, s)$. Suponga que $\int_0^t |\mu_s| ds$ es definida como una integral ordinaria casi dondequiera y $\int_0^t \mathbb{E}[\sigma_s^2] ds < \infty$ de tal manera que la integral estocástica $\int_0^t \sigma_s dW_s$ tenga varianza finita. Es usual y conveniente expresar dicha ecuación en forma diferencial, es decir,

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, \quad X_0 = x_0,$$

teniendo siempre en mente que el objeto de estudio del cálculo estocástico es la integral estocástica. Suponga ahora que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es de la clase C^2 , es decir f tiene segundas derivadas parciales continuas. El objetivo fundamental es determinar e interpretar la diferencial estocástica $df(X_t, t)$ del proceso $f(X_t, t)$. Considere la partición $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ del intervalo $[0, t]$, tal que $t_i - t_{i-1} = t/n$, $i = 1, 2, \dots, n$. La fórmula de Taylor conduce a

$$\begin{aligned}
f(X_t, t) - f(x_0, 0) &= \sum_{i=1}^n f(X_{t_i}, t_i) - f(X_{t_{i-1}}, t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}(X_{t_{i-1}}, t_{i-1} + \phi_{i-1} \Delta t_i) \Delta t_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_{i-1}}(X_{t_{i-1}}, t_{i-1}) \Delta X_{t_i} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial X_{i-1}^2}(X_{t_{i-1}} + \theta_{i-1} \Delta X_{t_i}, t_{i-1}) (\Delta X_{t_i})^2,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

donde $0 < \phi_{i-1}, \theta_{i-1} < 1$. Con respecto de la tercera suma en la expresión anterior, se puede probar que

$$\sum_{i=1}^n (\Delta X_{t_i})^2 = \sum_{i=1}^n (\mu_{t_{i-1}} \Delta t_i + \sigma_{t_{i-1}} \Delta W_{t_i})^2 \xrightarrow{\mathcal{L}_t^2} \sigma_s^2 \int_0^t (dW_s)^2.$$

En consecuencia,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial X_{i-1}^2}(X_{t_{i-1}} + \theta_{i-1} \Delta X_{t_i}, t_{i-1}) (\Delta X_{t_i})^2 \xrightarrow{\mathcal{L}_t^2} \sigma_s^2 \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial X_s}^2 ds, \quad (4.26)$$

ya que $d \int_0^s (dW_u)^2 = ds$. Para la segunda suma de (4.25), se tiene, con probabilidad uno, que

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_{i-1}}(X_{t_{i-1}}, t_{i-1}) \Delta X_{t_i} \xrightarrow{\mathcal{L}_t^2} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s} dX_s = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s} \mu_s ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s} \sigma_s dW_s. \quad (4.27)$$

Por último, la primera suma satisface

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial t_{i-1}}(X_{t_{i-1}}, t_{i-1} + \phi_{i-1} \Delta t_i) \Delta t_i \xrightarrow{\mathcal{L}_t^2} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s} ds. \quad (4.28)$$

En virtud de (4.26)-(4.28), se tiene que

$$\begin{aligned} f(X_t, t) &= f(x_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s} ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s} \mu_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial X_s}^2 \sigma_s^2 ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s} \sigma_s dW_s \\ &= f(x_0, 0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial X_s} \mu_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_s}^2 \sigma_s^2 \right) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s} \sigma_s dW_s, \end{aligned}$$

lo cual se puede expresar en términos de diferenciales estocásticas como

$$df(X_t, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X_t} \mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t}^2 \sigma_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} \sigma_t dW_t.$$

4.17 Integral estocástica y el espacio \mathcal{H}_t^2

Sea \mathcal{H}_t^2 el espacio de funciones, $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$, deterministas o estocásticas, tales que

$$E \left[\int_0^t f^2(s) ds \right] < \infty.$$

Si, por ejemplo, $f(s) = g(W_s)$ y W_s es un movimiento Browniano definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, entonces se requiere

$$E \left[\int_0^t f^2(s) ds \right] = \int_{\Omega} \left(\int_0^t g^2(W_s) ds \right) dP(\omega) < \infty.$$

Como antes, se supondrá que $g(W_s)$ depende sólo de los valores pasados de W_u . Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_t^2$ y $f \in \mathcal{H}_t^2$, tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_0^t [f_n(s) - f(s)]^2 ds \right] = 0,$$

es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{\mathcal{H}_t^2}{=} f$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\int_0^t f_n(s) dW_s - \int_0^t f(s) dW_s \right)^2 \right] = 0.$$

Esto se sigue, inmediatamente, de la propiedad de isometría de la integral estocástica, ya que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f_n(s) dW_s - \int_0^t f(s) dW_s \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t (f_n(s) - f(s)) dW_s \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t [f_n(s) - f(s)]^2 ds \right] \end{aligned}$$

o, en notación de normas,

$$\|I_t(f) - I_t(f_n)\|_{\mathcal{L}_t^2} = \|f - f_n\|_{\mathcal{H}_t^2},$$

donde

$$I_t(f) = \int_0^t f(s) dW_s, \quad \|I_t(f)\|_{\mathcal{L}_t^2} = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(s) dW_s \right)^2 \right] \quad \text{y} \quad \|f\|_{\mathcal{H}_t^2} = \mathbb{E} \left[\int_0^t f(s)^2 ds \right].$$

Así, por ejemplo, si $f(t) = 1_{[0,t]}(t)W_t$ y

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^n 1_{[t_{i-1}, t_i]}(t)W_{t_{i-1}},$$

donde $t_i = it/n$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t [f_n(s) - f(s)]^2 ds \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} [W_{t_{i-1}} - W_t]^2 ds \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbb{E}[(W_{t_{i-1}} - W_t)^2] ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (t - t_{i-1})^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t}{n} \right)^2 \\ &= \frac{t^2}{2n} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Observe ahora que

$$\int_0^t f_n(s) dW_s = \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} \Delta W_{t_i}.$$

En virtud de la ecuación (4.18), se sabe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} \Delta W_{t_i} \stackrel{\mathcal{L}_t^2}{=} \frac{1}{2} (W_t^2 - t).$$

Por lo tanto,

$$\int_0^t f(s) dW_s = \frac{1}{2} (W_t^2 - t).$$

Es decir,

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} (W_t^2 - t).$$

4.18 Bibliografía sugerida

- Bingham, N. H. and R. Kiesel (1998). Risk-Neutral Valuation, Pricing and Hedging of Financial Derivatives. Series Springer Finance. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
- Clebaner, F. C. (1999). Introduction to Stochastic Processes with Applications. Imperial College Press, London.
- Karatzas, I. and S. E. Shreve (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus. Graduate Texts in Mathematics. Second edition. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
- Revuz, D. and M. Yor (1991). Continuous Martingales and Brownian Motion. Series of Comprehensive Studies in Mathematics. Third edition, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
- Steel, J. M. (2001). Stochastic Calculus and Financial Applications, Series Applications of Mathematics. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.

4.19 Ejercicios

4.1 Con la notación de la sección 4.2 justifique que

$$\mathbb{E}[X_n \mid S_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n].$$

4.2 Suponga que $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(0) = 0$, demuestre que

$$\frac{1}{2}f(t)^2 = \int_0^t f(s) \frac{df(s)}{ds} ds = \int_0^t f(s) df(s).$$

Compare este resultado con $\int_0^t W_s dW_s$, donde W_s es un movimiento Browniano.

4.3 Un resultado de este capítulo es que

$$\int_0^t W_s^2 dW_s = \frac{1}{3}W_t^3 + \int_0^t W_s ds.$$

Demuestre que la integral del lado derecho de la ecuación anterior satisface

$$\int_0^t W_s ds = \int_0^t (t-s) dW_s.$$

Obviamente $\int_0^t W_s ds$ no es una integral estocástica, en el sentido de Itô, sino una variable aleatoria. Para cada $\omega \in \Omega$, $W_s(\omega)$ es una función continua.

4.4 Pruebe que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t W_s^2 ds\right] = \frac{t^2}{2}.$$

Solución: Observe que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t W_s^2 ds\right] = \int_0^t \mathbb{E}[W_s^2] ds = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2}.$$

4.5 Con respecto del ejercicio anterior, demuestre que

$$\text{Var}\left[\int_0^t W_s ds\right] = \int_0^t \int_0^t \min(u, v) du dv.$$

En particular, verifique que

$$\text{Var}\left[\int_0^1 W_s ds\right] = \frac{1}{3}.$$

4.6 Demuestre, a partir de la identidad

$$b(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a-b)^2$$

que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_{t_i} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \stackrel{\mathcal{L}_t^2}{=} \frac{1}{2} (W_t^2 + t).$$

4.7 Demuestre (4.22) utilizando el siguiente hecho:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (W_{t_{i-1}} - W_s) ds \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} (W_{t_{i-1}} - W_s) ds \right)^2 \right] \\ &+ 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbb{E} [(W_{t_{i-1}} - W_s)] \mathbb{E} [(W_{t_{j-1}} - W_u)] ds du \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} (W_{t_{i-1}} - W_s) ds \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

4.8 Muestre que

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t X_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t X_s^2 dW_s \right],$$

donde X_s es un proceso estocástico cuyo valor depende sólo de los valores pasados de W_u , $u \leq s$, tal que

$$\int_0^t X_s^2 ds < \infty \text{ casi dondequiera}$$

y

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t X_s^2 dW_s \right] < \infty.$$

La condición sobre la primera integral garantiza que la integral de Itô, $\int_0^t X_s dW_s$, esté bien definida y la condición sobre la segunda integral asegura que la varianza de $\int_0^t X_s dW_s$ se mantenga finita. En particular, se cumple que si $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_0^t f(s)^2 ds < \infty$$

y

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(s) dW_s \right)^2 \right] = \int_0^t f(s)^2 ds,$$

entonces

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^1 s dW_s \right)^2 \right] = \frac{1}{3}.$$

Asimismo, pruebe que $\int_0^t s dW_s \sim \mathcal{N}(0, t^3/2)$. ¿Cuál es la distribución de $\int_0^t s^n dW_s$, $n \in \mathbb{N}$?

4.9 Demuestre que si $0 < a < b < t$, entonces

$$\int_0^t 1_{[a,b]}(s) dW_s = W_b - W_a,$$

donde

$$1_{[a,b]}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in [a, b], \\ 0 & \text{si } s \notin [a, b]. \end{cases}$$

4.10 Calcule $\text{Var}[\int_0^t |W_s|^{1/2} dW_s]$.

Solución: Observe, primero, que

$$\mathbb{P}\{|W_s| > w\} = 2\mathbb{P}\{W_s \geq w\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|W_s|] &= \int_0^\infty \mathbb{P}\{|W_s| > w\} dw \\ &= 2 \int_0^\infty \mathbb{P}\{W_s > w\} dw \\ &= 2\mathbb{E}[W_s] \\ &= 2 \int_0^\infty w \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-w^2/2s} dw \\ &= \sqrt{\frac{4}{2\pi s}} \int_0^\infty w e^{-w^2/2s} dw. \end{aligned}$$

Considere el siguiente cambio de variable $u = w^2/2s$, de donde $sdu = wdw$. Así,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|W_s|] &= \sqrt{\frac{4}{2\pi s}} \int_0^\infty w e^{-w^2/2s} dw \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \int_0^\infty e^{-u} s du \\ &= \sqrt{\frac{2s}{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-u} du \\ &= \sqrt{\frac{2s}{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-e^{-u} \right]_0^n \\ &= \sqrt{\frac{2s}{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - e^{-n^2/2s} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2s}{\pi}}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[\int_0^t |W_s|^{1/2} dW_s\right] &= \int_0^t \mathbb{E}[|W_s|] ds \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \sqrt{s} ds \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

4.11 Calcule $\text{Var}[\int_0^t W_s^n dW_s]$, $n \in \mathbb{N}$.

4.12 Verifique que

$$\text{Var} \left[\int_0^1 W_s dW_s \right] = \int_0^1 \mathbb{E}[W_s^2] ds = \frac{1}{2}.$$

4.13 Determine para qué valores de θ la expresión

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} \right)^\theta dW_s \right)^2 \right]$$

es finita.

Solución: Es suficiente aplicar la propiedad de isometría y observar que

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} \right)^{2\theta} ds < \infty$$

cuando $\theta < \frac{1}{2}$.

4.14 Diga si es cierto que $f(s) \leq g(s)$ implica

$$\int_0^t f(s) dW_s \leq \int_0^t g(s) dW_s.$$

Solución: Falso.

4.15 Verifique la propiedad de martingala: si f es tal que la integral de Itô existe y $u < t$, entonces

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t f(s) dW_s \mid \mathcal{F}_u \right] = \int_0^u f(s) dW_s.$$

Solución: Observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t f(s) dW_s \mid \mathcal{F}_u \right] &= \int_0^u f(s) dW_s \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^u f(s) dW_s + \int_u^t f(s) dW_s \mid \mathcal{F}_u \right] \\ &= \int_0^u f(s) dW_s + \mathbb{E} \left[\int_u^t f(s) dW_s \mid \mathcal{F}_u \right] \\ &= \int_0^u f(s) dW_s, \end{aligned}$$

ya que $\int_u^t f(s) dW_s$ es independiente de \mathcal{F}_u .

4.16 Si f es tal que la integral de Itô existe, pruebe que

$$\left(\int_0^t f(s) dW_s \right)^2 - \int_0^t f(s) ds \quad \text{y} \quad \exp \left\{ \int_0^t f(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t f^2(s) ds \right\}$$

son martingalas.

4.17 Diga cuáles de las siguientes integrales estocásticas son martingalas:

$$\int_0^t W_s dW_s, \quad \int_0^t W_s^2 dW_s.$$

4.18 Muestre que si f y g son tales que las integrales estocásticas, $\int_0^t f(s)dW_s$ y $\int_0^t g(s)dW_s$, existen, entonces

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(s)dW_s \right) \left(\int_0^t g(s)dW_s \right) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t f(s)g(s)ds \right].$$

En particular, calcule

$$\text{Cov} \left(\int_0^1 s dW_s, \int_0^1 s^2 dW_s \right).$$

4.19 Demuestre la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s ds.$$

Generalice la fórmula anterior. Para ello, pruebe que

$$\int_0^t f(s)dW_s = f(t)W_t - \int_0^t W_s f'(s)ds.$$

Haga los supuestos necesarios sobre $f(s)$.

Solución: Observe que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n t_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) &= \sum_{i=1}^n (t_i W_{t_i} - t_{i-1} W_{t_{i-1}}) - \sum_{i=1}^n W_{t_i} (t_i - t_{i-1}) \\ &= f(t)W_t - \sum_{i=1}^n W_{t_i} (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

El límite en \mathcal{L}_t^2 de la suma del lado derecho de la ecuación anterior se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n W_{t_i} (t_i - t_{i-1}) - \int_0^t W_s ds \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (W_{t_i} - W_s) ds \right)^2 \right] \\ &\leq n \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} (W_{t_i} - W_s) ds \right)^2 \right] \\ &\leq n \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \mathbb{E} \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} (W_{t_i} - W_s)^2 ds \right] \\ &= \frac{n}{2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^3 \\ &= \frac{t^3}{2n} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

4.20 Con la notación de la sección 4.16 muestre que

$$\sum_{i=1}^n (\Delta X_{t_i})^2 = \sum_{i=1}^n (\mu_{t_{i-1}} \Delta t_i + \sigma_{t_{i-1}} \Delta W_{t_i})^2 \xrightarrow{\mathcal{L}_t^2} \sigma_s^2 \int_0^t (dW_s)^2.$$

Solución: Demuestre, primero, los siguientes resultados:

$$\sum_{i=1}^n \mu_{t_{i-1}}^2 (\Delta t_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\mu_{t_{i-1}}^2 \Delta t_i \right) \Delta t_i \longrightarrow \int_0^t (\mu_s^2 \times 0) ds = 0$$

y

$$\sum_{i=1}^n \mu_{t_{i-1}} \sigma_{t_{i-1}} (\Delta t_i) (\Delta W_{t_i}) \xrightarrow{\mathcal{L}_t^2} \int_0^t (\mu_s \sigma_s \times 0) dW_s = 0.$$

4.21 Suponga que

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_u du + \sigma \int_0^t S_u dW_u,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $(W_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido en un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Demuestre mediante el lema de Itô que

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t.$$

4.22 Suponga que $(W_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar definido en un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si f es tal que la integral de Itô, $\int_0^t f(s)dW_s$ existe, establezca las condiciones bajo las cuales

$$E \left[\left(\int_0^t f(s)dW_s \right)^2 \right] = \int_0^t \int_{\Omega} f(s)^2 dP(\omega) ds = \int_{\Omega} \int_0^t f(s)^2 ds dP(\omega).$$

4.23 Sea f tal que la integral de Itô, $X_t = \int_0^t f(s)dW_s$ existe. Pruebe que

$$E \left[\max_{s \in [0,t]} X_s^2 \right] \leq 4E \left[\int_0^t f^2(s) ds \right].$$

4.24 Si $f(t) = 1_{[0,t]}(t)W_t^2$ y

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^n 1_{[t_{i-1}, t_i]}(t)W_{t_{i-1}}^2,$$

donde $t_i = it/n$, $i = 1, 2, \dots, n$, muestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_0^t [f_n(s) - f(s)]^2 ds \right] = 0.$$

Solución:

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^t [f_n(s) - f(s)]^2 ds \right] &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} E \left[(W_{t_{i-1}}^2 - W_t^2)^2 \right] ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} [3(t - t_{i-1})^2 + 4t_{i-1}(t - t_{i-1})] ds \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{t}{n} \right)^3 + 2 \left(\frac{t}{n} \right)^2 \left(\frac{it}{n} \right) \right] \\ &= \frac{t^3}{n} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 5

DIFERENCIACIÓN ESTOCÁSTICA: LEMA DE ITÔ

Conceptos básicos de este capítulo:

- Integral estocástica
- Diferencial estocástica
- Lema de Itô
- Reglas de diferenciación estocástica

5.1 Introducción

Una de las herramientas más útiles en las matemáticas financieras modernas es el llamado cálculo estocástico, o cálculo de Itô, sobre el cual descansa prácticamente toda la teoría económica y el análisis financiero en tiempo continuo y en ambientes estocásticos. El presente capítulo introduce uno de los resultados centrales del cálculo estocástico, el lema de Itô, el cual se utiliza para obtener diferenciales estocásticas. Asimismo, se desarrollan varias aplicaciones del lema de Itô a fin de que el lector se familiarice con su uso.

En términos estrictos, el objeto de estudio del cálculo estocástico es la integral y no la diferencial. Cuando se escribe una ecuación diferencial estocástica, realmente se está pensando en una integral estocástica, así pues una ecuación diferencial estocástica es una notación simplificada de una integral estocástica. El presente capítulo se concentra en el estudio de variables aleatorias cuya dinámica es guiada por ecuaciones diferenciales, las cuales tienen una componente estocástica que involucra al movimiento Browniano.

En esta sección se presentan las reglas básicas de diferenciación estocástica. A partir de estas reglas se construyen otras reglas más elaboradas. Por ejemplo, las reglas de diferenciación estocástica de sumas, productos y cocientes.

5.2 Reglas básicas de diferenciación estocástica

En el cálculo de variables reales, si t es una variable independiente, se tiene que el cuadrado de una cantidad infinitesimal, $(dt)^2$, es una cantidad despreciable y se escribe

$$(dt)^2 = 0, \quad (5.1)$$

en otras palabras, si algo es pequeño, entonces su cuadrado es todavía más pequeño. De hecho, $(dt)^a = 0$ si $a > 1$. La regla central del cálculo estocástico, que hace la distinción con el cálculo de variables reales, es que el cuadrado de una cantidad infinitesimal “normal” es significativa. Específicamente, se tiene que si W_t es un movimiento Browniano estandarizado, entonces

$$(dW_t)^2 = dt. \quad (5.2)$$

Formalmente, el cálculo estocástico produce

$$\int_0^t (dW_s)^2 = \int_0^t ds = t, \quad (5.3)$$

lo cual se denota en forma más simple como (5.2). Asimismo, observe que

$$(dt)(dW_t) = (dt)(dt)^{1/2} = (dt)^{3/2},$$

la cual es de nuevo una cantidad despreciable, es decir,

$$(dt)(dW_t) = 0. \quad (5.4)$$

Así pues, las reglas básicas de diferenciación estocástica, (5.1), (5.2) y (5.3), también llamadas reglas empíricas de diferenciación estocástica, se resumen en el Cuadro 5.1.

	dt	dW _t
dt	0	0
dW _t	0	dt

Cuadro 5.1. Reglas básicas de diferenciación estocástica.

5.3 Integral estocástica (Integral de Itô)

En esta sección se discute, brevemente, el concepto de integral estocástica. Considere la integral estocástica

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu(S_u, u)du + \int_0^t \sigma(S_u, u)dW_u, \quad (5.5)$$

donde $(W_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Para asegurar que (5.5) tenga una solución única, S_t , adaptada a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, se requiere que $\mu(S_t, t)$ y $\sigma(S_t, t)$ satisfagan la condición global de Lipschitz

$$|\mu(x, t) - \mu(y, t)| \leq K|x - y| \quad \text{para toda } t \in [0, \infty) \text{ y } x, y \in \mathbb{R} \quad (5.6)$$

y con la condición de crecimiento

$$\mu^2(x, t) + \sigma^2(x, t) \leq K(1 + x^2) \quad \text{para toda } t \in [0, \infty) \text{ y } x \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

Asimismo, a fin de que la media y varianza del proceso (5.5) estén bien definidas, se requiere que se satisfagan las siguientes condiciones de integrabilidad, casi dondequiera con respecto de \mathbb{P} ,

$$\int_0^\infty |\mu(S_t, t)|dt < \infty, \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \sigma^2(S_t, t)dt < \infty. \quad (5.8)$$

Bajo las condiciones anteriores existe un único proceso S_t , adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, con media y varianza, condicionales en la información \mathcal{F}_0 , finitas dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}[S_t | \mathcal{F}_0] = S_0 + \int_0^t \mu(S_u, u)du \leq \int_0^\infty |\mu(S_t, t)|dt < \infty$$

y

$$\text{Var}[S_t | \mathcal{F}_0] = \int_0^t \sigma^2(S_u, u)du.$$

5.4 Integral y diferencial estocástica

El objeto de estudio del cálculo estocástico es la integral estocástica, la cual se define como el proceso estocástico

$$V_t \equiv \int_0^t f(s) dW_s,$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E^P \left[\sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - V_t \right]^2 = 0, \quad (5.9)$$

donde $(W_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar y $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$ es una partición del intervalo $[0, t]$, tal que $t_i - t_{i-1} = t/n$, $i = 1, 2, \dots, n$. Observe que la convergencia es en media cuadrática, es decir, en L^2 . Por ejemplo, se puede demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E^P \left[\sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 - t \right]^2 = 0.$$

En consecuencia, se tiene que el límite V_t está dado por

$$\int_0^t (dW_s)^2 \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 \stackrel{L^2}{=} t.$$

En otras palabras,

$$\int_0^t (dW_s)^2 = t,$$

lo cual genera (5.3). Asimismo, se puede demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E^P \left[\sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - \frac{1}{2} (W_t^2 - t) \right] = 0. \quad (5.10)$$

De esta manera, se tiene que

$$\int_0^t W_s dW_s \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \stackrel{L^2}{=} \frac{1}{2} (W_t^2 - t). \quad (5.11)$$

Como puede observarse, de los ejemplos anteriores, la integral estocástica es el límite en media cuadrática de una suma de términos que comprenden incrementos independientes de un movimiento Browniano. Sin embargo, en la literatura financiera y económica, es frecuente encontrar como notación simplificada de (5.5) una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dS_t = \mu(S_t, t) dt + \sigma(S_t, t) dW_t. \quad (5.12)$$

Es importante destacar que la mayor parte del desarrollo de la teoría financiera y económica en tiempo continuo utiliza la notación simplificada (5.12), teniendo siempre en mente una integral estocástica como la dada en (5.5).

5.5 Lema de Itô

Aun cuando una ecuación diferencial estocástica es la notación simplificada de una integral estocástica, las reglas que se establecen con la notación diferencial y los resultados que a partir de ellas se desprenden son consistentes con las propiedades de la integral estocástica. Asombrosamente, la diferencial estocástica permite, en muchos casos, obtener resultados de manera más rápida y sencilla sobre la integral estocástica, como se verá en el transcurso del presente capítulo.

Considere una función $y = f(S_t, t)$. Debido a la regla $(dW_t)^2 = dt$, es conveniente calcular la diferencial de $y = f(S_t, t)$ considerando los términos de segundo orden en una expansión en

serie de Taylor. En el caso de variables reales, la diferencial se calcula sólo con los términos de primer orden ya que el producto de cantidades infinitesimales es de orden despreciable. La expansión en serie de Taylor de $y = f(S_t, t)$ hasta términos de segundo orden conduce a

$$dy = \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t} (dS_t)(dt) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right). \quad (5.13)$$

La sustitución de (5.3) y la aplicación de las reglas básicas de diferenciación estocástica, $(dt)^2 = 0$, $(dt)(dW_t) = 0$ y $(dW_t)^2 = dt$, produce

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} [\mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} [\mu^2(S_t, t)(dt)^2 + 2\mu(S_t, t)\sigma(S_t, t)(dt)(dW_t) + \sigma^2(S_t, t)(dW_t)^2] \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t} [\mu(S_t, t)(dt)^2 + \sigma(S_t, t)(dW_t)(dt)] + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right] \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t} \mu(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2(S_t, t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma(S_t, t) dW_t. \end{aligned} \quad (5.14)$$

En términos estrictos la ecuación anterior debería ser escrita como

$$\begin{aligned} y_t &= y_0 + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial S_u} \mu(S_u, u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_u^2} \sigma^2(S_u, u) \right) du \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial S_u} \sigma(S_u, u) dW_u \end{aligned} \quad (5.15)$$

ó

$$y_t = y_0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u} du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial S_u} dS_u + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial S_u^2} \sigma^2(S_u, u) du.$$

Por supuesto, se supone que $y = f(S_t, t)$ tiene segundas derivadas parciales continuas. Los resultados (5.14) y (5.15) son conocidos como el lema de Itô en su forma diferencial e integral, respectivamente. En ocasiones, a fin de identificar el término du que proviene de $(dW_u)^2 = du$ la ecuación (5.15) se escribe como

$$y_t = y_0 + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u} du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial S_u} dS_u + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial S_u^2} \sigma^2(S_u, u) (dW_t)^2.$$

5.6 Ejemplos de diferencial estocástica

La mejor forma de familiarizarse con el cálculo de diferenciales estocásticas es mediante el desarrollo de ejemplos ilustrativos; siendo éste el espíritu de la presente sección.

5.6.1 Un primer ejemplo

El primer ejemplo que se desarrolla tiene como propósito mostrar que las reglas del cálculo diferencial de variables reales no se preservan en el cálculo estocástico, debido esencialmente a que $(dW_t)^2 = dt$. Considere el movimiento geométrico Browniano

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (5.16)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Si $y = \ln S_t$, entonces

$$\frac{\partial y}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0. \quad (5.17)$$

La aplicación del lema de Itô en su forma diferencial, (5.10), se tiene

$$d \ln S_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma dW_t. \quad (5.18)$$

Observe

$$\begin{aligned} d \ln S_t &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma dW_t \\ &= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Observe que si x es una variable real, $d \ln x = dx/x$. Sin embargo, si S_t sigue un movimiento geométrico Browniano, esta regla no se cumple, ya que se tiene un término adicional, a saber, $\frac{1}{2}\sigma^2 dt$, como lo muestra (5.19). La correspondiente integral estocástica de (5.18) está dada por

$$\begin{aligned} \ln S_t &= \ln S_0 + \mu \int_0^t du - \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t (dW_u)^2 + \sigma \int_0^t dW_s \\ &= \ln S_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) t + \sigma W_t. \end{aligned}$$

5.6.2 Finanzas, conejos y ecuaciones diferenciales estocásticas

Una de las formas más sencillas e intuitivas para presentar, por primera vez, una ecuación diferencial estocástica, para modelar el comportamiento del precio de un activo financiero, consiste en describir, primero, su componente determinista o de tendencia y , posteriormente, destacar la necesidad de agregar una componente estocástica o de difusión que modele los pequeños movimientos que se observan todos los días en precios para obtener modelos más apegados a la realidad.

El siguiente ejemplo, que aparentemente nada tiene que ver con finanzas, es un modelo simple de entender y útil para motivar la necesidad de agregar una componente de difusión para modelar pequeñas perturbaciones aleatorias. Además, es un modelo muy divertido. Considere pues una población, digamos parejas de conejos, que crece geométricamente en tiempo discreto a una tasa constante μ (es más fácil pensar en conejos que en precios de activos). Para ilustrar mejor el ejemplo, suponga que $\mu = 2$. No se considera una tasa de mortalidad o morbilidad. Suponga, por ejemplo, que al tiempo $t = 0$ la población consiste de una pareja de conejos. Este hecho lo denotamos como $N_0 = 1$. En el tiempo $t = 1$, la población consistirá de la pareja inicial, $N_0 = 1$, más las parejas descendientes, $N_0\mu = 2$, es decir, ahora hay un total de tres parejas, $N_1 = N_0 + N_0\mu = 1 + 2 = 3$. De la misma manera, en el tiempo $t = 2$ el tamaño de la población está dado por, las parejas de conejos en el tiempo $t = 1$, N_1 , más sus descendientes, $N_1\mu$. Así, el total de parejas en $t = 2$ satisface $N_2 = N_1 + N_1\mu = 3 + 6 = 9$. En general, la población al tiempo t está dada por:

$$N_t = N_{t-1} + N_{t-1}\mu = N_{t-1}(1 + \mu) = N_0(1 + \mu)^t. \quad (5.20)$$

En el tiempo $t = 10$, el tamaño de la población sería 59,049. En $t = 17$, la población alcanzaría un total de 129,140,163 parejas. La ecuación (5.20) representa el resultado de invertir un monto inicial N_0 durante t años a una tasa anualizada μ . Si se sustituye una tasa de crecimiento compuesta n veces en cada periodo en (5.20), se tiene que

$$N_t = N_{t-1} + N_{t-1}\mu = N_{t-1}(1 + \mu) = N_0 \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{nt}. \quad (5.21)$$

Si t se fija y $nt \rightarrow \infty$, entonces

$$N_t = N_0 \left(1 + \frac{\mu t}{nt}\right)^{nt} \rightarrow N_0 e^{\mu t}. \quad (5.22)$$

Esta expresión también puede ser obtenida si se utiliza la aproximación $e^\mu \approx 1 + \mu$, válida para μ pequeña, se tiene que

$$N_t \approx N_0 e^{\mu t}. \quad (5.23)$$

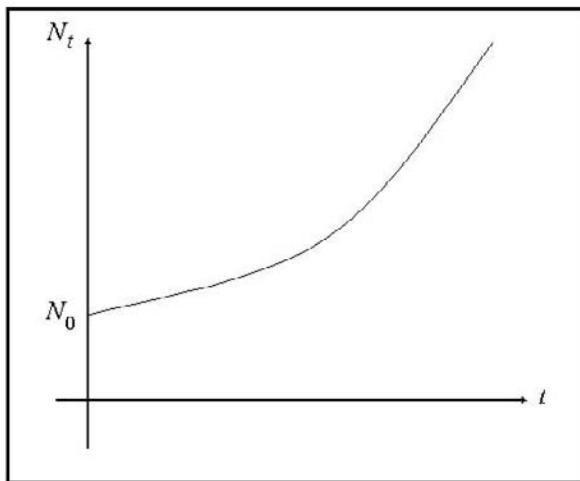
De esta manera, se tiene que la población que crecía geométricamente en tiempo discreto a una tasa constante, μ , ahora crece exponencialmente en tiempo continuo a una tasa constante, μ . La ecuación (5.23) es solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden, de las más simples que se pueden encontrar,

$$\frac{dN_t}{dt} = \mu N_t. \quad (5.24)$$

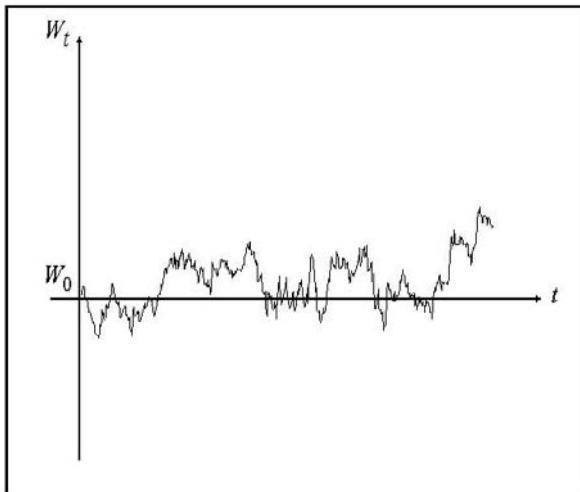
La ecuación anterior puede escribirse en forma equivalente como

$$\frac{dN_t}{N_t} \frac{1}{dt} = \mu, \quad (5.25)$$

es decir, la tasa de crecimiento de la población por unidad de tiempo permanece constante e igual a μ . ¿Realmente las poblaciones de conejos, o cualquier otra especie, crecen a tasa constante? En la Gráfica 5.1 se muestra la dinámica poblacional $N_t \approx N_0 e^{\mu t}$.



Gráfica 5.1 Dinámica poblacional N_t .



Gráfica 5.2 Realización de W_t .

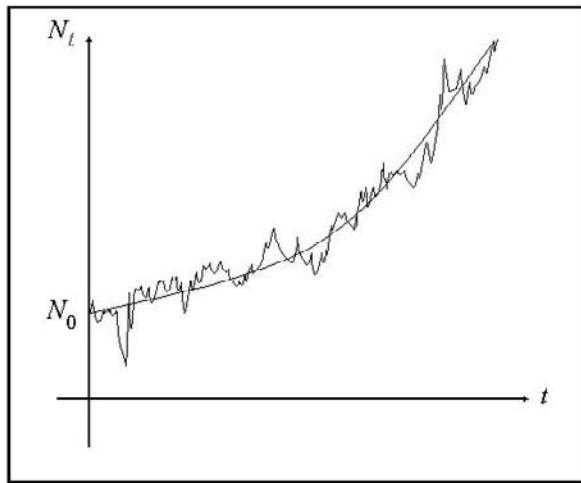
Consideré ahora un movimiento Browniano estandarizado, $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$. La Gráfica 5.2 muestra una realización de W_t . El siguiente paso para darle más realismo al comportamiento de la dinámica de población es agregar a la tendencia determinista de N_t una serie de perturbaciones aleatorias modeladas a través de W_t . Valores positivos de dW_t indican perturbaciones positivas, es decir, aumento en alimentos o disminución de depredadores, mientras que una perturbación negativa, $dW_t < 0$, indica lo contrario. Más precisamente, se define el proceso

$$\frac{dN_t}{N_t} = \mu dt + dW_t.$$

Ahora bien, algunas poblaciones tienen perturbaciones pequeñas y otras grandes. Si se agrega un parámetro $\sigma > 0$ premultiplicando a las posibles perturbaciones, dW_t , entonces valores pequeños de σ producirán perturbaciones pequeñas y valores grandes de σ producirán perturbaciones grandes. De esta manera, un modelado más realista de la dinámica de una población consiste en escribir la siguiente ecuación:

$$\frac{dN_t}{N_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (5.26)$$

La Gráfica 5.3 muestra el comportamiento de la población alrededor de la tendencia.



Gráfica 5.3 Dinámica poblacional, N_t , con perturbaciones producidas por W_t .

5.6.3 Un segundo ejemplo, el cuadrado de un movimiento geométrico Browniano

Como se mencionó antes, la mejor forma de familiarizarse con el cálculo estocástico es a través de la solución de varios ejercicios. Suponga de nuevo que

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Si se denota $y = S_t^2$, se sigue inmediatamente que

$$\frac{\partial y}{\partial S_t} = 2S_t, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial S_t^2} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0.$$

En consecuencia, el lema de Itô, aplicado a $y = S_t^2$, conduce a

$$\begin{aligned} dS_t^2 &= (2S_t^2 \mu + \sigma^2 S_t^2) dt + 2\sigma S_t^2 dW_t \\ &= 2S_t^2 (\mu dt + \sigma dW_t) + \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= 2S_t^2 \left(\frac{dS_t}{S_t} \right) + \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= 2S_t dS_t + \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= 2S_t dS_t + (dS_t)^2 \end{aligned} \quad (5.27)$$

o en términos de integrales

$$S_t^2 = S_0^2 + 2 \int_0^t S_u dS_u + \int_0^t (dS_u)^2.$$

Este mismo resultado se obtiene en la siguiente sección a través de un procedimiento alternativo.

5.7 Reconsideración del cuadrado de un movimiento geométrico Browniano

Con base en el ejemplo anterior se destacan las principales diferencias entre el cálculo integral y el cálculo integral estocástico. Con este propósito, considere, primero, la función de variable real $y_u = f(u) = u^2$, $u \in [0, t]$. Asimismo, defina una partición en el intervalo $[0, T]$, dada por

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t.$$

En este caso, se puede expresar y_t en términos de las sumas de los incrementos Δy_{t_i} como

$$y_t = y_0 + \sum_{i=1}^n \Delta y_{t_i}, \quad (5.28)$$

donde

$$\Delta y_{t_i} = y_{t_i} - y_{t_{i-1}}.$$

Observe también que Δy_{t_i} puede ser expresada como:

$$\Delta y_{t_i} = t_i^2 - t_{i-1}^2 = 2t_{i-1}\Delta t_i + (\Delta t_i)^2,$$

ya que la relación

$$b^2 - a^2 = 2a(b-a) + (b-a)^2$$

es válida para $a, b \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la ecuación (5.28) se puede escribir como:

$$y_t = y_0 + \sum_{i=1}^n 2t_{i-1}(\Delta t_i) + \sum_{i=1}^n (\Delta t_i)^2.$$

Si $t_i = it/n$ y $n \rightarrow \infty$, entonces en el límite la ecuación anterior se transforma en

$$y_t = y_0 + 2 \int_0^t u du + \int_0^t (du)^2.$$

Si se aplica la regla empírica $(du)^2 = 0$, se tiene que

$$y_t = y_0 + 2 \int_0^t u du + \int_0^t 0 du = y_0 + 2 \int_0^t u du. \quad (5.29)$$

El siguiente paso es aumentar la complejidad del problema planteado. Considere ahora una función del tiempo S_t y su cuadrado, es decir,

$$y_u = f(S_u) = S_u^2.$$

En forma similar, se puede escribir y_t en términos de las sumas de los incrementos Δy_{t_i} como:

$$y_t = y_0 + \sum_{i=1}^n \Delta y_{t_i}$$

donde

$$\Delta y_{t_i} = y_{t_i} - y_{t_{i-1}}.$$

Observe ahora que Δy_{t_i} puede ser expresada como:

$$\Delta y_{t_i} = S_{t_i}^2 - S_{t_{i-1}}^2 = 2S_{t_i}(\Delta S_{t_i}) + (\Delta S_{t_i})^2. \quad (5.30)$$

Por lo tanto,

$$y_t = y_0 + \sum_{i=1}^n 2S_{t_{i-1}}\Delta S_{t_i} + \sum_{i=1}^n (\Delta S_{t_i})^2.$$

Si $n \rightarrow \infty$, entonces

$$y_t = y_0 + 2 \int_0^t S_u dS_u + \int_0^t (dS_u)^2. \quad (5.31)$$

En particular, si se supone que $dS_u = \mu S_u du$, es decir,

$$\frac{dS_u}{du} = \mu S_u,$$

entonces

$$\begin{aligned} y_t &= y_0 + 2 \int_0^t S_u \mu S_u du + \int_0^t (\mu S_u du)^2 \\ &= y_0 + 2\mu \int_0^t S_u^2 du + \mu^2 \int_0^t S_u^2 (du)^2 \\ &= y_0 + 2\mu \int_0^t S_u^2 du. \end{aligned}$$

De igual manera, observe que $dS_u = \mu S_u du$ implica $S_u = S_0 e^{\mu u}$, así

$$2\mu \int_0^t S_u^2 du = 2\mu \int_0^t S_0^2 e^{2\mu u} du = S_0^2 (e^{2\mu t} - 1) = S_0^2 e^{2\mu t} - S_0^2 = S_t^2 - S_0^2$$

ó

$$S_t^2 = S_0^2 + 2\mu \int_0^t S_u^2 du,$$

Por último, si se considera un movimiento geométrico Browniano

$$dS_u = \mu S_u du + \sigma S_u dW_u,$$

entonces el término $(dS_u)^2$ no se anula. En consecuencia,

$$\begin{aligned} y_t &= y_0 + 2 \int_0^t S_u dS_u + \int_0^t (dS_u)^2 \\ &= y_0 + 2 \int_0^t S_u (\mu S_u du + \sigma S_u dW_u) + \int_0^t (\mu S_u du + \sigma S_u dW_u)^2 \\ &= y_0 + 2\mu \int_0^t S_u^2 du + 2\sigma \int_0^t S_u^2 dW_u \\ &\quad + \int_0^t [\mu^2 S_u^2 (du)^2 + 2\mu\sigma S_u^2 (du)(dW_u) + \sigma^2 S_u^2 (dW_u)^2] \\ &= y_0 + 2\mu \int_0^t S_u^2 du + 2\sigma \int_0^t S_u^2 dW_u + \sigma^2 \int_0^t S_u^2 du. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y_t - y_0 = \int_0^t (2\mu S_u^2 + \sigma^2 S_u^2) du + 2\sigma \int_0^t S_u^2 dW_u.$$

Observe que si $y_u = f(S_u) = S_u^2$, se sigue que

$$\frac{\partial f(S_u)}{\partial u} + \frac{\partial f(S_u)}{\partial S_u} \mu S_u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S_u)}{\partial S_u^2} \sigma^2 S_u^2 = 2\mu S_u^2 + \sigma^2 S_u^2$$

y

$$\frac{\partial f(S_u)}{\partial S_u} = 2S_u,$$

lo cual implica que

$$y_t - y_0 = \int_0^t \left(\frac{\partial f(S_u)}{\partial u} + \frac{\partial f(S_u)}{\partial S_u} \mu S_u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S_u)}{\partial S_u^2} \sigma^2 S_u^2 \right) du + \int_0^t \frac{\partial f(S_u)}{\partial S_u} \sigma S_u dW_u.$$

A diferencia del cálculo de variables reales, en el cálculo estocástico se tiene un término extra, la variación cuadrática de S_t .

5.8 Reconsideración del cubo de un movimiento geométrico Browniano

Considere ahora la función de variable real $y_u = f(u) = u^3$, $u \in [0, t]$, y defina una partición en el intervalo $[0, T]$, dada por

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t.$$

En este caso, se puede expresar y_t en términos de las sumas de los incrementos Δy_{t_i} como

$$y_t = y_0 + \sum_{i=1}^n \Delta y_{t_i}, \quad (5.32)$$

donde

$$\Delta y_{t_i} = y_{t_i} - y_{t_{i-1}}.$$

Observe también que Δy_{t_i} puede ser expresada como:

$$\Delta y_{t_i} = t_i^3 - t_{i-1}^3 = 3t_{i-1}^2 \Delta t_i + 3t_{i-1} (\Delta t_i)^2 + (\Delta t_i)^3,$$

ya que es suficiente hacer las identificaciones $b = t_i$ y $a = t_{i-1}$ y utilizar la relación

$$b^3 - a^3 = 3a^2(b-a) + 3a(b-a)^2 + (b-a)^3$$

válida para $a, b \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la ecuación (5.32) se puede escribir como:

$$y_t = y_0 + 3 \sum_{i=1}^n t_{i-1}^2 \Delta t_i + \sum_{i=1}^n 3t_{i-1} (\Delta t_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\Delta t_i)^3.$$

Si $t_i = it/n$ y $n \rightarrow \infty$, entonces en el límite la ecuación anterior se transforma en

$$y_t = y_0 + 3 \int_0^t u^2 du + 3 \int_0^t u (du)^2 + \int_0^t (du)^3.$$

Si se aplican las reglas empíricas $(du)^2 = (du)^3 = 0$, se tiene que

$$y_t = y_0 + 2 \int_0^t u du. \quad (5.33)$$

A continuación se aumenta la complejidad del problema planteado. Considere la función

$$y_u = f(S_u) = S_u^3.$$

En forma similar, se puede escribir y_t en términos de las sumas de los incrementos Δy_{t_i} como:

$$y_t = y_0 + \sum_{i=1}^n \Delta y_{t_i}$$

donde

$$\Delta y_{t_i} = y_{t_i} - y_{t_{i-1}}.$$

Observe ahora que Δy_{t_i} puede ser expresada como:

$$\Delta y_{t_i} = S_{t_i}^2 - S_{t_{i-1}}^2 = 3S_{t_i}^2 \Delta S_{t_i} + 3S_{t_i} (\Delta S_{t_i})^2 + (\Delta S_{t_i})^3. \quad (5.34)$$

De esta manera,

$$y_t = y_0 + 3 \sum_{i=1}^n S_{t_{i-1}}^2 \Delta S_{t_i} + 3 \sum_{i=1}^n S_{t_{i-1}} (\Delta S_{t_i})^2 + \sum_{i=1}^n (\Delta S_{t_i})^3.$$

Si $n \rightarrow \infty$, entonces

$$y_t = y_0 + 3 \int_0^t S_u^2 dS_u + 3 \int_0^t S_u (dS_u)^2 + \int_0^t (dS_u)^3. \quad (5.35)$$

En particular, si se supone que $dS_u = \mu S_u du$, es decir,

$$\frac{dS_u}{du} = \mu S_u,$$

entonces

$$\begin{aligned} y_t &= y_0 + 3\mu \int_0^t S_u^3 du + 3\mu^2 \int_0^t S_u^3 (du)^2 + \mu^3 \int_0^t S_u^5 (du)^3 \\ &= y_0 + 2\mu \int_0^t S_u^2 du. \end{aligned}$$

ó

$$S_t^3 = S_0^3 + 3\mu \int_0^t S_u^3 du.$$

Por último, si se considera un movimiento geométrico Browniano

$$dS_u = \mu S_u du + \sigma S_u dW_u,$$

entonces el término en $(dS_u)^2$ no se anula, mientras que el término en $(dS_u)^3$ sí lo hace. En consecuencia,

$$\begin{aligned} y_t &= y_0 + 3 \int_0^t S_u^2 dS_u + 3 \int_0^t S_u (dS_u)^2 + \int_0^t (dS_u)^3 \\ &= y_0 + 3 \int_0^t S_u^2 (\mu S_u du + \sigma S_u dW_u) + 3 \int_0^t S_u (\mu S_u du + \sigma S_u dW_u)^2 \\ &\quad + \int_0^t (\mu S_u du + \sigma S_u dW_u)^3 \\ &= y_0 + 3\mu \int_0^t S_u^3 du \\ &\quad + 3\sigma \int_0^t S_u^3 dW_u + 3 \int_0^t S_u [\mu^2 S_u^2 (du)^2 + 2\mu\sigma S_u^2 (du)(dW_u) + \sigma^2 S_u^2 (dW_u)^2] \\ &\quad + \int_0^t [\mu^3 S_u^3 (du)^3 + 3\mu^2 \sigma S_u^3 (du)^2 (dW_u) + 3\mu\sigma^2 S_u^3 (du)(dW_u)^2 + \sigma^3 S_u^3 (dW_u)^3] \\ &= y_0 + 3\mu \int_0^t S_u^3 du + 3\sigma \int_0^t S_u^3 dW_u + 3\sigma^2 \int_0^t S_u^3 du. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y_t - y_0 = 3 \int_0^t (\mu S_u^3 + \sigma^2 S_u^3) du + 3\sigma \int_0^t S_u^3 dW_u.$$

Observe que si $y_u = f(S_u) = S_u^3$, se sigue que

$$\frac{\partial f(S_u)}{\partial u} + \frac{\partial f(S_u)}{\partial S_u} \mu S_u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S_u)}{\partial S_u^2} \sigma^2 S_u^2 = 3\mu S_u^3 + 3\sigma^2 S_u^3$$

y

$$\frac{\partial f(S_u)}{\partial S_u} = 3S_u^2,$$

lo cual implica que

$$y_t - y_0 = \int_0^t \left(\frac{\partial f(S_u)}{\partial u} + \frac{\partial f(S_u)}{\partial S_u} \mu S_u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(S_u)}{\partial S_u^2} \sigma^2 S_u^2 \right) du + \int_0^t \frac{\partial f(S_u)}{\partial S_u} \sigma S_u dW_u.$$

5.9 Diferencial e integral estocásticas de potencias de un movimiento Browniano

Considere ahora $y = W_t^n$. Con el propósito de aplicar el lema de Itô a $y = W_t^n$, se utiliza (5.14) con $\mu(S_t, t) = 0$ y $\sigma(S_t, t) = 1$, ya que de esta manera se tiene que $S_t = W_t$. En este caso,

$$\frac{\partial W_t^n}{\partial W_t} = nW_t^{n-1}, \quad \frac{\partial^2 W_t^n}{\partial W_t^2} = n(n-1)W_t^{n-2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial W_t^n}{\partial t} = 0. \quad (5.36)$$

Por lo tanto,

$$dW_t^n = \frac{n(n-1)}{2} W_t^{n-2} dt + nW_t^{n-1} dW_t, \quad (5.37)$$

lo cual puede ser escrito como

$$\int_0^t dW_u^n = \frac{n(n-1)}{2} \int_0^t W_u^{n-2} du + n \int_0^t W_u^{n-1} dW_u$$

ó

$$\int_0^t W_u^{n-1} dW_u = \frac{1}{n} \left(\int_0^t dW_u^n - \binom{n}{2} \int_0^t W_u^{n-2} du \right). \quad (5.38)$$

En particular, si $n = 2$, se sigue que

$$dW_t^2 = dt + 2W_t dW_t$$

ó

$$W_t dW_t = \frac{1}{2} (dW_t^2 - dt).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^t W_s dW_s &= \frac{1}{2} \left(\int_0^t dW_u^2 - \int_0^t du \right) \\ &= \frac{1}{2} (W_t^2 - t), \end{aligned}$$

lo cual es consistente con (5.11). Asimismo, si $n = 3$, se tiene que

$$dW_t^3 = 3W_t dt + 3W_t^2 dW_t$$

ó

$$W_t^2 dW_t = \frac{1}{3} (dW_t^3 - 3W_t dt).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^t W_s^2 dW_s &= \frac{1}{3} \left(\int_0^t dW_u^3 - 3 \int_0^t W_u du \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(W_t^3 - 3 \int_0^t W_u du \right). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Una pregunta obligada, de acuerdo con la definición de integral estocástica en (5.9) y del resultado (5.10), es si es cierto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}}^2 (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - \frac{1}{3} \left(W_t^3 - 3 \int_0^t W_u du \right) \right] = 0. \quad (5.40)$$

La respuesta es que sí, lo cual es realmente asombroso. Un matemático reacio podría intentar demostrar directamente el límite (5.40) y, seguramente, encontraría un ejercicio tortuoso. No se diga, lo que pasaría si el susodicho matemático intenta demostrar directamente el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - \frac{1}{n} \left(\int_0^t dW_u^n - \binom{n}{2} \int_0^t W_u^{n-2} du \right) \right] = 0. \quad (5.41)$$

De esta manera, se hace evidente la utilidad del lema de Itô en su versión diferencial para encontrar candidatos de integrales estocásticas.

5.10 Diferencial del precio futuro de un activo financiero

Sea S_t el precio actual de una acción. Suponga, como antes, que

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

es decir el precio de la acción es log-normal o el rendimiento es normal. Sea r una tasa de interés constante y defina el precio futuro de la acción como

$$F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}. \quad (5.42)$$

Observe primero que

$$\frac{\partial F_{t,T}}{\partial t} = -r S_t e^{r(T-t)}, \quad \frac{\partial F_{t,T}}{\partial S_t} = e^{r(T-t)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 F_{t,T}}{\partial S_t^2} = 0.$$

En este caso, el lema de Itô produce

$$\begin{aligned} dF_{t,T} &= \left(-r S_t e^{r(T-t)} + \mu S_t e^{r(T-t)} \right) dt + \sigma e^{r(T-t)} S_t dW_t \\ &= (-r F_{t,T} + \mu F_{t,T}) dt + \sigma F_{t,T} dW_t \\ &= (\mu - r) F_{t,T} dt + \sigma F_{t,T} dW_t. \end{aligned}$$

La expresión anterior se puede reescribir como

$$dF_{t,T} = \frac{\lambda}{\sigma} F_{t,T} dt + \sigma F_{t,T} dW_t, \quad (5.43)$$

donde

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

es el premio al riesgo de mercado por unidad de volatilidad. De esta forma, el precio futuro sigue también un movimiento geométrico Browniano con la misma volatilidad del activo subyacente, pero con parámetro de tendencia menor.

5.11 Lema de Itô para dos variables conducidas por ecuaciones diferenciales estocásticas

Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas dadas por

$$\begin{cases} dS_{1t} = \mu_1(S_{1t}, t)dt + \sigma_1(S_{1t}, t)dW_{1t}, \\ dS_{2t} = \mu_2(S_{2t}, t)dt + \sigma_2(S_{2t}, t)dW_{2t}, \end{cases} \quad (5.44)$$

con

$$\text{Cov}(dW_{1t}, dW_{2t}) = \rho dt. \quad (5.45)$$

Defina una función $y = f(S_{1t}, S_{2t}, t)$. La expansión en serie de Taylor de esta función hasta términos de segundo orden está dada por

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial S_{1t}}dS_{1t} + \frac{\partial f}{\partial S_{2t}}dS_{2t} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t}^2}(dS_{1t})^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S_{2t}^2}(dS_{2t})^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t}\partial t}dS_{1t}dt + \frac{\partial^2 f}{\partial S_{2t}\partial t}dS_{2t}dt + \frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t}\partial S_{2t}}dS_{1t}dS_{2t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.46)$$

La sustitución del sistema (5.44) y las reglas básicas de diferenciación estocásticas conducen a

$$\begin{aligned} dy &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_{1t}}\mu_1(S_{1t}, t) + \frac{\partial f}{\partial S_{2t}}\mu_2(S_{2t}, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\sigma_1^2(S_{1t}, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_{2t}^2}\sigma_2^2(S_{2t}, t) \right. \\ &\quad \left. + \rho\sigma_1(S_{1t}, t)\sigma_2(S_{2t}, t) \frac{\partial^2 f}{\partial S_{1t}\partial S_{2t}} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_{1t}}\sigma_1(S_{1t}, t)dW_{1t} + \frac{\partial f}{\partial S_{2t}}\sigma_2(S_{2t}, t)dW_{2t}. \end{aligned}$$

A continuación se calcula la diferencial estocástica para varias formas funcionales de f .

5.11.1 Regla de la diferencial estocástica de un cociente

En esta sección se demuestra la siguiente regla del cociente de dos movimientos geométricos Brownianos. Suponga que

$$\begin{cases} dS_{1t} = \mu_1 S_{1t} dt + \sigma_1 S_{1t} dW_{1t}, \\ dS_{2t} = \mu_2 S_{2t} dt + \sigma_2 S_{2t} dW_{2t}, \end{cases} \quad (5.47)$$

con

$$\text{Cov}(dW_{1t}, dW_{2t}) = \rho dt \quad (5.48)$$

y

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Sea $y = F(S_{1t}, S_{2t}) = S_1/S_2$. En este caso, se tiene que

$$\frac{\partial y}{\partial S_{1t}} = \frac{1}{S_{2t}}, \quad \frac{\partial y}{\partial S_{2t}} = -\frac{S_{1t}}{S_{2t}^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial S_{1t}^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial S_{2t}^2} = \frac{2S_{1t}}{S_{2t}^3} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial S_{1t}\partial S_{2t}} = -\frac{1}{S_{2t}^2}.$$

La aplicación del lema de Itô produce

$$\frac{d(S_{1t}/S_{2t})}{(S_{1t}/S_{2t})} = (\mu_1 - \mu_2 + \sigma_2^2 - \sigma_{12})dt + \sigma_1 dW_{1t} - \sigma_2 dW_{2t}$$

ó

$$d\left(\frac{S_{1t}}{S_{2t}}\right) = \frac{S_{2t}dS_{1t} - S_{1t}dS_{2t}}{S_{2t}^2} + (\sigma_2^2 - \sigma_{12})\left(\frac{S_{1t}}{S_{2t}}\right)dt.$$

Observe que la regla de diferenciación estocástica para un cociente difiere de la regla de la diferencial de un cociente en el término $(\sigma_2^2 - \sigma_{12})(S_{1t}/S_{2t})dt$.

5.11.2 Regla de la diferencial estocástica de un producto

Suponga que $y = (S_{1t}S_{2t})$. En este caso,

$$\frac{\partial y}{\partial S_{1t}} = S_{2t}, \quad \frac{\partial y}{\partial S_{2t}} = S_{1t}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial S_{1t}^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial S_{2t}^2} = 0, \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial S_{1t} \partial S_{2t}} = 1.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \frac{d(S_{1t}S_{2t})}{S_{1t}S_{2t}} &= \mu_1 dt + \sigma_1 dW_{1t} + \mu_2 dt + \sigma_2 dW_{2t} + \sigma_{12} dt \\ \text{o} \\ d(S_{1t}S_{2t}) &= S_{2t}dS_{1t} + S_{1t}dS_{2t} + (dS_{1t})(dS_{2t}), \end{aligned} \tag{5.49}$$

donde $\text{Cov}(dS_{1t}, dS_{1t}) = (S_{1t}S_{2t}\sigma_{12}/\sigma_1\sigma_2)dt$. Observe que la regla de diferenciación estocástica para un producto difiere de la regla de la diferencial de un producto en el término $(dS_{1t})(dS_{2t})$. La ecuación (5.49) proporciona también la fórmula de integración por partes

$$S_{1t}S_{2t} = S_{10}S_{20} + \int_0^t S_{2u}dS_{1u} + \int_0^t S_{1u}dS_{2u} + \int_0^t (dS_{1u})(dS_{2u}).$$

5.12 Lema de Itô para una ecuación diferencial estocástica con dos Brownianos

Considere una ecuación diferencial estocástica con dos factores de riesgo, uno de corto plazo W_{1t} y otro de largo plazo, W_{2t} ,

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma_1(S_t, t)dW_{1t} + \sigma_2(S_t, t)dW_{2t}, \tag{5.50}$$

donde

$$\text{Cov}(dW_{1t}, dW_{2t}) = \rho dt.$$

El lema de Itô, con dos factores de riesgo, toma ahora la siguiente forma:

$$\begin{aligned} dy &= \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t} \mu(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (\sigma_1^2(S_t, t) + \sigma_2^2(S_t, t)) + 2\sigma_1(S_t, t)\sigma_2(S_t, t)\rho \right] dt \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma_1(S_t, t)dW_{1t} + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma_2(S_t, t)dW_{2t}. \end{aligned} \tag{5.51}$$

5.13 Inmunización de portafolios y administración del riesgo de mercado

Considere dos activos financieros cuyos precios, S_{1t} y S_{2t} , están perfectamente correlacionados de tal forma que

$$\begin{aligned} dS_{1t} &= \mu_1 S_{1t} dt + \sigma_1 S_{1t} dW_t, \\ dS_{2t} &= \mu_2 S_{2t} dt + \sigma_2 S_{2t} dW_t. \end{aligned} \tag{5.52}$$

Considere ahora un portafolio con w_1 unidades del activo de precio S_{1t} y w_2 unidades del activo de precio S_{2t} . En este caso, el valor del portafolio satisface

$$\Pi_t = w_1 S_{1t} + w_2 S_{2t}. \tag{5.53}$$

El cambio en valor del portafolio está dado por

$$d\Pi_t = w_1 dS_{1t} + w_2 dS_{2t}. \tag{5.54}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (5.52) en (5.54), se tiene que

$$d\Pi_t = (w_1\mu_1 S_{1t} + w_2\mu_2 S_{2t}) dt + (w_1\sigma_1 S_{1t} + w_2\sigma_2 S_{2t}) dW_t.$$

El portafolio estará inmunizado del riesgo de mercado si se eligen w_1 y w_2 de tal manera que se anule el coeficiente del factor de riesgo dW_t . Considere, por ejemplo,

$$w_1 = 1 \quad \text{y} \quad w_2 = -\frac{\sigma_1 S_{1t}}{\sigma_2 S_{2t}}.$$

El signo menos en la expresión anterior representa una posición corta en el activo de precio S_{2t} . Bajo esta selección de w_1 y w_2 , se sigue que

$$d\Pi_t = S_{1t} \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \mu_2 \right) dt \quad (5.55)$$

y

$$\Pi_t = S_{1t} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right). \quad (5.56)$$

Suponga ahora que existe un mercado de crédito en donde los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa constante y libre de riesgo crédito r . Si se deposita el monto (5.56), el interés que se genera está dado por

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt = rS_{1t} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) dt. \quad (5.57)$$

Si se supone que los mercados están en equilibrio, entonces no existen oportunidades de arbitraje, es decir, dos inversiones alternativas del mismo monto deben producir exactamente el mismo rendimiento. En consecuencia, (5.55) y (5.57) tienen que ser iguales, así

$$\mu_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \mu_2 = r - r \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

ó

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2},$$

es decir, en equilibrio, los dos activos tienen la misma prima de riesgo.

5.14 Bibliografía sugerida

- Karatzas, I. and S. E. Shreve (1997). Brownian Motion and Stochastic Calculus, Second Edition. Graduate Text in Mathematics Series. Springer-Verlag, Berlin.
- Musiela, M. and M. Rutkowsky (1997). Martingale Methods in Financial Modelling. Applications of Mathematics. Stochastic Modelling and Applied Probability Series. Springer-Verlag, Berlin.
- Øksendal, B. (1991). Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications. Fifth Edition. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

5.15 Ejercicios

- 5.1** Sea W_t un movimiento Browniano estándar. Muestre mediante inducción matemática que

$$dW_t^n = \frac{n(n-1)}{2} W_t^{n-2} dt + nW_t^{n-1} dW_t$$

es válida para toda $n \in \mathbb{N}$.

5.2 Pruebe que si $(W_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\sum_{i=1}^n (\Delta W_{t_i})^2 - t \right]^2 = 0.$$

5.3 Demuestre que si $(W_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - \frac{1}{2} (W_t^2 - t) \right] = 0.$$

5.4 Sean W_{1t} y W_{2t} dos movimientos Brownianos con

$$\text{Cov}(dW_{1t}, dW_{2t}) = \rho dt$$

y

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

Considere el siguiente sistema:

$$\begin{cases} dS_{1t} = \mu_1 S_{1t} dt + \sigma_1 S_{1t} dW_{1t} \\ dS_{2t} = \mu_2 S_{2t} dt + \sigma_2 S_{2t} dW_{1t}. \end{cases}$$

Demuestre que

$$d\left(\frac{S_{1t}}{S_{2t}}\right) = S_{1t} d\left(\frac{1}{S_{2t}}\right) + \frac{1}{S_{2t}} dS_{1t} + (dS_{1t})\left(\frac{1}{dS_{2t}}\right).$$

5.5 Suponga que

$$dS_t = \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{S_t} \right) dt + \sigma\sqrt{S_t} dW_t$$

y considere el cambio de variable $X_t = 2\sqrt{S_t}$. Sea W_t un movimiento Browniano. Demuestre que

$$dX_t = -adt + \sigma dW_t.$$

Solución: Calcule primero las derivadas parciales de primer y segundo orden de X_t con respecto a S_t . Esto es,

$$\frac{\partial X_t}{\partial S_t} = \frac{2}{X_t}, \quad \frac{\partial^2 X_t}{\partial r_t^2} = -\frac{1}{S_t X_t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial X_t}{\partial t} = 0.$$

El lema de Itô conduce a

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(\frac{\partial X_t}{\partial t} + \frac{\partial X_t}{\partial S_t} \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{S_t} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t \frac{\partial^2 X_t}{\partial r_t^2} \right) dt + \sigma\sqrt{S_t} \frac{\partial X_t}{\partial S_t} dW_t \\ &= \left(\frac{2}{X_t} \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{S_t} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t \left(\frac{-1}{S_t X_t} \right) \right) dt + \sigma \frac{X_t}{2} \frac{2}{X_t} dW_t \\ &= \left(\frac{1}{2X_t} \sigma^2 - \frac{2a\sqrt{S_t}}{X_t} - \frac{1}{2X_t} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \\ &= -adt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

5.6 Sea W_t un movimiento Browniano. Suponga que

$$dX_t = (m - kX_t)dt + sdW_t,$$

donde m , k y s son constantes positivas. Defina $S_t = \gamma X_t^2$, con $\gamma > 0$. Si se denotan $\sigma = 2s\sqrt{\gamma} > 0$ y $a = -k\sqrt{\gamma} > 0$ demuestre que

$$dS_t = \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{S_t} \right) dt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t.$$

Solución: Es suficiente observar que el lema de Itô conduce a

$$dS_t = \left(\gamma s^2 - 2k\sqrt{\gamma}\sqrt{S_t} \right) dt + 2s\sqrt{\gamma}\sqrt{S_t}dW_t.$$

5.7 Sea W_t un movimiento Browniano. Sea

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

y defina $G(S_t) = \exp\{S_t\}$. Pruebe que

$$dG = G \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + G\sigma dW_t.$$

Solución: La aplicación del lema de Itô a $G = G(S_t)$ conduce a

$$\begin{aligned} dG &= \left(\frac{\partial G}{\partial S_t} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S_t} \sigma dW_t \\ &= (G\mu + \frac{1}{2}G\sigma^2) dt + G\sigma dW_t \\ &= G \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + G\sigma dW_t. \end{aligned}$$

5.8 Sea $(W_t)_{t \in [t, T]}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [t, T]}, \mathbb{P})$

$$dS(t, T) = \alpha(t, T)dt + \beta(t, T)dW_t$$

y defina

$$I_t = - \int_t^T S(t, u)du.$$

Demuestre que

$$dI_t = - \left(\int_t^T \alpha(t, u)du \right) dt - \left(\int_t^T \beta(t, T)du \right) dW_t + S(t, t)dt.$$

Solución: La regla de Leibnitz produce

$$\begin{aligned} dI_t &= -d \left(\int_t^T S(t, u)du \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_t^T S(t, u)du \right) dt \\ &= - \int_t^T \left(\frac{\partial S(t, u)}{\partial t} dt \right) du + S(t, t)dt \\ &= - \int_t^T dS(t, u)du + S(t, t)dt. \end{aligned}$$

La sustitución del proceso que conduce a $S(t, u)$ en la ecuación anterior produce el resultado pedido.

5.9 Sea W_t un movimiento Browniano. Defina

$$\varphi(W_t) = e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}.$$

Muestre que

$$d\varphi_t = -\lambda\varphi_t dW_t.$$

Solución: Observe primero que

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = \frac{1}{2}\lambda^2\varphi, \quad \frac{\partial \varphi_t}{\partial W_t} = -\lambda\varphi, \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial W_t^2} = \lambda^2\varphi.$$

Por lo tanto, el lema de Itô produce

$$d\varphi_t = \frac{1}{2}\lambda^2 dt - \lambda\varphi_t dW_t + \frac{1}{2}\lambda^2\varphi_t = -\lambda\varphi_t dW_t.$$

5.10 Justifique el siguiente resultado. Consideré un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$. Suponga que K_t y H_t son procesos adaptados a \mathcal{F}_t tales que

$$\int_0^T |K_s| ds < \infty$$

y

$$\int_0^T |H_s|^2 ds < \infty$$

casi dondequiera con respecto de \mathbb{P} . Si $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ es un proceso de Itô, es decir, si

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

y f es una función con segunda derivada continua, entonces

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X_t, X_t \rangle_s$$

donde, por definición,

$$\langle X_t, X_t \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds,$$

y

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s.$$

5.11 Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio fijo de probabilidad con una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Suponga que $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ son dos funciones para las cuales existe una constante $K < \infty$ tal que para toda $t \geq 0$ se cumple

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

y

$$|b(t, x) + \sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|).$$

Asimismo, suponga que para cualquier $t \geq 0$ se satisface que

$$\int_0^t |b(s, X_s)| ds < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 ds < \infty.$$

En este caso,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s,$$

es decir,

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t,$$

tiene una solución única (casi dondequiera con respecto de \mathbb{P}).

CAPÍTULO 6

MARTINGALAS Y MOVIMIENTO BROWNIANO

Conceptos básicos de este capítulo:

- Martingalas
- Movimiento Browniano
- Teorema de Lévy sobre la caracterización del movimiento Browniano
- Teorema de representación de martingalas
- Desigualdad de Doob sobre martingalas y movimiento Browniano
- Desigualdad de Jensen para martingalas y movimiento Browniano

6.1 Introducción

El concepto de martingala desempeña un papel esencial en el modelado de los mercados financieros y en la valuación teórica de muchos instrumentos financieros. En este capítulo se estudia la relación entre martingalas y el movimiento Browniano. Asimismo, se llevan a cabo varias aplicaciones de la teoría de martingalas al movimiento Browniano.

6.2 Martingalas

Considere un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ equipado con una filtración $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Se dice que un proceso estocástico $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es una martingala, o una \mathbb{P} -martingala, con respecto de \mathbb{F} si:

- (i) $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso adaptado a la filtración \mathbb{F} , es decir, para cada $t \geq 0$, la función $M_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisface $M_t^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$ para toda $x \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[|M_t|] < \infty$ para toda $t \geq 0$;
- (iii) Si $s < t$, entonces $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$.

De acuerdo con la condición (iii), dada la información disponible hasta el tiempo s , representada por \mathcal{F}_s , si $t > s$, entonces el mejor pronóstico de M_t es justamente el valor más reciente, M_s . Esta condición puede ser sustituida por $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ casi seguramente con respecto de \mathbb{P} , lo cual es más general. Sin embargo, en éste como en el resto de los capítulos se mantiene la versión inicial. Si no se cumple la condición (ii) se dice que $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es una martingala local.

Por otro lado, observe que las variaciones futuras de una martingala son completamente impredecibles dada la información \mathcal{F}_s , ya que $\mathbb{E}[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] = 0$. En otras palabras, M_t es adaptado a \mathcal{F}_t . Por último, es importante notar que si $s < t$, entonces

$$\mathbb{E}\{\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] | \mathcal{F}_0\} = \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_0] = M_0.$$

Es decir,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t] = M_0 \quad \text{para toda } t. \tag{6.1}$$

6.3 Martingalas y movimiento Browniano

El movimiento Browniano junto con su filtración aumentada es una martingala. En efecto, si $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[W_t - W_s + W_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(W_t - W_s) + W_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] + W_s \\ &= 0 + W_s, \end{aligned}$$

ya que $W_t - W_s$ es independiente de \mathcal{F}_s y $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. Claramente,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[|W_t|] &= \int_{-\infty}^{\infty} |w| d\mathbb{P}(w) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} |w| e^{-(1/2t)w^2} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{\infty} 2we^{-(1/2t)w^2} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-(1/2t)y} dy \\ &= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty \end{aligned}$$

para toda $t \geq 0$. En la última integral se utilizó el cambio de variable $y = w^2$. También, observe que para toda t se cumple

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[W_t] = W_0 = 0$$

casi dondequiera con respecto de \mathbb{P} .

Finalmente, observe que si se fija W_τ , entonces

$$M_t = \mathbb{E}[W_\tau | \mathcal{F}_t],$$

es una martingala, ya que si $s < t$, una aplicación simple de la propiedad “torre” de la esperanza condicional conduce a:

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[W_\tau | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_\tau | \mathcal{F}_s] = M_s.$$

6.4 Un segundo ejemplo de martingala

La función característica condicional a la información disponible hasta el tiempo s de $W_t - W_s$, con $s < t$, está dada por

$$\mathbb{E}[e^{\sigma(W_t - W_s)} | \mathcal{F}_s] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)}, \quad \sigma > 0,$$

ya que $W_t - W_s$ y $W_s - W_0 = W_s$ son variables aleatorias independientes, es decir, $W_t - W_s$ es independiente de \mathcal{F}_s , y $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. Asimismo, dada la información hasta el tiempo s , $e^{-\sigma W_s}$ se torna conocida, en cuyo caso,

$$e^{-\sigma W_s} \mathbb{E}[e^{\sigma W_t} | \mathcal{F}_s] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} | \mathcal{F}_s] = e^{\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s}.$$

Alternativamente,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[e^{\sigma W_t - \sigma W_s + \sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{\sigma(W_t - W_s) + \sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= e^{\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \mathbb{E} \left[e^{\sigma(W_t - W_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= e^{\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \mathbb{E} \left[e^{\sigma W_{t-s}} \middle| \mathcal{F}_s \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $\sigma W_{t-s} = \sigma \sqrt{t-s} \mathcal{E}$ con $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{\sigma W_{t-s}} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma \epsilon \sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2 - 2\sigma \epsilon \sqrt{t-s})} d\epsilon \\ &= e^{\frac{1}{2}(t-s)\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2 - 2\sigma \epsilon \sqrt{t-s} + (t-s)\sigma^2)} d\epsilon \\ &= e^{\frac{1}{2}(t-s)\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon - \sigma \sqrt{t-s})^2} d\epsilon \\ &= e^{\frac{1}{2}(t-s)\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= e^{\frac{1}{2}(t-s)\sigma^2}, \end{aligned}$$

donde

$$z = \epsilon - \sigma \sqrt{t-s}.$$

En consecuencia, para toda $s < t$,

$$\mathbb{E} \left[e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \right] = e^{\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \times e^{\frac{1}{2}(t-s)\sigma^2} = e^{\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s}.$$

Si se define $M_s = e^{\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s}$, se sigue que

$$\mathbb{E} \left[M_t \middle| \mathcal{F}_s \right] = M_s. \quad (6.2)$$

Justamente, la ecuación (6.2) indica que $\{M_s\}_{s \geq 0}$ es una martingala.

6.5 Un tercer ejemplo de martingala

Observe ahora que si $\{W_s\}_{s \geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar, entonces $W_s^2 - s$ es una martingala. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[W_t^2 - W_s^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[W_t^2 - 2W_t W_s + W_s^2 - W_s^2 - W_s^2 + 2W_t W_s \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(W_t - W_s)^2 + 2W_t W_s - 2W_s^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(W_t - W_s)^2 + 2W_s (W_t - W_s) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(W_t - W_s)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] + 2W_s \mathbb{E} \left[(W_t - W_s) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E} \left[W_{t-s}^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] + 2W_s \mathbb{E} \left[W_{t-s} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= t - s. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathbb{E} \left[W_t^2 - W_s^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] = t - s.$$

Por lo tanto, para $s \leq t$,

$$\mathbb{E} [W_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s] = W_s^2 - s.$$

6.6 Teorema de Lévy sobre la caracterización del movimiento Browniano

Considere un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ equipado con una filtración $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Suponga que $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es una \mathbb{P} -martingala con respecto de la filtración \mathbb{F} . Si $M_0 = 0$, M_t es continua en $t \in [0, \infty)$ y $M_t^2 - t$ es una martingala, es decir, si $s < t$ implica

$$\mathbb{E} [M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s] = t - s,$$

entonces $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dado que $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es una martingala, la condición anterior se puede sustituir por

$$\mathbb{E} [(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = t - s.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} [M_t^2 + M_s^2 - 2M_t M_s \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E} [M_t^2 - M_s^2 + 2M_s^2 - 2M_t M_s \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E} [M_t^2 - M_s^2 - 2M_s(M_t - M_s) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E} [M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s] - 2M_s \mathbb{E} [M_t - M_s \mid \mathcal{F}_s] \\ &= t - s + 0. \end{aligned}$$

Esta caracterización del movimiento Browniano destaca que la continuidad de las trayectorias no puede omitirse. Recíprocamente, si $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}, \mathbb{P})$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [W_t^2 - W_s^2 \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} [(W_t - W_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] - 2W_s \mathbb{E} [W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s] \\ &= t - s + 0, \end{aligned} \tag{6.3}$$

ya que $W_t - W_s$ es independiente de \mathcal{F}_s y $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. Por último, una simple aplicación del lema de Itô conduce a

$$dW_t^2 = dt + 2W_t dW_t.$$

Equivalentemente,

$$W_t^2 - t = 2 \int_0^t W_s dW_s,$$

lo cual implica $\int_0^t W_s dW_s$ es una \mathbb{P} -martingala con respecto de \mathbb{F} .

6.7 Teorema de representación de martingalas

Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}, \mathbb{P})$ y defina

$$M_t = c + \sigma \int_0^t dW_u.$$

Se puede ver que $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es una martingala si se demuestra que $\int_0^t dW_u$ es una martingala. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t dW_u \mid \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^s dW_u + \int_s^t dW_u \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= \int_0^s dW_u + \mathbb{E} [W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \int_0^s dW_u + 0. \end{aligned}$$

A continuación se establece el resultado recíproco. Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ su filtración aumentada. Si $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es una \mathbb{P} -martingala con respecto de \mathbb{F} , entonces existe un proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$ adaptado a \mathbb{F} , tal que

$$M_t = M_0 + \int_0^t X_u dW_u$$

ó

$$dM_t = X_u dW_u.$$

Es decir, si $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es adaptado a la filtración aumentada \mathbb{F} del movimiento Browniano, entonces el movimiento Browniano $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es la única fuente de incertidumbre del proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$. En este caso, las trayectorias del proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$ son continuas.

Por último, suponga que $dM_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$, es decir,

$$M_t = c + \int_0^t \mu_u du + \int_0^t \sigma_u dW_u.$$

Si σ_t es adaptada (no anticipada) a la información \mathcal{F}_t y $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es una martingala, entonces $\mu_t \equiv 0$. En efecto, sea $0 < s < t$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t \mu_u du + \int_0^t \sigma_u dW_u \mid \mathcal{F}_s \right] &= \int_0^t \mu_u du + \int_0^s \sigma_u dW_u + \mathbb{E} \left[\int_s^t \sigma_u dW_u \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= \int_0^t \mu_u du + \int_0^s \sigma_u dW_u + 0 \\ &= \left(\int_0^s \mu_u du + \int_0^s \sigma_u dW_u \right) + \int_s^t \mu_u du, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\int_s^t \mu_u du = 0$$

para toda $s < t$. Por lo tanto $\mu_t \equiv 0$.

6.8 Desigualdad de Doob para martingalas y movimiento Browniano

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Si $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es una \mathbb{P} -martingala con respecto de \mathbb{F} con trayectorias continuas, entonces

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\max_{0 \leq s \leq t} |M_s| \right] \leq 4 \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [M_t^2].$$

En particular, si $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y \mathbb{F} es su filtración aumentada, entonces

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\max_{0 \leq s \leq t} |M_s| \right] \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} w^2 d\mathbb{P}(w) = \frac{4}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 e^{-(1/2t)w^2} dw = 4t.$$

En otras palabras, en promedio las trayectorias del movimiento Browniano en el intervalo $[0, t]$ no exceden $4t$. Por supuesto, las trayectorias pueden exceder la cota superior establecida, pero en promedio no lo harán.

6.9 Desigualdad de Jensen para martingalas y movimiento Browniano

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad con una filtración. Si $\{M_t\}_{t \geq 0}$ es una \mathbb{P} -martingala con respecto de $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mathbb{E} [|M_t|^n | \mathcal{F}_s] \geq |M_s|^n.$$

En efecto, si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces

$$\mathbb{E}[g(W_t)] \geq g(\mathbb{E}[W_t]).$$

Si se elige $g(x) = x^n$, se tiene que

$$\mathbb{E} [|M_t|^n | \mathcal{F}_s] \geq |\mathbb{E}[M_t]|^n \geq |M_s|^n.$$

En particular, si $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada, $\{\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}, \mathbb{P}\}$, entonces

$$\mathbb{E}[W_t^n | \mathcal{F}_s] \geq W_s^n$$

ó

$$\mathbb{E}[W_t^n - W_s^n | \mathcal{F}_s] \geq 0.$$

En particular, en virtud de (6.2) y (6.3), se cumple que

$$\mathbb{E}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] = 0$$

y

$$\mathbb{E}[W_t^2 - W_s^2 - (t-s) | \mathcal{F}_s] = 0$$

ó

$$\mathbb{E}[W_t^2 - W_s^2 | \mathcal{F}_s] = t-s \geq 0.$$

6.10 Bibliografía sugerida

Karatzas, I. and S. E. Shreve (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer, Berlin.

Revuz, D. and M. Yor (1991). Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer, Berlin.

6.11 Ejercicios

6.1 Sea $a \in \mathbb{R}$ arbitrario y sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}, \mathbb{P})$. Demuestre que los procesos $e^{aW_t - \frac{1}{2}a^2t}$ y $e^{-aW_t - \frac{1}{2}a^2t}$ son martingalas.

6.2 Suponga que

$$\mathbb{P}\{X_n = 1+a\} = p$$

y

$$\mathbb{P}\{X_n = 1+b\} = 1-p.$$

Sea

$$V_n = X_0 X_1 X_2 \cdots X_n (1+r)^{-n},$$

donde X_0 es una constante positiva. Encuentre condiciones sobre a , b y r para que V_n sea martingala.

Solución: Observe que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V_n|V_{n-1}] &= \mathbb{E}[V_{n-1}X_n(1+r)^{-1}|V_{n-1}] \\ &= V_{n-1}(1+a)(1+r)^{-1}p + V_{n-1}(1+b)(1+r)^{-1}(1-p) \\ &= V_{n-1}[(1+a)p + (1+b)(1-p)](1+r)^{-1} \\ &= V_{n-1}[p(a-b) + b+1](1+r)^{-1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, V_n será martingala si

$$p(a-b) + b+1 = 1+r$$

ó

$$p = \frac{b-r}{b-a}.$$

Para que $0 < p < 1$, se requiere que $a < r < b$.

6.3 Suponga que la sucesión $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \alpha X_{n-1} + \beta X_{n-2}, \quad \alpha + \beta = 1,$$

donde \mathcal{F}_{n-1} es la información relevante disponible en $n-1$. Determine el valor de A tal que $Y_n = AX_n + X_{n-1}$ sea una martingala.

Solución: Observe que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[AX_n + X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= A\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= A(\alpha X_{n-1} + \beta X_{n-2}) + X_{n-1} \\ &= (A\alpha + 1)X_{n-1} + A\beta X_{n-2}.\end{aligned}$$

Ahora bien, si se desea que

$$\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] = Y_{n-1} = AX_{n-1} + X_{n-2},$$

se debe tener que

$$A\alpha + 1 = A \quad \text{y} \quad A\beta = A(1 - \alpha) = 1,$$

es decir,

$$A = \frac{1}{1-\alpha}.$$

6.4 Sea

$$X_n = \begin{cases} \alpha + \beta X_{n-1}, & \text{con probabilidad } X_{n-1} \\ \beta X_{n-1}, & \text{con probabilidad } 1 - X_{n-1} \end{cases}$$

Demuestre que si $\alpha + \beta = 1$, entonces X_n es una martingala.

Solución: En este caso, se cumple que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= (\alpha + \beta X_{n-1})X_{n-1} + \beta X_{n-1}(1 - X_{n-1}) \\ &= \alpha X_{n-1} + \beta X_{n-1}^2 + \beta X_{n-1} - \beta X_{n-1}^2 \\ &= \alpha X_{n-1} + \beta X_{n-1} \\ &= (\alpha + \beta)X_{n-1} \\ &= X_{n-1}.\end{aligned}$$

6.5 Sea N_t un proceso de Poisson con parámetro de intensidad λ , el cual satisface las siguientes condiciones:

- (i) $N_0 = 0$.
- (ii) Si $s < t$, entonces $N_s \leq N_t$.
- (iii)

$$\mathbb{P}\{N_{t+dt} = 1 + n \mid N_t = n\} = \lambda dt + o(dt), \quad n \in \mathbb{IN},$$

$$\mathbb{P}\{N_{t+dt} = n \mid N_t = n\} = 1 - \lambda dt + o(dt), \quad n \in \mathbb{IN},$$

$$\mathbb{P}\{N_{t+dt} = m + n \mid N_t = n\} = o(dt), \quad n, m \in \mathbb{IN}, \quad m > 1,$$

donde $o(dt)/dt \rightarrow 0$ cuando $dt \rightarrow 0$.

(iv) Si $0 < s < t$, entonces los incrementos $N_t - N_s$ y $N_s - N_0$ son estocásticamente independientes. Demuestre que N_t es una submartingala, es decir, $E[N_t | \mathcal{F}_s] > N_s$. Redefina N_t para que se obtenga una martingala.

Solución: Si $t > s$ y N_t tiene incrementos independientes, se sigue que

$$\begin{aligned} E[N_t | \mathcal{F}_s] &= E[N_t - N_s + N_s | \mathcal{F}_s] \\ &= E[N_t - N_s | \mathcal{F}_s] + E[N_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \lambda(t-s) + E[N_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \lambda(t-s) + N_s \\ &> N_s. \end{aligned}$$

Si se define $X_t = N_t - \lambda t$, se tiene que

$$E[N_t | \mathcal{F}_s] = \lambda(t-s) + E[N_s | \mathcal{F}_s],$$

es decir,

$$E[N_t - \lambda t | \mathcal{F}_s] = N_s - \lambda s$$

ó

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s.$$

CAPÍTULO 7

EL TEOREMA DE GIRSANOV Y MEDIDAS MARTINGALAS EQUIVALENTES

Conceptos básicos de este capítulo:

- Teorema de Girsanov
- Medidas martingalas equivalentes
- Fórmula de Cameron-Martin
- Martingala exponencial de Doléans-Dade
- Condición de Novikov

7.1 Introducción

En este capítulo se presenta un teorema central en la valuación de productos derivados, el teorema de Girsanov. En 1961, Igor V. Girsanov, de nacionalidad rusa, presentó bajo la dirección de Andrei Kolmogorov y de Eugene B. Dynkin su tesis doctoral en la Universidad Estatal de Moscú. El resultado central de su tesis es conocido en la literatura como el teorema de Girsanov. Seis años después de obtener el grado de doctor en matemáticas, en 1967, muere trágicamente en una avalancha. Por supuesto, Igor V. Girsanov nunca supo sobre la trascendencia de su trabajo en el desarrollo de las matemáticas financieras. Los resultados fundamentales de su tesis se encuentran publicados en el “Journal of Theory of Probability and its Applications” en dos artículos: “On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures” en (1960) y “An example on non-uniqueness of the solution to the stochastic differential equation of K. Itô” en (1962).

El teorema de Girsanov construye explícitamente una medida de probabilidad que permite transformar “un movimiento Browniano con tendencia” en un movimiento Browniano sin tendencia, este último definido en un espacio de probabilidad equivalente. Este teorema constituye una herramienta fundamental en la valuación teórica de muchos y muy diversos productos derivados.

Asimismo, en este capítulo se estudia la relación existente entre el teorema de Girsanov, la exponencial estocástica de Doléans-Dade¹ y la condición de Novikov. Por último, en el marco del teorema de Girsanov, se discute el teorema de representación de martingalas.



Fuente: www.math.cornell.edu

Igor V. Girsanov

¹ Catherine Doléans-Dade falleció el 19 de septiembre de 2004. Fue miembro distinguido del grupo de probabilidad en UIUC (“University of Illinois at Urbana-Champaign”) (1976). Sus contribuciones más importantes se encuentran en la teoría de martingalas; en particular, es conocida por el desarrollo de la medida Doléans-Dade.

7.2 ¿Qué es el teorema de Girsanov?

En esta sección se plantean las ideas centrales del teorema de Girsanov. Para ello, suponga que $W_T \sim \mathcal{N}(0, T)$ y considere la variable aleatoria $W_T + \lambda T$, $\lambda \in \mathbb{R}$. El valor medio y la varianza de esta variable aleatoria están dados, respectivamente, por

$$\mathbb{E}[W_T + \lambda T] = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T) e^{-w^2/2T} dw = \lambda T$$

y

$$\text{Var}[W_T + \lambda T] = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} [(w + \lambda T) - \lambda T]^2 e^{-w^2/2T} dw = T.$$

De lo anterior se desprende que si W_T es normal con media cero y varianza T , entonces $W_T + \lambda T$ es normal con media λT y varianza T . Es decir, al pasar de W_T a $W_T + \lambda T$, la media cambia de cero a T , pero la varianza se mantiene en T . El problema que a continuación se plantea contiene toda la esencia del teorema de Girsanov: se desea determinar una función $\varphi = \varphi(W_T)$ que cumpla las siguientes dos condiciones:

$$\mathbb{E}[(W_T + \lambda T) \varphi(W_T)] = 0$$

y

$$\mathbb{E}[(W_T + \lambda T)^2 \varphi(W_T)] = T.$$

Equivalentemente,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T) \varphi(w) e^{-w^2/2T} dw = 0 \quad (7.1)$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T)^2 \varphi(w) e^{-w^2/2T} dw = T. \quad (7.2)$$

Este problema es, en realidad, más fácil de resolver de lo que parece. En efecto, resulta casi evidente que

$$\mathcal{I}_1 := \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T) e^{-(w+\lambda T)^2/2T} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon e^{-\epsilon^2/2T} d\epsilon = 0 \quad (7.3)$$

y

$$\mathcal{I}_2 := \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T)^2 e^{-(w+\lambda T)^2/2T} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon^2 e^{-\epsilon^2/2T} d\epsilon = T, \quad (7.4)$$

donde se ha utilizado el cambio de variable $\epsilon = w + \lambda T$ y las integrales \mathcal{I}_1 y \mathcal{I}_2 son la esperanza y la varianza, respectivamente, de una variable aleatoria normal $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, T)$. Observe además que las ecuaciones (7.3) y (7.4) pueden reescribirse como:

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T) e^{-\lambda w - \frac{1}{2}\lambda^2 T} e^{-w^2/2T} dw = 0 \quad (7.5)$$

y

$$\mathcal{I}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T)^2 e^{-\lambda w - \frac{1}{2}\lambda^2 T} e^{-w^2/2T} dw = T. \quad (7.6)$$

Si se comparan (7.1) y (7.2) con (7.5) y (7.6) se sigue que justamente

$$\varphi(W_T) = e^{-\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T} \quad (7.7)$$

es la función que se busca para que se cumplan (7.1) y (7.2). Aún más, la función $\varphi(W_t)$ es la única que satisface (7.1) y (7.2). Así pues, el primer resultado relevante es que si $W_T + \lambda T$ tiene media λT , entonces $(W_T + \lambda T)\varphi(W_T)$ tiene media cero. El segundo resultado importante es que si W_T tiene varianza T , entonces $(W_T + \lambda T)\varphi(W_T)$ también tiene varianza T . De hecho,

esto demuestra el teorema de Girsanov. Por supuesto, la investigación de Girsanov contempla un raudal de resultados adicionales.

7.3 Teorema de Girsanov y cambio de espacio de probabilidad: cálculo de valores esperados

En esta sección se discute sobre el nuevo espacio de probabilidad que induce el teorema de Girsanov y cómo se calculan las esperanzas en este nuevo espacio. Si g es una función de $W_T + \lambda T$, entonces

$$\mathbb{E}[g(W_T + \lambda T) \varphi(W_T)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(w + \lambda T) \varphi(w) d\mathbb{P}(w), \quad (7.8)$$

donde

$$d\mathbb{P}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-w^2/2T} dw.$$

Si $\Omega = \mathbb{R}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ representa la σ -álgebra de Borel, entonces W_T está definida sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Por supuesto, la función g debe ser tal que (7.8) se mantenga finita. Suponga ahora que $\widetilde{W}_T \sim \mathcal{N}(0, T)$. De esta manera,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{E}}[g(\widetilde{W}_T)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{w}) e^{-\tilde{w}^2/2T} d\tilde{w} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{w}) d\widetilde{\mathbb{P}}(\tilde{w}), \end{aligned} \quad (7.9)$$

donde

$$d\widetilde{\mathbb{P}}(\tilde{w}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\tilde{w}^2/2T} d\tilde{w}.$$

En este caso \widetilde{W}_T está definida sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{\mathbb{P}})$. La ecuación (7.8) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{E}}[g(\widetilde{W}_T)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{w}) e^{-\tilde{w}^2/2T} d\tilde{w} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{w}) \left(\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}(\tilde{w})}{d\mathbb{P}(w)} \right) d\mathbb{P}(w). \end{aligned} \quad (7.10)$$

La igualdad entre (7.8) y (7.10) se cumple si y sólo si $\widetilde{W}_T = W_T + \lambda T$ y

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}(\tilde{w})}{d\mathbb{P}(w)} = \varphi(w).$$

Esta última expresión recibe el nombre de derivada de Radon-Nikodym² de $\widetilde{\mathbb{P}}$ con respecto de \mathbb{P} . Así, $\widetilde{\mathbb{P}}$ se define en términos de \mathbb{P} como

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \varphi(w) d\mathbb{P}(w), \quad A \in \mathcal{F}.$$

De la misma manera, valores esperados bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$ se obtienen en términos de valores esperados bajo \mathbb{P} ,

$$\widetilde{\mathbb{E}}[g(\widetilde{W}_T)] = \mathbb{E}[g(W_T + \lambda T) \varphi(W_T)].$$

² Johann Radon (1887-1956) matemático checo con importantes aportaciones al cálculo de variaciones y a la geometría diferencial. Otto Marcin Nikodym (1887-1974), también escrito como Otto Martin Nikodym, destacado matemático austro-húngaro, alumno de W. Sierpinski y fundador de la “Polish Mathematical Society”, sus contribuciones destacan en teoría de la medida y análisis funcional.

En particular, para cualquier evento $A \in \mathcal{F}$ se cumple que

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \tilde{\mathbb{E}}[1_A] = \mathbb{E}[1_A \varphi(W_T)] = \int_A \varphi(w) d\mathbb{P}(w).$$

En resumen, si $W_T \sim \mathcal{N}(0, T)$, entonces, bajo la distribución $d\mathbb{P}$, se sigue que $\mathbb{E}[W_T + \lambda T] = \lambda T$. Si se define $\tilde{W}_T = W_T + \lambda T$, entonces $\tilde{\mathbb{E}}[\tilde{W}_T] = 0$. En palabras más simples, una variable aleatoria normal con media distinta de cero se transforma en un variable aleatoria normal con media cero a través de la distribución de probabilidad $d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{w})$. También, resulta evidente que si $A \in \mathcal{F}$, entonces $\mathbb{P}(A) = 0$ si sólo si $\tilde{\mathbb{P}}(A) = 0$. Esto hace que \mathbb{P} y $\tilde{\mathbb{P}}$ puedan ser vistas como medidas de probabilidad equivalentes.

7.4 ¿Cuál es la utilidad del teorema de Girsanov en finanzas?

Para generar ambientes de neutralidad al riesgo en la valuación de productos derivados, es decir, ambientes en donde el precio de un producto derivado no depende de las preferencias al riesgo de los agentes, es necesario cambiar la tendencia del proceso que originalmente guía el precio del subyacente. En este caso, una simple aplicación del teorema de Girsanov proporciona el resultado deseado. Por otro lado, al manipular movimientos Brownianos en el proceso de valuación de diversos productos derivados, a menudo éstos adquieren tendencias. Si se desean mantener las propiedades del movimiento Browniano para hacer más simple el proceso de valuación, entonces el teorema de Girsanov es la herramienta para remover dichas tendencias.

7.5 La martingala fundamental del teorema de Girsanov

El siguiente resultado muestra que la función $\varphi = \varphi(W_T)$ es una martingala. Considere un movimiento Browniano $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ definido sobre un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ su filtración aumentada, entonces el proceso $e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ es una \mathbb{P} -martingala con respecto de \mathbb{F} . En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T} \mid \mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[e^{-\lambda(W_T - W_t) - \lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 T} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 T} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda(W_T - W_t)} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 T} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda(W_T - W_t)}\right] \\ &= e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 T} e^{\frac{1}{2}\lambda^2(T-t)} \\ &= e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}, \end{aligned} \tag{7.11}$$

ya que, $\sigma W_{T-t} = \sigma \sqrt{T-t} \times \mathcal{E}$ con $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. De lo anterior, se hace evidente la importancia del proceso $e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ en la definición de la nueva medida de probabilidad, $\tilde{\mathbb{P}}$, bajo la cual un movimiento Browniano con tendencia se transforma en un movimiento Browniano sin tendencia. Por esta razón, la medida de probabilidad, $\tilde{\mathbb{P}}$ recibe el nombre de medida martingala de probabilidad o medida martingala equivalente de probabilidad.

7.6 El teorema de Girsanov para eliminar una tendencia variable, medidas de probabilidad equivalentes y la derivada de Radon-Nikodym

Sea $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$. Sea $\{\lambda_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un proceso estocástico adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$, es decir, para cada $t \in [0, T]$ y para toda $x \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$\{\lambda_t \leq x\} \equiv \{\omega \in \Omega | \lambda_t(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}_t.$$

Se define un movimiento Browniano con tendencia variable λ_t como:

$$\widetilde{W}_t = \lambda_t t + W_t. \tag{7.12}$$

A continuación se construye una medida de probabilidad, $\tilde{\mathbb{P}}$, definida en el espacio muestral original, Ω , bajo la cual $\{\tilde{W}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es un movimiento Browniano. Sea

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^2 ds \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \text{Var} \left[\int_0^t \lambda_s dW_s \right] \right\}\end{aligned}\tag{7.13}$$

junto con

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \varphi_T d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}.\tag{7.14}$$

Se requiere una condición adicional a fin de garantizar que (7.14) esté bien definida

$$E \left[\exp \left\{ \int_0^t \lambda_s^2 ds \right\} \right] < \infty.$$

Observe ahora que la ecuación (7.14) puede reescribirse como:

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \varphi_T.\tag{7.15}$$

Es decir, φ_T es la derivada de Radon-Nikodym de $\tilde{\mathbb{P}}$ con respecto de \mathbb{P} . Asimismo, dado que $\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \varphi_T d\mathbb{P}$, se tiene que si $\mathbb{P}(A) = 0$, $A \in \mathcal{F}$, entonces $\tilde{\mathbb{P}}(A) = 0$, lo cual significa que $\tilde{\mathbb{P}}$ es absolutamente continua con respecto de \mathbb{P} . Este hecho se denota mediante $\tilde{\mathbb{P}} \ll \mathbb{P}$. Dado que la relación (7.15) es invertible, es decir,

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}} = \varphi_T^{-1},\tag{7.16}$$

equivalentemente, $\mathbb{P}(A) = \int_A \varphi_T^{-1} d\tilde{\mathbb{P}}$. Se tiene ahora que $\mathbb{P}(A) = 0$, $A \in \mathcal{F}$, implica $\tilde{\mathbb{P}}(A) = 0$, es decir, \mathbb{P} es absolutamente continua con respecto de $\tilde{\mathbb{P}}$, lo cual se denota por $\mathbb{P} \ll \tilde{\mathbb{P}}$. Si $\tilde{\mathbb{P}} \ll \mathbb{P}$ y $\mathbb{P} \ll \tilde{\mathbb{P}}$, esto es, \mathbb{P} y $\tilde{\mathbb{P}}$ tienen los mismos conjuntos de medida cero, se dice entonces que \mathbb{P} y $\tilde{\mathbb{P}}$ son medidas equivalentes. Este hecho se denota mediante $\tilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$. Observe que tanto \mathbb{P} como $\tilde{\mathbb{P}}$ están definidas sobre el mismo espacio medible (Ω, \mathcal{F}) .

7.7 El teorema de Girsanov para eliminar una tendencia constante

Afortunadamente, la situación que con más frecuencia se presenta en la valuación teórica de productos derivados es cuando se desea construir una medida de probabilidad equivalente que transforme un “movimiento Browniano con tendencia constante” en otro movimiento Browniano sin tendencia.

Sea $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$. Se define un movimiento Browniano con tendencia constante λ como:

$$\tilde{W}_t = \lambda t + W_t.\tag{7.17}$$

Con el propósito de ilustrar con mayor claridad los conceptos hasta ahora definidos, se empleará una notación que haga explícitos todos los argumentos de φ . Sea

$$\varphi(\lambda, t, W_t) = \exp \left\{ -\lambda W_t - \frac{1}{2} \lambda^2 t \right\}\tag{7.18}$$

junto con

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \varphi(\lambda, t, W_t) d\mathbb{P}(w), \quad A \in \mathcal{F}.\tag{7.19}$$

En el transcurso de las siguientes secciones, se verá que $\{\tilde{W}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es efectivamente un movimiento Browniano estándar bajo $\tilde{\mathbb{P}}$.

7.7.1 La derivada de Radon-Nikodym y la regla de la cadena

Sea $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$. Suponga que el precio, S_t , de un activo es conducido por

$$dS_t = aS_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Suponga que se desea cambiar el parámetro de tendencia, de a a b . Así,

$$\begin{aligned} dS_t &= bS_t dt + (a - b)S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ &= bS_t dt + \sigma S_t \left(\frac{a - b}{\sigma} dt + dW_t \right) \\ &= bS_t dt + \sigma S_t (\lambda_{a,b} dt + dW_t) \\ &= bS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t, \end{aligned}$$

donde

$$\lambda_{a,b} = \frac{a - b}{\sigma}$$

y

$$d\widetilde{W}_t = \lambda_{a,b} dt + dW_t.$$

En este caso, la derivada de Radon-Nikodym está dada por

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}(\widetilde{W}_t)}{d\mathbb{P}(W_t)} = \exp \left\{ -\lambda_{a,b} W_t - \frac{1}{2} \lambda_{a,b}^2 t \right\}.$$

Suponga ahora que se desea cambiar de nuevo de tendencia de b a c , entonces

$$\begin{aligned} dS_t &= cS_t dt + \sigma S_t \left(\lambda_{b,c} dt + d\widetilde{W}_t \right) \\ &= cS_t dt + \sigma S_t d\widehat{W}_t, \end{aligned}$$

donde

$$\lambda_{b,c} = \frac{b - c}{\sigma}$$

y

$$d\widehat{W}_t = \lambda_{b,c} dt + d\widetilde{W}_t.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\widehat{\mathbb{P}}(\widehat{W}_t)}{d\widetilde{\mathbb{P}}(\widetilde{W}_t)} = \exp \left\{ -\lambda_{b,c} \widetilde{W}_t - \frac{1}{2} \lambda_{b,c}^2 t \right\}.$$

El cambio en el parámetro de tendencia de a a c en un solo paso se calcula mediante

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{\mathbb{P}}(\widehat{W}_t)}{d\mathbb{P}(W_t)} &= \frac{d\widehat{\mathbb{P}}(\widehat{W}_t)}{d\widetilde{\mathbb{P}}(\widetilde{W}_t)} \frac{d\widetilde{\mathbb{P}}(\widetilde{W}_t)}{d\mathbb{P}(W_t)} \\ &= \exp \left\{ -\lambda_{b,c} \widetilde{W}_t - \frac{1}{2} \lambda_{b,c}^2 t \right\} \exp \left\{ -\lambda_{a,b} W_t - \frac{1}{2} \lambda_{a,b}^2 t \right\} \\ &= \exp \left\{ -\lambda_{b,c} (\lambda_{a,b} W_t + W_t) - \frac{1}{2} \lambda_{b,c}^2 t \right\} \exp \left\{ -\lambda_{a,b} W_t - \frac{1}{2} \lambda_{a,b}^2 t \right\} \\ &= \exp \left\{ -(\lambda_{a,b} + \lambda_{b,c}) W_t - \frac{1}{2} (\lambda_{a,b}^2 + 2\lambda_{a,b}\lambda_{b,c} + \lambda_{b,c}^2) t \right\} \\ &= \exp \left\{ -(\lambda_{a,b} + \lambda_{b,c}) W_t - \frac{1}{2} (\lambda_{a,b} + \lambda_{b,c})^2 t \right\} \\ &= \exp \left\{ -\lambda_{a,c} W_t - \frac{1}{2} \lambda_{a,c}^2 t \right\}, \end{aligned}$$

ya que

$$\lambda_{a,b} + \lambda_{b,c} = \frac{a - b}{\sigma} + \frac{b - c}{\sigma} = \frac{a - c}{\sigma} = \lambda_{a,c}.$$

7.8 La fórmula de Cameron-Martin

En esta sección se verifica que $\tilde{\mathbb{P}}$ es efectivamente una medida de probabilidad sobre (Ω, \mathcal{F}) . En primer lugar, se verá que $\tilde{\mathbb{P}}(\Omega) = 1$. En efecto, observe que

$$d\tilde{\mathbb{P}}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-w^2/2T}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{P}}(\Omega) &= \mathbb{E}[\varphi(\lambda, T, W_T) 1_\Omega] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda w - \frac{1}{2}\lambda^2 T} e^{-w^2/2T} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(w+\lambda T)^2/2T} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon^2/2T} d\epsilon \\ &= 1,\end{aligned}$$

donde $\epsilon = w + \lambda T$. El resultado anterior se conoce en la literatura como la fórmula de Cameron-Martin. Por otro lado, trivialmente se cumple que $\tilde{\mathbb{P}}(A) > 0$ para $A \in \mathcal{F}$ y $\tilde{\mathbb{P}}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathbb{P}}(A_n)$ para una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de \mathcal{F} , ajenos (disjuntos) entre sí.

7.9 Eliminación de la tendencia y medidas martingalas equivalentes

Se verá ahora que, bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, el proceso $\{\tilde{W}_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano. Observe primero que $\tilde{W}_0 = 0$. Asimismo, la continuidad de la función $t \mapsto \tilde{W}_t(w)$ es inmediata, ya que W_t y λt son funciones continuas con respecto de t . Por otro lado, la independencia de los incrementos también está garantizada, ya que

$$\tilde{W}_t - \tilde{W}_s = W_t - W_s + \lambda(t-s), \quad \text{para toda } s \leq t,$$

y $W_t - W_s$ es independiente de \mathcal{F}_s con $\lambda(t-s)$ una función determinista. Por lo tanto, $\tilde{W}_t - \tilde{W}_s$ es también independiente de \mathcal{F}_s .

Ahora bien, observe que bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, el proceso \tilde{W}_T tiene una distribución normal con media λT y varianza T . Es decir,

$$d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{w}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-(\tilde{w}-\lambda T)^2/2T} d\tilde{w},$$

$$\mathbb{E}[\tilde{W}_T] = \mathbb{E}[W_T + \lambda T] = \lambda T$$

y

$$\text{Var}[\tilde{W}_T] = \text{Var}[W_T + \lambda T] = T.$$

Sin embargo, bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, se remueve el término de tendencia de \tilde{W}_T . En efecto,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}[\tilde{W}_T] &= \mathbb{E}[(W_T + \lambda T)\varphi(\lambda, T, W_T)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T) e^{-\lambda w - \frac{1}{2}\lambda^2 T} e^{-w^2/2T} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T) e^{-(w+\lambda T)^2/2T} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon e^{-\epsilon^2/2T} d\epsilon \\ &= 0,\end{aligned}$$

donde $\epsilon = w + \lambda T$. De la misma manera,

$$\begin{aligned}\widetilde{\text{Var}}[\widetilde{W}_T] &= \mathbb{E}[(W_T + \lambda T)^2 \varphi(\lambda, T, W_T)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T)^2 \varphi(\lambda, T, w) d\mathbb{P}(w) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} (w + \lambda T)^2 e^{-\lambda w - \frac{1}{2}\lambda^2 T} e^{-w^2/2T} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon^2 e^{-\epsilon^2/2T} d\epsilon \\ &= T.\end{aligned}$$

Alternativamente,

$$\begin{aligned}d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{w}) &= \varphi(\lambda, T, w) d\mathbb{P}(w) \\ &= \varphi(\lambda, T, \tilde{w} - \lambda T) d\mathbb{P}(\tilde{w} - \lambda T) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\lambda(\tilde{w}-\lambda T) - \frac{1}{2}\lambda^2 T} e^{-(\tilde{w}-\lambda T)^2/2T} d\tilde{w} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\lambda\tilde{w} + \frac{1}{2}\lambda^2 T} e^{-(\tilde{w}-\lambda T)^2/2T} d\tilde{w} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\tilde{w}^2/2T} d\tilde{w}.\end{aligned}\tag{7.20}$$

Es decir, bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, \widetilde{W}_t es normal con media cero y varianza T . Como puede observarse, bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, la media cambia, pero la varianza permanece igual. En conclusión, bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, \widetilde{W}_t sigue un movimiento Browniano.

En general, el valor esperado de una función de \widetilde{W}_T bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}}[g(\widetilde{W}_T)] &= \mathbb{E}[g(W_T + \lambda T)\varphi(\lambda, T, W_T)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(w + \lambda T) e^{-\lambda w - \frac{1}{2}\lambda^2 T} d\mathbb{P}(w) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} g(w + \lambda T) e^{-\lambda w - \frac{1}{2}\lambda^2 T} e^{-\tilde{w}^2/2T} dw,\end{aligned}$$

así

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \tilde{\mathbb{E}}[1_A] = \mathbb{E}[1_A \varphi(\lambda, T, W_T)],$$

donde

$$1_A = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

Por último, observe que $\varphi(\lambda, t, W_t)$ es una martingala. En efecto, a partir de (7.11), se sigue inmediatamente que

$$\mathbb{E} \left[e^{-\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T} \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t},\tag{7.21}$$

es decir,

$$\mathbb{E} [\varphi(\lambda, T, W_T) \mid \mathcal{F}_t] = \varphi(\lambda, t, W_t).\tag{7.22}$$

Equivalentemente,

$$\mathbb{E} [\varphi(\lambda, T - t, W_{T-t}) \mid \mathcal{F}_t] = 1.\tag{7.23}$$

De la misma forma, dado que \widetilde{W}_t es un movimiento Browniano bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, se obtiene

$$\tilde{\mathbb{E}} [\varphi(\lambda, T, \widetilde{W}_T) \mid \mathcal{F}_t] = \varphi(\lambda, t, \widetilde{W}_t).\tag{7.24}$$

Se dice que una medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$ es una medida martingala equivalente, o simplemente una martingala equivalente, para $\varphi(\lambda, t, W_t)$ si $\varphi(\lambda, T, \tilde{W}_T)$ es una martingala bajo $\tilde{\mathbb{P}}$.

7.10 La exponencial estocástica de Doléans-Dade y el teorema de Girsanov

En esta sección se presenta la relación que existe entre la exponencial estocástica de Doléans-Dade y el teorema de Girsanov. El proceso $\varphi_t \equiv \varphi(\lambda, t, W_t)$ se puede caracterizar mediante una ecuación diferencial estocástica. Si se aplica el lema de Itô a φ_t en (7.18), se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\lambda^2\varphi, \\ \frac{\partial \varphi_t}{\partial W_t} &= -\lambda\varphi, \\ \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial W_t^2} &= \lambda^2\varphi.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d\varphi_t = -\frac{1}{2}\lambda^2\varphi_t dt - \lambda\varphi_t dW_t + \frac{1}{2}\lambda^2\varphi_t dt = -\lambda\varphi_t dW_t.$$

Es decir

$$d\varphi_t = -\lambda\varphi_t dW_t. \quad (7.25)$$

7.11 La condición de Novikov

Si en la ecuación (7.25) se efectúa el cambio de variable $X_t = \lambda W_t$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$d\varphi_t = -\varphi_t dX_t,$$

la cual tiene como solución la exponencial estocástica de Doléans-Dade:

$$\varphi_t = \exp \left\{ -X_t - \frac{1}{2}\text{Var}[X_t] \right\}. \quad (7.26)$$

La condición de Novikov (1972) establece que para que φ_t sea una martingala, es necesario que se satisfaga

$$E \left[\exp \left\{ \frac{1}{2}\text{Var}[X_t] \right\} \right] < \infty.$$

Si se sustituye de nuevo $X_t = \lambda W_t$ en la ecuación (7.26) se obtiene que

$$\varphi_t = \exp \left\{ -\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2\text{Var}[W_t] \right\} = \exp \left\{ -\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t \right\}.$$

Claramente, se cumple que

$$E \left[\exp \left\{ \frac{1}{2}\lambda^2\text{Var}[W_t] \right\} \right] = E \left[e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t} \right] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t} < \infty.$$

Por lo tanto, φ_t es una martingala.

7.12 Teorema de representación de martingalas y teorema de Girsanov

Uno de los resultados más importantes en la teoría de martingalas es el teorema de representación, el cual se establece a continuación. Si $s \leq t$, a partir de (7.25), se sigue que

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \varphi_0 - \lambda \int_0^t \varphi_u dW_u \\ &= 1 - \lambda \int_0^t \varphi_u dW_u.\end{aligned}$$

Se puede ver, en forma alternativa, que φ_t es una martingala si se demuestra que $\int_0^t \varphi_u dW_u$ es una martingala. En efecto,

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^t \varphi_u dW_u \mid \mathcal{F}_s\right] &= E\left[\int_0^s \varphi_u dW_u + \int_s^t \varphi_u dW_u \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \int_0^s \varphi_u dW_u + E\left[\int_s^t \varphi_u dW_u \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \int_0^s \varphi_u dW_u + 0, \end{aligned}$$

ya que el integrando φ_u es una función continua y no anticipada dada la información \mathcal{F}_s . Por lo tanto, $\int_0^t \varphi_u dW_u$ es martingala y, consecuentemente, φ_t es martingala.

7.13 Bibliografía sugerida

- Doléans-Dade, C. (1976). "On the Existence and Unicity of Solutions of Stochastic Differential Equations". *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, Vol. 36, pp. 93-101.
- Girsanov, I. V. (1960). "On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures". *Journal of Theory of Probability and its Applications*, Vol. 5, pp. 285-301.
- Girsanov, I. V. (1962). "An example on non-uniqueness of the solution to the stochastic differential equation of K. Itô". *Journal of Theory of Probability and its Applications*, Vol. 7, pp. 325-331.
- Novikov, A. A. (1972). "On an Identity for Stochastic Integrals". *Theory Probab. Appl.*, Vol 17, pp. 717-720.
- Revuz, D. and M. Yor (1999). Continuous Martingales and Brownian Motion, Third edition, Springer-Verlag, New-York.

7.14 Ejercicios

- 7.1** Considere un movimiento Browniano $(W_t)_{t \in [0, T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Considere un proceso de la forma

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Asimismo, sea M_t una variable determinista tal que

$$dM_t = rM_t dt.$$

Si se supone que $M_0 = 1$, entonces

$$M_t = e^{rt}.$$

Muestre que el proceso

$$\widehat{S}_t = M_t^{-1} S_t = e^{-rt} S_t.$$

es una martingala.

Solución: Observe que

$$\begin{aligned} d\widehat{S}_t &= d(e^{-rt} S_t) \\ &= e^{-rt} dS_t + S_t d(e^{-rt}) + d(e^{-rt}) dS_t. \\ &= e^{-rt} dS_t - re^{-rt} S_t dt \\ &= e^{-rt} dS_t - r\widehat{S}_t dt \\ &= e^{-rt} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - re^{-rt} S_t dt \\ &= e^{-rt} [(\mu - r) S_t dt + \sigma S_t dW_t] \\ &= e^{-rt} \sigma S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right). \end{aligned}$$

Si se denota

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

y se hace la siguiente transformación

$$\widehat{W}_t = W_t + \int_0^t ds = W_t + \lambda t,$$

entonces

$$d\widehat{S}_t = \widehat{S}_t \sigma d\widehat{W}_t.$$

Por el teorema de Girsanov existe una medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ equivalente a \mathbb{P} bajo la cual $\{\widehat{W}_t\}_{t>0}$ es un movimiento Browniano estándar y, en virtud del teorema de representación de martingalas, \widehat{S}_t es una martingala. Equivalentemente,

$$\begin{aligned} \widehat{S}_t &= e^{-rt} S_t \\ &= S_0 e^{-rt} e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \\ &= S_0 e^{-rt} e^{\sigma \widehat{W}_t - (\mu - r)t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \\ &= S_0 e^{\sigma \widehat{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}, \end{aligned}$$

o más generalmente

$$\widehat{S}_T = \widehat{S}_t e^{\sigma(\widehat{W}_T - \widehat{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}, \quad T > t.$$

Por el teorema de Girsanov existe una medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ bajo la cual $\{\widehat{W}_t\}_{t>0}$ es un movimiento Browniano estándar, se tiene así que \widehat{S}_t es una martingala.

7.2 Sea $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$. Si se define un movimiento Browniano con tendencia constante λ como $W_t = \lambda t + W_t$, entonces

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{w})}{d\mathbb{P}(w)} = \varphi(w),$$

con $\varphi(\lambda, t, W_t) = \exp\{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}$. En este caso, la probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ es una medida martingala equivalente a \mathbb{P} . Analice el proceso inverso $\widetilde{W}_t = -\lambda t + \widehat{W}_t$.

7.3 Considere un proceso estocástico S_t gobernado por la ecuación diferencial estocástica.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Defina $F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}$. Encuentre la ecuación diferencial estocástica que conduce a $F_{t,T}$. Elimine el parámetro de tendencia utilizando el teorema de Girsanov.

Solución: Observe primero que

$$\begin{aligned} dF_{t,T} &= (\mu - r) F_{t,T} dt + \sigma F_{t,T} dW_t \\ &= \sigma F_{t,T} (\lambda dt + dW_t), \end{aligned}$$

donde $\lambda = (\mu - r)/\sigma$. Si se define $d\widetilde{W}_t = \lambda dt + dW_t$, entonces $d\widetilde{W}_t$ es un variable aleatoria normal con media cero bajo una medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ tal que

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{w})}{d\mathbb{P}(w)} = \varphi(w) = e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}.$$

7.4 Sea S_t un proceso estocástico conducido por la ecuación diferencial estocástica.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Defina $y_t = \frac{1}{2}S_t^2$. Encuentre la ecuación diferencial estocástica de y_t . Elimine el parámetro de tendencia utilizando el teorema de Girsanov.

Solución: Observe primero que

$$dy_t = \sigma y_t (adt + dW_t),$$

donde $a = (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)/\sigma$. Es suficiente definir $\widetilde{dW}_t = adt + dW_t$ y

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}(\widetilde{w})}{d\mathbb{P}(w)} = \varphi(w) = e^{-aW_t - \frac{1}{2}a^2 t}.$$

CAPÍTULO 8

LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DE CALOR

Conceptos básicos de este capítulo:

- Ecuación de calor de Fourier
- Solución de la ecuación de calor
- Condición de frontera
- Martingala

8.1 Introducción

En este capítulo se encuentran soluciones explícitas de la ecuación de calor. La teoría de difusión de calor es muy útil en finanzas, ya que el problema de valuación de productos derivados, en muchos casos, puede transformarse al problema de resolver una ecuación de difusión de calor con una condición inicial.

8.2 Ecuación de difusión de calor

La ecuación de difusión de calor con una condición inicial está dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0, \quad (8.1)$$

junto con

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

La ecuación anterior se puede interpretar de la siguiente manera: $-\infty < x < \infty$ representa una varilla de longitud infinita; $u_0(x)$ es la cantidad de calor que se aplica en el punto x en el tiempo $\tau = 0$; y $u(x, \tau)$ describe cómo se difunde el calor en cada punto x en $\tau > 0$.

8.3 Solución de la ecuación de difusión de calor

En esta sección se presenta la solución de la ecuación de difusión de calor. Considere la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dY_t = \sqrt{2}dW_t,$$

lo cual conduce a

$$Y_T = Y_t + \sqrt{2}(W_T - W_t) = Y_t + \sqrt{2}W_{T-t}.$$

Observe primero que Y_T es una martingala. En efecto,

$$\begin{aligned} E[Y_T | \mathcal{F}_t] &= E[Y_t + \sqrt{2}(W_T - W_t) | \mathcal{F}_t] \\ &= Y_t + \sqrt{2}E[W_T - W_t | \mathcal{F}_t] \\ &= Y_t. \end{aligned}$$

Asimismo, la función de densidad condicional de Y_T dado el valor de Y_t está dada por

$$f_{Y_T|Y_t}(s|S_t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(T-t)}} \exp\left\{-\frac{1}{4(T-t)}(s-Y_t)^2\right\}.$$

Si se definen las variables hacia atrás $x = Y_t$ y $\tau = T - t$, se tiene que

$$p(x, \tau; s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{1}{4\tau}(s-x)^2\right\}, \quad (8.2)$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \tau} &= -\frac{1}{4\tau\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{1}{4\tau}(s-x)^2\right\} + \frac{(s-x)^2}{8\tau^2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{1}{4\tau}(s-x)^2\right\} \\ &= \left(\frac{(s-x)^2}{4\tau^2} - \frac{1}{2\tau}\right)p. \end{aligned} \quad (8.3)$$

De la misma manera,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2\tau}(s-x)p$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{2\tau}(s-x)\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2\tau}p \\ &= \frac{1}{2\tau}(s-x)\left(\frac{1}{2\tau}(s-x)p\right) - \frac{1}{2\tau}p \\ &= \left(\frac{(s-x)^2}{4\tau^2} - \frac{1}{2\tau}\right)p. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0,$$

Considere ahora la función

$$u(x, T-t) = \mathbb{E}\left[u_0\left(x + \sqrt{2}(W_T - W_t)\right) \middle| \mathcal{F}_t\right], \quad (8.5)$$

o equivalentemente

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)p(x, \tau; s)ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)e^{-(s-x)^2/4\tau}ds.$$

En particular, si $\tau = 0$, se cumple que

$$p(x, 0; s) = \delta(s-x),$$

donde $\delta(s-x)$ es una función (generalizada) delta de Dirac y es tal que su valor es cero para $s \neq x$, e infinito para $s = x$, con

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(s-x)ds = 1.$$

En este caso, se cumple que

$$u(x, 0) = \mathbb{E}^{(\delta)}[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)\delta(s-x)ds = u_0(x).$$

El producto $u_0(s)\delta(s-x)$ se puede interpretar como la cantidad de calor que se aplica en cada punto x de la varilla en $\tau = 0$.

8.4 Solución de la ecuación de calor

A continuación se verifica que (8.5) es efectivamente solución de la ecuación de calor (8.1). En efecto, observe que a partir de (8.3) y (8.4), se sigue que

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) \frac{\partial p}{\partial \tau} ds = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) \left(\frac{(s-x)^2}{4\tau^2} - \frac{1}{2\tau} \right) p ds$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} ds = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) \left(\frac{(s-x)^2}{4\tau^2} - \frac{1}{2\tau} \right) p ds.$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0,$$

con

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

donde $u_0(x)$ es una función conocida de x .

8.5 Bibliografía sugerida

Browder, F. E. (1984). The One-Dimensional Heat Equation (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). Cambridge University Press.

8.6 Ejercicios

8.1 Transforme la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} b^2 y^2 + \frac{\partial v}{\partial y} a y - a v = 0,$$

donde a y b son constantes positivas, en la ecuación de difusión de calor.

8.2 Considere la siguiente ecuación diferencial parcial de calor:

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Considere la función de Green

$$G(x, y, t) = \frac{e^{-(x-y)^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$$

definida para

$$\begin{cases} -\infty < x < \infty, \\ -\infty < y < \infty, \\ t > 0. \end{cases}$$

Verifique que esta función satisface la ecuación de calor para todo $t > 0$. Asimismo, muestre que la “suma” de estas funciones

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) f(y) dy, \quad t > 0,$$

también satisface la ecuación de calor.

8.3 Considere la ecuación diferencial parcial:

$$u_t - ku_{xx} = 0, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \ell,$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(\ell, t) = 0, \quad t > 0.$$

Muestre que la solución está dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2(\pi/\ell)^2 kt} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right),$$

donde

$$c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{\ell}\right) ds.$$

III. LOS CLÁSICOS

- 9. Los clásicos: Louis Bachelier, Paul Samuelson, Fischer Black, Myron Scholes y Robert C. Merton

CAPÍTULO 9

LOS CLÁSICOS: BACHELIER, SAMUELSON, MERTON, BLACK Y SCHOLES (UN DESTINO COMPARTIDO)

Conceptos básicos de este capítulo:

- Ley de probabilidad del precio de un activo financiero
- Esperanza condicional
- Ecuación de Chapman-Kolmogorov
- Ecuación de Fourier (de difusión de calor)
- Procesos Markovianos
- Martingalas
- Movimiento Browniano
- Movimiento geométrico Browniano
- Valuación neutral al riesgo de opciones
- Modelo CAPM
- Valuación de opciones con tasas de interés estocásticas

9.1 Introducción

En este capítulo se revisan y discuten las contribuciones de Louis Bachelier, Paul A. Samuelson, Fischer Black, Myron Scholes y Robert C. Merton a la economía y las finanzas en tiempo continuo. En sus aportaciones, el movimiento Browniano no sólo permite el modelado adecuado de las fluctuaciones propias de diversas variables económicas y financieras, sino también representa una herramienta básica para incorporar elementos de riesgo e incertidumbre en la dinámica de dichas variables. Asimismo, se discuten las relaciones existentes entre dichas aportaciones con las investigaciones de otros prominentes científicos, tales como: Robert Brown, Albert Einstein, Andrey Markov, Andrei Kolmogorov, Paul Lévy, Norbert Wiener y Kiyosi Itô, entre otros. Por último, se lleva a cabo una investigación sobre la evolución de las ideas y formulaciones de los modelos desarrollados por Bachelier, Samuelson, Black, Scholes y Merton y, simultáneamente, se realiza un análisis comparativo entre dichos modelos.

Paul Samuelson, Robert Merton y Myron Scholes han sido honrados con el premio Nobel de economía. En 1969, el Banco Central de Suecia crea el premio Nobel en economía y un año después, en 1970, Paul Anthony Samuelson¹ obtiene dicho premio. Asimismo, 29 años después, en 1997, Robert Merton² y Myron Scholes³ comparten el premio Nobel. Lamentablemente, el reconocido matemático y economista Fischer Black,⁴ con quien Myron Scholes participó en la investigación laureada, había fallecido dos años antes, a saber, el 30 de agosto de 1995. Por otro lado, muchos años antes, Louis Bachelier muere en 1946 y, evidentemente, el premio Nobel en economía todavía no existía. Sin embargo, no hay duda de que la capacidad y las contribuciones de Louis Bachelier excedían los requerimientos para dicho reconocimiento. Es importante destacar que Robert Merton fue asistente de Paul Samuelson en el MIT (Massachusetts Institute of Technology) durante dos años (de 1968 a 1970) y, también en ese entonces, Myron Scholes era profesor asistente en el MIT. De esta manera, Samuelson, Scholes y Merton coinciden en lugar y tiempo.

¹ Paul Anthony Samuelson obtuvo su doctorado en economía por la Universidad de Harvard.

² Robert Merton obtuvo la maestría en matemáticas aplicadas en el California Institute of Technology y el doctorado en economía por el MIT.

³ Myron Scholes obtuvo un MBA y un doctorado en la Universidad de Chicago.

⁴ Fischer Black obtuvo su doctorado en matemáticas aplicadas por la Universidad de Harvard en 1964. Su notable contribución a la economía y las finanzas se encuentra representada en más de 40 artículos.

La organización del presente capítulo es como sigue. En las próximas 3 secciones se proporciona una revisión del contexto histórico en el que Louis Bachelier realiza su trabajo de investigación. En el transcurso de la sección 5, se presenta una reseña histórica sobre el fenómeno del movimiento Browniano y su evolución conceptual. En la sección 6 se discute la contribución de Albert Einstein en la explicación del movimiento Browniano. En la sección 7 se establece la relación incidental entre el trabajo de Samuelson y el de Bachelier. A través de la sección 8, se discute cómo se conectan entre sí los trabajos de Black, Scholes y Merton, así como las circunstancias en que ésto sucede. En la sección 9 se presenta un modelo probabilista desarrollado por Bachelier para estudiar la dinámica estocástica del precio de un activo y determinar el valor de una opción de compra sobre dicho activo. En la sección 10 se presentan las ideas principales del trabajo de Einstein sobre el movimiento Browniano y se comparan sus resultados con los de Bachelier. En la sección 11 se introduce el trabajo de Samuelson sobre valuación de opciones, en el cual el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano, situación que impide que el precio del activo subyacente tome valores negativos, como sucede en el caso del modelo de Bachelier. En la sección 12 se presenta el trabajo de Black y Scholes en el que, bajo condiciones de equilibrio, desarrollan un modelo para valuar una opción de compra sobre una acción cuya dinámica es conducida por el movimiento geométrico Browniano. En su investigación, dos parámetros desconocidos considerados en el trabajo de Samuelson, ya no aparecen en el precio de la opción. En esta misma sección se proporciona una derivación alternativa de Black y Scholes, que emplea el CAPM en tiempo continuo, para obtener su fórmula de valuación. A través de la sección 13 se presenta el trabajo de Merton, el cual extiende en varias direcciones el modelo de Black y Scholes, entre dichas extensiones destacan: tasas de interés estocásticas, pago continuo de dividendos, un análisis de opciones americanas, generalización de la fórmula de Samuelson para opciones perpetuas, la valuación de opciones con barreras y un modelo de la dinámica estocástica de la tasa corta. Por último, en la sección 14 se presenta un conjunto de conclusiones.



Louis Bachelier



Robert C. Merton



Myron Scholes



Fischer Black



Paul A. Samuelson

9.2 Louis Bachelier (1870-1946)

Louis Bachelier (1870-1946), de nacionalidad francesa, por sus excepcionales contribuciones a la teoría financiera ha sido llamado el “Padre de las matemáticas financieras modernas”. Su tesis doctoral “Théorie de la Spéculation”, presentada en 1900, cuando tenía 30 años, en la Sorbonne de París distingue a las finanzas como una ciencia sujeta al rigor matemático. Louis Bachelier se adelantó a su tiempo con la introducción de conceptos como: movimiento Browniano, proceso Markoviano, esperanza condicional y martingala. Lo sorprendente es que todos estos conceptos fueron redescubiertos y popularizados por prominentes matemáticos, varios años después. Por ejemplo, los procesos Markovianos⁵ aparecen en 1906, la noción formal de esperanza condicional es introducida por Kolmogorov⁶ en 1933 y el concepto de martingala es elaborado por Lévy⁷ hasta 1937.

Es importante resaltar que entre las contribuciones de la tesis de Bachelier a las matemáticas financieras, también destacan: el modelado de la dinámica de los precios de acciones de la bolsa de París a través del movimiento Browniano, la primera representación gráfica del precio de un contrato de opción, la formulación de mercados eficientes, la primera fórmula de valuación de un contrato de opción y la primera definición cuantitativa de riesgo de mercado.

Sin duda, Louis Bachelier se adelantó a su tiempo. Cuando varias ramas de la física eran sometidas al rigor matemático y la matemática pura alcanzaba el culmen de una época, era imposible pensar en una “teoría matemática” que estudiara el comportamiento de los precios de activos financieros, y mucho menos pensar en “modelos matemáticos” que describieran los movimientos de dichos precios. ¿A quién le podría importar modelar el comportamiento de una bolsa de valores en ese entonces? Sin embargo, Louis Bachelier convencido de la importancia del estudio de los mercados financieros, a través de modelos matemáticos, prosiguió con su apasionante aventura obteniendo resultados que, en la actualidad, siguen sorprendiendo. Tristemente, Bachelier y su trabajo permanecieron en el anonimato durante muchos años. Poco se sabe, hasta la fecha, de este enigmático y misterioso personaje. Louis Bachelier murió sin reconocimiento alguno de la élite científica francesa de aquellos tiempos. No fue sino hasta la década de los sesenta cuando a través del trabajo de Paul Samuelson, quien circunstancialmente se encontró con la tesis de Bachelier en una visita a la Sorbonne, se dieron a conocer las aportaciones de Louis Bachelier, lamentablemente, mucho tiempo después de su muerte.

Por último, es justo mencionar que Bachelier tomó algunas ideas de trabajos anteriores para su investigación, como en la mayoría de las veces acontece. Por ejemplo, el trabajo del

Fuentes de fotografías: www.economyprofessor.com, nobelprize.org/economics

⁵ Andrey Andreyevich Markov (1856-1922), ilustre matemático ruso, en su ensayo “Extension of the Law of Large Numbers to Dependent Events”, publicado en 1906, formaliza el concepto de lo que hoy se conoce como proceso Markoviano.

⁶ Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), prominente matemático ruso, en su monografía “Foundations of Probability” introduce y formaliza el concepto de esperanza condicional.

⁷ Paul Lévy (1886-1971), distinguido matemático francés, en su obra “Théorie de l'addition des variables aléatoires”, publicada en 1937, presenta formalmente el concepto de martingala.

economista y financiero francés Jean Joseph Nicolas Regnault, quien utilizaba el pseudónimo de Jules Regnault, “Calcul des chances et philosophie de la Bourse” publicado en 1863, ya mencionaba que la desviación promedio de los precios de las acciones era proporcional a la raíz cuadrada del tiempo en que fueron tomadas las observaciones, propiedad central del movimiento Browniano.

9.3 Un poco más sobre la vida de Louis Bachelier

Una frase que vendría bien para comenzar esta sección es que “las estrellas, a pesar de todo, siempre brillan”. En 1889, cuando Louis tenía 19 años, justo después de terminar su preparatoria, sus padres mueren, razón por la cual tuvo que abandonar sus estudios y hacerse cargo de sus dos hermanos y del negocio familiar (comercio). Sin embargo, al hacerse cargo del negocio familiar, tuvo la oportunidad de conocer el mundo de los mercados financieros, experiencia que marcaría su interés por el comportamiento de los precios de diferentes activos, incluyendo algunos productos derivados. Otro evento que retrasaría la carrera académica de Louis ocurre en 1891 cuando se enlista en el ejército para llevar a cabo su servicio militar. No fue sino hasta 1892, a la edad de 22 años, que Louis pudo continuar con su educación universitaria en la Sorbonne gracias a una recomendación de Émile Borel para conseguir una beca. Al principio, como era de esperarse, Louis no se distinguió por ser un estudiante brillante (sus calificaciones eran inferiores a las de sus compañeros: Langevin y Liénard). A pesar de casi cuatro años de interrupción, Louis Bachelier pudo avanzar rápidamente y en 1895 obtuvo la licenciatura en matemáticas y en 1897 la maestría en física matemática. El 29 de marzo de 1900, ya como candidato a doctor en ciencias matemáticas en la Sorbonne, presentó su tesis “Théorie de la Spéculation” a la Facultad de Ciencias de la Academia de París. Sus sinodales fueron, nada menos que Henri Poincaré, Paul Appel y Joseph Boussinesq. Sin embargo, en ese tiempo las finanzas no eran vistas como una ciencia (matemática) y los comentarios de Hadamard, Borel, Lebesgue, Lévy y Baire no se hicieron esperar para menospreciar su trabajo, cuando todo giraba en torno de la física matemática y la matemática pura.

9.4 Las décadas perdidas de las matemáticas financieras y la probabilidad

Todavía en la década de los setenta y principios de los ochenta del siglo XX, lo que hoy se conoce como matemáticas financieras no era una disciplina de interés para la mayoría de los departamentos de matemáticas en el mundo. Mucho menos lo era, por ejemplo, la teoría de productos derivados, la cual era vista como un área carente de rigor y muy lejos de los temas relevantes de entonces: topología algebraica, geometría diferencial, análisis funcional, variable compleja, álgebra moderna, etc. La situación actual es muy distinta, casi todos los departamentos de matemáticas en el mundo tienen un área de matemáticas financieras e incluso un programa de posgrado en matemáticas financieras.

La teoría de la probabilidad atravesó por una situación similar a las matemáticas financieras. Al respecto, Kiyosi Itô (1915-), uno de los matemáticos más destacados del siglo XX y progenitor del cálculo estocástico, relata⁸ cómo nació su interés por la probabilidad:

“Desde que inicié mis estudios en matemáticas (a principios de la década de los treinta) me atraía mucho la idea de descubrir las leyes estadísticas que residían en los fenómenos aleatorios. Yo sabía que la teoría de la probabilidad era el medio para describir dichos fenómenos y, por lo tanto, me aboque a ella. En aquella época, pocos matemáticos veían a la probabilidad como una disciplina con rigor matemático. Cuando era estudiante, había pocos investigadores en probabilidad, entre ellos Andrei Kolmogorov de Rusia y Paul Lévy de Francia”.

⁸ Ito, K. (1998). My Sixty Years in Studies of Probability Theory. Speech of the Kyoto Prize in Basic Sciences.

9.5 Robert Brown, breve reseña histórica del movimiento Browniano

En 1827, el médico y botánico escocés Robert Brown (1773-1858), mientras examinaba partículas de polen (de *Clarckia Pulchella*) en el microscopio, observó que cuando éstas se encontraban suspendidas en agua y en otros líquidos, se movían sin cesar en forma errática. En un principio, Brown pensó que las partículas tenían movimiento propio e incluso vida. Posteriormente, el fenómeno se asoció no sólo con partículas de polen, sino también con partículas de materia inorgánica como polvo fino de algunos minerales (vidrio, carbón, roca, etc.). Su investigación “A Brief Account on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies” fue publicada en el “Edinburgh New Philosophical Journal”, July-September (1828), pp. 358-371. Debido a lo atractivo del tema, las investigaciones en el área se multiplicaron en un intento de explicar el fenómeno con causas muy diversas: la atracción y repulsión entre partículas suspendidas, la inestabilidad del equilibrio del líquido en el que las partículas se encontraban suspendidas, la acción capilar de las partículas e incluso la presencia de burbujas minúsculas en el líquido o en las partículas. Sin embargo, muchas de estas posibilidades fueron rechazadas casi de inmediato y muchas otras aparecieron sin una buena explicación.

9.6 De Robert Brown a Albert Einstein

Durante casi dos siglos no se produjo una explicación satisfactoria de lo que causaba el movimiento Browniano. No fue sino hasta principios del siglo XX cuando se demostró que el movimiento irregular de las partículas de polen se debía al golpeteo aleatorio de las moléculas invisibles de agua sobre las partículas de polen.

En 1905, el físico judío-alemán Albert Einstein (1879-1955), escribe tres artículos seminales en física sobre el efecto fotoeléctrico, la relatividad especial, y la mecánica estadística. Por el primero, la Academia Sueca le otorgó el premio Nobel en 1921, por el segundo obtuvo el reconocimiento de unificar la mecánica clásica con la electrodinámica y por el tercero la satisfacción de haber resuelto un problema que llevaba casi dos siglos sin respuesta, el movimiento Browniano. Einstein proporcionó la explicación y formulación matemática del movimiento Browniano, de la cual se deriva que la desviación estándar del desplazamiento de una partícula suspendida en un líquido, en un tiempo dado, es proporcional a la raíz cuadrada de dicho tiempo. Es importante señalar que Bachelier se anticipó a Einstein con una formulación matemática del movimiento Browniano, tan elegante como la de Einstein, abordando un problema completamente diferente al del movimiento errático de partículas de polen suspendidas en agua.

9.7 Paul Samuelson y Louis Bachelier (el reencuentro de las estrellas)

Una de las limitaciones más importantes del trabajo de Bachelier es que los precios de los activos pueden tomar valores negativos. Este inconveniente es enmendado por Paul (Anthony) Samuelson⁹ hasta 1965. De hecho, Paul Samuelson a través de su trabajo sobre la valuación de warrants¹⁰ da a conocer la investigación de Bachelier. Alrededor de 1960, Samuelson, en una visita a la Sorbonne, lee la tesis de Bachelier y este acontecimiento influye de manera fundamental en su trabajo posterior sobre precios de opciones.

En 1965, Paul Samuelson publica su artículo “Rational Theory of Warrant Prices”, en donde se introduce el concepto de movimiento económico Browniano, lo que en la actualidad se conoce como movimiento geométrico Browniano. Cuando Samuelson resuelve el problema de Bachelier, eliminando la posibilidad de que un activo tenga precios negativos, se crean nuevos inconvenientes con la aparición de parámetros desconocidos. En el artículo de Samuelson en donde el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano y el precio de la

⁹ Premio Nobel de economía en 1970. El trabajo de Paul Samuelson es considerado crucial para el desarrollo de la teoría económica moderna. En su obra “Foundations of Economic Analysis” publicada en 1947 establece la formulación matemática de muchos de los conceptos esenciales de la disciplina económica. A partir de su trabajo, la matemática ha sido el medio para que la teoría económica pueda expresarse.

¹⁰ Un warrant es un contrato de opción que emite una empresa y que otorga el derecho de comprar sus acciones a un precio preestablecido y dentro de un plazo determinado. Cuando el warrant se acompaña de la emisión de un bono, el contrato otorga el derecho de convertir el bono en acciones. Los warrants tienen vencimientos que oscilan, usualmente, entre 2 y 12 años.

opción se calcula como el valor presente de la esperanza del pago al vencimiento, el valor de la opción depende de dos parámetros desconocidos. El primer parámetro es el rendimiento medio esperado del subyacente, el cual es un parámetro de tendencia relacionado con las preferencias al riesgo de los agentes. El segundo, es el rendimiento que pagan las opciones que se utiliza para traer a valor presente el pago esperado de la opción al vencimiento.

9.8 Robert Merton, Fischer Black y Myron Scholes (La fórmula perfecta)

En 1973, Fischer Black y Myron Scholes publicaron su artículo “The Pricing of Options and Corporate Liabilities” en el “Journal of Political Economy”. Posiblemente, la selección del “Journal” fue poco afortunada o inadecuada para el título del trabajo. La investigación estuvo en proceso de dictaminación por dicho “Journal” durante casi dos años. Robert Merton, Eugene Fama y Merton Miller ya habían revisado el trabajo de Black y Scholes y amparaban la relevancia del mismo. Bajo el supuesto de equilibrio general, Black y Scholes obtuvieron una fórmula para valuar una opción europea sobre una acción que no paga dividendos, y cuyo precio es conducido por un movimiento geométrico Browniano. Los inconvenientes del artículo de Samuelson fueron entonces corregidos, ya no hay parámetros desconocidos en el precio de la opción y, más importante aún, no surgieron limitaciones adicionales. La fórmula perfecta se había encontrado. En el mismo artículo, Black y Scholes proporcionan una derivación alternativa de su fórmula de valuación empleando el CAPM (Capital Asset Pricing Model).

En su artículo Black y Scholes obtienen una ecuación diferencial parcial de segundo orden, parabólica y lineal, cuya solución es el precio de una opción europea cuando la condición final es el valor intrínseco de la opción. En la investigación de Black y Scholes, esta ecuación diferencial parcial es transformada en la ecuación de difusión de calor, la cual tiene soluciones explícitas. Desde entonces, la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes ha sido muy popular, pues representa la base para valuar muchos y muy diversos productos derivados, ya que para diferentes condiciones de frontera, sus soluciones representan los precios de muchos productos derivados disponibles en el mercado.

Sin duda, es también importante destacar el artículo de Robert Merton, “Theory of Rational Option Pricing” publicado en 1973 en el “Bell Journal of Economics and Management Science”, en donde se obtienen resultados similares a los de Black y Scholes y varias extensiones. Merton continuó su trabajo sobre valuación de opciones en una serie de artículos verdaderamente impresionantes.

Por sus excepcionales contribuciones a lo que hoy se conoce como matemáticas financieras en tiempo continuo, Robert Merton y Myron Scholes se hicieron acreedores al premio Nobel en 1997. Tristemente, para entonces Fischer Black tenía dos años de fallecido. En consideración a las contribuciones de Merton, el modelo Black y Scholes, bien podría llamarse de Black, Merton y Scholes. Es también justo mencionar que Robert Merton y Fischer Black se han distinguido por la cantidad y calidad de sus contribuciones tanto a las finanzas como a la economía.

A continuación se revisan, con cierto detalle, las investigaciones de Bachelier, Samuelson, Black, Scholes y Merton. Con el propósito de que el lector pueda seguir el proceso evolutivo de las ideas y formulaciones, se simplifican algunos de los supuestos originales y se utiliza la notación convencional moderna. La notación empleada por Bachelier en ocasiones es complicada y difícil de seguir.

9.9 La tesis de Bachelier

La primera parte de su tesis contiene una descripción de los productos derivados disponibles en el mercado francés en su tiempo, tales como contratos forward y opciones. Posteriormente, desarrolla un modelo probabilista del movimiento del precio de un activo y establece el principio de valuación de que la “esperanza condicional de la ganancia del especulador es cero”. El término condicional se refiere a que la información actual es tomada como dada. Implícitamente, Bachelier, acepta en este principio que el mercado valía activos utilizando martingalas. Asimismo, establece que el precio evoluciona como un proceso de Markov homogéneo en el tiempo. También, muestra que la función de densidad asociada a este proceso satisface la condición conocida, actualmente, como ecuación Chapman-Kolmogorov y verifica que la densidad Gaussiana con varianza creciente linealmente en el tiempo es solución de esta ecuación. No discute la unicidad,

pero da algunos argumentos para confirmar su conclusión. Es importante destacar que Bachelier muestra que la familia de funciones de densidad asociadas al proceso que conduce el precio satisface la ecuación de calor. Por último, el modelo probabilista que describe el movimiento del precio de un activo es aplicado para valuar varios tipos de opciones (francesas) cuyas primas se pagan al vencimiento.¹¹ El razonamiento de Bachelier no es muy riguroso, pero sus argumentos intuitivos son excelentes y, básicamente, correctos.

9.9.1 Ley de probabilidad del precio de un activo

En esta sección se presenta el modelo probabilista desarrollado por Bachelier para estudiar la dinámica estocástica del precio de un activo. Para ello, se utiliza la notación convencional moderna.

Sea S_{t_1} el precio de un activo en el tiempo $t_1 > 0$. Suponga que S_{t_1} es una variable aleatoria definida sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Asimismo, suponga que S_{t_1} , tiene una función de densidad condicional $f_{S_{t_1}|S_0}(s|S_0)$, entonces la probabilidad de que en el tiempo t_1 , el precio del activo, S_{t_1} , se encuentre en el intervalo $[s, s + ds]$, dado S_0 , se puede escribir como

$$\mathbb{P}\{s \leq S_{t_1} \leq s + ds \mid S_0\} = \int_s^{s+ds} f_{S_{t_1}|S_0}(u|S_0)du = f_{S_{t_1}|S_0}(s|S_0)ds + o(ds), \quad (9.1)$$

donde $o(ds)/ds \rightarrow 0$ cuando $ds \rightarrow 0$. En lo que sigue, es conveniente denotar la cantidad $f_{S_{t_1}|S_0}(s|S_0)ds$ mediante $p(s, t_1|S_0, 0)ds$. Así,

$$\mathbb{P}\{s \leq S_{t_1} \leq s + ds \mid S_0\} \approx p(s, t_1|S_0, 0)ds. \quad (9.2)$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{u \leq S_{t_2} + s \leq u + du \mid S_{t_1} = s\} \\ &= \mathbb{P}\{u - s \leq S_{t_2} \leq u - s + du \mid S_{t_1} = s\} \\ &= f_{S_{t_1+t_2}|S_{t_1}}(u|S_{t_1})du + o(du). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Si se denota $f_{S_{t_1+t_2}|S_{t_1}}(u|S_{t_1})$ por $p(u, t_1 + t_2|s, t_1)du$, se tiene que

$$\mathbb{P}\{u \leq S_{t_2} + s \leq u + du \mid S_{t_1}\} \approx p(u, t_1 + t_2|s, t_1)du. \quad (9.4)$$

De esta manera, la probabilidad condicional de que $S_{t_1+t_2}$ se encuentre en $[u + du]$, dado S_0 , se calcula como

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{u \leq S_{t_1+t_2} \leq u + du \mid S_0\} \\ &= \int_{s \in \mathbb{R}} \mathbb{P}\{u \leq S_{t_2} + s \leq u + du \mid S_{t_1} = s\} \mathbb{P}\{s \leq S_{t_1} \leq s + ds \mid S_0\}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

¹¹ Este tipo de opciones no debe confundirse con las opciones parisinas (o parisienses), las cuales son esencialmente una combinación entre las opciones con barreras y las asiáticas. Las opciones parisinas tienen características predominantes de las opciones con barreras, ya que pueden activarse o desactivarse (surge o extingue) cuando el subyacente alcanza una barrera preestablecida. La característica que las opciones parisinas comparten con las opciones asiáticas es que el subyacente es un valor extremo (máximo o mínimo) del precio de un activo, el cual además debe permanecer fuera o dentro de la barrera por un tiempo predeterminado. Hubiera sido realmente sorprendente, e impresionante, que Bachelier estudiara este tipo de opciones.

9.9.2 Ecuación de Chapman-Kolmogorov

En virtud de (9.2) y (9.4) y bajo el supuesto de que los errores de aproximación son despreciables, la ecuación (9.5) puede escribirse como

$$\begin{aligned} p(u, t_1 + t_2 | S_0, 0) du &= \int_{s \in \mathbb{R}} p(u, t_1 + t_2 | s, t_1) p(s, t_1 | S_0, 0) du ds \\ &\quad \text{ó} \\ p(u, t_1 + t_2 | S_0, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(u, t_1 + t_2 | s, t_1) p(s, t_1 | S_0, 0) ds. \end{aligned} \quad (9.6)$$

La expresión anterior es conocida como ecuación de Chapman-Kolmogorov (para el caso continuo). La única función que satisface (9.5) está dada por

$$p(u, t + h | s, h) = q(t) e^{-\pi q(t)^2 (u-s)^2}, \quad (9.7)$$

donde $q(\cdot)$ es una función del tiempo por determinar. Observe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(u, t + h | s, h) du = \int_{-\infty}^{\infty} q(t) e^{-\pi q(t)^2 (u-s)^2} du = 1.$$

En particular,¹²

$$p(s, t_1 | S_0, 0) = q(t_1) e^{-\pi q(t_1)^2 (s-S_0)^2}. \quad (9.8)$$

Observe que si $s = 0$, se tiene que

$$p(0, t_1 | S_0, 0) = q(t_1).$$

De la misma forma,

$$p(u, t_1 + t_2 | s, t_1) = q(t_2) e^{-\pi q(t_2)^2 (u-s)^2}. \quad (9.9)$$

A continuación se verifica que (9.7) satisface (9.6). Observe primero que, a partir de (9.8) y (9.9), se tiene que

$$\begin{aligned} &p(u, t_1 + t_2 | S_0, 0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} q(t_2) e^{-\pi q(t_2)^2 (u-s)^2} q(t_1) e^{-\pi q(t_1)^2 (s-S_0)^2} ds \\ &= q(t_1) q(t_2) e^{-\pi [q(t_2)^2 u^2 + q(t_1)^2 S_0^2]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi [(q(t_1)^2 + q(t_2)^2)s^2 + 2(q(t_2)^2 u + q(t_1)^2 S_0)s]} ds. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Si se define el cambio de variable

$$w = s \sqrt{q(t_1)^2 + q(t_2)^2} - \frac{q(t_2)^2 u + q(t_1)^2 S_0}{\sqrt{q(t_1)^2 + q(t_2)^2}},$$

se sigue que

$$w^2 = s^2 [q(t_1)^2 + q(t_2)^2] - 2[q(t_2)^2 u + q(t_1)^2 S_0] s + \frac{[q(t_2)^2 u + q(t_1)^2 S_0]^2}{q(t_1)^2 + q(t_2)^2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} &p(u, t_1 + t_2 | S_0, 0) \\ &= \frac{q(t_1) q(t_2)}{\sqrt{q(t_1)^2 + q(t_2)^2}} \exp \left\{ -\pi [q(t_2)^2 u^2 + q(t_1)^2 S_0^2] + \frac{\pi [q(t_2)^2 u + q(t_1)^2 S_0]^2}{q(t_1)^2 + q(t_2)^2} \right\}, \end{aligned}$$

¹² Bachelier, por simplicidad, supone $S_0=0$.

ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi w^2} dw = 1.$$

En consecuencia,

$$p(u, t_1 + t_2 | S_0, 0) = \frac{q(t_1)q(t_2)}{\sqrt{q(t_1)^2 + q(t_2)^2}} \exp \left\{ -\pi \frac{q(t_1)^2 q(t_2)^2}{q(t_1)^2 + q(t_2)^2} (u - S_0)^2 \right\}. \quad (9.11)$$

Por otro lado, en virtud de (9.7), se obtiene que

$$p(u, t_1 + t_2 | S_0, 0) = q(t_1 + t_2) e^{-\pi q^2(t_1+t_2)^2(s-S_0)^2}. \quad (9.12)$$

Así,

$$q^2(t_1 + t_2) = \frac{q^2(t_1)q^2(t_2)}{q^2(t_1) + q^2(t_2)}. \quad (9.13)$$

Si se igualan las derivadas parciales de (9.13) con respecto de t_1 y t_2 , es decir, si

$$\frac{\partial q^2(t_1 + t_2)}{\partial t_1} = \frac{\partial q^2(t_1 + t_2)}{\partial t_2},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{(q^2(t_1) + q^2(t_2))(2q(t_1)q'(t_1)q^2(t_2)) - q^2(t_1)q^2(t_2)2q(t_1)q'(t_1)}{(q^2(t_1) + q^2(t_2))^2} \\ &= \frac{(q^2(t_1) + q^2(t_2))(2q(t_2)q'(t_2)q^2(t_1)) - q^2(t_1)q^2(t_2)2q(t_2)q'(t_2)}{(q^2(t_1) + q^2(t_2))^2}, \end{aligned}$$

con lo cual se satisface

$$\frac{q'(t_1)}{q^3(t_1)} = \frac{q'(t_2)}{q^3(t_2)}. \quad (9.14)$$

En otras palabras, el cociente $q'(t)/q^3(t)$ es independiente de t , es decir, es independiente del tiempo. Así, $q'(t)/q^3(t) = a = \text{constante}$. La solución de esta ecuación diferencial está dada por

$$q(t) = \frac{b}{\sqrt{t}}, \quad (9.15)$$

donde b es una constante positiva. Si se redefine b como $b = 1/\sqrt{2\pi}$

$$p(u, t + h | s, h) = q(t) e^{-\pi q(t)^2(u-s)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(u-s)^2}{2t} \right\}. \quad (9.16)$$

Si se toma en cuenta que $p(s, t + h | S_h, h) = f_{S_t | S_h}(s | S_h)$, se tiene que

$$f_{S_t | S_0}(s | S_0) = p(s, t | S_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(s-S_0)^2}{2t} \right\}. \quad (9.17)$$

Esta es la función de densidad que obtuvo Bachelier para el precio de un activo financiero con $S_0 = 0$. Por último, observe que la ecuación de Chapman-Kolmogorov se puede escribir, en forma alternativa, como

$$f_{S_{t_1+t_2} | S_0}(s | S_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{S_{t_1+t_2} | S_{t_1}}(s | S_{t_1}) f_{S_{t_1} | S_0}(S_{t_1} | S_0) dS_{t_1}. \quad (9.18)$$

9.9.3 Ecuación de Fourier

Joseph Fourier (1768-1830), de nacionalidad francesa, fue el primero en desarrollar la teoría de conducción del calor. La ecuación de difusión de calor, o simplemente la ecuación de calor, es una ecuación diferencial parcial de segundo orden con soluciones explícitas. Estas soluciones describen cómo se difunde, al transcurrir el tiempo, el calor en una varilla de longitud infinita después de que ha sido calentada en un tiempo inicial.

Con el propósito de obtener la ecuación de difusión de calor que obtuvo Bachelier, los argumentos originales de su tesis se simplifican. Considere la ecuación (9.16)

$$p(u, t|s, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(u-s)^2}{2t} \right\}, \quad (9.19)$$

se tiene que

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{(u-s)^2}{t^2} - \frac{1}{t} \right) p(u, t|s, 0) \quad (9.20)$$

y

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} = \left(\frac{(u-s)^2}{t^2} - \frac{1}{t} \right) p(u, t|s, 0). \quad (9.21)$$

Por lo tanto,

$$2 \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial u^2}, \quad -\infty < u < \infty, \quad t \geq 0. \quad (9.22)$$

Si se define

$$\mathcal{P}(u, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u, t|s, 0) ds,$$

también se cumple, trivialmente, que

$$2 \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial u^2}, \quad -\infty < u < \infty, \quad t \geq 0. \quad (9.23)$$

Evidentemente, si se hace el cambio de variable $t = 2\tau$

$$p(s, 2\tau|u, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{1}{4\tau}(s-u)^2 \right\}$$

y se escribe

$$\mathcal{V}(u, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u, 2\tau|s, 0) ds, \quad (9.24)$$

se sigue que

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial s^2}, \quad -\infty < u < \infty, \quad \tau \geq 0. \quad (9.25)$$

Las ecuaciones (9.22), (9.23) y (9.25) tienen el formato de la ecuación diferencial parcial de Fourier $c^2 \partial \varphi / \partial t = \partial^2 \varphi / \partial u^2$ donde c es una constante. En particular, (9.25) es conocida como la ecuación de difusión de calor si además se impone como restricción $\mathcal{V}(u, 0) \equiv 1$.

9.9.4 Procesos Markovianos

Un proceso estocástico es llamado Markoviano si la distribución de probabilidad de un estado futuro sólo depende de la información actual y no de la anterior. Si se define la variable aleatoria $\Delta^{(h)} S_t = S_{t+h} - S_h$, con $h \geq 0$ arbitrario, se tiene que la distribución de $\Delta^{(h)} S_t$ sólo depende de la información disponible en el tiempo h , es decir, sólo depende del valor de S_h y no de valores anteriores S_m , $m \leq h$. Esto significa que $\Delta^{(h)} S_t$ es un proceso Markoviano.

9.9.5 Procesos Markovianos homogéneos en el tiempo

Observe que, a partir de (9.16), para cualquier $h \geq 0$, se cumple la propiedad

$$p(u, t+h|s, h) = p(u, t|s, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(u-s)^2}{2t} \right\}. \quad (9.26)$$

Si se define ahora la variable aleatoria $\Delta^{(h)}S_t = S_{t+h} - S_h$, con $h \geq 0$ arbitrario, se tiene, a partir de (9.26), que $\Delta^{(h)}$ y $\Delta^{(0)}S_t$ tienen la misma distribución $\mathcal{N}(0, t)$. Es decir, la distribución de $\Delta^{(h)}S_t$ sólo depende de la diferencia entre $t+h$ y h . Si se denota $x = u - s$, entonces

$$p(x, t|0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2t} \right\}.$$

Más generalmente, si h y m son números no negativos arbitrarios, entonces $\Delta^{(h)}S_t$ y $\Delta^{(m)}S_t$ tienen la misma distribución.

9.9.6 Martingalas

Uno de los conceptos más importantes en el estudio de los mercados financieros es el de mercados eficientes, los cuales se definen a través de los procesos martingalas. Observe que en virtud de la condición

$$\mathbb{E}[S_{t+h} - S_h | S_h] = 0,$$

se tiene que

$$\mathbb{E}[S_{t+h} | S_h] = S_h. \quad (9.27)$$

Es decir, el mejor pronóstico de S_{t+h} , dado que su valor actual es S_h , es justamente S_h . Un proceso estocástico, $(S_t)_{t \geq 0}$ que satisface (9.27) para todo $t, h \geq 0$ es llamado una martingala.

9.9.7 Movimiento Browniano

El movimiento Browniano, así como sus aspectos teóricos y prácticos, es objeto de numerosos estudios en muchas y muy diversas áreas de las matemáticas financieras. Sin lugar a dudas, el movimiento Browniano se encuentra implícita o explícitamente en casi toda la teoría financiera en tiempo continuo. Para ser más precisos el movimiento Browniano ocupa el 99% en la teoría de valuación de portafolios y productos derivados en tiempo continuo; el 1% restante se refiere a detalles sin importancia.

El antecedente de lo que, actualmente, se conoce como movimiento Browniano se encuentra en el trabajo de Bachelier (1900) y anteriormente en el de Jules Regnault (1863). Considere de nuevo la función de densidad que obtuvo Bachelier, incluyendo un parámetro de volatilidad σ , para el precio de un activo financiero:

$$f_{S_T|S_0}(s|S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \exp \left\{ -\frac{s^2}{2\sigma^2 t} \right\}, \quad t \geq 0, \quad (9.28)$$

con $S_0 = 0$. Observe que lo anterior es equivalente a escribir $S_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma t)$. Si se define $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, entonces se puede escribir $S_t = \sigma W_t$. En este caso, si $t = 0$, entonces $W_0 \equiv 0$. Si ahora se define $\Delta^{(h)}S_t = S_{t+h} - S_t$ y $\Delta^{(h)}W_t = W_{t+h} - W_t$, $h > 0$, se sigue que

$$\Delta^{(h)}S_t = \sigma \Delta^{(h)}W_t. \quad (9.29)$$

Por último, observe que si los cambios son infinitesimales, la ecuación (9.29) puede ser reemplazada por

$$dS_t = \sigma dW_t, \quad dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt), \quad (9.30)$$

lo cual es más acorde con la notación moderna.

9.9.8 Valuación de opciones (francesas)

En esta sección se emplea el modelo probabilista del precio de un activo para valuar un tipo especial de opciones, las opciones francesas, cuya prima se paga al vencimiento.

Una opción (financiera) de compra, o contrato de opción de compra, es un acuerdo entre dos partes que obliga (legalmente) a una de las partes a vender un activo financiero, mientras que a la contraparte le otorga el derecho, mas no la obligación, de comprar dicho activo a un precio preestablecido en una fecha futura. Se supone que la compra-venta sólo se puede llevar a cabo en la fecha de vencimiento. Se acostumbra decir que el comprador toma una posición larga y el vendedor una posición corta.

Suponga que el contrato de opción se establece al tiempo t (el presente) y que la compra-venta del activo a un precio predeterminado, K , se lleva a cabo en una fecha futura, T . El precio pactado, K , es llamado precio de ejercicio (de la opción). En este caso, es importante mencionar que en el momento en que se celebra el contrato, no se paga la prima (o precio del derecho) sino hasta el vencimiento. Un agente, con expectativas a la alza, que piensa que el precio del activo aumentará, puede especular tomando una posición larga en un contrato de opción sobre dicho activo. Sea S_T el precio del activo financiero en la fecha de vencimiento. Si $-\infty < S_T < K$, entonces la posición larga no ejerce la opción de compra. Mientras que si $S_T > K$, la posición larga ejerce la opción obteniendo una ganancia $S_T - K$. En cualquier caso se paga la prima \mathcal{C} . El principio que establece Bachelier para valuar la opción es que la esperanza de la ganancia del especulador (la posición larga) es cero,¹³ es decir,

$$\int_{-\infty}^K -\mathcal{C} f_{S_T|S_0}(s|S_0)ds + \int_K^{\infty} (s - K - \mathcal{C}) f_{S_T|S_0}(s|S_0)ds = 0, \quad (9.31)$$

donde

$$f_{S_T|S_0}(s|S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \exp\left\{-\frac{(s-S_0)^2}{2\sigma^2 t}\right\}.$$

Se ha introducido el parámetro de volatilidad σ para darle, al planteamiento de Bachelier, un pequeño toque de modernidad. La ecuación (9.31) conduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \int_K^{\infty} (s - K) f_{S_T|S_0}(s|S_0)ds \\ &= \int_K^{\infty} s f_{S_T|S_0}(s|S_0)ds - K \mathbb{P}\{S_T \geq K\} \\ &= \int_K^{\infty} s f_{S_T|S_0}(s|S_0)ds - K \Phi(-K/\sigma\sqrt{T}), \end{aligned} \quad (9.32)$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar. Evidentemente, $\Phi(-K/\sigma\sqrt{T})$ es la probabilidad de ejercer la opción. Por supuesto, si la prima tuviera que pagarse en el momento en que se inicia el contrato, el precio c estaría dado por

$$c = e^{-rT} \int_K^{\infty} s f_{S_T|S_0}(s|S_0)ds - e^{-rT} K \Phi(-K/\sigma\sqrt{T}), \quad (9.33)$$

donde r es una tasa de interés constante y libre de riesgo. Observe que la ecuación (9.33) es independiente de parámetros relacionados con las preferencias al riesgo de los agentes que participan en el mercado. Por otro lado, el rendimiento medio esperado de cualquier activo, incluyendo la opción, es la tasa de interés libre de riesgo, r , es decir, los agentes son neutrales al riesgo. Por esta razón, el precio de la opción se descuenta a la tasa r .

¹³ John Maynard Keynes, 30 años después, en su libro *Treatise on Money* (1930), analiza una situación similar, a la de Bachelier, para un productor-especulador que toma una posición larga en un contrato forward. Keynes establece que si la oferta de un bien es igual a su demanda, entonces el precio de contado, S_T , tiene que ser mayor que el precio forward, K , ya que la diferencia, $S_T - K$, tiene que compensar el riesgo por fluctuaciones en el precio durante el periodo de producción (situación que se conoce como “normal backwardation”). Si S_T es una variable aleatoria y el productor-especulador toma una posición larga en un contrato forward la esperanza de la ganancia del productor-especulador es cero, es decir, $E[S_T - K | S_0] = 0$, lo cual implica que, en equilibrio, $K = E[S_T | S_0]$.

9.10 Albert Einstein y el movimiento irregular de una partícula suspendida en un líquido y su relación con la ecuación de difusión de calor

En esta sección se presentan las ideas principales del trabajo de Albert Einstein¹⁴ sobre el movimiento irregular de una partícula suspendida en un líquido y su relación con la ecuación de difusión de calor.

Considere una partícula suspendida en un líquido estacionario. Se supone que los movimientos de la partícula en intervalos diferentes de tiempo son procesos independientes. En lo que sigue, el movimiento de la partícula se referirá a un sistema de coordenadas cuyo origen coincide con la posición $S_0 = 0$ del centro de gravedad de la partícula en cuestión, al tiempo 0. Suponga que la posición, S_t , de la partícula en el tiempo $t > 0$ es una variable aleatoria que puede tomar valores positivos o negativos con una función de densidad de probabilidad tal que

$$\phi(s, 0) \equiv p(s, t|0, 0) = f_{S_T|S_0}(s|S_0) \quad (9.34)$$

y

$$\phi(s, 0) = \phi(-s, 0).$$

Obviamente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(s, 0) ds = 1.$$

Observe que en el planteamiento de Einstein se está utilizando la misma notación que se utilizó para exhibir el trabajo de Bachelier a fin de comparar los modelos de ambos. Si S_{t+h} es la posición de la partícula en el tiempo $t + h$, se sigue que

$$\phi(u, t+h) du = du \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u-s, t) \phi(s, 0) ds, \quad (9.35)$$

donde

$$\phi(u, t+h) = p(u, t+h|0, 0) \quad \text{y} \quad \phi(u-s, t) = p(u, t+h|s, t).$$

Ahora bien, si h es pequeña, se tiene que

$$\phi(u, t+h) \approx \phi(u, t) + h \frac{\partial \phi(u, t)}{\partial t}. \quad (9.36)$$

Además, al expandir $\phi(u-s, t)$ en potencias de $-s$, se sigue que

$$\phi(u-s, t) = \phi(u, t) - s \frac{\partial \phi(u, t)}{\partial u} + \frac{1}{2} s^2 \frac{\partial^2 \phi(u, t)}{\partial u^2} - \dots \quad (9.37)$$

Si se sustituyen (9.36) y (9.37) en (9.35) se obtiene que

$$\begin{aligned} \phi(u, t) + h \frac{\partial \phi(u, t)}{\partial t} &\approx \phi(u, t) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s, 0) ds - \frac{\partial \phi(u, t)}{\partial u} \int_{-\infty}^{\infty} s \phi(s, 0) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(u, t)}{\partial u^2} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \phi(s, 0) ds - \dots \end{aligned}$$

Observe que en el lado derecho de la ecuación anterior, el segundo término, cuarto término, etc., desaparecen ya que $\phi(s, 0) = \phi(-s, 0)$. Mientras que el primero, tercero, quinto, etc., son cada vez más pequeños comparados con el anterior. Si se desprecian los errores de aproximación, se puede escribir que

$$\phi(u, t) + h \frac{\partial \phi(u, t)}{\partial t} = \phi(u, t) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s, 0) ds + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(u, t)}{\partial u^2} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \phi(s, 0) ds. \quad (9.38)$$

¹⁴ Albert Einstein (1879-1955), Premio Nobel de física en 1921. En 1905 escribe su ensayo "On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular kinetic theory of heat" (Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen). En esta investigación Einstein muestra que la distribución normal, con varianza creciente linealmente en el tiempo, conduce los movimientos de una partícula suspendida en un líquido homogéneo y estacionario.

Ahora bien, dado que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(s, 0)ds = 1$, la ecuación (9.38) satisface

$$h \frac{\partial \phi(u, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(u, t)}{\partial u^2} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \phi(s, 0)ds.$$

Si se define

$$\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \phi(s, 0)ds = D,$$

se obtiene

$$\frac{\partial \phi(u, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi(u, t)}{\partial u^2}. \quad (9.39)$$

Esta es la ecuación diferencial de difusión de calor. La constante D en (9.39) es conocida como el coeficiente de difusión. Por último, si se imponen las condiciones:

$$\phi(u, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u, t)du = 1,$$

la solución de (9.39) es

$$\phi(u, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-u^2/4Dt}. \quad (9.40)$$

Por último, observe que si se redefine $D = \sigma^2/2$, la ecuación anterior se transforma en

$$\phi(u, t) = p(u, t|0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} e^{-u^2/2\sigma^2t}. \quad (9.41)$$

9.11 El modelo de Samuelson para valuar opciones europeas

En 1965, Paul Samuelson publica su artículo “Rational Theory of Warrant Prices” en el “Industrial Management Review”. El supuesto principal de su investigación es que el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano, lo cual impide que el precio del activo subyacente tome valores negativos.

Suponga que la dinámica estocástica del precio del activo subyacente es conducido por un proceso de la forma

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt), \quad (9.42)$$

donde $\alpha \geq 0$ (agentes adversos al riesgo) es el rendimiento medio esperado del activo y $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea. En este caso, se puede mostrar que la función de densidad de S_T , dado S_0 , está dada por:

$$f_{S_T|S_0}^{(\alpha)}(s|S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_0} \right) - (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)^2 \right\}. \quad (9.43)$$

Es decir, S_T/S_0 tiene distribución lognormal con media $(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ y varianza $\sigma^2 T$; $\ln(S_T/S_0) \sim \mathcal{N}((\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)$. Es decir, S_T es conocido en un sentido probabilista. Es importante destacar que la distribución lognormal satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$f_{S_T|S_0}^{(\alpha)}(s|S_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{S_{T-U}|S_u}^{(\alpha)}(s|S_u) f_{S_u|S_0}^{(\alpha)}(S_u|S_0) dS_u. \quad (9.44)$$

Asimismo, es fácil verificar que

$$\mathbb{E}[S_T|S_0] = \int_0^{\infty} s f_{S_T|S_0}^{(\alpha)}(s|S_0) (s|S_0) ds = S_0 e^{\alpha T}. \quad (9.45)$$

Con un razonamiento similar al de (9.33), el precio de una opción europea de compra con vencimiento en T , $c(S_0, T; \alpha, \beta)$, está dado por

$$\begin{aligned} c(S_0, T; \alpha, \beta) &= e^{-\beta T} \int_0^\infty \max(s - K, 0) f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s|S_t) ds \\ &= e^{-\beta T} \int_K^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s|S_t) ds \\ &= e^{-\beta T} \int_K^\infty s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s|S_t) ds - K e^{-\beta T} \mathbb{P}\{S_T \geq K\} \\ &= e^{-\beta T} \int_K^\infty s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s|S_t) ds - K e^{-\beta T} \Phi(d), \end{aligned} \quad (9.46)$$

donde β es el rendimiento que pagan las opciones, $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar y

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Se supone que $\beta \geq \alpha \geq 0$. La notación del pago de la opción al vencimiento “ $\max(s - K, 0)$ ” utilizada actualmente fue introducida por Samuelson. Observe que la fórmula (9.46) depende de dos parámetros desconocidos, a saber, α y β . El parámetro α es el rendimiento medio esperado del subyacente, el cual es un parámetro de tendencia relacionado con las preferencias al riesgo de los agentes. El parámetro β es el rendimiento que pagan las opciones que se utiliza para traer a valor presente el pago esperado de la opción al vencimiento. Una forma alternativa de escribir (9.46) es

$$\begin{aligned} c(S_0, T; \alpha, \beta) &= e^{-\beta T} \int_K^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s|S_t) ds \\ &= e^{-\beta T} \int_0^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s|S_t) ds - e^{-\beta T} \int_0^K (s - K) f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s|S_t) ds \\ &= e^{-\beta T} (S_0 e^{\alpha T} - K) + e^{-\beta T} \left(K \mathbb{P}\{S_T \leq K\} - \int_0^K s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s|S_t) ds \right) \\ &= S_0 e^{(\alpha-\beta)T} - K e^{-\beta T} + e^{-\beta T} \left(K(1 - \Phi(d)) - \int_0^K s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s|S_t) ds \right) \\ &= S_0 e^{(\alpha-\beta)T} - K e^{-\beta T} + e^{-\beta T} \left(K \Phi(-d) - \int_0^K s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s|S_t) ds \right). \end{aligned} \quad (9.47)$$

Observe que si, en particular, $\alpha = \beta$, entonces

$$\begin{aligned} c(S_0, T; \alpha, \beta) &= S_0 - K e^{-\alpha T} + K e^{-\alpha T} \Phi(-d) - e^{-\alpha T} \int_0^K s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s|S_t) ds \\ &= S_0 - e^{-\alpha T} \int_0^K s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s|S_t) ds - K e^{-\alpha T} \Phi(d) \\ &= S_0 e^{-\alpha T} \int_K^\infty s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s|S_t) ds - K e^{-\alpha T} \Phi(d) \\ &= S_0 \Phi(d + \sigma\sqrt{T}) - K e^{-\alpha T} \Phi(d). \end{aligned} \quad (9.48)$$

Si se define $\delta = d + \sigma\sqrt{T}$, entonces la expresión anterior puede reescribirse como

$$c(S_0, T; \alpha, \beta) = S_0 \Phi(\delta) - K e^{-\alpha T} \Phi(\delta - \sigma\sqrt{T}).$$

9.11.1 El modelo de Samuelson de valuación de opciones perpetuas

En esta sección se presentan los resultados del trabajo de Samuelson sobre valuación de opciones perpetuas. Una opción perpetua es aquella para la cual $T \rightarrow \infty$. Observe que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi(d) = 0$$

y

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi(d + \sigma\sqrt{T}) = 1,$$

en cuyo caso, en virtud de (9.48), el precio de la opción perpetua $c(S_0, \infty; \alpha, \alpha) = S_0$. En el caso general, cuando $\beta > \alpha$, Samuelson proporciona la siguiente fórmula exacta para el precio de una opción perpetua

$$c(S_0, \infty; \alpha, \beta) = \frac{(\gamma - 1)^{\gamma-1}}{\gamma^\gamma} S_0^\gamma, \quad (9.49)$$

donde

$$\gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sigma^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\beta}{\sigma^2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} \right)}.$$

Por último, es fácil demostrar que si se selecciona $\alpha = \sigma^2/2$, se tiene que

$$\gamma = \sqrt{\beta/\alpha}.$$

9.12 El modelo de Fisher Black y Myron Scholes

A principios de la década de los setentas, Fisher Black y Myron Scholes publicaron su artículo “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”. En su investigación, bajo condiciones de equilibrio (condiciones de no arbitraje), desarrollaron un modelo para valuar opciones europeas sobre una acción que no paga dividendos y cuya dinámica es conducida por el movimiento geométrico Browniano, como en el modelo de Samuelson. En esta investigación, afortunadamente, los parámetros desconocidos α y β , considerados en el trabajo de Samuelson, ya no aparecen en el precio de la opción. En este mismo artículo, Black y Scholes proporcionan una derivación alternativa de su fórmula de valuación empleando el CAPM (Capital Asset Pricing Model) en una versión en tiempo continuo.

Black y Scholes obtienen una ecuación diferencial parcial de segundo orden (parabólica) y lineal cuya solución es el precio de una opción europea. La condición final es el valor intrínseco del instrumento. Esta ecuación es muy popular en el sector financiero y representa la base para valuar muy diversos productos derivados, ya que para diferentes condiciones de frontera, sus soluciones representan los precios de muchos derivados financieros que se encuentran disponibles en el mercado.

Los supuestos básicos (o condiciones ideales de los mercados de acciones y opciones) del modelo de Black y Scholes son:

- i) el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato;
- ii) el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano, es decir, el precio es lognormal;
- iii) la volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo;
- iv) las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas;
- v) el mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente siempre se puede comprar y vender en cualquier fracción del título;
- vi) no hay costos de transacción (comisiones e impuestos);
- vii) el mercado opera en forma continua, es decir, no hay sábados, domingos ni días festivos;
- viii) existe un mercado de crédito, un sistema bancario, en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante para todos los plazos, y libre de riesgo (tasa de interés pasiva igual a la activa);

- ix) todos los agentes comparten exactamente la misma información, es decir, la información es simétrica; y
- x) los mercados están en equilibrio, es decir, no existen oportunidades de arbitraje.

Bajo estos supuestos, el precio de la opción dependerá sólo del precio actual de la acción, del tiempo de vencimiento y de un conjunto de parámetros conocidos. Asimismo, con base en los supuestos anteriores, es posible crear una estrategia de cobertura (perfecta y dinámica) consistente de una posición larga en la acción y una posición corta en la opción. El valor de una opción europea de compra es claramente función de los diferentes parámetros que intervienen en los términos del contrato, tales como: el precio de ejercicio, K , la fecha de vencimiento, T , el precio de contado de la acción en el momento en que se establece el contrato, S_t , la volatilidad, σ , y la tasa interés, r . Por lo anterior, el precio de la opción se puede escribir como

$$c = c(S_t, t; K, T, \sigma, r).$$

En lo que sigue, no se hará mención explícita a los parámetros, T, K, r , y σ , excepto cuando sea necesario. En otras palabras, el valor de la opción se denotará simplemente como $c = c(S_t, t)$.

Suponga que la dinámica del precio del activo subyacente es conducido por un proceso de la forma

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt), \quad (9.50)$$

donde μ y $\sigma > 0$ son, respectivamente, el rendimiento medio esperado y la volatilidad instantánea del activo. Considere ahora un portafolio con w_1 unidades del activo subyacente de precio S_t y w_2 unidades de una opción de compra sobre el subyacente de precio $c(S_t, t)$. Si Π_t denota el valor actual del portafolio, entonces

$$\Pi_t = w_1 S_t + w_2 c(S_t, t). \quad (9.51)$$

El cambio en el valor del portafolio, durante el instante dt , debido a fluctuaciones propias del mercado está dado por

$$d\Pi_t = w_1 dS_t + w_2 dc. \quad (9.52)$$

Si, en particular, se eligen $w_1 = 1$ y

$$w_2 = -\frac{1}{\frac{\partial c}{\partial S_t}}, \quad (9.53)$$

se sigue que

$$d\Pi_t = dS_t - \frac{1}{\frac{\partial c}{\partial S_t}} dc. \quad (9.54)$$

A continuación se muestra que la selección anterior de w_1 y w_2 diversifica (elimina) completamente el riesgo de mercado. Observe también que como S_t cambia con el tiempo, el número de opciones en la posición corta también cambia con el tiempo, lo que hace que la cobertura sea dinámica. Si se expande dc en serie de Taylor hasta términos de segundo orden se tiene que¹⁵

$$dc = \frac{\partial c}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} dt. \quad (9.55)$$

Si se sustituye la ecuación (9.55) en (9.54), se obtiene que el cambio en el valor del portafolio es

$$d\Pi_t = -\frac{1}{\frac{\partial c}{\partial S_t}} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt. \quad (9.56)$$

Como el rendimiento del portafolio es conocido éste tiene que ser igual a $r dt$, en condiciones de equilibrio. Por lo tanto,

$$d\Pi_t = \left(S_t - \frac{1}{\frac{\partial c}{\partial S_t}} c \right) r dt. \quad (9.57)$$

¹⁵ En este caso, se aplica la propiedad $dW_t^2 = dt$, la cual será justificada en un capítulo posterior.

Después de igualar las ecuaciones (9.56) y (9.57), se tiene que

$$\frac{\partial c}{\partial t} = rc - rS_t \frac{\partial c}{\partial S_t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}, \quad (9.58)$$

junto con la condición final

$$c(S_t, t) = \max(S_t - K, 0). \quad (9.59)$$

Con el propósito de resolver la ecuación diferencial parcial anterior, Black y Scholes proponen la siguiente sustitución:

$$c(S_t, t) = B(t, T)G(u(S_t, \tau), \tau), \quad (9.60)$$

donde

$$B(t, T) = e^{-r(T-t)},$$

$$u \equiv u(S_t, \tau) = \frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \tau$$

y

$$\tau = \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 (T - t).$$

Si se calculan las derivadas parciales que aparecen en la ecuación diferencial parcial (9.58), se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= rBG + B \left(\frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \\ &= rBG - B \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 - B \frac{\partial G}{\partial \tau} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial S_t} &= B \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial S_t} \\ &= B \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{1}{S_t} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} &= -B \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{1}{S_t^2} + B \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{1}{S_t} \frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right) \\ &= -B \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{1}{S_t^2} + B \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right)^2 \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 \frac{1}{S_t^2}. \end{aligned}$$

Después de sustituir las derivadas parciales anteriores en la ecuación (9.58), se tiene que

$$\begin{aligned} &rBG - B \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 - B \frac{\partial G}{\partial \tau} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 \\ &+ rS_t \left[B \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{1}{S_t} \right] \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \left[-B \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \frac{1}{S_t^2} + B \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right)^2 \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 \frac{1}{S_t^2} \right] - rc = 0. \end{aligned}$$

Dado que $rc = rBG$, la ecuación anterior se simplifica de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &- \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 - \frac{\partial G}{\partial \tau} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 \\ &+ r \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \\ &- \frac{\partial G}{\partial u} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Al agrupar términos, se tiene

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{\partial G}{\partial \tau} \right) \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) (r - \frac{1}{2}\sigma^2)^2 + \underbrace{\frac{\partial G}{\partial u} \left(-\frac{2}{\sigma^2} (r - \frac{1}{2}\sigma^2)^2 + r \left(\frac{2}{\sigma^2} \right) (r - \frac{1}{2}\sigma^2) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \right)}_{||} = 0.$$

Por lo tanto, la función G satisface la siguiente ecuación de calor:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}. \quad (9.61)$$

Observe ahora que si $t = T$, entonces $\tau = 0$, por lo que

$$u = \frac{2}{\sigma^2} (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \ln \left(\frac{S_t}{K} \right).$$

En consecuencia,

$$S_t = K \exp \left\{ \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 u}{r - \frac{1}{2}\sigma^2} \right\}.$$

De esta manera, la condición final de la ecuación de calor está dada por

$$\begin{aligned} G_0(u) &\equiv G(u, 0) = \max \left(K \exp \left\{ \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 u}{r - \frac{1}{2}\sigma^2} \right\} - K, 0 \right) \\ &= K \max \left(\exp \left\{ \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 u}{r - \frac{1}{2}\sigma^2} \right\} - 1, 0 \right). \end{aligned} \quad (9.62)$$

En particular, si $u < 0$, se tiene que $G_0(u) = 0$. En conclusión, la ecuación de calor asociada al precio de la opción y su condición de frontera están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}, \quad -\infty < u < \infty, \quad \tau > 0 \\ G(u, 0) &= G_0(u), \quad -\infty < u < \infty. \end{aligned} \quad (9.63)$$

La solución de la ecuación de calor está dada por

$$\begin{aligned} G(u, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(s) e^{-\frac{1}{2}((s-u)/\sqrt{2\tau})^2} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\Lambda_s}^{\infty} K \left(\exp \left\{ \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 s}{r - \frac{1}{2}\sigma^2} \right\} - 1 \right) e^{-\frac{1}{2}((s-u)/\sqrt{2\tau})^2} ds, \end{aligned} \quad (9.64)$$

donde

$$\Lambda_s = \left\{ s \mid \exp \left\{ \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 s}{r - \frac{1}{2}\sigma^2} \right\} > 1 \right\}.$$

Considere ahora el siguiente cambio de variable:

$$q = \frac{s - u}{\sqrt{2\tau}}.$$

De esta manera, $s = u + q\sqrt{2\tau}$ y

$$ds = \sqrt{2\tau} dq.$$

En consecuencia,

$$G(u, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K \left(e^{\frac{1}{2}\sigma^2(u+q\sqrt{2\tau})/(r-\frac{1}{2}\sigma^2)} - 1 \right) e^{-\frac{1}{2}q^2} \sqrt{2\tau} dq$$

donde

$$\Lambda_q = \left\{ q \mid q > -u/\sqrt{2\tau} \right\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} G(u, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K e^{\frac{1}{2}\sigma^2(u+q\sqrt{2\tau})/(r-\frac{1}{2}\sigma^2)} e^{-\frac{1}{2}q^2} dq - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K e^{-\frac{1}{2}q^2} dq, \\ &= \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2. \end{aligned} \quad (9.65)$$

Observe ahora que

$$\begin{aligned} -u/\sqrt{2\tau} &= -\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sqrt{2\tau}} \right) \\ &= -\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sqrt{2\frac{2}{\sigma^2}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)^2(T-t)}} \right) \\ &= -\frac{2}{\sigma^2} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\frac{2}{\sigma}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\sqrt{T-t}} \right) \\ &= -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Lambda_q &= \left\{ q \mid q > -u/\sqrt{2\tau} \right\} \\ &= \left\{ q \mid q > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\} \\ &= \left\{ q \mid -\infty < q < \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}. \end{aligned} \quad (9.66)$$

De esta manera, la primera integral en (9.65) satisface

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K e^{-\frac{1}{2}q^2} dq = K\Phi(d_2), \quad (9.67)$$

donde

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}q^2} dq$$

es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar. Para calcular la primera integral que aparece en la ecuación (9.65), considere el argumento de la exponencial en el integrando, esto es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2(u + q\sqrt{2\tau})/(r - \frac{1}{2}\sigma^2) &= \frac{\frac{1}{2}\sigma^2}{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)} \left[\frac{2}{\sigma^2} (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \left(\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right) + q\sqrt{2\frac{2}{\sigma^2}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \right] \\ &= \frac{\frac{1}{2}\sigma^2}{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)} \left[\frac{2}{\sigma^2} (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \left(\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + q\sigma\sqrt{T-t} \right) \right] \\ &= \ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}q. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K e^{\ln(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}q} e^{-\frac{1}{2}q^2} dq \\ &= e^{r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} S_t e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}q} e^{-\frac{1}{2}q^2} dq \\ &= S_t e^{r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}q^2 - 2\sigma\sqrt{T-t}q + \sigma^2(T-t)} dq \\ &= S_t e^{r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(q - \sigma\sqrt{T-t})^2} dq. \end{aligned} \tag{9.68}$$

Considere ahora el siguiente cambio de variable $z = q - \sigma\sqrt{T-t}$, así $dz = dq$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= S_t e^{r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_z}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(q - \sigma\sqrt{T-t})^2} dq \\ &= S_t e^{r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_z}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz. \end{aligned} \tag{9.69}$$

Observe ahora que

$$q > -u/\sqrt{2\tau}$$

implica

$$z + \sigma\sqrt{T-t} > -\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

ó

$$z > -\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Lambda_z &= \left\{ z \mid z > -\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\} \\ &= \left\{ z \mid -\infty < z < \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}. \end{aligned} \tag{9.70}$$

De esta manera, se concluye que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= S_t e^{r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_z}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= S_t e^{r(T-t)} \Phi(d_1),\end{aligned}\tag{9.71}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Evidentemente, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$. De las ecuaciones (9.64), (9.67) y (9.71), se tiene que

$$G(u, \tau) = \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = S_t e^{r(T-t)} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2).\tag{9.72}$$

Finalmente, la ecuación (9.60) produce

$$\begin{aligned}c(S_t, t) &= B(t, T)G(u(S_t, \tau), \tau) \\ &= e^{-r(T-t)} \left(S_t e^{r(T-t)} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right) \\ &= S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),\end{aligned}\tag{9.73}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Observe que el valor de la opción es independiente del rendimiento esperado de la acción, μ . De la ecuación (9.73) se puede ver que si el precio de la acción aumenta, mayor será el precio de la opción. Asimismo, un incremento en el periodo de maduración $T-t$ o en la tasa de interés libre de riesgo, r , o bien en la varianza, σ^2 , dará lugar a un incremento en el valor de la opción.

9.12.1 Determinación de la ecuación Black y Scholes mediante el CAPM

A continuación se obtiene la ecuación Black y Scholes (9.73) utilizando el CAPM. El modelo CAPM describe la relación entre el riesgo y el rendimiento esperado de un activo bajo condiciones de equilibrio de mercado.

Suponga, como antes, que la dinámica del precio del activo subyacente está dada por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt).\tag{9.74}$$

De esta manera, el rendimiento del activo es

$$dR_S = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t.\tag{9.75}$$

Para calcular el cambio en el precio de la opción por cambios en S_t , se utiliza la expansión en serie de Taylor hasta términos de segundo orden:

$$\begin{aligned}dc &= \frac{\partial c}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t.\end{aligned}\tag{9.76}$$

El rendimiento de la opción está dado por

$$dR_c = \frac{dc}{c} = \frac{\partial c}{\partial S_t} \frac{dS_t}{S_t} \frac{S_t}{c} = \frac{\partial c}{\partial S_t} dR_S \frac{S_t}{c}. \quad (9.77)$$

De acuerdo con el modelo CAPM los rendimientos de la opción y del activo subyacente satisfacen, respectivamente, las siguientes relaciones lineales con respecto del rendimiento del mercado, dR_M ,

$$E[dR_c] - rdt = \beta_c [E[dR_M] - rdt] \quad (9.78)$$

y

$$E[dR_S] - rdt = \beta_S [E[dR_M] - rdt], \quad (9.79)$$

donde

$$\beta_S = \frac{\text{Cov}(dR_S, dR_M)}{\text{Var}(dR_M)} \quad (9.80)$$

y

$$\begin{aligned} \beta_c &= \frac{\text{Cov}(dR_c, dR_M)}{\text{Var}(dR_M)} \\ &= \frac{\text{Cov}\left(\frac{\partial c}{\partial S_t} dR_S \frac{S_t}{c}, dR_M\right)}{\text{Var}(dR_M)} \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t} \frac{S_t}{c} \frac{\text{Cov}(dR_S, dR_M)}{\text{Var}(dR_M)} \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t} \frac{S_t}{c} \beta_S. \end{aligned} \quad (9.81)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (9.81) y (9.79) en (9.78), se tiene

$$\begin{aligned} E\left[\frac{dc}{c}\right] - rdt &= \beta_c (E[dR_M] - rdt) \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t} \frac{S_t}{c} \beta_S (E[dR_M] - rdt) \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t} \frac{S_t}{c} \beta_S \left(\frac{1}{\beta_S} (E[dR_S] - rdt)\right) \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t} \frac{S_t}{c} (E[dR_S] - rdt), \end{aligned} \quad (9.82)$$

lo cual implica que

$$E[dc] - rcdt = \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t (E[dR_S] - rdt). \quad (9.83)$$

Si se sustituye la ecuación (9.75) en la ecuación (9.83), se tiene que

$$\begin{aligned} E[dc] - rcdt &= \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t (E[dR_S] - rdt) \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \left(E\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] - rdt\right) \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t (E[\mu dt + \sigma dW] - rdt) \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t (\mu - r) dt, \end{aligned} \quad (9.84)$$

donde se ha considerado que $E[dW_t] = 0$. Finalmente, si se sustituye la ecuación (9.76) en la ecuación (9.84) se tiene

$$E\left[\left(\frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2\right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW\right] - rcdt = \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t (\mu - r) dt, \quad (9.85)$$

equivalentemente

$$\frac{\partial c}{\partial t} + rS_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} - rc = 0.$$

9.13 El modelo de Robert Merton

En 1973, Robert Merton publica el artículo de “Theory of Rational Option Pricing” en el “Bell Journal of Economics and Management Science”. En esta investigación se obtienen resultados similares a los de Black y Scholes y varias extensiones, entre las que destacan: tasas de interés estocásticas, pago continuo de dividendos, un análisis de opciones americanas, generalización de la fórmula de Samuelson para opciones perpetuas y la valuación de opciones con barreras. Varios de los supuestos de Black y Scholes se mantienen en el trabajo de Merton. Una diferencia esencial es que en el modelo de Merton no se supone una tasa de interés constante y libre de riesgo, sino un bono cupón cero cuyos rendimientos son gobernados por un proceso de Gauss-Wiener, lo cual genera una estructura de plazos para la tasa de interés.

Se supone que el precio del subyacente, S_t , es conducido por el movimiento geométrico Browniano

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt), \quad (9.86)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es el rendimiento medio de la acción, el cual puede ser una variable aleatoria, y $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea, la cual puede ser una función determinista conocida de t . Asimismo, se supone la existencia de un bono cupón cero cuyo precio al tiempo t , $B_t = B(t, T)$, es conducido también por un movimiento geométrico Browniano de la forma

$$dB_t = \lambda(t, T)B_t dt + \delta(t, T)B_t dV_t, \quad B(T, T) = 1. \quad (9.87)$$

Se supone que los procesos dW_t y dV_t se encuentran correlacionados entre sí, de tal manera que

$$\text{Cov}(dW_t, dV_t) = \rho dt. \quad (9.88)$$

En particular, si $\lambda(t, T) \equiv r$ y $\delta(t, T) \equiv 0$, el precio del bono es

$$B(t, T) = e^{-r(T-t)}. \quad (9.89)$$

Se supone que todos los agentes que participan en el mercado aceptan los valores de λ y σ . Sobre los parámetros de preferencias de los agentes, α y λ , ningún supuesto es hecho.

Por lo anterior, el precio de la opción es función del activo subyacente, del precio del bono cupón cero, del tiempo en que se inicia el contrato, del tiempo de vencimiento y del precio de ejercicio. Concretamente, el precio de la opción satisface $c = c(S_t, B_t, t; T, K)$. El cambio marginal en el precio de la opción, dc , durante el instante dt , se puede expresar a través de una expansión en serie de Taylor hasta términos de segundo orden, esto es,

$$\begin{aligned} dc &= \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial c}{\partial B_t} dB_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial B_t^2} (dB_t)^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} (dt)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial t} (dS_t)(dt) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 c}{\partial B_t \partial t} (dB_t)(dt) + \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial B_t} (dS_t)(dB_t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.90)$$

La sustitución de (9.86)-(9.88) en la ecuación anterior produce

$$\begin{aligned} dc &= \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \alpha S_t + \frac{\partial c}{\partial B_t} \lambda B_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial B_t^2} \delta^2 B_t^2 \right. \\ &\quad \left. + \rho \sigma \delta S_t B_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial B_t} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t + \frac{\partial c}{\partial B_t} \delta B_t dV_t. \end{aligned}$$

Esta última ecuación se puede reescribir como

$$dc = A_1 c dt + A_2 c dW_t + A_3 c dV_t, \quad (9.91)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \alpha S_t + \frac{\partial c}{\partial B_t} \lambda B_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial B^2} \delta^2 B_t^2 \right. \\ &\quad \left. + \rho \sigma \delta S_t B_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial B_t} \right) \\ A_2 &= \frac{\sigma S_t}{c} \frac{\partial c}{\partial S_t} \\ A_3 &= \frac{\delta B_t}{c} \frac{\partial c}{\partial B_t}. \end{aligned} \quad (9.92)$$

Consideré ahora un portafolio formado por acciones, opciones sobre dichas acciones y bonos. Si w_1 es el número de acciones, w_2 es el número de opciones y w_3 es el número de bonos en el portafolio, entonces la inversión total está dada por

$$\Pi_t = w_1 S_t + w_2 c + w_3 B. \quad (9.93)$$

El rendimiento del portafolio satisface

$$\begin{aligned} dR_t \equiv \frac{d\Pi_t}{\Pi_t} &= \left(\frac{w_1 S_t}{\Pi_t} \right) \frac{dS_t}{S_t} + \left(\frac{w_2 c}{\Pi_t} \right) \frac{dc}{c} + \left(\frac{w_3 B_t}{\Pi_t} \right) \frac{dB_t}{B_t} \\ &= \beta_1 \frac{dS_t}{S_t} + \beta_2 \frac{dc}{c} + \beta_3 \frac{dB_t}{B_t}, \end{aligned} \quad (9.94)$$

donde

$$\beta_1 = \frac{w_1 S_t}{\Pi_t}, \quad \beta_2 = \frac{w_2 c}{\Pi_t} \quad \text{y} \quad \beta_3 = \frac{w_3 B_t}{\Pi_t}.$$

Se supone que

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0,$$

es decir, la inversión agregada es cero. Si se sustituyen (9.86), (9.87) y (9.91) en (9.94), se sigue que

$$dR_t = \beta_1 (\alpha dt + \sigma dW_t) + \beta_2 (A_1 dt + A_2 dW_t + A_3 dV_t) + \beta_3 (\lambda dt + \delta dV_t). \quad (9.95)$$

En virtud de que $\beta_3 = -(\beta_1 + \beta_2)$, se tiene que (9.95) se transforma en

$$dR_t = (\beta_1 (\alpha - \lambda) + \beta_2 (A_1 - \lambda)) dt + (\beta_1 \sigma + \beta_2 A_2) dW_t + (\beta_2 A_3 - (\beta_1 + \beta_2) \delta) dV_t. \quad (9.96)$$

A continuación se eligen β_1 y β_2 de tal manera que los coeficientes de dW_t y dV_t se anulen, es decir,

$$\beta_1 \sigma + \beta_2 A_2 = 0 \quad (9.97)$$

y

$$-\beta_1 \delta + (A_3 - \delta) \beta_2 = 0. \quad (9.98)$$

Asimismo, si se supone que los mercados están en equilibrio y la inversión agregada es cero, entonces el coeficiente de dt (9.96) también es cero ya que en caso contrario se estarían generando oportunidades de arbitraje. Así,

$$\beta_1 (\alpha - \lambda) + \beta_2 (A_1 - \lambda) = 0. \quad (9.99)$$

Las condiciones (9.97)-(9.99) se pueden expresar matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} \alpha - \lambda & A_1 - \lambda \\ \sigma & A_2 \\ -\delta_1 & A_3 - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una solución no trivial del sistema anterior, $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, existe si y sólo si al menos dos renglones de la matriz anterior son linealmente dependientes, es decir, si y sólo si se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{A_2}{\sigma} = \frac{A_3 - \delta}{-\delta} = \frac{A_1 - \lambda}{\alpha - \lambda}. \quad (9.100)$$

La primera igualdad de (9.100)

$$\frac{A_2}{\sigma} = 1 - \frac{A_3}{\delta}$$

implica

$$\frac{S_t}{c} \frac{\partial c}{\partial S_t} = 1 - \frac{B_t}{c} \frac{\partial c}{\partial B_t},$$

equivalentemente

$$c = S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + B_t \frac{\partial c}{\partial B_t},$$

es decir, c homogénea de grado uno en S_t y B_t . Considere ahora la segunda igualdad de (9.100)

$$\frac{A_2}{\sigma} = \frac{A_1 - \lambda}{\alpha - \lambda}. \quad (9.101)$$

Esta ecuación conduce a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial B^2} \delta^2 B_t^2 + \rho \sigma \delta S_t B_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial B_t} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0. \quad (9.102)$$

Considere ahora el cambio de variable $X_t = S_t / KB_t$. En este caso, B_t actúa como un numerario. El cambio en X_t está dado por:

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{1}{K} d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) = \frac{1}{K} \left[S_t d\left(\frac{1}{B_t}\right) + \frac{1}{B_t} dS_t - (dS_t) d\left(\frac{1}{B_t}\right) \right] \\ &= \frac{1}{K} \left[S_t \left(-\frac{1}{B_t^2} \lambda B_t + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{B^3} \right) \delta^2 B_t^2 \right) dt - S_t \left(\frac{1}{B_t^2} \right) \lambda B_t dV_t \right] \\ &\quad + \frac{1}{B_t} (\alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \frac{S_t}{B_t} \rho \sigma \delta, \end{aligned} \quad (9.103)$$

lo cual implica que

$$\frac{dX_t}{X_t} = (\alpha - \lambda + \delta^2 - \rho \sigma \delta) dt + \sigma dW_t + \delta dV_t. \quad (9.104)$$

Observe que la esperanza del cambio porcentual dX_t/X_t está dada por

$$E \left[\frac{dX_t}{X_t} \right] = (\alpha - \lambda + \delta^2 - \rho \sigma \delta) dt$$

ya que $E[dW_t] = E[dV_t] = 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \gamma^2 := \text{Var} \left[\frac{dX_t}{X_t} \right] &= \text{Var} ((\alpha - \lambda + \delta^2 - \rho \sigma \delta) dt + \sigma dW_t - \delta dV_t) \\ &= \text{Var} (\sigma dW_t - \delta dV_t) \\ &= \sigma^2 \text{Var}(dW_t) + \delta^2 \text{Var}(dV_t) - 2\sigma\delta \text{Cov}(dW_t, dV_t) \\ &= (\sigma^2 + \delta^2 - 2\rho\sigma\delta) dt. \end{aligned} \quad (9.105)$$

Sea $h(X_t, t) = c/KB_t$. De esta manera, $c = h(X_t, t)KB_t$. Si se calculan las derivadas parciales de c , tomando en cuenta que $X_t = S_t/KB_t$, se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial t} = KB_t \frac{\partial h}{\partial t},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial S_t} &= \frac{\partial c}{\partial X_t} \frac{\partial X_t}{\partial S_t} \\
&= \frac{\partial}{\partial X_t} (KB_t h) \frac{\partial X_t}{\partial S_t} \\
&= KB_t \left(\frac{\partial h}{\partial X_t} \right) \frac{1}{KB_t} \\
&= \frac{\partial h}{\partial X_t}, \\
\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} &= \frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{\partial h}{\partial X_t} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial X_t} \left(\frac{\partial h}{\partial X_t} \right) \frac{\partial X_t}{\partial S_t} \\
&= \left(\frac{\partial^2 h}{\partial X_t^2} \right) \frac{1}{KB_t},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial B_t} &= \frac{\partial c}{\partial X_t} \frac{\partial X_t}{\partial B_t} \\
&= KB_t \frac{\partial h}{\partial X_t} \left(\frac{-S_t}{KB_t^2} \right) \\
&= -KX_t \frac{\partial h}{\partial X_t}, \\
\frac{\partial^2 c}{\partial B_t^2} &= \frac{\partial}{\partial B_t} \left(\frac{\partial c}{\partial B_t} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial B_t} \left(-KX_t \frac{\partial h}{\partial X_t} \right) \\
&= -KX_t \frac{\partial}{\partial B_t} \left(\frac{\partial h}{\partial X_t} \right) \\
&= -KX_t \frac{\partial}{\partial X_t} \left(\frac{\partial h}{\partial X_t} \right) \frac{\partial X_t}{\partial B_t} \\
&= -K \left(X_t \frac{\partial^2 h}{\partial X_t^2} \right) \frac{-S_t}{KB_t^2} \\
&= \frac{K}{B_t} X_t^2 \frac{\partial^2 h}{\partial X_t^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial B_t} &= \frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{\partial c}{\partial B_t} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial S_t} \left(-KX_t \frac{\partial h}{\partial X_t} \right) \\
&= -KX_t \frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{\partial h}{\partial X_t} \right) \\
&= -KX_t \frac{\partial}{\partial X_t} \left(\frac{\partial h}{\partial X_t} \right) \frac{\partial X_t}{\partial S_t} \\
&= -\frac{1}{B_t} X_t \frac{\partial^2 h}{\partial X_t^2}.
\end{aligned}$$

Si se sustituyen las derivadas parciales anteriores en la ecuación (9.102), se tiene que

$$\frac{1}{2} (\sigma^2 + \delta^2 - 2\rho\sigma\delta) X_t^2 \frac{\partial^2 h}{\partial X_t^2} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (9.106)$$

Si se considera (9.105), la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{1}{2}\gamma^2 X_t^2 \frac{\partial^2 h}{\partial X_t^2} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

Si se utiliza ahora el cambio de variable $\tau = T - t$, $h(X_t, t) = H(X_t, \tau)$, entonces

$$\frac{1}{2}\gamma^2 X_t^2 \frac{\partial^2 H}{\partial X_t^2} = \frac{\partial H}{\partial \tau}. \quad (9.107)$$

Se establece otro cambio de variable más, $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{2} \int_t^{t+\tau} \gamma^2(y) dy$, y se define

$$v(X_t, \tilde{\sigma}^2) = H(X_t, \tau). \quad (9.108)$$

En este caso,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X_t^2} = \frac{\partial H^2}{\partial X_t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial \tilde{\sigma}^2} \frac{1}{2} \gamma^2 = \frac{\partial H}{\partial \tau}.$$

Por lo tanto, la ecuación (9.107) se transforma en

$$X_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial X_t^2} = \frac{\partial v}{\partial \tilde{\sigma}^2}. \quad (9.109)$$

Por último, defina

$$\varphi(u, \tilde{\sigma}^2) = v(X_t, \tilde{\sigma}^2)/X_t, \quad (9.110)$$

donde

$$u = \ln(X_t) + \tilde{\sigma}^2. \quad (9.111)$$

En este caso, $v(X_t, \tilde{\sigma}^2) = \varphi(u, \tilde{\sigma}^2)X_t$ y

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial X_t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial X_t} X_t + \varphi \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \varphi, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial X_t^2} &= \frac{\partial}{\partial X_t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{1}{X_t} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial X_t} + \frac{1}{X_t} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ &= \frac{1}{X_t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial \tilde{\sigma}^2} = X_t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\sigma}^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right).$$

La sustitución de las derivadas parciales anteriores en (9.109) conduce a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\sigma}^2}. \quad (9.112)$$

Observe ahora que

$$\begin{aligned} c(S_t, B_t, t) &= K B_t h(X_t, t) \\ &= K B_t H(X_t, \tau) \\ &= K B_t v(X_t, \tilde{\sigma}^2) \\ &= K B_t \varphi(\ln(X_t) + \tilde{\sigma}^2, \tilde{\sigma}^2) X_t. \end{aligned}$$

Si se invierten todos los cambios de variables, se sigue que

$$c(S_t, B_t, t) = S_t \varphi \left(\ln \left(\frac{S_t}{K B_t} \right) + \frac{1}{2} \int_t^T \gamma^2(y) dy, \frac{1}{2} \int_t^T \gamma^2(y) dy \right).$$

De lo anterior, se tiene que $\max(S_t - K, 0) = K h(X_t, 0)$ ó $\max(K X_t - K, 0) = K h(X_t, 0)$, de lo cual se obtiene la condición inicial que satisface h , $h(X_t, 0) = \max(X_t - 1, 0)$. Asimismo, $\max(S_t - K, 0) = S_t \varphi(u, 0)$, lo cual implica $\max(1 - (K/S_t), 0) = \varphi(u, 0)$, así $\varphi(u, 0) = \max(1 -$

$e^{-u}, 0)$, lo cual es la condición final que debe satisfacer φ . La solución de (9.112) con $\varphi(u, 0) = \max(1 - e^{-u}, 0)$ satisface

$$\varphi(u, \tilde{\sigma}^2) = \Phi(g_1) + e^{\tilde{\sigma}^2 - u} \Phi(g_2),$$

donde

$$g_1 = \frac{u}{\sqrt{2\tilde{\sigma}^2}},$$

$$g_2 = \frac{u - 2\tilde{\sigma}^2}{\sqrt{2\tilde{\sigma}^2}}$$

y

$$\Phi(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{T-t} e^{y^2/2} dy.$$

Es decir,

$$c(S_t, B_t, t) = S_t \Phi(g_1) - K B_t \Phi(g_2),$$

donde

$$g_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{KB_t}\right) + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}},$$

$$g_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{KB_t}\right) - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(T-t)}{\hat{\sigma}\sqrt{T-t}},$$

y

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T (\sigma^2 + \delta^2 - 2\rho\sigma\delta) du,$$

o, destacando la dependencia de t y T ,

$$\hat{\sigma}^2(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T [\sigma^2(u, T) + \delta^2(u, T) - 2\rho(u, T)\sigma(u, T)\delta(u, T)] du.$$

Esta fórmula es más general que la de Black-Scholes debido a la dinámica estocástica del bono cupón cero. En particular, si $\lambda \equiv r$ y $\delta \equiv 0$, se tiene que $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$, $\hat{\sigma}^2 = \sigma^2$ y

$$c(S_t, B_t, t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{r(T-t)} \Phi(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

9.14 Conclusiones

Se han revisado y discutido, en detalle, los trabajos de Louis Bachelier, Paul Samuelson, Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton sobre valuación de activos y sus derivados en tiempo continuo y en un ambiente estocástico. Asimismo, se discutieron las relaciones entre dichos trabajos con las investigaciones de muchos prominentes científicos. También, se llevó a cabo una investigación sobre la evolución de las ideas y formulaciones de los modelos de Bachelier, Samuelson, Black, Scholes y Merton, destacando el contexto histórico y social en que se desarrollaron dichos modelos. Por último, se realizó un análisis comparativo entre dichos modelos destacando sus limitaciones y ventajas.

Sin duda, en el interior de muchos existe un Bachelier que vive en el anonimato y que siente una gran pasión por las matemáticas, las finanzas o la economía (o por todas ellas). No obstante, en la mayoría de los casos, falta un valor esencial, la convicción de Bachelier.

9.15 Bibliografía

- Bachelier, L. (1900). Théorie de la Speculation, Thèse de Docteur ès Sciences Mathématiques. Université Paris Sorbonne. Gauthier-Villars, Paris.
- Bachelier, L. (1964). Theory of Speculation. Translation of the French edition. P. H. Cootner, editor, in The Random Character of Stock Market Prices, Cambridge, The MIT Press, pp. 17-79.
- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Brown, R. (1828). "A Brief Account on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies". *Edinburgh New Philosophical Journal*, July-September, pp. 358-371.
- Einstein, A. (1956). Investigations on the Theory of the Brownian Movement. Translated by A. D. Cowper, Dover Publications, Inc. pp. 12-19.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.
- Samuelson, P. A. (1965). "Rational Theory of Warrant Prices". *Industrial Management Review*, Vol. 6, No. 2, pp. 13-39.
- Venegas-Martínez, F. (2005). "De Bachelier a Merton: 100 años del movimiento Browniano en economía y finanzas". *Panorama Económico*, Vol. 1, No. 1, pp. 9-64.

9.16 Ejercicios

- 9.1** Suponga que el precio de un activo, S_t , es conducido por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt),$$

donde $\alpha \geq 0$ es el rendimiento medio esperado del activo, $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea del activo y $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Muestre que la función de densidad de S_T , dado S_0 , está dada por:

$$f_{S_T|S_0}^{(\alpha)}(s|S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma s} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_0} \right) - (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)^2 \right\}.$$

- 9.2** De acuerdo con la fórmula de Samuelson (sección 9.11) para valuar una opción europea de compra,

$$\begin{aligned} c(S_0, T; \alpha, \beta) = & S_0 e^{(\alpha-\beta)T} - K e^{-\beta T} \\ & + e^{-\beta T} \left(K \Phi(-d) - \int_0^K s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s|S_t) ds \right), \end{aligned}$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar y

$$d = \frac{\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Una opción perpetua es aquella para la cual $T \rightarrow \infty$, en cuyo caso

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi(d) = 0$$

y

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi(d + \sigma\sqrt{T}) = 1.$$

Verifique que si $\alpha = \beta$, el precio de la opción perpetua satisface

$$c(S_0, \infty; \alpha, \alpha) = S_0.$$

Si $\beta > \alpha$, demuestre que el precio de una opción perpetua está dado por

$$c(S_0, \infty; \alpha, \beta) = \frac{(\gamma - 1)^{\gamma-1}}{\gamma^\gamma} S_0^\gamma, \quad (9.49)$$

donde

$$\gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sigma^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\beta}{\sigma^2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} \right)}.$$

Por último, demuestre que si se selecciona $\alpha = \sigma^2/2$, se tiene que

$$\gamma = \sqrt{\beta/\alpha}.$$

9.3 Suponga que

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$$

y que dR_M es el rendimiento que paga el mercado. Demuestre que

$$E[dR_S] - rdt = \beta_S [E[dR_M] - rdt],$$

donde

$$\beta_S = \frac{\text{Cov}(dR_S, dR_M)}{\text{Var}(dR_M)}.$$

IV. DERIVADOS FINANCIEROS SIMPLES

- 10. Rendimientos de activos e índices bursátiles:
movimiento geométrico Browniano
- 11. Contratos forward sobre diversos subyacentes
- 12. Contratos futuros
- 13. Swaps de tasas de interés y de tipo de cambio
- 14. Modelo de Black-Scholes (I): enfoque probabilista
- 15. Modelo de Black-Scholes (II): enfoque de ecuaciones diferenciales parciales
- 16. Modelo de Black-Scholes (III): ecuación de calor
- 17. Modelo de Black-Scholes (IV): portafolios replicantes
- 18. Modelo de Black-Scholes (V): teorema de Girsanov
- 19. Modelo de Black-Scholes con pago continuo de dividendos
- 20. Teorema de Feynman-Kač
- 21. Ecuaciones diferenciales de Kolmogorov y Fokker-Planck
- 22. Griegas del modelo de Black-Scholes
- 23. Funciones de Green y ecuación diferencial parcial de Black-Scholes
- 24. Modelo binomial de Cox, Ross y Rubinstein
- 25. Convergencia del modelo binomial al modelo Black-Scholes

CAPÍTULO 10

RENDIMIENTOS DE ACTIVOS E ÍNDICES BURSÁTILES: MOVIMIENTO GEOMÉTRICO BROWNIANO

Conceptos básicos de este capítulo:

- Rendimientos normales
- Movimiento geométrico Browniano
- Precios log-normales
- Mercados accionarios
- Índices de bursatilidad
- Índices de precios

10.1 Introducción

El concepto de distribución normal, o Gaussiana, ha sido esencial para el desarrollo de la teoría financiera. Históricamente, los resultados teóricos más conocidos se han obtenido bajo la hipótesis de normalidad. Por supuesto, los precios de un activo no pueden ser normales, simplemente porque éstos son positivos. Sin embargo, el cambio porcentual del precio de un activo, es decir, el rendimiento, puede tomar valores tanto positivos como negativos.

El supuesto de que el precio de un activo sigue una distribución log-normal, o que los rendimientos siguen una distribución normal, es más común de lo que se piensa. Sin embargo, si los rendimientos son de alta frecuencia (muy frecuentes), diarios o intradía, casi nunca se encuentra que siguen una distribución normal. De hecho, dichos rendimientos casi nunca se comportan de acuerdo a distribuciones teóricas comúnmente conocidas. Por ejemplo, las distribuciones empíricas de los rendimientos diarios de varios de los títulos que cotizan en los mercados de capitales presentan, en general, sesgo, exceso de curtosis y colas pesadas (colas gordas o más anchas) y no siempre es posible ajustar una distribución teórica simple a un conjunto de observaciones de mercado.

En el análisis de rendimientos unimodales de activos cuando se compara una distribución estandarizada empírica con una distribución normal estándar, se observa con frecuencia que la cresta de la distribución empírica es más alta. Dado que ambas distribuciones tienen la misma desviación estándar, es decir, los mismos puntos de inflexión, entonces las colas de la distribución empírica tienen necesariamente que ser más anchas para compensar el área de la cresta, que en ambos casos tiene que ser igual a uno. La cresta más alta significa que existe una probabilidad más grande de movimientos pequeños que la de una variable aleatoria con distribución normal. Por otro lado, debido a las colas más gordas (o pesadas) de la distribución empírica, se tiene una mayor probabilidad de que ocurran valores extremos en comparación con la distribución normal. En este caso, si la distribución normal se mezcla con una distribución que genere movimientos extremos en el rendimiento del título, se producirán colas más pesadas y se tendría una mejor aproximación a lo observado.

En este capítulo se ilustra el concepto de movimiento geométrico Browniano en el modelado del comportamiento de los rendimientos de una acción, por unidad de tiempo. Asimismo, se verá que si los rendimientos son normales, entonces el precio del activo en cuestión sigue una distribución log-normal.

10.2 Rendimientos normales

En esta sección, bajo el supuesto de normalidad, se modela el comportamiento de los rendimientos de un activo financiero. Considere un registro histórico de los precios mensuales de un activo (*v.g.* una acción), S_0, S_1, \dots, S_N . Los rendimientos mensuales del activo son:

$$R_t = \left(\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \right), \quad t = 1, 2, \dots, N$$

o, equivalentemente,

$$R_t \left(\frac{1}{\text{mes}} \right) = \left(\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \right) \frac{1}{\text{mes}}, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (10.1)$$

Es importante enfatizar que la unidad de tiempo en cuestión es un mes y que los rendimientos son calculados por esta unidad de tiempo. Obviamente, si la unidad de tiempo fuera una semana, los resultados serían diferentes. El valor medio mensual de los rendimientos del activo está dado por:

$$\mu = \left(\frac{1}{N} \sum_{t=0}^N R_t \right) \frac{1}{\text{mes}} \quad (10.2)$$

y la varianza mensual de los rendimientos del activo es

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{t=0}^N (R_t - \mu)^2 \right) \frac{1}{\text{mes}}. \quad (10.3)$$

La desviación estándar, σ , es conocida como volatilidad del activo. Si se estandarizan los rendimientos, es decir, si se define $\tilde{R}_t = (R_t - \mu)/\sigma$ y el histograma de frecuencias de \tilde{R}_t coincide con la función de densidad de una variable aleatoria $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, entonces se podría pensar que los rendimientos tienen una distribución normal con media $\mu \times \text{mes}$ y varianza $\sigma^2 \times \text{mes}$. En este caso, se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} &= \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N R_t + \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=0}^N (R_t - \mu)^2} \mathcal{E} \\ &= \mu \times (\text{mes}) + \sqrt{\sigma^2 \times (\text{mes})} \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (10.4)$$

donde $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Note que

$$\mathbb{E} \left[\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \right] = \mu \times (\text{mes}) \quad (10.5)$$

y

$$\text{Var} \left[\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \right] = \sigma^2 \times (\text{mes}). \quad (10.6)$$

Si Δt denota un mes y, en general, denota la unidad de tiempo que separa las observaciones S_t , $t = 1, 2, \dots, N$, se tiene que

$$\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \mathcal{E},$$

donde $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Equivalentemente,

$$\frac{\Delta S_t}{S_{t-1}} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W_t,$$

donde $\Delta W_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$, es decir, ΔW_t es normal con $\mathbb{E}[\Delta W_t] = 0$ y $\text{Var}[\Delta W_t] = \Delta t$. Si se supone ahora que Δt se hace cada vez más y más pequeño (de meses a semanas, de semanas

a días, de días a horas, de horas a segundos, de segundos a instantes, etcétera), entonces en el límite se tiene que

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (10.7)$$

donde $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$. En este caso, se dice que μ es el rendimiento (anualizado) medio esperado y σ es la volatilidad (anualizada) del activo en cuestión. La variable aleatoria dW_t modela el riesgo de mercado, es decir, las fluctuaciones en los rendimientos que se observan todos los días. Observe que ahora S_t es función de la variable continua t . Se dice, en este caso, que el precio S_t del activo sigue un movimiento geométrico Browniano o, simplemente, que el precio S_t es log-normal. El proceso (10.7) fue introducido, por primera vez, por Paul Samuelson en 1965. Samuelson lo llamó movimiento económico Browniano, pero el nombre de movimiento geométrico Browniano ha tenido mayor aceptación, ya que (10.7) es una versión continua y estocástica del crecimiento geométrico.

10.3 Precios log-normales

En la sección anterior, bajo condiciones de normalidad, se modeló el comportamiento de los rendimientos de un activo. En esta sección se describe el comportamiento de los precios del activo en cuestión. Una simple aplicación del lema de Itô a la ecuación (10.7) conduce a

$$d(\ln S_t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma dW_t. \quad (10.8)$$

Si se discretiza (10.8) con $\Delta t = T - t$, entonces

$$\ln(S_T) - \ln(S_t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) + \sigma\sqrt{T - t} \mathcal{E}.$$

Por lo tanto,

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim \mathcal{N}\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t), \sigma^2(T - t)\right). \quad (10.9)$$

En otras palabras, el rendimiento logarítmico tiene distribución normal con tendencia, $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$, menor que la tendencia del cambio porcentual del precio del activo, μ . Se recuerda ahora que la función de densidad de una variable aleatoria normal estándar $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ está dada por

$$\phi(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}. \quad (10.10)$$

Si se define

$$g(\mathcal{E}) \equiv S_T = S_t \exp\left\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) + \mathcal{E}\sigma\sqrt{T - t}\right\},$$

se tiene que

$$g^{-1}(S_T) \equiv \frac{\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}. \quad (10.11)$$

La función de densidad de S_T , dado S_t , está definida por la fórmula

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \phi(g^{-1}(s)) \left| \frac{dg^{-1}(s)}{ds} \right|. \quad (10.12)$$

Observe primero que el Jacobiano de la transformación satisface

$$\left| \frac{dg^{-1}(s)}{ds} \right| = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T - t}}.$$

En consecuencia, la función de densidad de S_T condicional en S_t está dada por la expresión

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T - t)\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \right)^2\right\}. \quad (10.13)$$

10.4 Media y varianza de un precio log-normal

En el transcurso de la presente sección se determina la media y varianza de la variable aleatoria S_T . Observe primero que a partir de (10.11), se obtiene

$$\epsilon = \frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

lo cual implica que

$$s = S_t e^{\epsilon\sigma\sqrt{T-t} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}. \quad (10.14)$$

La diferencial de la expresión anterior satisface:

$$ds = S_t e^{\epsilon\sigma\sqrt{T-t} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \sigma\sqrt{T-t} d\epsilon. \quad (10.15)$$

Dado el cambio de variable anterior, a continuación se calcula el valor medio de S_T :

$$\begin{aligned} E[S_T|S_t] &= \int_0^\infty s f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\} ds \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} S_t e^{\epsilon\sigma\sqrt{T-t} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \sigma\sqrt{T-t} d\epsilon \\ &= S_t \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} e^{\sigma\sqrt{T-t}\epsilon + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} d\epsilon \\ &= S_t \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2 - 2\sigma\sqrt{T-t}\epsilon + \sigma^2(T-t))} e^{\mu(T-t)} d\epsilon \\ &= S_t \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon - \sigma\sqrt{T-t})^2} e^{\mu(T-t)} d\epsilon \\ &= S_t e^{\mu(T-t)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = S_t e^{\mu(T-t)}, \end{aligned} \quad (10.16)$$

donde u es tal que

$$u = \epsilon - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (10.17)$$

El segundo momento de S_T se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} E[S_T^2|S_t] &= \int_0^\infty s^2 f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= \int_0^\infty \frac{s}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\} ds \\ &= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} e^{2[\sigma\sqrt{T-t}\epsilon + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]} d\epsilon \\ &= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 + 2\sigma\sqrt{T-t}\epsilon} e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} d\epsilon \\ &= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2 - 4\sigma\sqrt{T-t}\epsilon + 4\sigma^2(T-t))} e^{2[\sigma^2(T-t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]} d\epsilon \\ &= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon - 2\sigma\sqrt{T-t})^2} e^{\sigma^2(T-t) + 2\mu(T-t)} d\epsilon \\ &= S_t^2 e^{\sigma^2(T-t) + 2\mu(T-t)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} dw \\ &= S_t^2 e^{\sigma^2(T-t) + 2\mu(T-t)} = S_t^2 e^{(\sigma^2 + 2\mu)(T-t)}, \end{aligned}$$

donde, como antes,

$$u = \epsilon - \sigma \sqrt{T - t}.$$

En consecuencia,

$$\text{Var}(S_T) = E(S_T^2) - E[(S_T)]^2 = S_t^2 e^{\sigma^2(T-t)+2\mu(T-t)} - S_t^2 e^{2\mu(T-t)} = S_t^2 e^{2\mu(T-t)} (e^{\sigma^2(T-t)} - 1). \quad (10.18)$$

10.5 Índices bursátiles

En esta sección se estudia el principal indicador del mercado accionario mexicano, el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC), el cual es generado, en tiempo real, por la Bolsa Mexicana de Valores. Para ello, es necesario introducir primero el índice de bursatilidad a fin de establecer la muestra de emisoras que participarán en el cálculo del IPC.

10.5.1 Índice de bursatilidad

El índice de bursatilidad es un indicador que refleja los niveles de negociación de las series accionarias del mercado mexicano de capitales (Bolsa Mexicana de Valores, S. A. de C. V.). Las variables que se utilizan para describir dichos niveles de negociación son: el importe, el número de operaciones y la mediana del importe.

En la definición de las siguientes variables se utilizan datos acumulados durante los seis meses anteriores a la fecha de cálculo del índice, el tiempo t . La primera variable que se utiliza para el cálculo del índice de bursatilidad es el número de operaciones acumuladas, O_{jt} , durante el semestre para cada serie, $j = 1, 2, \dots, N$, al tiempo t , es decir, es el número de transacciones realizadas en la serie j durante el semestre anterior a t . Otra variable que se considera para calcular el índice de bursatilidad es el importe operado acumulado, I_{jt} , para cada serie, al tiempo t , el cual se obtiene de la siguiente manera: si con respecto a la serie j se realizaron $i = 1, 2, \dots, O_j$ operaciones de volumen Q_{ij} a precio P_{ij} en los últimos 6 meses anteriores a t , entonces

$$I_{jt} = \sum_{i=1}^{O_j} P_{ij} Q_{ij}.$$

Observe que el importe total acumulado, I_t , del mercado es la suma de los importes de las series, es decir,

$$I_t = \sum_{j=1}^N I_{jt}.$$

Se excluyen operaciones de volumen inferior a 100 títulos (un lote), ofertas públicas, operaciones de registro y aquellas operaciones que representan más del 1% de las acciones en circulación de la serie en cuestión. La última variable que se toma en cuenta para calcular el índice de bursatilidad es la mediana del importe, \hat{I}_{jt} , registrado en cada una de las operaciones para la serie accionaria j . Cabe señalar que en caso de que una serie accionaria tenga 25 o menos operaciones acumuladas durante los últimos seis meses, la mediana del importe se calculará como: el producto de un lote por el precio último de cotización de la serie accionaria correspondiente.

10.5.2 Cálculo del índice de bursatilidad

Una vez que se han descrito las variables operativas para cada una de las series accionarias, se aplica la siguiente metodología. Sean

$$O_{\max} = \max\{O_{jt} : j = 1, 2, \dots, N\},$$

$$O_{\min} = \min\{O_{jt} : j = 1, 2, \dots, N\},$$

$$I_{\max} = \max\{I_{jt} : j = 1, 2, \dots, N\},$$

$$I_{\min} = \min\{I_{jt} : j = 1, 2, \dots, N\},$$

$$\widehat{I}_{\max} = \max\{\widehat{I}_{jt} : j = 1, 2, \dots, N\}$$

y

$$\widehat{I}_{\min} = \min\{\widehat{I}_{jt} : j = 1, 2, \dots, N\}.$$

Asimismo, se definen las siguientes ponderaciones (o porcentaje de participación):

$$\delta_1 = 0.5, \quad \delta_2 = 0.3 \quad \text{y} \quad \delta_3 = 0.2.$$

Es decir, el orden de importancia en las variables es: primero I_{jt} , después O_{jt} y, por último, \widehat{I}_{jt} . El índice de bursatilidad, al tiempo t , se define como

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_t = 10 & \left[\frac{\ln((I_{jt}/I_{\max})(I_{\max}/I_{\min}))}{\ln(I_{\max}/I_{\min})} \delta_1 + \frac{\ln((O_{jt}/O_{\max})(O_{\max}/O_{\min}))}{\ln(O_{\max}/O_{\min})} \delta_2 \right. \\ & \left. + \frac{\ln((\widehat{I}_{jt}/\widehat{I}_{\max})(\widehat{I}_{\max}/\widehat{I}_{\min}))}{\ln(\widehat{I}_{\max}/\widehat{I}_{\min})} \delta_3 \right]. \end{aligned}$$

Observe que $0 \leq \mathcal{J}_t \leq 10$ ya que si para alguna k se cumple, al mismo tiempo, que $I_{kt} = I_{\max}$, $O_{kt} = O_{\max}$ y $\widehat{I}_{kt} = \widehat{I}_{\max}$, entonces $\mathcal{J}_t = 10$. Mientras que si para algún k se cumple, simultáneamente, que $I_{kt} = I_{\min}$, $O_{kt} = O_{\min}$ y $\widehat{I}_{kt} = \widehat{I}_{\min}$, entonces $\mathcal{J}_t = 0$.

10.5.3 Niveles o estratos de bursatilidad

Se establecen cuatro niveles o estratos de bursatilidad que son: alta, media, baja y mínima, los cuales se determinan de la siguiente manera.

- (i) Alta bursatilidad. El 20% del total de las series con el mayor nivel de bursatilidad, pertenecerán al estrato de alta bursatilidad.
- (ii) Media bursatilidad. Este nivel incluye aquellas series que se encuentren entre el 60% y el 80% del total de series que están calificando para el índice de bursatilidad.
- (iii) Baja bursatilidad. En este nivel se incluirán las series que estén entre el 30% y el 60% del total de series que están calificando para el índice de bursatilidad.
- (iv) Mínima bursatilidad. Corresponde al 30% del total de las series con el menor nivel de bursatilidad, pertenecerán al estrato de mínima bursatilidad.

Si, por ejemplo, el total de series es 150, entonces el primer y segundo estratos contienen, cada uno, 30 series, las de mayor bursatilidad y media bursatilidad, respectivamente. Similarmente, el tercer y cuarto estrato contienen, cada uno, 45 series, las de baja y mínima bursatilidad, respectivamente.

10.5.4 Breve reseña de los índices bursátiles del mercado mexicano accionario

A continuación se presenta en orden cronológico un resumen breve de los principales eventos relacionados con la evolución del índice en cuestión. En 1910 se utilizaba un indicador del valor de mercado denominado "Promedio de Hechos de la Bolsa". El indicador consistía en el promedio aritmético anual del valor de todos los títulos registrados de cada empresa que cotizaba en Bolsa. Aunque presentaba grandes oscilaciones, debido al bajo nivel de operaciones y el ingreso o retiro de emisoras, este método prevaleció durante casi cuatro décadas.

En 1958 se comienza a utilizar un promedio diario de cotizaciones calculado sobre una muestra de once emisoras industriales. Para 1966, debido a un incremento en la actividad bursátil se hizo necesaria una formulación de mayor representatividad y estabilidad, por lo que en el mismo año se estableció una muestra de treinta títulos y se modificó el procedimiento de cálculo, encadenando el promedio diario con el promedio del día anterior (multiplicando el promedio diario con el promedio del día anterior). Además, se incluyó una importante innovación, la cual consistía en aplicar un factor de ajuste a cada precio de la muestra relacionado con la capitalización de utilidades, "splits" y diversos derechos de suscripción.

En 1978, se inició el cálculo del actual Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores de forma paralela al ya existente. Se hace público el 22 de septiembre del mismo año, tomando como base 781.62, nivel que alcanzó el indicador anterior el 30 de octubre, sustituyéndolo de manera definitiva a partir del 1 de noviembre. Se consideraron 42 empresas para la muestra. En relación a los ajustes, se incluyeron los dividendos en efectivo y cualquier otro cambio en la capitalización de las emisoras que integran la muestra del índice, además de los ya establecidos.

A partir 1978 y hasta marzo 1991, la inflación afectó la evolución de los precios del mercado accionario, lo que provocó que el IPC tuviera un crecimiento nominal de 102 mil por ciento en ese período, ubicándolo en una cifra de 6 dígitos, después de estudios y consultas con instituciones bursátiles, la Bolsa Mexicana de Valores decidió eliminar tres dígitos al índice IPC y, al mismo tiempo transformó la base referenciada al 30 de diciembre de 1980 que era igual a 100 a una base referenciada al 30 de octubre de 1978 igual a 0.78162.

En 1992, debido a la creación del Mercado Mexicano de Derivados, surgió la necesidad de contar con un índice alterno al IPC que se pudiera utilizar como subyacente para la emisión de productos derivados de índices: el Índice México o INMEX, con base referenciada al 30 de diciembre de 1991 e igual a 100 y una muestra de tamaño 20.

En 2000 surgió la necesidad de contar con un indicador que considerara en forma particular a emisoras de diversos sectores cuyo valor de capitalización no era tan grande como para ingresar a las muestras de los principales índices, con este propósito nace el Índice de Mediana Capitalización (IMC30), cuya base referenciada al 29 de enero de 1999 es igual a 100, y se da a conocer el primero de agosto del 2000.

El 18 de junio de 2002 se publica un aviso en el que se especifica que ya no se ajustarán los precios de cotización a la apertura del mercado de títulos accionarios para las emisoras que decretan pagos de dividendos en efectivo, lo que implica que el IPC y el IMC30 ya no efectuarán ajustes por este tipo de derecho. Como consecuencia de lo anterior, surgió el Índice de Rendimiento Total o IRT, y el Índice de Dividendos o IDIPC, el primero expresa el rendimiento del mercado accionario en función de las variaciones de precios de una muestra balanceada, ponderada y representativa del conjunto de acciones que cotizan en Bolsa, contempla en su cálculo todos los derechos corporativos que decretan las emisoras contenidas en su muestra, la base es referenciada al 28 de junio del 2002 e igual 6,460.95; el segundo, complementa al IPC pues refleja el rendimiento capitalizado de los dividendos otorgados por cada una de las emisoras que integran la muestra del mismo.

Por último, es importante destacar que, a principios de 2006, un comité especializado recomendó corregir la duplicación del valor de capitalización entre controladoras y subsidiarias en el IPC, acción que se instrumentó en el segundo semestre del mismo año.

10.5.5 Descripción del índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores

El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) es el principal indicador de la Bolsa Mexicana de Valores. Éste expresa las variaciones en el valor de capitalización de una canasta representativa del conjunto de acciones (acciones industriales, comerciales y de servicios) que cotizan en Bolsa. Así pues, la tendencia de las variaciones en el valor de capitalización de las series que cotizan en Bolsa, generadas por las operaciones de compraventa en cada sesión de remates, se refleja automáticamente en el IPC. En conclusión, el IPC constituye un indicador de las fluctuaciones en valor de una canasta de acciones. Dicha canasta se selecciona con base en dos criterios fundamentales: bursatilidad y valor de capitalización.

10.5.6 Fórmula para el cálculo del índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores

Se toma como base $\mathcal{G}_0=0.78162$ al 30 de octubre de 1978 ($t=0$). Dicha base es el valor del índice anterior al IPC. La fórmula del cálculo del IPC está dada por

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t-1} \left(\frac{\sum_{j=1}^N p_{jt} q_{jt}}{\sum_{j=1}^N p_{j,t-1} q_{j,t-1} f_{jt}} \right), \quad (10.19)$$

donde:

\mathcal{G}_t : índice al tiempo t ,

p_{jt} : precio de la serie j al tiempo t ,

q_{jt} : títulos inscritos de la serie j al tiempo t ,

f_{jt} : factor de ajuste por derechos.

Se dice, en este caso, que el índice es recursivo-multiplicativo o simplemente encadenado o concatenado. Observe también que en ausencia de factores de ajuste, es decir, $f_{jt} = 1$ para toda j y toda t , la fórmula (10.19) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_t &= \mathcal{G}_{t-2} \left(\frac{\sum_{j=1}^N p_{j,t-1} q_{j,t-1}}{\sum_{j=1}^N p_{j,t-2} q_{j,t-2}} \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^N p_{jt} q_{jt}}{\sum_{j=1}^N p_{j,t-1} q_{j,t-1}} \right) \\ &= \mathcal{G}_{t-2} \left(\frac{\sum_{j=1}^N p_{jt} q_{jt}}{\sum_{j=1}^N p_{j,t-2} q_{j,t-2}} \right) \\ &\quad \vdots \\ &= \mathcal{G}_0 \left(\frac{\sum_{j=1}^N p_{jt} q_{jt}}{\sum_{j=1}^N p_{j,0} q_{j,0}} \right). \end{aligned} \quad (10.20)$$

Claramente,

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_0 \left(\sum_{j=1}^N \phi_{j0} \frac{p_{jt} q_{jt}}{p_{j,0} q_{j,0}} \right),$$

donde

$$\phi_{j0} = \frac{p_{j,0} q_{j,0}}{\sum_{j=1}^N p_{j,0} q_{j,0}}.$$

Evidentemente,

$$\sum_{j=1}^N \phi_{j0} = 1.$$

Es decir, \mathcal{G}_t es la suma ponderada de la razón entre los valores de capitalización de la canasta en los tiempos cero y t . Observe que los ponderadores ϕ_{j0} son cantidades fijas. Asimismo, observe que en ausencia de factores de ajuste

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t-1} \left(\sum_{j=1}^N \nu_{j,t-1} \frac{p_{jt} q_{jt}}{p_{j,t-1} q_{j,t-1}} \right), \quad (10.21)$$

donde

$$\nu_{j,t-1} = \frac{p_{j,t-1} q_{j,t-1}}{\sum_{j=1}^N p_{j,t-1} q_{j,t-1}}.$$

En este caso, se verifica fácilmente que

$$\sum_{j=1}^N \nu_{j,t-1} = 1.$$

Es decir, \mathcal{G}_t es el producto entre \mathcal{G}_{t-1} por la suma ponderada de la razón entre los valores de capitalización en los tiempos $t - 1$ y t . Los índices de precios accionarios de Standar & Poor's utilizan una metodología similar a la utilizada para calcular \mathcal{G}_t .

El factor de ajuste se describe a continuación. Si se requiere ajustar el valor de las series que decreten algún derecho se utiliza la siguiente fórmula

$$f_{jt} = \frac{A_{pj}}{A_{aj}} F_{jt},$$

donde:

A_{pj} : número de acciones inscritas posteriores al ajuste,

A_{aj} : número de acciones inscritas anteriores al ajuste,

F_{jt} : factor de ajuste por movimiento.

El factor f_{jt} puede también calcularse en términos de precios mediante

$$f_{jt} = 1 + \frac{P_{aj}[A_{pj}F_{jt} - A_{aj}]}{P_{aj}A_{aj}},$$

donde P_{aj} denota el precio anterior al ajuste.

A continuación se especifica el factor F_{jt} cuyo valor depende del tipo de movimiento que se efectúe al cierre de $t - 1$:

(i) Capitalización de utilidades. Si se lleva a cabo la capitalización de utilidades, entonces

$$F_{jt} = \frac{A_{aj}}{A_{pj}}.$$

Por lo tanto, $f_{jt} = 1$.

(ii) Escisión. Si se realiza la división de una serie, entonces

$$\begin{aligned} F_{jt} &= \frac{P_{pj}A_{aj} - P_{pj}A_{ej}}{P_{aj}A_{pj}} \\ &= \frac{P_{pj}}{P_{aj}} \left(\frac{A_{aj} - A_{ej}}{A_{pj}} \right), \end{aligned}$$

donde A_{ej} es el número de acciones por escindir y P_{pj} es el precio posterior al ajuste. En este caso, se presenta una reducción de capital.

(iii) Obligaciones convertibles. Si un instrumento financiero se convierte en acciones, entonces

$$\begin{aligned} F_{jt} &= \frac{P_{aj}A_{aj} + P_{aj}A_{cj}}{P_{aj}A_{pj}} \\ &= \frac{A_{aj} + A_{cj}}{A_{pj}}, \end{aligned}$$

donde A_{cj} es el número de acciones producto de la conversión. En este caso, se tiene un incremento de capital.

- (iv) Reestructuración de capital. Si se efectúa una reestructuración del capital de la emisora, entonces

$$\begin{aligned} F_{jt} &= \frac{P_{aj}A_{aj} + P_{aj}A_{rj}}{P_{aj}A_{pj}} \\ &= \frac{A_{aj} + A_{rj}}{A_{pj}}, \end{aligned}$$

donde A_{rj} es el número de acciones por reestructuración.

- (v) Suscripción. Al realizarse una suscripción de acciones, el ajuste está dado por

$$F_{jt} = \frac{P_{aj}A_{aj} + P_{sj}A_{sj}}{P_{aj}A_{pj}},$$

donde A_{sj} es el número de acciones suscritas y P_{sj} es el precio de suscripción. El resultado es un incremento en el capital.

- (vi) Suscripción por nuevas series.

$$\begin{aligned} F_{jt} &= \frac{P_{pj}}{P_{aj}} \\ &= 1 - \frac{P_{aj} - P_{pj}}{P_{aj}}, \end{aligned}$$

- (vii) “Split” (“reverse”).

$$F_{jt} = \frac{A_{aj}}{A_{pj}}.$$

Por lo tanto, $f_{jt} = 1$.

10.6 Modelado del comportamiento de un índice bursátil

Al igual que en el caso de un título accionario es frecuente suponer que el cambio porcentual de un índice bursátil, S_t , sigue una ecuación diferencial estocástica del tipo

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

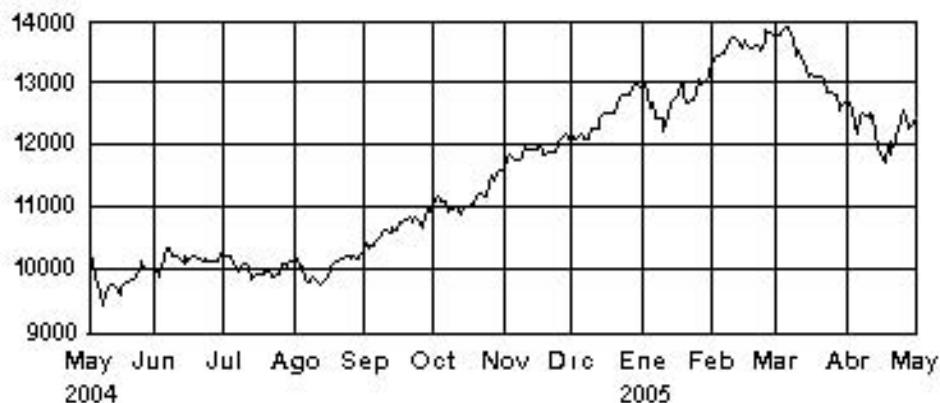
donde $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$. De esta manera, W_t modela las pequeñas fluctuaciones que se observan todos los días en el cambio porcentual del índice. Por lo tanto, el valor esperado del índice en una fecha futura T , dado que su valor actual es S_t , se calcula mediante la expresión

$$E[S_T|S_t] = S_t e^{\mu(T-t)}.$$

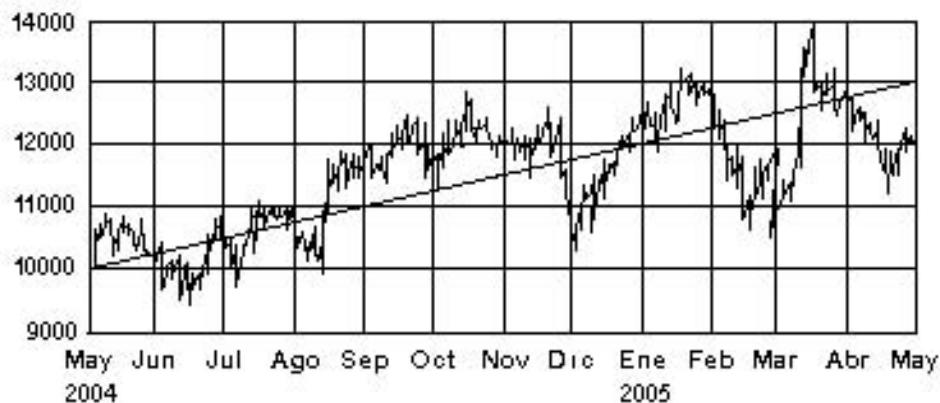
De la misma manera, la dispersión, en la fecha T , de los posibles valores del índice alrededor de $E[S_T|S_t]$ satisface

$$\text{Var}(S_T) = S_t^2 e^{2\mu(T-t)} (e^{\sigma^2(T-t)} - 1).$$

La Gráfica 10.1 muestra el comportamiento del IPC. La Gráfica 10.2 muestra la simulación de una trayectoria con tendencia similar a la del IPC.



Gráfica 10.1 Comportamiento del IPC entre mayo-2004 a mayo-2005.

Gráfica 10.2 Simulación de una trayectoria del IPC,
(tendencia= 140% y volatilidad=17%).

10.7 Bibliografía sugerida

Metodología y reglas de mantenimiento del IPC (2005). Bolsa Mexicana de Valores. Dirección de Información y Productos.

Samuelson, P. A. (1965). "Rational Theory of Warrant Prices". *Industrial Management Review*, Vol. 6, No. 2, pp.13-39.

10.8 Ejercicios

10.1 Defina

$$X_t = \frac{dS_t}{S_t} \left(\frac{1}{dt} \right).$$

Muestre que X_t se distribuye normalmente con media μ (parámetro de localización) y varianza σ^2 (parámetro de escala), es decir, $X_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Asimismo, demuestre que para $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$aX_t + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

Esto es, $aX_t + b$ es normal con

$$\mathbb{E}[aX_t + b] = a\mathbb{E}[X_t] + b$$

y

$$\text{Var}[aX_t + b] = a^2 \text{Var}[X_t].$$

10.2 Considere la función de densidad de S_T condicional en S_t :

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}.$$

Muestre que

$$\int_0^\infty f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds = 1.$$

10.3 Considere el índice

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_0 \left(\sum_{j=1}^N \phi_{j0} \frac{p_{jt} q_{jt}}{p_{j,0} q_{j,0}} \right),$$

donde

$$\phi_{j0} > 0, \quad \sum_{j=1}^N \phi_{j0} = 1.$$

Suponga que $\mathcal{G}_0 = 1$. Compare \mathcal{G}_t con índices de los tipos de Laspeyres y Paasche ¿Es \mathcal{G}_t un índice de precios de acciones o de valores de capitalización?

10.4 El rendimiento de una acción durante el intervalo $[t, T]$ es

$$r_S(t, T) = \frac{S_T - S_t}{S_t} = \frac{S_T}{S_t} - 1,$$

donde S_t y S_T son los precios de la acción en t y T , respectivamente. Dado que \mathcal{G}_t es un índice de valor ¿Se podría decir que el cociente

$$r_{\mathcal{G}} = \frac{\mathcal{G}_T - \mathcal{G}_t}{\mathcal{G}_t}$$

es un rendimiento?

10.5 Suponga que $j = 1$ representa una empresa controladora (tenedora) y $j = 2$ su subsidiaria. La controladora mantiene una proporción α de los títulos de su subsidiaria, es decir,

$$\alpha p_{1t} q_{1t} = p_{2t} q_{2t}.$$

Así, el valor actual de mercado de la controladora es

$$p'_{1t} q'_{1t} = (1 - \alpha) p_{1t} q_{1t}.$$

Explique por qué se efectúa un doble conteo para la subsidiaria en \mathcal{G}_t .

Solución: Observe que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_t &= \mathcal{G}_0 \left(\frac{\sum_{j=1}^N p_{jt} q_{jt}}{\sum_{j=1}^N p_{j,0} q_{j,0}} \right) \\
 &= \frac{\mathcal{G}_0}{\sum_{j=1}^N p_{j,0} q_{j,0}} \left(\sum_{j=1}^N p_{jt} q_{jt} \right) \\
 &= \frac{\mathcal{G}_0}{\sum_{j=1}^N p_{j,0} q_{j,0}} \left(p_{1t} q_{1t} + p_{2t} q_{2t} + \sum_{j=3}^N p_{jt} q_{jt} \right) \\
 &= \frac{\mathcal{G}_0}{\sum_{j=1}^N p_{j,0} q_{j,0}} \left((1 - \alpha) p_{1t} q_{1t} + \alpha p_{1t} q_{1t} + p_{2t} q_{2t} + \sum_{j=3}^N p_{jt} q_{jt} \right) \\
 &= \frac{\mathcal{G}_0}{\sum_{j=1}^N p_{j,0} q_{j,0}} \left((1 - \alpha) p_{1t} q_{1t} + p_{2t} q_{2t} + p_{2t} q_{2t} + \sum_{j=3}^N p_{jt} q_{jt} \right) \\
 &= \frac{\mathcal{G}_0}{\sum_{j=1}^N p_{j,0} q_{j,0}} \left((1 - \alpha) p_{1t} q_{1t} + 2p_{2t} q_{2t} + \sum_{j=3}^N p_{jt} q_{jt} \right) \\
 &= \frac{\mathcal{G}_0}{\sum_{j=1}^N p_{j,0} q_{j,0}} \left(p'_{1t} q'_{1t} + 2p_{2t} q_{2t} + \sum_{j=3}^N p_{jt} q_{jt} \right).
 \end{aligned}$$

Discuta el caso en el que se resta de la subsidiaria la proporción accionaria contenida en la tenedora. ¿Cuál es la diferencia contable entre las dos alternativas planteadas?

CAPÍTULO 11

CONTRATOS FORWARD SOBRE DIVERSOS SUBYACENTES

Conceptos básicos de este capítulo:

- Contratos forward sobre acciones
- Especulación y cobertura con contratos forward
- Precio de entrega de equilibrio (precio forward)
- Precio de un contrato forward sobre una acción
- Enfoque de ecuaciones diferenciales parciales
- Enfoque probabilista
- Portafolio replicante
- Precio de un contrato forward sobre un índice bursátil
- Precio de un contrato forward sobre un bono
- Precio de un contrato forward sobre tipo de cambio

11.1 Introducción

Todos, en alguna ocasión, hemos acordado una compra futura en los siguientes términos: 1) se desea comprar, en el presente, un bien que alguien vende a un “buen” precio, pero no se cuenta con el dinero para comprarlo sino hasta después de cierto tiempo (unos días, una semana o, posiblemente, unos meses); 2) en el presente se hace un arreglo con el vendedor para que “aguante” un tiempo y ya no busque más compradores; y 3) en el presente se “amarra” el precio del bien en cuestión para ser entregado en una fecha posterior. Un aspecto importante de este tipo de acuerdos es que, para ambas partes, sólo existe la obligación moral de cumplir. Es decir, cualquiera de las partes puede incumplir con el acuerdo y lo más que puede pasar es que se termine la amistad entre ellas. ¿Qué se puede hacer para reforzar el cumplimiento del contrato? La respuesta es simple, si ambas partes entregan garantías (colaterales) a un tercero, el cual además se puede encargar de dar seguimiento a la transacción, a cambio de una comisión, entonces ambas partes cumplirán sus obligaciones.

En los mercados financieros, los contratos de compra-venta futura en los términos anteriores son conocidos como contratos a plazo con garantías. El nombre de estos contratos en el idioma inglés es “forward contracts”, por esta razón los operadores en países de habla hispana se refieren a ellos como contratos forward. En ocasiones, se llega a utilizar la traducción literal de contratos adelantados, siendo este término poco descriptivo de la transacción en cuestión. En este capítulo, como en el resto del libro, aunque no sea muy recomendable el uso de anglicismos en el idioma español, se empleará el nombre de contrato forward por lo extendido del término.

Hechas las aclaraciones anteriores, un contrato forward (financiero) es un acuerdo entre dos partes (reforzado legalmente) que obliga a una de las partes a comprar y a la otra a vender un activo (financiero) a un precio preestablecido en una fecha futura. Estos contratos son exclusivos de los mercados sobre mostrador, también llamados mercados OTC (por las iniciales en inglés de Over-The-Counter markets). Usualmente, este tipo de acuerdos se llevan a cabo entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera y alguno de sus clientes corporativos. Es habitual decir que la parte compradora del contrato toma una posición larga y la vendedora toma una posición corta. Los contratos forward son acuerdos hechos a la medida en cuanto a necesidades específicas de las partes: tipo de subyacente, tamaño del contrato, fecha de vencimiento y lugar y condiciones de entrega. Los contratos forward más comunes en los mercados financieros son sobre: acciones, bonos cupón cero y divisas.

Asimismo, el presente capítulo concede especial atención a la valuación de un contrato forward cuando el subyacente es una acción que presenta rendimientos normales. En este caso, se utiliza tanto el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales como el enfoque probabilista para valuar un contrato forward sobre dicha acción. Un resultado relevante es que, bajo el supuesto

de normalidad en los rendimientos de la acción, el precio de un contrato forward coincide con el precio de equilibrio. El lector podría preguntarse qué caso tiene estudiar enfoques teóricamente más sofisticados y con mayores dificultades técnicas que el afable supuesto de equilibrio cuando ambos producen exactamente los mismos resultados. La respuesta es simple, al estudiar contratos forward, los productos derivados más simples, se presenta la oportunidad de iniciar al lector, de manera sencilla e intuitiva, en el manejo de las herramientas que necesitará en el resto del libro (y en su vida profesional) para valuar productos derivados más complejos.

En el transcurso del capítulo se valían diversos contratos forward con muchos y muy variados subyacentes. Se supone que el riesgo de incumplimiento de cualquiera de las partes es nulo. La valuación de este tipo de productos derivados se lleva a cabo en el marco de equilibrio general, es decir, en ausencia de oportunidades de arbitraje.

Así pues, el capítulo tiene varios objetivos, entre los que destacan: 1) identificar los parámetros y variables relevantes de un contrato forward; 2) determinar las relaciones existentes entre dichas variables; 3) estudiar las características y propiedades de los contratos forward para diversos subyacentes; y 4) proporcionar un marco teórico para valuar dichos instrumentos.

11.2 Especulación y cobertura con contratos forward

Los contratos forward pueden ser utilizados tanto para especulación como para cobertura. En el primer caso, un agente, con expectativas a la alza, que piensa que el precio del activo subyacente aumentará, puede especular tomando una posición larga en un contrato forward sobre el subyacente. Similarmente, un agente que piensa que el precio del subyacente disminuirá, puede especular tomando una posición corta en un contrato forward sobre dicho subyacente. Existe una diferencia importante entre especular comprando o vendiendo contratos forward y especular comprando o vendiendo el activo subyacente. Cuando se compran activos subyacentes en el mercado de contado se requiere de un pago inicial en efectivo igual al valor del subyacente. Sin embargo, si se utiliza un contrato forward sobre el mismo activo, no se requiere de algún pago inicial. Por lo tanto, especular utilizando contratos forward proporciona al agente ciertas ventajas. El caso de cobertura se puede analizar de manera semejante.

11.3 Contratos forward sobre una acción que no paga dividendos

Los contratos forward sobre una acción, que no paga dividendos durante la vigencia del acuerdo, son los productos derivados más simples y también los más fáciles de valuar. Estos contratos, de características muy sencillas, son activamente negociados en los mercados OTC de muchos países.

Un contrato forward sobre una acción que no paga dividendos es un acuerdo (legal) entre dos partes, establecido al tiempo $t = 0$ (el presente), que obliga a una de las partes a comprar y a la otra a vender una acción en una fecha futura, T , a un precio predeterminado, K . El comprador paga la cantidad pactada, K , hasta la fecha de vencimiento, T , momento en que el vendedor entrega la acción. En todo lo que sigue, el precio pactado, K , será llamado precio de entrega. Es muy importante destacar que al celebrar este tipo de contratos ninguna de las partes incurre en costos.

11.3.1 Valor final de las posiciones

Considere un contrato forward sobre una acción con vencimiento en T . Sea S_T el precio de contado (precio "spot") de la acción en la fecha de vencimiento, T . Llegada la fecha de vencimiento la posición larga paga K y recibe una acción con valor de mercado S_T . El valor final, o perfil de pagos, de la posición larga en el vencimiento, está dado por

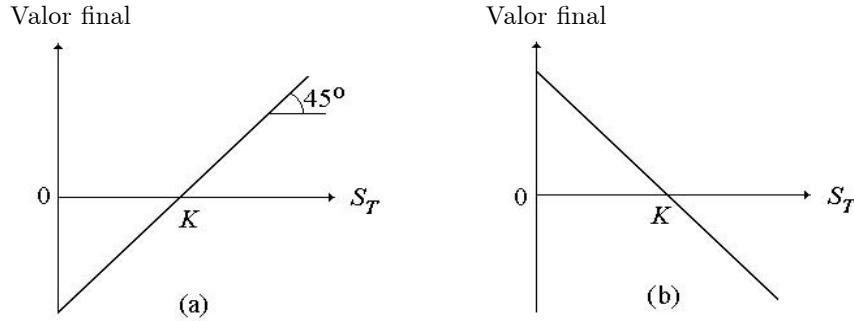
$$S_T - K. \quad (11.1)$$

Similarmente, el valor final de la posición corta, o perfil de pagos de la posición corta en el vencimiento, está dado por

$$K - S_T. \quad (11.2)$$

Observe que el valor final de la posición larga puede ser positivo, en cuyo caso se genera una ganancia, o negativo, con lo cual se produce una pérdida. En otras palabras, si se pacta a un

precio K que resulta ser menor que el precio de la acción en el mercado, S_T , entonces se genera una ganancia igual a $S_T - K$; la situación contraria produce una pérdida de magnitud $K - S_T$. Un análisis semejante de pérdidas y ganancias puede llevarse a cabo para la posición corta. Los perfiles de pago (11.1) y (11.2) definen un juego de suma cero, es decir, la cantidad que una de las partes gana la contraparte la pierde y viceversa. La gráfica 11.1 muestra los pagos finales de las posiciones de un contrato forward.



Gráfica 11.1 Valores finales de las posiciones de un contrato forward.
(a) posición larga, (b) posición corta.

11.3.2 Precio de entrega de equilibrio

Con el propósito de determinar el precio de entrega de equilibrio del activo subyacente, en un contrato forward, se construye una estrategia de inversión que elimina la incertidumbre del precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento. Es importante resaltar que el empleo de condiciones de no arbitraje en la estrategia es central en la determinación de dicho precio de entrega de equilibrio.

Observe, primero, que el valor de la posición larga del contrato forward, en la fecha de vencimiento, es $S_T - K$, cantidad que se desconoce en el momento en que inicia el contrato, $t = 0$, pues el valor de mercado, S_T , no se conocerá sino hasta el tiempo T . No obstante, es posible construir una estrategia de inversión que elimina la incertidumbre, en T , asociada al precio S_T . Sea S_0 el precio de contado de la acción en la fecha de inicio del contrato, $t = 0$. Se toma, primero, una posición larga en un contrato forward en $t = 0$. Por definición, en el momento en que se inicia el contrato no tiene costo para ninguna de las partes. Al mismo tiempo, se realiza una venta en corto de la acción, es decir, se pide prestada la acción y se vende en el mercado (en una fecha posterior se recompra para regresárla junto con una prima), esta operación es posible (y legal) en muchos países. De esta manera, se tiene un portafolio compuesto por la cantidad en efectivo de la acción vendida, S_0 , por la venta en corto (con prima cero), $-S_0$, y una posición larga en un contrato forward de valor $V_0 = 0$. En este caso, el valor (o posición neta) del portafolio combinado, al tiempo $t = 0$, es cero. Específicamente, si Π_0 denota el valor del portafolio en $t = 0$, entonces

$$\Pi_0 = S_0 - S_0 + V_0 = 0.$$

Al mismo tiempo, se supone que existe en el mercado una alternativa de inversión libre de riesgo, por ejemplo, una cuenta bancaria o un bono. Si se abre una cuenta bancaria con una inversión inicial S_0 (el efectivo en el portafolio Π_0) y se supone que los intereses son pagados a una tasa de interés (anualizada) libre de riesgo (crédito), constante a todos los plazos y continuamente capitalizable, r , entonces el capital junto con los intereses ganados, I_T , al tiempo T , están dados por:¹

$$I_T = S_0 e^{rT}. \quad (11.3)$$

En todo el razonamiento anterior es importante destacar que en esta economía están permitidas las ventas en corto y los agentes pueden prestar y pedir prestado en un sistema bancario cualquier

¹ El tiempo T , se mide como proporción de un año. Por ejemplo: $T=2$ significa 2 años, $T=1$ significa 1 año, $T=1/2$ significa 6 meses, $T=1/3$ significa 1 cuatrimestre, $T=1/4$ significa 1 trimestre, $T=1/12$ significa 1 mes, $T=1/52$ significa 1 semana, y $T=1/360$ significa 1 día.

cantidad a una tasa de interés constante y libre de riesgo (crédito), r . Se supone por el momento que $I_T \geq K$, es decir, que los intereses alcanzan para pagar K , y recibir la acción por S_T , misma que se utiliza para cancelar la venta en corto, $-S_T$, sin importar cuál fue el valor final S_T . La posición neta al vencimiento conduce a un portafolio de valor

$$\begin{aligned}\Pi_T &= I_T - K + S_T - S_T \\ &= S_0 e^{rT} - K.\end{aligned}\tag{11.4}$$

En este caso, se generan oportunidades de arbitraje. En efecto, si K es menor que $S_0 e^{rT}$, la posición larga tendría una ganancia igual a $S_0 e^{rT} - K > 0$, sin costo y libre de riesgo. En el otro caso, si K es más grande que $S_0 e^{rT}$, convendría entonces entrar en la posición opuesta, al tomar una posición corta en el contrato forward, se produce de nuevo una ganancia, $K - S_0 e^{rT} > 0$, sin costo y libre de riesgo. Evidentemente, mientras los agentes puedan tomar ventaja de estas oportunidades, el mercado no puede estar en equilibrio. Esto equivale a decir que si el mercado está en equilibrio, entonces no existen oportunidades de arbitraje y Π_T tiene que ser cero. Por lo tanto, el precio de entrega de equilibrio, K^* , de un contrato forward satisface

$$K^* = S_0 e^{rT}.\tag{11.5}$$

De esta manera, el precio de entrega de equilibrio de la acción, K^* , es proporcional al precio de contado de la acción en el presente, S_0 . El factor de proporcionalidad, e^{rT} , es justamente el valor del dinero en el tiempo. Es también frecuente denotar el precio de entrega de equilibrio, o precio forward, de la acción en el tiempo $t = 0$ como $F_{0,T}$ y esto será, justamente, lo que se hará en el resto del capítulo.

11.3.3 Precio de entrega de equilibrio de una acción en cualquier tiempo

Con el propósito de obtener el precio de entrega de equilibrio de una acción en cualquier tiempo, el supuesto básico, como en la sección anterior, es que los mercados están en equilibrio y, en consecuencia, no existen oportunidades de arbitraje (libres de riesgo).

Se quiere demostrar que si $F_{t,T}$ es el precio de entrega de equilibrio en el tiempo $t \in [0, T]$, entonces

$$F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}.\tag{11.6}$$

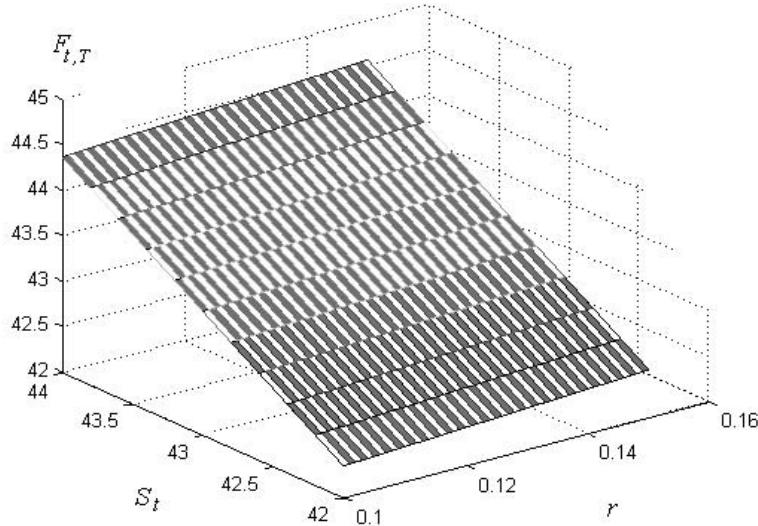
Suponga, por el contrario, que $F_{t,T} > S_t e^{r(T-t)}$, entonces un agente podría pedir prestado S_t por un periodo $[t, T]$ a una tasa de interés libre de riesgo, r , comprar la acción al tiempo t e inmediatamente después tomar una posición corta en un contrato forward con precio de entrega $F_{t,T}$. Así, al tiempo T , el agente entrega la acción a cambio de $F_{t,T}$, cumpliendo con el contrato forward, pagando en este momento el préstamo más los intereses generados, es decir, paga $S_t e^{r(T-t)}$, obteniendo una ganancia, libre de riesgo, dada por:

$$F_{t,T} - S_t e^{r(T-t)} > 0.\tag{11.7}$$

En consecuencia, $F_{t,T}$ no puede ser el precio de entrega de equilibrio. Por otro lado, si $F_{t,T} < S_t e^{r(T-t)}$, entonces el agente podría llevar a cabo una venta en corto de la acción y tomar una posición larga en un contrato forward con precio de entrega $F_{t,T}$. Es decir, al tiempo t , pide prestada la acción y la vende por S_t , cantidad que presta a la tasa r . En la fecha de vencimiento, T , adquiere la acción por $F_{t,T}$, para devolverla a quien se la prestó. Así, el agente obtiene una ganancia, libre de riesgo,

$$S_t e^{r(T-t)} - F_{t,T} > 0.\tag{11.8}$$

Esta oportunidad de arbitraje indica, simplemente, que $F_{t,T}$ no puede ser el precio de entrega de equilibrio. Las contradicciones (11.7) y (11.8) demuestran que $F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}$ es, efectivamente, el precio de entrega de equilibrio de una acción en cualquier tiempo t . Como antes $F_{t,T}$ es también llamado el precio forward de la acción en t . La gráfica 11.2 muestra el precio forward en función de S_t y r con $T - t = 1/12$. En esta gráfica, los valores de las variables independientes se tomaron como sigue: $42 \leq S_t \leq 44$ y $0.1 \leq r \leq 0.16$.

Gráfica 11.2 Precio forward en función de S_t y r .

11.3.4 Precio de equilibrio de un contrato forward sobre una acción

En esta sección, con base en estrategias de inversión y condiciones de equilibrio, se valúa un contrato forward sobre una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato. Se supone que el riesgo de incumplimiento de cualquiera de las partes es nulo.

A continuación se demuestra que el valor de un contrato forward sobre una acción en $t \in [0, T]$, para una posición larga, está dado por

$$V_t = (F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)}. \quad (11.9)$$

En efecto, se toma primero en $t = 0$ una posición larga sobre un contrato forward con precio de entrega K y vencimiento T . El precio inicial del contrato es $V_0 = 0$. Sin embargo, inmediatamente después, en $t > 0$, el precio del contrato forward, V_t , ya no es cero, excepto por pura casualidad. En dicho tiempo t , se toma una posición corta sobre un contrato forward con precio de entrega $F_{t,T}$ y vencimiento en T . El valor final de esta estrategia es

$$\Pi_T = (S_T - K) + (F_{t,T} - S_T) = F_{t,T} - K. \quad (11.10)$$

Por definición, el segundo contrato tiene valor cero para ambas partes. Así, el precio de equilibrio en t , del contrato forward está dado por el valor presente de (11.10), es decir,

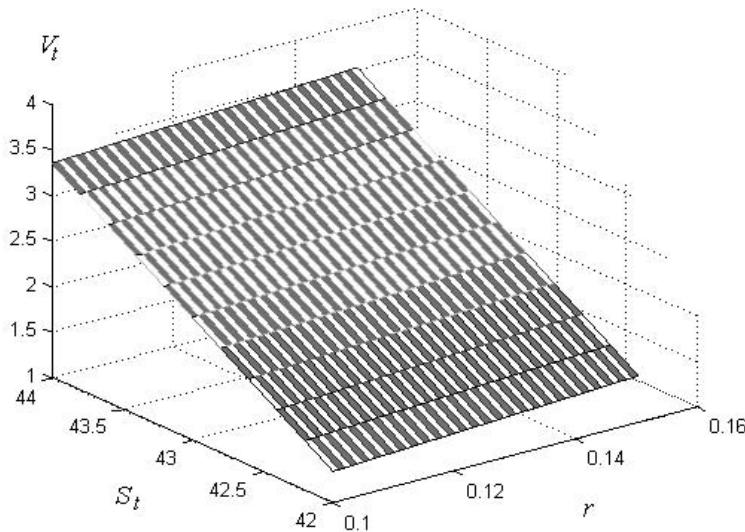
$$V_t = (F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)},$$

lo que coincide plenamente con (11.9). Al transcurrir el tiempo, *i.e.*, cuando $t \in (0, T]$, el precio forward, $F_{t,T}$, cambia, mientras que el precio de entrega, K , se mantiene constante durante la vida del contrato. En general, el precio forward y el precio de entrega no son iguales en $t \in (0, T]$. La ecuación (11.9) se puede escribir, con base en (11.6), en forma alternativa como

$$V_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}, \quad t \in (0, T]. \quad (11.11)$$

La gráfica 11.3 muestra el precio de un contrato forward en función del precio de acción, S_t , y de la tasa de interés libre de riesgo, r . En esta gráfica, los valores de las variables independientes y los parámetros se tomaron como sigue: $42 \leq S_t \leq 44$, $0.1 \leq r \leq 0.16$, $K = 41$ y $T - t/12$.

En virtud de (11.11), en ocasiones, será conveniente escribir $V_t = V(S_t, t)$ para destacar la dependencia del precio de contado de la acción en el presente S_t . Por último, observe que si se utiliza (11.9), se sigue que $F_{0,T} = S_0e^{rT}$, ya que por definición $V_0 = 0$.

Gráfica 11.3 Precio de un contrato forward en función de S_t y r .

11.4 Valuación de un contrato forward (enfoque de ecuaciones diferenciales parciales)

En esta sección se utilizará el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales para valuar, en ausencia de oportunidades de arbitraje, un contrato forward sobre una acción que no paga dividendos. Al estudiar contratos forward, los productos derivados más simples, se presenta la oportunidad de familiarizar al lector, de manera sencilla e intuitiva, con las técnicas y herramientas necesarias para valuar otros productos derivados más complicados. Se supone que la dinámica estocástica del precio de la acción es conducida por un proceso Markoviano de difusión, en particular, por un movimiento geométrico Browniano. El lema de Itô y las condiciones de no arbitraje desempeñan un papel fundamental en el proceso de valuación del contrato.

En este enfoque, se supone que el precio del activo subyacente sigue un proceso estocástico log-normal. Es decir, el rendimiento (tasa de crecimiento del precio) se comporta como un proceso normal. Se supone, en particular, que el precio de la acción tiene una dinámica estocástica conducida por un movimiento geométrico Browniano de la siguiente forma

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (11.12)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es el rendimiento medio esperado de la acción, $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea de la acción y $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido en un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En lo subsecuente, es conveniente denotar el precio de un contrato forward como $V = V(S_t, t)$ resaltando la dependencia con S_t . Considere un portafolio con w_1 unidades del activo subyacente y w_2 de contratos forward sobre dicho subyacente, entonces el valor del portafolio está dado por

$$\Pi_t = w_1 S_t + w_2 V. \quad (11.13)$$

Es natural preguntar cómo el valor del portafolio cambia de t a $t + dt$, donde dt es un instante en el tiempo. El cambio en el valor del portafolio por movimientos en el mercado, no por rebalanceo (no por cambios en w_1 y w_2), satisface

$$d\Pi_t = w_1 dS_t + w_2 dV. \quad (11.14)$$

Si se aplica el lema de Itô a $V(S_t, t)$, con base en (11.12), se tiene que:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dt \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Si se sustituyen (11.12) y (11.15) en la ecuación (11.14), el cambio en el valor del portafolio satisface

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \left(w_1 + w_2 \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt + \left(w_1 + w_2 \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t \\ &\quad + w_2 \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (11.16)$$

11.4.1 Administración del riesgo mercado del portafolio

Si en la ecuación (11.16) se eligen, por ejemplo, $w_1 = -\partial V / \partial S_t$ y $w_2 = 1$ (existen infinitas posibilidades de seleccionar w_1 y w_2), se elimina el término estocástico de tal manera que

$$\Pi_t^{(w)} = -\frac{\partial V}{\partial S_t} S_t + V \quad (11.17)$$

y

$$d\Pi_t^{(w)} = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt. \quad (11.18)$$

Observe que, bajo la elección de $w_1 = -\partial V / \partial S_t$ y $w_2 = 1$, el cambio en el valor del portafolio, $d\Pi_t^{(w)}$, es una cantidad determinista y, por lo tanto, inmune al riesgo de mercado. La estrategia anterior es un ejemplo de cobertura dinámica. De un periodo a otro, la cantidad $\partial V / \partial S_t$ cambia, ya que es una función en la variable S_t , la cual cambia con t . Este tipo de cobertura “perfecta” debe ser balanceada continuamente. En la práctica dt puede ser: unas horas, un día o, posiblemente, una semana, dependiendo de la estabilidad del ambiente de negocios y del entorno económico.

11.4.2 Existencia de otra alternativa de inversión libre de riesgo

Suponga ahora que existe un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante y libre de riesgo de incumplimiento, r . Si la cantidad $\Pi_t^{(w)} = -(\partial V / \partial S_t) S_t + V$ se deposita en un banco, el rendimiento, en esta alternativa de inversión libre de riesgo está dado por

$$d\Pi_t^{(r)} = \Pi_t^{(w)} r dt = \left(-\frac{\partial V}{\partial S_t} S_t + V \right) r dt. \quad (11.19)$$

11.4.3 Condición de equilibrio entre alternativas de inversión

En esta sección se establece la condición de equilibrio entre las dos alternativas de inversión presentadas anteriormente: el portafolio que combina el contrato forward con su subyacente y la cuenta bancaria. Dicha condición conduce a una ecuación diferencial parcial que determina el precio del contrato forward cuando los rendimientos de la acción siguen una distribución normal.

Si los mercados están en equilibrio, entonces se debe cumplir que

$$d\Pi_t^{(w)} = d\Pi_t^{(r)}. \quad (11.20)$$

En efecto, si el rendimiento del portafolio, $d\Pi_t^{(w)}$, fuera más grande que el rendimiento que ofrece el banco, los agentes podrían pedir prestado al banco, en t , la cantidad $\Pi_t^{(w)}$ para invertir en el portafolio y pagarían, en $t + dt$, el monto $d\Pi_t^{(r)}$, lo cual genera un beneficio libre de riesgo $d\Pi_t^{(w)} - d\Pi_t^{(r)} > 0$. Si, por otro lado, el rendimiento del portafolio, $d\Pi_t^{(w)}$, fuera menor que $d\Pi_t^{(r)}$, entonces los agentes sólo invertirían en el banco. Por lo tanto, el equilibrio expresado en (11.20) se cumple, lo cual conduce a

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - r V = 0, \quad (11.21)$$

junto con la condición de frontera (condición final)

$$V(S_t, T) = S_t - K.$$

La ecuación (11.21) es una ecuación diferencial parcial lineal parabólica. De hecho casi todas las ecuaciones diferenciales parciales que determinan el precio de un producto derivado tienen una forma similar. Generalmente, estas ecuaciones son lineales, lo cual significa que si se tienen dos soluciones, entonces la suma de ellas también es una solución. Este tipo de ecuaciones son también, generalmente, parabólicas, las cuales están asociadas con la ecuación de calor y son relativamente fáciles de resolver numéricamente. Asimismo, observe que (11.21) contiene todas las variables y parámetros relevantes, excepto el rendimiento medio esperado de la acción, μ . Es decir, la valuación del contrato forward es independiente de las preferencias al riesgo de los agentes participantes en el mercado.

Observe que, en virtud de (11.11), el precio de equilibrio de un contrato forward sobre una acción está dado por

$$V(S_t, t) = S_t - Ke^{-r(T-t)}, \quad t \in [0, T], \quad S_t \geq 0.$$

Evidentemente, $V(S_t, T) = S_t - K$. Para verificar que este precio cumple con (11.21) es suficiente calcular las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}, \quad \frac{\partial V}{\partial S_t} = 1, \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} = 0.$$

La sustitución de estas derivadas parciales en (11.21) conduce a una identidad ($0=0$). Por lo tanto, $V(S_t, t) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$ es solución de (11.21). De hecho, es la única solución que satisface $V(S_t, T) = S_t - K$.

11.5 Obtención alternativa de la ecuación diferencial parcial del precio de un contrato forward con portafolios replicantes y autofinanciables

Considere un bono que paga rendimientos de acuerdo con la relación $dB_t = rB_t dt$, donde r es una tasa de interés constante y libre de riesgo, así como un portafolio con w_{1t} unidades del activo subyacente y w_{2t} del bono, el cual tiene un valor

$$w_{1t}S_t + w_{2t}B_t = V. \quad (11.22)$$

Se dice que el portafolio (11.22) replica a V si

$$w_{1T}S_T + w_{2T}B_T = S_T - K$$

y

$$S_t dw_1 + B_t dw_2 = 0.$$

La primera condición indica que no hay oportunidades de arbitraje y la segunda que la razón de cambio entre w_{1t} y w_{2t} es siempre igual a $-S_t/B_t$. De esta manera, el cambio en el valor del portafolio de t a $t+dt$ está dado por

$$w_{1t}dS_t + w_{2t}dB_t = dV.$$

Después de aplicar el lema de Itô a $V(S_t, t)$, se sigue que

$$(w_{1t}\mu S_t + w_{2t}rB_t)dt + w_{1t}\sigma S_t dW_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t. \quad (11.23)$$

Así, al igualar los términos estocásticos de ambos lados de (11.23), se tiene:

$$w_{1t} = \frac{\partial V}{\partial S_t}. \quad (11.24)$$

En virtud de (11.22), se sigue que:

$$w_{2t} = \left(V - \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t \right) B_t^{-1}. \quad (11.25)$$

Por otro lado, al igualar las partes deterministas en ambos lados de (11.23) y sustituir (11.24) y (11.25), se encuentra que

$$\frac{\partial V}{\partial S_t} \mu S_t + rV - \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}.$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \frac{\partial V}{\partial S_t} r S_t - rV = 0.$$

Este resultado, junto con $V(S_t, T) = S_t - K$, coincide con (11.21).

11.6 Valuación neutral al riesgo de un contrato forward (enfoque probabilista)

En esta sección se valúa un contrato forward sobre una acción que no paga dividendos en términos del valor esperado del precio de la acción en la fecha de vencimiento. Se supone que el precio de la acción es conducido por el siguiente movimiento geométrico Browniano:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (11.26)$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo, $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea y $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad equipado con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. De esta manera, W_t tiene incrementos normales independientes con $E[dW_t] = 0$ y $\text{Var}[dW_t] = E[(dW_t)^2] = dt$. En este caso, se puede escribir

$$dW_t = \mathcal{E} \sqrt{dt} \quad \text{con} \quad \mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

El precio de un contrato forward está dado por

$$V_t = e^{-r(T-t)} E[S_T - K \mid \mathcal{F}_t]. \quad (11.27)$$

Es decir, el precio de un contrato forward es el valor presente del valor esperado del pago al final del contrato. Observe que el lema de Itô, aplicado a $\ln(S_t)$, conduce a

$$d \ln(S_t) = \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t.$$

Al discretizar la expresión anterior en los tiempos t y T , se tiene que

$$\ln(S_T) - \ln(S_t) = \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) + \sigma \sqrt{T - t} \mathcal{E}. \quad (11.28)$$

Por lo tanto,

$$\ln \left(\frac{S_T}{S_t} \right) \sim \mathcal{N} \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right). \quad (11.29)$$

Es decir, $\ln(S_T/S_t)$ tiene una distribución normal con media $(r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T - t)$ y varianza $\sigma^2(T - t)$. Por lo anterior,

$$\mathcal{E} = \frac{\ln \left(\frac{S_T}{S_t} \right) - \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (11.30)$$

Si se define

$$S_T \equiv g(\mathcal{E}) = S_t \exp \left\{ \mathcal{E} \sigma \sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t) \right\}, \quad (11.31)$$

se tiene que

$$g^{-1}(S_T) \equiv \frac{\ln \left(\frac{S_T}{S_t} \right) - (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}. \quad (11.32)$$

Por lo tanto, la función de densidad de S_T , dado S_t , está dada por

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \phi_{\mathcal{E}}(g^{-1}(s)) \left| \frac{dg^{-1}(s)}{ds} \right|, \quad (11.33)$$

donde la función de densidad de \mathcal{E} , $\phi_{\mathcal{E}}(\epsilon)$, está dada por

$$\phi_{\mathcal{E}}(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} \left| \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \frac{S_t}{s} \frac{1}{S_t} \right|$$

6

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)} \sigma s} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}. \quad (11.34)$$

Observe ahora que la media de S_T satisface

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_T | S_t] &= \int_0^\infty s f_{S_T}(s|S_t) ds \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} S_t e^{\epsilon\sigma\sqrt{T-t}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \sigma \sqrt{T-t} d\epsilon \\ &= S_t e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[\epsilon^2 - 2\sigma\sqrt{T-t}\epsilon + \sigma^2(T-t)]} d\epsilon \\ &= S_t e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon - \sigma\sqrt{T-t})^2} d\epsilon \\ &= S_t e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &= S_t e^{r(T-t)}, \end{aligned} \quad (11.35)$$

donde se ha utilizado el cambio de variable $u = \epsilon - \sigma\sqrt{T-t}$. En virtud de (11.27) y (11.35), se concluye que

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[S_T - K | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} (\mathbb{E}[S_T | \mathcal{F}_t] - K) \\ &= e^{-r(T-t)} (S_t e^{r(T-t)} - K) = S_t - K e^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

El resultado anterior coincide con (11.6). En este caso, el precio forward de la acción está dado por $F_{t,T} = \mathbb{E}[S_T | \mathcal{F}_t] = S_t e^{r(T-t)}$.

11.7 Valuación de un contrato forward sobre una acción que paga un dividendo

En esta sección se estudian los contratos forward sobre una acción que paga un dividendo conocido en una fecha conocida dentro de la vigencia del contrato. De ahora en adelante se trabajará, de nuevo, en el marco determinista. Para ilustrar las ideas centrales en la valuación de este tipo de contratos, considere la siguiente situación: un individuo desea comprar una acción en una fecha posterior T , razón por la que toma hoy, en t , una posición larga en un contrato forward con vencimiento en T . Sin embargo, al tiempo τ , $\tau < T$, la acción paga un dividendo D_τ que la posición corta recibe. Por supuesto, τ y D_τ son conocidos en t . En este caso, el precio de entrega de equilibrio está dado por

$$F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)} - D_\tau e^{r(T-\tau)}, \quad (11.36)$$

donde S_t es el precio de contado de la acción en el presente. Evidentemente, en τ el precio de la acción tiene un ajuste técnico por el pago del dividendo. Si se denota $I_t = D_\tau e^{-r(\tau-t)}$ y se define el precio de un nuevo subyacente $s_t = S_t - I_t$, entonces

$$F_{t,T} = s_t e^{r(T-t)}. \quad (11.37)$$

Si se procede con argumentos típicos de arbitraje, como en el caso de un contrato forward sobre una acción que no paga dividendos, la ecuación (11.36) puede ser generalizada al pago de N dividendos, D_{τ_k} , $k = 1, 2, \dots, N$, en fechas $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N$ como:

$$F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)} - \sum_{k=1}^N D_{\tau_k} e^{r(T-\tau_k)}. \quad (11.38)$$

En caso de que los dividendos se paguen continuamente a una tasa q , entonces el precio de la acción S_t se descuenta (continuamente) como $S_t e^{-q(T-t)}$. Si se define el precio de un nuevo subyacente $s_t = S_t e^{-q(T-t)}$, se tiene que

$$F_{t,T} = s_t e^{r(T-t)} = S_t e^{-q(T-t)} e^{r(T-t)} = S_t e^{(r-q)(T-t)}. \quad (11.39)$$

En cualquier caso, el precio, en t , del contrato forward está dado por $V_t = (F_{t,T} - K) e^{-r(T-t)}$.

11.7.1 Valuación de contratos forward sobre una acción que paga dividendos cuando existe una curva de rendimiento disponible (continuamente capitalizable)

En el caso de un contrato forward sobre una acción que no paga dividendos, el supuesto de que la tasa de interés es constante e igual a r , no es muy restrictivo. Si se cuenta con una curva de rendimientos, o estructura de plazos de la tasa de interés, asociada a un bono cupón cero, entonces se toma la tasa de interés r igual a la tasa de interés del mismo plazo que proporciona la estructura de plazos. Sin embargo, cuando hay un pago de dividendos durante la vida del contrato, se tienen dos períodos relevantes, antes y después de dicho pago. En la práctica, no es razonable pensar que la tasa de interés sea constante en ambos períodos. Usualmente, se cuenta con una curva de rendimiento, asociada a un bono cupón cero, para descontar flujos esperados de efectivo. Sea $R(t, T)$ una curva de rendimiento con referencia en t asociada a un bono cupón cero $B(t, T)$, el cual se coloca en t y paga una unidad monetaria al vencimiento, T . De esta manera,

$$R(t, T) = -\frac{\ln(B(t, T))}{T - t}.$$

Sea $f(t, \tau, T)$ la tasa forward de equilibrio aplicable en $[\tau, T]$ con referencia en t y asociada a $R(t, T)$. Es decir,

$$R(t, T)(T - t) = R(t, \tau)(\tau - t) + f(t, \tau, T)(T - \tau). \quad (11.40)$$

En este caso, el precio forward de la acción satisface

$$F_{t,T} = S_t e^{R(t,T)(T-t)} - D_\tau e^{f(t,\tau,T)(T-\tau)} \quad (11.41)$$

y el precio del contrato forward, en equilibrio, está dado por

$$\begin{aligned} V_t &= S_t - D_\tau e^{-R(t,\tau)(\tau-t)} - K e^{-R(t,T)(T-t)} \\ &= S_t - D_\tau e^{f(t,\tau,T)(T-\tau)-R(t,T)(T-t)} - K e^{-R(t,T)(T-t)}. \end{aligned} \quad (11.42)$$

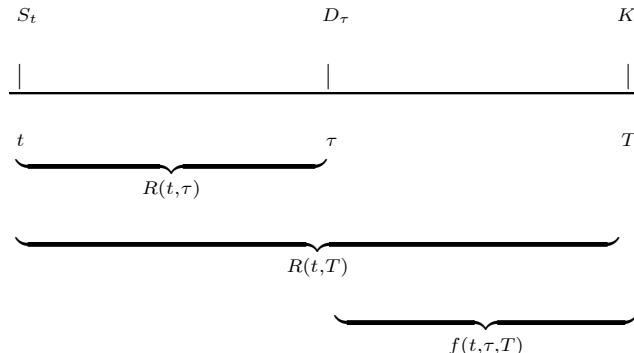
Si se despeja S_t de (11.41), se sigue que

$$S_t = F_{t,T} e^{-R(t,T)(T-t)} + D_\tau e^{f(t,\tau,T)(T-\tau)-R(t,T)(T-t)}. \quad (11.43)$$

Si ahora se sustituye (11.43) en (11.42) y se toma en cuenta el equilibrio (11.40), se obtiene

$$\begin{aligned} V_t &= S_t - D_\tau e^{f(t,\tau,T)(T-\tau)-R(t,T)(T-t)} - K e^{-R(t,T)(T-t)} \\ &= F_{t,T} e^{-R(t,T)(T-t)} + D_\tau e^{f(t,\tau,T)(T-\tau)-R(t,T)(T-t)} \\ &\quad - D_\tau e^{f(t,\tau,T)(T-\tau)-R(t,T)(T-t)} - K e^{-R(t,T)(T-t)} \\ &= F_{t,T} e^{-R(t,T)(T-t)} - K e^{-R(t,T)(T-t)} \\ &= (F_{t,T} - K) e^{-R(t,T)(T-t)}. \end{aligned}$$

De esta manera, el precio del contrato forward se calcula como el valor presente de la diferencia entre los precios forward y de entrega como siempre. La gráfica 11.4 muestra el pago del dividendo, la estructura de plazos y tasa forward.



Gráfica 11.4 Pago de un dividendo, estructura de plazos y tasa forward.

11.7.2 Valuación de contratos forward sobre una acción que paga dividendos cuando existe una curva de rendimiento (linealmente capitalizable)

Considere una curva de rendimiento $\tilde{R}(t, T)$ linealmente capitalizable asociada a un bono cupón cero, de precio $B(t, T)$, de tal manera que

$$\tilde{R}(t, T) = \frac{1}{T-t} \left(\frac{B(t, T) - B(t, t)}{B(t, t)} \right) = \frac{B(t, T) - 1}{T-t}, \quad (11.44)$$

donde $B(t, t) = 1$. Suponga, como antes, que la acción paga un dividendo en la fecha τ y que el precio “spot” de la acción al tiempo t es S_t , entonces el precio forward está dado por

$$F_{t,T} = S_t(1 + \tilde{R}(t, T)(T - t)) - D_\tau(1 + \varphi(t, \tau, T)(T - \tau)), \quad (11.45)$$

donde $\varphi(t, \tau, T)$ es la tasa forward. El valor del contrato forward de la acción satisface

$$V_t = \frac{F_{t,T} - K}{1 + \tilde{R}(t, T)(T - t)}. \quad (11.46)$$

La tasa forward de equilibrio se determina mediante la condición de no arbitraje

$$[1 + \tilde{R}(t, \tau)(\tau - t)][1 + \varphi(t, \tau, T)(T - \tau)] = 1 + \tilde{R}(t, T)(T - t). \quad (11.47)$$

Si se despeja la tasa forward de la expresión anterior se tiene

$$\varphi(t, \tau, T) = \frac{1}{T - \tau} \left[\frac{1 + \tilde{R}(t, T)(T - t)}{1 + \tilde{R}(t, \tau)(\tau - t)} - 1 \right]. \quad (11.48)$$

Por último, observe que tasas continuamente capitalizables, $R(t, T)$, pueden aproximarse en tasas linealmente capitalizables, $\tilde{R}(t, T)$, mediante la expresión

$$e^{R(t, T)(T - t)} \approx 1 + \tilde{R}(t, T)(T - t).$$

11.7.3 Valuación de contratos forward sobre una acción que paga dos dividendos cuando existe una curva de rendimiento (interés linealmente capitalizable)

Suponga que la acción paga dos dividendos, uno en τ_1 y otro en τ_2 , entonces el precio forward $F_{t,T}$, utilizando interés linealmente capitalizable $\tilde{R}(t, T)$, está dado por

$$F_{t,T} = S_t(1 + \tilde{R}(t, T)(T - t)) - D_{\tau_1}(1 + \varphi(t, \tau_1, T)(T - \tau_1)) - D_{\tau_2}(1 + \varphi(t, \tau_2, T)(T - \tau_2)), \quad (11.49)$$

donde las tasas forward de equilibrio $\varphi(t, \tau_1, T)$ y $\varphi(t, \tau_2, T)$ satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$(1 + \tilde{R}(t, \tau_1)(\tau_1 - t))(1 + \varphi(t, \tau_1, T)(T - \tau_1)) = 1 + \tilde{R}(t, T)(T - t)$$

$$(1 + \tilde{R}(t, \tau_2)(\tau_2 - t))(1 + \varphi(t, \tau_2, T)(T - \tau_2)) = 1 + \tilde{R}(t, T)(T - t).$$

Por supuesto, la tasa forward $\varphi(t, \tau_1, \tau_2)$ se puede determinar si además se considera la ecuación

$$1 + \tilde{R}(t, T)(T - t) = (1 + \tilde{R}(t, \tau_1)(\tau_1 - t))(1 + \varphi(t, \tau_1, \tau_2)(\tau_2 - \tau_1))(1 + \varphi(t, \tau_2, T)(T - \tau_2)).$$

Es fácil verificar, en este caso, que

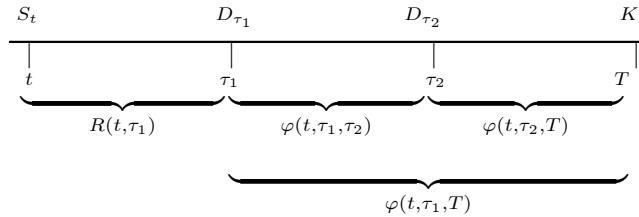
$$\varphi(t, \tau_1, T) = \frac{1}{(T - \tau_1)} \left[\frac{\tilde{R}(t, T)(T - t) - \tilde{R}(t, \tau_1)(\tau_1 - t)}{(1 + \tilde{R}(t, \tau_1)(\tau_1 - t))} \right], \quad (11.50)$$

$$\varphi(t, \tau_2, T) = \frac{1}{(T - \tau_2)} \left[\frac{\tilde{R}(t, T)(T - t) - \tilde{R}(t, \tau_2)(\tau_2 - t)}{(1 + \tilde{R}(t, \tau_2)(\tau_2 - t))} \right] \quad (11.51)$$

y

$$\varphi(t, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \left[\frac{1 + \tilde{R}(t, \tau_2)(\tau_2 - t)}{1 + \tilde{R}(t, \tau_1)(\tau_1 - t)} - 1 \right]. \quad (11.52)$$

En la gráfica 11.5 se muestra el pago de dos dividendos, la estructura de plazos y tasas forward.



Gráfica 11.5 Pago de dos dividendos, estructura de plazos y tasas forward.

Si en la vida del contrato hay N pagos de dividendos conocidos, $D_{\tau_1}, D_{\tau_2}, \dots, D_{\tau_N}$, en las fechas $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N$, entonces el precio forward está dado por

$$F_{t,T} = S_t(1 + \tilde{R}(t, T)(T - t)) - \sum_{k=1}^N D_{\tau_k}[1 + \varphi(t, \tau_k, T)(T - \tau_k)],$$

donde

$$1 + \varphi(t, \tau_k, T)(T - \tau_k) = \frac{1 + \tilde{R}(t, T)(T - t)}{1 + \tilde{R}(t, \tau_k)(\tau_k - t)}.$$

El precio del contrato forward, en función del precio forward, es calculado de manera similar a (11.46), a saber,

$$V_t = \frac{F_{t,T} - K}{1 + \tilde{R}(t, T)(T - t)}.$$

11.8 Valuación de un contrato forward sobre un índice bursátil

Evidentemente, un índice bursátil carece de valor, ni siquiera tiene unidades. Sin embargo, si en el contrato se le asigna a cada punto del índice un valor, entonces el índice tendrá asociado un valor, el cual será denotado por S_t . Así pues, si se establece, en el presente, un precio de entrega K y si, en el vencimiento, $S_T > K$, entonces la posición larga recibe la diferencia $S_T - K$, ya que es imposible (no tiene sentido) entregar el índice. En caso contrario, la posición corta recibe $K - S_T$. Afortunadamente, no es necesario desarrollar un nuevo marco teórico para valuar contratos forward sobre índices bursátiles, ya que todas las fórmulas de valuación de contratos forward sobre acciones, sin y con pago de dividendos, son también aplicables a contratos sobre índices bursátiles.

11.9 Valuación de contratos forward de tasa de interés

En esta sección se valúan contratos forward sobre el pago de intereses de la aplicación de una tasa fija a un nominal preestablecido en un tiempo futuro. Estos contratos son también llamados FRA's por las iniciales en inglés de "Forward Rate Agreement".

Un contrato forward de tasa de interés es un acuerdo en el que una de las partes se compromete a pagar, a la contraparte, la cantidad que se genere al aplicar una tasa de interés fija a un principal predeterminado entre dos fechas futuras.

Consideré un contrato forward de tasa de interés que se establece en $t = 0$. Sea R_K la tasa de interés fija acordada y suponga que se cuenta con una estructura de plazos linealmente capitalizable, $\tilde{R}(t, T)$. Los tiempos futuros entre los que se aplica dicha tasa serán denotados por T_1 y T_2 y el principal por N . Al tiempo T_2 una de las partes tiene que pagar a la contraparte $R_K(T_2 - T_1)N$. Si, al tiempo $t > 0$, la tasa forward de mercado es $\varphi(t, T_1, T_2)$, entonces el valor de dicho contrato forward, en $t > 0$, se calcula, para la posición larga, mediante

$$V_t = \frac{(\varphi(t, T_1, T_2) - R_K)(T_1 - T_2)N}{1 + \tilde{R}(t, T_2)(T_2 - t)}. \quad (11.53)$$

La tasa R_K es llamada tasa forward del contrato, lo cual puede generar confusión con otros conceptos, *v.g.* la tasa forward de equilibrio o la tasa forward de mercado. Por tal razón, R_K será llamada, simplemente, la tasa constante del contrato. En ocasiones, R_K es también llamada tasa FRA.

11.10 Valuación de contratos forward sobre bonos cupón cero

A continuación se estudian los contratos forward sobre bonos cupón cero. Se supone que, al inicio del contrato, existe una curva de rendimiento linealmente capitalizable, $\tilde{R}(t, T)$.

Un contrato forward, que se inicia en t , sobre un bono cupón cero es un acuerdo en el que una de las partes, la posición larga, recibirá un bono cupón cero en la fecha T , el cual vence en $T + M$. La contraparte entrega el bono en T por la cantidad K pactada al inicio del contrato. En este caso, el precio de entrega de equilibrio, o precio forward, del bono cupón cero está dado por

$$F_{t,T} = S_t(1 + \tilde{R}(t, T)(T - t)), \quad (11.54)$$

donde

$$S_t = \frac{N}{1 + \tilde{R}(t, T + M)(T + M - t)}.$$

Observe que S_t es el precio de un bono cupón cero que se coloca en t y vence en $T + M$ con valor nominal N . La expresión (11.54) puede escribirse de manera alternativa como

$$F_{t,T} = \frac{S_t}{B(t, T)},$$

donde $B(t, T)$ es el precio de un bono cupón cero que se coloca en t y que al vencimiento paga una unidad monetaria, el cual está dado por

$$B(t, T) = \frac{1}{1 + \tilde{R}(t, T)(T - t)}.$$

Por último, el precio de equilibrio del contrato forward sobre el bono cupón cero, que inicia en t y vence en $T + M$, está dado por

$$V_t = \frac{F_{t,T} - K}{1 + \tilde{R}(t, T)(T - t)} \quad (11.55)$$

ó, en términos del precio del bono,

$$V_t = (F_{t,T} - K)B(t, T).$$

11.11 Valuación de contratos forward sobre bonos cuponados con tasa cupón constante

En la sección anterior se determinó el precio forward de un bono cupón cero y el precio de un contrato forward sobre dicho bono. En esta sección se estudian los contratos forward sobre bonos cuponados. Se supone que, al inicio del contrato, existe una curva de rendimiento linealmente capitalizable.

Por simplicidad, se considera un bono que paga sólo dos cupones. Suponga que la posición larga del contrato forward recibe en el vencimiento T un bono con valor nominal N . Asimismo, suponga que en los tiempos $T + (M/2)$ y $T + M$ paga cupones con tasa fija de R_K . Por lo tanto, los cupones son $C_1 = C_2 = R_K M N/2$. En este caso, el precio forward del bono cuponado es

$$F_{t,T} = S_t(1 + \tilde{R}(t, T)(T - t)) \quad (11.56)$$

donde

$$S_t = \frac{R_K M N/2}{(1 + \tilde{R}(t, T + (M/2))(T + (M/2) - t))} + \frac{(R_K M N/2) + N}{1 + \tilde{R}(t, T + M)(T + M - t)}. \quad (11.57)$$

Por último, el valor del contrato forward es

$$V_t = \frac{F_{t,T} - K}{1 + \tilde{R}(t, T)(T - t)}.$$

11.12 Contratos forward sobre tipo de cambio

En esta sección se desarrolla la teoría de los contratos forward sobre el tipo de cambio. Un inversionista entra en una posición larga de un contrato forward hoy, en el tiempo t , para pactar el precio de una divisa en términos de la moneda doméstica, es decir, para pactar el tipo de cambio. La primera pregunta que hay que contestar es ¿cuánto vale hoy una unidad de la divisa que estará disponible hasta el tiempo T ? la respuesta es simple,

$$\frac{1}{1 + r^*(T - t)},$$

donde r^* representa la tasa de interés extranjera libre de riesgo. Por lo tanto, el valor en t de la divisa en términos de la moneda doméstica es

$$S_t = \frac{D_t}{1 + r^*(T - t)},$$

donde D_t es el tipo de cambio. En consecuencia, el precio forward, en términos de la moneda doméstica está dado por

$$F_{t,T} = S_t(1 + r(T - t)) = D_t \left(\frac{1 + r(T - t)}{1 + r^*(T - t)} \right), \quad (11.58)$$

donde r es la tasa de interés doméstica libre de riesgo. Observe que el precio del contrato forward sobre tipo de cambio está dado por

$$V_t = \frac{F_{t,T} - K}{1 + r(T - t)} = \frac{D_t}{1 + r^*(T - t)} - \frac{K}{1 + r(T - t)} = S_t - \frac{K}{1 + r(T - t)}.$$

Si las tasas son continuamente capitalizables, el tipo de cambio forward queda representado por

$$F_{t,T} = D_t e^{(r - r^*)(T - t)}$$

y el valor del contrato por

$$V_t = (F_{t,T} - K) e^{-r(T-t)} = S_t - K e^{-r(T-t)},$$

donde

$$S_t = D_t e^{-r^*(T-t)}.$$

La fórmula (11.58) también puede ser obtenida alternativamente como sigue. Suponga que, en t , el agente pide prestado al banco N_t unidades monetarias domésticas. De esta manera, en T , tendrá que pagar

$$N_T = N_t(1 + r(T - t)). \quad (11.59)$$

Al tiempo t , el inversionista compra N_t^* unidades monetarias extranjeras con las N_t unidades monetarias domésticas al tipo de cambio D_t . Es decir,

$$N_t^* = \frac{N_t}{D_t}. \quad (11.60)$$

Esta cantidad la deposita en una cuenta bancaria en moneda extranjera durante el periodo $T - t$ a la tasa de interés r^* . Al tiempo T , el inversionista recibirá

$$N_T^* = N_t^* (1 + r^*(T - t)). \quad (11.61)$$

En virtud de (11.60), la expresión anterior se puede escribir como

$$N_T^* = \frac{N_t}{D_t} (1 + r^*(T - t)). \quad (11.62)$$

Suponga ahora que en t , el agente también toma una posición corta en un contrato forward sobre la moneda extranjera en cuestión, con vencimiento en T , y por un monto de N_T^* unidades extranjeras. Suponga que el tipo de cambio pactado es K , con lo cual al vencimiento del contrato el agente recibe

$$M_T = N_T^* K \quad (11.63)$$

unidades monetarias domésticas. El tipo de cambio de entrega de equilibrio, $F_{t,T}$, es tal que $M_T = N_T$. En efecto, si $M_T > N_T$, entonces el agente paga al banco N_T y tiene una ganancia libre de riesgo $M_T - N_T > 0$. Si $M_T < N_T$, el agente sólo invierte en el banco. Por lo tanto, la condición de equilibrio, $M_T = N_T$, conduce a

$$\frac{N_t}{D_t} (1 + r^*(T - t)) F_{t,T} = N_t (1 + r(T - t)),$$

lo cual implica

$$F_{t,T} = D_t \left(\frac{1 + r(T - t)}{1 + r^*(T - t)} \right).$$

Este resultado coincide con (11.58).

11.13 Bibliografía sugerida

- Ghosh, D. K. (1997). "Risk-free Profits with Forward Contracts in Exchange Rates and Interest Rates". *Journal of Multinational Financial Management*, Vol. 7, No. 3, pp. 253-264.
- Jarrow, R. A. and G. S. Oldfield (1981). "Forward Contracts and Futures Contracts". *Journal of Financial Economics*, Vol. 9, No. 2, pp. 373-382.
- Venegas-Martínez, F. (2002). "La administración financiera y sus herramientas". *Ejecutivos de Finanzas*, Vol. 31, No. 10, pp. 50-54.
- Venegas-Martínez, F., B. González-Aréchiga y J. Díaz-Tinoco (2002). "Cobertura con futuros de títulos de capital". *Momento Económico*, No. 120, pp. 14-34.
- Venegas-Martínez, F. y G. Dubcovsky (2002). "Perspectiva de la administración de riesgos financieros en México". *Ejecutivos de Finanzas*, Vol. 31, No. 9, pp. 50-52.
- Venegas-Martínez, F. y J. M. Carrillo-Rivera (2002). "Cambio tecnológico en la administración de riesgos financieros: el caso mexicano". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, Vol. 1, No. 4, pp. 289-304.

11.14 Ejercicios

- 11.1** Suponga que la dinámica estocástica del precio de una acción es conducida por el movimiento geométrico Browniano

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo, $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea y $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad equipado con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. En este caso, la fórmula de valuación de un contrato forward está dada por

$$V_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[S_T - K \mid \mathcal{F}_t].$$

A partir de esta fórmula y utilizando el hecho de que $X_T = S_T / e^{rT}$ es martingala, es decir, $\mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_t] = X_t$, demuestre que

$$V_t = S_t - K e^{-r(T-t)}.$$

Solución: Observe que

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[S_T - K \mid \mathcal{F}_t] \\ &= e^{rt} \mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_t] - K e^{-r(T-t)} \\ &= e^{rt} X_t - K e^{-r(T-t)} \\ &= S_t - K e^{-r(T-t)}. \end{aligned}$$

11.2 Con base en la fórmula de valuación del ejercicio anterior determine el precio forward $F_{0,T}$.

Solución: Dado que $K = F_{0,T}$ cuando $V_0 = 0$, se tiene que

$$0 = e^{-rT} \mathbb{E}[S_T - F_{0,T} | \mathcal{F}_0],$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_t] - F_{0,T}e^{-rT} \\ &= X_0 - F_{0,T}e^{-rT} \\ &= \frac{S_0}{e^{rt}} - F_{0,T}e^{-rT}. \end{aligned}$$

Así,

$$F_{0,T} = S_0 e^{rT}.$$

11.3 El día de hoy, $t = 0$, se negocia un contrato forward sobre una acción. El vencimiento del contrato es dentro de 20 semanas. Los dividendos esperados son de 20 centavos dentro de 8 semanas y de 15 centavos dentro de 17 semanas. Suponga que el precio “spot” en la fecha en que se inicia la obligación es $S_0 = 42$ pesos. Asimismo, suponga que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa constante y libre de riesgo, continuamente capitalizable, del 10 %. Determine, el precio forward de la acción de una posición larga y el precio del contrato forward de la acción cuando $K = 42.5$.

Solución: Es suficiente utilizar las ecuaciones (11.6) y (11.11). En particular, (11.6) produce

$$F_{0,20/52} = \left(42 - 0.20e^{-0.1(8/52)} - 0.15e^{-0.1(15/52)} \right) e^{0.1(20/52)}.$$

11.4 Resuelva el ejercicio anterior cuando el pago de dividendos se lleva a cabo a una tasa continua (anualizada) del 2% ($q = 0.02$) cuál es el precio forward de la acción en este caso.

Solución: En este caso,

$$F_{0,20/52} = 42e^{-0.02(20/52)+0.1(20/52)}.$$

11.5 Con la notación de la sección 11.11, demuestre que, bajo condiciones de equilibrio, un bono cuponado con tasa cupón flotante se negocia a la par.

11.6 Considere un contrato forward sobre una acción que paga n dividendos, $D_{\tau_1}, D_{\tau_2}, \dots, D_{\tau_n}$ en fechas conocidas $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$. Suponga que se cuenta con una estructura de plazos de la tasa de interés $R(t, T)$. Muestre que, en este caso, el precio forward está dado por

$$F_{t,T} = S_t e^{R(t,T)(T-t)} - \sum_{k=1}^n D_{\tau_k} e^{R(\tau_k,T)(T-\tau_k)}.$$

11.7 Considere un contrato forward sobre dólar con vencimiento dentro de tres meses. Si el tipo de cambio spot es de 10.52 pesos/dólar y las tasas de interés de CETES y T-bills son, respectivamente, 0.08 y 0.045. Determine el tipo de cambio forward (suponga tasas de interés simples).

Solución:

$$F_{0,0.25} = \frac{10.52(1 + 0.08(0.25))}{(1 + 0.045(0.25))}.$$

11.8 Considere un contrato forward sobre un bono cupón cero (un CETE a 90 días). El contrato vence dentro de tres meses. Si el nominal del bono es 10.00 pesos y las tasas de interés a tres y seis meses son, respectivamente, 0.077 y 0.08. Determine el precio forward del bono cupón cero (suponga tasas de interés simples).

Solución:

$$F_{0,0.25} = \frac{10.00(1 + 0.077(0.25))}{(1 + 0.08(0.5))}.$$

CAPÍTULO 12

CONTRATOS FUTUROS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Contratos futuros
- Bolsas de futuros
- Estandarización de tamaño y fecha de vencimiento
- Cámara de compensación y liquidación
- Márgenes

12.1 Introducción

Los contratos a futuro, contratos futuros o, simplemente, futuros, al igual que los contratos forward, son acuerdos que obligan a una de las partes a comprar y a la contraparte a vender un activo (financiero) a un precio preestablecido en una fecha futura. Sin embargo, a diferencia de los contratos forward que se negocian sobre mostrador, los contratos futuros se cotizan y operan en una bolsa de futuros. Este tipo de contratos tiene características estandarizadas, principalmente, en lo que se refiere al tamaño y a la fecha de vencimiento. Los contratos futuros son impersonalizados, es decir, las dos partes que intervienen en el contrato no se conocen entre sí. Para reforzar el cumplimiento de los contratos, cada una de las partes entrega una cantidad (margen) a un tercero, la cámara de compensación, para asegurar el cumplimiento de las obligaciones adquiridas. La cámara de compensación también liquida diariamente los contratos, maneja los márgenes y administra el riesgo de incumplimiento, a cambio de una comisión. La cantidad que cada una de las partes entrega a la cámara recibe el nombre de margen o aportación inicial para distinguirlo del concepto de garantía, ya que este último se refiere a la entrega de un colateral de por lo menos el valor del activo objeto del contrato.

Por lo anterior, la diferencia de forma entre los contratos forward y los contratos futuros es la estandarización de los últimos. La diferencia de fondo es que los contratos futuros se liquidan diario, mientras que los contratos forward se liquidan hasta el vencimiento. De esta manera, un contrato futuro que vence dentro de N días se puede ver como la suma de N contratos forward, cada uno con vigencia de un día.

El tamaño considerable que han alcanzado los mercados de futuros financieros se debe en gran medida a la flexibilidad que estos instrumentos proporcionan a sus usuarios para entrar o salir rápidamente del mercado. Estos instrumentos presentan un alto grado de liquidez, es decir, un vendedor casi siempre encuentra un comprador y viceversa, así como un alto nivel de apalancamiento, esto es, la inversión inicial es pequeña comparada con la de otros instrumentos disponibles en el mercado.

Los futuros financieros permiten a los agentes económicos administrar el riesgo de mercado con costos bajos de transacción. Además, el riesgo crédito de estos instrumentos es mínimo debido a la asociación de la bolsa de futuros con una cámara de compensación y liquidación, la cual a cambio de una comisión actúa como contraparte de todas las partes y administra el riesgo de incumplimiento de las obligaciones generadas en los contratos.

Del mismo modo que los contratos forward, los contratos futuros pueden ser utilizados para cobertura y/o especulación. Por ejemplo, si un agente quiere vender sus acciones dentro de un mes y piensa que el precio de sus acciones puede caer, puede fijar el precio de venta futuro tomando una posición corta en un contrato futuro sobre dichas acciones con vencimiento en un mes. Similarmente, si un agente quiere comprar acciones dentro de un mes y piensa que el precio puede subir, puede fijar el precio al que comprará dentro de un mes tomando una posición larga en el mismo contrato. Los contratos futuros pueden ser usados también por especuladores. Por último, es importante notar que en la gran mayoría de contratos futuros la entrega nunca es hecha, por lo regular las posiciones son cerradas antes del vencimiento.

Un resultado relevante del presente capítulo es que los precios futuro y forward coinciden cuando la tasa de interés es constante, a pesar del proceso de liquidación diaria de los contratos

futuros. En consecuencia, bajo el supuesto de que la tasa de interés es constante, la teoría desarrollada para contratos forward es aplicable, íntegramente, a contratos futuros.

Aunque ya son muchos los países que cuentan con bolsas de futuros, las dos bolsas de futuros más importantes son Chicago Board of Trade y Chicago Mercantile Exchange. En ambos mercados se negocian una gran cantidad de contratos futuros sobre muchos y muy variados activos. En los países que cuentan con bolsas de futuros, los precios futuros, mas no los precios de los contratos futuros, de diversos subyacentes son reportados en la prensa financiera.

12.2 Valuación diaria a precios de mercado (mark-to-market)

La bolsa de futuros, como cualquier otro mercado organizado y reconocido por las autoridades financieras, al final de cada jornada tiene la obligación de reportar precios futuros de cierre, los cuales cambian día a día dependiendo de la oferta y demanda por dichos contratos. Con los precios de cierre, los agentes valúan sus posiciones y revisan si, ese día, se han generado pérdidas o ganancias. En el caso de los mercados de subyacentes, las pérdidas o ganancias por la valuación diaria a precios de cierre no se liquidan, mientras que en la bolsa de futuros las pérdidas o ganancias diarias sí se liquidan a precios de cierre.

12.3 Manejo de márgenes

Para ilustrar el manejo de márgenes por parte de la cámara de compensación y liquidación, suponga que un agente, a través de un socio de la bolsa de futuros, toma una posición larga, al tiempo t , para recibir en el futuro, en el tiempo T , un lote de acciones a cambio de una cantidad K . La cámara de compensación, para asegurar el cumplimiento de obligaciones, requiere que el agente deposite cierta cantidad (o colateral), llamada margen inicial. Suponga que el margen inicial, M , es una fracción $\alpha \in (0, 1)$ del nominal K . Esta fracción α se determina en función de la volatilidad diaria del precio de la acción (desviación estándar de los rendimientos diarios de la acción). Por simplicidad, se supone que α es fija y, por lo tanto, M también lo será. La bolsa de futuros, al final de cada jornada, proporciona precios futuros diarios de cierre. Suponga, por ejemplo, que el precio futuro de cierre del primer día, K_t , ha disminuido, de tal manera que $K_t = (1 - \beta)K$, $0 < \beta < 1$. En este caso, debido a la valuación diaria a precios de mercado (mark-to-market) en el momento de la liquidación, el agente ha perdido

$$K_t - K = (1 - \beta)K - K = -\beta K \quad (12.1)$$

y la cuenta de margen y compensación (que también incluye ganancias y pérdidas) se ha reducido a

$$C_t = M - \beta K = (\alpha - \beta)K. \quad (12.2)$$

En este momento, es importante introducir el concepto de “llamada de margen”. Sea $\delta \in (0, \alpha)$. Si la cuenta de margen y compensación cae por debajo de $m = \delta K$ (el margen de mantenimiento), se le solicita al agente que restituya inmediatamente el margen inicial. En otras palabras, si $\alpha - \beta \leq \delta$, se le pide al agente el faltante para restablecer M . Si $\alpha - \beta > \delta$, ninguna acción es tomada. Suponga ahora que al día siguiente se tiene un precio futuro de cierre K_{t+1} mayor que K_t . En este caso, el agente ha ganado $K_{t+1} - K_t > 0$, cantidad que se integra a la cuenta de margen y compensación del día anterior, y así sucesivamente. En el momento en que el agente cierra su posición, es decir, cuando el contrato ha vencido o el agente ha tomado la posición contraria a la inicial, recibe el saldo en su cuenta de márgenes y compensaciones más los intereses, de mercado de dinero, que se hayan generado. Si en la fecha de vencimiento, la posición corta incumple, su margen debe cubrir la diferencia entre los precios “spot” y de entrega; en caso contrario la cámara de compensación no está calculando eficientemente los márgenes. Una situación similar se presenta para la posición larga. Evidentemente, el cálculo de márgenes es una de las tareas esenciales de la cámara.

12.4 Los precios futuro y forward son iguales cuando la tasa de interés es constante

En esta sección se demuestra que si la tasa de interés es constante y no existen oportunidades de arbitraje, entonces los precios futuro y forward coinciden, a pesar del proceso de liquidación diaria de los últimos. Se supone que no hay costos de transacción. Considere un contrato futuro

sobre algún activo con vigencia de T días (hábiles). Sea f_t el precio futuro de cierre del activo en el día t , $t = 0, 1, 2, \dots, T - 1$. Suponga además que $f_T = S_T$, donde S_T es el precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento T . Asimismo, suponga que existe un mercado de crédito (un sistema bancario) en el que los agentes pueden prestar o pedir prestado a una tasa de interés r libre de riesgo, constante a todos los plazos y continuamente capitalizable. Considere el siguiente portafolio de contratos futuros sugerido por Cox, Ingersoll y Ross (1981). El primer día, $t = 1$, poco antes de que cierre el mercado, se toma una posición larga, en un contrato futuro, para comprar $e^{r/360}$ unidades al precio futuro de cierre del día anterior f_0 , de esta manera antes y después de que cierre el mercado los valores de la posición son $f_0e^{r/360}$ y $f_1e^{r/360}$, respectivamente. El segundo día, $t = 2$, poco antes de que cierre el mercado, se toma una posición larga, en un contrato futuro, para comprar $e^{2r/360}$ unidades al precio de cierre del día anterior f_1 , de esta manera antes y después de que cierre el mercado, los valores de la posición son $f_1e^{2r/360}$ y $f_2e^{2r/360}$, respectivamente, y así sucesivamente. La ganancia o pérdida diaria de cada contrato futuro, una vez que se ha llevado a cabo la valuación a precios de mercado (mark-to-market) con liquidación, es

$$(f_t - f_{t-1})e^{rt/360}, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (12.3)$$

El valor futuro de (12.3), en $t = T$, está dado por

$$(f_t - f_{t-1})e^{rt/360}e^{r(T-t)/360} = (f_t - f_{t-1})e^{rT}, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (12.4)$$

El valor del portafolio de futuros después de que ha cerrado el mercado el día $t = T$ satisface

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T (f_t - f_{t-1})e^{rT} \\ &= [(f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + \dots + (f_{T-1} - f_{T-2}) + (S_T - f_{T-1})] e^{rT} \\ &= (S_T - f_0)e^{rT}. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Si el agente deposita en el banco, en $t = 1$, la cantidad f_0 , entonces el pago de intereses junto con el capital está dado por f_0e^{rT} . La estrategia de inversión que combina el depósito y el portafolio de futuros produce, al tiempo $t = T$,

$$f_0e^{rT} + (S_T - f_0)e^{rT} = S_Te^{rT}. \quad (12.6)$$

La estrategia de inversión anterior no tiene costo. Por lo tanto, si se invierte una cantidad f_0 en dicha estrategia, se obtiene S_Te^{rT} .

Suponga ahora que el precio forward en $t = 0$ es $F_{0,T}$. Si se deposita $F_{0,T}$ en el banco, se obtiene, en $t = T$, $F_{0,T}e^{r(T-t)}$. Por otro lado, si se toman posiciones largas en contratos forward de la misma forma en que se hizo para contratos futuros, el resultado es $S_Te^{r(T-t)}$. De esta manera, se tienen dos estrategias de inversión que, en $t = T$, producen exactamente el mismo monto $S_Te^{r(T-t)}$, una de ellas asociada con el portafolio de futuros que requiere una inversión inicial f_0 y otra asociada al portafolio de forwards que requiere de una inversión inicial $F_{0,T}$. En ausencia de oportunidades de arbitraje

$$f_0 = F_{0,T}.$$

Es decir, el precio futuro y el precio forward son idénticos. Claramente, $F_{0,T} = S_0e^{rT}$ donde S_0 es el precio del activo subyacente en $t = 0$, así $f_0 = F_{0,T} = S_0e^{rT}$.

12.5 Conclusiones

A diferencia de los contratos forward, los contratos futuros están estandarizados. Otra diferencia es que los contratos forwards se liquidan hasta el vencimiento, mientras los contratos futuros se liquidan todos los días (mark-to-market). De esta manera, un contrato futuro que vence dentro de N días (hábiles) se puede ver como la suma de N contratos forward, cada uno con vigencia de un día. El resultado más importante del capítulo es que, a pesar del proceso de liquidación diaria de los contratos futuros, los precios de equilibrio forward y futuro coinciden cuando la tasa de interés permanece constante. En consecuencia, bajo el supuesto de que la tasa de interés es constante, la teoría desarrollada para contratos forward es íntegramente aplicable a contratos futuros.

12.6 Bibliografía sugerida

- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1981). "The Relation between Forward Prices and Futures Prices". *Journal of Financial Economics*, Vol. 9, No. 4, pp. 321-346.
- Díaz-Tinoco, J. y F. Venegas-Martínez (2001). "Política agrícola y contratos de futuros: un modelo de arbitraje". *Momento Económico*, No. 115, pp. 2-21.
- Díaz-Tinoco, J. y F. Venegas-Martínez (2004). "Márgenes con spread intraclase para el mercado mexicano de derivados". *El Trimestre Económico*, Vol. 71(3), No. 283, pp. 681-716.
- French, K. (1983). "A Comparison of Futures and Forward Prices". *Journal of Financial Economics*, Vol. 12, No. 3, pp. 311-342.
- Park, H. Y. and A. H. Chen (1985). "Differences between Futures and Forward Prices: A Further Investigation of Marking to Market Effects". *Journal of Futures Markets*, Vol. 5, No. 1, pp. 77-88.
- Venegas-Martínez, F. (2003). Inmunización del valor presente de flujos de efectivo de tesorerías de corporativos, inversionistas institucionales y fondos pensiones con futuros del Mexder. Trabajo de Investigación ganador del Primer Lugar del Premio Nacional MexDer 2003, MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S. A. de C. V. Publicado en la dirección electrónica www.mexder.com/MEX/premio.html
- Venegas-Martínez, F. (2004). Administración coherente de riesgos con futuros del Mexder. Trabajo de Investigación ganador del Segundo Lugar del Premio Nacional MexDer 2004, MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S. A. de C. V. Publicado en la dirección electrónica www.mexder.com/MEX/premio.html

12.7 Ejercicios

- 12.1** Sea S_t el precio de una acción en el tiempo t . Suponga que S_T es una variable aleatoria. En este caso, los precios forward y futuro están dados, respectivamente, por

$$f_t = \mathbb{E}[S_T | S_t] \quad \text{y} \quad F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}.$$

Demuestre que el spread, $\delta_{t,T}$, entre estos precios satisface

$$\delta_{t,T} = e^{r(T-t)} \left(e^{rt} \mathbb{E} \left[\frac{S_T}{e^{rT}} \middle| S_t \right] - S_t \right).$$

- 12.2** Suponga que la dinámica estocástica del precio de una acción es conducida por el siguiente movimiento geométrico Browniano:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo, $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea y $(W_t)_{t \in [0,T]}$ es movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad equipado con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}, \mathbb{P})$. Demuestre que $X_u = S_u e^{-ru}$ es martingala y, por lo tanto, $\delta_{t,T} = 0$ ($\delta_{t,T}$ es definida como en el ejercicio anterior).

- 12.3** Considere un contrato futuro sobre el IPC (Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores). Si el contrato establece que el valor de cada punto del IPC es de \$10.00. Suponga que el contrato se inicia hoy ($t = 0$) y que no hay pago de dividendos. Si el IPC actual es de 19,500 puntos y la tasa de interés libre de riesgo es $r=0.0992$. Determine el precio futuro del IPC dentro de 9 semanas.

- 12.4** Suponga que el tipo de cambio actual (pesos mexicanos/dólar) es de 11.21. Asimismo, suponga que la tasa de interés actual (anualizada) que pagan los CETES (Certificados de la Tesorería del Gobierno Federal Mexicano) a 90 días es de 9.5% y que la tasa de interés actual (anualizada) que pagan los T-bills a 90 días en el mercado de dinero estadounidense es 4.2%. Encuentre el precio futuro del tipo de cambio.

CAPÍTULO 13

SWAPS DE TASAS DE INTERÉS Y DE TIPO DE CAMBIO

Conceptos básicos de este capítulo:

- Bonos cuponados con tasa cupón constante
- Bonos cuponados con tasa cupón flotante
- Método de alambrada
- Método Bootstrapping
- Swaps de tasas de interés
- Pata fija y pata flotante
- Forward de tasa de interés
- Swaps de tipo de cambio

13.1 Introducción

Un “swap” (o permuta) es un acuerdo entre dos partes para intercambiar flujos de efectivo en varias fechas futuras con base en una fórmula predeterminada. Un contrato forward puede ser visto como el ejemplo más simple de un swap, en donde el intercambio de flujos de efectivo se realiza en una sola fecha futura. Recíprocamente, un swap puede verse como la suma de varios contratos forward.

Para fijar ideas suponga que las empresas \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 solicitan cada una de ellas un crédito, del mismo monto N , a los bancos B_1 y B_2 , respectivamente. La empresa \mathcal{E}_1 tiene expectativas a la alza en las tasas de interés, mientras que la empresa \mathcal{E}_2 presenta expectativas contrarias. Por lo anterior, \mathcal{E}_1 desea que su crédito sea a tasa fija, R_K , mientras que \mathcal{E}_2 lo quiere a tasa variable. Por razones de calidad crediticia de estas empresas, B_1 ha decidido, en contra de lo solicitado por \mathcal{E}_1 , otorgar el crédito sólo si éste es a tasa variable y, al mismo tiempo, B_2 ha decidido otorgar el crédito a \mathcal{E}_2 sólo si éste se pacta a tasa fija. Qué mala suerte para ambas empresas ¿Qué pueden hacer \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 ante tal situación? Una posible solución es que las empresas acuerden aceptar los créditos en las condiciones que los bancos han impuesto e intercambiar entre ellas las diferencias por intereses, en las fechas de pago. Así, si en una fecha de pago, la tasa de mercado es superior a R_K , entonces \mathcal{E}_2 le paga a \mathcal{E}_1 la diferencia de intereses del periodo en cuestión. En caso contrario \mathcal{E}_1 le paga a \mathcal{E}_2 dicha diferencia. Se acostumbra que una tercera parte, una institución financiera (intermediario financiero), a cambio de una comisión, le de seguimiento al intercambio de flujos. Usualmente, para asegurar el cumplimiento de las obligaciones adquiridas por parte de las empresas, la institución financiera pide a las empresas garantías (colaterales) que quedan bajo su custodia.

La conclusión más importante del esquema anterior es que una de las empresas ha transformado un crédito de tasa variable en otro de tasa fija y viceversa. Así, una parte recibe a tasa flotante y paga a tasa fija (la posición larga) y la contraparte recibe tasa fija y paga tasa flotante (la posición corta).

El swap más común en el mercado es el de tasa de interés (o IRS por las iniciales en inglés de “Interest Rate Swap”). Este producto derivado de tasa de interés es muy popular en los mercados sobre mostrador. En este tipo de contratos, un agente acuerda pagar los flujos de efectivo que se generan al aplicar una tasa de interés fija a un principal preestablecido, en varias fechas futuras. El agente, a cambio, recibe los flujos de efectivo que se generan al aplicar una tasa de interés flotante sobre el mismo principal y en las mismas fechas futuras especificadas. El intercambio del principal, o nominal, no se lleva a cabo, siendo éste sólo una referencia en los términos del contrato. A la tasa de interés fija se le llama tasa swap. El valor de estos contratos al inicio y al vencimiento es cero. Por último, es importante destacar que estos contratos presentan un alto grado de liquidez en el mercado.

El otro tipo de swap, menos común, que se encuentra en el mercado es el de tipo de cambio (o CS por las iniciales en inglés de “Currency Swap”, en ocasiones también son llamados FXS “Foreign Exchange Swaps”). En este tipo de contratos las partes intercambian el principal y los intereses en una divisa por el principal y los intereses en otra divisa. Se puede pensar que el contrato transforma un crédito en una divisa en un crédito en otra divisa. Usualmente, los principales se intercambian al final del contrato.

En ausencia de riesgo crédito, un swap se puede ver como la diferencia de dos bonos cuponados, uno de tasa cupón fija y el otro de tasa cupón flotante. Es usual llamar al bono cuponado de tasa cupón fija como “pata fija” y al bono cuponado de tasa cupón flotante como “pata flotante”. Por esta razón es importante hacer una revisión breve sobre la valuación de bonos cuponados y las curvas de ceros (curvas de rendimiento de bonos cupón cero) asociadas a dichos bonos.

13.2 Bonos cuponados con tasa cupón constante

En esta sección se valía un bono que paga cupones con tasa cupón constante. Por simplicidad, se supone que sólo se efectúan tres pagos en períodos de igual magnitud.

Considere un bono que se coloca en $t = 0$ y paga cupones en tres fechas futuras, T_1 , T_2 y T_3 , igualmente espaciadas. Suponga que el principal, o nominal, es $N > 0$. Si en cada una de estas fechas los cupones se calculan como

$$C_1 = R_K T_1 N, \quad C_2 = R_K (T_2 - T_1) N \quad \text{y} \quad C_3 = R_K (T_3 - T_2) N,$$

donde $R_K > 0$ es una tasa de interés anualizada y constante, entonces el precio del bono, utilizando interés simple para descontar, está dado por:

$$B_{\text{fija}}^{(0)} = \frac{C_1}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{C_2}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{C_3 + N}{1 + \tilde{R}_3}, \quad (13.1)$$

donde

$$\tilde{R}_i = R(0, T_i)(T_i - 0) = R(0, T_i)T_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Si, en virtud de que T_1 , T_2 y T_3 están igualmente espaciados, se reescribe $\tilde{R}_K = R_K \Delta T_i$, $i = 1, 2, 3$, y $N = 1$, se sigue que

$$B_{\text{fija}}^{(0)} = \frac{\tilde{R}_K}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{\tilde{R}_K}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{\tilde{R}_K + 1}{1 + \tilde{R}_3}, \quad (13.2)$$

ó

$$B_{\text{fija}}^{(0)} = \tilde{R}_K (B_1 + B_2 + B_3) + B_3, \quad (13.3)$$

donde $B_i = B(0, T_i) = 1/(1 + \tilde{R}_i)$, $i = 1, 2, 3$. De esta manera, $R(0, T)$ puede verse como una curva de ceros, asociada al bono cuponado de tasa constante, B_i , la cual puede ser una estimación con base en precios de mercado o definirse mediante algún modelo teórico.

13.3 Bonos cuponados con tasa cupón flotante

En esta sección se valía un bono cuponado con tasa cupón flotante (también llamado FRN por las iniciales en inglés de “Forward Rate Note”).

Considere un bono que se coloca en $t = 0$ y paga tres cupones en las fechas futuras, T_1 , T_2 y T_3 . Suponga que el principal es $N > 0$. Si los cupones se calculan como

$$C_1 = \tilde{R}_1 N, \quad C_2 = \tilde{f}_{12} N \quad \text{y} \quad C_3 = \tilde{f}_{23} N,$$

donde

$$\tilde{f}_{12} = f(0, T_1, T_2)(T_2 - T_1) \quad \text{y} \quad \tilde{f}_{23} = f(0, T_2, T_3)(T_3 - T_2)$$

son, respectivamente, las tasas forward en $[T_1, T_2]$ y $[T_2, T_3]$ aplicadas en sus correspondientes períodos, entonces el precio del bono satisface

$$B_{\text{flot}}^{(0)} = \frac{\tilde{R}_1 N}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{\tilde{f}_{12} N}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{(\tilde{f}_{23} + 1) N}{1 + \tilde{R}_3}, \quad (13.4)$$

donde $R(0, T_i) = \tilde{R}_i/T_i, i = 1, 2, 3$. En equilibrio, es decir, en ausencia de oportunidades de arbitraje, las tasas forward implícitas se obtienen mediante las siguientes relaciones:

$$(1 + \tilde{R}_1)(1 + \tilde{f}_{12}) = 1 + \tilde{R}_2$$

y

$$(1 + \tilde{R}_2)(1 + \tilde{f}_{23}) = 1 + \tilde{R}_3.$$

Por lo tanto,

$$\tilde{f}_{12} = \frac{1 + \tilde{R}_2}{1 + \tilde{R}_1} - 1 \quad (13.5)$$

y

$$1 + \tilde{f}_{23} = \frac{1 + \tilde{R}_3}{1 + \tilde{R}_2}. \quad (13.6)$$

Si se sustituyen (13.5) y (13.6) en (13.4), se sigue que

$$\begin{aligned} B_{\text{float}}^{(0)} &= \frac{\tilde{R}_1 N}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{N}{1 + \tilde{R}_2} \left(\frac{1 + \tilde{R}_2}{1 + \tilde{R}_1} - 1 \right) + \frac{N}{1 + \tilde{R}_3} \left(\frac{1 + \tilde{R}_3}{1 + \tilde{R}_2} \right) \\ &= \frac{\tilde{R}_1 N}{1 + \tilde{R}_1} + \left(\frac{N}{1 + \tilde{R}_1} - \frac{N}{1 + \tilde{R}_2} \right) + \frac{N}{1 + \tilde{R}_2} \\ &= \frac{\tilde{R}_1 N}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{N}{1 + \tilde{R}_1} \\ &= N. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Es decir, un bono cuponado con tasa cupón flotante se negocia a la par. Observe que aunque el ejercicio anterior toma en cuenta tres períodos, el mismo resultado se obtiene para cualquier número de períodos. Evidentemente, si se valúa el bono inmediatamente después del primer pago y se conoce la curva de rendimiento $R(T_1, T)$, entonces el precio del bono es $B_{\text{float}}^{(1)} = N$. Observe además que si se escribe $B_i = B(0, T_i) = 1/(1 + \tilde{R}_i)$, $i = 1, 2, 3$, y $N = 1$, entonces, a partir de (13.7), se tiene que

$$1 = \tilde{R}_1 B_1 + \tilde{f}_{12} B_2 + \tilde{f}_{23} B_3 + B_3. \quad (13.8)$$

Así, $R(0, T)$ puede verse como una curva de ceros, B_i , asociada al bono cuponado de tasa flotante. Este resultado, será utilizado más adelante.

13.4 Estimación de una curva de rendimiento con base en la tasa forward

A continuación, bajo condiciones de equilibrio, se estima la curva de rendimiento de un bono cuponado, con tasa cupón flotante, cuando se conocen las tasas forward futuras.

Si se conocen \tilde{R}_1 y \tilde{f}_{12} , entonces se puede determinar la tasa $\tilde{R}_2/T_2 = R(0, T_2)$ de plazo, T_2 , asociada a un bono cupón cero mediante

$$\tilde{f}_{12} = \frac{1 + \tilde{R}_2}{1 + \tilde{R}_1} - 1 \quad \text{o} \quad \tilde{R}_2 = (\tilde{f}_{12} + 1)(1 + \tilde{R}_1) - 1.$$

Si se conoce \tilde{f}_{23} y no hay oportunidades de arbitraje, entonces \tilde{R}_3 puede estimarse como

$$\tilde{f}_{23} = \frac{1 + \tilde{R}_3}{1 + \tilde{R}_2} - 1 \quad \text{o} \quad \tilde{R}_3 = (\tilde{f}_{23} + 1)(1 + \tilde{R}_2) - 1.$$

De esta manera, se puede proceder inductivamente.

13.5 Estimación de una curva de rendimiento con el método de alambrada

En esta sección se presenta el método de alambrada para estimar una curva de rendimiento. Suponga que se conocen \tilde{R}_1 y \tilde{R}_3 y se desea estimar la curva de rendimiento en tiempo intermedio, \tilde{R}_2 , entonces se puede calcular la tasa forward

$$\tilde{f}_{13} = \frac{1 + \tilde{R}_3}{1 + \tilde{R}_1} - 1.$$

A continuación, se obtiene \tilde{f}_{12} con base en \tilde{f}_{13} , de tal forma que

$$1 + \tilde{f}_{12} = \left(1 + \tilde{f}_{13}\right)^{(T_2 - T_1)/(T_3 - T_1)}. \quad (13.9)$$

Por último, a partir de la relación

$$(1 + \tilde{R}_1)(1 + \tilde{f}_{12}) = 1 + \tilde{R}_2,$$

se concluye que

$$\tilde{R}_2 = (1 + \tilde{R}_1)(1 + \tilde{f}_{12}) - 1.$$

Lamentablemente, en esta ecuación son posibles las oportunidades de arbitraje.

13.6 Método Bootstrapping para estimar la curva de ceros asociada a un bono cuponado de tasa constante

En la sección anterior se estimó una curva de rendimiento con base en valores conocidos de la tasa forward. Sin embargo, no siempre se conocen las tasas forward. En este caso, el método Bootstrapping proporciona una alternativa para estimar la curva de rendimiento de un bono cupón cero asociada al bono cuponado. De acuerdo con (13.2), si $N = 1$, se sigue que

$$B_{\text{fija}}^{(0)} = \frac{\tilde{R}_K}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{\tilde{R}_K}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{\tilde{R}_K + 1}{1 + \tilde{R}_3}. \quad (13.10)$$

En lo que sigue, se supone que $B_{\text{fija}}^{(0)}$ y \tilde{R}_1 son conocidos. ¿Cómo se pueden estimar \tilde{R}_2 y \tilde{R}_3 ? Justamente, el método Bootstrapping resuelve este problema. En primer lugar recuerde que la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, (x_0, y_0) y (x_1, y_1) , está dada por la expresión $y - y_0 = (y_1 - y_0/x_1 - x_0)(x - x_0)$. Con base en esta ecuación, se puede escribir la siguiente interpolación lineal de \tilde{R}_2 en términos de \tilde{R}_3 y \tilde{R}_1 ,

$$\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1 = \frac{\tilde{R}_3 - \tilde{R}_1}{T_3 - T_1}(T_2 - T_1).$$

En este ejemplo, se ha elegido llevar a cabo interpolación lineal, pero cualquier otro método de aproximación que exprese \tilde{R}_2 en términos de \tilde{R}_3 y \tilde{R}_1 podría ser utilizado, por ejemplo, el método de alambrada. Evidentemente, la interpolación lineal no elimina oportunidades de arbitraje. Si se despeja \tilde{R}_2 de la expresión anterior, se obtiene que

$$\tilde{R}_2 = \tilde{R}_1 + \frac{\tilde{R}_3 - \tilde{R}_1}{T_3 - T_1}(T_2 - T_1). \quad (13.11)$$

Después de sustituir (13.11) en (13.10), se tiene

$$0 = -B_{\text{fija}}^{(0)} + \frac{\tilde{R}_K}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{\tilde{R}_K}{1 + \tilde{R}_1 + \frac{\tilde{R}_3 - \tilde{R}_1}{T_3 - T_1}(T_2 - T_1)} + \frac{\tilde{R}_K + 1}{1 + \tilde{R}_3}. \quad (13.12)$$

Dado que $\tilde{R}_1 = R_1^*$ es conocido, la ecuación anterior puede verse como $f(\tilde{R}_3) = 0$, al resolverse se obtiene un valor R_3^* . El método de Newton-Raphson es utilizado con mucha frecuencia para encontrar dicha solución. Posteriormente, la solución R_3^* se sustituye en (13.11) para obtener el valor

$$R_2^* = \tilde{R}_1 + \frac{R_3^* - \tilde{R}_1}{T_3 - T_1}(T_2 - T_1). \quad (13.13)$$

De esta manera, R_1^*/T_1 , R_2^*/T_2 y R_3^*/T_3 constituyen puntos sobre una curva de ceros asociada al bono cuponado de tasa constante.

A continuación se presenta otro ejemplo de ilustración del método de Boostrapping. De hecho, el ejemplo que a continuación se desarrolla extiende el ejemplo anterior a seis períodos. Considere ahora un bono cuponado con tasa cupón constante, R_K , que paga cupones en seis fechas futuras T_i , $i = 1, 2, \dots, 6$. Si el nominal es 1, entonces, de (13.2),

$$B_{\text{fija}}^{(0)} = \frac{\tilde{R}_K}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{\tilde{R}_K}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{\tilde{R}_K}{1 + \tilde{R}_3} + \frac{\tilde{R}_K}{1 + \tilde{R}_4} + \frac{\tilde{R}_K}{1 + \tilde{R}_5} + \frac{\tilde{R}_K + 1}{1 + \tilde{R}_6}. \quad (13.14)$$

Si se utiliza la información obtenida en el ejemplo anterior para las primeras tres fechas de pago de cupones R_1^* , R_2^* y R_3^* , entonces se emplean las siguientes interpolaciones lineales para \tilde{R}_4 y \tilde{R}_5 , en términos de R_3^* y \tilde{R}_6 ,

$$\tilde{R}_4 - R_3^* = \frac{\tilde{R}_6 - R_3^*}{T_6 - T_3}(T_4 - T_3) \quad (13.15)$$

y

$$\tilde{R}_5 - R_3^* = \frac{\tilde{R}_6 - R_3^*}{T_6 - T_3}(T_5 - T_3). \quad (13.16)$$

Evidentemente, la elección de R_3^* en (13.15) y (13.16) se debe a su cercanía con \tilde{R}_4 y \tilde{R}_5 . Si se despejan \tilde{R}_4 y \tilde{R}_5 de las ecuaciones anteriores y se sustituyen sus valores en la ecuación (13.14), la ecuación resultante queda en términos de R_1^* , R_2^* y R_3^* , y puede reescribirse como $g(\tilde{R}_6) = 0$. La solución de esta ecuación se denota por R_6^* . Posteriormente, se utilizan las ecuaciones (13.15) y (13.16) para obtener R_4 y R_5 . Si el problema se extiende a 9 fechas de pago de cupones, entonces se utiliza la información obtenida en la etapa anterior: R_1^* , R_2^* , R_3^* , R_4^* , R_5^* y R_6^* . Despues, se llevan a cabo interpolaciones lineales de \tilde{R}_7 y \tilde{R}_8 en términos de R_6^* y \tilde{R}_9 . Por supuesto, resolver de 3 en 3 períodos no es una regla. Para pasar de 3 a 4 períodos, se requiere un simple despeje. De 3 a 5 períodos, se utiliza

$$\tilde{R}_4 - R_3^* = \frac{\tilde{R}_5 - R_3^*}{T_5 - T_3}(T_4 - T_3) \quad (13.17)$$

y se obtiene una ecuación de la forma $f(\tilde{R}_5) = 0$. La solución de esta ecuación se sustituye en (13.17) para estimar \tilde{R}_4 .

13.7 Swaps de tasas de interés

Las tasas de interés flotante que se emplean en los contratos swaps son tasas de fondeo entre instituciones financieras (*v.g.* tasas interbancarias), por ejemplo, TIE28, Libor91, u otras de la misma naturaleza. Estas tasas de referencia representan el costo de fondeo de las instituciones financieras. En términos generales, la duración de los contratos tipo swap oscila entre 2 y 20 años, siendo los de 5 y 9 años los más populares en el mercado. La frecuencia de los pagos puede ser mensual, trimestral, semestral o anual, y usualmente es un múltiplo del plazo de la tasa de fondeo de referencia.

En ausencia de riesgo crédito, un swap de tasa de interés se puede ver como la diferencia de dos bonos cuponados, uno de tasa cupón fija y otro de tasa cupón flotante, como ya se había mencionado antes. Es usual llamar al bono cuponado de tasa cupón fija como "pata fija" y al bono cuponado de tasa cupón flotante como "pata flotante". En este sentido, las curvas de ceros de los bonos, ya sea con tasa cupón fija o flotante, pueden pensarse como "equivalentes" a las "estructuras de plazo" de la tasa de fondeo de referencia.

El valor presente de las diferencias en intereses en un swap de tasa de interés está dado por

$$\begin{aligned}
 V_0 &= \frac{(\tilde{R}_1 - \tilde{R}_K)N}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{(\tilde{f}_{12} - \tilde{R}_K)N}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{(\tilde{f}_{23} - \tilde{R}_K)N}{1 + \tilde{R}_3} \\
 &= \left(\frac{\tilde{R}_1 N}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{\tilde{f}_{12} N}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{\tilde{f}_{23} N}{1 + \tilde{R}_3} \right) - \left(\frac{\tilde{R}_K N}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{\tilde{R}_K N}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{\tilde{R}_K N}{1 + \tilde{R}_3} \right) \\
 &= \left(\frac{\tilde{R}_1 N}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{\tilde{f}_{12} N}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{\tilde{f}_{23} N}{1 + \tilde{R}_3} + \frac{N}{1 + \tilde{R}_3} \right) \\
 &\quad - \left(\frac{\tilde{R}_K N}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{\tilde{R}_K N}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{\tilde{R}_K N}{1 + \tilde{R}_3} + \frac{N}{1 + \tilde{R}_3} \right) \\
 &= B_{\text{flot}}^{(0)} - B_{\text{fija}}^{(0)}. \tag{13.18}
 \end{aligned}$$

Observe que para escribir el valor presente de las diferencias en intereses en un swap como la diferencia de dos bonos cuponados, uno de tasa flotante y otro de tasa constante, se ha sumado y restado, en (13.18), la cantidad $N/(1 + \tilde{R}_3)$. Asimismo, si $V_0 = 0$, entonces

$$0 = (\tilde{R}_1 B_1 + \tilde{f}_{12} B_2 + \tilde{f}_{23} B_3) - \tilde{R}_K (B_1 + B_2 + B_3), \tag{13.19}$$

donde $B_i = B(0, T_i) = 1/(1 + \tilde{R}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Ahora bien, de acuerdo con (13.8), la tasa swap de equilibrio está dada por

$$\tilde{R}_K = \frac{\tilde{R}_1 B_1 + \tilde{f}_{12} B_2 + \tilde{f}_{23} B_3}{B_1 + B_2 + B_3} = \frac{1 - B_3}{B_1 + B_2 + B_3}, \tag{13.20}$$

13.8 Valuación de un swap de tasa de interés

En el momento en que se pacta un swap, su precio es cero. Inmediatamente después, su precio ya no es cero, a menos que sea por pura casualidad. Observe que con respecto de la pata flotante, inmediatamente después de cualquier pago, el precio del bono con tasa cupón flotante es N . Por ejemplo, inmediatamente después del primer pago $B_{\text{flot}}^{(t)} = N$, $t = T_1 + dT_1$ con $dT_1 > 0$. Así,

$$V_t = N - \tilde{R}_K N \left(\frac{1}{1 + \hat{R}_1} + \frac{1}{1 + \hat{R}_2} \right) - \frac{N}{1 + \hat{R}_2},$$

donde $\hat{R}_i = R(t, T_{i+1})(T_{i+1} - t)$, $i = 1, 2$. Ahora bien, inmediatamente antes de T_1 se espera el pago del primer cupón, por esta razón la pata flotante vale $N + \tilde{R}_1 N$. Para valuar el swap, es necesario traer $N + \tilde{R}_1 N$ a valor presente y deducir los pagos a tasa fija, es decir,

$$V_t = (N + \tilde{R}_1 N) \left(\frac{1}{1 + \bar{R}_1} \right) - \tilde{R}_K N \left(\frac{1}{1 + \bar{R}_1} + \frac{1}{1 + \bar{R}_2} + \frac{1}{1 + \bar{R}_3} \right) - \frac{N}{1 + \bar{R}_3},$$

donde $t = T_1 - dT_1$ con $dT_1 > 0$, y $\bar{R}_i = R(t, T_i)(T_i - t)$, $i = 1, 2, 3$.

13.9 Método Bootstrapping para estimar los precios de un bono cupón cero asociado a la tasa swap

Si se conoce R_K para swaps con intercambios de flujos de efectivo a diferentes plazos, para lo cual es conveniente escribir $R_K(0, T)$, entonces, a partir de la ecuación (13.20), se pueden calcular los precios de los bonos cupón cero. En efecto, si se escribe

$$R_K(0, T_1) T_1 = \frac{1 - B_1}{B_1},$$

se obtiene que

$$B_1^* = \frac{1}{1 + R_K(0, T_1)T_1}.$$

De la misma manera,

$$B_2^* = \frac{1 - B_1^*}{1 + R_K(0, T_2)T_2}.$$

En general, se tiene que

$$B_i^* = \frac{1 - B_1^* - B_2^* - \cdots - B_{i-1}^*}{1 + R_K(0, T_i)T_i} = \frac{1 - \sum_{j=1}^{i-1} B_j^*}{1 + R_K(0, T_i)T_i}.$$

13.10 Método Bootstrapping para estimar la curva de ceros asociada al bono cuponado de tasa cupón constante en un swap

A continuación se presenta el método Bootstrapping para estimar la curva de ceros asociada al bono cuponado de tasa cupón constante en un swap. En este caso se supone que el precio del bono cuponado de tasa constante es la unidad. Dicha curva de ceros puede pensarse como “equivalente” a la “estructura de plazo” de la tasa de fondeo de referencia del swap. De acuerdo con la ecuación (13.18), se sigue que

$$\begin{aligned} V_0 = & \left(\frac{\tilde{R}_1 N}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{\tilde{f}_{12} N}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{\tilde{f}_{23} N}{1 + \tilde{R}_3} + \frac{N}{1 + \tilde{R}_3} \right) \\ & - \left(\frac{\tilde{R}_K N}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{\tilde{R}_K N}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{\tilde{R}_K N}{1 + \tilde{R}_3} + \frac{N}{1 + \tilde{R}_3} \right). \end{aligned}$$

Dado que el primer sumando es N , se sigue que

$$1 = \frac{\tilde{R}_K}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{\tilde{R}_K}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{\tilde{R}_K + 1}{1 + \tilde{R}_3}.$$

De esta manera, el método que se introdujo en la sección 13.6 y que partía de (13.10), ahora parte de la ecuación anterior. En tal caso, lo único que se requiere es que sean conocidos \tilde{R}_1 y \tilde{R}_K .

13.11 Contratos forward de tasa de interés

En esta sección se revisa el concepto de contrato forward de tasa de interés (también llamado FRA por las iniciales en inglés de “Forward Rate Agreement”). Un contrato forward de tasa de interés es un acuerdo en el que una de las partes pagará, a la contraparte, la cantidad que se genere al aplicar una tasa de interés fija a un principal predeterminado en dos fechas futuras.

Suponga que el tiempo en que se establece el contrato forward de tasa de interés es $t = 0$, la tasa fija acordada es R_K , los tiempos futuros entre los que se aplica dicha tasa son T_1 y T_2 y el principal es N . Al tiempo T_2 una de las partes tiene que pagar $R_K(T_2 - T_1)N$. Si la tasa forward de mercado es $f(0, T_1, T_2)$, entonces el valor de dicho contrato forward, en $t = 0$, se calcula mediante

$$V_0^{(12)} = \frac{(f(0, T_1, T_2) - R_K)(T_1 - T_2)N}{1 + R(0, T_2)T_2}$$

ó, en la notación más breve,

$$V_0^{(12)} = \frac{(\tilde{f}_{12} - \tilde{R}_K)N}{1 + \tilde{R}_2}.$$

De esta manera, de acuerdo con (13.17), el valor del contrato swap, en $t = 0$, se puede escribir como

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{(\tilde{R}_1 - \tilde{R}_K)N}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{(\tilde{f}_{12} - \tilde{R}_K)N}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{(\tilde{f}_{23} - \tilde{R}_K)N}{1 + \tilde{R}_3} \\ &= \mathcal{V}_0^{(01)} + \mathcal{V}_0^{(12)} + \mathcal{V}_0^{(23)}. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Es decir, un contrato swap de tasa de interés es la suma de contratos forward de tasa de interés.

13.12 Swaps de tipo de cambio

Otro tipo de swap común en el mercado es el swap de tipo de cambio. En este tipo de contratos las partes intercambian el principal y los intereses en una divisa por el principal y los intereses en otra divisa. Usualmente, los principales se intercambian al final del contrato. En este caso las dos tasas son flotantes y, por simplicidad, serán etiquetadas como doméstica y extranjera.

El precio de un swap de tipo de cambio con dos patas flotantes, en moneda doméstica está dado por

$$v_0 = B_{d,\text{float}}^{(0)} - S_0 B_{f,\text{float}}^{(0)},$$

donde $B_{d,\text{float}}^{(0)}$ es un bono cuponado con tasa cupón flotante en moneda doméstica, $B_{f,\text{float}}^{(0)}$ es un bono cuponado con tasa cupón flotante en moneda extranjera, S_0 es el tipo de cambio de contado, los nominales se calculan de tal manera que $N_d = S_T N_f$ donde S_T es una estimación del tipo de cambio, en términos de las tasas de interés doméstica y extranjera, en la fecha de vencimiento del contrato. Por supuesto, swaps con dos patas fijas o con una pata fija y la otra flotante se valúan de manera similar. Por último, es importante mencionar que en ocasiones también hay intercambio de principales al inicio del contrato.

13.13 Bibliografía sugerida

- Litzenberger, R. H. (1992). "Swaps: Plain and Fanciful". *Journal of Finance*, Vol. 47, No. 3, pp. 831-850.
- Turnbull, S. M. (1987). "Swaps: A Zero Sum Game". *Financial Management*, Vol. 16, No. 1, pp. 15-21.
- Wall, L. D. and J. J. Pringle (1989). "Alternative Explanations of Interest Rate Swaps: A Theoretical and Empirical Analysis". *Financial Management*, Vol. 18, No. 2, pp. 59-73.
- Venegas-Martínez, F. (2005). "Entendiendo los mercados de swaps: un enfoque de equilibrio general". *Revista de Estadística, Econometría y Finanzas Aplicadas*, Vol. 3, No. 4, pp. 181-196.

13.14 Ejercicios

13.1 Consideré la fórmula de valuación de un swap de tasa de interés obtenida en la sección 13.8,

$$V_t = (N + \tilde{R}_1 N) \left(\frac{1}{1 + \overline{R}_1} \right) - \tilde{R}_K N \left(\frac{1}{1 + \overline{R}_1} + \frac{1}{1 + \overline{R}_2} + \frac{1}{1 + \overline{R}_3} \right) - \frac{N}{1 + \overline{R}_3},$$

donde $t = T_1 - dT_1$ con $dT_1 > 0$, y $\overline{R}_i = R(t, T_i)(T_i - t)$, $i = 1, 2, 3$. Denote $R_i = R(t, T_i)$. Suponga que $R_2 = R_1 + \varepsilon$ y $R_3 = R_2 + \varepsilon = R_1 + 2\varepsilon$. Es decir, R_2 es un pequeño desplazamiento de R_1 , y R_3 es un pequeño desplazamiento de R_2 , ambos desplazamientos de la misma magnitud. Por lo anterior, se puede escribir

$$\begin{aligned} V_t &= (N + \tilde{R}_1 N) \left(\frac{1}{1 + R_1(T_1 - t)} \right) \\ &\quad - \tilde{R}_K N \left(\frac{1}{1 + R_1(T_1 - t)} + \frac{1}{1 + (R_1 + \varepsilon)(T_2 - t)} + \frac{1}{1 + (R_1 + 2\varepsilon)(T_3 - t)} \right). \end{aligned}$$

Sea γ_s la duración (tiempo promedio entre pagos) del swap, es decir,

$$\gamma_s = -\frac{dV_t}{dR_1} \left(\frac{1 + R_1(T_1 - t)}{V_t} \right),$$

demuestre que

$$\begin{aligned}\gamma_s &= (T_1 - t)w_1 + (T_2 - t)w_2 + (T_3 - t)w_3 \\ &= T_1 w_1 + T_2 w_2 + T_3 w_3 - t(w_1 + w_2 + w_3),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}w_1 &= \frac{(1 + \tilde{R}_1 - \tilde{R}_K)N}{[1 + R_1(T_1 - t)]V_t}, \\ w_2 &= -\frac{(1 + R_1(T_1 - t))\tilde{R}_K N}{[1 + (R_1 + \varepsilon)(T_2 - t)]^2 V_t}, \\ w_3 &= -\frac{(1 + R_1(T_1 - t))\tilde{R}_K N}{[1 + (R_1 + 2\varepsilon)(T_3 - t)]^2 V_t}.\end{aligned}$$

Solución: Basta derivar V_t con respecto de R_1 .

13.2 Justifique el método Bootstrapping para estimar los precios de un bono cupón cero asociado a la tasa swap. Si se conoce $R_K(0, T)$, se puede escribir que

$$B_i^* = \frac{1 - B_1^* - B_2^* - \cdots - B_{i-1}^*}{1 + R_K(0, T_i)T_i} = \frac{1 - \sum_{j=1}^{i-1} B_j^*}{1 + R_K(0, T_i)T_i}.$$

13.3 Modele un swap en el que se intercambian los dividendos y ganancias de capital de una acción con los intereses de un bono cuponado con tasa cupón constante.

13.4 Dos partes desean entrar en el futuro en un swap. En el presente deciden establecer un contrato de opción, el comprador de la opción tiene el derecho, mas no la obligación, de recibir tasa fija y pagar tasa flotante sobre un nominal durante varios periodos iniciando justo en el vencimiento de la opción. En este caso, la opción recibe el nombre de swaption. Modele y valúe un swaption.

CAPÍTULO 14

MODELO DE BLACK-SCHOLES (I): ENFOQUE PROBABILISTA

Conceptos básicos de este capítulo:

- Movimiento geométrico Browniano
- Valuación neutral al riesgo de una opción europea
- Función de densidad del movimiento geométrico Browniano
- Media y varianza del movimiento geométrico Browniano
- Valor esperado del valor intrínseco de una opción
- Condición de paridad entre opciones europeas de venta y compra
- Pago continuo de rendimientos a tasa constante

14.1 Introducción

En este capítulo se obtiene la fórmula de Black y Scholes (1973) para calcular el precio de una opción europea de compra mediante el enfoque probabilista. Se supone que el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato y que su precio es conducido por un movimiento geométrico Browniano neutral al riesgo. El precio o la prima de la opción se calcula como el valor presente del valor esperado del valor intrínseco. Con este propósito se determina, primero, la función de densidad del precio del subyacente en la fecha de vencimiento. Posteriormente, se calcula la integral que define el valor presente del valor intrínseco esperado, cantidad que proporciona el precio teórico del producto derivado en cuestión. Esta derivación es alternativa al enfoque de ecuaciones diferenciales parciales como lo argumenta el teorema de Feynman-Kač, el cual se revisará en su momento.

14.2 Distribución del rendimiento logarítmico del subyacente

Considere un proceso de Wiener $(W_t)_{t \in [0, T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Se supone que el precio de una acción al tiempo t , S_t , es conducido por el movimiento geométrico Browniano

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (14.1)$$

En este caso, el parámetro de tendencia, $\mu \in \mathbb{R}$, es el rendimiento medio esperado del activo subyacente y $\sigma > 0$ es su volatilidad instantánea, por unidad de tiempo. Una simple aplicación del lema de Itô conduce a

$$d(\ln S_t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma dW_t. \quad (14.2)$$

Si se discretiza la ecuación anterior con $\Delta t = T - t$, entonces se obtiene

$$\ln S_T - \ln S_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) + \sigma \sqrt{T - t} \mathcal{E},$$

donde $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Por lo tanto,

$$\ln \left(\frac{S_T}{S_t} \right) \sim \mathcal{N} \left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t), \sigma^2(T - t) \right). \quad (14.3)$$

En otras palabras, el rendimiento logarítmico tiene distribución normal con la misma varianza del cambio porcentual de S_t , pero con parámetro de tendencia, $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$, menor al rendimiento medio esperado, μ .

14.3 Cuenta bancaria

Suponga que existe un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar o pedir prestado a una tasa de interés constante a todos los plazos, r , libre de riesgo de incumplimiento, la cual se aplica en forma continuamente capitalizable. Si un agente deposita M_0 unidades monetarias, entonces su cuenta bancaria es $M_t = M_0 e^{rt}$. Equivalentemente, el rendimiento en su cuenta bancaria, durante un instante dt , satisface $dM_t = M_t r_t dt$, con la condición inicial M_0 .

14.4 Valuación neutral al riesgo

Debido a la consideración de un rendimiento esperado μ , la ecuación (14.1) no es independiente de las preferencias al riesgo de los agentes que participan en el mercado del subyacente. En efecto, entre mayor sea la aversión al riesgo de un agente, mayor tiene que ser el rendimiento medio esperado, μ , a fin de que el premio $\nu = \mu - r$ le sea atractivo al agente. Si se supone que todos los agentes son neutrales al riesgo, es decir, no requieren de un premio para inducirlos a participar en el mercado, entonces $\nu = 0$, así, $\mu = r$ y de esta manera el rendimiento medio esperado de cualquier activo es la tasa de interés libre de riesgo, r . Otra forma de medir el premio al riesgo, de uso más frecuente, consiste en estandarizar ν por unidad de varianza (más precisamente por unidad de desviación estándar), es decir, $\lambda = \nu/\sigma$. Como antes, si los agentes no requieren de un premio para inducirlos a participar en el mercado, entonces $\lambda = 0$, lo cual implica, a su vez, que $\mu = r$. Si se escribe

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right) \\ &= rS_t dt + \sigma S_t (\lambda dt + dW_t), \end{aligned}$$

entonces, bajo el supuesto de neutralidad al riesgo, $\lambda = 0$, se tiene que la ecuación (14.1) se transforma en

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (14.4)$$

en cuyo caso, se dice que el movimiento Browniano está definido sobre una medida de probabilidad neutral al riesgo. El concepto de valuación neutral al riesgo es, sin duda, uno de los más importantes en el estudio de productos derivados. Posteriormente, se utilizará el teorema de Girsanov que formaliza y generaliza las ideas expuestas en esta sección.

14.5 Función de densidad del precio del activo subyacente en un mundo neutral al riesgo

En esta sección se obtiene la función de densidad del precio del activo subyacente bajo el supuesto de neutralidad al riesgo. En vista del resultado (14.3) y en un mundo neutral al riesgo donde se cumple (14.4), se tiene que $\ln(S_T/S_t)$ tiene una distribución normal con media $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)$ y varianza $\sigma^2(T-t)$. Considere $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y su función de densidad

$$\phi(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}. \quad (14.5)$$

Si se define ahora

$$g(\mathcal{E}) := S_T = S_t \exp \left\{ (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma \sqrt{T-t} \mathcal{E} \right\}, \quad (14.6)$$

se tiene que

$$g^{-1}(S_T) = \frac{\ln \left(\frac{S_T}{S_t} \right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}. \quad (14.7)$$

De esta manera, la función de densidad de S_T , dado S_t , está dada por la expresión

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \phi(g^{-1}(s)) \left| \frac{dg^{-1}(s)}{ds} \right|. \quad (14.8)$$

Observe, primero, que el Jacobiano de la transformación satisface

$$\left| \frac{dg^{-1}(s)}{ds} \right| = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T-t}}.$$

En consecuencia,

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}. \quad (14.9)$$

Esta función de densidad se utilizará para calcular el valor esperado del valor intrínseco de una opción europea.

14.6 Media y varianza del precio del subyacente en un mundo neutral al riesgo

El valor esperado del precio del subyacente al vencimiento, T , es una cantidad que sirve como referencia para calcular el precio de ejercicio de la opción. A continuación se determina la media y varianza de la variable aleatoria S_T . Observe primero que, a partir de (14.7), se tiene

$$\epsilon = \frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

lo cual implica que

$$s = S_t e^{\epsilon\sigma\sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}. \quad (14.10)$$

Por lo tanto, la diferencial satisface:

$$ds = S_t e^{\epsilon\sigma\sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \sigma\sqrt{T-t} d\epsilon \quad (14.11)$$

o

$$ds = s\sigma\sqrt{T-t} d\epsilon.$$

Dado el cambio de variable anterior, se calcula a continuación el valor medio de S_T , dado el valor actual S_t . Así pues,

$$\begin{aligned} E[S_T|S_t] &= \int_0^\infty s f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} S_t e^{\epsilon\sigma\sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \sigma\sqrt{T-t} d\epsilon \\ &= S_t \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} e^{\sigma\sqrt{T-t}\epsilon + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} d\epsilon \\ &= S_t \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2 - 2\sigma\sqrt{T-t}\epsilon + \sigma^2(T-t))} e^{r(T-t)} d\epsilon \\ &= S_t e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon - \sigma\sqrt{T-t})^2} d\epsilon \\ &= S_t e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = S_t e^{r(T-t)}, \end{aligned} \quad (14.12)$$

donde u es tal que

$$u = \epsilon - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Como puede observarse, el valor esperado de $S_T|S_t$ es, simplemente, el valor futuro del subyacente. El segundo momento de S_T se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[S_T^2|S_t] &= \int_0^\infty s^2 f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\
 &= \int_0^\infty \frac{s}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds \\
 &= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} e^{2[\sigma\sqrt{T-t}\epsilon + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]} d\epsilon \\
 &= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2 + 2\sigma\sqrt{T-t}\epsilon} e^{2(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} d\epsilon \\
 &= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2 - 4\sigma\sqrt{T-t}\epsilon + 4\sigma^2(T-t))} e^{2[\sigma^2(T-t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)]} d\epsilon \\
 &= S_t^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon - 2\sigma\sqrt{T-t})^2} e^{\sigma^2(T-t) + 2r(T-t)} d\epsilon \\
 &= S_t^2 e^{\sigma^2(T-t) + 2r(T-t)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw \\
 &= S_t^2 e^{\sigma^2(T-t) + 2r(T-t)} = S_t^2 e^{(\sigma^2 + 2r)(T-t)},
 \end{aligned} \tag{14.13}$$

donde

$$w = \epsilon - 2\sigma\sqrt{T-t}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[S_T|S_t] &= \mathbb{E}[S_T^2|S_t] - (\mathbb{E}[S_T|S_t])^2 \\
 &= S_t^2 e^{(\sigma^2 + 2r)(T-t)} - S_t^2 e^{2r(T-t)} \\
 &= S_t^2 e^{2r(T-t)} (e^{\sigma^2(T-t)} - 1).
 \end{aligned} \tag{14.14}$$

Si se define $\eta(t, T)$ de tal forma que

$$\ln(1 + \eta(t, T)^2) = \sigma^2(T-t),$$

entonces se puede escribir que

$$\eta(t, T) = \frac{\sqrt{\text{Var}[S_T|S_t]}}{\mathbb{E}[S_T|S_t]}.$$

Por último, se determina la moda, m , de la distribución de $S_T|S_t$, es decir, se desea encontrar m tal que

$$\frac{d}{ds} f_{S_T|S_t}(s|S_t) \Big|_{s=m} = 0. \tag{14.15}$$

Para ello, primero, la notación se simplifica considerablemente al escribir

$$A(s) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2$$

y

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma}}.$$

Se sigue de (14.9) y (14.15) que

$$-\frac{a}{m^2} e^{A(m)} - \frac{a}{m^2} e^{A(m)} \left(\frac{\ln\left(\frac{m}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} = 0,$$

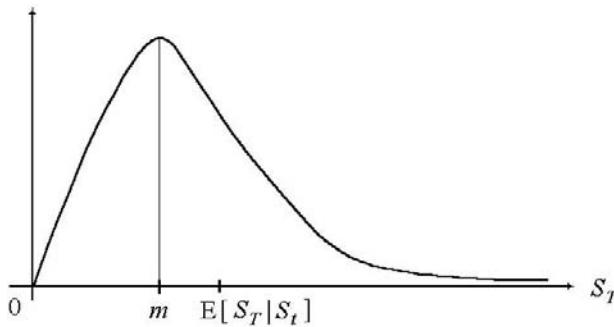
lo cual implica que

$$\frac{\ln\left(\frac{m}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) = -1.$$

Por lo tanto,

$$m = S_t e^{r(T-t) - \frac{3}{2}\sigma^2(T-t)}.$$

En la Gráfica 14.1 se puede apreciar la función de densidad de S_T , dado S_t . Se observa que la función es positivamente sesgada.



Gráfica 14.1 Función de densidad de S_T/S_t .

14.7 Valuación neutral al riesgo de una opción europea de compra

El precio de una opción de compra europea en t con precio de ejercicio K y vencimiento en T , $c = c(S_t, t; T, K, r, \sigma)$, está dado por el valor esperado del valor presente del valor intrínseco:

$$c = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left\{ \max(S_T - K, 0) \mid \mathcal{F}_t \right\}.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} c &= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(s - K, 0) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{s>K} s f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds - K e^{-r(T-t)} \int_{s>K} f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma s}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds. \end{aligned} \tag{14.16}$$

En lo que sigue, las dos integrales de (14.16) se denominarán, respectivamente, mediante \mathcal{I}_1 y \mathcal{I}_2 .

Si ahora se utiliza el cambio de variable definido por (14.11), la primera integral se calcula como

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &:= e^{-r(T-t)} S_t \int_{\{\epsilon > \frac{\ln(K/S_t) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} e^{\sigma\sqrt{T-t}\epsilon + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} d\epsilon \\ &= S_t \int_{\{\epsilon - \sigma\sqrt{T-t} > \frac{\ln(K/S_t) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon - \sigma\sqrt{T-t})^2} d\epsilon \\ &= S_t \int_{\{-\infty < u < \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du,\end{aligned}\quad (14.17)$$

donde se ha utilizado el hecho de que $-\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y el cambio de variable $u = \epsilon - \sigma\sqrt{T-t}$. Asimismo, a partir del cambio de variable de (14.11), la segunda integral satisface

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 &:= -K e^{-r(T-t)} \int_{\{\epsilon > \frac{\ln(K/S_t) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\ &= -K e^{-r(T-t)} \int_{\{-\infty < \epsilon < \frac{\ln(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon.\end{aligned}\quad (14.18)$$

Por lo tanto, de (14.17) y (14.18), se sigue que

$$c = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (14.19)$$

donde la función $\Phi(d)$ es la función de distribución acumulada de $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, es decir,

$$\Phi(d) = \mathbb{P}_{\mathcal{E}}\{\mathcal{E} \leq d\} = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon = 1 - \Phi(-d), \quad (14.20)$$

$$d_1 = d_1(S_t, t; T, K, r, \sigma) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (14.21)$$

y

$$d_2 = d_2(S_t, t; T, K, r, \sigma) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (14.22)$$

14.8 Valuación neutral al riesgo de una opción europea de venta

A través de un análisis similar al de la sección anterior se puede mostrar que el precio de una opción de venta del tipo europeo, $p = p(S_t, t; T, K, r, \sigma)$, está dado por

$$p = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1). \quad (14.23)$$

Es importante notar que el precio de una opción europea de venta también se puede obtener a través de la condición de paridad “put-call”, $p + S_t = c + K e^{-r(T-t)}$.

14.9 Condición de paridad de opciones de venta y compra

A partir de (14.19) y (14.23) se puede establecer la condición de paridad de opciones de venta y compra (put-call)

$$\begin{aligned}p + S_t &= K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1) + S_t \\ &= K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) + S_t (1 - \Phi(-d_1)) \\ &= K e^{-r(T-t)} (1 - \Phi(d_2)) + S_t \Phi(d_1) \\ &= -K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) + S_t \Phi(d_1) + e^{-r(T-t)} K \\ &= c + K e^{-r(T-t)}.\end{aligned}\quad (14.24)$$

La utilidad de la relación (14.24) radica en que una vez que se ha calculado el precio de opción de compra $c(S_t, t)$, el precio de una opción de venta, $p(S_t, t)$, con características similares se calcula mediante $p = c - (S_t - Ke^{-r(T-t)})$ o bien $p = c - V$, donde $V = V(S_t, t)$ es el precio de un contrato forward.

14.10 Fórmula de Brenner y Subrahmanyam para calcular el precio aproximado de una opción europea

A continuación se desarrolla una fórmula aproximada para el precio de una opción europea de compra bajo ciertas condiciones sobre el precio de ejercicio. Esta aproximación es muy fácil de emplear y proporciona resultados, en general, satisfactorios. Suponga que el precio de ejercicio, K , es igual al precio futuro del subyacente, $S_t e^{r(T-t)}$. En este caso, se puede verificar, de forma inmediata, que

$$d_1 = \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}.$$

Asimismo, en virtud de (14.22), se verifica que

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = -d_1. \quad (14.25)$$

Ahora bien, dado que $\Phi(d_1) + \Phi(-d_1) = 1$, se sigue que

$$\begin{aligned} c &= S_t (\Phi(d_1) - \Phi(-d_1)) \\ &= S_t (1 - 2\Phi(-d_1)). \end{aligned} \quad (14.26)$$

La diferencial de $\Phi(-d_1)$ evaluada en cero produce

$$\begin{aligned} \Phi(-d_1) &= \Phi(0) - \Phi'(0)d_1 + o(d_1) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}d_1 + o(d_1), \end{aligned}$$

donde $o(d_1)/d_1 \rightarrow 0$ cuando $d_1 \rightarrow 0$. Observe que la cantidad $1/\sqrt{2\pi}$ es el máximo de $\phi(d) := \Phi'(d)$, $d \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} c &\approx S_t \left[1 - 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}d_1 \right) \right] \\ &= \frac{S_t 2d_1}{\sqrt{2\pi}} \\ &\approx S_t \frac{2}{5}\sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned} \quad (14.27)$$

En el cuadro 14.1 se muestra el precio de una opción con el precio de Black-Scholes dado un conjunto de parámetros. En este caso $c_{BS} = 1.07$. Si se utiliza (14.27), se encuentra un precio aproximado de 1.09.

Precios y parámetros relevantes					
S	K	r	σ	$T-t$	c_{BS}
42.00	43.17	0.11	0.13	0.25	1.07

Cuadro 14.1 Precio de una opción con la fórmula de Black-Scholes dado un conjunto de valores de los parámetros.

14.11 Bibliografía sugerida

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Brenner, M. and M. G. Subrahmanyam (1998). "A Simple Approach to Option Valuation and Hedging in the Black-Scholes Model". *Financial Analysts Journal*, Vol. 50, No. 2, pp. 25-28.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Journal of Economic and Management Science*. Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

14.12 Ejercicios

14.1 El parámetro de volatilidad, σ , no necesariamente tiene que ser constante para encontrar soluciones, puede ser una función conocida del tiempo. El hecho de que σ sea constante facilita el proceso de valuación. Si $\sigma_t := \sigma(t)$, muestre mediante el enfoque probabilista que

$$c(S_t, t; \sigma_t) = c_{\text{BS}}(S_t, t; \bar{\sigma}^2),$$

donde c_{BS} representa la fórmula de valuación de Black-Scholes y

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds.$$

14.2 La tasa de interés libre de riesgo también puede ser una función conocida del tiempo. Simplemente, al considerar a r como constante simplifica el análisis. Suponga que $r_t := r(t)$, muestre utilizando el enfoque probabilista que

$$c(S_t, t; r_t) = c_{\text{BS}}(S_t, t; \bar{r}),$$

donde c_{BS} es la fórmula de valuación de Black-Scholes y

$$\bar{r} = \frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds.$$

14.3 Justifique la condición $p + S_t = c + K e^{-r(T-t)}$ y obtenga a partir de ella el precio de una opción europea de venta:

$$p = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1),$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar y d_1 y d_2 se definen, respectivamente, como en (14.21) y (14.22).

14.4 Obtenga el precio de una opción europea de venta mediante el cálculo del siguiente valor esperado:

$$p = E \left\{ e^{-r(T-t)} \max(K - S_T, 0) \mid \mathcal{F}_t \right\} = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(K - s, 0) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds,$$

donde $f_{S_T|S_t}(s|S_t)$ está dada como (14.9).

14.5 Una opción (europea de compra) binaria paga una unidad monetaria si $S_t > K$ y cero en caso contrario. Las opciones binarias, también conocidas como opciones digitales, son muy populares en los mercados OTC tanto para coberturas como para especulación. Este tipo de opciones son muy importantes en ingeniería financiera ya que son la base para construir derivados más sofisticados. Obtenga fórmulas para valuar opciones binarias de compra y venta.

14.6 Opciones de brecha (opciones “gap”). El pago de una opción de compra “gap” es cero si $S_t \leq K_1$, y $S_t - K_2$ si $S_t > K_1$, donde K_2 es especificado con antelación. De manera similar, el pago de una opción de venta “gap” es cero si $S_t \geq K_1$, y $S_t - K_2$ si $S_t < K_1$. Pruebe que las fórmulas de valuación para opciones “gap” de compra y venta son, respectivamente:

$$c_{\text{gap}}(S_t, t; K_1, K_2, T, \sigma, q) = S_t e^{-q(T-t)} \Phi[d(K_1)] - K_2 \Phi[d(K_1) - \sigma \sqrt{T-t}]$$

y

$$p_{\text{gap}}(S_t, t; K_1, K_2, T, \sigma, q) = K_2 B(t, T) \Phi \left[-d(K_1) + \sigma \sqrt{T-t} \right] - S_t e^{-q(T-t)} \Phi \left[-d(K_1) \right]$$

y

$$d(K_1) = \frac{\ln(S_t/K_1) + [r - q + (\sigma^2/2)](T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}},$$

donde $B(t, T) = e^{-r(T-t)}$ y q es una tasa constante de depreciación del precio del activo S_t . Observe que el precio de este tipo de opciones puede ser negativo, dependiendo de los valores de K_1 y K_2 . Cuando la diferencia entre K_1 y K_2 es tal que el valor de la opción es cero, se dice entonces que la opción es de pago posterior (“pay-later option”).

14.7 Opciones del tipo efectivo-o-nada y activo-o-nada. Una opción del tipo efectivo-o-nada paga una cantidad nominal M al vencimiento si la opción se encuentra dentro del dinero (“in-the-money”). Una opción de compra del tipo efectivo-o-nada tiene un pago cero si $S_t \leq K$, y M si $S_t > K$. Similarmente, el perfil de pagos de una opción de venta de activo-o-nada es cero si $S_t > K$, y M si $S_t \leq K$. El caso de las opciones de activo-o-nada se obtiene al sustituir $MB(t, T)$ por $S_t e^{-q(T-t)}$ y d_2 por $d_2 + \sigma \sqrt{T-t}$. Muestre que los precios de opciones (de compra y venta) del tipo efectivo-o-nada son:

$$c_{\text{money}}(t, S_t; K, M, T, \sigma, q) = MB(t, T) \Phi(d_2)$$

$$p_{\text{money}}(t, S_t; K, M, T, \sigma, q) = MB(t, T) \Phi(-d_2),$$

donde

$$d(K) = \frac{\ln(S_t/K) + [r - q - (\sigma^2/2)](T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}},$$

$B(t, T) = e^{-r(T-t)}$ y q es una tasa constante de depreciación de S_t . Por último, pruebe que:

$$c_{\text{asset}}(t, S_t; K, T, \sigma, q) = c_{\text{money}}(t, S_t; M = K, T, \sigma, q) + c_{\text{BS}}(t, S_t; K, T, \sigma, q).$$

14.8 Muestre que la volatilidad implícita del modelo de Black y Scholes satisface

$$\sigma = \sqrt{\frac{\frac{\partial c}{\partial T} + rK \frac{\partial c}{\partial K}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 c}{\partial K^2}}},$$

con $S_t = K$ (en el dinero).

14.9 Diseñe una estrategia con opciones de compra que proporcione el perfil de pagos que se muestra en el siguiente cuadro:

Rango de S_T	Pago al vencimiento
$S_T \geq K_2$	$K_2 - K_1$
$K_1 \leq S_T \leq K_2$	$S_T - K_1$
$S_T \leq K_1$	0

14.10 Diseñe una estrategia con opciones de compra que proporcione el perfil de pagos que se muestra en el siguiente cuadro:

Rango de S_T	Pago al vencimiento
$S_T \geq K_1$	$-(K_1 - K_2)$
$K_2 \leq S_T \leq K_1$	$-(S_T - K_2)$
$S_T \leq K_2$	0

CAPÍTULO 15

MODELO DE BLACK-SCHOLES (II): ENFOQUE DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Conceptos básicos de este capítulo:

- Equilibrio general y no arbitraje
- Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes
- Condiciones finales y de frontera
- Cobertura Delta
- Mercados completos

15.1 Introducción

En 1973, Fischer Black y Myron Scholes, bajo el supuesto de equilibrio general, desarrollaron un modelo para valuar una opción europea sobre una acción que no paga dividendos, cuyo precio es conducido por un movimiento geométrico Browniano. Es también importante destacar, al respecto, el trabajo de Robert Merton, quien formalizó y extendió, en una serie de artículos seminales, la metodología de Black y Scholes. Por todas estas contribuciones que establecieron los fundamentos de lo que hoy se conoce como matemáticas financieras modernas, Myron Scholes y Robert Merton se hicieron acreedores al premio Nobel en 1997; infelizmente, para ese entonces Fischer Black ya había fallecido; dos años antes. En atención a las contribuciones de Merton, el modelo Black y Scholes, bien podría llamarse de Black, Scholes y Merton, o si se prefiere de Merton, Black y Scholes, por la cantidad y la calidad de aportaciones de Merton a la teoría financiera en el más alto nivel.

En este capítulo se obtiene la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes cuando el precio del activo subyacente, una acción, es conducido por un movimiento geométrico Browniano. Dicha ecuación diferencial parcial es de segundo orden (parabólica) y su solución determina el precio de una opción europea cuando la condición final es el valor intrínseco del instrumento. Esta ecuación es muy popular y representa la base para valuar muchos y muy diversos productos derivados, ya que para diferentes condiciones de frontera sus soluciones representan los precios de los distintos derivados financieros que se encuentran disponibles en el mercado.

Los supuestos básicos del modelo clásico de Black y Scholes son:

- i)* el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato;
- ii)* el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano, es decir, el precio es lognormal o los rendimientos son normales;
- iii)* la volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo;
- iv)* las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas;
- v)* el mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente se puede comprar y vender en cualquier fracción de unidad;
- vi)* no hay costos de transacción (comisiones e impuestos);
- vii)* el mercado opera en forma continua, es decir, no hay fines de semana ni días festivos;
- viii)* existe un mercado de crédito, un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento;
- ix)* los mercados están en equilibrio, es decir, no existen oportunidades de arbitraje.

Finalmente, es importante mencionar que el modelo se puede extender, sin mayores complicaciones, para incorporar dividendos y parámetros dependientes del tiempo.

15.2 Dinámica del precio del subyacente y riesgo de mercado

Considere un movimiento Browniano $(W_t)_{t \in [0, T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Se supone que el precio del activo subyacente al tiempo t , S_t , es conducido por el movimiento geométrico Browniano

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (15.1)$$

En este caso, el parámetro de tendencia, $\mu \in \mathbb{R}$, representa el rendimiento medio esperado y $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea por unidad de tiempo. El proceso dW_t modela las fluctuaciones propias del mercado del subyacente y, como se sabe, satisface: $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$, $E[dW_t] = 0$ y $\text{Var}[dW_t] = E[(dW_t)^2] = dt$.

El proceso $\{S_t\}_{t \geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. En efecto, una simple aplicación del lema de Itô conduce a

$$d \ln(S_t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma dW_t,$$

lo que, a su vez, implica

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}.$$

La expresión anterior es invertible, en el sentido que se puede despejar W_t . Por lo tanto,

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_t | s \leq t) = \sigma(S_t | s \leq t) = \mathcal{F}_t^S.$$

Por último, es importante recordar que (15.1) es una notación simplificada para la expresión

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_u du + \sigma \int_0^t S_u dW_u, \quad t \in [0, T].$$

15.3 Dinámica del precio de la opción

El valor, o precio, de una opción europea de compra es claramente función de los distintos parámetros que intervienen en los términos o cláusulas del contrato, tales como: el precio de ejercicio K y la vida del contrato $T - t$, donde T es la fecha de vencimiento y t es la fecha de inicio del contrato. Por supuesto, el valor también dependerá de las propiedades del activo subyacente, tales como: su precio, S_t , rendimiento esperado, μ , y volatilidad, σ , así como de la tasa de interés, r , que prevalece en el mercado de crédito a fin de calcular el valor del dinero en el tiempo. Por lo anterior, se puede escribir el valor de una opción como

$$c = c(S_t, t; K, T, \sigma, \mu, r). \quad (15.2)$$

Observe que S_t y t son las variables relevantes en el contrato. En lo que sigue, no se hará mención explícita de los parámetros, T, K, r y σ , excepto cuando sea necesario. Es decir, el valor de la opción se denotará simplemente como $c = c(S_t, t)$.

Durante el intervalo de tiempo $[t, t + dt]$, el activo subyacente cambia de S_t a $S_t + dS_t$, en consecuencia, el precio de la opción cambia de $c(S_t, t)$ a $c + dc$. El cambio marginal en el precio de la opción se obtiene mediante el lema de Itô, como:

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t. \quad (15.3)$$

15.4 Dinámica de un portafolio combinado del subyacente y su opción de compra

Considere ahora un portafolio con ω_1 unidades del activo subyacente de precio S_t y ω_2 unidades de una opción de compra sobre el subyacente de precio $c(S_t, t)$. Si Π_t denota el valor actual del portafolio, entonces

$$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 c(S_t, t). \quad (15.4)$$

El cambio en el valor del portafolio, durante el instante dt , debido a fluctuaciones propias del mercado está dado por

$$d\Pi_t = \omega_1 dS_t + \omega_2 dc. \quad (15.5)$$

Después de sustituir (15.1) y (15.3) en (15.5), se obtiene la siguiente expresión para el cambio de valor en el portafolio:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt + \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t \\ &\quad + \omega_2 \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (15.6)$$

La ecuación (15.6) contiene dos tipos de términos. Los términos de tendencia, multiplicados por dt , y el término aleatorio, multiplicado por dW_t . Este último, modela el riesgo de mercado del portafolio, el cual se puede eliminar si se eligen, adecuadamente, las cantidades de ω_1 y ω_2 en la conformación del portafolio.

15.5 Administración del riesgo de mercado

A fin de eliminar el riesgo mercado del portafolio se deben seleccionar ω_1 y ω_2 de tal manera que se anule el término estocástico de la ecuación (15.6), es decir,

$$\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} = 0.$$

Claramente, existen infinitas posibilidades para lograr tal objetivo. Si, por ejemplo, se toman $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\partial c / \partial S_t := -\Delta$, se tiene que

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt. \quad (15.7)$$

Es usual referirse a esta elección particular de $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\Delta$ como cobertura Delta. Esta estrategia de cobertura perfecta es dinámica, ya que durante el periodo $[t, t + dt]$, la cantidad $\partial c / \partial S_t$ cambia con S_t y t . Claramente, la cobertura Delta es aplicable sólo durante el instante dt , de otra manera, al transcurrir el tiempo, la cobertura se deteriora paulatinamente perdiendo su efectividad. Por lo tanto, si se emplea esta cobertura en (15.4), se obtiene

$$\Pi_t^{(\Delta)} = c - \Delta S_t,$$

lo cual significa que se está cubriendo una venta en corto de Δ unidades del subyacente con una opción de compra.

15.6 Cuenta bancaria

Se supone que existe un mercado de crédito libre de riesgo de incumplimiento, es decir, un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar o pedir prestado a una tasa constante, r , a todos los plazos y, en consecuencia, libre de riesgo de mercado, la cual se aplica en forma continuamente capitalizable. Por ejemplo, si un agente deposita B_0 unidades monetarias, entonces el saldo en su cuenta bancaria, al tiempo t , está dado por:

$$B_t = B_0 e^{rt}.$$

De esta manera, el rendimiento en su cuenta satisface

$$dB_t = r B_t dt,$$

junto con la condición inicial B_0 .

15.7 Inversión alternativa del valor del portafolio

Bajo la elección $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\Delta$, el valor del portafolio resultante es $\Pi_t^{(\Delta)} = c - \Delta S_t$. Si esta cantidad se deposita en un banco que paga una tasa de interés r , entonces el cambio en el valor del portafolio, durante dt , es

$$d\Pi_t^{(r)} = \Pi_t^{(\Delta)} r dt = (c - \Delta S_t) r dt. \quad (15.8)$$

En este caso, dt es el tiempo en el que se aplica la tasa r .

15.8 Equilibrio general y no arbitraje

Claramente, si existen oportunidades de arbitraje, es decir, oportunidades de generar ganancias libres de riesgo, entonces los mercados no están en equilibrio. Recíprocamente, si los mercados están en equilibrio, entonces no existen oportunidades de arbitraje. Por lo tanto, bajo el supuesto de equilibrio general, se tiene que

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = d\Pi_t^{(r)}. \quad (15.9)$$

En efecto, si la tasa de rendimiento del portafolio combinado fuera más grande que el interés que paga el banco, entonces se pediría prestado, en t , al banco la cantidad $-\Delta S_t + c$ para invertir en el portafolio de acciones y opciones. Posteriormente, en $t + dt$ se le pagan al banco los intereses más el capital y el restante representa una ganancia libre de riesgo. Por otro lado, si el rendimiento del portafolio fuera menor que el interés que paga el banco, entonces se debe invertir el dinero en el banco, pues la aplicación de una cobertura Delta carece de sentido.

15.9 Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

Una forma alternativa de escribir (15.9) es

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt = \left(-\frac{\partial c}{\partial S_t} S_t + c \right) r dt. \quad (15.10)$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r - r c = 0, \quad (15.11)$$

la cual es conocida como la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes. Las condiciones de frontera y final para determinar una solución única están dadas, respectivamente, por

$$c(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0).$$

La ecuación (15.11) es una ecuación diferencial parcial lineal parabólica. De hecho, casi todas las ecuaciones diferenciales parciales en matemáticas financieras tienen una forma similar. La linealidad significa que si se tienen dos soluciones, entonces la suma de ellas también es una solución. En otras palabras, si todos los activos de un portafolio satisfacen la ecuación (15.11), entonces el portafolio también la satisface. Por último, el hecho de que la ecuación diferencial parcial sea parabólica¹ significa que está relacionada con la ecuación de difusión de calor, esto

¹ Consideré una ecuación diferencial parcial de la forma

$$A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} + Du_x + Fu_y + E = 0, \quad u = u(x, y).$$

Se dice que esta ecuación es parabólica si

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = 0.$$

es, con una ecuación de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, \tau) \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0,$$

junto con la condición

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

La ecuación de Black-Scholes contiene todas las variables que determinan el valor del contrato y los parámetros tales como el precio de contado del activo subyacente, el tiempo y la volatilidad, pero no se hace mención al rendimiento medio esperado μ . Cualquier dependencia sobre μ se ha eliminado al anular el coeficiente de dW_t en el cambio de valor del portafolio. Observe que en su lugar aparece, en la ecuación (15.11), la tasa de interés libre de riesgo. Esto significa que si todos los participantes en el mercado de opciones están de acuerdo con el nivel de volatilidad del activo, entonces están igualmente de acuerdo con el valor de la opción aunque tengan diferentes preferencias al riesgo expresadas a través de μ . En otras palabras, todos los agentes están dispuestos a omitir sus preferencias al riesgo, μ , y aceptar un rendimiento libre de riesgo, r , después de ponerse de acuerdo con el nivel de volatilidad del activo subyacente.

15.10 Mercados completos

En esta sección se presenta, de manera intuitiva, el concepto de mercados completos, el cual consiste en la posibilidad de replicar el precio de una opción a través del valor de un portafolio de acciones y efectivo. Observe primero que a partir de la ecuación (15.8), se cumple que

$$\Delta S_t + \frac{1}{rdt} d\Pi_t^{(r)} = c. \quad (15.12)$$

Si se escribe $B_t = \Pi_t^{(r)}$, entonces $d\Pi_t^{(r)} = dB_t = rB_t dt$, lo cual implica que

$$\frac{1}{rdt} d\Pi_t^{(r)} = B_t.$$

Por lo tanto, (15.12) se transforma en

$$\Delta S_t + B_t = c.$$

es decir, si se diseña un portafolio que tiene acciones, en una cantidad Δ , y efectivo B_t , entonces se puede replicar el precio de la opción.

15.11 Derivación alternativa de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

Suponga que un inversionista comienza con un cierto nivel de riqueza, A_0 , e invierte en un activo con riesgo, S_t , y en otro activo que paga una tasa de interés constante, r , a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento, de tal manera que la dinámica de acumulación de su riqueza queda representada por

$$dA_t = \Delta_t dS_t + r[A_t - \Delta_t S_t]dt.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} dA_t &= \Delta_t(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + r[A_t - \Delta_t S_t]dt \\ &= [rA_t + \Delta_t S_t(\mu - r)]dt + \Delta_t \sigma S_t dW_t. \end{aligned}$$

Sea $c(S_t, t)$ el precio de una opción europea de compra que paga $\max(S_T - K, 0)$, entonces el lema de Itô conduce a

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \sigma dW_t.$$

Si se desea cubrir el portafolio con una opción de tal manera que $c(S_t, t) = A_t$ para toda t , entonces $dc = dA_t$ son iguales. Después de igualar términos estocásticos y deterministas se encuentra que

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = r A_t + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t (\mu - r).$$

Es decir,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} - r c = 0,$$

junto con la condición

$$c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0).$$

15.12 Solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

En esta sección se resuelve la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, la cual por conveniencia se escribe de nuevo,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r - r c = 0, \quad (15.13)$$

con

$$c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0).$$

Dada esta condición, la solución de (15.13) caracteriza el precio de una opción europea de compra sobre S_t . Considere, primero, el siguiente cambio de variables:

$$c(S_t, t) = f(t)g(u_1, u_2), \quad u_1 = u_1(S_t, t) \quad \text{y} \quad u_2 = u_2(S_t, t),$$

donde $f(t)$ y $g(u_1, u_2)$ son funciones por determinar. De esta manera,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = f'(t)g(u_1, u_2) + f(t) \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) \right],$$

$$\frac{\partial c}{\partial S_t} = f(t) \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right) \right]$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} &= f(t) \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2} \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial S_t^2} \right) \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right) \right]. \end{aligned}$$

Las cantidades entre paréntesis cuadrados de las dos primeras derivadas parciales representan las derivadas totales de g con respecto de t y S_t , respectivamente. Después de sustituir las derivadas parciales anteriores en la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, se sigue que

$$\begin{aligned} &f'(t)g(u_1, u_2) + f(t) \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 f(t) \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial S_t^2} \right) \right] \\ &+ r S_t f(t) \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right) \right] - r f(t)g(u_1, u_2) = 0 \end{aligned} \quad (15.14)$$

Si se supone que $f \neq 0$, se puede escribir que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{f'(t)}{f(t)} - r \right) g(u_1, u_2) + \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial S_t^2} \right) \right] \\ & + r S_t \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (15.15)$$

lo cual implica que

$$f'(t) = r f(t)$$

ó

$$f(t) = e^{-r(T-t)}, \quad f(T) = 1. \quad (15.16)$$

De esta manera, la función $f(t)$ representa el valor presente, en t , de una unidad monetaria en T . Consideré el siguiente candidato para u_2 , el cual simplifica, sustancialmente, la ecuación (15.14):

$$u_2(S_t, t) = u_2(t) = B(T-t), \quad u_2(T) = 0, \quad (15.17)$$

donde B es una constante por determinar. Observe que u_2 es una variable que depende sólo del tiempo. Así pues,

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -B \quad (15.18)$$

y

$$\frac{\partial u_2}{\partial S_t} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial S_t^2} = 0. \quad (15.19)$$

En este caso,

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial g}{\partial u_2} \right) B + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2} \right) \right] \\ &+ r S_t \left(\frac{\partial g}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right). \end{aligned} \quad (15.20)$$

Suponga también que

$$\frac{\partial g}{\partial u_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}, \quad (15.21)$$

entonces

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right)^2 - B \right] + \frac{\partial g}{\partial u_1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial u_1}{\partial S_t} r S_t \right] = 0. \quad (15.22)$$

El primer paréntesis en la ecuación anterior puede anularse si se supone que

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t} \right)^2 = B, \quad (15.23)$$

así el lado izquierdo de (15.23) se mantendrá constante y positivo, por lo que es conveniente escribir $B = A^2$. Por lo tanto, u_2 mide el tiempo hacia atrás, es decir, se comienza en T y se termina en cero. De esta manera, la ecuación (15.22) se reduce a:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial u_1}{\partial S_t} r S_t = 0. \quad (15.24)$$

Observe que esta ecuación difiere de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, (15.13), por el término que contiene al producto del precio del derivado por la tasa de interés libre de riesgo. A partir de (15.23), se sigue que

$$\frac{\partial u_1}{\partial S_t} = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma S_t}. \quad (15.25)$$

Así,

$$\int du_1 = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \int \frac{dS_t}{S_t} = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} (\ln(S_t) - \ln(K)) + D(t),$$

donde $-\ln(K)$ es la constante de integración y $D(t)$ es una función por determinar. Por supuesto, esta oportunidad de incorporar una nueva constante en el análisis se aprovecha para introducir el precio de ejercicio. Por lo tanto,

$$u_1 = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + D(t). \quad (15.26)$$

Para determinar la función $D(t)$, se sustituye (15.26) en (15.24). En efecto,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \left(-\frac{1}{S_t}\right)^2 \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} + rS_t \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \left(\frac{1}{S_t}\right) + D'(t) = 0$$

ó

$$-\frac{1}{2}A\sigma\sqrt{2} + r\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} + D'(t) = 0. \quad (15.27)$$

Es decir,

$$D'(t) = \frac{1}{2}A\sigma\sqrt{2} - \frac{rA\sqrt{2}}{\sigma} = -\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right).$$

La solución de esta ecuación diferencial es trivial,

$$D(t) = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) (T - t), \quad D(T) = 0. \quad (15.28)$$

Por lo tanto, la ecuación (15.26) se transforma en

$$u_1(S_t, t) = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)\right], \quad u_1(S_t, T) = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \ln\left(\frac{S_t}{K}\right). \quad (15.29)$$

Por otro lado, como $f(T) = 1$ y $u_2(T) = 0$, se tiene que

$$c(S_t, T) = f(T)g(u_1(S_t, T), u_2(T)) = g(u_1(S_t, T), 0) = g\left(\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \ln\left(\frac{S_t}{K}\right), 0\right). \quad (15.30)$$

Dado que $g(u_1(S_t, T), 0) = c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0)$, a partir de (15.29), se cumple que

$$S_t = K \exp\left\{\frac{u_{1T}\sigma}{A\sqrt{2}}\right\}, \quad (15.31)$$

donde, por simplicidad, se ha denotado $u_{1T} := u_1(S_t, T)$. De lo anterior, se obtiene que

$$c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0) = \begin{cases} K \left(\exp\left\{\frac{u_{1T}\sigma}{A\sqrt{2}}\right\} - 1\right) & \text{si } u_{1T} \geq 0, \\ 0 & \text{si } u_{1T} < 0, \end{cases} \quad (15.32)$$

ya que $S_t > K$ equivale a

$$\exp \left\{ \frac{u_{1T}\sigma}{A\sqrt{2}} \right\} > 1,$$

lo que, a su vez, implica $u_{1T} > 0$. Así, $c(S_t, T)$ representa el valor intrínseco de la opción, es decir, el pago de la opción en la fecha de vencimiento. Ahora bien, la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial g}{\partial u_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} \quad (15.33)$$

con

$$g = g(u_1, u_2), \quad -\infty < u_1 < \infty, \quad u_2 > 0,$$

y

$$g_0(u_1) := \begin{cases} K \left(\exp \left\{ \frac{u_1\sigma}{A\sqrt{2}} \right\} - 1 \right) & \text{si } u_1 \geq 0, \\ 0 & \text{si } u_1 < 0, \end{cases}$$

tiene como solución

$$g(u_1, u_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi u_2}} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(x) e^{-(x-u_1)^2/4u_2} dx. \quad (15.34)$$

Esta ecuación está ligada al fenómeno de difusión de calor. En capítulos subsecuentes, dicha ecuación aparecerá en la valuación de diversos productos derivados. Consideré ahora el siguiente cambio de variable que permite eliminar la variable temporal, u_2 , en (15.34):

$$y = \frac{x - u_1}{\sqrt{2u_2}}.$$

En este caso, se cumple que

$$dx = \sqrt{2u_2} dy.$$

En consecuencia, y como $g_0(x) \equiv 0$ para $x \leq 0$,

$$\begin{aligned} g(u_1, u_2) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi u_2}} \int_0^{\infty} g_0(x) e^{-\frac{1}{2}((x-u_1)/\sqrt{2u_2})^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_1/\sqrt{2u_2}}^{\infty} g_0(u_1 + \sqrt{2u_2} y) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy. \end{aligned} \quad (15.35)$$

De esta manera, y en virtud de (15.33), la ecuación anterior se transforma en

$$g(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_1/\sqrt{2u_2}}^{\infty} K \left[\exp \left\{ \frac{\sigma}{A\sqrt{2}} (u_1 + \sqrt{2u_2} y) \right\} - 1 \right] e^{-\frac{1}{2}y^2} dy. \quad (15.36)$$

Después de utilizar las ecuaciones (15.17) y (15.29), se tiene que el límite inferior de integración de (15.36) satisface

$$\begin{aligned} -\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}} &= -\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \left[\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right] \left(\frac{1}{\sqrt{2}A\sqrt{T-t}} \right) \\ &= -\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned} \quad (15.37)$$

y el argumento de la función exponencial en el integrando de (15.36) satisface

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma}{A\sqrt{2}} \right) &\left[\left(\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \right) \left(\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right) + A\sqrt{2(T-t)} y \right] \\ &= \ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t} y. \end{aligned} \quad (15.38)$$

Si se sustituye este valor en (15.36), se tiene que

$$\begin{aligned} g(u_1, u_2) &= \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} \left[\exp \left\{ \ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}y \right\} - 1 \right] e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} \exp \left\{ (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}y \right\} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &\quad - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy, \end{aligned} \quad (15.39)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi &:= \left\{ y \mid y > -u_1/\sqrt{2u_2} \right\} \\ &= \left\{ y \mid y > -\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\} \\ &= \left\{ y \mid -\infty < y < \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $c(S_t, t) = f(t)g(u_1, u_2) = e^{-r(T-t)}g(u_1, u_2)$, se tiene de (15.39) que

$$\begin{aligned} c(S_t, t) &= \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} \exp \left\{ -\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}y \right\} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &\quad - \frac{K e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda} e^{-\frac{1}{2}(y-\sigma\sqrt{T-t})^2} dy - \frac{K e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy, \end{aligned} \quad (15.40)$$

Si se hace el cambio de variable $\epsilon = y - \sigma\sqrt{T-t}$ en (15.40), se obtiene que

$$c(S_t, t) = \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon - \frac{K e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Psi} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy, \quad (15.41)$$

donde

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \left\{ y - \sigma\sqrt{T-t} > -u_1/\sqrt{2u_2} - \sigma\sqrt{T-t} \right\} \\ &= \left\{ \epsilon \mid \epsilon > -\frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\} \\ &= \left\{ \epsilon \mid -\infty < \epsilon < \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}. \end{aligned}$$

Si se denota

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}y^2} dy,$$

se tiene que

$$c(S_t, t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (15.42)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (15.43)$$

y

$$d_2 = \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (15.44)$$

15.13 Bibliografía sugerida

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *The Bell Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Una guía completa para economistas en la valuación de opciones". *Gaceta de Economía*, Año 6, No. 12, pp. 155-212.

15.14 Ejercicios

15.1 Suponga que la ecuación (15.17) se toma como

$$u_2(S_t, t) = u_2(t) = T - t, \quad u_2(T) = 0.$$

¿Cómo se modifica la solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes?

Solución: De acuerdo con las ecuaciones (15.37) y (15.38), la selección de $B = A^2$ es irrelevante.

15.2 Al resolver la ecuación (15.25),

$$\frac{\partial u_1}{\partial S_t} = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma S_t},$$

suponga que

$$\int du_1 = A\sqrt{2} \int \frac{dS_t}{S_t} = A\sqrt{2}(\ln(S_t) - \ln(E)) + D(t),$$

donde E es una constante por determinar. ¿Cómo modifica esto la solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes?

Solución: La solución debe cumplir $E = K$.

15.3 Muestre que

$$g(u_1, u_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi u_2}} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(x) e^{-(x-u_1)^2/4u_2} dx$$

satisface

$$\frac{\partial g}{\partial u_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}$$

y

$$\lim_{u_1 \rightarrow 0} g(u_1, u_2) = g_0(u_1).$$

15.4 Suponga que el precio de un activo subyacente al tiempo t , S_t , es conducido por un proceso de la forma

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t,$$

donde $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Si se aplica el lema de Itô a $c = c(S_t, t)$, se tiene que

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu(S_t, t) \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(S_t, t) \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma(S_t, t) dW_t.$$

Equivalentemente,

$$dc = \mu_c(S_t, t)cdt + \sigma_c(S_t, t)c dW_t,$$

donde

$$\mu_c(S_t, t) = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu(S_t, t) \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(S_t, t) \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) / c.$$

y

$$\sigma_c(S_t, t) = \left(\frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \frac{\sigma(S_t, t)}{c}.$$

Consideré ahora el valor de un portafolio

$$\Pi_t = \alpha S_t + \beta c.$$

Con argumentos de arbitraje demuestre que

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(S_t, t) \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial c}{\partial S_t} - rc = 0.$$

Solución: Si las cantidades α y β no se modifican ante variaciones en el mercado, entonces

$$d\Pi_t = \alpha dS_t + \beta dc.$$

Es decir,

$$d\Pi_t = (\alpha\mu(S_t, t) + \beta\mu_c(S_t, t)c) dt + (\alpha\sigma(S_t, t) + \beta\sigma_c(S_t, t)c) dW_t.$$

Si se eligen

$$\alpha = \frac{\sigma_c(S_t, t)}{\sigma_c(S_t, t) - \sigma(S_t, t)}$$

y

$$\beta = -\frac{\sigma(S_t, t)}{c(\sigma_c(S_t, t) - \sigma(S_t, t))},$$

el coeficiente del factor de riesgo dW_t se anula, así

$$d\Pi_t = \left(\frac{\sigma_c(S_t, t)\mu(S_t, t) - \sigma(S_t, t)\mu_c(S_t, t)}{\sigma_c(S_t, t) - \sigma(S_t, t)} \right) dt.$$

Si la expresión anterior se iguala con el rendimiento libre de riesgo de una cuenta bancaria, la cual está dada por

$$\Pi_t r dt = (\alpha S_t + \beta c) r dt = \left(\frac{\sigma_c(S_t, t)S_t - \sigma(S_t, t)}{\sigma_c(S_t, t) - \sigma(S_t, t)} \right) r dt,$$

se tiene que

$$\frac{\mu(S_t, t) - rS_t}{\sigma(S_t, t)} = \frac{\mu_c(S_t, t) - r}{\sigma_c(S_t, t)}.$$

Es decir, el premio al riesgo, normalizado por la volatilidad, que ofrece tanto el subyacente como el derivado (cualquier derivado) es el mismo, el cual será denotado por $\lambda(S_t, t)$. En virtud de las definiciones de $\mu_c(S_t, t)$ y $\sigma_c(S_t, t)$, se cumple que

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(S_t, t) \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + (\mu(S_t, t) - \lambda(S_t, t)\sigma(S_t, t)) \frac{\partial c}{\partial S_t} - rc = 0.$$

Al sustituir

$$\lambda(S_t, t) = \frac{\mu(S_t, t) - rS_t}{\sigma(S_t, t)},$$

en la ecuación anterior, se obtiene el resultado requerido.

15.5 El parámetro de volatilidad, σ , no necesariamente tiene que ser constante para encontrar soluciones, puede ser una función conocida del tiempo. El hecho de que σ sea constante facilita el proceso de valuación. Si $\sigma_t := \sigma(t)$, muestre mediante el enfoque de EDP que

$$c(S_t, t; \sigma_t) = c_{\text{BS}}(S_t, t; \bar{\sigma}^2),$$

donde c_{BS} representa la fórmula de valuación de Black-Scholes y

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds.$$

15.6 La tasa de interés libre de riesgo también puede ser una función conocida del tiempo. En particular, cuando se considera a r como constante se simplifica el análisis. Suponga que $r_t := r(t)$, muestre utilizando el enfoque EDP que

$$c(S_t, t; r_t) = c_{\text{BS}}(S_t, t; \bar{r}),$$

donde c_{BS} es la fórmula de valuación de Black-Scholes y

$$\bar{r} = \frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds.$$

CAPÍTULO 16

MODELO DE BLACK-SCHOLES (III): ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DE CALOR

Conceptos básicos de este capítulo:

- Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes
- Ecuación de difusión de calor
- Condiciones finales y de frontera

16.1 Introducción

En este capítulo se transforma la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes en la ecuación de difusión de calor mediante cambios sucesivos de variables. La ecuación de difusión de calor o, simplemente, la ecuación de calor tiene soluciones analíticas explícitas que son sencillas de tratar. Estas soluciones describen cómo se difunde, al transcurrir el tiempo, el calor en una varilla de longitud infinita después de que se ha calentado en un tiempo inicial. Una vez que se obtiene la correspondiente solución de la ecuación de calor, se invierten los cambios de variable a fin de determinar el precio teórico de una opción europea de compra.

16.2 Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

Es conveniente para el desarrollo de este capítulo tener en mente la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes del precio de una opción europea de compra, $c = c(S_t, t)$, la cual está dada por

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t - r c = 0, \quad (16.1)$$

junto con las condiciones de frontera

$$c(0, t) = 0, \quad c(S_t, t) \approx S_t \quad \text{cuando } S_t \rightarrow \infty,$$

y

$$c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0).$$

Estas condiciones de frontera son bastante intuitivas. En efecto, si todo el mundo tuviera acceso al subyacente en cualquier fecha y sin costo alguno, entonces el derecho para comprarlo en el futuro tendría que ser gratuito. Por otro lado, si el subyacente es un activo costoso, la opción de comprarlo en el futuro también sería muy costosa. Se verá a continuación que mediante cambios de variable, en el precio del activo subyacente y el tiempo, la ecuación (16.1) puede ser llevada a la ecuación de difusión de calor.

16.3 Un primer cambio de variables

Para transformar la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes en la ecuación de difusión de calor se requieren varios cambios de variables. Considere primero los siguientes dos cambios de variables y la definición de un parámetro adimensional:

$$S_t = K e^{x_t}, \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad \text{y} \quad \kappa = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}. \quad (16.2)$$

Es decir, las nuevas variables, x_t y τ , representan, respectivamente, el diferencial de los logaritmos entre el precio del activo subyacente y el precio de ejercicio (el rendimiento del activo ajustado por el precio de ejercicio, suponiendo que $S_0 = 1$) y el tiempo invertido yendo de la fecha de vencimiento hacia atrás, salvo el factor constante, $\frac{1}{2}\sigma^2$. El precio de la opción bajo estos cambios de variable se denotará mediante

$$c(S_t, t) = K\nu(x_t, \tau). \quad (16.3)$$

En este caso, se puede ver de manera inmediata que el valor intrínseco de la opción de compra satisface:

$$\begin{aligned} c(S_t, T) &= \max(S_t - K, 0) \\ &= \max(K e^{x_t} - K, 0) \\ &= \max(K(e^{x_t} - 1), 0) \\ &= K \max(e^{x_t} - 1, 0) \\ &= K\nu(x_t, 0), \end{aligned} \quad (16.4)$$

donde

$$\nu(x_t, 0) = \max(e^{x_t} - 1, 0).$$

16.4 Cálculo de derivadas parciales bajo el cambio de variables

A continuación se calculan las derivadas parciales de c con respecto de t y S_t , en términos de las derivadas parciales de ν con respecto a τ y x_t , utilizando el cambio de variable propuesto en (16.2). Note primero que a partir de (16.2) se sigue que

$$x_t = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) \quad \text{y} \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} K\nu(x_t, \tau) = \frac{\partial}{\partial t} K\nu\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)\right) \\ &= K \frac{\partial \nu}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \\ &= K \frac{\partial \nu}{\partial \tau} \left(-\frac{1}{2}\sigma^2\right). \end{aligned} \quad (16.5)$$

Asimismo, la derivada parcial de c con respecto de S_t utilizando el cambio de variable propuesto en (16.2) satisface

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial S_t} &= \frac{\partial}{\partial S_t} K\nu(x_t, \tau) = \frac{\partial}{\partial S_t} K\nu\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)\right) \\ &= K \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial S_t} \\ &= K \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \frac{1}{S_t} \\ &= \frac{K}{S_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \\ &= e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t}. \end{aligned} \quad (16.6)$$

Por último, la segunda derivada parcial de c con respecto de S_t está dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} &= \frac{\partial}{\partial S_t} \left(e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right) \\
 &= \frac{\partial x_t}{\partial S_t} \frac{\partial}{\partial x_t} \left(e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right) \\
 &= \frac{1}{S_t} \left(e^{-x_t} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} - e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right) \\
 &= \frac{1}{K e^{x_t}} \left(e^{-x_t} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} - e^{-x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right) \\
 &= \frac{1}{K} \left(e^{-2x_t} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} - e^{-2x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right).
 \end{aligned} \tag{16.7}$$

16.5 Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes en términos del primer cambio de variables

En esta sección se reescribe la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes en términos de las nuevas variables. Si se sustituyen las ecuaciones (16.5), (16.6) y (16.7) en (16.1), se obtiene el siguiente resultado:

$$-\frac{1}{2} K \sigma^2 \frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \frac{1}{2} K^2 e^{2x_t} \sigma^2 \left(e^{-2x_t} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} - e^{-2x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right) \frac{1}{K} + r K e^{x_t} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} e^{-x_t} - r K \nu = 0.$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} + \frac{\partial \nu}{\partial x_t} - \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \nu = 0.$$

En virtud de la definición de κ dada en (16.2), se tiene

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} + (\kappa - 1) \frac{\partial \nu}{\partial x_t} - \kappa \nu. \tag{16.8}$$

Esta ecuación puede simplificarse todavía más a través de un segundo cambio de variable, como se verá a continuación.

16.6 Un segundo cambio de variables

Para transformar, por fin, la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes en la ecuación de difusión de calor se requiere un segundo cambio de variables. Defina ahora

$$\nu(x_t, \tau) = e^{\alpha x_t + \beta \tau} u(x_t, \tau). \tag{16.9}$$

Las derivadas parciales de ν con respecto de τ y x_t se calculan a continuación:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \nu}{\partial x_t} &= \frac{\partial}{\partial x_t} e^{\alpha x_t + \beta \tau} u \\
 &= e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha u \right).
 \end{aligned} \tag{16.10}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} &= \frac{\partial}{\partial x_t} \left(\frac{\partial \nu}{\partial x_t} \right) \\
 &= e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha^2 u \right).
 \end{aligned} \tag{16.11}$$

Además,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu}{\partial \tau} &= e^{\alpha x_t + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x_t} + u e^{\alpha x_t + \beta \tau} \beta \\ &= e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u \right).\end{aligned}\quad (16.12)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (16.10), (16.11) y (16.12) en (16.8), se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2} + (\kappa - 1) \left(\frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha u \right) - \kappa u.$$

O bien,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u[\beta - \alpha^2 - (\kappa - 1)\alpha + \kappa] = \frac{\partial u}{\partial x_t} (2\alpha + \kappa - 1) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}. \quad (16.13)$$

16.7 Ecuación de difusión de calor

A continuación se eligen convenientemente los parámetros de la ecuación (16.13). Si se toman α y β en (16.13) de tal manera que

$$2\alpha + \kappa - 1 = 0 \quad (16.14)$$

y

$$\beta - \alpha^2 - (\kappa - 1)\alpha + \kappa = 0, \quad (16.15)$$

entonces

$$\alpha = -\frac{1}{2}(\kappa - 1) \quad (16.16)$$

y

$$\beta = -\kappa - \alpha^2 = -\frac{1}{4}(\kappa + 1)^2. \quad (16.17)$$

Después de sustituir (16.16) y (16.17) en (16.13), se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}, \quad -\infty < x_t < \infty, \quad \tau > 0, \quad (16.18)$$

junto con la condición

$$u(x_t, 0) = u_0(x_t) = \max \left(e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t}, 0 \right), \quad (16.19)$$

ya que

$$\nu(x_t, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} u(x_t, \tau). \quad (16.20)$$

En efecto, a partir de (16.9), se tiene que

$$\nu(x_t, 0) = e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t} u(x_t, 0),$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}u(x_t, 0) &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t} \nu(x_t, 0) \\ &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t} \max(e^{x_t} - 1, 0) \\ &= \max(e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t + x_t} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t}, 0) \\ &= \max(e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t}, 0).\end{aligned}$$

Así, la varilla de longitud infinita queda representada por $-\infty < x_t < \infty$, la cantidad de calor que se aplica en el punto x_t en el tiempo $\tau = 0$ está dada por $u_0(x_t)$ y la cantidad de calor en $\tau > 0$ en cada punto x_t es descrita por $u(x_t, \tau)$. Así, u está asociada con el valor intrínseco de la opción, x_t con el rendimiento del activo ajustado por precio de ejercicio y τ con el tiempo invertido yendo de la fecha de vencimiento hacia atrás.

16.8 Obtención de la solución de la ecuación de Black-Scholes mediante la solución de la ecuación de calor

En esta sección se obtiene la solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes mediante la solución de la ecuación de difusión de calor invirtiendo todos los cambios de variables. Observe, primero, que la solución de la ecuación de calor, dada la condición (16.19), está dada por

$$u(x_t, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(s-x_t)^2}{4\tau}} ds. \quad (16.21)$$

Una receta que funciona muy bien para recordar la ecuación anterior en forma rápida consiste en escribir $Y \sim \mathcal{N}(x_t, 2\tau)$ y $u(x_t, \tau) = E[u_0(Y)]$, ya que en este caso

$$u(x_t, \tau) = E[u_0(Y)] = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(s-x_t)^2}{4\tau}} ds.$$

Considere ahora el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{s - x_t}{\sqrt{2\tau}}.$$

En este caso, se cumple que

$$ds = \sqrt{2\tau} dy.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} u(x_t, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-(x_t-s)^2/4\tau} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_t + \sqrt{2\tau}y) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy. \end{aligned}$$

Por otro lado, a partir de (16.19) se sigue que

$$u_0(s) = \max \left\{ e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)}, 0 \right\},$$

entonces

$$\begin{aligned} u(x_t, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_t + \sqrt{2\tau}y) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left\{ e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} \right\} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \Psi(\kappa+1) - \Psi(\kappa-1). \end{aligned} \quad (16.22)$$

En la segunda integral de la ecuación anterior se ha utilizado el hecho de que

$$e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t+y\sqrt{2\tau}} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+y\sqrt{2\tau}} > 0$$

implica

$$y > -\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}.$$

Las cantidades $\Psi(\kappa + 1)$ y $\Psi(\kappa - 1)$ se calcularán en forma separada. Note que

$$\begin{aligned}
 \Psi(\kappa + 1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t} e^{-\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(\kappa+1)\sqrt{2\tau}y} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t} e^{-\frac{1}{2}[y^2 - (\kappa+1)\sqrt{2\tau}y]} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}[y^2 - (\kappa+1)\sqrt{2\tau}y + \frac{1}{2}(\kappa+1)^2\tau]} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}[y - \frac{1}{2}(\kappa+1)\sqrt{2\tau}]^2} dy \\
 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[y - \frac{1}{2}(\kappa+1)\sqrt{2\tau}]^2} dy. \tag{16.23}
 \end{aligned}$$

Considere ahora el siguiente cambio de variable:

$$\epsilon = y - \frac{1}{2}(\kappa + 1)\sqrt{2\tau},$$

en cuyo caso

$$d\epsilon = dy.$$

Observe que cuando $y = -x_t/\sqrt{2\tau}$, entonces

$$\epsilon = -\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(\kappa + 1)\sqrt{2\tau}}{2} = -\frac{x_t + (\kappa + 1)\tau}{\sqrt{2\tau}}.$$

En tal caso, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \Psi(\kappa + 1) &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[y - \frac{1}{2}(\kappa+1)\sqrt{2\tau}]^2} dy \\
 &= e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \int_{\left\{ \epsilon > -\frac{x_t + (\kappa+1)\tau}{\sqrt{2\tau}} \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\
 &= e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \int_{\left\{ -\infty < \epsilon < \frac{x_t + (\kappa+1)\tau}{\sqrt{2\tau}} \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\
 &= e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \Phi(d_1), \tag{16.24}
 \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{x_t + (\kappa + 1)\tau}{\sqrt{2\tau}} \tag{16.25}$$

y

$$\Phi(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon$$

es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar. El cálculo de $\Psi(\kappa - 1)$ es similar al de $\Psi(\kappa + 1)$, sólo que en lugar del argumento $\kappa + 1$ se tiene $\kappa - 1$. Es decir,

$$\begin{aligned}
 \Psi(\kappa - 1) &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau} \int_{\left\{ -\infty < \epsilon < \frac{x_t + (\kappa-1)\tau}{\sqrt{2\tau}} \right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\
 &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau} \Phi(d_2), \tag{16.26}
 \end{aligned}$$

donde

$$d_2 = \frac{x_t + (\kappa - 1)\tau}{\sqrt{2\tau}}. \quad (16.27)$$

Ahora bien, dado que

$$x_t = \ln \left(\frac{S_t}{K} \right), \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t), \quad \kappa = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2},$$

se sigue, a partir de (16.25) y (16.27) que

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}. \quad (16.28)$$

Por último, dado que

$$c = K\nu(x_t, \tau)$$

con

$$\begin{aligned} \nu &= e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} u(x_t, \tau) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} (\Psi(\kappa + 1) - \Psi(\kappa - 1)), \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} c &= K \left(e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \right) (\Psi(\kappa + 1) - \Psi(\kappa - 1)) \\ &= K \left(e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \right) \left(e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \Phi(d_1) - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t + \frac{1}{4}(\kappa-1)^2\tau} \Phi(d_2) \right) \\ &= K (e^{x_t} \Phi(d_1) - e^{\kappa\tau} \Phi(d_2)) \\ &= S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2). \end{aligned}$$

La expresión anterior coincide plenamente con la fórmula de valuación teórica de Black-Scholes.

16.9 Bibliografía sugerida

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
 Brenner, M. and M. G. Subrahmanyam (1998). "A Simple Approach to Option Valuation and Hedging in the Black-Scholes Model". *Financial Analysts Journal*, Vol. 50, No. 2, pp. 25-28.
 Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

16.10 Ejercicios

- 16.1** Suponga que en la ecuación de Black-Scholes la tasa de interés y la varianza son funciones conocidas del tiempo. Transforme la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes en la ecuación de calor.

- 16.2** Transforme la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - Au = B \frac{\partial u}{\partial x_t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2},$$

donde A y B son constantes, en la ecuación de calor.

16.3 Considere la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes del precio de una opción europea de venta, $p = p(S_t, t)$, la cual está dada por

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial p}{\partial S_t} r S_t - r p = 0,$$

junto con las condición de frontera

$$p(S_t, T) = \max(K - S_t, 0).$$

Transforme la ecuación diferencial parcial anterior en la ecuación de difusión de calor.

CAPÍTULO 17

MODELO DE BLACK-SCHOLES (IV): PORTAFOLIOS REPLICANTES

Conceptos básicos de este capítulo:

- Portafolios replicantes y autofinanciables
- Condiciones de arbitraje
- Mercados completos

17.1 Introducción

En este capítulo se presenta otra forma alternativa para obtener la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes (1973). En particular, se estudia el caso de una opción europea de compra. Se desea determinar un portafolio combinado de una posición larga del activo subyacente y un depósito bancario que, en cada instante, repliquen el valor de una opción europea de compra. Se supone que el activo subyacente y la opción se negocian en forma continua de tal manera que el riesgo se elimine en todo momento, es decir, la cobertura es dinámica.

Considere un movimiento Browniano $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Se supone, como siempre, que el precio del activo subyacente, S_t , sigue un movimiento geométrico Browniano:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (17.1)$$

donde μ es el rendimiento medio esperado, σ es la volatilidad instantánea y $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$. Asimismo, se supone que en la economía existe un sistema bancario que paga por depósitos una tasa constante y libre de riesgo r . De esta manera, si se hace un depósito de M_t unidades monetarias, el rendimiento de dicha inversión, en el instante t , es

$$dM_t = r M_t dt. \quad (17.2)$$

17.2 Portafolios replicantes

Se desea determinar un portafolio combinado de una posición larga del activo subyacente y un depósito bancario que replique, en todo momento, el valor de una opción europea de compra. Suponga que se desean encontrar procesos estocásticos $v_t = v(S_t, t)$ y $w_t = w(S_t, t)$, tales que

$$v_t S_t + w_t M_t = c(S_t, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (17.3)$$

con

$$\mathbb{P} \left\{ \int_0^t v_s^2 ds \right\} = \mathbb{P} \left\{ \int_0^t w_s^2 ds \right\} = 1.$$

La condición (17.3) indica que no existen posibilidades de arbitraje. Por ejemplo, si, antes del vencimiento, el lado izquierdo de (17.3) fuera menor que el lado derecho, se toma una posición corta en la opción de compra y la prima se invierte inmediatamente en el portafolio combinado a fin de generar una ganancia libre de riesgo. Asimismo, se supone que en la fecha de vencimiento

$$v_T S_T + w_T M_T = \max(S_T - K, 0),$$

sin importar la trayectoria que tome el activo subyacente.

17.3 Portafolios autofinanciables

Se supone que una vez que se ha realizado la inversión inicial no se requieren fondos adicionales para mantener el portafolio, de tal forma que los cambios requeridos en v_t se compensen con cambios, con signo opuesto, en w_t . Así,

$$S_t dv_t + M_t dw_t = 0. \quad (17.4)$$

Esto significa que

$$v_t dS_t + w_t dM_t = dc(S_t, t). \quad (17.5)$$

Después de sustituir (17.1) y (17.2) en (17.5), se obtiene

$$v_t(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + w_t r M_t dt = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t. \quad (17.6)$$

Si se igualan los coeficientes de (17.6) en dW_t , se obtiene

$$v_t = \frac{\partial c}{\partial S_t}. \quad (17.7)$$

De la misma manera, de (17.3) se sigue que

$$w_t = \frac{c(S_t, t) - v_t S_t}{M_t}. \quad (17.8)$$

Las cantidades v_t y w_t determinan el portafolio replicante del valor del derivado, el cual para su mantenimiento es autofinanciable.

17.4 Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

Si ahora se igualan los términos en dt , se sigue que

$$v_t \mu S_t + w_t r M_t = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}. \quad (17.9)$$

Después de sustituir (17.7) y (17.8) en (17.9), se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + r \left(c(S_t, t) - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \right) = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}.$$

Equivalentemente,

$$r \left(c(S_t, t) - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \right) = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}.$$

Es importante destacar que el rendimiento medio, μ , del activo subyacente no aparece en la ecuación anterior. Esto quiere decir que si dos agentes tienen diferentes expectativas sobre el rendimiento promedio del activo subyacente, ellos están dispuestos a omitirlas en sus decisiones de inversión con tal de que la volatilidad se mantenga constante. Por lo tanto,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r - r c(S_t, t) = 0, \quad (17.10)$$

lo que coincide plenamente con la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes. Finalmente, se debe imponer como condición final el valor en la fecha de vencimiento del portafolio replicante y autofinanciable,

$$c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0), \quad (17.11)$$

a fin de que (17.9) tenga una única solución.

17.5 Bibliografía sugerida

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Una guía completa para economistas en la valuación de opciones". *Gaceta de Economía*, Año 6, No. 12, pp. 155-212.

17.6 Ejercicios

17.1 Utilice portafolios replicantes y autofinanciables para obtener la ecuación diferencial parcial de una opción europea de venta.

17.2 En el contexto de portafolios replicantes, si v_t aumenta, es decir, $dv_t > 0$, determine el cambio en w_t .

Solución: En vista de que $S_t dv_t + M_t dw_t = 0$, se sigue que $dw_t = -(S_t/M_t)dv_t < 0$.

17.3 En el marco de portafolios replicantes y autofinanciables, si w_t aumenta, determine el cambio porcentual en v_t .

Solución: En este caso,

$$\frac{dv_t}{v_t} = -\frac{M_t}{\Delta S_t} dw_t < 0,$$

donde

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S_t}.$$

CAPÍTULO 18

MODELO DE BLACK-SCHOLES (V): EL TEOREMA DE GIRSANOV

Conceptos básicos de este capítulo:

- Teorema de Girsanov
- Cambio de numerario
- Martingala
- Valuación neutral al riesgo
- Fórmula de valuación de derivados

18.1 Introducción

En este capítulo, se presenta un procedimiento alternativo para obtener la fórmula de Black y Scholes (1973) sobre el precio de una opción europea de una acción que no paga dividendos. Este procedimiento se basa en el teorema de Girsanov mediante el cual el precio de una opción sobre una acción, expresado en términos de un numerario, se transforma en una martingala bajo una nueva medida de probabilidad equivalente, neutral al riesgo, definida sobre el espacio muestral original. Posteriormente, bajo esta nueva medida de probabilidad, se calcula la prima de la opción como el valor esperado, condicional a la información presente, del valor intrínseco del contrato.

18.2 Movimiento geométrico Browniano y el teorema de Girsanov

El teorema de Girsanov (1960) construye explícitamente una medida de probabilidad equivalente, definida sobre el espacio original, que permite transformar un movimiento geométrico Browniano con tendencia igual al rendimiento medio esperado del activo en un movimiento geométrico Browniano, neutral al riesgo, con tendencia igual a la tasa de interés libre de riesgo.

Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Se supone que el precio del activo subyacente, una acción, sigue un movimiento geométrico Browniano (también llamado movimiento exponencial Browniano o movimiento económico Browniano):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (18.1)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son, respectivamente, el rendimiento medio esperado y la volatilidad instantánea del título de capital. Ahora bien, la ecuación (18.1) puede reescribirse como

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right). \quad (18.2)$$

La cantidad

$$\lambda \equiv \frac{\mu - r}{\sigma} \quad (18.3)$$

es conocida como premio al riesgo (de mercado), o precio de mercado del riesgo (del subyacente). Si se define

$$\widetilde{W}_t = \lambda t + W_t, \quad (18.4)$$

entonces (18.2) se puede reescribir como

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t. \quad (18.5)$$

Observe que el término de tendencia del proceso representado en (18.5) se ha modificado sin que se altere la varianza. El teorema de Girsanov proporciona una medida de probabilidad

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \varphi(\lambda, t, W_t) d\tilde{\mathbb{P}}, \quad A \in \mathcal{F},$$

donde

$$\varphi(\lambda, t, W_t) = \exp \left\{ -\lambda W_t - \frac{1}{2} \lambda^2 t \right\}, \quad (18.6)$$

definida en el espacio muestral original, Ω , y bajo la cual \tilde{W}_t es un movimiento Browniano. Se dice en este caso que la medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ es neutral al riesgo. Esto quiere decir que si dos agentes tienen diferentes expectativas sobre el rendimiento promedio del activo subyacente, ellos están dispuestos a omitirlas en sus decisiones de inversión siempre y cuando la volatilidad del activo subyacente se mantenga constante.

18.3 Cambio de numerario

Considere un depósito bancario de M_t unidades monetarias, al tiempo t , que paga una tasa de interés constante y libre de riesgo. El rendimiento del depósito durante el instante dt está representado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$dM_t = rM_t dt. \quad (18.7)$$

Si se supone que la inversión inicial es de una unidad monetaria, $M_0 = 1$, entonces la solución de la ecuación (18.7) satisface

$$M_t = e^{rt}. \quad (18.8)$$

La ecuación anterior es llamada la cuenta del mercado de dinero. Se define ahora

$$\tilde{S}_t = M_t^{-1} S_t = e^{-rt} S_t, \quad (18.9)$$

donde S_t satisface (18.1). Observe que (18.9) no es el valor presente de S_t , ya que el valor presente de S_t en t es S_t . Esta ecuación expresa simplemente un cambio en la forma de medir una variable con respecto de una cantidad positiva en una inversión libre de riesgo. Claramente, al inicio $\tilde{S}_0 = S_0$. En este caso, se cumple que

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= e^{-rt} dS_t - re^{-rt} S_t dt \\ &= e^{-rt} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - re^{-rt} S_t dt \\ &= e^{-rt} [(\mu - r) S_t dt + \sigma S_t dW_t] \\ &= e^{-rt} S_t \sigma \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right) \\ &= \tilde{S}_t \sigma d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

ó

$$\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = \sigma d\tilde{W}_t. \quad (18.10)$$

En otras palabras, el rendimiento medio esperado de \tilde{S}_t es conducido por la fuente de incertidumbre asociada con \tilde{W}_t . La ecuación (18.10) puede ser escrita en forma equivalente como:

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + \sigma \int_0^t \tilde{S}_u d\tilde{W}_u. \quad (18.11)$$

Por lo tanto, \tilde{S}_t es una $\tilde{\mathbb{P}}$ -martingala con respecto de la filtración aumentada $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ definida en el espacio medible original (Ω, \mathcal{F}) . Si el proceso \tilde{S}_t es no anticipado a la información de mercado \mathcal{F}_t (adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$), entonces

$$\tilde{\mathbb{E}} [\tilde{S}_t | \mathcal{F}_u] = \tilde{S}_u \quad \text{para } t > u. \quad (18.12)$$

18.4 Portafolios replicantes y autofinanciables, condiciones de arbitraje y el teorema de Girsanov

Se desean encontrar $v_t = v(S_t, t)$ y $w_t = w(S_t, t)$, procesos estocásticos adaptados a la filtración $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, tales que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t v_s^2 ds \right] < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^t |w_s| ds < \infty \quad \text{casi dondequiera}$$

que satisfagan

$$v_t S_t + w_t M_t = c(S_t, t) \quad (18.13)$$

y que en la fecha de vencimiento replique el valor intrínseco, o función de pagos, de la opción de compra, es decir,

$$v_T S_T + w_T M_T = \max(S_T - K, 0), \quad (18.14)$$

sin importar la trayectoria que tome el activo subyacente. La condición expresada en (18.13) indica que no existen oportunidades de arbitraje. Por ejemplo, si antes del vencimiento, $t < T$, el lado izquierdo fuera menor que el derecho, se tomaría una posición corta en la opción de compra y la prima se invertiría inmediatamente en el portafolio combinado a fin de generar una ganancia libre de riesgo en la fecha de vencimiento. Asimismo, se supone que el portafolio es autofinanciable, es decir, una vez que se ha realizado la inversión inicial no se requieren fondos adicionales para mantener el portafolio. Esto significa que

$$v_t dS_t + w_t dM_t = dc(S_t, t). \quad (18.15)$$

Equivalentemente,

$$S_t dv_t + M_t dw_t = 0,$$

lo cual implica que

$$v_t (S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t) + w_t r M_t dt = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t. \quad (18.16)$$

Si se igualan los coeficientes de (18.13) en dW_t , se obtiene

$$v_t = \frac{\partial c}{\partial S_t} \equiv \Delta_t. \quad (18.17)$$

De la misma manera, a partir de la ecuación (18.13), se sigue que

$$w_t = \frac{c(S_t, t) - v_t S_t}{M_t}. \quad (18.18)$$

Las cantidades v_t y w_t determinan el portafolio replicante del valor del derivado. Por lo tanto, la ecuación (18.15) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} dc &= \Delta_t dS_t + \frac{c - \Delta_t S_t}{M_t} dM_t \\ &= \Delta_t dS_t + (c - \Delta_t S_t) r dt. \end{aligned} \quad (18.19)$$

Observe ahora que si $\tilde{c} = e^{-rt}c$, en virtud de (18.19), se cumple que

$$\begin{aligned}
 d\tilde{c} &= e^{-rt}dc - re^{-rt}cdt \\
 &= e^{-rt}[\Delta_t dS_t + (c - \Delta_t S_t) rdt] - re^{-rt}cdt \\
 &= e^{-rt}(\Delta_t dS_t - S_t \Delta_t rdt) \\
 &= e^{-rt}\left[\Delta_t \left(rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t\right) - S_t \Delta_t rdt\right] \\
 &= e^{-rt}\Delta_t \sigma S_t d\tilde{W}_t \\
 &= \Delta_t \sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t.
 \end{aligned} \tag{18.20}$$

Es decir, si no hay oportunidades de arbitraje, \tilde{c} es una martingala en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \tilde{\mathbb{P}})$.

18.5 Teorema de Girsanov y la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

En esta sección se obtiene la fórmula de valuación teórica de la prima de una opción en un mundo neutral al riesgo. Sea $c(S_t, t)$ el precio de una opción europea de compra y defina

$$\tilde{c}(S_t, t) = \frac{c(S_t, t)}{M_t},$$

entonces

$$\begin{aligned}
 d\tilde{c} &= e^{-rt}dc - re^{-rt}cdt \\
 &= e^{-rt}\left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)dt + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t dW_t\right] - re^{-rt}cdt \\
 &= e^{-rt}\left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - rc\right)dt + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t dW_t\right] \\
 &= e^{-rt}\left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - rc\right)dt\right. \\
 &\quad \left.+ \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t \left(d\tilde{W}_t - \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)dt\right)\right] \\
 &= e^{-rt}\left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}rS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - rc\right)dt + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t d\tilde{W}_t\right] \\
 &= e^{-rt}\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}rS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - rc\right)dt + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t.
 \end{aligned} \tag{18.21}$$

En ausencia de oportunidades de arbitraje, la expresión anterior es una martingala. Por lo tanto,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}rS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - rc = 0$$

junto con la condición

$$c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0).$$

18.6 La regla de Bayes y esperanza condicional bajo la probabilidad equivalente neutral al riesgo

De acuerdo con la sección anterior, \tilde{c} es una martingala en $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \tilde{\mathbb{P}})$. En el transcurso de esta sección es necesario destacar la dependencia de c con t mediante la notación c_t . Por lo tanto, si $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\tilde{\mathbb{E}} [\tilde{c}_t | \mathcal{F}_s] = \tilde{c}_s. \quad (18.22)$$

El teorema de Girsanov proporciona una medida martingala equivalente

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \varphi(\lambda, T, W_T) d\tilde{\mathbb{P}}, \quad A \in \mathcal{F},$$

donde $\varphi(\lambda, T, W_T)$ se calcula a partir de un tiempo inicial $t = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, T, W_T) &= \exp \left\{ -\lambda \int_0^T dW_s - \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^T ds \right\} \\ &= \exp \left\{ -\lambda(W_T - W_0) - \frac{1}{2}\lambda^2(T - 0) \right\}. \end{aligned}$$

Sin embargo, si se tiene información \mathcal{F}_t , entonces el tiempo inicial no es cero sino t , en cuyo caso

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, T - t, W_{T-t}) &= \exp \left\{ -\lambda W_{T-t} - \frac{1}{2}\lambda^2(T - t) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\lambda(W_T - W_t) - \frac{1}{2}\lambda^2(T - t) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T \right\} \exp \left\{ \lambda W_t + \frac{1}{2}\lambda^2 t \right\} \\ &= \frac{\varphi(\lambda, T, W_T)}{\varphi(\lambda, t, W_t)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $A \in \mathcal{F}_t$, entonces

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \frac{\varphi(\lambda, T, W_T)}{\varphi(\lambda, t, W_t)} d\tilde{\mathbb{P}}, \quad A \in \mathcal{F}_t.$$

En consecuencia

$$\tilde{\mathbb{E}} [\tilde{c}_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E} \left[\frac{\varphi(\lambda, T, W_T)}{\varphi(\lambda, t, W_t)} \tilde{c}_T | \mathcal{F}_t \right] = \frac{1}{\varphi(\lambda, t, W_t)} \mathbb{E} [\varphi(\lambda, T, W_T) \tilde{c}_T | \mathcal{F}_t]. \quad (18.23)$$

La expresión (18.23) proporciona una fórmula para calcular la esperanza condicional bajo $\tilde{\mathbb{P}}$. Note además que si $A \in \mathcal{F}_t$, entonces

$$\begin{aligned} &\int_A \frac{1}{\varphi(\lambda, t, W_t)} \mathbb{E} [\varphi(\lambda, T, W_T) \tilde{c}_T | \mathcal{F}_t] d\tilde{\mathbb{P}} \\ &= \mathbb{E} \left[\varphi(\lambda, t, W_t) 1_A \frac{1}{\varphi(t, \lambda, W_t)} \mathbb{E} [\varphi(\lambda, T, W_T) \tilde{c}_T | \mathcal{F}_t] \right] \\ &= \mathbb{E} [1_A \mathbb{E} [\varphi(\lambda, T, W_T) \tilde{c}_T | \mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [1_A \varphi(\lambda, T, W_T) \tilde{c}_T | \mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E} [\varphi(\lambda, T, W_T) 1_A \tilde{c}_T] \\ &= \tilde{\mathbb{E}} [1_A \tilde{c}_T] \\ &= \int_A \tilde{c}_T d\tilde{\mathbb{P}}. \end{aligned}$$

Por último, observe que si $0 \leq s \leq t \leq T$, entonces

$$\tilde{\mathbb{E}} [\tilde{W}_t | \mathcal{F}_s] = \tilde{W}_s. \quad (18.24)$$

En efecto, se verá primero que el producto $\phi_t = \widetilde{W}_t \varphi_t$, donde por brevedad $\varphi_t \equiv \varphi(\lambda, t, W_t)$, es una \mathbb{P} -martingala. Recuerde que

$$d\widetilde{W}_t = \lambda dt + dW_t$$

y

$$d\varphi_t = -\lambda \varphi_t dW_t.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d(\phi_t) &= d(\widetilde{W}_t \varphi_t) \\ &= \widetilde{W}_t d\varphi_t + \varphi_t d\widetilde{W}_t + (d\widetilde{W}_t)(d\varphi_t) \\ &= -\lambda \widetilde{W}_t \varphi_t dW_t + \varphi_t \lambda dt + \varphi_t dW_t - \lambda \varphi_t dt \\ &= \varphi_t (1 - \lambda \widetilde{W}_t) dW_t \\ &= \varphi_t (1 - \lambda^2 t - \lambda W_t) dW_t. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$E[\phi_t | \mathcal{F}_s] = \phi_s. \quad (18.25)$$

En virtud de la regla de Bayes, se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{E}[\widetilde{W}_t | \mathcal{F}_s] &= E\left[\frac{\varphi_t \widetilde{W}_t}{\varphi_s} | \mathcal{F}_s\right] \\ &= \frac{1}{\varphi_s} E[\varphi_t \widetilde{W}_t | \mathcal{F}_s] \\ &= \frac{1}{\varphi_s} E[\phi_t | \mathcal{F}_s] \\ &= \frac{\phi_s}{\varphi_s} \\ &= \widetilde{W}_s. \end{aligned} \quad (18.26)$$

18.7 El teorema de Girsanov y valuación neutral al riesgo

En esta sección se estudia la relación entre el teorema de Girsanov y el concepto de valuación neutral al riesgo. De acuerdo con la sección anterior \tilde{c}_t es una $\tilde{\mathbb{P}}$ -martingala. En particular, por la regla de Bayes, se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{E}[\tilde{c}_T | \mathcal{F}_t] &= E\left[\frac{\varphi_T \tilde{c}_T}{\varphi_t} | \mathcal{F}_t\right] \\ &= \frac{1}{\varphi_t} E[\varphi_T \tilde{c}_T | \mathcal{F}_t]. \end{aligned} \quad (18.27)$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_t &= E\left[\frac{\varphi_T \tilde{c}_T}{\varphi_t} | \mathcal{F}_t\right] \\ &= \frac{1}{\varphi_t} E[\varphi_T \tilde{c}_T | \mathcal{F}_t]. \end{aligned} \quad (18.28)$$

ó

$$\begin{aligned} c_t &= e^{-r(T-t)} E\left[\frac{\varphi_T \tilde{c}_T}{\varphi_t} | \mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-r(T-t)} E[\varphi_{T-t} \max(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t]. \end{aligned} \quad (18.29)$$

Si S_t sigue un movimiento geométrico Browniano:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (18.30)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$, la función de densidad de $S_T|S_t$ está dada por

$$f_{S_T|S_t}^{(\mu)}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}, \quad (18.31)$$

entonces

$$c_t = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty e^{-\lambda w_{T-t} - \frac{1}{2}\lambda^2(T-t)} (s - K) f_{S_T|S_t}^{(\mu)}(s|S_t) ds, \quad (18.32)$$

pero

$$s = S_t \exp \left\{ \sigma w_{T-t} + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) \right\},$$

de donde

$$w_{T-t} = \frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma}.$$

Por lo tanto,

$$c_t = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}^{(r)}(s|S_t) ds. \quad (18.33)$$

En efecto, la exponencial que aparece en $f_{S_T|S_t}^{(\mu)}(s|S_t)$ satisface

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - (\mu - r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} \times \\ & \quad \exp \left\{ \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma} \right) \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) (T-t) \right\} \times \\ & \quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 (T-t) \right\} \quad (18.34) \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} \times \\ & \quad \exp \left\{ \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma} \right) \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) \right\} \times \\ & \quad \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 (T-t) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} e^{\lambda w_{T-t}} e^{\frac{1}{2}\lambda^2(T-t)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} c_t &= e^{r(T-t)} \int_K^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}^{(r)}(s|S_t) ds \\ &= S_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2), \end{aligned} \quad (18.35)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (18.36)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (18.37)$$

y $\Phi(d)$ es la función de distribución acumulada de $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, es decir,

$$\Phi(d) = \mathbb{P}_{\mathcal{E}}\{\mathcal{E} \leq d\} = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon = 1 - \Phi(-d). \quad (18.38)$$

18.8 Bibliografía sugerida

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Girsanov, I. V. (1960). "On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures". *Journal of Theory of Probability and its Applications*, Vol. 5, pp. 285-301.
- Girsanov, I. V. (1962). "An Example on Non-uniqueness of the Solution to the Stochastic Differential Equation of K. Itô". *Journal of Theory of Probability and its Applications*, Vol. 7, pp. 325-331.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.
- Revuz, D. and M. Yor (1999). Continuous Martingales and Brownian Motion, Third edition, Springer-Verlag, New-York.

18.9 Ejercicios

- 18.1** Suponga que S_t sigue el proceso definido en (18.1) y defina el valor futuro de S_t en T como $F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}$. Muestre que

$$\frac{dF_{t,T}}{F_{t,T}} = \sigma d\widetilde{W}_t,$$

donde $d\widetilde{W}_t = \lambda dt + dW_t$ y $\lambda = (\mu - r)/\sigma$. ¿Es $F_{t,T}$ una martingala bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$?

- 18.2** Considere $F_{t,T}$ como en el ejercicio anterior. Demuestre que

$$F_{t,T} = S_0 e^{rT} + \sigma \int_0^t F_{u,T} d\widetilde{W}_u.$$

Observe que $T = 0$ conduce a (18.11). Pruebe que si $0 \leq u \leq t$, entonces

$$\widetilde{\mathbb{E}}[F_{t,T} | \mathcal{F}_u] = F_{u,T}.$$

- 18.3** Verifique que si c es la prima de una opción europea de compra sobre un subyacente con dinámica conducida por

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

entonces

$$\begin{aligned} c_t &= e^{r(T-t)} \int_K^\infty e^{-\lambda w_{T-t} - \frac{1}{2}\lambda^2(T-t)} (s - K) f_{S_T|S_t}^{(\mu)}(s|S_t) ds \\ &= e^{r(T-t)} \int_K^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}^{(r)}(s|S_t) ds. \end{aligned}$$

- 18.4** Muestre que si c_t es la prima de una opción europea de compra, entonces

$$c_t = e^{r(T-t)} \mathbb{E} \left[\frac{\varphi_T}{\varphi_t} \tilde{c}_T \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{r(T-t)} \mathbb{E} [\varphi_{T-t} \max(S_T - K, 0) \mid \mathcal{F}_t].$$

CAPÍTULO 19

MODELO DE BLACK-SCHOLES (VI): PAGO CONTINUO DE DIVIDENDOS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Pago continuo de dividendos a tasa constante
- Función de densidad condicional del movimiento geométrico Browniano
- Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes con pago de dividendos
- Teorema de Girsanov y valuación neutral al riesgo

19.1 Introducción

En este capítulo se estudia, en particular, el caso de una opción europea de compra sobre una acción que paga dividendos. Se supone, como antes, que el activo subyacente es una acción cuyo precio sigue un movimiento geométrico Browniano y que paga dividendos de manera continua a una tasa constante conocida.

19.2 Movimiento geométrico Browniano

Considere un movimiento Browniano $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Se supone que el precio de una acción, al tiempo t , denotado por S_t es conducido por el movimiento geométrico Browniano:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (19.1)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es el rendimiento medio esperado instantáneo, $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea y $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$. En este caso, el proceso S_t es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t > 0}$, es decir, S_t es \mathcal{F}_t -medible, equivalentemente $\{\omega \in \Omega \mid S_t(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}_t$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

19.3 Política de dividendos

A lo largo del presente capítulo, se supondrá que el pago de dividendos, D_t , se lleva a cabo, en forma determinista y continua, a una tasa constante $q > 0$, es decir,

$$dD_t = qS_t dt. \quad (19.2)$$

De esta manera, las ecuaciones (19.1) y (19.2), no son independientes, sino que constituyen un sistema.

19.4 Portafolio combinado de subyacentes y opciones

Considere ahora un portafolio con ω_1 unidades del activo subyacente de precio S_t y ω_2 unidades de una opción de compra sobre el subyacente de precio $c(S_t, t)$. Si Π_t denota el valor actual del portafolio, entonces

$$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 c(S_t, t). \quad (19.3)$$

El cambio en el valor del portafolio por pérdidas o ganancias en los precios de los activos incluyendo el pago de dividendos satisface

$$d\Pi_t = \omega_1 (dS_t + dD_t) + \omega_2 dc. \quad (19.4)$$

El cambio en el precio de la opción, dc , se calcula mediante una aplicación del lema de Itô, de tal manera que

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt + \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t \\ &\quad + \omega_1 q S_t dt + \omega_2 \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (19.5)$$

La ecuación (19.5) contiene dos tipos de términos. Los términos de tendencia que contienen dt y un término aleatorio que considera dW_t . El término aleatorio modela el riesgo mercado del portafolio. Este riesgo se puede eliminar si se eligen, adecuadamente, las cantidades de ω_1 y ω_2 en la conformación del portafolio.

19.5 Administración del riesgo de mercado

A fin de eliminar el riesgo mercado del portafolio, se toman, por ejemplo, $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 \equiv -\Delta_t = -\partial c / \partial S_t$, en cuyo caso el término estocástico de la ecuación (19.5) se anula, de tal suerte que

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 - \frac{\partial c}{\partial S_t} q S_t \right) dt. \quad (19.6)$$

Por supuesto, existen infinitas posibilidades para seleccionar ω_2 y ω_1 , simplemente se eligió aquella que conviene para analizar estrategias de cobertura de una operación de venta en corto con una opción europea de compra. Es usual referirse a la combinación particular, $\omega_1 = -\Delta_t$ y $\omega_2 = 1$, como estrategia de cobertura delta. Bajo la cobertura delta, el cambio en el valor del portafolio está dado por

$$\Pi_t^{(\Delta)} = c - \Delta_t S_t,$$

lo cual significa que se está cubriendo una operación de venta en corto de Δ_t unidades del subyacente con una opción de compra.

19.6 Existencia de un mercado alternativo de crédito

Se supone que existe un mercado de crédito, es decir, un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar o pedir prestado a una tasa de interés constante, r , a todos los plazos y libre de riesgo, la cual se aplica en forma continuamente capitalizable. Por ejemplo, si un agente deposita M_0 unidades monetarias, entonces su cuenta bancaria está dada por:

$$M_t = M_0 e^{rt}.$$

De esta manera, el cambio en su cuenta bancaria está dado por

$$dM_t = r M_t dt, \quad (19.7)$$

junto con la condición inicial M_0 .

Ahora bien, de acuerdo con la ecuación (19.5), si bajo la elección de $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\Delta_t$, el valor del portafolio resultante, $\Pi_t = c - \Delta_t S_t$, se deposita en un banco que paga una tasa de interés anualizada r , entonces el cambio en el valor del portafolio, durante dt , es

$$d\Pi_t^{(r)} = r \Pi_t dt = \left(c - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \right) r dt. \quad (19.8)$$

En este caso, dt es visto como la proporción del año a la que se aplica la tasa anualizada r . Si, por el contrario, Π_t fuera negativo, entonces el agente estaría pidiendo un préstamo por el que tendría que pagar intereses dados por $d\Pi_t^{(r)} = \Pi_t r dt$.

19.7 Condición de equilibrio (no arbitraje)

Los cambios en el valor del portafolio expresados en (19.7) y (19.8) son ambos libres de riesgo, ya que los dividendos son perfectamente predecibles. En consecuencia, (19.7) y (19.8) deben coincidir. Es decir,

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = d\Pi_t^{(r)}. \quad (19.9)$$

En otras palabras, el retorno libre de riesgo del portafolio, incluyendo dividendos, es igual al rendimiento que paga el banco a una tasa de interés libre de riesgo.

19.8 Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes con pago de dividendos

Una forma alternativa de escribir (19.9) es

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + (r - q) S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} - r c = 0, \quad (19.10)$$

junto con la condición final

$$c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0).$$

La ecuación anterior puede ser reescrita como

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r' - r' c - q c = 0,$$

donde $r' = r - q$. Sea $c = e^{-q(T-t)} C$, entonces

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial t} e^{-q(T-t)} + q c$$

ó

$$\frac{\partial C}{\partial t} e^{-q(T-t)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t r' - r' c = 0,$$

lo cual implica que

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t r' - r' C = 0.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} c(S_t, t; r, q) &= e^{-q(T-t)} C(S_t, t; r') \\ &= e^{-q(T-t)} \left(S_t \Phi(d_1) - K e^{-(r-q)(T-t)} \Phi(d_2) \right) \\ &= e^{-q(T-t)} S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \end{aligned}$$

con

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + \left(r - q + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}.$$

19.9 Neutralidad al riesgo

Es importante destacar que en la ecuación (19.10) no aparece el rendimiento medio esperado de la acción, μ , el cual es un parámetro de las preferencias al riesgo del inversionista. Cualquier dependencia sobre μ se ha eliminado al anular el coeficiente de dW en el cambio de valor en el portafolio combinado del subyacente y la opción. Esto significa que se puede cubrir perfectamente la operación de venta en corto con la opción de compra y no hay por qué preocuparse del rendimiento esperado cualquiera que éste sea. Únicamente la tasa de interés libre de riesgo

aparece en la ecuación. Esto quiere decir que si dos agentes tienen diferentes expectativas sobre el rendimiento promedio del activo subyacente, es decir, diferentes valores de μ , entonces ellos están dispuestos a omitirlas en sus decisiones de inversión siempre y cuando exista una tasa de interés libre de riesgo y que la volatilidad del activo subyacente se mantenga constante.

19.10 Teorema de Girsanov

En el transcurso de esta sección se aplica el teorema de Girsanov para cambiar la tendencia del proceso que conduce el precio de la acción. Si se define

$$\tilde{W}_t = \lambda t + W_t, \quad (19.11)$$

donde

$$\lambda = \frac{\mu + q - r}{\sigma}$$

es el premio al riesgo de mercado por unidad de volatilidad, entonces la ecuación (19.1) se puede reescribir como

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t. \quad (19.12)$$

De esta manera, el teorema de Girsanov proporciona una medida de probabilidad

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \varphi(\lambda, t, W_t) d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}, \quad (19.13)$$

bajo la cual \tilde{W}_t es un movimiento Browniano y donde

$$\varphi(\lambda, t, W_t) = \exp \left\{ -\lambda W_t - \frac{1}{2} \lambda^2 t^2 \right\}. \quad (19.14)$$

La medida $\tilde{\mathbb{P}}$ se encuentra definida en el espacio muestral original. Se dice, en este caso, que la medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ es neutral al riesgo.

19.11 Cambio de numerario

A continuación se introduce la noción de cambio de numerario. Si se definen los siguientes procesos:

$$\tilde{S}_t = M_t^{-1} S_t = e^{-rt} S_t \quad (19.15)$$

y

$$\tilde{D}_t = M_t^{-1} D_t = e^{-rt} q S_t, \quad (19.16)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} d(\tilde{S}_t + \tilde{D}_t) &= d(e^{-rt} S_t) + e^{-rt} q S_t dt \\ &= e^{-rt} dS_t - r e^{-rt} S_t dt + e^{-rt} q S_t dt \\ &= e^{-rt} dS_t - (r - q) \tilde{S}_t dt \\ &= e^{-rt} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - (r - q) e^{-rt} S_t dt \\ &= e^{-rt} [(\mu + q - r) S_t dt + \sigma S_t dW_t] \\ &= e^{-rt} \sigma S_t (\lambda dt + dW_t) \\ &= \sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t. \end{aligned} \quad (19.17)$$

Por lo tanto, el proceso $\tilde{S}_t + \tilde{D}_t$ es una martingala.

19.12 Portafolios replicantes y autofinanciables

Considere una estrategia (v_t, w_t) de inversión con un valor

$$\Pi_t = v_t S_t + w_t M_t \quad (19.18)$$

y tal que $c(S_t, t) = \Pi_t$ y que en la fecha de vencimiento replique el valor intrínseco, o función de pagos, de la opción de compra, es decir,

$$\Pi_T = v_T S_T + w_T M_T = \max(S_T - K, 0), \quad (19.19)$$

sin importar la trayectoria que tome el activo subyacente. La condición (19.19) indica que no existen oportunidades de arbitraje. Se supone que el cambio en el portafolio al transcurrir el tiempo se debe exclusivamente a fluctuaciones propias del mercado y no a cambios en v_t y w_t , es decir, el portafolio es autofinanciable, una vez que se ha realizado la inversión inicial no se requieren fondos adicionales para mantener el portafolio. Esto significa que

$$v_t(dS_t + dD_t) + w_t dM_t = dc(S_t, t), \quad (19.20)$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} v_t [S_t(\mu + q)dt + S_t \sigma dW_t] + w_t r M_t dt &= \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt \\ &\quad + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t. \end{aligned} \quad (19.21)$$

Si se igualan los coeficientes de (19.21) en dW_t , se obtiene

$$v_t = \frac{\partial c}{\partial S_t} \equiv \Delta_t. \quad (19.22)$$

De la misma manera, de (19.18), se sigue que

$$w_t = \frac{c(S_t, t) - v_t S_t}{M_t}. \quad (19.23)$$

Las cantidades v_t y w_t determinan el portafolio replicante del valor del derivado en la fecha de vencimiento y autofinanciable para su mantenimiento. Por lo tanto (19.20) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} dc &= \Delta_t (dS_t + dD_t) + \frac{c - \Delta_t S_t}{M_t} dM_t \\ &= \Delta_t (dS_t + dD_t) + (c - \Delta_t S_t) r dt. \end{aligned} \quad (19.24)$$

Note ahora que si $\tilde{c} = e^{-rt} c$, también se cumple que

$$\begin{aligned} d\tilde{c} &= e^{-rt} dc - re^{-rt} c dt \\ &= e^{-rt} [\Delta_t (dS_t + dD_t) + (c - \Delta_t S_t) r dt] - re^{-rt} c dt \\ &= e^{-rt} (\Delta_t (dS_t + dD_t) - S_t \Delta_t r dt) \\ &= e^{-rt} \left[\Delta_t \left((r - q) S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t + q S_t dt \right) - S_t \Delta_t r dt \right] \\ &= e^{-rt} \Delta_t \sigma S_t d\tilde{W}_t \\ &= \Delta_t \sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t. \end{aligned} \quad (19.25)$$

Es decir, si no hay oportunidades de arbitraje, \tilde{c} es una martingala en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \tilde{\mathbb{P}})$.

19.13 Equivalencia entre la condición de no arbitraje y el uso de portafolios replicantes y autofinanciables

En el transcurso de esta sección se examina la relación entre la condición de no arbitraje y el concepto de portafolio replicante y autofinanciable. En las ecuaciones (19.3) y (19.4) se plantearon, respectivamente, el valor y el cambio de valor en un portafolio combinado de un subyacente y una opción,

$$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 c$$

y

$$d\Pi_t = \omega_1 (dS_t + dD_t) + \omega_2 dc.$$

Asimismo, con el propósito de eliminar oportunidades de arbitraje, libres de riesgo, se especificó en (19.9) la condición

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt = r(\omega_1 S_t + \omega_2 c) dt.$$

Si se supone que el valor del portafolio es igual al precio de la opción de compra en todo momento, es decir, si

$$\Pi_t = c, \quad (19.26)$$

entonces $d\Pi_t = dc$. Las cantidades asociadas a cada activo, ω_1 y ω_2 , ahora dependen del tiempo a fin que (19.26) sea válida en cada instante. Para ello, se definen $\omega_{1t} \equiv v_t$ y $\omega_{2t} \equiv w_t = 1$. Así,

$$dc = v_t (dS_t + dD_t) + w_t r \Pi_t dt,$$

donde $d\Pi_t = r\Pi_t dt$. Se observa que Π_t es, simplemente, una cuenta bancaria, M_t . En conclusión,

$$dc = v_t (dS_t + dD_t) + w_t dM_t. \quad (19.27)$$

Si adicionalmente se pide que $v_T S_T + w_T M_T = \max(S_T - K, 0)$, entonces las ecuaciones (19.27) y (19.20) son similares. Por lo tanto, la condición de no arbitraje y el uso de portafolios replicantes y autofinanciables son equivalentes.

19.14 La ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

En esta sección se obtiene la fórmula de valuación teórica de la prima de una opción en un mundo neutral al riesgo. Sea $c(S_t, t)$ el precio de una opción europea de compra y defina

$$\tilde{c}(S_t, t) = \frac{c(S_t, t)}{M_t},$$

entonces

$$\begin{aligned} d\tilde{c} &= e^{-rt} dc - re^{-rt} c dt \\ &= e^{-rt} \left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t \right] - re^{-rt} c dt \\ &= e^{-rt} \left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 - rc \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t \right] \\ &= e^{-rt} \left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 - rc \right) dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t \left(d\widetilde{W}_t - \left(\frac{\mu + q - r}{\sigma} \right) dt \right) \right] \\ &= e^{-rt} \left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} (r - q) S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 - rc \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t d\widetilde{W}_t \right] \\ &= e^{-rt} \left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} (r - q) S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 - rc \right) dt \right] + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma \widetilde{S}_t d\widetilde{W}_t. \end{aligned} \quad (19.28)$$

En ausencia de oportunidades de arbitraje (19.28) es una martingala. Por lo tanto, el precio de la opción queda caracterizado por la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}(r - q)S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 - rc = 0$$

junto con la condición de frontera

$$c(S_t, T) = \max(S_T - K, 0).$$

19.15 Valuación neutral al riesgo

De acuerdo con la sección anterior \tilde{c} es una $\tilde{\mathbb{P}}$ -martingala. En esta sección es importante resaltar la dependencia de c con t mediante la notación c_t . En particular, por la regla de Bayes, se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}} [\tilde{c}_T \mid \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E} \left[\frac{\varphi_T}{\varphi_t} \tilde{c}_T \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E} [\varphi_T \tilde{c}_T \mid \mathcal{F}_t]. \end{aligned} \quad (19.29)$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_t &= \mathbb{E} \left[\frac{\varphi_T}{\varphi_t} \tilde{c}_T \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E} [\varphi_T \tilde{c}_T \mid \mathcal{F}_t] \end{aligned} \quad (19.30)$$

ó

$$\begin{aligned} c_t &= e^{r(T-t)} \mathbb{E} \left[\frac{\varphi_T}{\varphi_t} c_T \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{r(T-t)} \mathbb{E} [\varphi_{T-t} \max(S_T - K, 0) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= e^{r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}} [\max(S_T - K, 0) \mid \mathcal{F}_t]. \end{aligned} \quad (19.31)$$

Si S_t sigue el movimiento geométrico Browniano definido en (19.1), entonces la función de densidad de $S_T | S_t$ está dada por

$$f_{S_T|S_t}^{(\mu)}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}. \quad (19.32)$$

De acuerdo con la ecuación (19.31), se sigue que

$$c_t = e^{r(T-t)} \int_K^\infty e^{-\lambda w_{T-t} - \frac{1}{2}\lambda^2(T-t)} (s - K) f_{S_T|S_t}^{(\mu)}(s|S_t) ds, \quad (19.33)$$

con

$$s = S_t \exp \left\{ \sigma w_{T-t} + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T-t) \right\}$$

ó

$$w_{T-t} = \frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma}.$$

Se puede verificar que

$$c_t = e^{r(T-t)} \int_K^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}^{(r-q)}(s|S_t) ds. \quad (19.34)$$

En efecto, la exponencial que aparece en $f_{S_T|S_t}^{(\mu)}(s|S_t)$ satisface

$$\begin{aligned}
 & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (r-q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) - (\mu+q-r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (r-q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} \times \\
 & \quad \exp \left\{ \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (r-q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma} \right) \left(\frac{\mu+q-r}{\sigma} \right) (T-t) \right\} \times \\
 & \quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu+q-r}{\sigma} \right)^2 (T-t) \right\} \tag{19.35} \\
 &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (r-q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} \times \\
 & \quad \exp \left\{ \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (\mu+r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma} \right) \left(\frac{\mu+q-r}{\sigma} \right) \right\} \times \\
 & \quad \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\mu+q-r}{\sigma} \right)^2 (T-t) \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (r-q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} e^{\lambda w_{T-t}} e^{\frac{1}{2}\lambda^2(T-t)}.
 \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned}
 c_t &= e^{r(T-t)} \int_K^\infty (s-K) f_{S_T|S_t}^{(r-q)}(s|S_t) ds \\
 &= e^{-q(T-t)} S_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2),
 \end{aligned} \tag{19.36}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r-q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{19.37}$$

$$d_2 = \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r-q - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{19.38}$$

y $\Phi(d)$ es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

19.16 Bibliografía sugerida

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Garman, M. B. and S. W. Kohlhagen (1983). "Foreign Currency Option Values". *Journal of International Money and Finance*, Vol. 2, No. 3, pp. 231-237.
- Girsanov, I. V. (1960). "On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures". *Journal of Theory of Probability and its Applications*, Vol. 5, pp. 285-301.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

19.17 Ejercicios

- 19.1** Suponga que el precio, S_t , de un activo subyacente sigue un movimiento geométrico Browiano y paga en forma continua dividendos a una tasa constante q en un mundo neutral al riesgo, es decir,

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Utilice

$$c(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}^{(r-q)}(s|S_t) ds,$$

para mostrar que

$$c = S_t e^{-q(T-t)} \Phi(d_1) - K e^{r(T-t)} \Phi(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}.$$

No es necesario utilizar la forma funcional de $f_{S_T|S_t}^{(r-q)}(s|S_t)$.

Solución: Observe que

$$\begin{aligned} c(S_t, t) &= e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}^{(r-q)}(s|S_t) ds \\ &= e^{-q(T-t)} \left(e^{-(r-q)(T-t)} \int_K^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}^{(r-q)}(s|S_t) ds \right) \\ &= e^{-q(T-t)} \left(S_t \Phi(d_1) - K e^{(r-q)(T-t)} \Phi(d_2) \right) \\ &= S_t e^{-q(T-t)} \Phi(d_1) - K e^{r(T-t)} \Phi(d_2), \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}.$$

- 19.2** Fórmula de Garman y Kohlhagen (1983) para valuar opciones europeas de compra sobre el tipo de cambio. Sea r_D la tasa de interés libre de riesgo en la economía doméstica, r_F la tasa de interés libre de riesgo en el resto del mundo, K el tipo de cambio de ejercicio, S_t el tipo de cambio "spot" y $T - t$ el plazo de la opción. Demuestre que el precio de esta opción está dado por

$$c(S_t, t) = S_t e^{-r_F(T-t)} \Phi(d_1) - e^{-r_D(T-t)} K \Phi(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r_D - r_F + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r_D - r_F - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

También pruebe que en este caso la ecuación diferencial parcial que conduce a c está dada por

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + (r_D - r_F) S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} - r c = 0.$$

CAPÍTULO 20

EL TEOREMA DE FEYNMAN-KAČ

Conceptos básicos de este capítulo:

- Movimiento geométrico Browniano
- Valuación neutral al riesgo
- Fórmula de valuación de una martingala
- Teorema de Feynman-Kač

20.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es presentar el teorema de Feynman-Kač para valuar productos derivados. El teorema establece una relación entre la ecuación diferencial parcial que satisface el precio de un derivado y la fórmula de valuación bajo una medida equivalente martingala. Específicamente, si el precio de un producto derivado satisface una ecuación diferencial parcial de segundo orden y parabólica con una condición de frontera, entonces el precio puede representarse como el valor esperado de la condición de frontera bajo una medida de probabilidad equivalente.

20.2 Valuación neutral al riesgo

En esta sección se revisa el concepto de valuación neutral al riesgo. Suponga que el precio de una acción sigue el proceso

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (20.1)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ junto con su filtración aumentada $\tilde{\mathbb{F}} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Ahora bien, la ecuación (20.1) puede reescribirse como

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t, \quad (20.2)$$

donde

$$\tilde{W}_t = \lambda t + W_t, \quad (20.3)$$

y, de acuerdo con el teorema de Girsanov, \tilde{W}_t es un movimiento Browniano definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$. La medida $\tilde{\mathbb{P}}$ satisface

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \varphi(\lambda, t, W_t) d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F},$$

donde

$$\varphi(\lambda, t, W_t) = \exp \left\{ -\lambda W_t - \frac{1}{2} \lambda^2 t \right\}.$$

Si c_t es el precio de una opción, entonces $\tilde{c}_t = e^{-rt} c_t$ es una $\tilde{\mathbb{P}}$ -martingala. En este caso, la regla de Bayes implica

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}} [\tilde{c}_T \mid \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E} \left[\frac{\varphi_T}{\varphi_t} \tilde{c}_T \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E} [\varphi_T \tilde{c}_T \mid \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\tilde{c}_t = \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E} [\varphi_T \tilde{c}_T \mid \mathcal{F}_t]. \quad (20.4)$$

Esta expresión es conocida como la fórmula de valuación de una martingala.

20.3 Teorema de Feynman-Kač

A continuación se establece el teorema de Feynman-Kač. Observe, primero, que el precio de una opción europea de compra, en un mundo neutral al riesgo, satisface:

$$c(S_t, t) = \int_0^\infty e^{-r(T-t)} \max(s - K, 0) f_{S_T|S_t}^{(r)}(s|S_t) ds, \quad (20.5)$$

donde

$$f_{S_T|S_t}^{(r)}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}.$$

Si se escribe

$$h(S_T) = \max(S_T - K, 0)$$

y

$$v(S_t, t) = \int_0^\infty \max(s - K, 0) f_{S_T|S_t}^{(r)}(s|S_t) ds = E \{ h(S_T) \mid \mathcal{F}_t \}, \quad (20.6)$$

entonces

$$c(S_t, t) = e^{-r(T-t)} v(S_t, t).$$

En este caso,

$$\begin{aligned} v(S_t, t) &= E [h(S_T) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= E \{ h(S_t \exp \{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\}) \mid \mathcal{F}_t \}. \end{aligned}$$

Note que $h(S_T)$ es estocásticamente independiente de \mathcal{F}_t , ya que $W_T - W_t$ y $W_t - W_0 = W_t$ son variables aleatorias independientes. En consecuencia, si $0 \leq u \leq t \leq T$, se obtiene

$$\begin{aligned} E \{ v(S_t, t) \mid \mathcal{F}_u \} &= E \left[E \{ h(S_T) \mid \mathcal{F}_t \} \mid \mathcal{F}_u \right] \\ &= E \{ h(S_T) \mid \mathcal{F}_u \} \\ &= v(S_u, u). \end{aligned} \quad (20.7)$$

Ahora bien, si se define $M_u = v(S_u, u)$, se sigue que

$$E [M_t \mid \mathcal{F}_u, u < t] = M_u.$$

Es decir, M_u es una martingala. Observe también que si $c(S_t, t) = e^{-r(T-t)} v(S_t, t)$ y

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t - r c = 0,$$

entonces

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial v}{\partial S_t} r S_t = 0, \quad (20.8)$$

sujeto a

$$v(S_t, T) = h(S_t).$$

En vista de (20.7) y (20.8), una versión del teorema de Feynman-Kač con neutralidad al riesgo se puede establecer como sigue: si $v(S_t, t)$ es solución de

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial v}{\partial S_t} r S_t = 0,$$

sujeto a

$$v(S_t, T) = h(S_t),$$

entonces $v(S_t, t)$ tiene la siguiente representación:

$$v(S_t, t) = \mathbb{E} [h(S_T) \mid \mathcal{F}_t],$$

donde S_t satisface

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

20.4 Bibliografía sugerida

- Karatzas, I. and S. E. Shreve (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus. Graduate Texts in Mathematics. Second edition. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
- Musiela, M. and M. Rutkowsky (1997). Martingale Methods in Financial Modelling. Applications of Mathematics. Stochastic Modelling and Applied Probability Series. Springer-Verlag, Berlin.
- Revuz, D. and M. Yor (1991). Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer. New York, Berlin.

20.5 Ejercicios

20.1 Resuelva la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 = 0,$$

sujeto a

$$v(S_t, T) = S_t^2.$$

Solución: En este caso, $dS_t = 0 \cdot S_t dt + \sigma S_t dW_t$, lo cual implica que $S_T = S_t + \sigma \int_t^T S_u dW_u$. Posteriormente, utilice la siguiente igualdad

$$v(S_t, t) = \mathbb{E} [S_T^2 \mid \mathcal{F}_t] = \text{Var} [S_T \mid \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}^2 [S_T \mid \mathcal{F}_t].$$

20.2 Resuelva la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 = 0,$$

sujeto a

$$v(S_t, T) = \ln(S_t).$$

20.3 Resuelva la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial S_t^2} S_t^2 = 0,$$

sujeto a

$$v(S_t, T) = S_t^4.$$

Discuta el resultado. Intente generalizar a $v(S_t, T) = S_t^n$, $n \in \mathbb{N}$.

20.4 Considere la esperanza condicional

$$J(S_t) = \mathbb{E} \left[\int_t^\infty h(S_u) e^{-\rho(u-t)} du \mid \mathcal{F}_t \right],$$

donde

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t,$$

$\mu \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, $\sigma > 0$ y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ equipado con su filtración aumentada $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Muestre que $J(S_t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$h(S_t) - \rho J(S_t) + J'(S_t)\mu + \frac{1}{2}J''(S_t)\sigma^2 = 0.$$

20.5 Considere la siguiente esperanza condicional:

$$B(r_t, t; T) = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\} \mid \mathcal{F}_t \right],$$

donde

$$dr_t = [\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)]dt + \sigma(r_t, t)dW_t.$$

Las funciones $\mu(r_t, t)$, $\lambda(r_t, t)$ y $\sigma(r_t, t)$ son conocidas (y suficientemente bien comportadas) y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con su filtración aumentada $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Demuestre que $B = B(r_t, t; T)$ satisface la ecuación diferencial parcial de segundo orden

$$B_t + [\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)]B_r + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)B_{rr} - r_t B = 0.$$

Utilice la aproximación

$$\exp \left\{ - \int_t^{t+h} r_s ds \right\} = 1 - r_t h + o(h),$$

donde $o(h)/h \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

CAPÍTULO 21

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES DE KOLMOGOROV Y FOKKER-PLANCK

Conceptos básicos de este capítulo:

- Movimiento geométrico Browniano
- Función de densidad condicional del movimiento geométrico Browniano
- Ecuación diferencial parcial hacia atrás de Kolmogorov
- Ecuación de Fokker-Planck

21.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es presentar la relación que existe entre la función de densidad condicional del movimiento geométrico Browniano y las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov y Fokker-Planck.

21.2 Movimiento geométrico Browniano

Consideré un movimiento Browniano $(W_t)_{t \in [0, T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Se supone que el precio del subyacente al tiempo t , S_t , es conducido por un movimiento geométrico Browniano neutral al riesgo:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (21.1)$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo, σ es la volatilidad instantánea y $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$. El proceso (21.1) pertenece a la clase de procesos Markovianos de difusión debido a que movimientos actuales del precio del activo son independientes de los movimientos pasados. Dada la dinámica de (21.1), se observa que S_t es el precio de una acción que no paga dividendos.

21.3 Función de densidad condicional del precio de un activo conducido por el movimiento geométrico Browniano

Con base en el proceso (21.1), una simple aplicación del lema de Itô produce

$$d(\ln S_t) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma dW_t. \quad (21.2)$$

Si se discretiza (21.2) con $\Delta t = T - t$, se puede escribir que

$$\ln S_T - \ln S_t = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) + \sigma \mathcal{E} \sqrt{T - t}.$$

donde $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Por lo tanto,

$$\ln \left(\frac{S_T}{S_t} \right) \sim \mathcal{N} \left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t), \sigma^2(T - t) \right). \quad (21.3)$$

Si ahora se define

$$g(\mathcal{E}) \equiv S_T = S_t \exp \left\{ (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) + \sigma \sqrt{T - t} \mathcal{E} \right\},$$

se tiene que

$$g^{-1}(S_T) \equiv \frac{\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (21.4)$$

La función de densidad de S_T dado S_t está dada por la fórmula

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \phi_{\mathcal{E}}(g^{-1}(s)) \left| \frac{dg^{-1}(s)}{ds} \right|, \quad (21.5)$$

donde $\phi_{\mathcal{E}}(\cdot)$ es la función de densidad de una variable aleatoria normal estándar. Observe que el Jacobiano de la transformación satisface

$$\left| \frac{dg^{-1}(s)}{ds} \right| = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T-t}}.$$

En consecuencia, la función de densidad de S_T condicional a S_t está dada por la siguiente expresión:

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma s}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}. \quad (21.6)$$

21.4 Ecuación diferencial parcial hacia atrás de Kolmogorov y movimiento geométrico Browniano

Una forma alternativa de expresar (21.6) es como sigue: se definen primero $x = S_t$ y $y = s$. Las cantidades t y x son llamadas variables hacia atrás, luego se escribe

$$p(t, T; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma y}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{y}{x}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}. \quad (21.7)$$

En este caso $p(t, T; x, y)$ satisface la ecuación diferencial parcial hacia atrás de Kolmogorov:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + rx \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (21.8)$$

Note que el precio de una opción europea de compra satisface:

$$c = E \left\{ e^{-r(T-t)} \max(S_T - K, 0) \middle| \mathcal{F}_t \right\}. \quad (21.9)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} c &= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(s - K, 0) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds, \end{aligned} \quad (21.10)$$

o en términos de la notación en (21.7)

$$c(x, t) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (y - K) p(t, T; x, y) dy, \quad (21.11)$$

lo cual implica que

$$e^{r(T-t)} c(x, t) = \int_K^\infty (y - K) p(t, T; x, y) dy, \quad (21.12)$$

lo anterior conduce a:

$$e^{r(T-t)} \frac{\partial c}{\partial x} = \int_K^\infty (y - K) \frac{\partial p}{\partial x} dy, \quad (21.13)$$

$$e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \int_K^\infty (y - K) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dy \quad (21.14)$$

y

$$e^{r(T-t)} \frac{\partial c}{\partial t} - r e^{r(T-t)} c = \int_K^\infty (y - K) \frac{\partial p}{\partial t} dy. \quad (21.15)$$

Las ecuaciones (21.13), (21.14) y (21.15) implican que

$$\begin{aligned} & e^{r(T-t)} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + rx \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - rc \right) \\ &= \int_K^\infty (y - K) \left(\frac{\partial p}{\partial t} + rx \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) dy. \end{aligned}$$

El paréntesis del lado izquierdo de la expresión anterior es la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes y, por lo tanto, es igual a cero. En consecuencia,

$$\frac{\partial p}{\partial t} + rx \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0.$$

La expresión anterior es conocida como ecuación diferencial parcial hacia atrás de Kolmogorov. Si se denota $\tau = T - t$ y $p = p(\tau; x, y)$, se sigue que

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = rx \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (21.16)$$

21.5 Ecuación diferencial parcial de Fokker-Planck

La ecuación diferencial parcial de Fokker-Planck es también conocida como ecuación diferencial parcial de Kolmogorov hacia adelante. Si se escribe

$$q(t, T; y, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma y}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{x}{y} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}, \quad (21.17)$$

entonces se cumple que

$$\frac{\partial q}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} (y^2 q) - r \frac{\partial}{\partial y} (y q). \quad (21.18)$$

21.6 Bibliografía sugerida

- Karatzas, I. and S. E. Shreve (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus. Graduate Texts in Mathematics. Second edition. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
- Musiela, M. and M. Rutkowsky (1997). Martingale Methods in Financial Modelling. Applications of Mathematics. Stochastic Modelling and Applied Probability Series. Springer-Verlag, Berlin.
- Revuz, D. and M. Yor (1999). Continuous Martingales and Brownian Motion. Third edition, Springer-Verlag, New-York.

21.7 Ejercicios

21.1 Muestre directamente que

$$p(t, T; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{y}{x}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}$$

es solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + rx \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

21.2 Demuestre que

$$q(t, T; y, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}$$

es solución de

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \sigma^2 \left(q + 2y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{1}{2}y^2 \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right) - r \left(q + y \frac{\partial q}{\partial y} \right), \quad \tau = T - t.$$

21.3 Pruebe que q satisface

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + (\sigma^2 - r) \frac{\partial}{\partial y}(qy) + \sigma^2 y \frac{\partial q}{\partial y}.$$

21.4 Con base en

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + rx \frac{\partial p}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} - ry \frac{\partial q}{\partial y} - rq + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial y}(qy) + \sigma^2 y \frac{\partial q}{\partial y},$$

muestre que

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(p + q) = \frac{1}{2}\sigma^2 (p\eta_{p,x}\eta_{p',x} + q\eta_{q,y}\eta_{q',y}) + r(p\eta_{p,x} - q\eta_{q,y}) - rq + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial y}(qy) + \sigma^2 y \frac{\partial q}{\partial y},$$

donde

$$\eta_{a,b} = \left(\frac{\partial a}{\partial b} \right) \frac{b}{a}, \quad p' = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{y} \quad q' = \frac{\partial q}{\partial y}.$$

CAPÍTULO 22

GRIEGAS DEL MODELO DE BLACK-SCHOLES

Conceptos básicos de este capítulo:

- Movimiento geométrico Browniano
- Valuación neutral al riesgo de una opción europea
- Griegas de Black-Scholes
- Condición de paridad entre opciones europeas de venta y compra

22.1 Introducción

En este capítulo se estudia la sensibilidad del precio de una opción europea ante cambios en las diferentes variables y parámetros que intervienen en el modelo de Black-Scholes. Las razones de cambio del precio de una opción, ya sea de compra o de venta, con respecto a las variables relevantes del modelo, *ceteris paribus*, reciben nombres de letras griegas. Estas razones de cambio juegan un papel importante en la administración del riesgo de mercado: coberturas delta, gama y vega.

En el marco de la metodología de Black-Scholes, si el precio, S_t , de un activo subyacente, por ejemplo una acción que no paga dividendos, se comporta de acuerdo con la siguiente ecuación diferencial estocástica, en un mundo neutral al riesgo:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde r es una tasa de interés constante y libre de riesgo, asociada a una cuenta bancaria, σ es la volatilidad instantánea del subyacente y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, entonces el precio, $c = c(S_t, t; r, \sigma, T, K)$, de una opción europea de compra sobre dicha acción, con emisión en t , vencimiento en T y precio de ejercicio K , está dado por:

$$c = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (22.1)$$

donde

$$d_1 = d_1(S_t, t; r, \sigma, T, K) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad (22.2)$$

$$d_2 = d_2(S_t, t; r, \sigma, T, K) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t} \quad (22.3)$$

y

$$\Phi(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon = \mathbb{P}_{\mathcal{E}} \{ \mathcal{E} \leq d \}, \quad (22.4)$$

donde $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

22.2 Lema fundamental de las griegas del modelo de Black-Scholes

En esta sección se demuestra un lema de gran utilidad en el cálculo de las griegas del modelo de Black-Scholes. El lema establece que si

$$c = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (22.5)$$

entonces

$$S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) = 0, \quad (22.6)$$

donde

$$\Phi'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d^2}. \quad (22.7)$$

En efecto, en virtud de (22.3), se sigue que

$$\begin{aligned} d_2^2 &= (d_1 - \sigma \sqrt{T-t})^2 \\ &= d_1^2 - 2\sigma \sqrt{T-t} d_1 + \sigma^2 (T-t) \\ &= d_1^2 - 2 \left[\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right] + \sigma^2 (T-t) \\ &= d_1^2 - 2 \ln \left(\frac{S_t}{K} \right) - 2r(T-t) \\ &= d_1^2 - 2 \ln \left(\frac{S_t}{K} \right) - 2 \ln e^{r(T-t)} \\ &= d_1^2 - 2 \ln \left(\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$-\frac{1}{2}d_2^2 = -\frac{1}{2}d_1^2 + \ln \left(\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K} \right),$$

lo cual conduce, a su vez, a

$$e^{-\frac{1}{2}d_2^2} = e^{-\frac{1}{2}d_1^2} \left(\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K} \right). \quad (22.8)$$

Observe ahora que, a partir de (22.7) y (22.8), se sigue el resultado establecido en (22.6).

22.3 Razón de cambio entre una opción de compra y el precio del subyacente, Δ_c

El cambio del precio de una opción de compra europea con respecto a un cambio en el precio del subyacente, *ceteris paribus*, juega un papel muy importante en la elaboración de estrategias de cobertura con opciones, la llamada cobertura Delta. Esta razón de cambio entre el precio de la opción y el precio del subyacente se denota por $\Delta_c \equiv \partial c / \partial S_t$ y se calcula como:

$$\Delta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial S_t} = \Phi(d_1) + S_t \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S_t} - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S_t}.$$

Observe ahora que a partir de (22.3), se tiene que

$$\frac{\partial d_2}{\partial S_t} = \frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{1}{\sigma S_t \sqrt{T-t}}.$$

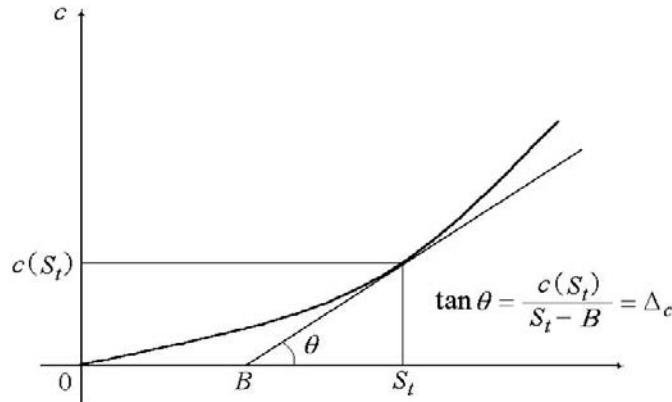
En consecuencia,

$$\Delta_c = \Phi(d_1) + [S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2)] \frac{\partial d_1}{\partial S_t}.$$

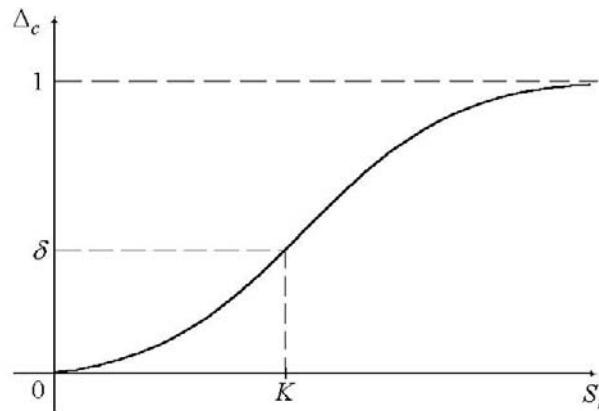
En virtud del lema fundamental de las griegas, así como de (22.6), se concluye un primer resultado relevante,

$$0 \leq \Delta_c = \Phi(d_1) \leq 1. \quad (22.9)$$

Es decir, existe una relación directa entre el precio de la opción y el precio del activo subyacente. Un valor grande de Δ_c significa que el precio de la opción es muy sensible a cambios en el precio del subyacente. Recíprocamente, si la Δ_c es pequeña, entonces un cambio en el precio del activo subyacente afecta poco al precio de la opción. Claramente, la pendiente de la recta tangente a c en S_t está dada por Δ_c , como se muestra en la Gráfica 22.1.



Gráfica 22.1 Δ_c es la pendiente de la recta tangente a c en S_t .



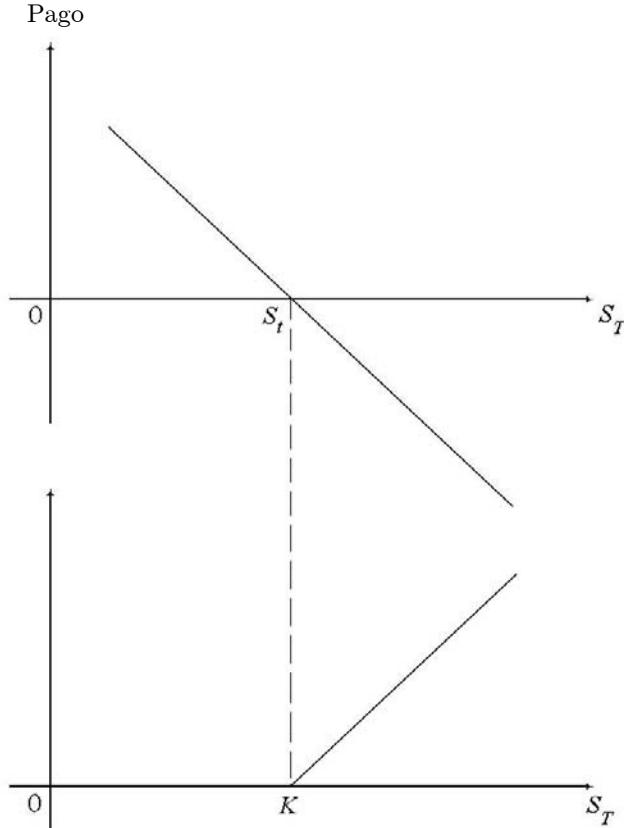
Gráfica 22.2 Δ_c como función de S_t .

La Gráfica 22.2 muestra a Δ_c como función de S_t . Observe que si $S_t \rightarrow 0$, entonces $d_1 \rightarrow -\infty$, en cuyo caso $\Delta_c = \Phi(d_1) \rightarrow 0$, y que si $S_t \rightarrow \infty$, entonces $d_1 \rightarrow \infty$, así $\Delta_c = \Phi(d_1) \rightarrow 1$. En particular, si $S_t = K$, entonces

$$\delta \equiv \Delta_c(K) = \Phi \left(\frac{(r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right).$$

A partir del modelo de Black-Scholes, es posible construir un portafolio libre de riesgo al combinar una operación de venta en corto de Δ_c unidades del subyacente con una posición larga sobre una opción europea de compra en el mismo subyacente. Si al recomprar el activo subyacente para ser devuelto a la contraparte de la venta en corto, el precio se ha incrementado con respecto al precio inicial pactado en la venta en corto, entonces se produce una pérdida. En este caso, se ejerce la opción a fin de compensar dicha pérdida con una ganancia de magnitud igual al valor intrínseco de la opción. En otras palabras, una operación de venta en corto de Δ_c unidades del subyacente queda cubierta tomando una posición larga sobre una opción del mismo subyacente

(véase la Gráfica 22.3). Ahora bien, dado que $0 < \Delta_c < 1$, se tiene que una opción cubre solamente una fracción Δ_c del subyacente. Por último, es importante destacar que la cobertura es efectiva solamente en un intervalo pequeño de tiempo, de longitud $[t, t + dt]$. Conforme el tiempo transcurre, la cobertura se deteriora y será necesario rebalancear el portafolio.



Gráfica 22.3 Perfiles de ganancia en un portafolio de cobertura Delta.

La gráfica superior representa una operación de venta en corto,
la inferior una posición larga sobre una opción de compra.

Observe también que la elasticidad de c con respecto a S_t , es decir la razón de cambios porcentuales entre c y S_t , está dada por

$$\epsilon_{c,S} = \frac{\partial \ln(c)}{\partial \ln(S_t)} = \frac{\frac{\partial c}{\partial S_t}}{\frac{c}{S_t}} = \Phi(d_1) \frac{S_t}{c}.$$

Equivalentemente,

$$\epsilon_{c,S} = \frac{S_t \Phi(d_1)}{S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2)}.$$

Por último, si se definen los ponderadores

$$\omega_1 = \frac{\Phi(d_1)}{(\Phi(d_1) + \Phi(d_2))} \quad \text{y} \quad \omega_2 = 1 - \omega_1 = \frac{\Phi(d_2)}{(\Phi(d_1) + \Phi(d_2))}.$$

Se puede escribir

$$c = (\Phi(d_1) + \Phi(d_2)) \left(\omega_1 S_t - \omega_2 K e^{-r(T-t)} \right).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\epsilon_{c,S} &= \frac{\omega_1 S_t}{\omega_1 S_t - \omega_2 K e^{-r(T-t)}} \\ &= \left[1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \frac{K e^{-r(T-t)}}{S_t} \right]^{-1}.\end{aligned}$$

22.4 Sensibilidad de Δ_c con respecto del precio del subyacente, Γ_c

La sensibilidad de la cobertura Δ_c con respecto a un cambio en el precio del subyacente, se define por $\Gamma_c \equiv \partial^2 c / \partial S_t^2$. Claramente, si Γ_c es pequeña, Δ_c cambia lentamente cuando cambia el precio del activo subyacente, en cuyo caso el rebalanceo (cambio en el número de unidades del subyacente y la opción) en el portafolio no tiene que ser frecuente. Si, por el contrario, Γ_c es grande, entonces Δ_c es muy sensible a cambios en el precio del subyacente y el rebalanceo tiene que hacerse frecuentemente. En este caso, existe una exposición importante al riesgo mercado cuando la cobertura Δ_c se mantiene sin cambios durante períodos prolongados de tiempo. Γ_c se calcula como sigue

$$\frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{\partial c}{\partial S_t} \right) = \frac{\partial \Delta_c}{\partial S_t} = \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S_t} = \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}}.$$

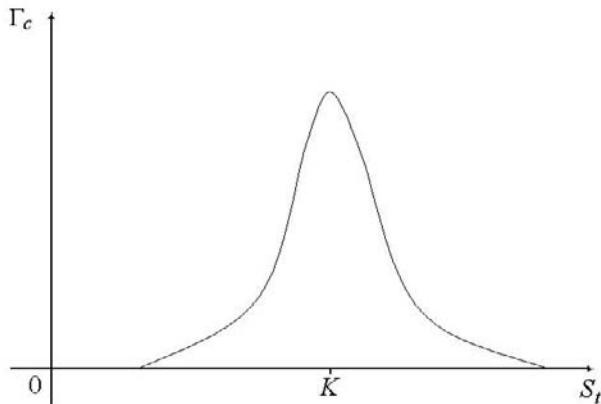
Es decir,

$$\Gamma_c \equiv \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}} > 0. \quad (22.10)$$

Observe que

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial S_t} = \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \frac{S_t \Phi''(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S_t} - \Phi'(d_1)}{S_t^2}.$$

La Gráfica 22.4 muestra Γ_c como función de S_t .



Gráfica 22.4 Γ_c como función de S_t .

22.5 Sensibilidad del precio de la opción de compra con respecto a la fecha de vencimiento, Θ_c

La razón de cambio del precio de la opción y la fecha de vencimiento, manteniendo todas las otras variables fijas, se denota por θ_c y se calcula mediante

$$\frac{\partial c}{\partial T} = S_t \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial T} - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial T} + r K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2).$$

Ahora bien, como $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$, entonces

$$\frac{\partial d_2}{\partial T} = \frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}},$$

por lo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial T} &= \left(S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \right) \frac{\partial d_1}{\partial T} + r K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\ &\quad + \frac{K e^{-r(T-t)} \sigma \Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}.\end{aligned}$$

En virtud de (22.6), se sigue que

$$\begin{aligned}\theta_c &\equiv \frac{\partial c}{\partial T} = r K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) + \frac{K e^{-r(T-t)} \sigma \Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \\ &= K e^{-r(T-t)} \left(r \Phi(d_2) + \frac{\sigma \Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right).\end{aligned}\tag{22.11}$$

La variación de c al transcurrir el tiempo, denotada por Θ_c , está dada por

$$\Theta_c = \frac{\partial c}{\partial t} = -K e^{-r(T-t)} \left(r \Phi(d_2) + \frac{\sigma \Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right).\tag{22.12}$$

En otras palabras, Θ_c es el cambio en el precio de la opción con respecto a una reducción en la vida del contrato. Claramente, se cumple la siguiente igualdad:

$$\Theta_c = -\theta_c.\tag{22.13}$$

El signo de Θ_c es ambiguo, es decir, no se puede determinar de antemano si una disminución en la fecha de vencimiento va a incrementar o disminuir el precio de la opción.

Finalmente, note que la ecuación diferencial parcial de segundo orden y parabólica para el precio de una opción de compra, determinada con la metodología de Black-Scholes, se puede reescribir en términos de las griegas Δ_c , Γ_c y Θ_c como

$$\Theta_c + \frac{1}{2} \Gamma_c \sigma^2 S_t^2 + \Delta_c r S_t - r c = 0,$$

con la condición $c(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$.

22.6 Sensibilidad del precio de la opción de compra con respecto a la volatilidad, v_c

Uno de los supuestos del modelo de Black-Scholes es que la volatilidad se mantiene constante en el tiempo. Sin embargo, en la práctica la volatilidad casi nunca es constante. La razón de cambio del precio de una opción europea con respecto a la volatilidad del subyacente, se denota por v_c , se lee la “vega” de la opción, y se calcula como

$$\begin{aligned}v_c &\equiv \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S_t \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\ &\text{y} \\ &\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T-t}.\end{aligned}\tag{22.14}$$

En consecuencia,

$$v_c \equiv \frac{\partial c}{\partial \sigma} = \left(S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \right) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \sqrt{T-t}.$$

Con base en (22.6), se tiene que

$$v_c = K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \sqrt{T-t}.\tag{22.15}$$

Equivalentemente,

$$v_c = S_t \Phi'(d_1) \sqrt{T-t} > 0.$$

Es decir, existe una relación directa entre el precio de la opción y la volatilidad del subyacente. Observe que si v_c es grande, entonces un cambio en la volatilidad impacta significativamente al precio de la opción.

22.7 Variación del precio de una opción de compra con respecto a la tasa de interés, ρ_c

La variación de c con respecto de r , está dada por

$$\frac{\partial c}{\partial r} = S_t \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r} + K e^{-r(T-t)} (T-t) \Phi(d_2).$$

Dado que

$$\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{\partial d_2}{\partial r}$$

y junto con (22.6), se tiene que

$$\rho_c \equiv \frac{\partial c}{\partial r} = K e^{-r(T-t)} (T-t) \Phi(d_2) > 0. \quad (22.16)$$

Es decir, existe una relación directa entre la tasa de interés y el precio de la opción: si r crece, c aumenta, y si r decrece, c disminuye.

22.8 Variación del precio de una opción de compra con respecto al precio de ejercicio, κ_c

La variación de c con respecto de K , está dada por

$$\begin{aligned} \kappa_c \equiv \frac{\partial c}{\partial K} &= S_t \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial K} - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial K} - e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\ &= \left(S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \right) \frac{\partial d_1}{\partial K} - e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\ &= -e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) < 0. \end{aligned} \quad (22.17)$$

Por lo tanto, existe una relación inversa entre el precio de ejercicio y el precio de la opción.

22.9 Griegas de una opción de venta europea

En esta sección se calculan las griegas para una opción europea de venta (“put”). En este caso, el precio teórico de una opción de venta obtenido mediante la metodología de Black-Scholes $p = p(S_t, t; T, K, r, \sigma)$ satisface

$$p = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1). \quad (22.18)$$

Con base en (22.1) y (22.18), se sigue que

$$\begin{aligned} c - p &= S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) - K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) + S_t \Phi(-d_1) \\ &= S_t (\Phi(d_1) + \Phi(-d_1)) - K e^{-r(T-t)} (\Phi(d_2) + \Phi(-d_2)) \\ &= S_t - K e^{-r(T-t)}, \end{aligned}$$

es decir,

$$p + S_t = c + K e^{-r(T-t)}. \quad (22.19)$$

La expresión anterior es conocida como la condición de paridad entre opciones de venta y compra, también llamada condición de paridad “put-call”. Esta condición permite calcular las griegas de

una opción de venta cuando se conocen las griegas de una opción de compra. En efecto, a partir de (22.19), se sigue que

$$\Delta_p = \Delta_c - 1. \quad (22.20)$$

Por lo tanto,

$$-1 < \Delta_p \equiv \frac{\partial p}{\partial S_t} = \Phi(d_1) - 1 < 0.$$

A continuación se calcula la Γ de una opción de venta europea. De la condición (22.20), se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{\partial p}{\partial S_t} \right) = \frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{\partial c}{\partial S_t} \right).$$

Es decir,

$$\Gamma_p = \Gamma_c = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}} > 0. \quad (22.21)$$

Ahora, se calcula la “vega” de una opción de venta. A partir de (22.19), se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S_t \Phi'(d_1) \sqrt{T-t}.$$

Por lo tanto,

$$v_p = v_c = S_t \Phi'(d_1) \sqrt{T-t} > 0. \quad (22.22)$$

Con base en (22.19), la variación de p con respecto a variaciones en K , está dada por

$$\begin{aligned} \kappa_p &= \kappa_c + e^{-r(T-t)} \\ &= -\Phi(d_2)e^{-r(T-t)} + e^{-r(T-t)} \\ &= (1 - \Phi(d_2))e^{-r(T-t)} \\ &= \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)} > 0. \end{aligned} \quad (22.23)$$

El cambio de p con respecto a un cambio en r , es

$$\begin{aligned} \rho_p &\equiv \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial r} - (T-t)Ke^{-r(T-t)} \\ &= Ke^{-r(T-t)}(T-t)\Phi(d_2) - (T-t)Ke^{-r(T-t)} \\ &= (\Phi(d_2) - 1)Ke^{-r(T-t)}(T-t) \\ &= -\Phi(-d_2)Ke^{-r(T-t)}(T-t) < 0. \end{aligned} \quad (22.24)$$

La razón de cambio de p con respecto de T , denotada por θ_p , se calcula como

$$\begin{aligned} \theta_p &\equiv \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial c}{\partial T} - rKe^{-r(T-t)} \\ &= Ke^{-r(T-t)} \left(r\Phi(d_2) + \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right) - rKe^{-r(T-t)} \\ &= -Kre^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) + \frac{Ke^{-r(T-t)}\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \\ &= -Ke^{-r(T-t)} \left(r\Phi(-d_2) - \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right). \end{aligned} \quad (22.25)$$

En consecuencia,

$$\Theta_p = -\theta_p = Ke^{-r(T-t)} \left(r\Phi(-d_2) - \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right). \quad (22.26)$$

22.10 Bibliografía sugerida

- Fundia Aizenstat, A. and F. Venegas-Martínez (2004). "Probabilistic Greeks". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas, REMEF*, Vol. 3, No. 3, pp. 303-311.
- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

22.11 Ejercicios

- 22.1** Considere una opción europea de compra con los parámetros que se muestran en la siguiente tabla:

Precios y parámetros relevantes					
S_t	K	r	σ	$T - t$	c_{BS}
42.00	41.00	0.11	0.13	0.25	2.436

Calcule e interprete las griegas del modelo de Black-Scholes.

- 22.2** Repita el ejercicio anterior con los parámetros que se muestran en la siguiente tabla:

Precios y parámetros relevantes					
S_t	K	r	σ	$T - t$	c_{BS}
42.00	43.17	0.11	0.13	0.25	1.07

- 22.3** Con base en la notación de la sección 22.4, muestre que

$$\Gamma_c \equiv \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}} > 0.$$

- 22.4** Pruebe que

$$\Theta_c = \frac{\partial c}{\partial t} = -K e^{-r(T-t)} \left(r\Phi(d_2) + \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right).$$

- 22.5** Muestre que

$$\Theta_c + \theta_c = \Theta_p - \theta_p = 0.$$

Es decir, el efecto en el precio de la opción, de compra o venta, por reducir el tiempo de vencimiento es equivalente al efecto por posponer la firma del contrato para una fecha futura (antes del vencimiento).

CAPÍTULO 23

FUNCIONES DE GREEN Y ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE BLACK-SCHOLES

Conceptos básicos de este capítulo:

- Funciones de Green
- Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes
- Condiciones de frontera
- Precios log-normales del subyacente
- Valuación neutral al riesgo

23.1 Introducción

Las funciones de Green constituyen los elementos básicos para construir soluciones generales de muchas ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera. En el presente capítulo se muestra cómo el precio de una opción europea de compra puede verse como una suma infinita de funciones de Green específicas. Una característica importante de estas funciones de Green es que son soluciones particulares de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes (1973) y Merton (1973). La solución general se obtiene mediante la suma (infinita) de estas soluciones particulares y una condición final.

23.2 Función de Green como solución particular de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

En esta sección se introducen las funciones de Green como soluciones particulares de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes. La ecuación diferencial parcial de segundo orden, lineal y parabólica de Black y Scholes para valuar una opción europea de compra está dada por:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial c}{\partial S_t} - rc = 0, \quad (23.1)$$

donde $c = c(S_t, t)$ es el precio de la opción. Evidentemente esta ecuación es lineal en c . Una solución particular de la ecuación diferencial parcial es la siguiente función de Green:

$$\mathcal{G}(S_t, t; s) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma s \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}, \quad s > 0, \quad (23.2)$$

la cual satisface

$$e^{r(T-t)} \int_0^\infty \mathcal{G}(S_t, t; s) ds = 1.$$

Debido a la linealidad de la ecuación (23.1), si se multiplica (23.2) por una constante $h(s)$, se tiene que $\mathcal{G}(S_t, t; s)h(s)$ es otra solución de (23.1). Asimismo, si la integral se interpreta como una suma infinita, entonces

$$\bar{\mathcal{G}}(S_t, t) = \int_0^\infty \mathcal{G}(S_t, t; s)h(s) ds$$

también es solución.

23.3 Valuación de una opción europea de compra

A continuación se muestra cómo se utilizan las funciones de Green para valuar una opción en un mundo neutral al riesgo. Si se escribe $h(s) = \max(s - K, 0)$, entonces se introduce una condición de frontera en (23.1) y

$$c(S_t, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^\infty \frac{1}{s} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} \max(s - K, 0) ds \quad (23.3)$$

también es solución de (23.1). La ecuación anterior se puede reescribir como

$$c(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}^{(r)}(s|S_t) ds, \quad (23.4)$$

donde

$$f_{S_T|S_t}^{(r)}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma s}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} \quad (23.5)$$

es la función de densidad, condicional en S_t , de una variable aleatoria log-normal. En este caso,

$$c(S_t, t) = S_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln \left(\frac{S_t}{K} \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}$$

y $\Phi(d)$ es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, es decir,

$$\Phi(d) = \mathbb{P}_{\mathcal{E}}\{\mathcal{E} \leq d\} = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon = 1 - \Phi(-d).$$

23.4 Bibliografía sugerida

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.
- Stakgold, I. (1997). Green's Functions and Boundary Value Problems. 2nd edition. Wiley-Interscience, New York.
- Wilmott, P. (1998). Derivatives (The Theory and Practice of Financial Engineering). John Wiley & Sons, England.

23.5 Ejercicios

23.1 Pruebe que

$$\mathcal{G}(S_t, t; s) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma s \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}$$

satisface

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial S_t} - r\mathcal{G} = 0.$$

23.2 Verifique que

$$\bar{\mathcal{G}}(S_t, t) = \int_0^\infty \mathcal{G}(S_t, t; s) h(s) ds$$

resuelve

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{G}}}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial S_t} - r\bar{\mathcal{G}} = 0.$$

23.3 Muestre que si se escribe $c(S_t, t) = e^{-r(T-t)}v(S_t, t)$, entonces $v = v(S_t, t)$ satisface

$$\frac{\partial v(S_t, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} = 0.$$

Solución: Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= v(S_t, t)e^{-r(T-t)}r + e^{-r(T-t)} \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial t} \\ &= e^{-r(T-t)} \left[\frac{\partial v(S_t, t)}{\partial t} + rv(S_t, t) \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial c}{\partial S_t} = e^{-r(T-t)} \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S_t^2}.$$

Si se sustituyen las ecuaciones anteriores en (23.1), se tiene que

$$\begin{aligned} e^{-r(T-t)} \left[\frac{\partial v(S_t, t)}{\partial t} + rv(S_t, t) \right] + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 e^{-r(T-t)} \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S_t^2} + rS_t e^{-r(T-t)} \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} \\ - re^{-r(T-t)}v(S_t, t) = 0. \end{aligned}$$

Después de simplificar la expresión anterior, se sigue el resultado pedido.

23.4 Suponga que el precio de una acción sigue el proceso

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde $r > 0$, $\sigma > 0$ y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ junto con su filtración aumentada $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Muestre que

$$\begin{aligned} v(S_t, t) &= \mathbb{E} [h(S_T) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E} \{h(S_t \exp \{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\}) \mid \mathcal{F}_t\}. \end{aligned}$$

23.5 Demuestre que $M_t = v(S_t, t)$ es una martingala.

Solución: Observe que $h(S_T)$ es estocásticamente independiente de \mathcal{F}_t , ya que $W_T - W_t$ y $W_t - W_0 = W_t$ son variables aleatorias independientes. En consecuencia, si $0 \leq u \leq t \leq T$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{v(S_t, t) \mid \mathcal{F}_u\} &= \mathbb{E} [\mathbb{E} \{h(S_T) \mid \mathcal{F}_t\} \mid \mathcal{F}_u] \\ &= \mathbb{E} \{h(S_T) \mid \mathcal{F}_u\} \\ &= v(S_u, u). \end{aligned}$$

23.6 Pruebe que cuando $t \rightarrow T$, entonces

$$\mathcal{G}(S_t, t; s) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma s \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{s}{S_t} \right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}$$

tiende a la delta de Dirac $\delta(S_t - 0)$, la cual satisface

$$\delta(S_t - 0) = \begin{cases} \infty, & S_t = 0, \\ 0, & S_t \neq 0, \end{cases}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(S_t - 0) dS_t = 1.$$

23.7 Considere el ejercicio anterior. Pruebe que si h es tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(S_t)| dS_t < \infty$$

y $\delta = \delta(S_t - 0)$ es la delta de Dirac, entonces

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(S_t) \delta(S_t - 0) dS_t.$$

CAPÍTULO 24

MODELO BINOMIAL DE COX, ROSS Y RUBINSTEIN

Conceptos básicos de este capítulo:

- Valuación de opciones con árboles binomiales
- Valuación neutral al riesgo
- Cobertura Delta
- Precios de estado
- Martingala
- Portafolios replicantes y autofinanciables

24.1 Introducción

El principal objetivo de este capítulo consiste en presentar una versión simplificada del modelo de Black y Scholes (1973) y Merton (1973) para valuar opciones sobre una acción a través de árboles binomiales. Dicha versión fue introducida por primera vez, por John C. Cox, Stephen A. Ross y Mark Rubinstein, en 1979 en el artículo “Option Pricing: A Simplified Approach” en el “Journal of Financial Economics”. Vale la pena señalar que este artículo presenta una exposición excepcionalmente didáctica. Una ventaja importante de esta versión simplificada es que el procedimiento numérico implícito es simple y computacionalmente eficiente comparado con otras alternativas disponibles en la literatura sobre valuación de opciones con métodos numéricos.

En el modelo de Cox, Ross y Rubinstein (CRR), las ramas del árbol representan las posibles trayectorias que puede tomar el activo subyacente durante la vida de la opción. Es importante destacar que el supuesto esencial sobre el cual descansa este modelo es que no existen oportunidades de arbitraje que sean libres de riesgo. Es decir, si hay dos alternativas de inversión libres de riesgo, entonces ambas producen exactamente el mismo rendimiento.

24.2 Modelo binomial de un periodo

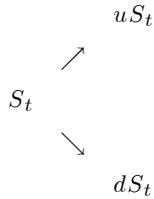
En esta sección se estudia el modelo binomial en su exposición más simple, la cual comprende un periodo con un árbol de dos ramas. El modelo proporciona una fórmula de valuación teórica de una opción europea de compra sobre un título de capital que no paga dividendos.

Al igual que en el modelo de Black, Scholes y Merton, en la propuesta CRR, se construye un portafolio que comprende al subyacente y a la opción y que al final del periodo de inversión proporciona el mismo rendimiento en todas las posibles trayectorias que puede tomar el activo subyacente.

Considere un portafolio que incorpora w_1 unidades de una acción y w_2 unidades de una opción sobre dicha acción. Se supone que la vida de la opción comprende el intervalo de tiempo $[t, T]$, donde t es el momento en que inicia el contrato y T es la fecha en que vence. El valor del portafolio, Π_t , al inicio del periodo está dado por:

$$\Pi_t = w_1 S_t + w_2 c_t, \quad (24.1)$$

donde S_t y c_t son el precio de la acción y el precio de la opción, en t , respectivamente. Asimismo, se supone que en T , el activo subyacente puede tomar dos posibles valores, uS_t y dS_t , donde $0 < d < 1 < u$. Esta situación se ilustra en el árbol de la Gráfica 24.1. Posteriormente, se introducirá una distribución de probabilidad asociada a dichos movimientos.



Gráfica 24.1 Árbol binomial del precio del activo subyacente.

Así pues, si el precio del activo tiene un movimiento hacia arriba en T , entonces se presenta el valor uS_t y si el precio tiene un movimiento hacia abajo en T , entonces se presenta el valor dS_t . En el primer caso, el valor del portafolio en T , está dado por:

$$\Pi_T^{(u)} = w_1 uS_t + w_2 c_u,$$

donde

$$c_u = \max(uS_t - K, 0).$$

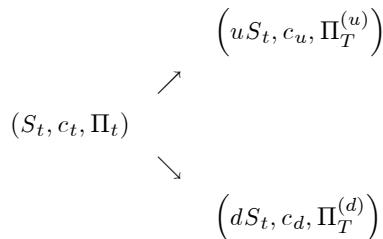
La cantidad c_u es el valor intrínseco de la opción dado un movimiento hacia arriba y K es el precio de ejercicio de la opción. Por otro lado, si se presenta un movimiento hacia abajo, el valor del portafolio en T , está dado por:

$$\Pi_T^{(d)} = w_1 dS_t + w_2 c_d,$$

donde

$$c_d = \max(dS_t - K, 0).$$

Los cambios en precios y en el valor del portafolio se pueden ilustrar en el árbol de la Gráfica 24.2.



Gráfica 24.2 Árbol binomial del precio del activo subyacente, del precio de la opción y del valor portafolio.

24.3 Valuación neutral al riesgo

Se supone ahora que existe un sistema bancario en donde los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés continuamente capitalizable, constante para todos los plazos y libre de riesgo crédito, r . A continuación se obtienen w_1 y w_2 de tal manera que el portafolio proporcione el mismo rendimiento en las dos posibles trayectorias del activo subyacente. Además, este rendimiento debe coincidir con el que se obtendría de un depósito inicial de monto Π_t , es decir,

$$\Pi_T^{(u)} = \Pi_t e^{r(T-t)} \tag{24.2}$$

y

$$\Pi_T^{(d)} = \Pi_t e^{r(T-t)}. \tag{24.3}$$

De primera instancia, el lector podría pensar que si el subyacente puede tomar en T un valor estrictamente mayor y un valor estrictamente menor que el actual, los valores de estos portafolios en T no tienen por qué coincidir. Lo asombroso aquí es que es posible elegir w_1 y w_2 de tal forma

que $\Pi_T^{(u)} = \Pi_T^{(d)}$. De hecho, existen infinitas formas de elegir w_1 y w_2 con dicha propiedad. En efecto, al igualar (24.2) con (24.3), se tiene que

$$w_1 u S_t + w_2 c_u = w_1 d S_t + w_2 c_d.$$

En este caso, hay una sola ecuación y dos variables por determinar, a saber w_1 y w_2 , lo cual conduce a un número infinito de soluciones. Una solución posible se obtiene al fijar $w_2 = 1$, en cuyo caso

$$w_1 \equiv -\Delta = -\frac{c_u - c_d}{S_t(u - d)}. \quad (24.4)$$

Es decir, el portafolio consiste de un call largo y una operación de venta en corto de Δ unidades de la acción. Esta selección de w_1 y w_2 hace que $\Pi_T^{(u)} = \Pi_T^{(d)}$. Por supuesto, cualquier múltiplo de (w_1, w_2) proporciona el mismo resultado, $\Pi_T^{(u)} = \Pi_T^{(d)}$. Considere de nuevo el valor del portafolio en la expresión (24.1) con $w_2 = 1$ y $w_1 = -\Delta$, en virtud de (24.3), se sigue que

$$\left[-\left(\frac{c_u - c_d}{S_t(u - d)} \right) d S_t + c_d \right] e^{-r(T-t)} = -\left(\frac{c_u - c_d}{S_t(u - d)} \right) S_t + c_t,$$

lo cual conduce, a su vez, a

$$c_t = \left[\left(\frac{e^{r(T-t)} - d}{u - d} \right) c_u + \left(\frac{u - e^{r(T-t)}}{u - d} \right) c_d \right] e^{-r(T-t)}. \quad (24.5)$$

Si se denota

$$p = \frac{e^{r(T-t)} - d}{u - d}, \quad (24.6)$$

se obtiene

$$1 - p = \frac{u - e^{r(T-t)}}{u - d}. \quad (24.7)$$

Observe también que en virtud de que $u > d$,

$$1 - p = \frac{u - e^{r(T-t)}}{u - d} > \frac{d - e^{r(T-t)}}{u - d} = -p. \quad (24.8)$$

Así pues, con base en (24.6) y (24.7), la ecuación (24.5) se transforma en

$$c_t = (p c_u + (1 - p) c_d) e^{-r(T-t)}. \quad (24.9)$$

Claramente, p siempre es positivo. Sin embargo, puede darse el caso de que $p > 1$, dependiendo de los valores de u , d , r y $T - t$, en cuyo caso $1 - p < 0$. Las cantidades p y $1 - p$ reciben frecuentemente el nombre de precios de estado y, por razones obvias, no siempre pueden ser vistas como probabilidades.

24.4 Casos especiales de valuación

En esta sección se estudian algunos casos de interés de la fórmula de valuación binomial, obtenida en (24.9), para una opción de compra sobre una acción cuando el precio de ejercicio es K y la fecha de vencimiento es T .

24.4.1 El precio de ejercicio es mayor que un movimiento a la alza

Observe que si K es tal que $u S_t < K$, entonces automáticamente $d S_t < K$. Por lo tanto,

$$c_u = c_d = c_t = 0.$$

En otras palabras, si el precio de ejercicio es mayor que un movimiento a la alza, entonces no tiene sentido entrar en un contrato de opción ya que existe la posibilidad de conseguirlo siempre más barato en el mercado al vencimiento, en el mejor de los casos hasta en $d S_t$.

24.4.2 El precio de ejercicio es menor que un movimiento a la baja

Suponga ahora que $K < dS_t$, en este caso se cumple inmediatamente que $K < uS_t$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} c_t &= [p(uS_t - K) + (1-p)(dS_t - K)] e^{-r(T-t)} \\ &= (puS_t - pK + dS_t - pdS_t - K + pK) e^{-r(T-t)} \\ &= (p(u-d)S_t + (dS_t - K)) e^{-r(T-t)} \\ &> 0, \end{aligned} \tag{24.10}$$

lo que garantiza una prima positiva cuando el precio de ejercicio es menor que un movimiento a la baja.

24.4.3 El precio de ejercicio está entre los movimientos a la baja y a la alza

Si $dS_t < K < uS_t$, evidentemente $c_d = 0$, en cuyo caso

$$c_t = p(uS_t - K)e^{-r(T-t)} > 0. \tag{24.11}$$

De esta forma, la prima de la opción es estrictamente positiva.

24.4.4 Condición para que los precios de estado puedan interpretarse como probabilidades

Si se pide que se satisfaga la condición

$$d < e^{r(T-t)} < u, \tag{24.12}$$

entonces $0 < p < 1$. Note que d , u y $r(T-t)$ son variables que no están relacionadas entre sí, razón por la cual siempre es posible escogerlas de tal forma que se cumpla (24.12). En este caso, p y $1-p$ pueden interpretarse en forma natural como probabilidades. Si se define a S_T como una variable aleatoria, junto con su probabilidad, \mathbb{P} , de tal manera que

$$\mathbb{P}\{S_T = uS_t\} = p \quad \text{y} \quad \mathbb{P}\{S_T = dS_t\} = 1-p,$$

el valor esperado del valor intrínseco de la opción, en T , está dado por

$$\begin{aligned} E[\max(S_T - K, 0) | S_t] &= \mathbb{P}\{S_T = uS_t\} c_u + \mathbb{P}\{S_T = dS_t\} c_d \\ &= pc_u + (1-p)c_d \end{aligned}$$

y su valor presente es justamente el precio de la opción c_t .

24.5 Valuación neutral al riesgo y martingalas

En esta sección se discute la relación que existe entre la valuación neutral al riesgo y el concepto de martingala.

Una vez que se ha determinado la condición para que los precios de estado puedan interpretarse como probabilidades, se muestra que si se utiliza una cuenta bancaria, o un bono libre de riesgo como numerario (o numeraria), entonces los precios descontados son una martingala. En este caso la medida martingala equivalente es única. De acuerdo con el teorema fundamental de valuación, si existe una medida martingala equivalente, no hay oportunidades de arbitraje, y si la medida martingala equivalente es única, entonces los mercados son también completos.

Ahora bien, bajo el supuesto $d < e^{r(T-t)} < u$, el valor esperado del precio de la acción en el tiempo T está dado por:

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}[S_T | S_t] &= \mathbb{P}\{S_T = uS_t\} uS_t + \mathbb{P}\{S_T = dS_t\} dS_t \\ &= puS_t + (1-p)dS_t \\ &= (p(u-d) + d)S_t. \end{aligned} \tag{24.13}$$

Si se define $\tilde{S}_t = S_t e^{-rt}$, entonces

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{S}_T \mid \tilde{S}_t] = e^{-r(T-t)}(p(u-d) + d)\tilde{S}_t. \quad (24.14)$$

Claramente, \tilde{S}_t es una martingala si y sólo si

$$e^{-r(T-t)}(p(u-d) + d) = 1, \quad (24.15)$$

si y sólo si

$$p = \frac{e^{r(T-t)} - d}{u - d}, \quad d < e^{r(T-t)} < u. \quad (24.16)$$

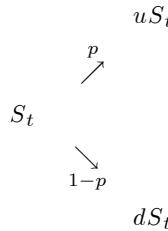
Esta solución de (24.16) es única. Observe también que si $\tilde{c}_t = c_t e^{-rt}$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{c}_T \mid \tilde{c}_t] = e^{-r(T-t)} \left(\frac{p(c_u - c_d) + c_d}{c_t} \right) \tilde{c}_t.$$

Para que \tilde{c}_t sea martingala se requiere

$$e^{-r(T-t)} \left(\frac{p(c_u - c_d) + c_d}{c_t} \right) = 1,$$

lo cual implica de nuevo (24.9). Por lo tanto, \mathbb{P} es la única medida martingala equivalente. De acuerdo al teorema fundamental de valuación, si existe una medida martingala equivalente única (un único p), no hay oportunidades de arbitraje y los mercados son completos. En la Gráfica 24.3 se muestra ahora el árbol binomial con sus probabilidades. De esta manera p es la probabilidad de un movimiento hacia arriba y $1-p$ es la probabilidad de un movimiento hacia abajo.



Gráfica 24.3 Árbol con probabilidades asociadas a los movimientos de S_t .

En un mundo neutral al riesgo, todos los agentes son indiferentes al riesgo. No requieren ser compensados con un premio al riesgo de mercado. Asimismo, el rendimiento esperado por invertir en un portafolio que combina una venta en corto de acciones con una posición larga en una opción de compra es equivalente al que proporciona un depósito en un sistema bancario que paga una tasa de interés constante y libre de riesgo r . No obstante, la valuación bajo las condiciones en (24.16) no sólo es válida en un mundo neutral al riesgo, sino también en el mundo real.

24.6 Relación del modelo binomial con los contratos forward

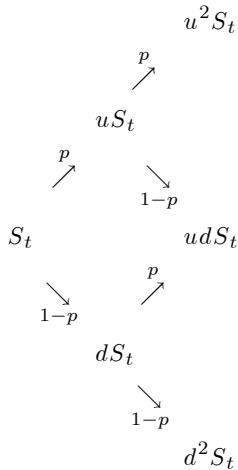
A continuación se muestra la relación existente entre el modelo binomial con los contratos forward. Si se supone que $K < dS_t$, en un mundo neutral al riesgo, la ecuación (24.13) implica

$$\begin{aligned}
 c_t &= ((p(u-d) + d)S_t - K) e^{-r(T-t)} \\
 &= (\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_T \mid S_t] - K) e^{-r(T-t)} \\
 &= (S_t e^{r(T-t)} - K) e^{-r(T-t)} \\
 &= S_t - K e^{-r(T-t)}. \tag{24.17}
 \end{aligned}$$

Es decir, bajo el supuesto $K < dS_t$, entrar en una posición larga de una opción de compra es equivalente a entrar en una posición larga de un contrato forward, también llamado contrato a plazo.

24.7 El modelo binomial de dos períodos

El modelo binomial se puede extender a dos períodos, cada uno de longitud $(T - t)/2$. Se supone que el contrato de opción inicia su vigencia en t . En este caso las posibles trayectorias de los precios del activo subyacente se ilustran en la Gráfica 24.4.



Gráfica 24.4 Expansión del árbol binomial a dos períodos.

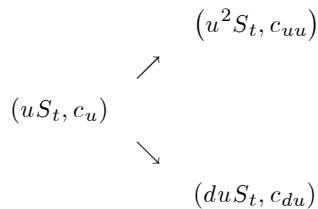
Si se repite el análisis hecho en las secciones 24.2 y 24.3, del presente capítulo, para las ramas del segundo periodo, se tiene a partir de (24.9) que para la rama superior se cumple

$$c_u = (pc_{uu} + (1 - p)c_{du}) e^{-r(T-t)/2}, \quad (24.18)$$

mientras que para la rama inferior

$$c_d = (pc_{du} + (1 - p)c_{dd}) e^{-r(T-t)/2}. \quad (24.19)$$

En la Gráfica 24.5 se ilustra la rama superior del segundo periodo. Esta rama es una réplica de la rama del primer periodo, excepto que aparece una u de más en todos los nodos, ya sea como subíndice o como variable. En tal caso, se aplica completamente la metodología utilizada en la rama del primer periodo.



Gráfica 24.5 Rama superior del segundo periodo.

Si se sustituyen (24.18) y (24.19) en (24.9), se obtiene que

$$c_t^{(2)} = [p^2 c_{uu} + 2p(1 - p)c_{du} + (1 - p)^2 c_{dd}] e^{-r(T-t)}. \quad (24.20)$$

Por último, observe que el análisis efectuado se puede extender a n períodos de tal forma que el precio de la opción en t está dado por:

$$c_t^{(n)} = e^{-r(T-t)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(u^k d^{n-k} S_t - K, 0).$$

24.8 Portafolios replicantes y el modelo binomial

En esta sección se presenta una forma alternativa para obtener la fórmula de valuación binomial del precio de una opción europea de compra.

Se desea determinar un portafolio combinado de una posición larga del activo subyacente y un depósito bancario que, en la fecha de vencimiento, replique el valor de la opción. En otras palabras, se supone que se desean encontrar v_1 y v_2 tales que

$$v_1 S_t + v_2 = c_t, \quad (24.21)$$

donde v_2 es un depósito en un banco que paga una tasa de interés constante y libre de riesgo r . Asimismo, se supone que en la fecha de vencimiento, T , el portafolio puede tomar dos posibles valores:

$$v_1 u S_t + v_2 e^{r(T-t)} = \max(u S_T - K, 0) = c_u \quad (24.22)$$

y

$$v_1 d S_t + v_2 e^{r(T-t)} = \max(d S_T - K, 0) = c_d. \quad (24.23)$$

Así pues, se tienen dos ecuaciones (24.22) y (24.23) con dos incógnitas, a saber, v_1 y v_2 . Observe que partir de (24.22) y (24.23), se sigue que

$$v_1 u S_t - c_u = v_1 d S_t - c_d.$$

Por lo tanto,

$$v_1 \equiv \Delta = \frac{c_u - c_d}{S_t(u - d)}. \quad (24.24)$$

Ahora bien, con base en la ecuación (24.22), se tiene que

$$\begin{aligned} v_2 &= \left[c_u - \left(\frac{c_u - c_d}{u - d} \right) u \right] e^{-r(T-t)} \\ &= \left(\frac{c_d u - c_u d}{u - d} \right) e^{-r(T-t)}. \end{aligned} \quad (24.25)$$

Al sustituir (24.24) y (24.25) en (24.21) y teniendo en cuenta las definiciones (24.6) y (24.7), se obtiene de nuevo (24.9).

24.9 Incorporación del parámetro de volatilidad en el modelo binomial

Hasta ahora una diferencia significativa del modelo binomial con respecto del modelo de Black y Scholes es que en el primero no se considera un parámetro de volatilidad del subyacente. En esta sección, se incorpora dicho parámetro en el modelo binomial tratando de emular las propiedades de la varianza del modelo de Black y Scholes.

Si la varianza de los movimientos de los precios del activo subyacente, en un solo periodo, se iguala con $\sigma^2(T-t)/n$, se tiene que

$$p u^2 + (1-p) d^2 - (p u + (1-p) d)^2 = \sigma^2 \left(\frac{T-t}{n} \right),$$

lo cual implica que

$$p(1-p)(u-d)^2 = \sigma^2 \left(\frac{T-t}{n} \right).$$

Al sustituir la definición de p en la ecuación anterior, se sigue que

$$e^{r(T-t)/n}(u+d) - ud - e^{2r(T-t)/n} = \sigma^2 \left(\frac{T-t}{n} \right). \quad (24.26)$$

Suponga ahora que

$$u = e^{\sigma\sqrt{(T-t)/n}} \quad \text{y} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}}. \quad (24.27)$$

En este caso las expansiones en series de Taylor de u y d en (24.27) están dadas, respectivamente, por

$$u = 1 + \sigma\sqrt{(T-t)/n} + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{T-t}{n} \right) + o(T-t) \quad (24.28)$$

y

$$d = 1 - \sigma\sqrt{(T-t)/n} + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{T-t}{n} \right) + o(T-t), \quad (24.29)$$

donde $o(T-t)/(T-t) \rightarrow 0$ cuando $T-t \rightarrow 0$. Si las expresiones en (24.28) y (24.29) se sustituyen en la ecuación (24.26), se tiene que

$$e^{r(T-t)/n} \left[2 + \sigma^2 \left(\frac{T-t}{n} \right) + o(T-t) \right] - 1 - e^{2r(T-t)/n} = \sigma^2 \left(\frac{T-t}{n} \right).$$

Si además se expande $e^{r(T-t)/n}$ en serie de Taylor, se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma^2 \left(\frac{T-t}{n} \right) &= \left[1 + r \left(\frac{T-t}{n} \right) + o(T-t) \right] \left[2 + \sigma^2 \left(\frac{T-t}{n} \right) + o(T-t) \right] \\ &\quad - 1 - \left[1 + 2r \left(\frac{T-t}{n} \right) + o(T-t) \right]. \end{aligned} \quad (24.30)$$

Si $T-t$ es suficientemente pequeña, los términos $o(T-t)$ son despreciables y, por lo tanto, pueden omitirse, así (24.30) se transforma en

$$\sigma^2 \left(\frac{T-t}{n} \right) \approx \left[1 + r \left(\frac{T-t}{n} \right) \right] \left[2 + \sigma^2 \left(\frac{T-t}{n} \right) \right] - 2 - 2r \left(\frac{T-t}{n} \right)$$

ó

$$\sigma^2 \left(\frac{T-t}{n} \right) \approx 2 + 2r \left(\frac{T-t}{n} \right) + \sigma^2 \left(\frac{T-t}{n} \right) + r\sigma^2 \left(\frac{T-t}{n} \right)^2 - 2 - 2r \left(\frac{T-t}{n} \right). \quad (24.31)$$

En virtud de que el cuarto término del lado derecho de (24.31) satisface

$$\left(\frac{T-t}{n} \right)^2 = o(T-t),$$

la aproximación (24.30) se convierte en una identidad y, en consecuencia, las definiciones de $u = u(\sigma)$ y $d = d(\sigma)$ en (24.28) y (24.29), respectivamente, se aproximan a $\sigma^2(T-t)/n$ con un error igual a un infinitésimo de orden superior al primero con respecto de $T-t$, $o(T-t)$.

24.10 El modelo trinomial

Suponga que el precio actual de un activo es S_t y que en T puede tomar tres posibles valores uS_t , mS_t y dS_t , con $d < m < u$. Considere un portafolio replicante de tal manera que

$$v_1S_t + v_2 = c_t, \quad (24.32)$$

$$v_1uS_t + v_2e^{r(T-t)} = c_u, \quad (24.33)$$

$$v_1mS_t + v_2e^{r(T-t)} = c_m \quad (24.34)$$

y

$$v_1dS_t + v_2e^{r(T-t)} = c_d. \quad (24.35)$$

El sistema de ecuaciones (24.33)-(24.35) tiene solución, (v_1, v_2) , si y sólo si

$$v_1uS_t - c_u = v_1mS_t - c_m,$$

$$v_1uS_t - c_u = v_1dS_t - c_d$$

y

$$v_1mS_t - c_m = v_1dS_t - c_d$$

si y sólo si

$$\frac{c_u - c_m}{u - m} = \frac{c_u - c_d}{u - d} = \frac{c_m - c_d}{m - d} = \lambda. \quad (24.36)$$

En este caso, se dice que la opción es alcanzable, en cuyo caso, si, por ejemplo

$$v_1 = \frac{c_m - c_d}{S_t(m - d)}, \quad (24.37)$$

a partir de (24.35), se sigue que

$$v_2 = \left[c_d - \left(\frac{c_m - c_d}{m - d} \right) d \right] e^{-r(T-t)}. \quad (24.38)$$

Si se sustituyen (24.37) y (24.38) en (24.32), se tiene que

$$\begin{aligned} c_t &= \frac{c_m - c_d}{m - d} + \left[c_d - \left(\frac{c_m - c_d}{m - d} \right) d \right] e^{-r(T-t)} \\ &= \frac{c_m - c_d}{m - d} + \left(\frac{c_d m - c_d d}{m - d} \right) e^{-r(T-t)}. \end{aligned} \quad (24.39)$$

Suponga que $0 < p + q < 1$. Observe ahora que si se define $\tilde{S}_t = S_t e^{-rt}$, entonces

$$\begin{aligned} E^P[\tilde{S}_T | \tilde{S}_t] &= e^{-r(T-t)} [pu + qm + (1 - p - q)d] \tilde{S}_t \\ &= e^{-r(T-t)} [p(u - d) + q(m - d) + d] \tilde{S}_t. \end{aligned}$$

Para que $\tilde{S}_t = S_t e^{-r(T-t)}$ sea martingala se requiere que

$$p(u - d) + q(m - d) = e^{r(T-t)} - d. \quad (24.40)$$

De la misma manera, si $\tilde{c}_t = c_t e^{-rt}$, entonces

$$\begin{aligned} E^P[\tilde{c}_T | \tilde{c}_t] &= e^{-r(T-t)} [pc_u + qc_m + (1 - p - q)c_d] \tilde{c}_t \\ &= e^{-r(T-t)} \left[\frac{p(c_u - c_d) + q(c_m - c_d) + c_d}{c_t} \right] \tilde{c}_t. \end{aligned} \quad (24.41)$$

Para que \tilde{c}_t sea martingala se requiere

$$p(c_u - c_d) + q(c_m - c_d) = c_t e^{r(T-t)} - c_d. \quad (24.42)$$

Si se utilizan (24.36), (24.38) y (24.39) en (24.42), se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda p(u-d) + \lambda q(m-d) &= \left\{ \frac{c_m - c_d}{m-d} + \left[c_d - \left(\frac{c_m - c_d}{m-d} \right) d \right] e^{-r(T-t)} \right\} e^{r(T-t)} - c_d \\ &= \lambda e^{r(T-t)} + (c_d - \lambda d) - c_d \\ &= \lambda e^{r(T-t)} - \lambda d \\ &= \lambda (e^{r(T-t)} - d). \end{aligned} \quad (24.43)$$

Si se divide entre λ se obtiene justo (24.40). Por lo tanto, a partir de (24.40) y (24.42) no se puede obtener de manera única p y q . Así, dado un valor de q se obtiene un valor de p a partir de (24.40), sólo hay que cuidar que la elección de q produzca $0 < p + q < 1$. Esto implica que los mercados son incompletos. El valor de p está dado por

$$p = \frac{e^{r(T-t)} - d}{u - d} - q \left(\frac{m - d}{u - d} \right). \quad (24.44)$$

En este caso, el precio de la opción satisface

$$\begin{aligned} c_t &= e^{-r(T-t)} [p(c_u - c_d) + q(c_m - c_d) + c_d] \\ &= e^{-r(T-t)} \left\{ \left[\frac{e^{r(T-t)} - d}{u - d} - q \left(\frac{m - d}{u - d} \right) \right] (c_u - c_d) + q(c_m - c_d) + c_d \right\} \\ &= \frac{c_u - c_d}{u - d} - \left[\left(\frac{c_u - c_d}{u - d} \right) d - c_d \right] e^{-r(T-t)} \\ &\quad + q \left[(c_m - c_d) - \left(\frac{m - d}{u - d} \right) (c_u - c_d) \right] e^{-r(T-t)} \\ &= \frac{c_u - c_d}{u - d} - \left(\frac{c_u d - c_d u}{u - d} \right) e^{-r(T-t)} + q(m - d) (\lambda - \lambda) e^{-r(T-t)}. \end{aligned} \quad (24.45)$$

Dado que el término en q se anula, se tiene que la selección de q es arbitraria. Observe también que en virtud de la condición (24.38) los precios de la opción en (24.39) y (24.45) coinciden.

24.11 Bibliografía sugerida

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
 Cox, J. C., S. A. Ross, and M. Rubinstein (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach". *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, No. 3, pp. 229-263.
 Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

24.12 Ejercicios

24.1 Demuestre mediante inducción matemática que la fórmula de valuación para n períodos:

$$c_t^{(n)} = e^{-r(T-t)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(u^k d^{n-k} S_t - K, 0)$$

es válida para toda $n \in \mathbb{N}$.

Solución: Para $n = 1$ y $n = 2$ la fórmula de valuación binomial ya ha sido demostrada en el transcurso del presente capítulo. Suponga que la fórmula es válida para $n - 1$, entonces

$$\begin{aligned}
 c_t^{(n)} &= e^{-r(T-t)} \left[p \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \max(u^{k+1} d^{n-1-k} S_t - K, 0) \right. \\
 &\quad \left. + (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \max(u^k d^{n-k} S_t - K, 0) \right] \\
 &= e^{-r(T-t)} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-1-k} \max(u^{k+1} d^{n-1-k} S_t - K, 0) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(u^k d^{n-k} S_t - K, 0) \right] \\
 &= e^{-r(T-t)} \left[\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \max(u^k d^{n-k} S_t - K, 0) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(u^k d^{n-k} S_t - K, 0) \right] \\
 &= e^{-r(T-t)} \left[p^n \max(u^n S_t - K, 0) + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \max(u^k d^{n-k} S_t - K, 0) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(u^k d^{n-k} S_t - K, 0) \right. \\
 &\quad \left. + (1-p)^n \max(d^n S_t - K, 0) \right] \\
 &= e^{-r(T-t)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(u^k d^{n-k} S_t - K, 0).
 \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue del hecho

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

24.2 Calcule el precio de una opción europea de venta utilizando el modelo binomial de un periodo cuando $r = 0.06$, $T - t = 0.75$, $u = 1.1$, $d = 0.9$, $S_t = 40$ y $K = 41$. Observe que, en este caso, $p = 0.73$ y $1 - p = 0.27$. Discuta los resultados.

24.3 Calcule el precio de una opción europea de compra utilizando el modelo binomial de dos periodos cuando $r = 0.06$, $T - t = 0.5$, $u = 1.1$, $d = 0.9$, $S_t = 40$ y $K = 41$.

CAPÍTULO 25

CONVERGENCIA DEL MODELO BINOMIAL AL MODELO BLACK-SCHOLES

Conceptos básicos de este capítulo:

- Fórmula de valuación binomial para una opción
- Fórmula de valuación de Black y Scholes para una opción
- Teorema del límite central
- Función generatriz de momentos
- Convergencia en distribución

25.1 Introducción

En este capítulo se muestra la convergencia, en distribución, del modelo de Cox, Ross y Rubinstein (1979) al modelo de Black y Scholes (1973) y Merton (1973). Este resultado se basa fundamentalmente en el teorema del límite central, en particular, en la convergencia de la distribución binomial a la distribución normal cuando el número de ensayos en la primera tiende a infinito. La demostración de la convergencia es, en general, una tarea sencilla aunque laboriosa; como el lector lo podrá apreciar en el transcurso del presente capítulo.

25.2 Planteamiento del problema de convergencia

En el transcurso del presente capítulo se demostrará que cuando el número de periodos, n , en que se subdivide el horizonte de valuación, $[t, T]$, tiende a infinito, la fórmula de valuación binomial

$$c_t^{(n)} = e^{-r(T-t)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(u^k d^{n-k} S_t - K, 0), \quad (25.1)$$

donde

$$p = \frac{e^{r(T-t)/n} - d}{u - d}, \quad (25.2)$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{(T-t)/n}} \quad (25.3)$$

y

$$d = e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}} \quad (25.4)$$

converge a la fórmula de valuación de Black y Scholes

$$c = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (25.5)$$

en donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (25.6)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (25.7)$$

y

$$\Phi(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx, \quad i = 1, 2, \quad (25.8)$$

es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar. Como siempre, S_t es el precio de contado actual del activo subyacente, r es una tasa de interés constante a todos los

plazos y libre de riesgo crédito, K es el precio de ejercicio de la opción y σ es el parámetro de volatilidad asociado a las fluctuaciones del precio del activo subyacente. El tipo de convergencia en cuestión es convergencia en distribución.

25.3 Preparativos para la demostración de convergencia

En esta sección, la fórmula (25.1) se reescribe en términos de la distribución binomial complementaria, lo cual es conveniente para emprender la demostración de convergencia.

Observe, primero, que si para alguna k se cumple que

$$u^k d^{n-k} S < K,$$

entonces el valor de la opción, en (25.1), es cero. Defina ahora a m como el número natural más pequeño para el cual se cumple que

$$K < u^m d^{n-m} S_t. \quad (25.9)$$

Evidentemente, a partir de la definición de m , se tiene que

$$u^{m-1} d^{n-(m-1)} S_t \leq K < u^m d^{n-m} S_t, \quad (25.10)$$

ya que $m - 1 < m$. Al aplicar las propiedades de la función logaritmo a la segunda desigualdad de (25.10), se obtiene

$$\ln\left(\frac{K}{d^n S_t}\right) < m \ln\left(\frac{u}{d}\right),$$

por lo que

$$\frac{\ln(K/d^n S_t)}{\ln(u/d)} < m. \quad (25.11)$$

Similarmente, para la primera desigualdad de (25.10), se sigue que

$$m \leq \frac{\ln(K/d^n S_t)}{\ln(u/d)} + 1. \quad (25.12)$$

De las desigualdades (25.11) y (25.12), se puede concluir

$$\frac{\ln(K/d^n S_t)}{\ln(u/d)} < m \leq \frac{\ln(K/d^n S_t)}{\ln(u/d)} + 1. \quad (25.13)$$

Esta doble desigualdad es central en la demostración de la convergencia del modelo binomial al modelo de Black-Scholes y será utilizada más adelante. En virtud de la definición de m , la fórmula de valuación binomial, en (25.1), puede ser reescrita como:

$$c_t^{(n)} = e^{-r(T-t)} \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} (u^k d^{n-k} S_t - K) \quad (25.14)$$

6

$$c_t^{(n)} = S_t \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \left(\frac{pu}{R}\right)^k \left(\frac{(1-p)d}{R}\right)^{n-k} - K e^{-r(T-t)} \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad (25.15)$$

donde

$$R = e^{r(T-t)/n}. \quad (25.16)$$

El lector puede observar la similitud de (25.15) con el procedimiento del enfoque probabilista para calcular el valor esperado del pago al vencimiento de una opción en la obtención de la fórmula de valuación de Black-Scholes. Ahora bien, la condición

$$d < R < u \quad (25.17)$$

asegura que en cada periodo $0 < p < 1$. Asimismo, las cantidades pu/R y $(1-p)d/R$ también pueden interpretarse como probabilidades. Evidentemente, R , u , d y p dependen de n . Sin embargo, por simplicidad en la notación, esta dependencia no se hará explícita, ni siquiera a través del uso de un subíndice.

Ahora bien, la primera sumatoria de (25.15)

$$\mathcal{A}_1 := \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \left(\frac{pu}{R}\right)^k \left(\frac{(1-p)d}{R}\right)^{n-k} \quad (25.18)$$

se interpreta como la probabilidad de que una variable aleatoria binomial, $X_n \sim \mathcal{B}(n, pu/R)$, sea mayor o igual a m , es decir,

$$\mathcal{A}_1 = \mathbb{P}_x \{X_n \geq m\}.$$

Mientras que el segundo sumando

$$\mathcal{A}_2 := \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad (25.19)$$

se puede ver como la probabilidad de que una variable aleatoria binomial, $Y_n \sim \mathcal{B}(n, p)$, sea mayor o igual a m , esto es,

$$\mathcal{A}_2 = \mathbb{P}_y \{Y_n \geq m\}.$$

El valor de la opción puede, por lo tanto, ser escrito como:

$$\begin{aligned} c_t^{(n)} &= S_t (1 - \mathbb{P}_x \{X_n < m\}) - K e^{-r(T-t)} (1 - \mathbb{P}_y \{Y_n < m\}) \\ &= S_t (1 - \mathbb{P}_x \{X_n \leq m-1\}) - K e^{-r(T-t)} (1 - \mathbb{P}_y \{Y_n \leq m-1\}). \end{aligned} \quad (25.20)$$

Para mayor simplicidad en la notación, se definen las distribuciones binomiales complementarias:

$$\varphi \left(m, n, \frac{pu}{R}\right) = 1 - \mathbb{P}_x \{X_n \leq m-1\} \quad (25.21)$$

y

$$\varphi(m, n, p) = 1 - \mathbb{P}_y \{Y_n \leq m-1\}. \quad (25.22)$$

De esta manera, la ecuación (25.20) se reescribe como

$$c_t^{(n)} = S_t \varphi \left(m, n, \frac{pu}{R}\right) - K e^{-r(T-t)} \varphi(m, n, p). \quad (25.23)$$

Se verá a continuación, con base en el teorema del límite central, que

$$\varphi \left(m, n, \frac{pu}{R}\right) \rightarrow \Phi(d_1) \quad (25.24)$$

y

$$\varphi(m, n, p) \rightarrow \Phi(d_2) \quad (25.25)$$

cuando $n \rightarrow \infty$, donde

$$\Phi(d_i) = \int_{-\infty}^{d_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx, \quad i = 1, 2,$$

es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar, mientras que d_1 y d_2 satisfacen, respectivamente, (25.6) y (25.7).

25.4 Demostración de la convergencia en distribución

Observe que la función de distribución binomial complementaria, $\varphi(m, n, p)$, puede ser vista como la probabilidad de que la suma de n variables aleatorias independientes del tipo Bernoulli, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, sea mayor o igual que m . En este caso, la variable aleatoria $Y_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, tiene media $\mu_n = np$ y desviación estándar $\sigma_n = \sqrt{np(1-p)}$. Asimismo, observe que

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(m, n, p) &= \mathbb{P}_Y \{Y_n \leq m-1\} \\ &= \mathbb{P}_Y \left\{ \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{m-1-np}{\sqrt{np(1-p)}} \right\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que la función generatriz de momentos de ξ_i satisface

$$M_{\xi_i} \left(\frac{t}{a} \right) = 1 - p + pe^{t/a},$$

se tiene que la función generatriz de momentos de $(Y_n - np)/\sqrt{np(1-p)}$ satisface que

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} t \right\} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{\xi_i - p}{\sqrt{np(1-p)}} t \right\} \right] \\ &= \exp \left\{ -\frac{npt}{\sqrt{np(1-p)}} \right\} \left(1 - p + p \exp \left\{ \frac{t}{\sqrt{np(1-p)}} \right\} \right)^n \\ &= \left[\exp \left\{ -\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}} \right\} \left(1 - p + p \exp \left\{ \frac{t}{\sqrt{np(1-p)}} \right\} \right) \right]^n \\ &= \left[(1-p) \exp \left\{ -\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}} \right\} + p \exp \left\{ \frac{(1-p)t}{\sqrt{np(1-p)}} \right\} \right]^n \\ &= \left[(1-p) \left(1 - \frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{1}{2} \frac{p^2 t^2}{np(1-p)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + p \left(1 + \frac{(1-p)t}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{1}{2} \frac{(1-p)^2 t^2}{np(1-p)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right]^n \\ &= \left[1 + \frac{-(1-p)pt + (1-p)pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{1}{2} \frac{(1-p)p^2 t^2 + (1-p)^2 pt^2}{np(1-p)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n \\ &= \left[1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_Y(t) = e^{t^2/2}.$$

Es decir, la distribución binomial converge a la distribución normal estándar cuando el número de ensayos en la distribución binomial tiende a infinito. Considere ahora el límite de la distribución binomial complementaria

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(m, n, p) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_Y \left\{ \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{m-1-np}{\sqrt{np(1-p)}} \right\}. \quad (25.26)$$

A partir de la definición de m , se tiene que

$$m - 1 \leq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) + n\sigma\sqrt{(T-t)/n}}{2\sigma\sqrt{(T-t)/n}}. \quad (25.27)$$

En lo que sigue se considerará la igualdad en la expresión anterior. Ahora bien, en primer lugar, es fácil verificar a través de la regla de L'Hopital que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{r(T-t)/n} - e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}}}{e^{\sigma\sqrt{(T-t)/n}} - e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-r(T-t)n^{-1/2}e^{r(T-t)/n} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}}}{-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}e^{\sigma\sqrt{(T-t)/n}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (25.28)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pu}{R} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} p \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u}{R} \right) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}, \quad (25.29)$$

ya que los límites de los factores existen. Observe ahora que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m - 1 - np}{\sqrt{np(1-p)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(K/S_t) + n\sigma\sqrt{(T-t)/n}}{2\sigma\sqrt{(T-t)/n}} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) + n\sigma\sqrt{(T-t)/n} - 2\sigma np\sqrt{(T-t)/n}}{2\sigma\sqrt{p(1-p)(T-t)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) + n\sigma(1-2p)\sqrt{(T-t)/n}}{2\sigma\sqrt{p(1-p)(T-t)}}. \end{aligned} \quad (25.30)$$

A continuación se demuestra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\sigma(1-2p)\sqrt{(T-t)/n} = -(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t). \quad (25.31)$$

En efecto, si $y = \sqrt{(T-t)/n}$, entonces

$$\begin{aligned} &n\sigma(1-2p)\sqrt{(T-t)/n} \\ &= \sigma(1-2p)\sqrt{n(T-t)} \\ &= \sigma \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{(T-t)/n}} - 2e^{r(T-t)/n} + e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}}}{e^{\sigma\sqrt{(T-t)/n}} - e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}}} \right) \sqrt{n(T-t)} \\ &= \sigma \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{(T-t)/n}} - 2e^{r(T-t)/n} + e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}}}{\sqrt{(T-t)/n} (e^{\sigma\sqrt{(T-t)/n}} - e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}})} \right) (T-t) \\ &= \sigma \left(\frac{e^{\sigma y} - 2e^{ry^2} + e^{-\sigma y}}{y (e^{\sigma y} - e^{-\sigma y})} \right) (T-t). \end{aligned} \quad (25.32)$$

Observe que la regla de L'Hopital, aplicada dos veces al límite de la cantidad que aparece entre paréntesis en la última igualdad de (25.32), conduce a

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{\sigma y} - 2e^{ry^2} + e^{-\sigma y}}{y (e^{\sigma y} - e^{-\sigma y})} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sigma e^{\sigma y} - 4rye^{ry^2} - \sigma e^{-\sigma y}}{y (\sigma e^{\sigma y} + \sigma e^{-\sigma y}) + e^{\sigma y} - e^{-\sigma y}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sigma^2 e^{\sigma y} - 4re^{ry^2} - 8r^2 y^2 e^{ry^2} + \sigma^2 e^{-\sigma y}}{y (\sigma^2 e^{\sigma y} - \sigma^2 e^{-\sigma y}) + 2\sigma e^{\sigma y} + 2\sigma e^{-\sigma y}} \\ &= \frac{\sigma^2 - 4r + \sigma^2}{2\sigma + 2\sigma} \\ &= \frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma}. \end{aligned}$$

A partir de este resultado, la ecuación (25.30) se transforma en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m - 1 - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

En consecuencia, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\varphi(m, n, p) \rightarrow \Phi(d_2).$$

Sólo falta demostrar la proposición (25.24), para ello denote por conveniencia

$$\bar{p} = \frac{pu}{R}.$$

Se desea ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(m, n, \bar{p}) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_X \left\{ \frac{X_n - n\bar{p}}{\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}} \leq \frac{m - 1 - n\bar{p}}{\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}} \right\} = \Phi(d_1).$$

A partir de (25.27) y procediendo como en (25.30), se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m - 1 - n\bar{p}}{\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(K/S_t) + n\sigma\sqrt{(T-t)/n}}{2\sigma\sqrt{(T-t)/n}} - n\bar{p}}{\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) + n\sigma(1-2\bar{p})\sqrt{(T-t)/n}}{2\sigma\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})(T-t)}}. \end{aligned} \quad (25.33)$$

Se verá a continuación que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\sigma(1-2\bar{p})\sqrt{(T-t)/n} = -(r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t). \quad (25.34)$$

En efecto, si $y = \sqrt{(T-t)/n}$, entonces

$$\begin{aligned} &n\sigma(1-2\bar{p})\sqrt{(T-t)/n} \\ &= \sigma(1-2\bar{p})\sqrt{n(T-t)} \\ &= \sigma \left[1 - 2 \left(\frac{e^{r(T-t)/n} - e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}}}{e^{\sigma\sqrt{(T-t)/n}} - e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}}} \right) e^{\sigma\sqrt{(T-t)/n} - r(T-t)/n} \right] \\ &= \sigma \left(\frac{2e^{-r(T-t)/n} - e^{\sigma\sqrt{(T-t)/n}} - e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}}}{\sqrt{(T-t)/n} (e^{\sigma\sqrt{(T-t)/n}} - e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}})} \right) (T-t) \\ &= \sigma \left(\frac{2e^{-ry^2} - e^{\sigma y} - e^{-\sigma y}}{y (e^{\sigma y} - e^{-\sigma y})} \right) (T-t). \end{aligned} \quad (25.35)$$

Para calcular el límite de la expresión entre paréntesis de la última igualdad en (25.35), se utiliza la regla de L'Hopital dos veces,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{2e^{-ry^2} - e^{\sigma y} - e^{-\sigma y}}{y (e^{\sigma y} - e^{-\sigma y})} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-4rye^{-ry^2} - \sigma e^{\sigma y} + \sigma e^{-\sigma y}}{y (\sigma e^{\sigma y} + \sigma e^{-\sigma y}) + e^{\sigma y} - e^{-\sigma y}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-4re^{-ry^2} + 8r^2y^2e^{-ry^2} - \sigma^2e^{\sigma y} - \sigma^2e^{-\sigma y}}{y (\sigma^2e^{\sigma y} - \sigma^2e^{-\sigma y}) + 2\sigma e^{\sigma y} + 2\sigma e^{-\sigma y}} \\ &= \frac{-4r - \sigma^2 - \sigma^2}{2\sigma + 2\sigma} \\ &= -\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}. \end{aligned}$$

Este resultado produce justamente (25.21). Por lo anterior, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m - 1 - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

En consecuencia,

$$\varphi(m, n, \bar{p}) \longrightarrow \Phi(d_1)$$

cuando $n \rightarrow \infty$. En conclusión,

$$e^{-r(T-t)} \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} (u^k d^{n-k} S_t - K) \longrightarrow S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$

cuando $n \rightarrow \infty$, donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

25.5 Bibliografía

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
 Cox, J. C., S. A. Ross, and M. Rubinstein (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach". *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, No. 3, pp. 229-263.
 Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

25.6 Ejercicios

25.1 Considere las cantidades pu/R y $(1-p)d/R$. Demuestre que

$$\frac{(1-p)d}{R} = 1 - \frac{pu}{R}.$$

25.2 Si ξ es una variable aleatoria Bernoulli con probabilidad de éxito p , pruebe que su función generatriz de momentos está dada por

$$M_\xi(t) = 1 - p + pe^t.$$

¿Cuál es la función generatriz de la suma de n variables aleatorias Bernoulli independientes e idénticamente distribuidas?

25.3 En vista de que

$$p = \frac{e^{r(T-t)/n} - e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}}}{e^{\sigma\sqrt{(T-t)/n}} - e^{-\sigma\sqrt{(T-t)/n}}},$$

demuestre que

$$\sqrt{p(1-p)(T-t)} \rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{T-t}$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

25.4 Considere la ecuación del precio de una opción tomando en cuenta un solo periodo

$$pc_{u_T} + (1-p)c_{d_T} - e^{r(T-t)}c_t = 0.$$

Obtenga a partir de la fórmula anterior la ecuación diferencial parcial parabólica de Black-Scholes que caracteriza el precio de una opción de compra, a saber,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r - rc = 0,$$

junto con la condición

$$c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0).$$

Solución: Después de sustituir p por su definición en términos de u y d como funciones de n , expanda c_u y c_d en series de Taylor alrededor de $(e^{\sigma\sqrt{h}}S_t, t-h)$ y $(e^{-\sigma\sqrt{h}}S_t, t-h)$, respectivamente. Posteriormente, lleve a cabo otra expansión de $e^{\sigma\sqrt{h}}$, $e^{-\sigma\sqrt{h}}$ y e^h en series de Taylor hasta términos de orden $o(h)$. Por último, agrupe términos de manera conveniente, divida entre h y tome el límite cuando $h \rightarrow 0$.

25.5 En este ejercicio se desarrolla una fórmula de valuación de una opción cuando el subyacente presenta saltos. Defina

$$u > 1, \quad d = e^{\sigma(T-t)/n} \quad \text{y} \quad p = \lambda \left(\frac{T-t}{n} \right),$$

donde λ es una constante positiva y $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Demuestre que la fórmula de valuación de una opción europea de compra cuando el subyacente presenta saltos está dada por

$$c_t = S_t \Psi(m, b) - K e^{-r(T-t)} \Psi(m, b/u),$$

donde

$$\Psi(m, b) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{b^k e^{-b}}{k!},$$

$$b = \frac{(r-\sigma)u(T-t)}{u-1}$$

y m es el número natural más pequeño tal que

$$m > \frac{\ln(K/S_t) - \sigma(T-t)}{\ln u}.$$

V. OPCIONES CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

- 26. Modelo de Hull-White de opciones con volatilidad estocástica
 - 27. Modelo de Heston de opciones con volatilidad estocástica
 - 28. Valuación de opciones con información a priori sobre volatilidad

CAPÍTULO 26

EL MODELO DE HULL Y WHITE DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

Conceptos básicos de este capítulo:

- Volatilidad estocástica
- Valuación neutral al riesgo
- Varianza promedio
- Aproximación del precio de una opción mediante series de Taylor

26.1 Introducción

La volatilidad del precio de un activo subyacente no es constante ni es observable. Por lo tanto, requiere de un tratamiento adecuado en la valuación de productos derivados, ya que justamente en los mercados de opciones ésta es la variable que se negocia. La alternativa idónea es modelarla como un proceso estocástico. Este nuevo ingrediente en la valuación de opciones introduce complicaciones técnicas en el modelo básico de Black y Scholes (1973).

En este capítulo se presenta el modelo de Hull y White (1987) para valuar opciones cuando la volatilidad del activo subyacente es conducida por un movimiento geométrico Browniano. La fórmula desarrollada por Hull y White es una aproximación que contempla una serie de Taylor hasta términos de tercer orden.

26.2 Volatilidad como función conocida del tiempo

Si el precio de un activo subyacente sigue una distribución lognormal y su volatilidad instantánea es una función conocida del tiempo, σ_t , entonces el proceso neutral al riesgo que conduce dicho precio está dado por

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dU_t, \quad (26.1)$$

donde el parámetro de tendencia representa la tasa de interés libre de riesgo. El proceso $(U_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada, $(\Omega^U, \mathcal{F}^U, (\mathcal{F}_t^U)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P}^U)$. En este caso, la fórmula de Black-Scholes se modifica sustituyendo la varianza promedio en $[t, T]$,

$$\bar{\sigma}_{t,T}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_u^2 du, \quad (26.2)$$

por el parámetro de varianza. Desafortunadamente, casi nunca la volatilidad es una función conocida del tiempo. Por tal razón, en el transcurso del presente capítulo, se considerará a la volatilidad misma como un proceso estocástico; como ha sido propuesto en Hull y White (1987).

26.3 El modelo de Hull y White para valuar opciones con activos subyacentes de volatilidad estocástica

A continuación, bajo un conjunto de supuestos, se desarrolla una fórmula del precio de una opción europea de compra cuando la varianza del activo subyacente sigue un movimiento geométrico Browniano. Suponga, adicionalmente a (26.1), que

$$d\sigma_t^2 = \alpha \sigma_t^2 dt + \beta \sigma_t^2 dW_t, \quad (26.3)$$

donde el proceso $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada, $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \mathbb{F}^W, \mathbb{P}^W)$, $\mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$. Se supone además que

$$\text{Cov}(dU_t, dW_t) = 0,$$

es decir, la volatilidad no está correlacionada con el precio del activo. Defina ahora la volatilidad estocástica promedio

$$\bar{\sigma}_{t,T}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_u^2 du,$$

donde σ_u^2 es solución de la ecuación diferencial estocástica (26.3). Se verá, a continuación, que el precio de una opción europea de compra es el precio de Black-Scholes integrado sobre la distribución de probabilidad de la varianza estocástica promedio a lo largo de la vida de la opción. Es decir, el precio de una opción europea de compra, $c = c(S_t, \bar{\sigma}_{t,T}^2, t)$, en un mundo neutral al riesgo, satisface

$$\begin{aligned} c(S_t, \bar{\sigma}_{t,T}^2, t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{S_T|S_t, \bar{\sigma}_{t,T}^2} [\max(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t] \\ &= \int_0^\infty c_{\text{BS}}(S_t, t; \bar{\sigma}_{t,T}^2) h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2, \end{aligned} \quad (26.4)$$

donde c_{BS} es el precio de Black-Scholes con varianza $\bar{\sigma}_{t,T}^2$, h es la función de densidad de $\bar{\sigma}_{t,T}^2$, condicional en σ_t^2 , y $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^U \otimes \mathcal{F}_t^W$. En efecto, observe primero que, con algún abuso en la notación,

$$f(S_T|S_t, \bar{\sigma}_{t,T}^2) = \int_0^\infty g(S_T|S_t, \bar{\sigma}_{t,T}^2) h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2,$$

donde f , g y h son funciones de densidad condicionales. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} c(S_t, \bar{\sigma}_{t,T}^2, t) &= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(S_T - K, 0) f(S_T|S_t, \bar{\sigma}_{t,T}^2) dS_T \\ &= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \int_0^\infty \max(S_T - K, 0) g(S_T|S_t, \bar{\sigma}_{t,T}^2) h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2 dS_T \\ &= \int_0^\infty \left[e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(S_T - K, 0) g(S_T|S_t, \bar{\sigma}_{t,T}^2) dS_T \right] h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2. \end{aligned}$$

Ahora bien, bajo el supuesto de independencia entre el precio y la volatilidad del activo subyacente, es decir, $\text{Cov}(dU_t, dW_t) = 0$, se puede verificar que la distribución condicional de $\ln(S_T/S_t)$, dado $\bar{\sigma}_{t,T}^2$, es normal con media $(r - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_{t,T}^2)(T-t)$ y varianza $\bar{\sigma}_{t,T}^2(T-t)$. Por lo tanto, dicha distribución es consistente con el mundo normal de Black-Scholes. En consecuencia,

$$\begin{aligned} c_{\text{BS}}(S_t, t; \bar{\sigma}_{t,T}^2) &= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(S_T - K, 0) g(S_T|S_t, \bar{\sigma}_{t,T}^2) dS_T \\ &= S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_{t,T}^2)(T-t)}{\bar{\sigma}_{t,T} \sqrt{T-t}} \quad (26.5)$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_{t,T}^2)(T-t)}{\bar{\sigma}_{t,T} \sqrt{T-t}}.$$

Así,

$$c(S_t, \bar{\sigma}_{t,T}^2, t) = \int_0^\infty c_{\text{BS}}(S_t, t; \bar{\sigma}_{t,T}^2) h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2.$$

26.4 Método de aproximación

En esta sección se describe el método de aproximación que se utilizará para valuar una opción europea de compra cuando la varianza del precio del activo subyacente está dada por (26.3). Si se define la función

$$H(\bar{\sigma}_{t,T}^2) = c_{\text{BS}}(S_t, t; \bar{\sigma}_{t,T}^2)$$

y se calcula su expansión en series de Taylor alrededor de $E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] = \hat{\sigma}_{t,T}^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} H(\bar{\sigma}_{t,T}^2) &= H(\hat{\sigma}_{t,T}^2) + \frac{\partial H}{\partial \bar{\sigma}_{t,T}^2}(\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_{t,T}^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial (\bar{\sigma}_{t,T}^2)^2}(\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_{t,T}^2)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 H}{\partial (\bar{\sigma}_{t,T}^2)^3}(\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_{t,T}^2)^3 + \dots \end{aligned}$$

donde las derivadas parciales se evalúan en $\hat{\sigma}_{t,T}^2$. Si se multiplica la expresión anterior por $h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2)$ y se integra con respecto de $\bar{\sigma}_{t,T}^2$, se obtiene

$$c(S_t, \sigma_t^2, t) = H(\hat{\sigma}_{t,T}^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial (\bar{\sigma}_{t,T}^2)^2} \text{Var}[\bar{\sigma}_{t,T}^2] + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 H}{\partial (\bar{\sigma}_{t,T}^2)^3} \text{Sesgo}[\bar{\sigma}_{t,T}^2] + \dots$$

En las secciones siguientes se demostrará que si $\alpha = 0$ y β es pequeña se tiene la siguiente aproximación:

$$c(S_t, \sigma_t^2, t) = H(\sigma_t^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial (\sigma_t^2)^2} \text{Var}[\bar{\sigma}_{t,T}^2] + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 H}{\partial (\sigma_t^2)^3} \text{Sesgo}[\bar{\sigma}_{t,T}^2].$$

26.5 Cálculo de los momentos de la volatilidad estocástica promedio

De acuerdo a la sección anterior, es necesario calcular la media, varianza y sesgo de la volatilidad estocástica promedio. Para ello, se calculan los tres primeros momentos de $\bar{\sigma}_{t,T}^2$. En primer lugar, se puede demostrar que si $\alpha \neq 0$, entonces

$$E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] = \left(\frac{e^{\alpha(T-t)} - 1}{\alpha(T-t)} \right) \sigma_t^2.$$

En efecto, en virtud de (26.3), se sigue que

$$\sigma_u^2 = \sigma_t^2 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)(u-t) + \beta\sqrt{u-t}\varepsilon}, \quad u > t,$$

donde $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Por lo tanto,

$$\bar{\sigma}_{t,T}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_u^2 du = \frac{\sigma_t^2}{T-t} \int_t^T e^{(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)(u-t) + \beta\sqrt{u-t}\varepsilon} du.$$

Si se define el siguiente cambio de variable $y = u - t$, se cumple que

$$\bar{\sigma}_{t,T}^2 = \frac{\sigma_t^2}{T-t} \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)y + \beta\sqrt{y}\varepsilon} dy.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] &= \frac{\sigma_t^2}{T-t} E \left[\int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)y + \beta\sqrt{y}\varepsilon} dy \right] \\ &= \frac{\sigma_t^2}{T-t} \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)y} E[e^{\beta\sqrt{y}\varepsilon}] dy \\ &= \frac{\sigma_t^2}{T-t} \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)y} e^{\frac{1}{2}\beta^2 y} dy \\ &= \frac{\sigma_t^2}{T-t} \int_0^{T-t} e^{\alpha y} dy \\ &= \sigma_t^2 \left(\frac{e^{\alpha(T-t)} - 1}{\alpha(T-t)} \right). \end{aligned} \tag{26.6}$$

Asimismo, se puede demostrar que

$$E[\bar{\sigma}_{t,T}^4 | \sigma_t^2] = \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left[\frac{2e^{\gamma(T-t)}}{\phi\gamma} + \frac{2}{\alpha} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{e^{\alpha(T-t)}}{\phi} \right) \right],$$

donde $\gamma = 2\alpha + \beta^2$ y $\phi = \alpha + \beta^2$. En efecto, claramente,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{t,T}^4 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left(\int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)y + \beta W_y} dy \right)^2 \\ &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)y + \beta W_y} e^{(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)x + \beta W_x} dy dx. \end{aligned} \quad (26.7)$$

Observe ahora que si $x \leq y$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_y, W_x) &= \text{Cov}(W_y - W_x + W_x, W_x) \\ &= \text{Cov}(W_y - W_x, W_x - W_0) + \text{Cov}(W_x, W_x) \\ &= 0 + x = \min[x, y], \end{aligned} \quad (26.8)$$

ya que los incrementos $W_y - W_x$ y $W_x - W_0$ son estocásticamente independientes.

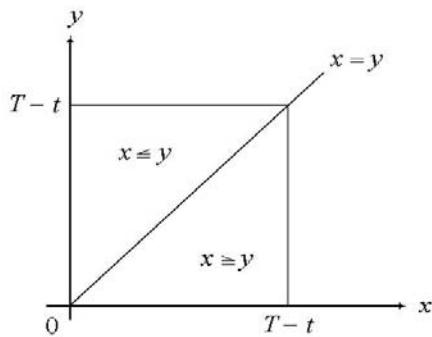


Figura 26.1 Región de integración en las variables x y y .

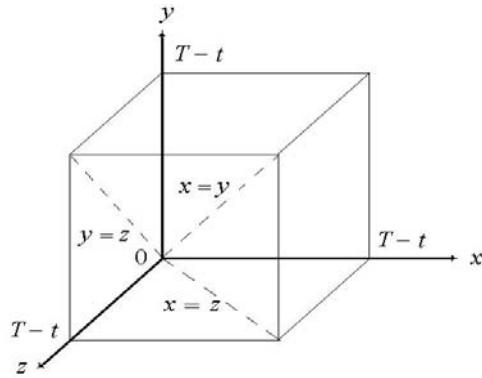
De acuerdo con la figura 26.1, la región de integración en la integral (26.7), $\mathcal{D} = [0, T-t] \times [0, T-t]$, se puede subdividir como $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, donde $\mathcal{D}_1 = \{0 \leq x \leq T-t, 0 \leq y \leq x\}$ y

$\mathcal{D}_2 = \{0 \leq x \leq T-t, x \leq y \leq T-t\}$. Así, en virtud de (26.8) se sigue que

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[\bar{\sigma}_{t,T}^4 | \sigma_t^2] \\
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)(y+x)} \mathbb{E}[e^{\beta(W_y + W_x)}] dy dx \\
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)(x+y)} e^{\frac{1}{2}\beta^2(y+x+2\min[y,x])} dy dx \\
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{\alpha(y+x)} e^{\beta^2 \min[y,x]} dy dx \\
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \left(\int_{y=0}^{y=x} e^{\alpha(y+x)} e^{\beta^2 \min[y,x]} dy \right. \\
 &\quad \left. + \int_{y=x}^{y=T-t} e^{\alpha(y+x)} e^{\beta^2 \min[y,x]} dy \right) dx \\
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \left(\int_{y=0}^{y=x} e^{\alpha(y+x)} e^{\beta^2 y} dy + \int_{y=x}^{y=T-t} e^{\alpha(y+x)} e^{\beta^2 x} dy \right) dx \\
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \left(e^{\alpha x} \int_{y=0}^{y=x} e^{(\alpha+\beta^2)y} dy + e^{(\alpha+\beta^2)x} \int_{y=x}^{y=T-t} e^{\alpha y} dy \right) dx \tag{26.9} \\
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \left[e^{\alpha x} \left(\frac{e^{\phi x} - 1}{\phi} \right) + e^{(\alpha+\beta^2)x} \left(\frac{e^{\alpha(T-t)} - e^{\alpha x}}{\alpha} \right) \right] dx \\
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \int_0^{T-t} \left[\left(\frac{e^{\gamma x} - e^{\alpha x}}{\phi} \right) + \left(\frac{e^{\alpha(T-t)} e^{\phi x} - e^{\gamma x}}{\alpha} \right) \right] dx \\
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left[\left(\frac{e^{\gamma(T-t)} - 1}{\gamma \phi} \right) - \left(\frac{e^{\alpha(T-t)} - 1}{\alpha \phi} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{e^{\gamma(T-t)} - e^{\alpha(T-t)}}{\phi \alpha} \right) - \left(\frac{e^{\gamma(T-t)} - 1}{\alpha \gamma} \right) \right] \\
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left[e^{\gamma(T-t)} \left(\frac{1}{\gamma \phi} + \frac{1}{\alpha \phi} - \frac{1}{\gamma \alpha} \right) + \left(\frac{1}{\alpha \phi} + \frac{1}{\gamma \alpha} - \frac{1}{\gamma \phi} \right) - \frac{2e^{\alpha(T-t)}}{\phi \alpha} \right] \\
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left(\frac{2e^{\gamma(T-t)}}{\phi \gamma} + \frac{2}{\alpha \gamma} - \frac{2e^{\alpha(T-t)}}{\phi \alpha} \right) \\
 &= \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left[\frac{2e^{\gamma(T-t)}}{\phi \gamma} + \frac{2}{\alpha} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{e^{\alpha(T-t)}}{\phi} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Por último, se calcula el tercer momento de la volatilidad promedio estocástica,

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[\bar{\sigma}_{t,T}^6 | \sigma_t^2] \\
 &= \frac{\sigma_t^6}{(T-t)^3} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)(y+x+z)} \mathbb{E}[e^{\beta(W_y + W_x + W_z)}] dy dx dz \\
 &= \frac{\sigma_t^6}{(T-t)^3} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{\alpha(x+y+z)} e^{\beta^2(\min[y,x]+\min[x,z]+\min[y,z])} dy dx dz. \tag{26.10}
 \end{aligned}$$

Figura 26.2. Región de integración en las variables x , y y z .

De acuerdo con la figura 26.2, las regiones de integración en que se divide el cubo $[0, T - t] \times [0, T - t] \times [0, T - t]$ son

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 : & \quad 0 \leq y \leq x \leq z \leq T - t, \\ \mathcal{G}_2 : & \quad 0 \leq z \leq x \leq y \leq T - t, \\ \mathcal{G}_3 : & \quad 0 \leq x \leq y \leq z \leq T - t, \\ \mathcal{G}_4 : & \quad 0 \leq z \leq y \leq x \leq T - t, \\ \mathcal{G}_5 : & \quad 0 \leq x \leq z \leq y \leq T - t, \\ \mathcal{G}_6 : & \quad 0 \leq y \leq z \leq x \leq T - t.\end{aligned}$$

Por lo tanto, en el caso particular $\alpha = 0$, la triple integral de (26.10) puede calcularse como

$$\begin{aligned}& \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{\beta^2(\min[y,x]+\min[x,z]+\min[y,z])} dx dy dz \\&= \int_0^{T-t} \int_0^z \int_y^z e^{\beta^2(2y+x)} dx dy dz + \int_0^{T-t} \int_0^y \int_z^y e^{\beta^2(2z+x)} dx dz dy \\&+ \int_0^{T-t} \int_0^z \int_x^z e^{\beta^2(2x+y)} dy dx dz + \int_0^{T-t} \int_0^x \int_z^x e^{\beta^2(2z+y)} dy dz dx \\&+ \int_0^{T-t} \int_0^y \int_x^y e^{\beta^2(2x+z)} dz dx dy + \int_0^{T-t} \int_0^x \int_y^x e^{\beta^2(2y+z)} dz dy dx,\end{aligned}\tag{26.11}$$

donde cada integral se calcula en su correspondiente región \mathcal{G}_i , $i = 1, 2, \dots, 6$. La primera integral

de (26.11) satisface

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T-t} \int_0^z \int_y^z e^{\beta^2(2y+x)} dx dy dz \\
&= \int_0^{T-t} \int_0^z e^{2\beta^2 y} \int_y^z e^{\beta^2 x} dx dy dz \\
&= \int_0^{T-t} \int_0^z e^{2\beta^2 y} \left(\frac{e^{\beta^2 z} - e^{\beta^2 y}}{\beta^2} \right) dy dz \\
&= \frac{1}{\beta^2} \int_0^{T-t} \left(e^{\beta^2 z} \int_0^z e^{2\beta^2 y} dy - \int_0^z e^{3\beta^2 y} dy \right) dz \\
&= \frac{1}{\beta^2} \int_0^{T-t} \left[e^{\beta^2 z} \left(\frac{e^{2\beta^2 z} - 1}{2\beta^2} \right) - \left(\frac{e^{3\beta^2 z} - 1}{3\beta^2} \right) \right] dz \\
&= \frac{1}{\beta^4} \int_0^{T-t} \left(\frac{e^{3\beta^2 z} - e^{\beta^2 z}}{2} - \frac{e^{3\beta^2 z} - 1}{3} \right) dz \\
&= \frac{1}{\beta^4} \int_0^{T-t} \left(\frac{3e^{3\beta^2 z} - 3e^{\beta^2 z} - 2e^{3\beta^2 z} + 2}{6} \right) dz \\
&= \frac{1}{6\beta^4} \int_0^{T-t} (e^{3\beta^2 z} - 3e^{\beta^2 z} + 2) dz \\
&= \frac{1}{6\beta^4} \left[\left(\frac{e^{3\beta^2(T-t)} - 1}{3\beta^2} \right) - 3 \left(\frac{e^{\beta^2(T-t)} - 1}{\beta^2} \right) + 2(T-t) \right] \\
&= \frac{1}{6\beta^6} \left(\frac{e^{3\beta^2(T-t)} - 1 - 9e^{\beta^2(T-t)} + 9 + 6\beta^2(T-t)}{3} \right) \\
&= \frac{e^{3\beta^2(T-t)} - 9e^{\beta^2(T-t)} + 6\beta^2(T-t) + 8}{18\beta^6}.
\end{aligned} \tag{26.12}$$

Es posible verificar que cada una de las integrales proporciona exactamente el mismo resultado (26.12). En consecuencia, cuando $\alpha = 0$,

$$E[\bar{\sigma}_{t,T}^6 | \sigma_t^2] = \frac{\sigma_t^6}{(T-t)^3} \left[\frac{e^{3\beta^2(T-t)} - 9e^{\beta^2(T-t)} + 6\beta^2(T-t) + 8}{3\beta^6} \right]. \tag{26.13}$$

Observe ahora que si $\alpha = 0$, se sigue de (26.6), (26.9) y (26.13), utilizando la regla de L'Hopital, que

$$E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] = \sigma_t^2, \tag{26.14}$$

ya que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha(T-t)} - 1}{\alpha(T-t)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (T-t) e^{\alpha(T-t)} = 1.$$

De igual manera, de (26.9), se tiene que

$$E[\bar{\sigma}_{t,T}^4 | \sigma_t^2] = \frac{\sigma_t^4}{(T-t)^2} \left[\frac{2(e^{\beta^2(T-t)} - \beta^2(T-t) - 1)}{\beta^4} \right], \tag{26.15}$$

puesto que

$$\begin{aligned}
& \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2}{\alpha} \left(\frac{1}{2\alpha + \beta^2} - \frac{e^{\alpha(T-t)}}{\alpha + \beta^2} \right) \\
&= 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{(2\alpha + \beta^2)^2} - \frac{(\alpha + \beta^2)(T-t)e^{\alpha(T-t)} - e^{\alpha(T-t)}}{(\alpha + \beta^2)^2} \right) \\
&= -2 \left(\frac{\beta^2(T-t) + 1}{\beta^4} \right)
\end{aligned} \tag{26.16}$$

y, en virtud de (26.13),

$$E[\bar{\sigma}_{t,T}^6 | \sigma_t^2] = \frac{\sigma_t^6}{(T-t)^3} \left[\frac{e^{3\beta^2(T-t)} - 9e^{\beta^2(T-t)} + 6\beta^2(T-t) + 8}{3\beta^6} \right].$$

Así, cuando $\alpha = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Var}[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] &= E[\bar{\sigma}_{t,T}^4 | \sigma_t^2] - (E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2])^2 \\ &= \sigma_t^4 \left[\frac{2(e^{\beta^2(T-t)} - \beta^2(T-t) - 1)}{\beta^4(T-t)^2} - 1 \right] \end{aligned} \quad (26.17)$$

y

$$\begin{aligned} \text{Sesgo}[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] &= E[(\bar{\sigma}_{t,T}^2 - E[\bar{\sigma}_{t,T}^2])^3 | \sigma_t^2] \\ &= E[\bar{\sigma}_{t,T}^6 | \sigma_t^2] - 3E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2]E[\bar{\sigma}_{t,T}^4 | \sigma_t^2] + 2(E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2])^3 \\ &= E[\bar{\sigma}_{t,T}^6 | \sigma_t^2] - 3\sigma_t^2 E[\bar{\sigma}_{t,T}^4 | \sigma_t^2] + 2\sigma_t^6 \\ &= \sigma_t^6 \left[\frac{e^{3\beta^2(T-t)} - 9e^{\beta^2(T-t)} + 6\beta^2(T-t) + 8}{3\beta^6(T-t)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6(e^{\beta^2(T-t)} - \beta^2(T-t) - 1)}{\beta^4(T-t)^2} + 2 \right] \\ &= \sigma_t^6 \left[\frac{e^{3\beta^2(T-t)} - (9 + 18\beta^2(T-t))e^{\beta^2(T-t)} + 6\beta^2(T-t)}{3\beta^6(T-t)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{8 + 18\beta^4(T-t)^2 + 6\beta^6(T-t)^3 + 18\beta^2(T-t)}{3\beta^6(T-t)^3} \right]. \end{aligned} \quad (26.18)$$

Si, por simplicidad, se escribe

$$\kappa = \beta^2(T-t),$$

se sigue, de (26.17) y (26.18), que

$$\text{Var}[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] = \sigma_t^4 \left[\frac{2(e^\kappa - \kappa - 1)}{\kappa^2} - 1 \right] \quad (26.19)$$

y

$$\text{Sesgo}[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] = \sigma_t^6 \left[\frac{e^{3\kappa} - (9 + 18\kappa)e^\kappa + 8 + 24\kappa + 18\kappa^2 + 6\kappa^3}{3\kappa^3} \right]. \quad (26.20)$$

26.6 Aproximación del precio de una opción con series de Taylor

Recuerde que el precio de una opción europea de compra, con varianza promedio estocástica, es

$$c(S_t, \sigma_t^2, t) = \int_0^\infty c_{\text{BS}}(S_t, t; \bar{\sigma}_{t,T}^2) h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2) d\bar{\sigma}_{t,T}^2.$$

La expansión en serie de Taylor de $c_{\text{BS}}(S_t, t; \bar{\sigma}_{t,T}^2)$ alrededor de $\hat{\sigma}_{t,T}^2 = E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2]$ está dada por

$$\begin{aligned} c_{\text{BS}}(S_t, t; \bar{\sigma}_{t,T}^2) &= c_{\text{BS}}(S_t, t; \hat{\sigma}_{t,T}^2) + \frac{\partial c_{\text{BS}}(S_t, t; \hat{\sigma}_{t,T}^2)}{\partial \bar{\sigma}_{t,T}^2} (\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_{t,T}^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_{\text{BS}}(S_t, t; \hat{\sigma}_{t,T}^2)}{\partial (\bar{\sigma}_{t,T}^2)^2} (\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_{t,T}^2)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 c_{\text{BS}}(S_t, t; \hat{\sigma}_{t,T}^2)}{\partial (\bar{\sigma}_{t,T}^2)^3} (\bar{\sigma}_{t,T}^2 - \hat{\sigma}_{t,T}^2)^3 + \dots \end{aligned} \quad (26.21)$$

La notación en las derivadas parciales anteriores significa que primero se calculan las derivadas y después se evalúan en el punto $\bar{\sigma}_{t,T}^2$. Si se multiplica (26.21) por la densidad $h(\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2)$ y después se integra el resultado, en virtud de (26.4) se obtiene que

$$\begin{aligned} c(S_t, \sigma_t^2, t) &= c_{\text{BS}}(S_t, t; \bar{\sigma}_{t,T}^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_{\text{BS}}(S_t, t; \bar{\sigma}_{t,T}^2)}{\partial (\bar{\sigma}_{t,T}^2)^2} \text{Var}[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 c_{\text{BS}}(S_t, t; \bar{\sigma}_{t,T}^2)}{\partial (\bar{\sigma}_{t,T}^2)^3} \text{Sesgo}[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] + \dots \end{aligned} \quad (26.22)$$

Si $\alpha = 0$, entonces $\hat{\sigma}_{t,T}^2 = \sigma_t^2$. Además, si en las derivadas de (26.22) se sustituye $\bar{\sigma}_{t,T}^2$ por σ_t^2 el resultado que se obtiene cuando se calculan las derivadas con respecto de $\bar{\sigma}_{t,T}^2$ y después se evalúan en el punto $\sigma_{t,T}^2$, es el mismo. Si ahora se utilizan (26.19) y (26.20), se tiene que

$$\begin{aligned} c(S_t, \sigma_t^2, t) &= c_{\text{BS}}(S_t, t; \sigma_t^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_{\text{BS}}(S_t, t; \sigma_t^2)}{\partial (\sigma_t^2)^2} \left[\frac{2(e^\kappa - \kappa - 1)}{\kappa^2} - 1 \right] \sigma_t^4 \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 c_{\text{BS}}(S_t, t; \sigma_t^2)}{\partial (\sigma_t^2)^3} \left[\frac{e^{3\kappa} - (9 + 18\kappa)e^\kappa + 8 + 24\kappa + 18\kappa^2 + 6\kappa^3}{3\kappa^3} \right] \sigma_t^6 + \dots \end{aligned} \quad (26.23)$$

A continuación se calculan las derivadas parciales en (26.23). Observe, primero, que si

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma_t^2)(T-t)}{\sqrt{\sigma_t^2(T-t)}},$$

entonces

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} = \frac{1}{2\sigma_t^2} \left(\sqrt{\sigma_t^2(T-t)} - d_1 \right) = -\frac{d_2}{2\sigma_t^2}. \quad (26.24)$$

Dado que $d_2 = d_1 - \sqrt{\sigma_t^2(T-t)}$, se concluye que

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_t^2} &= \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} - \frac{T-t}{2\sqrt{\sigma_t^2(T-t)}} \\ &= -\frac{d_2}{2\sigma_t^2} - \frac{T-t}{2\sqrt{\sigma_t^2(T-t)}} \\ &= -\frac{1}{2\sigma_t^2} \left(\sqrt{\sigma_t^2(T-t)} + d_2 \right) \\ &= -\frac{d_1}{2\sigma_t^2}. \end{aligned} \quad (26.25)$$

Observe que las siguientes identidades son válidas:

$$d_1 \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} = d_2 \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_t^2} = -\frac{d_1 d_2}{2\sigma_t^2}, \quad (26.26)$$

$$d_1 \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_t^2} + d_2 \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} = -\frac{d_1^2 + d_2^2}{2\sigma_t^2} \quad (26.27)$$

y

$$(d_1 + d_2) \left(\frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} + \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_t^2} \right) = -\frac{(d_1 + d_2)^2}{2\sigma_t^2}. \quad (26.28)$$

Ahora bien, de acuerdo con la definición de c_{BS} se sigue que

$$\frac{\partial c_{\text{BS}}}{\partial \sigma_t^2} = S_t \Phi'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_t^2},$$

y

$$0 = S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2).$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{\text{BS}}}{\partial \sigma_t^2} &= S_t \Phi'(d_1) \left(\frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_t^2} \right) \\ &= S_t \Phi'(d_1) \frac{T-t}{2\sqrt{\sigma_t^2(T-t)}}. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{\partial^2 c_{\text{BS}}}{\partial (\sigma_t^2)^2} = S \Phi''(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} \frac{T-t}{2\sqrt{\sigma_t^2(T-t)}} - S_t \Phi'(d_1) \frac{(T-t)^2}{4[\sigma_t^2(T-t)]^{\frac{3}{2}}}. \quad (26.29)$$

Al utilizar el hecho de que $\Phi''(d_1) = -\Phi'(d_1)d_1$ y debido a (26.26), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c_{\text{BS}}}{\partial (\sigma_t^2)^2} &= -S_t \Phi'(d_1) d_1 \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} \frac{T-t}{2\sqrt{\sigma_t^2(T-t)}} - S_t \Phi'(d_1) \frac{(T-t)^2}{4[\sigma_t^2(T-t)]^{\frac{3}{2}}} \\ &= S_t \Phi'(d_1) \left(\frac{d_1 d_2}{2\sigma_t^2} \right) \left(\frac{T-t}{2\sqrt{\sigma_t^2(T-t)}} \right) - S_t \Phi'(d_1) \frac{(T-t)^2}{4[\sigma_t^2(T-t)]^{\frac{3}{2}}} \\ &= S_t \Phi'(d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} (d_1 d_2 - 1). \end{aligned} \quad (26.30)$$

Observe también que por (26.28) y (26.29)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 c_{\text{BS}}}{\partial (\sigma_t^2)^3} &= S_t \Phi''(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} (d_1 d_2 - 1) + S_t \Phi'(d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} \left(d_1 \frac{\partial d_2}{\partial \sigma_t^2} + d_2 \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} \right) \\ &\quad - 3S_t \Phi'(d_1) (d_1 d_2 - 1) \frac{\sqrt{T-t}}{8\sigma_t^5} \\ &= -S_t \Phi'(d_1) d_1 \frac{\partial d_1}{\partial \sigma_t^2} \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} (d_1 d_2 - 1) - S_t \Phi'(d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} \left(\frac{d_1^2 + d_2^2}{2\sigma_t^2} \right) \\ &\quad - 3S_t \Phi'(d_1) (d_1 d_2 - 1) \frac{\sqrt{T-t}}{8\sigma_t^5} \\ &= S_t \Phi'(d_1) \left(\frac{d_1 d_2}{2\sigma_t^2} \right) \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} (d_1 d_2 - 1) - S_t \Phi'(d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{8\sigma_t^5} (d_1^2 + d_2^2) \\ &\quad - 3S_t \Phi'(d_1) (d_1 d_2 - 1) \frac{\sqrt{T-t}}{8\sigma_t^5} \\ &= S_t \Phi'(d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{8\sigma_t^5} [(d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 + d_2^2)]. \end{aligned} \quad (26.31)$$

Se concluye a partir de (26.23), (26.30) y (26.31) que

$$\begin{aligned} c(S_t, \sigma_t^2, t) &= c_{\text{BS}}(S_t, t; \sigma_t^2) + \frac{1}{2} \left(S_t \Phi'(d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{4\sigma_t^3} (d_1 d_2 - 1) \right) \\ &\quad \times \left(\frac{2(e^\kappa - \kappa - 1)}{\kappa^2} - 1 \right) \sigma_t^4 \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(S_t \Phi'(d_1) \frac{\sqrt{T-t}}{8\sigma_t^5} [(d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 + d_2^2)] \right) \\ &\quad \times \left(\frac{e^{3\kappa} - (9 + 18\kappa) e^\kappa + 8 + 24\kappa + 18\kappa^2 + 6\kappa^3}{3\kappa^3} \right) \sigma_t^6 + \dots \end{aligned} \quad (26.32)$$

Para valores pequeños de κ la serie converge rápidamente. Por lo tanto, se puede escribir, para $\alpha = 0$ (o bien α muy pequeña) y κ suficientemente pequeña

$$\begin{aligned} c(S_t, \sigma_t^2, t) \approx & c_{\text{BS}}(S_t, t; \sigma_t^2) + \frac{1}{8} \left(S_t \Phi'(d_1) \sqrt{T-t} \sigma_t (d_1 d_2 - 1) \right) A(\kappa) \\ & + \frac{1}{48} \left(S_t \Phi'(d_1) \sqrt{T-t} \sigma_t [(d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 + d_2^2)] \right) B(\kappa), \end{aligned}$$

donde

$$A(\kappa) = \frac{2(e^\kappa - \kappa - 1)}{\kappa^2} - 1,$$

$$B(\kappa) = \frac{e^{3\kappa} - (9 + 18\kappa) e^\kappa + 8 + 24\kappa + 18\kappa^2 + 6\kappa^3}{3\kappa^3}$$

y

$$\kappa = \beta^2(T-t).$$

26.7 Limitaciones y ventajas del modelo de Hull y White de volatilidad estocástica

Claramente, el hecho de que la dinámica de la volatilidad no presenta reversión a la media podría ser una desventaja. Es importante mencionar al respecto que en Scott (1987) se examina el caso en que la volatilidad presenta reversión a la media. Por otro lado, en la fórmula de valuación obtenida, (26.32), $\alpha = 0$ es un supuesto simplificador. La fórmula para $\alpha > 0$, que seguramente es más complicada, puede ser obtenida con un poco más de esfuerzo algebraico. Por supuesto, existen varias generalizaciones en la literatura sobre el modelo de Hull y White; por ejemplo, Heston (1993) y Venegas-Martínez (2005).

26.8 Bibliografía sugerida

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Heston, S. I. (1993). "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options". *Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2, pp. 327-343.
- Hull, J. C. and White, A. (1987). "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility". *Journal of Finance*, Vol. 42, No. 2, pp. 281-300.
- Scott L. O. (1987). "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 22, No. 4, pp. 419-438.
- Venegas-Martínez, F. (2005). "Bayesian Inference, Prior Information on Volatility, and Option Pricing: A Maximum Entropy Approach". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 8, No. 1, pp. 1-12.

26.9 Ejercicios

26.1 Demuestre que

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{\beta^2 \min[y,x]} dy dx \\ &= \int_0^{T-t} \int_{x=0}^{x=y} e^{\beta^2 x} dx dy + \int_0^{T-t} \int_{y=0}^{y=x} e^{\beta^2 y} dy dx \\ &= \frac{2e^{\gamma(T-t)}}{\phi\gamma} + \frac{2}{\alpha} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{e^{\alpha(T-t)}}{\phi} \right), \end{aligned}$$

donde $\gamma = 2\alpha + \beta^2$ y $\phi = \alpha + \beta^2$.

26.2 Si $\alpha = 0$, demuestre utilizando la propiedad de martingala del proceso

$$\sigma_u^2 = \sigma_t^2 e^{-\frac{1}{2}\beta^2(u-t)+\beta W_{u-t}}, \quad u > t,$$

que

$$E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] = \sigma_t^2.$$

Solución:

$$\begin{aligned} E[\bar{\sigma}_{t,T}^2 | \sigma_t^2] &= \frac{1}{T-t} \int_0^{T-t} E[\sigma_u^2 | \sigma_t^2] du \\ &= \frac{1}{T-t} \int_0^{T-t} \sigma_t^2 du \\ &= \sigma_t^2. \end{aligned}$$

26.3 Demuestre que si

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 : \quad &0 \leq y \leq x \leq z \leq T-t, \\ \mathcal{G}_2 : \quad &0 \leq z \leq x \leq y \leq T-t, \\ \mathcal{G}_3 : \quad &0 \leq x \leq y \leq z \leq T-t, \\ \mathcal{G}_4 : \quad &0 \leq z \leq y \leq x \leq T-t, \\ \mathcal{G}_5 : \quad &0 \leq x \leq z \leq y \leq T-t, \\ \mathcal{G}_6 : \quad &0 \leq y \leq z \leq x \leq T-t, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} &\int_0^{T-t} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{\beta^2(\min[y,x]+\min[x,z]+\min[y,z])} dx dy dz \\ &= \int_0^{T-t} \int_y^{T-t} \int_y^z e^{\beta^2(2y+x)} dx dz dy + \int_0^{T-t} \int_z^{T-t} \int_z^y e^{\beta^2(2z+x)} dx dy dz \\ &\quad + \int_0^{T-t} \int_x^{T-t} \int_x^z e^{\beta^2(2x+y)} dy dz dx + \int_0^{T-t} \int_z^{T-t} \int_z^x e^{\beta^2(2z+y)} dy dx dz \\ &\quad + \int_0^{T-t} \int_x^{T-t} \int_x^y e^{\beta^2(2x+z)} dz dy dx + \int_0^{T-t} \int_y^{T-t} \int_y^x e^{\beta^2(2y+z)} dz dx dy \\ &= \frac{e^{3\beta^2(T-t)} - 9e^{\beta^2(T-t)} + 6\beta^2(T-t) + 8}{3\beta^6}. \end{aligned}$$

Solución: Observe, por ejemplo, que la tercera integral satisface

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T-t} \int_x^{T-t} \int_x^z e^{\beta^2(2x+y)} dy dz dx \\
&= \int_0^{T-t} e^{2\beta^2 x} \int_x^{T-t} \int_x^z e^{\beta^2 y} dy dz dx \\
&= \int_0^{T-t} e^{2\beta^2 x} \int_x^{T-t} \left(\frac{e^{\beta^2 z} - e^{\beta^2 x}}{\beta^2} \right) dz dx \\
&= \frac{1}{\beta^2} \int_0^{T-t} e^{2\beta^2 x} \left(\frac{e^{\beta^2(T-t)} - e^{\beta^2 x}}{\beta^2} - e^{\beta^2 x}(T-t-x) \right) dx \\
&= \frac{1}{\beta^4} \int_0^{T-t} \left(e^{\beta^2(T-t)} e^{2\beta^2 x} - e^{3\beta^2 x} - e^{3\beta^2 x} \beta^2 (T-t-x) \right) dx \\
&= \frac{1}{\beta^4} \int_0^{T-t} \left[e^{\beta^2(T-t)} e^{2\beta^2 x} - (1 + \beta^2(T-t)) e^{3\beta^2 x} + x e^{3\beta^2 x} \right] dx \\
&= \frac{1}{\beta^4} \left[e^{\beta^2(T-t)} \left(\frac{e^{2\beta^2(T-t)} - 1}{2\beta^2} \right) - (1 + \beta^2(T-t)) \left(\frac{e^{3\beta^2(T-t)} - 1}{3\beta^2} \right) \right] \\
&\quad + \beta^2 \int_0^{T-t} x e^{3\beta^2 x} dx \\
&= \frac{1}{\beta^4} \left[e^{\beta^2(T-t)} \left(\frac{e^{2\beta^2(T-t)} - 1}{2\beta^2} \right) - (1 + \beta^2(T-t)) \left(\frac{e^{3\beta^2(T-t)} - 1}{3\beta^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + (T-t) \frac{e^{3\beta^2(T-t)} - e^{3\beta^2(T-t)}}{3} - \frac{e^{3\beta^2(T-t)} - 1}{9\beta^2} \right] \\
&= \frac{1}{\beta^6} \left[\frac{e^{3\beta^2(T-t)} - e^{\beta^2(T-t)}}{2} - \frac{e^{3\beta^2(T-t)} - 1}{3} + \frac{\beta^2(T-t)}{3} - \frac{e^{3\beta^2(T-t)} - 1}{9} \right] \\
&= \frac{1}{\beta^6} \left[\frac{9e^{3\beta^2(T-t)} - 9e^{\beta^2(T-t)} - 6e^{3\beta^2(T-t)} + 6 + 6\beta^2(T-t) - 2e^{3\beta^2(T-t)} + 2}{18} \right] \\
&= \frac{1}{\beta^6} \left[\frac{e^{3\beta^2(T-t)} - 9e^{\beta^2(T-t)} + 6\beta^2(T-t) + 8}{18} \right].
\end{aligned}$$

26.4 Demuestre que

$$\begin{aligned}
& E[\bar{\sigma}^6 | \sigma_t^2] \\
&= \frac{\sigma_t^6}{(T-t)^3} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{\alpha(x+y+z)} e^{\beta^2(\min[y,x]+\min[x,z]+\min[y,z])} dy dx dz \\
&= \frac{2\sigma_t^6 e^{-3(T-t)(\alpha+\beta^2)}}{(T-t)^3} \left(-2\alpha^2 + 2e^{3(T-t)(\alpha+\beta^2)}\alpha^2 + 6e^{(T-t)(\alpha+2\beta^2)}\alpha^2 - \alpha\beta^2 \right. \\
&\quad \left. + 7e^{3(T-t)(\alpha+\beta^2)}\alpha\beta^2 + 9e^{(T-t)(\alpha+2\beta^2)}\alpha\beta^2 + 6e^{3(T-t)(\alpha+\beta^2)}\beta^4 \right. \\
&\quad \left. - 3e^{(T-t)(2\alpha+3\beta^2)}(2\alpha + \beta^2)(\alpha + 2\beta^2) \right) / \alpha(\alpha + \beta^2)(2\alpha + \beta^2)(\alpha + 2\beta^2)(2\alpha + 3\beta^2).
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 27

EL MODELO DE HESTON DE VALUACIÓN DE OPCIONES CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

Conceptos básicos de este capítulo:

- Volatilidad estocástica
- Proceso de Ornstein-Uhlenbeck
- Proceso de Cox, Ingersoll y Ross
- Opciones sobre acciones con volatilidad estocástica
- Probabilidades neutrales al riesgo
- Función característica

27.1 Introducción

En este capítulo se presenta una metodología para valuar una opción sobre una acción con volatilidad estocástica desarrollada por Steven I. Heston en su artículo “A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility” publicado en el *Review of Financial Studies* en 1993. Un aspecto relevante en la propuesta de Heston es que obtiene las funciones características de las probabilidades neutrales al riesgo como soluciones de una ecuación diferencial parcial de segundo orden. A través de estas probabilidades neutrales al riesgo se obtiene una fórmula similar a la de Black y Scholes (1972) para valuar una opción europea de compra.

27.2 Dinámica estocástica de la volatilidad

A continuación se especifica la dinámica estocástica que conduce a la volatilidad en el modelo Heston. Suponga que el precio actual, S_t , de una acción sigue un proceso de la forma

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \quad (27.1)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma_t > 0$ y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}^W)$. Suponga además que la volatilidad instantánea, σ_t , del precio de la acción sigue un proceso del tipo Ornstein-Uhlenbeck, es decir,

$$d\sigma_t = -\beta\sigma_t dt + \delta dU_t, \quad (27.2)$$

donde $\{U_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre $(\Omega^U, \mathcal{F}^U, \{\mathcal{F}_t^U\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}^U)$. Se supone que los procesos dW_t y dU_t se encuentran correlacionados entre sí, de tal manera que

$$\text{Cov}(dW_t, dU_t) = \rho dt.$$

En este caso, el lema de Itô aplicado a σ_t^2 conduce a

$$d\sigma_t^2 = (\delta^2 - 2\beta\sigma_t^2) dt + 2\delta\sigma_t dU_t, \quad (27.3)$$

lo cual puede ser escrito de manera similar al proceso de Cox, Ingersoll y Ross como

$$d\sigma_t^2 = a(b - \sigma_t^2) dt + \gamma\sigma_t dU_t, \quad (27.4)$$

donde los nuevos parámetros están definidos por

$$a = 2\beta, \quad b = \frac{\delta^2}{2\beta} \quad \text{y} \quad \gamma = 2\delta. \quad (27.5)$$

Como puede observarse, en la propuesta de Heston, si la volatilidad del activo subyacente es conducida por un proceso del tipo de Ornstein-Uhlenbeck, entonces la varianza será guiada por un proceso del tipo Cox, Ingersoll y Ross (1985).

27.3 Ecuación diferencial parcial del precio de una opción sobre una acción con volatilidad estocástica

Se supone la existencia de un mercado de crédito en donde los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante y libre de riesgo (crédito) r ; por ejemplo un sistema bancario con tasas pasiva y activa igual a r . Hasta ahora, los supuestos son insuficientes para valuar una opción ya que todavía no se hace algún supuesto sobre el precio del riesgo de volatilidad. A través de argumentos típicos de arbitraje se demuestra que el valor de una opción europea de compra sobre una acción, $c(S_t, \sigma_t^2, t)$, debe satisfacer la ecuación diferencial parcial

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \rho\gamma\sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial (\sigma_t^2)^2} + rS_t \frac{\partial c}{\partial S_t} \\ + [a(b - \sigma_t^2) - \lambda(S_t, \sigma_t^2, t)\gamma\sigma_t^2] \frac{\partial c}{\partial \sigma_t^2} - rc = 0. \end{aligned} \quad (27.6)$$

El término no especificado $\lambda(S_t, \sigma_t^2, t)$ representa el precio del riesgo por volatilidad. En general, se cuenta con evidencia empírica de que dicho término es distinto de cero para opciones sobre diversos subyacentes.

Con el propósito de obtener la ecuación (27.6), observe primero que si $c = c(S_t, \sigma_t^2, t)$, entonces el lema de Itô conduce a

$$\begin{aligned} dc = & \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \mu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial (\sigma_t^2)^2} + a(b - \sigma_t^2) \frac{\partial c}{\partial \sigma_t^2} \right. \\ & \left. + \rho\gamma\sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma_t S_t dW_t + \frac{\partial c}{\partial \sigma_t^2} \gamma \sigma_t dU_t. \end{aligned} \quad (27.7)$$

Si se considera ahora un portafolio con w_0 unidades de la acción y w_1 y w_2 unidades de dos opciones sobre la acción con diferentes fechas de vencimiento, T_1 y T_2 , de precios $c_1 = c(S_t, \sigma_t^2, t; T_1)$ y $c_2 = c(S_t, \sigma_t^2, t; T_2)$, entonces el valor del portafolio está dado por

$$\Pi_t^{(w)} = w_0 S_t + w_1 c(T_1) + w_2 c(T_2).$$

El cambio en el valor del portafolio se calcula mediante

$$\begin{aligned} d\Pi_t^{(w)} = & w_0 dS_t + w_1 dc_1 + w_2 dc_2 \\ = & \left(w_0 + w_1 \frac{\partial c_1}{\partial S_t} + w_2 \frac{\partial c_2}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt + \left(w_0 + w_1 \frac{\partial c_1}{\partial S_t} + w_2 \frac{\partial c_2}{\partial S_t} \right) \sigma_t S_t dW_t \\ & + \left(w_1 \frac{\partial c_1}{\partial \sigma_t^2} + w_2 \frac{\partial c_2}{\partial \sigma_t^2} \right) a(b - \sigma_t^2) dt + \left(w_1 \frac{\partial c_1}{\partial \sigma_t^2} + w_2 \frac{\partial c_2}{\partial \sigma_t^2} \right) \gamma \sigma_t dU_t \\ & + w_1 \left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial (\sigma_t^2)^2} + \rho\gamma\sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c_1}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} \right) dt \\ & + w_2 \left(\frac{\partial c_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial (\sigma_t^2)^2} + \rho\gamma\sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c_2}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} \right) dt. \end{aligned}$$

Si se eligen $w_2 = 1$ y $w_1 = -(\partial c_2 / \partial \sigma_t^2) / (\partial c_1 / \partial \sigma_t^2)$, el coeficiente del factor de riesgo dU_t se anula. Si además se elige

$$w_0 = \frac{\frac{\partial c_2}{\partial \sigma_t^2}}{\frac{\partial c_1}{\partial \sigma_t^2}} \left(\frac{\partial c_1}{\partial S_t} \right) - \frac{\partial c_2}{\partial S_t},$$

se anula el coeficiente de dW_t . En consecuencia, bajo esta selección de w_0 , w_1 y w_2 , el cambio de valor en el portafolio está dado por

$$\begin{aligned} d\Pi_t^{(w)} = & -\frac{\frac{\partial c_2}{\partial \sigma_t^2}}{\frac{\partial c_1}{\partial \sigma_t^2}} \left(\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c_1}{\partial (\sigma_t^2)^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c_1}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} \right) dt \\ & + \left(\frac{\partial c_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial (\sigma_t^2)^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c_2}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} \right) dt. \end{aligned}$$

Consideré ahora la inversión alternativa en donde se hace un depósito en el banco, de monto $\Pi_t^{(w)}$, que paga una tasa de interés r , el rendimiento está dado por

$$d\Pi_t^{(r)} = \left(-\frac{\partial c_2}{\partial S_t} S_t + c_2 \right) r dt - \frac{\frac{\partial c_2}{\partial \sigma_t^2}}{\frac{\partial c_1}{\partial \sigma_t^2}} \left(-\frac{\partial c_1}{\partial S_t} S_t + c_1 \right) r dt.$$

Si los mercados están en equilibrio, entonces no existen oportunidades de arbitraje, es decir, si existen inversiones alternativas, entonces producen exactamente el mismo rendimiento. Así, la condición $d\Pi_t^{(w)} = d\Pi_t^{(r)}$ conduce a que el cociente

$$\frac{\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial (\sigma_t^2)^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} - rc}{\frac{\partial c}{\partial \sigma_t^2}}$$

es independiente de la fecha de vencimiento y, por lo tanto, igual a una función $m(S_t, \sigma_t^2, t)$.

27.4 Determinación del premio al riesgo por volatilidad

La ecuación (27.7) obtenida a través del lema de Itô se puede escribir de manera equivalente como:

$$dc = \mu_c(S_t, \sigma_t^2, t)c + \sigma_c(S_t, \sigma_t^2, t)cdW_t + \xi_c(S_t, \sigma_t^2, t)cdU_t, \quad (27.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_c = & \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \mu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial (\sigma_t^2)^2} \right. \\ & \left. + a(b - \sigma_t^2) \frac{\partial c}{\partial \sigma_t^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} \right) / c, \\ \sigma_c(S_t, \sigma_t^2, t) = & \left(\frac{\sigma_t S_t}{c} \right) \frac{\partial c}{\partial S_t} \end{aligned}$$

y

$$\xi_c(S_t, \sigma_t^2, t) = \left(\frac{\gamma \sigma_t}{c} \right) \frac{\partial c}{\partial \sigma_t^2}.$$

Consideré ahora el valor de un portafolio

$$\Pi_t = \theta_0 S_t + \theta_1 c_1 + \theta_2 c_2. \quad (27.9)$$

Si las cantidades θ_0 , θ_1 y θ_2 no se modifican ante variaciones en el mercado, entonces

$$d\Pi_t = \theta_0 dS_t + \theta_1 dc_1 + \theta_2 dc_2. \quad (27.10)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & (\theta_0 \mu S_t + \theta_1 \mu_1 c_1 + \theta_2 \mu_2 c_2) dt \\ & + (\theta_0 \sigma S_t + \theta_1 \sigma_1 c_1 + \theta_2 \sigma_2 c_2) dW_t \\ & + (\theta_1 \xi_1 c_1 + \theta_2 \xi_2 c_2) dU_t, \end{aligned} \quad (27.11)$$

donde $\mu_i = \mu_{c_i}$, $\sigma_i = \sigma_{c_i}$, $\xi_i = \xi_{c_1}$, $i = 1, 2$. Si se eligen

$$\theta_1 = \frac{\xi_2}{c_1(\xi_1\sigma_2 - \xi_2\sigma_1)}$$

y

$$\theta_2 = -\frac{\xi_1}{c_2(\xi_1\sigma_2 - \xi_2\sigma_1)},$$

el coeficiente del factor de riesgo dU_t se anula. Por otro lado, si se elige

$$\theta_0 = \frac{\sigma_2\xi_1}{\sigma_t S_t(\xi_1\sigma_2 - \xi_2\sigma_1)} - \frac{\sigma_1\xi_2}{\sigma_t S_t(\xi_1\sigma_2 - \xi_2\sigma_1)} = \frac{1}{\sigma S_t},$$

el coeficiente de dW_t se anula. Así,

$$d\Pi_t = \left(\frac{\mu}{\sigma_t} + \frac{\xi_2\mu_1}{(\xi_1\sigma_2 - \xi_2\sigma_1)} - \frac{\xi_1\mu_2}{(\xi_1\sigma_2 - \xi_2\sigma_1)} \right) dt. \quad (27.12)$$

Si la expresión anterior se iguala con el rendimiento libre de riesgo de una cuenta en el banco

$$\Pi_t r dt = \left(\frac{1}{\sigma_t} + \frac{\xi_2}{(\xi_1\sigma_2 - \xi_2\sigma_1)} - \frac{\xi_1}{(\xi_1\sigma_2 - \xi_2\sigma_1)} \right) r dt,$$

se tiene que

$$\left(\frac{\sigma_2}{\xi_2} \right) \left(\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} - \frac{\mu - r}{\sigma_t} \right) = \left(\frac{\sigma_1}{\xi_1} \right) \left(\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} - \frac{\mu - r}{\sigma_t} \right). \quad (27.13)$$

De esta manera, la cantidad

$$\left(\frac{\sigma_c}{\xi_c} \right) \left(\frac{\mu_c - r}{\sigma_c} - \frac{\mu - r}{\sigma_t} \right)$$

es independiente de la fecha de vencimiento. Por lo tanto, se puede escribir

$$\left(\frac{\sigma_c}{\xi_c} \right) \left(\frac{\mu_c - r}{\sigma_c} - \frac{\mu - r}{\sigma_t} \right) = \lambda(S_t, \sigma_t^2, t)$$

para alguna función $\lambda(S_t, \sigma_t^2, t)$. Así,

$$\mu_c - r - \sigma_c \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) = \lambda(S_t, \sigma_t^2, t) \xi_c,$$

lo cual, después de sustituir las definiciones de μ_c y σ_c en (27.8), conduce a

$$\begin{aligned} \lambda(S_t, \sigma_t^2, t) \gamma \sigma_t \frac{\partial c}{\partial \sigma_t^2} &= \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\ &\quad + a(b - \sigma_t^2) \frac{\partial c}{\partial \sigma_t^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} - r c. \end{aligned}$$

Se concluye que

$$-m(S_t, \sigma_t^2, t) = a(b - \sigma_t^2) - \lambda(S_t, \sigma_t^2, t) \gamma \sigma_t.$$

27.5 Supuesto sobre el premio al riesgo por volatilidad

En lo que sigue se supone que $\lambda(S_t, \sigma_t^2, t)$ es proporcional a σ_t^2 , es decir,

$$\gamma\lambda(\sigma_t^2, t) = \bar{\lambda}, \quad (27.14)$$

donde $\bar{\lambda}$ es una constante. Si esta forma funcional es efectivamente la que determina el mercado, en teoría, el parámetro $\bar{\lambda}$ podría ser determinado por algún activo dependiente de la volatilidad, el cual se podría utilizar para valuar todos los demás activos dependientes de la volatilidad.

27.6 Especificación de las condiciones de frontera

Así, bajo el supuesto (27.14), el precio de una opción europea de compra con precio de ejercicio K y vencimiento en T , con volatilidad estocástica, satisface la ecuación diferencial parcial (27.6) junto con las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} c(S_t, \sigma_t^2, T) &= \max(S_t - K, 0), \\ c(0, \sigma_t^2, t) &= 0, \\ \frac{\partial c}{\partial S_t}(\infty, \sigma_t^2, t) &= 1, \\ \frac{\partial c(S_t, 0, t)}{\partial t} + rS_t \frac{\partial c}{\partial S_t}(S_t, 0, t) + ab \frac{\partial c}{\partial \sigma_t^2}(S_t, 0, t) - rc(S_t, 0, t) &= 0, \\ c(S_t, \infty, t) &= S_t. \end{aligned} \quad (27.15)$$

La segunda, tercera y quinta condiciones se pueden justificar con la fórmula de valuación de una opción europea de compra de Black-Scholes. La primera es, simplemente, la condición de frontera y la cuarta, la cual es consistente con el modelo de Black-Scholes, se desprende inmediatamente de (27.6) al sustituir $\sigma_t = 0$. Ahora bien, por analogía con la fórmula de Black-Scholes, se propone una solución de la forma

$$c(S_t, \sigma_t^2, t) = S_t P_1 - K B(t, T) P_2, \quad (27.16)$$

donde $P_1 = P_1(S_t, \sigma_t^2, t)$, $P_2 = P_2(S_t, \sigma_t^2, t)$ y $B(t, T) = e^{-r(T-t)}$. Para el análisis subsecuente es conveniente escribir la ecuación (27.6) en términos del logaritmo del precio actual del activo subyacente

$$x_t = \ln(S_t). \quad (27.17)$$

En este caso, se verifica, de manera inmediata, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial S_t} &= \frac{\partial c}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial S_t} = \frac{\partial c}{\partial x_t} \frac{1}{S_t}, \\ \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} &= \frac{\partial^2 c}{\partial x_t^2} \frac{\partial x_t}{\partial S_t} \frac{1}{S_t} - \frac{\partial c}{\partial x_t} \frac{1}{S_t^2} = \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x_t^2} - \frac{\partial c}{\partial x_t} \right) \frac{1}{S_t^2} \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} = \frac{\partial^2 c}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} \frac{1}{S_t}.$$

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (27.6), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x_t^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial (\sigma_t^2)^2} + (r - \frac{1}{2} \sigma_t^2) \frac{\partial c}{\partial x_t} \\ + [ab - (a + \bar{\lambda}) \sigma_t^2] \frac{\partial c}{\partial \sigma_t^2} - rc = 0. \end{aligned} \quad (27.18)$$

Observe ahora, con base en (27.16), que

$$\frac{\partial c}{\partial x_t} = e^{x_t} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_t} + P_1 \right) - K B(t, T) \frac{\partial P_2}{\partial x_t},$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x_t^2} = e^{x_t} \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t^2} + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x_t} + P_1 \right) - K B(t, T) \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t^2},$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} = e^{x_t} \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} + \frac{\partial P_1}{\partial \sigma_t^2} \right) - K B(t, T) \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t \partial \sigma_t^2}$$

y

$$\frac{\partial c}{\partial t} = e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial t} - K B(t, T) \frac{\partial P_2}{\partial t} - r K B(t, T) P_2.$$

Después de sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (27.18), se tiene que

$$\begin{aligned} & e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial t} - K B(t, T) \frac{\partial P_2}{\partial t} - r K B(t, T) P_2 \\ & + \frac{1}{2} \sigma_t^2 e^{x_t} \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t^2} + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x_t} + P_1 \right) - \frac{1}{2} \sigma_t^2 K B(t, T) \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t^2} \\ & + \rho \gamma \sigma_t^2 e^{x_t} \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} + \frac{\partial P_1}{\partial \sigma_t^2} \right) - \rho \gamma \sigma_t^2 K B(t, T) \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} \\ & + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 e^{x_t} \frac{\partial^2 P_1}{\partial (\sigma_t^2)^2} - \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 K B(t, T) \frac{\partial^2 P_2}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\ & + \left(r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) e^{x_t} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_t} + P_1 \right) - \left(r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) K B(t, T) \frac{\partial P_2}{\partial x_t} \\ & + [ab - (a + \bar{\lambda}) \sigma_t^2] e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial \sigma_t^2} - [ab - (a + \bar{\lambda}) \sigma_t^2] K B(t, T) \frac{\partial P_2}{\partial \sigma_t^2} \\ & - r e^{x_t} P_1 + r K B(t, T) P_2 = 0 \end{aligned} \quad (27.19)$$

ó

$$\begin{aligned} & e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial t} - K B(t, T) \frac{\partial P_2}{\partial t} \\ & + \frac{1}{2} \sigma_t^2 e^{x_t} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t^2} - \frac{1}{2} \sigma_t^2 K B(t, T) \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t^2} \\ & + \rho \gamma \sigma_t^2 e^{x_t} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} - \rho \gamma \sigma_t^2 K B(t, T) \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} \\ & + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 e^{x_t} \frac{\partial^2 P_1}{\partial (\sigma_t^2)^2} - \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 K B(t, T) \frac{\partial^2 P_2}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\ & + \left(r + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial x_t} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) K B(t, T) \frac{\partial P_2}{\partial x_t} \\ & + [ab - (a + \bar{\lambda} - \rho \gamma) \sigma_t^2] e^{x_t} \frac{\partial P_1}{\partial \sigma_t^2} - [ab - (a + \bar{\lambda}) \sigma_t^2] K B(t, T) \frac{\partial P_2}{\partial \sigma_t^2} = 0. \end{aligned} \quad (27.20)$$

En consecuencia, las funciones $P_1 = P_1(x_t, \sigma_t^2, t)$ y $P_2 = P_2(x_t, \sigma_t^2, t)$ satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales parciales:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P_j}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial x_t^2} + \rho \gamma \sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\ & + \left(r + a_j \sigma_t^2 \right) \frac{\partial P_j}{\partial x_t} + \left(\nu - b_j \sigma_t^2 \right) \frac{\partial P_j}{\partial \sigma_t^2} = 0, \end{aligned} \quad (27.21)$$

para $j = 1, 2$, donde

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad \nu = ab, \quad b_1 = a + \bar{\lambda} - \rho \gamma, \quad b_2 = a + \bar{\lambda}.$$

Para que el precio de la opción cumpla con la condición final $c(S_t, \sigma_t^2, T) = \max(S_t - K, 0)$, P_1 y P_2 deben satisfacer las condiciones finales

$$P_j(x_t, \sigma_t^2, \ln(K)) = 1_{\{x_t \geq \ln(K)\}}, \quad (27.22)$$

ya que $B(T, T) = 1$ y

$$S_t P_1(x_t, \sigma_t^2, T) - K P_2(x_t, \sigma_t^2, T) = \max(S_t - K, 0)$$

ó

$$e^{x_t} P_1(x_t, \sigma_t^2, T) - e^{\ln(K)} P_2(x_t, \sigma_t^2, T) = \max(e^{x_t} - e^{\ln(K)}, 0).$$

Así, P_1 y P_2 pueden ser interpretadas como probabilidades ajustadas o probabilidades neutrales al riesgo.

27.7 Determinación de las funciones características de las probabilidades neutrales al riesgo

A continuación se determinan las funciones características de las probabilidades neutrales al riesgo. Se puede mostrar que si x_t sigue un proceso estocástico

$$\begin{aligned} dx_t &= (r + a_j \sigma_t^2) dt + \sigma_t dW_t, \\ d\sigma_t^2 &= (\nu - b_j \sigma_t^2) dt + \gamma \sigma_t dU_t, \end{aligned} \quad (27.23)$$

donde los parámetros ν , a_j , y b_j son definidos como antes, entonces la función $P_j = P_j(x_t, \sigma_t^2, t)$ es la probabilidad condicional de que la opción expire dentro del dinero. Así,

$$P_j(x_t, \sigma_t^2, T) = \mathbb{P}\{x_T \geq \ln(K) \mid x_t, \sigma_t^2\}.$$

Infortunadamente, no existe una expresión analítica para estas probabilidades. Se puede demostrar también que las funciones características, $\varphi_1(x_t, \sigma_t^2, T; u)$ y $\varphi_2(x_t, \sigma_t^2, T; u)$, de las probabilidades neutrales al riesgo, P_1 y P_2 , satisfacen las ecuaciones diferenciales parciales (27.21) junto con la condición final

$$\varphi_j(x_t, \sigma_t^2, T; u) = e^{iux_t}, \quad j = 1, 2. \quad (27.24)$$

La función característica que resuelve dicha ecuación diferencial parcial tiene la forma

$$\varphi_j(x_t, \sigma_t^2, t; u) = e^{C(T-t; u) + D(T-t; u)\sigma_t^2 + iux_t}, \quad j = 1, 2 \quad (27.25)$$

donde

$$\begin{aligned} C(\tau; u) &= rui\tau + \frac{\nu}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\gamma ui + \kappa)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - ge^{\kappa\tau}}{1 - g} \right) \right], \\ D(\tau; u) &= \frac{b_j - \rho\gamma ui + \kappa}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{\kappa\tau}}{1 - ge^{\kappa\tau}} \right), \\ g &= \frac{b_j - \rho\gamma ui + \kappa}{b_j - \rho\gamma ui - \kappa}, \\ \kappa &= \sqrt{(\rho\gamma ui - b_j)^2 - \gamma^2(2a_j ui - u^2)} \end{aligned}$$

y

$$\tau = T - t.$$

De esta manera, es posible invertir las funciones características para obtener las probabilidades deseadas:

$$P_j(x_t, \sigma_t^2, T; \ln(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-iu\ln(K)} \varphi_j(x_t, \sigma_t^2, T; u)}{iu} \right) du, \quad j = 1, 2. \quad (27.26)$$

El integrando en la ecuación (27.26) es una función suave que decrece rápidamente y no presenta dificultades técnicas en su manejo.

Las ecuaciones (27.16), (27.25) y (27.26) proporcionan la solución para opciones europeas de compra. En general, la integral de la ecuación (27.26) no se puede resolver. No obstante, se pueden calcular aproximaciones a ella utilizando métodos numéricos. Así pues, basta obtener las funciones características de la ecuación (27.25) a partir del proceso (27.23). Suponga que x_t y σ_t^2 siguen el proceso (neutral al riesgo) de la ecuación (27.23). Considérese cualquier función dos veces diferenciable $f(x_t, \sigma_t^2, t)$ que sea la esperanza condicional de alguna función de x_t y σ_t^2 en una fecha posterior T , $g(x_T, \sigma_T^2)$. Es decir,

$$f(x_t, \sigma_t^2, t) = E[g(x_T, \sigma_T^2) | x_t, \sigma_t^2]. \quad (27.27)$$

El lema de Itô conduce a

$$\begin{aligned} df &= \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_t^2} + \rho\gamma\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (\sigma_t^2)^2} + (r + a_j\sigma_t^2) \frac{\partial f}{\partial x_t} \right. \\ &\quad \left. + (\nu - b_j\sigma_t^2) \frac{\partial f}{\partial \sigma_t^2} \right] dt + (r + a_j\sigma_t^2) \frac{\partial f}{\partial x_t} dW_t + (\nu - b_j\sigma_t^2) \frac{\partial f}{\partial \sigma_t^2} dU_t. \end{aligned}$$

Si se toman esperanzas iteradas con respecto de W_t y U_t y se igualan a cero, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_t^2} + \rho\gamma\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_t \partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\ + (r + a_j\sigma_t^2) \frac{\partial f}{\partial x_t} + (\nu - b_j\sigma_t^2) \frac{\partial f}{\partial \sigma_t^2} = 0. \end{aligned} \quad (27.28)$$

La ecuación anterior obliga a que f sea una martingala. De esta manera, la ecuación (27.27) impone la condición terminal

$$f(x_t, \sigma_t^2, T) = g(x_t, \sigma_t^2). \quad (27.29)$$

Esta ecuación tiene múltiples usos. Si $g(x_t, \sigma_t^2) = \delta(x_t - a)$, entonces la solución es la densidad condicional, al tiempo t , tal que $x_T = a$. Si $g(x_t, \sigma_t^2) = 1_{x_T \geq \ln(K)}$, entonces la solución de (27.28) es la probabilidad condicional, al tiempo t , tal que x_T es mayor que $\ln(K)$. Por último, si $g(x_t, \sigma_t^2) = e^{iux_t}$, entonces la solución es la función característica. Con el propósito de resolver (27.29) para la función característica, se propone una forma funcional en variables separables como sigue

$$f(x_t, \sigma_t^2, t) = \exp \{C(T-t; u) + D(T-t, u)\sigma_t^2 + iux_t\}. \quad (27.30)$$

Este supuesto explota la linealidad de los coeficientes en la ecuación diferencial parcial (27.21). Si se sustituye (27.30) en (27.29), el problema se reduce a resolver dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} - \frac{1}{2}\gamma^2u^2 + \rho\gamma uiD + \frac{1}{2}D^2 + a_jui - b_jD &= 0, \\ rui + \nu D + \frac{\partial C}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

sujeto a

$$C(0; u) = 0, \quad \text{y} \quad D(0; u) = 0.$$

Las soluciones de estas ecuaciones son justamente las que aparecen después de (27.17). Es posible aplicar esta técnica de solución a otros problemas. Por ejemplo, si se especifica un modelo con volatilidad estocástica de la forma

$$d\sigma_t = (\alpha - \beta\sigma_t)dt + \delta dU_t. \quad (27.31)$$

En virtud del lema de Itô, el proceso para la varianza es

$$d\sigma_t^2 = [\delta^2 + 2\alpha\sigma_t - 2\beta\sigma_t^2]dt + 2\delta\sigma_t dW_t. \quad (27.32)$$

En este caso, si la volatilidad no está correlacionada con el precio de contado del activo, el candidato de solución toma la forma

$$\varphi_j(x_t, \sigma_t^2, t; u) = \exp \{C(T-t; u) + D(T-t; u)\sigma_t^2 + G(T-t)\sigma_t + ux_t\}. \quad (27.33)$$

27.8 Bibliografía sugerida

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates". *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 385-408.
- Garman, M. B. and S. W. Kohlhagen (1983). "Foreign Currency Option Values". *International Journal of Money and Finance*, Vol. 2, No. 3, pp. 231-237.
- Heston, S. I. (1993). "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options". *Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2, pp. 327-343.

27.9 Ejercicios

- 27.1** En este ejercicio se incorporan tasas de interés estocásticas en el modelo propuesto por Heston sobre valuación de opciones, como en Merton (1973) e Ingersoll (1990). En primer lugar se modifica la ecuación (27.1) de la siguiente manera

$$dS_t = \mu_s S_t dt + \sigma_s \sigma_t S_t dW_{1t}. \quad (27.34)$$

La especificación en la dinámica estocástica del precio del bono está dada por:

$$dB(t, T) = \mu_B B(t, T) dt + \sigma_B \sigma_t B(t, T) dW_{2t}. \quad (27.35)$$

Observe que, por simplicidad, las varianzas del precio del activo y del precio del bono son determinadas por la misma variable σ_t^2 . Si la volatilidad es conducida por (27.4), demuestre que el precio de una opción, $c(S_t, \sigma_t^2, B(t, T), t)$, satisface la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_s^2 \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2}\sigma_B^2 \sigma_t^2 B^2 \frac{\partial^2 c}{\partial B^2} + \frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\ & + \rho_{SB} \sigma_s \sigma_B \sigma_t^2 S_t B \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial B} + \rho_S \sigma_t^2 \sigma_s \gamma \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} \\ & + \rho_B \sigma_t^2 \sigma_B \gamma \sigma_t^2 B \frac{\partial^2 c}{\partial B \partial \sigma_t^2} + r S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + r B \frac{\partial c}{\partial B} \\ & + [a(b - \sigma_t^2) - \lambda \sigma_t^2] \frac{\partial c}{\partial \sigma_t^2} - rc = 0 \end{aligned} \quad (27.36)$$

donde ρ_{SB} denota la correlación entre los procesos estocásticos S_t y $B(t, T)$. Si se sustituye (27.16) en la ecuación anterior demuestre que las probabilidades P_1 y P_2 satisfacen la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P_j}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_y^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial y_t^2} + \rho_{y\sigma} \sigma_y \sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial y_t \partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2}\gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\ & + h \sigma_t^2 \frac{\partial P_j}{\partial y_t} + (\nu - g_j \sigma_t^2) \frac{\partial P_j}{\partial (\sigma_t^2)^2} = 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (27.37)$$

donde

$$\begin{aligned} y_t &= \ln \left(\frac{S_t}{B(t; T)} \right), \\ \sigma_y^2 &= \frac{1}{2} (\sigma_s^2 - 2\rho_{SB} \sigma_s \sigma_B + \sigma_B^2), \\ \rho_{y\sigma} &= \frac{\rho_S \sigma_s - \rho_B y \sigma_B}{\sigma_y}, \\ h &= \frac{1}{2} \sigma_y^2, \quad \nu = ab, \\ g_1 &= a + \lambda - \rho_S \sigma_s \gamma, \\ g_2 &= a + \lambda - \rho_B \sigma_B \gamma. \end{aligned}$$

Suponga que la función característica toma la forma de la ecuación (27.25), obtenga las ecuaciones diferenciales parciales que caracterizan a las funciones $C(\tau; u)$ y $D(\tau; u)$, con $\tau = T - t$.

27.2 En este ejercicio se extiende el modelo de Heston a opciones sobre tipo de cambio. En este caso, el precio de contado S_t es el tipo de cambio. Suponga que el precio de un bono cupón cero extranjero, $B^*(t, T)$, sigue una dinámica análoga a la del bono doméstico en la ecuación (27.35):

$$dB^*(t; T) = \mu_{B^*} B^*(t, T) dt + \sigma_{B^*} \sigma_t B^*(t, T) dW_{2t}. \quad (27.38)$$

Por claridad, se denotará la tasa de interés doméstica por r_D y la extranjera por r_{B^*} . Pruebe que la ecuación diferencial parcial del precio de una opción $c(S_t, \sigma^2, B(t, T), B^*(t, T), t)$, está dada por (*cf.* Ingersoll (1990))

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &+ \frac{1}{2} \sigma_s^2 \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \sigma_B^2 \sigma_t^2 B^2 \frac{\partial^2 c}{\partial B^2} + \frac{1}{2} \sigma_{B^*}^2 \sigma_t^2 (B^*)^2 \frac{\partial^2 c}{\partial (B^*)^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial (\sigma_t^2)^2} \\ &+ \rho_{SB} \sigma_S \sigma_B \sigma_t^2 S_t B \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial B} + \rho_{SB^*} \sigma_S \sigma_{B^*} \sigma_t^2 S_t B^* \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial B^*} \\ &+ \rho_{BB^*} \sigma_B \sigma_{B^*} \sigma_t^2 B B^* \frac{\partial^2 c}{\partial B \partial B^*} + \rho_{S\sigma} \sigma_S \gamma \sigma S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial \sigma_t^2} \\ &+ \rho_{B\sigma} \sigma_B \gamma \sigma_t^2 B \frac{\partial^2 c}{\partial B \partial \sigma_t^2} + \rho_{B^*\sigma} \sigma_{B^*} \gamma \sigma_t^2 B^* \frac{\partial^2 c}{\partial B^* \partial \sigma_t^2} + r_D S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + r_D B \frac{\partial c}{\partial B} \\ &+ r_{B^*} B^* \frac{\partial c}{\partial B^*} + [a(b - \sigma_t^2) - \lambda \sigma] \frac{\partial c}{\partial \sigma_t^2} - rc = 0. \end{aligned} \quad (27.39)$$

Resolver esta ecuación diferencial parcial de cinco variables a través de métodos numéricos sería completamente inviable. Sin embargo, se puede usar la sustitución de Garman y Kohlhagen (1983) análoga a la ecuación (27.16),

$$c = S_t B^*(t, T) P_1 - K B(t, T) P_2. \quad (27.40)$$

Demuestre que las probabilidades P_1 y P_2 satisfacen la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_j}{\partial t} &+ \frac{1}{2} \sigma_y^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial y_t^2} + \rho_{y\sigma} \sigma_y \gamma \sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial y_t \partial \sigma_t^2} + \frac{1}{2} \gamma^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial (\sigma_t^2)^2} + h \sigma_t^2 \frac{\partial P_j}{\partial y_t} \\ &+ (\nu - g_j \sigma_t^2) \frac{\partial P_j}{\partial \sigma_t^2} = 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (27.41)$$

donde

$$\begin{aligned} y_t &= \ln \left(\frac{S_t B^*(t; T)}{B(t; T)} \right), \\ \sigma_y^2 &= \frac{1}{2} \sigma_s^2 + \frac{1}{2} \sigma_B^2 + \frac{1}{2} \sigma_{B^*}^2 - \rho_{SB} \sigma_S \sigma_B + \rho_{SB^*} \sigma_S \sigma_{B^*} - \rho_{BB^*} \sigma_B \sigma_{B^*}, \\ \rho_{y\sigma} &= \frac{\rho_{S\sigma} \sigma_S - \rho_{B\sigma} \sigma_B + \rho_{B^*\sigma} \sigma_{B^*}}{\sigma_y}, \\ h &= \frac{1}{2} \sigma_y^2, \quad \nu = ab, \\ g_1 &= a + \lambda - \rho_{S\sigma} \sigma_S \gamma - \rho_{B^*\sigma} \sigma_{B^*} \gamma, \quad g_2 = a + \lambda - \rho_{B\sigma} \sigma_B \gamma. \end{aligned}$$

Suponga que la función característica toma la forma de la ecuación (27.25), obtenga las ecuaciones diferenciales parciales que determinan a las funciones $C(\tau; u)$ y $D(\tau; u)$, $\tau = T - t$.

27.3 Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \\ d\sigma_t^2 &= a(b - \sigma_t^2) dt + \gamma \sigma_t^2 dU_t. \end{aligned}$$

Justifique la relación del sistema anterior con el modelo GARCH(1,1):

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t(1 + \mu) + \sigma_t S_t \epsilon_t, \\ \sigma_{t+1}^2 &= \alpha + \beta \sigma_t^2 + \delta \epsilon_t^2. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 28

VALUACIÓN DE OPCIONES CON INFORMACIÓN A PRIORI SOBRE VOLATILIDAD

Conceptos básicos de este capítulo:

- Información *a priori* sobre volatilidad
- El principio de máxima entropía
- El principio de mínima entropía cruzada
- Distribución Gamma
- Información sobre cuantiles
- Valuación neutral al riesgo con información *a priori* sobre volatilidad
- Funciones de Bessel

28.1 Introducción

Cuando se intenta describir el comportamiento de la volatilidad, el procedimiento más usual consiste en analizar datos. Por ejemplo, se pueden examinar gráficas e histogramas, correr regresiones, efectuar diversas pruebas de hipótesis, etc. Sin embargo, existe otro enfoque para describir *a priori* el comportamiento de la volatilidad, con base en la experiencia, incluso antes de que los datos sean analizados. Un investigador o un “trader” que han observado el comportamiento de la volatilidad de diversos activos durante años, algo tuvieron que aprender. Este enfoque que se basa en la experiencia es conocido como el enfoque Bayesiano. En tal caso, la volatilidad es vista como una variable aleatoria y todo el análisis subsecuente que se haga sobre dicha variable dependerá del grado de credibilidad que se asigne a sus valores potenciales. Asimismo, en el marco Bayesiano existen varios métodos para construir distribuciones *a priori* que describen la información inicial sobre los posibles valores de la volatilidad.

En este capítulo se desarrolla un modelo Bayesiano de valuación de opciones europeas cuando se tiene información inicial, de naturaleza subjetiva, en términos de valores esperados sobre la volatilidad. Para ello, se introducen dos métodos fundamentales en la construcción de distribuciones *a priori* a partir de la información inicial: el principio de máxima entropía, introducido por Jaynes (1957), y el principio de mínima entropía cruzada, elaborado por Kullback (1956). El principio de máxima entropía asegura la racionalidad de los inversionistas en el sentido de que utilizan eficientemente la información inicial para seleccionar una distribución *a priori* que maximiza la utilidad logarítmica entre todas las distribuciones admisibles. Después de todo, el objetivo central de la teoría financiera (matemática o empírica) es el estudio del comportamiento racional de los inversionistas bajo un ambiente de incertidumbre.

El presente capítulo está organizado de la siguiente manera. Primero, se revisa el marco teórico sobre inferencia Bayesiana y su relación con la teoría de la información. En particular, se estudian los principios de máxima entropía y mínima entropía cruzada, los cuales son útiles en la construcción de distribuciones *a priori*. Se presentan y discuten varios patrones de información que los individuos obtienen a través del proceso de aprendizaje (o experiencia): información sobre media (caso exponencial); información sobre valores y niveles (caso Gamma con dos parámetros); información sobre niveles y potencias (caso Gamma con tres parámetros); información sobre cuantiles; información sobre valores, niveles y potencias (caso Weibull). Se estudian también modelos de naturaleza multiparamétrica, en particular se examina el caso exponencial multivariado. Asimismo, se presentan varios ejemplos ilustrativos sobre la distribución Gamma. Posteriormente, se desarrolla un modelo Bayesiano para valuar opciones cuando se cuenta con

una distribución *a priori* sobre la volatilidad. Por último, se presentan algunas fórmulas de valuación Bayesiana de opciones mediante aproximaciones polinomiales y asintóticas de funciones de Bessel.

28.2 Información *a priori* sobre volatilidad

Considere un movimiento Browniano $(W_t)_{t \geq 0}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \text{IP})$ y una opción de compra europea sobre un activo subyacente cuyo precio al tiempo t , S_t , es conducido por la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(\theta)S_t dW_t, \quad (28.1)$$

donde $\theta \in \Theta$ es un parámetro, o un vector de parámetros. Observe que IP es una medida de probabilidad neutral al riesgo. Se supone que, al tiempo $t = 0$, el individuo cuenta con información sobre θ , la cual proviene de la experiencia o de nueva evidencia, que puede ser expresada en términos de valores esperados de la siguiente forma:

$$\int_{\Theta} a_k(\theta) \pi(\theta) d\theta = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (28.2)$$

en donde las funciones $a_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots, m$, y las constantes α_k , $k = 1, 2, \dots, m$ son todas conocidas.

28.3 El principio de máxima entropía

Un principio, o regla, que un individuo puede seguir para seleccionar una distribución *a priori*, $\pi(\theta)$, que describa la información inicial expresada en (28.2), es que dicha distribución maximice la entropía.¹ Es decir, se desea determinar $\pi^*(\theta)$, $\theta \in \Theta$, que resuelva el problema:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} \quad H(\pi) = - \int_{\Theta} \pi(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta, \\ & \text{sujeto a:} \quad \begin{cases} \int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_{\Theta} a_k(\theta) \pi(\theta) d\theta = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \end{aligned}$$

La condición necesaria para el óptimo del problema anterior está dada por:

$$\begin{cases} \pi^*(\theta) = \exp \left\{ \lambda_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k(\theta) \right\}, \\ \int_{\Theta} \pi^*(\theta) d\theta = 1, \\ \int_{\Theta} [\alpha_k - a_k(\theta)] \pi^*(\theta) d\theta = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (28.3)$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones. Si se sustituye π^* en las condiciones restantes en (28.3), se tiene que

$$\begin{cases} 0 = \lambda_0 + \log \left\{ \int_{\Theta} \prod_{k=1}^m e^{\lambda_k a_k(\theta)} d\theta \right\}, \\ 0 = \int_{\Theta} [a_k(\theta) - \alpha_k] \prod_{k=1}^m e^{\lambda_k a_k(\theta)} d\theta, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (28.4)$$

¹ La palabra “entropía” es introducida por Clasius (1850) como concepto termodinámico (como una medida de desorden de un sistema físico). La interpretación probabilista del concepto en mecánica estadística se atribuye a Boltzmann (1877). Sin embargo, la relación explícita entre entropía y probabilidad se debe a Plank (1904). Shannon y Weaver (1948) crean las bases de la teoría de información al reinterpretar el concepto para estudiar problemas de transmisión de datos. Así pues, el nombre de entropía, en nuestro contexto, se debe a razones meramente históricas. Por supuesto, la interpretación como medida de información está asociada con el concepto físico.

el cual es un sistema no lineal homogéneo en las variables $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. Dado que la función objetivo es estrictamente cóncava, entonces la condición necesaria para un máximo es también suficiente. Observe además que si la integral que define a λ_0 puede resolverse, entonces los demás multiplicadores pueden encontrarse a partir de las relaciones

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_k} = -\alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (28.5)$$

Por último, observe que el principio de máxima entropía proporciona un método de estimación no parámetrico de una función de distribución cuando se cuenta con información en términos de valores esperados, lo cual contrasta con la estimación paramétrica que parte de conocer una forma funcional para la distribución. Por otro lado, el principio de máxima entropía introduce el comportamiento racional en el individuo para seleccionar una distribución cuando se tiene información inicial en términos de valores esperados.

28.4 El principio de mínima entropía cruzada

Suponga ahora que la información inicial del individuo sobre θ está representada por una distribución *a priori*, $p = p(\theta)$, $\theta \in \Theta$, posiblemente obtenida a partir del principio de máxima entropía, e información adicional representada en términos de valores esperados mediante

$$\int_{\Theta} a_k(\theta) \pi(\theta) d\theta = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (28.6)$$

en donde las funciones a_k , $k = 1, 2, \dots, m$ y las constantes α_k , $k = 1, 2, \dots, m$ son todas conocidas. El comportamiento racional que el individuo sigue para determinar una distribución *a posteriori*, π^* , que incorpore la información (28.6) en su conocimiento inicial representado por $p(\theta)$, es el de minimizador de entropía cruzada. Es decir, el individuo resuelve el problema:²

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad H(\pi, p) &= \int_{\Theta} \pi(\theta) \ln \frac{\pi(\theta)}{p(\theta)} d\theta, \\ \text{sujeto a:} \quad &\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_{\Theta} a_k(\theta) \pi(\theta) d\theta = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{array} \right. \end{aligned}$$

La condición de primer orden (condición necesaria) del problema anterior está dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi^*(\theta) = p(\theta) \exp \left\{ -\lambda_0 - \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k(\theta) \right\}, \\ \int_{\Theta} \pi^*(\theta) d\theta = 1, \\ \int_{\Theta} (\alpha_k - a_k(\theta)) \pi^*(\theta) d\theta = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{array} \right. \quad (28.7)$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones. Si se sustituye π^* en las condiciones de primer orden restantes en (28.7), se encuentra que

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \lambda_0 - \log \left\{ \int_{\Theta} p(\theta) \prod_{k=1}^m e^{-\lambda_k a_k(\theta)} d\theta \right\}, \\ 0 = \int_{\Theta} [a_k(\theta) - \alpha_k] p(\theta) \prod_{k=1}^m e^{-\lambda_k a_k(\theta)} d\theta, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{array} \right. \quad (28.8)$$

² Es importante mencionar que la entropía cruzada es una función no negativa y estrictamente cóncava con respecto del argumento π .

el cual es un sistema no lineal homogéneo en las variables $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. Cuando la integral que define a λ_0 puede resolverse, entonces los demás multiplicadores pueden encontrarse a partir de las siguientes relaciones

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_k} = -\alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (28.9)$$

28.5 El proceso de valuación con información *a priori* sobre volatilidad

Considere un movimiento Browniano $(W_t)_{t \geq 0}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ y una opción de compra europea sobre un activo subyacente cuyo precio al tiempo t , S_t , es conducido por la ecuación (28.1). La opción es emitida en $t_0 = 0$ y vence en $T > 0$ con precio de ejercicio K . Bajo el marco Bayesiano, el precio al tiempo $t = 0$ cuando hay información *a priori* está dado por:

$$\begin{aligned} c(S_0, T, K, r | \alpha, \beta) &= e^{-rT} \mathbb{E}^{(\pi)} \left\{ \mathbb{E} [\max(S_T - K, 0) | S_0, \theta] \right\} \\ &= e^{-rT} \int_{\theta \in \Theta} \left\{ \int_{s > K} (s - K) f_{S_T | S_0}(s | S_0, \theta) ds \right\} \pi(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (28.10)$$

donde $\pi(\theta)$ es una distribución *a priori* que describe el conocimiento inicial sobre el comportamiento de la volatilidad.

28.6 El caso exponencial y el principio de máxima entropía

Suponga que inicialmente el individuo cuenta con la siguiente información, en términos de valores esperados, sobre θ :

$$\int_0^\infty \theta \pi(\theta) d\theta = \beta^{-1}. \quad (28.11)$$

En este caso, el Lagrangiano del problema variacional de máxima entropía está dado por

$$\mathcal{L}(\pi, \lambda_0, \lambda_1) = -\pi(\theta) \ln \pi(\theta) + \lambda_0 \pi(\theta) + \lambda_1 \theta \pi(\theta),$$

donde λ_0 y λ_1 son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones. La ecuación de Euler-Lagrange

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \pi} \right|_{\pi=\pi^*} = 0$$

implica que

$$-1 - \ln \pi^* + \lambda_0 + \theta \lambda_1 = 0,$$

equivalentemente

$$\pi^*(\theta) = \gamma e^{\lambda_1 \theta},$$

donde $\gamma = e^{\lambda_0 - 1}$. Los valores de γ y λ_1 son obtenidos a partir de las restricciones. Claramente, $\gamma > 0$, note también que $\lambda_1 < 0$, ya que en caso contrario

$$\int_0^\infty \gamma e^{\lambda_1 \theta} d\theta > \infty$$

y, en consecuencia, la restricción de normalización no se cumple. Sea $\lambda_1 = -\delta$, con $\delta > 0$. Por lo tanto,

$$1 = \int_0^\infty \gamma e^{-\delta \theta} d\theta = \frac{\gamma}{\delta},$$

de donde $\gamma = \delta = -\lambda_1$. Por otro lado, de la restricción del valor medio se obtiene que

$$\beta^{-1} = \int_0^\infty \delta \theta e^{-\delta \theta} d\theta = \delta^{-1}.$$

De esta forma, $\delta = \beta$ y

$$\pi^*(\theta) = \beta e^{-\beta\theta}, \quad \theta > 0,$$

que corresponde a la distribución exponencial con parámetro β . Por último, observe que $H(\pi^*) = \ln(e/\beta)$, y $H(\pi^*) > 0$ cuando $\beta < e$.

28.7 El caso exponencial y el principio de mínima entropía cruzada

Suponga que un individuo cuenta con una distribución *a priori*

$$p(\theta) = \beta e^{-\beta\theta}$$

e información adicional

$$\int_0^\infty \theta \pi(\theta) d\theta = \alpha^{-1}, \quad \theta > 0.$$

En este caso, una distribución *a posteriori* se obtiene como solución del problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad H(\pi, p) &= \int_0^\infty \pi(\theta) \ln \frac{\pi(\theta)}{p(\theta)} d\theta, \\ \text{sujeto a:} \quad &\left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_0^\infty \theta \pi(\theta) d\theta = \alpha^{-1}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

En consecuencia, existen constantes λ_0 y λ_1 tales que

$$\pi^*(\theta) = p(\theta) e^{-\lambda_0 - \lambda_1 \theta}.$$

Si se utiliza la primera restricción se encuentra que

$$1 = \int_0^\infty \beta e^{-\beta\theta} e^{-\lambda_0 - \lambda_1 \theta} d\theta = e^{-\lambda_0} \left(\frac{\beta}{\beta + \lambda_1} \right).$$

En consecuencia,

$$e^{-\lambda_0} = \frac{\beta + \lambda_1}{\beta}. \quad (28.12)$$

También, al considerar la restricción restante, se obtiene que

$$\alpha^{-1} = \int_0^\infty \theta (\beta + \lambda_1) e^{-(\beta + \lambda_1)\theta} d\theta = \frac{1}{\beta + \lambda_1},$$

con lo cual

$$\lambda_1 = \alpha - \beta.$$

Si se sustituye este valor en (28.12), se sigue que

$$e^{-\lambda_0} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Por lo tanto,

$$\pi^*(\theta) = \alpha e^{-\alpha\theta}, \quad \theta > 0,$$

la cual es, de nuevo, una distribución exponencial con parámetro α . Observe que la información relativa a β se ha sustituido completamente por la de α .

28.8 El caso de la distribución Gamma con dos parámetros y el principio de máxima entropía

Suponga que el individuo ha obtenido la siguiente información adicional sobre θ en términos de la media y de su tasa de crecimiento $\ln \theta$, con $\Theta = (0, \infty)$, de tal forma que

$$\begin{cases} \int_0^\infty \theta \pi(\theta) d\theta = \alpha \beta^{-1}, \\ \int_0^\infty \ln \theta \pi(\theta) d\theta = \psi(\alpha) - \ln \beta, \end{cases}$$

donde ψ es la función Digamma, $\psi(\alpha) = d\Gamma(\alpha)/d\alpha$. En consecuencia, de las condiciones de primer orden, establecidas en (28.4), se tiene que

$$-\lambda_0 = \ln \left\{ \int_0^\infty \theta^{\lambda_2} e^{\lambda_1 \theta} d\theta \right\}.$$

Para que esta integral sea finita es necesario que $\lambda_2 > -1$ y $\lambda_1 < 0$, con lo cual

$$\lambda_0 = (1 + \lambda_2) \ln(-\lambda_1) - \ln \Gamma(1 + \lambda_2)$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_1} = (1 + \lambda_2) \lambda_1^{-1} = -\alpha \beta^{-1}, \\ \frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_2} = \ln(-\lambda_1) - \psi(1 + \lambda_2) = \ln \beta - \psi(\alpha). \end{cases} \quad (28.13)$$

Por lo tanto, $\lambda_1 = -\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - 1$, y se tiene que

$$\pi^*(\theta) = \exp \left\{ \lambda_0 + \lambda_1 \theta + \lambda_2 \ln \theta \right\} = \frac{(\theta \beta)^{\alpha-1} \beta e^{-\beta \theta}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \theta > 0, \quad (28.14)$$

lo cual determina la distribución Gamma con parámetros α y β .

28.9 El caso de la distribución Gamma con tres parámetros y el principio de máxima entropía

Suponga que el individuo ha obtenido la siguiente información, sobre θ , en términos de su tasa de crecimiento y de alguna potencia δ :

$$\begin{cases} \int_0^\infty \ln \theta \pi(\theta) d\theta = \delta^{-1} [\psi(\alpha) - \ln \beta], \\ \int_0^\infty \theta^\delta \pi(\theta) d\theta = \beta^{-1}. \end{cases}$$

El individuo resuelve entonces el problema:

$$\text{Maximizar} \quad H(\pi) = - \int_0^\infty \pi(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta,$$

sujeto a:

$$\begin{cases} \int_0^\infty \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_0^\infty \ln \theta \pi(\theta) d\theta = \delta^{-1} [\psi(\alpha) - \ln \beta], \\ \int_0^\infty \theta^\delta \pi(\theta) d\theta = \beta^{-1}. \end{cases}$$

En este caso el Lagrangiano del problema variacional de máxima entropía está dado por

$$\mathcal{L}(\pi, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = -\pi \ln \pi + \lambda_0 \pi + \lambda_1 \pi \ln \theta + \lambda_2 \theta^\delta,$$

donde λ_0 , λ_1 y λ_2 son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones. La ecuación de Euler-Lagrange

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi} \right|_{\pi=\pi^*} = 0$$

implica que

$$-1 - \ln \pi^*(\theta) + \lambda_0 + \ln \theta \lambda_1 + \theta^\delta \lambda_2 = 0, \quad (28.15)$$

equivalentemente

$$\pi^*(\theta) = \gamma e^{\lambda_1 \ln \theta + \lambda_2 \theta^\delta}, \quad (28.16)$$

donde $\gamma = e^{\lambda_0 - 1}$. En lugar de obtener los valores de γ , λ_1 y λ_2 a partir de las restricciones, se utilizará la propiedad de continuidad e independencia lineal de las funciones de información 1, $\ln \theta$ y θ^δ en $(0, \infty)$, con lo cual se sabe que la solución es única.

Consideré ahora la distribución Gamma de tres parámetros α , $\alpha\beta$ y δ , y note que

$$\begin{aligned} f(\theta) &= [\Gamma(\alpha)]^{-1} \delta [\alpha\beta]^\alpha \theta^{\delta\alpha-1} e^{-\alpha\beta\theta^\delta} \\ &= \exp\{\ln[\Gamma(\alpha)]^{-1} \delta (\alpha\beta)^\alpha + (\delta\alpha - 1) \ln \theta - \alpha\beta\theta^\delta\}. \end{aligned} \quad (28.17)$$

Si se escribe

$$\begin{cases} \lambda_0 - 1 = \ln[\Gamma(\alpha)]^{-1} \delta (\alpha\beta)^\alpha, \\ \lambda_1 = \alpha\delta - 1, \\ \lambda_2 = -\alpha\beta, \end{cases} \quad (28.18)$$

y se sustituyen estos valores en (28.16), entonces se obtiene (28.17) como solución única.

28.10 El caso de información a priori sobre valores extremos

Suponga ahora que el individuo resuelve el problema de máxima entropía sujeto a

$$\begin{cases} \int_0^\infty \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_0^\infty \theta \pi(\theta) d\theta = \beta^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma(1 + \alpha^{-1}), \\ \int_0^\infty \theta^\alpha \pi(\theta) d\theta = \beta^{-1}, \\ \int_0^\infty \log \theta \pi(\theta) d\theta = -\alpha^{-1} \kappa - \alpha^{-1} \log \beta, \end{cases}$$

donde $\kappa = (0.5772\dots)$ es la constante de Euler. En este caso, la solución del problema variacional de máxima entropía, es la distribución Weibull con parámetros α y β , es decir,

$$\pi^{**}(\theta) = \alpha \beta \theta^{\alpha-1} e^{-\beta \theta^\alpha}, \quad \theta > 0.$$

28.11 El caso de información a priori en cuantiles

Suponga que un individuo tiene información de que los valores del parámetro se encuentran en la región $\Theta = (b_1, b_{s+1})$. Suponga, además, que el individuo asigna ponderaciones subjetivas $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s \geq 0$ ($\sum_{k=1}^s \gamma_k = 1$) de que el valor verdadero del parámetro se encuentre en subregiones $A_k = (b_k, b_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, s-1$ y $A_s = (b_s, b_{s+1})$ con $b_1 < b_2 < \dots < b_{s+1}$, $s \geq 2$, las

cuales constituyen una partición de $\Theta = (b_1, b_{s+1})$. Si el individuo actúa como maximizador de entropía, las condiciones de primer orden dadas en (28.4) se transforman en

$$\begin{cases} 0 = \lambda_0 - \log \left\{ \int_{\Theta} \prod_{k=1}^s e^{-\lambda_k I_{A_k}(\theta)} d\theta \right\}, \\ 0 = \lambda_0 + \lambda_k - \log \left\{ \gamma_k^{-1} \int_{\Theta} I_{A_k}(\theta) d\theta \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, s. \end{cases} \quad (28.19)$$

Si la integral que determina a λ_0 en la condición anterior puede resolverse, entonces los demás multiplicadores pueden encontrarse a partir de las relaciones

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_k} = -\gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

A continuación se analiza el caso particular cuando $b_1 = a < c = b_2 < b = b_3$, $\gamma_1 = \beta$ y $\gamma_2 = 1 - \beta$. En este caso,

$$\lambda_0 = \ln\{(c-a)e^{-\lambda_1} + (b-c)e^{-\lambda_2}\}$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_1} = \frac{-(c-a)e^{-\lambda_1}}{(c-a)e^{-\lambda_1} + (b-c)e^{-\lambda_2}} = -\beta, \\ \frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_2} = \frac{-(b-c)e^{-\lambda_2}}{(c-a)e^{-\lambda_1} + (b-c)e^{-\lambda_2}} = -(1-\beta). \end{cases}$$

Por lo tanto, $\lambda_1 = \ln[(c-a)/\beta]$ y $\lambda_2 = \ln[(b-c)/(1-\beta)]$, lo que conduce a

$$\pi^*(\theta) = \frac{\beta}{c-a} I_{(a,c]} + \frac{1-\beta}{b-c} I_{(c,b]}.$$

En el caso general, la distribución *a priori* que representa este tipo de información está dada por

$$\pi(\theta) = \sum_{k=1}^m \gamma_k u_k^{-1} I_{A_k}(\theta), \quad \theta \in \Theta,$$

donde I_{A_k} son las funciones indicadoras de los conjuntos A_k y

$$u_k = \int_{\Theta} I_{A_k}(\theta) d\theta, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

28.12 Caso exponencial multivariado

En esta sección se estudia el caso exponencial multivariado. Sean $\{\bar{a}_k\}$ y $\{\bar{b}_k\}$ dos conjuntos de números positivos, cada uno con m elementos. Suponga que la densidad exponencial multivariada

$$p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = p_1(\theta_1)p_2(\theta_2) \cdots p_m(\theta_m) = \frac{1}{\prod_{k=1}^m \bar{b}_k} \exp \left\{ -\sum_{k=1}^m \frac{\theta_k}{\bar{b}_k} \right\}, \quad \theta_k > 0,$$

es la densidad *a priori* del individuo. Claramente, el individuo está suponiendo independencia³ entre las θ_k , $k = 1, 2, \dots, m$. Suponga que además el individuo cuenta con información adicional

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \theta_k d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_m = \bar{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

³ El análisis del caso multivariado de variables dependientes se complica un poco por la forma funcional de la distribución,

$$\begin{aligned} 1 - F(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) &= \exp \left\{ - \sum_{k=1}^m \bar{b}_k \theta_k - \sum_{1 \leq i < j \leq m} \bar{b}_{ij} \max(\theta_i, \theta_j) - \right. \\ &\quad \left. \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} \bar{b}_{ijk} \max(\theta_i, \theta_j, \theta_k) - \cdots - \bar{b}_{12 \dots m} \max(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \right\}, \end{aligned}$$

en cuyo caso el individuo tiene que proporcionar como información valores de \bar{b}_k , \bar{b}_{ij} , \bar{b}_{ijk} , etc.

En este caso, el individuo tiene que resolver

$$\text{Minimizar } H(\pi, p) = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \ln \frac{\pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)}{p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)} d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_m,$$

$$\text{sujeto a: } \begin{cases} \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_m = 1, \\ \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \theta_k \pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_m = \bar{a}_k, \quad k = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Pero, utilizando la hipótesis de independencia, se tiene que

$$\pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = \pi_1(\theta_1) \pi_2(\theta_2) \cdots \pi_m(\theta_m)$$

y como

$$p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = p_1(\theta_1) p_2(\theta_2) \cdots p_m(\theta_m),$$

es fácil verificar que

$$H(\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_m, p_1 p_2 \cdots p_m) = H(\pi_1, p_1) + H(\pi_2, p_2) + \cdots + H(\pi_m, p_m)$$

y que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \theta_k d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_m = \int_0^\infty \pi_k(\theta_k) \theta_k d\theta_k = \bar{a}_k$$

para $k = 1, 2, \dots, m$. Por lo tanto, el individuo, en lugar de resolver un problema con m variables, puede resolver, en forma equivalente, los siguientes m problemas de sólo una variable cada uno y todos ellos idénticos, para $k = 1, 2, \dots, m$:

$$\text{Minimizar } H(\pi_k, p_k) = \int_0^\infty \pi_k(\theta_k) \ln \frac{\pi_k(\theta_k)}{p_k(\theta_k)} d\theta_k,$$

$$\text{sujeto a: } \begin{cases} \int_0^\infty \pi_k(\theta_k) d\theta_k = 1, \\ \int_0^\infty \pi_k(\theta_k) \theta_k d\theta_k = \bar{a}_k. \end{cases}$$

En consecuencia, existen constantes λ_0 y λ_1 tales que

$$\pi^*(\theta_k) = p_k(\theta_k) e^{-\lambda_0 - \lambda_1 \theta_k}.$$

Al utilizar la primera restricción, se encuentra que

$$1 = \int_0^\infty \frac{1}{\bar{b}_k} \exp\left\{-\frac{\theta_k}{\bar{b}_k}\right\} \exp\left\{-\lambda_0 - \lambda_1 \theta_k\right\} d\theta_k = e^{-\lambda_0} \left[\frac{1}{1 + \bar{b}_k \lambda_1} \right].$$

De esta manera,

$$e^{-\lambda_0} = 1 + \bar{b}_k \lambda_1. \quad (28.20)$$

Asimismo, al considerar la restricción restante, se sigue que

$$\bar{a}_k = \int_0^\infty \theta_k \left[\frac{\bar{b}_k}{1 + \bar{b}_k \lambda_1} \right]^{-1} \exp\left\{-\left[\frac{\bar{b}_k}{1 + \bar{b}_k \lambda_1} \right]^{-1} \theta_k\right\} d\theta_k = \frac{\bar{b}_k}{1 + \bar{b}_k \lambda_1},$$

con lo cual

$$\lambda_1 = \frac{\bar{b}_k - \bar{a}_k}{\bar{a}_k \bar{b}_k}.$$

Si se sustituye este valor en (28.20), se tiene que

$$e^{-\lambda_0} = \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_k}.$$

De esta manera, para cada k se cumple que

$$\pi_k^*(\theta_k) = \frac{1}{\bar{a}_k} \exp\left\{-\frac{\theta_k}{\bar{a}_k}\right\}, \quad \theta_k > 0.$$

Por lo tanto,

$$\pi^*(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = \prod_{k=1}^m \pi_k^*(\theta_k) = \frac{1}{\prod_{k=1}^m \bar{a}_k} \exp\left\{-\sum_{k=1}^m \frac{\theta_k}{\bar{a}_k}\right\}, \quad \theta_k > 0,$$

que es de nuevo una distribución exponencial multivariada de variables independientes. Obsérvese que la información proporcionada por las \bar{b}_k , $k = 1, 2, \dots, m$, se ha borrado totalmente en π^* .

28.13 Método Bayesiano de valuación de opciones, caso Gamma

En el mundo real, la volatilidad no es constante ni directamente observable. Por lo que es natural pensar en la volatilidad como una variable aleatoria no negativa con algún conocimiento inicial sobre sus parámetros proveniente de la experiencia y antes de que los datos sean observados. La información inicial es descrita en términos de una distribución de probabilidad (creencia subjetiva) de los valores potenciales de los parámetros de la volatilidad. Esta es justamente la manera de pensar de la aproximación Bayesiana. Es común en la inferencia Bayesiana, en lugar de estudiar la volatilidad, $\sigma > 0$, estudiar la precisión, la cual está definida como el inverso de la varianza, $h = \sigma^{-2}$. De esta manera, a menor varianza, mayor precisión. Más formalmente, desde el punto de vista Bayesiano, se tiene una distribución, P_h , $h > 0$, que describe información *a priori*. Se supone que P_h es absolutamente continua con respecto de la medida de Lebesgue ν , así la derivada de Radon-Nykodim proporciona una densidad *a priori*, $\pi(h)$, i.e., $dP_h/d\nu(h) = \pi(h)$ para toda $h > 0$. Por lo tanto, se puede escribir

$$P_h\{h \in A\} = \int_A \pi(h) d\nu(h)$$

para todo conjunto de Borel A .

Suponga que existe información inicial sobre la volatilidad en términos de valores esperados, es decir, $\int a_k(h)\pi(h)I_{\{h>0\}}d\nu(h) = \bar{a}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$, donde las funciones $a_k(h)$ y todas las constantes \bar{a}_k son conocidas, y ν es la medida de Lebesgue. El principio de máxima entropía establece que de todas las funciones de densidad que satisfacen la información dada (restricciones) se debe escoger la que maximiza $H[\pi(h)] = -\int_{h>0} \ln[\pi(h)]\pi(h)d\nu(h)$. Si se escribe $a_0(h) \equiv 1$ y $\bar{a}_0 = 1$, se asegura que la solución del problema de máxima entropía es una densidad propia. Por lo tanto, se desea encontrar la función $\pi(h)$ que resuelva el siguiente problema de cálculo variacional:

$$\max_{\pi} H[\pi(h)] = - \int_{h>0} \ln[\pi(h)]\pi(h)d\nu(h),$$

$$\text{sujeto a : } \mathcal{C} : \int a_k(h)\pi(h)I_{\{h>0\}}d\nu(h) = \bar{a}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

En lo subsecuente, se supondrá que el conjunto de restricciones, \mathcal{C} , define un conjunto convexo y compacto sobre π . Ahora bien, en virtud de que $H[\pi(h)]$ es estrictamente cóncava en $\pi(h)$, se sigue que la solución existe y es única. En tal caso, la condición necesaria para que $\pi(h)$ sea un máximo, es también suficiente. Si se utiliza la condición necesaria para el problema de cálculo de variaciones planteado anteriormente, se encuentra que si $\pi(h)$ es óptimo, entonces

$$\pi(h) = e^{-1+\lambda_0} \exp\left\{\sum_{k=1}^N \lambda_k a_k(h)\right\}, \quad (28.21)$$

donde λ_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N$, son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones \mathcal{C} .

28.14 Entropía relativa

Otro método de inferencia útil para estimar una función de densidad de probabilidad desconocida, $\pi(h)$, cuando hay una estimación inicial $p(h)$ de $\pi(h)$, e información sobre la precisión h , en términos de valores esperados, está basado en encontrar $\pi(h)$ que resuelva el siguiente problema de cálculo variacional:

$$\text{Minimizar}_{\pi} \int_{h>0} \pi(h) \ln \frac{\pi(h)}{p(h)} d\nu(h),$$

$$\text{sujeto a: } \int \pi(h) I_{\{h>0\}} d\nu(h) = 1, \quad \int a_k(h) \pi(h) I_{\{h>0\}} d\nu(h) = \bar{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

La cantidad $\int_{h>0} \pi(h) \ln(\pi(h)/p(h)) d\nu(h)$ es llamada la entropía relativa entre $\pi(h)$ y $p(h)$. En este caso, si $\pi(h)$ es óptimo, se tiene que

$$\pi(h) = p(h) e^{-1-\lambda_0} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^N \lambda_k a_k(h) \right\},$$

donde λ_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N$, son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones. Observe que cuando la estimación inicial, $p(h)$, es una función de densidad uniforme (impropia), la entropía relativa se convierte en la entropía.

28.15 Ejemplos de distribuciones *a priori* sobre precisión

Suponga que la información *a priori* está dada en términos de valores esperados en niveles y tasas. Esto es, el conocimiento *a priori* es expresado como:

$$\int_{h>0} h \pi(h) d\nu(h) = \frac{\alpha}{\beta} \quad (28.22)$$

y

$$\int_{h>0} \ln(h) \pi(h) d\nu(h) = \psi(\alpha) - \ln(\beta), \quad (28.23)$$

donde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\psi(\alpha) = d \ln(\Gamma(\alpha)) / d\alpha$, y $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma. Note que para un valor esperado dado en niveles y tasas, las ecuaciones (28.22) y (28.23) conducen a un sistema de ecuaciones no lineales con variables α y β . Ya que la entropía es estrictamente cóncava y la función de distribución Gamma es la única distribución que satisface (28.22) y (28.23), se obtiene que

$$\pi(h|\alpha, \beta) = \frac{h^{\alpha-1} \beta^\alpha e^{-\beta h}}{\Gamma(\alpha)}, \quad h > 0, \quad \alpha > 0, \quad \text{y} \quad \beta > 0, \quad (28.24)$$

resuelve el problema de máxima entropía. Otras distribuciones *a priori* de interés, después de realizar algunos cambios de variable, podrían ser:

$$\pi \left(\frac{1}{h} \middle| \alpha, \beta \right) = \frac{h^{\alpha+1} \beta^\alpha e^{-\beta h}}{\Gamma(\alpha)}, \quad h > 0, \quad \alpha > 0, \quad \text{y} \quad \beta > 0, \quad (28.25)$$

$$\pi \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \middle| \alpha, \beta \right) = \frac{2h^{\alpha+\frac{1}{2}} \beta^\alpha e^{-\beta h}}{\Gamma(\alpha)}, \quad h > 0, \quad \alpha > 0, \quad \text{y} \quad \beta > 0, \quad (28.26)$$

y

$$\pi \left(\ln \left(\frac{1}{h} \right) \middle| \alpha, \beta \right) = \frac{\beta^\alpha e^{-\beta e^{-\ln(1/h)} - \alpha \ln(1/h)}}{\Gamma(\alpha)}, \quad h > 0, \quad \alpha > 0, \quad \text{y} \quad \beta > 0,$$

los cuales se plantean, respectivamente, para distribuciones *a priori* de σ^2 , σ , y $\ln(\sigma^2)$. En cualquier caso, la mejor selección debería reflejar lo que ha sido aprendido de la práctica previa.

28.16 Valuación Bayesiana de opciones

Considere un proceso de Wiener $(W_t)_{t \geq 0}$ definido sobre algún espacio fijo de probabilidad con filtración $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ y una opción europea de compra sobre un activo subyacente cuyo precio al tiempo t , S_t , es conducido por un movimiento geométrico Browniano, el cual está dado por

$$dS_t = rS_t dt + h^{-1/2} S_t dW_t,$$

esto es, $(W_t)_{t \geq 0}$ está definido sobre una medida de probabilidad neutral al riesgo \mathbb{P} .

La opción es emitida en $t_0 = 0$ y madura en $T > 0$ con un precio de ejercicio K . Bajo el marco teórico Bayesiano, se tiene que la prima, al tiempo $t_0 = 0$, de la opción cuando hay información *a priori* sobre la volatilidad, descrita en (28.24), está dado por:

$$\begin{aligned} c(S_0, T, K, r | \alpha, \beta) &= e^{-rT} \mathbb{E}^{(\pi)} \{ \mathbb{E} [\max(S_T - K, 0) | S_0] \} \\ &= e^{-rT} \int_{h>0} \left\{ \int_{s>K} (s - K) f_{S_T|S_0}(s) ds \right\} \pi(h) d\nu(h), \end{aligned} \quad (28.27)$$

donde la densidad condicional de S_T , dado S_0 , satisface

$$f_{S_T|S_0}(s) = \frac{h^{1/2}}{s\sqrt{2\pi T}} \exp \left\{ -\frac{h}{2T} \left(G(s) + \frac{T}{2h} \right)^2 \right\}$$

y

$$G(s) = \ln \left(\frac{s}{S_0 e^{rT}} \right).$$

Si se supone que se cumplen las condiciones requeridas para aplicar el teorema de Fubini, de tal forma que se puede garantizar que las integrales se pueden intercambiar, entonces (28.27) conduce a

$$c = \frac{e^{-rT} \beta^\alpha}{\sqrt{2\pi T} \Gamma(\alpha)} \int_{s>K} \left(1 - \frac{K}{s} \right) \mathcal{I}(s | \alpha, \beta) ds, \quad (28.28)$$

donde

$$\mathcal{I}(s | \alpha, \beta) = \int_{h>0} \exp \left\{ -\frac{h}{2T} \left(G(s) + \frac{T}{2h} \right)^2 \right\} h^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-\beta h} d\nu(h). \quad (28.29)$$

Ahora, observe que (28.29) puede ser reescrita como

$$\mathcal{I}(s | \alpha, \beta) = \exp \left\{ \frac{-G(s)}{2} \right\} \int_{h>0} \exp \left\{ -A(s)h - \frac{B}{h} \right\} h^{\delta-1} d\nu(h), \quad (28.30)$$

donde

$$A(s) = \left(\frac{G(s)^2}{2T} + \beta \right) > 0,$$

$$B = \frac{T}{8} > 0$$

y

$$\delta = \alpha + \frac{1}{2} > 0.$$

La integral en la ecuación (28.30) satisface

$$\int_{h>0} \exp \left\{ -A(s)h - \frac{B}{h} \right\} h^{\delta-1} d\nu(h) = 2 \left(\frac{B}{A(s)} \right)^{\frac{\delta}{2}} \mathcal{K}_\delta \left(2\sqrt{BA(s)} \right), \quad (28.31)$$

donde $\mathcal{K}_\delta(x)$, $x = 2\sqrt{BA(s)}$, es la función de Bessel modificada, de segunda clase, de orden δ , la cual es solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\delta^2}{x^2}\right)y = 0, \quad x > 0. \quad (28.32)$$

También, se tiene que $\mathcal{K}_\delta(x)$ siempre es positiva y $\mathcal{K}_\delta(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. La ecuación (28.31) es de notable importancia debido a que establece que toda la información adicional sobre la volatilidad, proporcionada por la distribución *a priori*, y la información relevante del proceso que conduce la dinámica del activo subyacente están ahora en \mathcal{K}_δ .

28.17 Elasticidad constante de la varianza del rendimiento

En esta sección se estudia el caso de la elasticidad constante de la varianza instantánea del rendimiento del activo. Se supone que el precio del activo subyacente, S_t , es guiado por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = rS_t dt + h^{-1/2} S_t^{b/2} dW_t,$$

donde la elasticidad de la varianza de los rendimientos con respecto al precio está dado por $b - 2$. Si $b = 2$, entonces la elasticidad es cero y el precio del activo se distribuye como una variable aleatoria log-normal. Esta sección se concentra en el caso $b < 2$. Despues de calcular el Jacobiano para transformar $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$ en S_T , se obtiene que la función de densidad condicional de S_T , dado S_t , satisface

$$f_{S_T|S_0}(s) = \frac{h}{\delta} D [UV(s)^{1-2b}]^{1/(4-2b)} e^{-h[U+V(s)]} I_\delta \left(2h\sqrt{UV(s)}\right),$$

donde

$$\begin{aligned} \delta &= 1/(2-b), \\ D &= \left[\frac{2r}{(2-b)[e^{r(2-b)T} - 1]} \right]^{1/(2-b)}, \\ U &= (DS_0 e^{rT})^{2-b}, \\ V(s) &= (Ds)^{2-b} \end{aligned}$$

y $I_\delta(x)$, $x = 2h\sqrt{UV(s)}$, es la función de Bessel modificada de primera clase de orden δ . Si se supone que la distribución *a priori* es descrita por la función de densidad Gamma, entonces

$$c = \frac{De^{-rT}\beta^\alpha}{\delta\Gamma(\alpha)} \int_{s>K} (s-K) [UV(s)^{1-2b}]^{1/(4-2b)} \mathcal{J}(s|\alpha, \beta) ds,$$

donde

$$\mathcal{J}(s|\alpha, \beta) = \int_{h>0} h^\alpha e^{-h[\beta+U+V(s)]} I_\delta \left(2h\sqrt{UV(s)}\right) d\nu(h).$$

Esta función está relacionada con la función de densidad ji-cuadrada no central. Además,

$$I_\delta \left(2h\sqrt{UV(s)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{\delta+2k} \frac{[UV(s)]^{k+(\delta/2)}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\delta+k+1)}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(s|\alpha, \beta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[UV(s)]^{k+(\delta/2)}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\delta+k+1)} \int_{h>0} h^{\alpha+\delta+2k} e^{-h[\beta+U+V(s)]} d\nu(h) \\ &= \frac{[UV(s)]^{\delta/2}}{(\beta+U+V(s))^{\alpha+\delta+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[UV(s)]^k \Gamma[\alpha+\delta+2k+1]}{\Gamma(k+1)\Gamma(\delta+k+1) (\beta+U+V(s))^{2k}}. \end{aligned}$$

En el caso particular de que no exista información *a priori*, la solución del problema de maximización de $H[\pi(h)]$, sujeto a la restricción normalizada, conducirá a una distribución uniforme impropia, es decir, $\pi(h) \equiv 1$ casi dondequiera con respecto a ν . De esta manera,

$$c = S_0 \int_{h(DK)^{2-b}}^{\infty} e^{-h(U+Dz^{2-b})} \left(\frac{Dz^{2-b}}{U} \right)^{1/(4-2b)} I_{\delta} \left(2h\sqrt{UDz^{2-b}} \right) dz \\ - Ke^{-rT} \int_{h(DK)^{2-b}}^{\infty} e^{-h(U+Dz^{2-b})} \left(\frac{U}{Dz^{2-b}} \right)^{1/(4-2b)} I_{\delta} \left(2h\sqrt{UDz^{2-b}} \right) dz,$$

donde $z = [V(s)/D]^{1/(2-b)}$.

28.18 Aproximaciones asintóticas para el problema de valuación Bayesiana

En esta sección se obtiene una aproximación asintótica para la valuación de una opción europea de compra de acuerdo con las ecuaciones (28.28)-(28.31). Con el propósito de utilizar aproximaciones asintóticas para la ecuación (28.31), se hace primero un supuesto sobre el precio de ejercicio, K . Observe que si el precio de ejercicio, K , es grande, entonces x es grande. De esta manera, se puede utilizar la siguiente aproximación:

$$\mathcal{K}_{\delta}(x) \sim \widehat{\mathcal{K}}_{\delta}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + \frac{4\delta^2 - 1}{8x} \right).$$

En este caso, la prima se estima mediante

$$\widehat{c} = S_0 \widehat{\mathcal{M}}_1(S_0, T, K, r | \alpha, \beta) - e^{-rT} K \widehat{\mathcal{M}}_2(S_0, T, K, r | \alpha, \beta),$$

donde

$$\widehat{\mathcal{M}}_1 = \frac{\sqrt{2}\beta^{\alpha}}{S_0 \sqrt{\pi T} \Gamma(\alpha)} \int_K^{\infty} e^{-(\frac{1}{2}G(s)+rT)} \left(\frac{T}{8A(s)} \right)^{\frac{\delta}{2}} \widehat{\mathcal{K}}_{\delta}(2\sqrt{BA(s)}) ds$$

y

$$\widehat{\mathcal{M}}_2 = \frac{\sqrt{2}\beta^{\alpha}}{\sqrt{\pi T} \Gamma(\alpha)} \int_K^{\infty} \frac{1}{s} e^{-\frac{1}{2}G(s)} \left(\frac{T}{8A(s)} \right)^{\frac{\delta}{2}} \widehat{\mathcal{K}}_{\delta}(2\sqrt{BA(s)}) ds.$$

Las integrales $\widehat{\mathcal{M}}_1$ y $\widehat{\mathcal{M}}_2$ pueden ser aproximadas utilizando un límite superior suficientemente grande en dichas integrales, ya que $\mathcal{K}_{\delta}(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Los límites superiores de las integrales $\widehat{\mathcal{M}}_1$ y $\widehat{\mathcal{M}}_2$ son tomados lo suficientemente grandes, de tal manera que los valores de $\widehat{\mathcal{M}}_1$ y $\widehat{\mathcal{M}}_2$ no tengan cambios sustanciales cuando dichos límites se cambian por otros más grandes (dentro de un error del 0.0001).

28.19 Aproximaciones polinomiales para el problema básico de valuación Bayesiana

Las aproximaciones polinomiales, para el planteamiento del problema de valuación Bayesiana básica en las ecuaciones (28.28)-(28.31), son calculadas sólo para algunos valores numéricos de los parámetros. En este caso, se aplica el método de Frobenius para obtener una aproximación polinomial de orden finito. Considere el caso particular $\alpha = 0.5$, i.e., $\delta = 1$, en la ecuación (28.29). La siguiente aproximación polinomial está basada en el método de expansión en series de potencias convergente de Frobenius:

$$\mathcal{K}_1(x) = \frac{1}{x} \left[x \ln \left(\frac{x}{2} \right) I_1(x) + \sum_{k=0}^6 a_k \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} + \epsilon \right], \quad 0 < x \leq 2, \quad (28.33)$$

donde $a_0 = 1$, $a_1 = 0.15443144$, $a_2 = -0.67278579$, $a_3 = -0.18156897$, $a_4 = -0.01919402$, $a_5 = -0.0110404$, $a_6 = -0.00004686$ y la función

$$I_1(x) = x \left[\sum_{k=0}^6 b_k \left(\frac{4x}{15} \right)^{2k} + \epsilon \right], \quad -\frac{15}{4} < x \leq \frac{15}{4},$$

satisface $b_0 = 1/2$, $b_1 = 0.878900594$, $b_2 = 0.51498869$, $b_3 = 0.15084934$, $b_4 = 0.02658733$, $b_5 = 0.00301532$, $b_6 = 0.00032411$, y $|\epsilon| < 8 \times 10^{-9}$. Los polinomios complementarios están dados por

$$\mathcal{K}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}e^x} \left[\sum_{k=0}^6 \bar{a}_k \left(\frac{x}{2} \right)^{-2k} + \bar{\epsilon} \right], \quad x > 2, \quad (28.34)$$

donde $\bar{a}_0 = 1.25331414$, $\bar{a}_1 = 0.23498619$, $\bar{a}_2 = -0.03655620$, $\bar{a}_3 = 0.01504268$, $\bar{a}_4 = -0.00780353$, $\bar{a}_5 = 0.00325614$, $\bar{a}_6 = -0.00068245$ y la función

$$I_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}e^{-x}} \left[\sum_{k=0}^8 \bar{b}_k \left(\frac{4x}{15} \right)^{-k} + \bar{\epsilon} \right], \quad x > \frac{15}{4},$$

satisface $\bar{b}_0 = 0.39894228$, $\bar{b}_1 = -0.03988024$, $\bar{b}_2 = -0.00362018$, $\bar{b}_3 = 0.00163801$, $\bar{b}_4 = -0.01031555$, $\bar{b}_5 = 0.02282967$, $\bar{b}_6 = -0.02895312$, $\bar{b}_7 = 0.01787654$, $\bar{b}_8 = -0.00420059$ y $|\bar{\epsilon}| < 2.2 \times 10^{-7}$. Es importante señalar que $\mathcal{K}_1(x)$ e $I_1(x)$ son funciones modificadas de Bessel linealmente independientes, de esta manera se determina una solución única de la ecuación diferencial de Bessel.

Si se denota por $\mathcal{K}_1^{(\epsilon)}(x)$ la aproximación polinomial en las ecuaciones (28.33) y (28.34), se obtiene de las ecuaciones (28.28)-(28.31) el siguiente precio aproximado de la opción europea de compra:

$$c^{(\epsilon)} = S_0 \mathcal{M}_1(S_0, T, K, r | \alpha = 0.5, \beta) - e^{-rT} K \mathcal{M}_2(S_0, T, K, r | \alpha = 0.5, \beta),$$

donde

$$\mathcal{M}_1^{(\epsilon)} = \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{2S_0\pi} \int_K^\infty e^{-(\frac{1}{2}G(s)+rT)} [A(s)]^{-\frac{1}{2}} \mathcal{K}_1^{(\epsilon)} \left(\sqrt{\frac{T A(s)}{2}} \right) ds$$

y

$$\mathcal{M}_2^{(\epsilon)} = \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_K^\infty \frac{1}{s} e^{-\frac{1}{2}G(s)} [A(s)]^{-\frac{1}{2}} \mathcal{K}_1^{(\epsilon)} \left(\sqrt{\frac{T A(s)}{2}} \right) ds.$$

Las integrales $\mathcal{M}_1^{(\epsilon)}$ y $\mathcal{M}_2^{(\epsilon)}$ pueden ser aproximadas como antes. Diversas aplicaciones de la fórmula anterior pueden ser encontradas en las referencias del presente capítulo.

28.20 Conclusiones

La información *a priori* es un resultado subjetivo, esto es, diferentes individuos tienen distintas creencias iniciales. Es difícil aceptar que todos los individuos que participan en un mercado específico puedan describir su conocimiento inicial con la misma forma funcional para la distribución *a priori* y es aún más difícil reconocer que todas las distribuciones tengan los mismos parámetros. La existencia de una distribución *a priori* es útil para describir creencias iniciales en mercados mucho más complejos (no homogéneos) que el mercado ingenuo de Black-Scholes.

28.21 Bibliografía sugerida

- Islas Camargo, A. and F. Venegas-Martínez (2003). “Pricing Derivatives Securities with Prior Information on Long-memory Volatility”. *Economía Mexicana, Nueva Época*, Vol. 12, No. 1, pp. 103-134.
- Venegas-Martínez, F. (1990). “On Regularity and Optimality Conditions for Maximum Entropy Priors”. *The Brazilian Journal of Probability and Statistics*, Vol. 4, pp. 105-136.

- Venegas-Martínez, F. (1990). "Supplementary Prior Information, Computational Aspects, and Classification". *Journal of the Inter-American Statistical Institute*, Vol. 42, No. 139, pp. 64-80.
- Venegas-Martínez, F. (1990). "Supplementary Prior Information". Contributions to Probability and Mathematical Statistics, *CLAPEM Proceedings*, Vol. 4, pp. 228-237.
- Venegas-Martínez, F. (1992). "Entropy Maximization and Cross-Entropy Minimization on Quantiles: A Matrix Approach". *Agrociencia, Serie Matemáticas Aplicadas, Estadística y Computación*, Vol. 3, No. 2, pp. 71-76.
- Venegas-Martínez, F. (1993). "Learning on Utility Parameters". *Recent Advances in Bayesian Statistics and Econometrics*, Proceedings, Vol. 2, pp. 65-83.
- Venegas-Martínez, F. (1997). "On Information Functionals and Priors". Memoria del XII Foro Nacional de Estadística. *Asociación Mexicana de Estadística*, INEGI, Resúmenes in extenso, pp. 183-188.
- Venegas-Martínez, F. (2000). "Utilidad, aprendizaje y estabilización". *Gaceta de Economía*, Año 5, No. 10, pp. 153-169.
- Venegas-Martínez, F. (2002). "Bayesian Procedures for Pricing Contingent Claims: Prior Information on Volatility". *Morfismos*, Vol. 6. No.2, pp. 25-41.
- Venegas-Martínez, F. (2004). "On Information Measures and Prior Distributions: A Synthesis". *Morfismos*, Vol. 8, No. 2, pp. 27-51.
- Venegas-Martínez, F. (2005). "Bayesian Inference, Prior Information on Volatility, and Option Pricing: A Maximum Entropy Approach". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 8, No. 1, pp. 1-12.
- Venegas-Martínez, F. and A. Islas Camargo (2005). "Volatilidad en los mercados de América Latina". *Comercio Exterior*, Vol. 55. No. 11, pp. 936-947
- Venegas-Martínez, F., E. de Alba, and M. Ordorica (1995). "An Economist's Guide to The Kalman Filter". *Estudios Económicos*, Vol. 10, No. 20, pp. 123-145.
- Venegas-Martínez, F., E. de Alba, and M. Ordorica (1999). "On Information, Priors, Econometrics, and Economic Modeling". *Estudios Económicos*, Vol. 14, No. 27, pp. 53-86.
- Venegas-Martínez, F. y G. Pérez-Lechuga (2003). "Prior Information in Stochastic Optimization: Quasigradient Methods". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, Vol. 2, No. 2, pp. 175-192.
- Zellner, A. (1991). Bayesian Methods and Entropy in Economics and Econometrics, Maximum Entropy and Bayesian Methods (W. T. Grandy and L. H. Schick, eds.), Dordrecht, Netherlands: Kluwer, pp. 17-31.
- Zellner, A. (1996). "Models, Prior Information and Bayesian Analysis". *Journal of Econometrics*, Vol. 75, No. 1, pp. 51-58.
- Zellner, A. (1996). "Past and Recent Results on Maximal Data Information Priors". *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 49, No. 1, pp. 3-8.

28.22 Ejercicios

28.1 Considere el problema de cálculo de variaciones:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad H(\pi) &= - \int_{\Theta} \pi(\theta) \ln \pi(\theta) d\theta, \\ \text{sujeto a:} \quad &\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_{\Theta} a_k(\theta) \pi(\theta) d\theta = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Muestre que una condición necesaria de un óptimo, π^* , está dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi^*(\theta) = \exp \left\{ \lambda_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k(\theta) \right\}, \\ 1 - \int_{\Theta} \pi^*(\theta) d\theta = 0, \\ \int_{\Theta} [\alpha_k - a_k(\theta)] \pi^*(\theta) d\theta = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{array} \right.$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones.

28.2 Considere el problema de cálculo de variaciones,

$$\text{Minimizar} \quad H(\pi, p) = \int_{\Theta} \pi(\theta) \ln \frac{\pi(\theta)}{p(\theta)} d\theta,$$

$$\text{sujeto a: } \begin{cases} \int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_{\Theta} a_k(\theta) \pi(\theta) d\theta = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Muestre que una condición necesaria de un óptimo, π^* , está dada por:

$$\begin{cases} \pi^*(\theta) = p(\theta) \exp \left\{ -\lambda_0 - \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k(\theta) \right\}, \\ 1 - \int_{\Theta} \pi^*(\theta) d\theta = 0, \\ \int_{\Theta} (\alpha_k - a_k(\theta)) \pi^*(\theta) d\theta = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones.

28.3 Resuelva el problema

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad H(\pi) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta) \log \pi(\theta) d\theta, \quad -\infty < \theta < \infty, \\ \text{sujeto a: } &\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta) d\theta = 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \theta \pi(\theta) d\theta = \mu_0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (\theta - \mu_0)^2 \pi(\theta) d\theta = \sigma_0^2. \end{cases} \end{aligned}$$

28.4 Sean $\{\bar{a}_k\}$ y $\{\bar{b}_k\}$ dos conjuntos de números positivos, cada uno con m elementos. Suponga ahora que la densidad Gaussiana multivariada

$$p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) = p_1(\theta_1)p_2(\theta_2) \cdots p_m(\theta_m) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} \left[\prod_{k=1}^m \bar{b}_k \right]^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^m \frac{\theta_k^2}{\bar{b}_k} \right\},$$

es la densidad *a priori* del individuo. Por simplicidad se supone que el vector de medias es cero. Resuelva el siguiente problema de mínima entropía cruzada

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad H(\pi, p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \log \frac{\pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)}{p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)} d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_m, \\ \text{sujeto a: } &\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_m = 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \theta_k^2 d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_m = \bar{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \end{aligned}$$

28.5 Suponga que el activo subyacente, S_t , es conducido por

$$dS_t = rS_t dt + h^{-1/2} S_t^{b/2} dW_t,$$

Asimismo, suponga que $b < 2$. Si no existe información *a priori*, la solución del problema de maximización $H[\pi(h)]$, sujeto a la restricción normalizada, conducirá a una distribución uniforme impropia, es decir, $\pi(h) \equiv 1$ casi dondequiera con respecto a ν . Muestre, en este caso, que

$$\begin{aligned} c = S_0 & \int_{h(DK)^{2-b}}^{\infty} e^{-h(U+Dz^{2-b})} \left(\frac{Dz^{2-b}}{U} \right)^{1/(4-2b)} I_{\delta} \left(2h\sqrt{UDz^{2-b}} \right) dz \\ & - Ke^{-rT} \int_{h(DK)^{2-b}}^{\infty} e^{-h(U+Dz^{2-b})} \left(\frac{U}{Dz^{2-b}} \right)^{1/(4-2b)} I_{\delta} \left(2h\sqrt{UDz^{2-b}} \right) dz, \end{aligned}$$

donde $z = [V(s)/D]^{1/(2-b)}$.

28.6 Considere la fórmula de valuación Bayesiana de una opción de compra europea mediante aproximaciones polinomiales (sección 28.19):

$$c^{(\epsilon)} = S_0 \mathcal{M}_1(S_0, T, K, r | \alpha = 0.5, \beta) - e^{-rT} K \mathcal{M}_2(S_0, T, K, r | \alpha = 0.5, \beta),$$

donde

$$\mathcal{M}_1^{(\epsilon)} = \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{2S_0\pi} \int_K^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}G(s)+rT\right)} [A(s)]^{-\frac{1}{2}} \mathcal{K}_1^{(\epsilon)} \left(\sqrt{\frac{TA(s)}{2}} \right) ds$$

y

$$\mathcal{M}_2^{(\epsilon)} = \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_K^{\infty} \frac{1}{s} e^{-\frac{1}{2}G(s)} [A(s)]^{-\frac{1}{2}} \mathcal{K}_1^{(\epsilon)} \left(\sqrt{\frac{TA(s)}{2}} \right) ds.$$

Valúe una opción con $\beta = \alpha = 0.5$, $S_0 = 42.00$, $K = 41.00$, $r = 0.11$, y $T = 0.25$.

VI. OPCIONES AMERICANAS

- 29. Modelo de Barone-Adesi y Whaley de opciones americanas
 - 30. Modelo de Whaley de opciones americanas

CAPÍTULO 29

MODELO DE BARONE-ADESI Y WHALEY PARA VALUAR OPCIONES AMERICANAS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Valuación de opciones americanas
- Premio por ejercicio anticipado
- Condiciones finales y de frontera
- Algoritmo de Barone-Adesi y Whaley

29.1 Introducción

Una opción americana otorga al tenedor el derecho de ejercerla en cualquier momento, antes de la fecha de vencimiento. La mayor parte de las opciones que se negocian son justamente del tipo americanas. En el caso de una opción europea el ejercicio sólo puede llevarse a cabo en la fecha de vencimiento. En consecuencia, la valuación de una opción americana utilizando la fórmula de Black y Scholes (1973) para opciones europeas conduce, en general, a resultados poco satisfactorios. De hecho, dado que la opción americana otorga un derecho mayor, ésta debe ser más cara.

En este capítulo se presenta el modelo de Barone-Adesi y Whaley, el cual proporciona una fórmula, sencilla, de aproximación para valuar opciones americanas sobre diversos subyacentes. La metodología propuesta consiste en descomponer el precio de la opción en el precio de una opción europea y el premio por ejercicio anticipado. Posteriormente, se utiliza la teoría disponible de Black y Scholes para opciones europeas y se plantea una ecuación diferencial parcial para el premio por ejercicio anticipado. Dicha ecuación diferencial se reduce a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, cuya solución proporciona una valuación aproximada de una opción americana.

29.2 Planteamiento del problema de valuación

Considere un movimiento Browniano $(W_t)_{t \in [0, T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Se supone que el precio del activo subyacente al tiempo t , S_t , es conducido por un movimiento geométrico Browniano, neutral al riesgo,

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (29.1)$$

donde r es una tasa de interés constante y libre de riesgo de incumplimiento y σ es la volatilidad instantánea del activo. Se supone que el subyacente es una acción con una estructura de dividendos dada por

$$dD_t = qS_t dt, \quad (29.2)$$

donde q es la tasa instantánea de pago de dividendos.

29.3 Enfoque de ecuaciones diferenciales parciales para la valuación de opciones americanas

Si $C = C(S_t, t)$ denota el precio de una opción americana de compra y K es el precio de ejercicio, entonces se debe satisfacer la restricción

$$C(S_t, t) \geq \max(S_t - K, 0),$$

ya que una opción americana es más cara que una europea. El atractivo de adquirir este tipo de instrumentos radica en que deben existir valores del subyacente para los cuales el ejercicio anticipado pueda proporcionar mejores ganancias que las que se obtendrían en la fecha de vencimiento. De otra manera, los agentes sólo comprarían opciones europeas. El problema de valuación de una opción americana es, claramente, más complicado que el de la opción europea, ya que no sólo hay que determinar el valor de la opción en cada instante, sino también hay que especificar si se ejerce o no la opción para cada valor S_t . Usualmente, esto último, se lleva a cabo estableciendo un valor crítico, S^* , para cada t , el cual marca la frontera entre dos regiones: en una de las cuales se debe ejercer la opción y en la otra mantenerla. Por simplicidad se supondrá que dicho valor es único. Por ejemplo, en el caso de una opción americana de compra, si $S_t \geq S^*$, la opción debe ejercerse y si $S_t < S^*$, la opción debe mantenerse. En la terminología de las ecuaciones diferenciales parciales esto se conoce como un problema de frontera libre. Por último, se acostumbra decir que es óptimo ejercer la opción si el precio del subyacente se encuentra en la región de ejercicio.

Si no es óptimo el ejercicio anticipado, entonces el precio de una opción americana de compra, $C = C(S_t, t)$, satisface la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} + (r - q)S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} - rC = 0. \quad (29.3)$$

29.4 Premio por ejercicio anticipado

Dado que una opción americana es más cara, si $\epsilon(S_t, t)$ denota el premio por el ejercicio anticipado de la opción, entonces

$$C(S_t, t) = c_{\text{BS}}(S_t, t) + \epsilon(S_t, t), \quad (29.4)$$

equivalentemente

$$\epsilon(S_t, t) = C(S_t, t) - c_{\text{BS}}(S_t, t). \quad (29.5)$$

Ahora bien, debido a que $C(S_t, t)$ también satisface una ecuación similar a (29.3), por supuesto, con diferentes condiciones de frontera, entonces

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial S_t^2} + (r - q)S_t \frac{\partial \epsilon}{\partial S_t} - r\epsilon = 0. \quad (29.6)$$

Si se define el cambio de variable

$$\tau = T - t$$

junto con dos nuevos parámetros

$$M = 2r\sigma^{-2} \quad \text{y} \quad N = 2(r - q)\sigma^{-2} - 1,$$

la ecuación (29.6) se puede reexpresar como:

$$-\frac{M}{r} \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + S_t^2 \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial S_t^2} + (N + 1)S_t \frac{\partial \epsilon}{\partial S_t} - M\epsilon = 0. \quad (29.7)$$

Si se supone una solución de la forma $\epsilon(S_t, g) = g(\tau)f(S_t, g(\tau))$, con $f(S_t, 0) = 0$, entonces se tiene que:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial S_t} = g \frac{\partial f}{\partial S_t}, \quad (29.8)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial S_t^2} = g \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \quad (29.9)$$

y

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} = \frac{dg}{d\tau} f + g \frac{\partial f}{\partial g} \frac{dg}{d\tau} = \frac{dg}{d\tau} \left(f + g \frac{\partial f}{\partial g} \right). \quad (29.10)$$

Si se sustituyen (29.8)-(29.10) en (29.6) y se factoriza g se obtiene que:

$$S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + (N+1)S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - Mf \left[1 + \frac{1}{rg} \frac{dg}{d\tau} \left(1 + \frac{g}{f} \frac{\partial f}{\partial g} \right) \right] = 0. \quad (29.11)$$

Si se elige como candidato de g a $g(\tau) = 1 - e^{-r\tau}$, entonces

$$\frac{1}{r} \frac{dg}{d\tau} = 1 - g(\tau).$$

En consecuencia, (29.11) se transforma en

$$S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + (N+1)S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - \frac{M}{g} f - (1-g)M \frac{\partial f}{\partial g} = 0. \quad (29.12)$$

29.5 Aproximación del precio de la opción americana de compra

Observe que cuando $\tau \rightarrow \infty$, entonces $1 - g \rightarrow 0$. Por lo tanto, para tiempos de vencimiento grandes el último término de (29.12) es insignificante. Se supone ahora que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial g} = 0, \quad (29.13)$$

así

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{dg}{d\tau} f = \lim_{\tau \rightarrow 0} re^{-r\tau} f(S_t, 1 - e^{-r\tau}) = rf(S_t, 0) = 0.$$

En consecuencia, para tiempos de vencimiento pequeños $\partial f / \partial g$ es insignificante. Por lo tanto, el último término de (29.12) puede ser eliminado, con lo cual

$$S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + (N+1)S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - \frac{M}{g} f = 0. \quad (29.14)$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en f . Se supone una solución de la forma $f(S_t, g) = aS_t^q$ con $q = q(g)$. Observe primero que

$$\frac{\partial f}{\partial S_t} = aqS_t^{q-1} \quad (29.15)$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = aq(q-1)S_t^{q-2}. \quad (29.16)$$

La sustitución de (29.15) y (29.16) en (29.14) conduce a:

$$aS_t^q \left(q^2 + Nq - \frac{M}{g} \right) = 0. \quad (29.17)$$

Las raíces de la ecuación cuadrática dentro del paréntesis son:

$$q_1 = \frac{-N - \sqrt{N^2 + 4(M/g)}}{2} \quad \text{y} \quad q_2 = \frac{-N + \sqrt{N^2 + 4(M/g)}}{2}. \quad (29.18)$$

Observe que $M/g > 0$ implica $q_1 < 0$ y $q_2 > 0$. Además, ambas raíces q_1 y q_2 dependen de g . De tal modo que la solución de la ecuación diferencial (29.14) está dada por la combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes:

$$f(S_t, g) = \alpha S_t^{q_1} + \beta S_t^{q_2}, \quad (29.19)$$

donde α y β son constantes por determinar. Ahora bien, dado que $q_1 < 0$, si se supone $\alpha \neq 0$, entonces $S_t \rightarrow 0$ conduce a $f \rightarrow \infty$. Esto es imposible ya que si $S_t \rightarrow 0$, el premio por ejercicio anticipado también debería hacerlo. Por lo tanto, $\alpha = 0$ y el premio por ejercicio anticipado está definido únicamente por el segundo término de $f(S_t, g)$, lo que reduce la expresión de valuación de la opción americana de compra, (29.4), a:

$$C(S_t, \tau) = c_{BS}(S_t, \tau) + \beta g S_t^{q_2}. \quad (29.20)$$

Observe que esta expresión cumple que si $S_t = 0$, entonces también $C(S_t, \tau) = 0$. Además, si S_t aumenta, entonces también $C(S_t, \tau)$ debe aumentar. Por lo tanto, $\beta > 0$. Sean S^* y $\beta > 0$ tales que

$$S^* - K = c(S^*, \tau) + g(\tau)\beta(S^*)^{q_2}, \quad (29.21)$$

donde K es el precio de ejercicio y S^* es el precio crítico por ejercicio anticipado. Si $S_t \geq S^*$, entonces se puede escribir que

$$S_t - K \geq c(S^*, \tau) + g(\tau)\beta(S^*)^{q_2}, \quad (29.22)$$

y el precio de la opción americana es $C(S_t, \tau) = S_t - K$. Mientras que para precios $S_t < S^*$, el lado derecho de (29.20) es igual $C(S_t, \tau)$. Adicionalmente, las pendientes de los lados derecho e izquierdo de (29.21) deben ser iguales. En consecuencia, después de derivar (29.21) con respecto de S^* , se sigue que

$$1 = e^{-q\tau}\Phi[d_1(S^*)] + g(\tau)q_2\beta(S^*)^{q_2-1}, \quad (29.23)$$

donde

$$d_1(S^*) = \frac{\ln\left(\frac{S^*}{K}\right) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

y $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar. En conclusión, la solución (S^*, β) del sistema de ecuaciones (29.21) y (29.23) debe satisfacer

$$\begin{cases} S^* - K = c_{BS}(S^*, \tau) + \frac{\{1 - e^{-q\tau}\Phi[d_1(S^*)]\}S^*}{q_2}, \\ \beta = \frac{1 - e^{-q\tau}\Phi[d_1(S^*)]}{g(\tau)q_2(S^*)^{q_2-1}}. \end{cases} \quad (29.24)$$

La primera ecuación de (29.24) sólo depende de S^* , en cuyo caso el valor de S^* tiene que ser determinado por algún método iterativo. Una vez que se cuenta con dicho valor, éste es sustituido en la segunda ecuación. El precio de la opción americana de compra es

$$C(S_t, \tau) = \begin{cases} c_{BS}(S_t, \tau) + A_2 \left(\frac{S_t}{S^*} \right)^{q_2}, & \text{si } S_t < S^*, \\ S_t - K, & \text{si } S_t \geq S^*, \end{cases} \quad (29.25)$$

donde

$$A_2 = \frac{S^*}{q_2} \{1 - e^{-q\tau}\Phi[d_1(S^*)]\} > 0. \quad (29.26)$$

También, cabe mencionar, por más obvio que parezca, que se puede demostrar que a medida que $\tau \rightarrow 0$, el premio por ejercicio anticipado tiende a desaparecer, es decir, $C(S_t, \tau) \rightarrow c_{BS}(S_t, \tau)$. En efecto, si $\tau \rightarrow 0$, entonces $g \rightarrow 0$ y $1/q_2 \rightarrow 0$. Asimismo, si $\tau \rightarrow 0$, entonces $d_1(S^*) \rightarrow \infty$ y así $\Phi[d_1(S^*)] \rightarrow 1$ y $A_2 \rightarrow 0$. Por lo tanto, $C(S_t, \tau) \rightarrow c_{BS}(S_t, \tau)$ cuando $\tau \rightarrow 0$.

29.6 Aproximación del precio de la opción americana de venta

La aproximación cuadrática para el valor de la opción americana de venta se desarrolla con las mismas ideas expuestas, excepto que en vez de tomar $\alpha = 0$, se considera $\beta = 0$, de tal modo que $P(S_t, \tau) = p_{BS}(S_t, \tau) + g(\tau)\alpha S_t^{q_1}$. También, en este caso se plantea un precio crítico de ejercicio anticipado S^{**} , de tal forma que

$$\begin{cases} K - S^{**} = p(S^{**}, \tau) - \frac{\{1 - e^{-q\tau}\Phi[-d_1(S^{**})]\}S^{**}}{q_1}, \\ \alpha = -\frac{1 - e^{-q\tau}\Phi[-d_1(S^{**})]}{g(\tau)q_1(S^{**})^{q_1-1}}. \end{cases} \quad (29.27)$$

Una vez que S^{**} es determinada se calcula el valor de α . De esta manera,

$$P(S_t, \tau) = \begin{cases} p_{BS}(S_t, \tau) + A_1(S_t/S^{**})^{q_1}, & \text{si } S_t > S^{**}, \\ K - S_t, & \text{si } S_t \leq S^{**}, \end{cases} \quad (29.28)$$

donde

$$A_1 = -(S^{**}/q_1) \{1 - e^{-q\tau}\Phi[-d_1(S^{**})]\}. \quad (29.29)$$

Observe que $A_1 > 0$ ya que $q_1 < 0$, $S^{**} > 0$ y $0 < \Phi[-d_1(S^{**})] < 1$.

29.7 Algoritmo de Barone-Adesi y Whaley para valuar opciones americanas

Barone-Adesi y Whaley sugieren un proceso iterativo basado en el método de Newton-Raphson, para encontrar el valor crítico S^* . Considere un valor inicial, o semilla, S_1 y defina $L(S_1)$ y $R(S_1)$ como los lados izquierdo y derecho, respectivamente, de la primera ecuación en (29.24), evaluados en S_1 . Es decir,

$$L(S_1) = S_1 - K \quad \text{y} \quad R(S_1) = c_{BS}(S_1, \tau) + \frac{[1 - e^{-q\tau}\Phi[d_1(S_1)]]S_1}{q_2},$$

donde

$$d_1(S_1) = \frac{\ln\left(\frac{S_1}{K}\right) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Para calcular el siguiente valor, S_2 , considere la pendiente de R en S_1 , es decir,

$$b_1 := \frac{\partial R(S_1)}{\partial S_1} = e^{-q\tau}\Phi(d_1(S_1)) \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) + \left[1 - \left(\frac{e^{-q\tau}\phi(d_1(S_1))}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right] \frac{1}{q_2},$$

donde $\phi(\cdot)$ es la función de densidad de una variable normal estándar. A continuación se determina la línea tangente a la curva $R(S_1)$ que intersecta a L , es decir,

$$R(S_1) + b_1(S_t - S_1) = S_t - K.$$

A despejar S de la ecuación anterior se obtiene S_2 , así

$$S_2 = \frac{K + R(S_1) - b_1 S_1}{1 - b_1}.$$

Este procedimiento se repite iterativamente hasta que se produzca un valor S_i que satisfaga el siguiente criterio de convergencia:

$$\frac{|L(S_i) - R(S_i)|}{K} < 0.00001$$

Barone-Adesi y Whaley sugieren un valor inicial que se obtiene a partir de la primera ecuación en (29.24) cuando $\tau \rightarrow \infty$,

$$S_1 = K + [S^*(\infty) - K] [1 - e^{h_2}],$$

donde

$$h_2 = -((r - q)\tau + 2\sigma\sqrt{\tau}) \left[\frac{K}{(S^*(\infty) - K)} \right].$$

En este caso, $S^*(\infty)$ se define como

$$S^*(\infty) = \frac{K}{1 - 2[-N + \sqrt{N^2 + 4M}]^{-1}}.$$

Para la opción de venta, tendríamos que:

$$L(S_i) = K - S_i, \quad R(S_i) = p_{BS}(S_i, \tau) - \frac{[1 - e^{(b-r)\tau} N(-d_1(S_i))]S_i}{q_1}.$$

En tal caso, se sugiere empezar el algoritmo con la siguiente semilla:

$$S_1 = S^{**}(\infty) + [K - S^{**}(\infty)] e^{h_1},$$

donde

$$h_1 = -((r - q)\tau - 2\sigma\sqrt{\tau}) \left[\frac{K}{K - S^{**}(\infty)} \right]$$

y

$$S^{**}(\infty) = \frac{K}{1 - 2[-N - \sqrt{N^2 + 4M}]^{-1}}.$$

La utilización de las semillas conduce al criterio de convergencia en aproximadamente tres iteraciones.

29.8 Una aplicación del algoritmo de Barone-Adesi y Whaley

En esta sección se lleva a cabo una aplicación del algoritmo de Barone-Adesi y Whaley para valuar una opción americana. Los parámetros que se consideran en este ejercicio son: $K = 100$, $r = 0.08$, $\tau = 0.25$ y $\sigma = 0.20$, el Cuadro 29.1 muestra los valores de las opciones americanas obtenidas con el algoritmo iterativo de Barone-Adesi y Whaley.

$K = 100, r = 0.08, \tau = 0.25$ y $\sigma = 0.20$		
S_t	$c_{BS}(S_t, t)$	$C(S_t, t)$
80.00	0.03	0.03
90.00	0.57	0.59
100.00	3.42	3.52
110.00	9.85	10.31
120.00	18.62	20.00

Cuadro 29.1 Valuación de opciones americanas.

29.9 Bibliografía sugerida

- Barone-Adesi, G. and R. E. Whaley (1987). "Efficient Analytic Approximation of American Option Values". *Journal of Finance*, Vol. 42, No. 2, pp. 301-320.
- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

29.10 Ejercicios

29.1 Si $C(S_t, t)$ es el precio de una opción americana, muestre que

$$C(S_t, t) > S_t - K.$$

Solución: Obviamente, $C(S_t, t) \geq c_{BS}(S_t, t)$. Asimismo, de la condición de paridad "put-call", se sigue que $p_{BS}(S_t, t) + S_t = c_{BS}(S_t, t) + Ke^{-r(T-t)}$, así $S_t \geq c_{BS}(S_t, t) + Ke^{-r(T-t)}$ ó $c_{BS}(S_t, t) \geq S_t - Ke^{-r(T-t)} > S_t - K$. En consecuencia $C(S_t, t) \geq c_{BS}(S_t, t) > S_t - K$.

29.2 Muestre que la solución general de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{d^2V}{dS_t^2} + (r - q)S_t \frac{dV}{dS_t} - rV = 0$$

está dada por $V(S_t) = AS_t^{q^+} + BS_t^{q^-}$, donde

$$q^\pm = \frac{1}{2} \left[-\frac{2r}{\sigma^2} (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2) \pm \sqrt{\frac{4r^2}{\sigma^2} (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2) + \frac{8r}{\sigma^2}} \right].$$

Muestre que si $P(S_t)$ es una opción americana perpetua de venta, es decir, sin fecha de vencimiento, entonces $P(S_t) = BS_t^{q^-}$, donde

$$B = -\frac{1}{q^-} \left(\frac{K}{(1 - (1/q^-))} \right)^{1+q^-}.$$

En este caso, es óptimo ejercer cuando el activo alcanza el valor $S^* = K/(1 - (1/q^-))$. Asimismo, muestre que si $C(S_t)$ es una opción americana perpetua de compra, entonces $C(S_t) = AS_t^{q^+}$, donde

$$A = \frac{1}{q^+} \left(\frac{K}{(1 - (1/q^+))} \right)^{1+q^+}.$$

En cuyo caso, es óptimo ejercer cuando el activo alcanza el valor $S^* = K/(1 - (1/q^+))$. Lleve a cabo el mismo análisis cuando $q = 0$ con una solución de la forma $V(S_t) = AS_t + BS_t^{-2r/\sigma^2}$.

29.3 Muestre que si $V(S_t, t)$ es una opción americana sobre una acción que no paga dividendos, entonces

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - rV \leq 0.$$

Es decir, si al emisor de la opción no le ejercen, entonces tiene un rendimiento mayor que el de libre de riesgo.

29.4 Aplique el algoritmo de Barone-Adesi y Whaley para valuar una opción americana cuando los valores de los parámetros son: $S_t = 110$, $K = 100$, $r = 0.095$, $\tau = 0.5$ y $\sigma = 0.20$.

29.5 De acuerdo con la sección 29.7, obtenga la fórmula de aproximación para el precio de una opción americana de venta, $P(S_t, \tau)$.

29.6 Denote el precio de una opción americana de compra mediante $C = C(S_t, t)$ y su precio de ejercicio por K . Si se define $\mathcal{T}_{t,T}$ como el conjunto de tiempos τ en los que se alcanza un valor alto de $e^{-r(\tau-t)} \max(S_\tau - K, 0)$ y después dicho valor disminuye, entonces

$$C(S_t, t) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E} \left[e^{-r(\tau-t)} \max(S_\tau - K, 0) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

casi dondequiero. El lado derecho de la ecuación anterior es conocido como la envolvente de Snell. Muestre que la envolvente de Snell acepta la siguiente descomposición:

$$C(S_t, t) = \mathbb{E} \left[e^{-r(T-t)} \max(S_T - K, 0) \mid \mathcal{F}_t \right] + \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-ru} \tau K \mathbf{1}_{\{S_u \geq S^*\}} du \mid \mathcal{F}_t \right]$$

casi dondequiero, donde S^* es tal que $C(S^*, t) = S^* - K$.

29.7 Determine el precio de una opción de venta americana perpetua. Obtenga el valor óptimo del subyacente S^* en el cual la opción se debe ejercer.

29.8 Discuta el caso de una opción de compra americana perpetua cuando el subyacente paga continuamente dividendos a una tasa constante.

CAPÍTULO 30

MODELO DE WHALEY PARA VALUAR OPCIONES AMERICANAS SOBRE UNA ACCIÓN QUE PAGA UN DIVIDENDO

Conceptos básicos de este capítulo:

- Valuación de opciones americanas
- Opciones sobre acciones con dividendos
- Portafolios replicantes
- Distribución normal bivariada

30.1 Introducción

Antes de la publicación del trabajo de Barone-Adesi y Whaley (1987), varios investigadores propusieron fórmulas para la valuación de opciones americanas, entre los que destacan Roll (1977) y Geske (1979) con sus trabajos publicados en el “Journal of Financial Economics”. En sus investigaciones utilizan un portafolio replicante de opciones europeas para valuar una opción americana de compra sobre una acción que paga dividendos conocidos. Sin embargo, en 1981, Robert E. Whaley publica en el mismo “Jurnal” una nota que muestra que hay errores en las fórmulas de valuación de Roll y de Geske, proporcionando la fórmula correcta.

En el presente capítulo se crea un portafolio replicante de tres opciones europeas con diferentes parámetros. Una de estas opciones no se puede valuar directamente mediante la fórmula de Black-Scholes (1973), sino utilizando un esquema de valuación de opciones anidadas, propuesto por Geske (1979).

30.2 Especificación de supuestos y planteamiento del problema de valuación

Suponga que existe un mercado líquido de crédito en el que se puede pedir y prestar a una misma tasa de interés libre de riesgo, r , constante a cualquier plazo. Asimismo, suponga que el mercado de capitales opera sin costos de transacción y que no existen oportunidades de arbitraje. La dinámica estocástica del precio limpio, S_t , de la acción está dada por

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (30.1)$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo crédito, σ es la volatilidad de los rendimientos del precio limpio y $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]})$. En virtud de que S_t define el precio limpio, éste debe guardar una relación con el precio sucio, P_τ , y con los dividendos, D_τ , de acuerdo con los siguientes supuestos:

- (i) Antes del instante τ del pago de dividendos $S_t = P_t - \alpha D_\tau e^{-r(\tau-t)}$ para $t < \tau$, $0 < \alpha \leq 1$;
- (ii) Al instante τ del pago de dividendos, existe una caída en el precio de la acción de tal forma que $S_\tau = P_\tau - \alpha D_\tau$;
- (iii) Despues del instante τ , $S_t = P_t$ para $\tau < t < T$.

El problema consiste en valuar una opción americana sobre el precio limpio de la acción S_t con un precio de ejercicio K al vencimiento T . Bajo los supuestos anteriores, antes del vencimiento,

debe existir un valor finito del precio limpio, S_{τ}^* , a partir del cual la opción se ejercería en forma anticipada. Dicho valor de S_{τ}^* se puede encontrar numéricamente a partir de la igualdad:

$$c_{\text{BS}}(S_{\tau}^*, \tau; T - \tau, K) = S_{\tau}^* + \alpha D_{\tau} - K,$$

donde $c_{\text{BS}}(\cdot, \cdot)$ es el valor de una opción europea obtenido mediante la fórmula de Black-Scholes.

30.3 Portafolio replicante de Whaley

Una vez establecido el precio de indiferencia, S_{τ}^* , se supone que la opción americana a valuar tiene los mismos flujos que un portafolio $C(S_t, t; T, K) = C_a + C_b + C_c$, consistente de tres opciones europeas, a saber:

$$\begin{aligned} C_a &= S_t \Phi_1(a_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi_1(a_2), \\ C_b &= S_t \Phi_1(b_1) - S_{\tau}^* e^{-r(\tau-\epsilon-t)} \Phi_1(b_2), \\ C_c &= S_t \Phi_2(a_1, b_1, \rho) - K e^{-r(T-t)} \Phi_2(a_2, b_2, \rho) \\ &\quad - e^{-r(\tau-\epsilon-t)} \Phi_1(b_2)(S_{\tau}^* + \alpha D_{\tau} - K), \end{aligned} \tag{30.2}$$

donde S_t , S_{τ}^* , K , r , σ , τ y T se definen como antes, $\Phi_1(a_i)$ es la distribución normal acumulada univariada hasta a_i , $\Phi_2(a_i, b_i, \rho)$ es la distribución normal acumulada bivariada hasta el punto (a_i, b_i) , con coeficiente de correlación ρ , $0 < \epsilon \ll 1$, y las cantidades a_1 , a_2 , b_1 , b_2 y ρ satisfacen:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ a_2 &= a_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \\ b_1 &= \frac{\ln(S_t/S_{\tau}^*) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(\tau-t)}{\sigma\sqrt{\tau-t}}, \\ b_2 &= b_1 - \sigma\sqrt{\tau-t}, \\ \rho &= \sqrt{\frac{\tau-t}{T-t}}. \end{aligned}$$

Si se sustituyen las expresiones de cada opción en la definición del portafolio, se tiene, cuando $\epsilon \rightarrow 0$, que el precio de la opción americana está dado por:

$$\begin{aligned} C(S_t, t; T, K) &= S_t [\Phi_1(a_1) - \Phi_2(a_1, b_1, \rho) + \Phi_1(b_1)] \\ &\quad - K [\Phi_1(a_2)e^{-r(T-t)} - \Phi_2(a_2, b_2, \rho)e^{-r(T-t)} + \Phi_1(b_2)e^{r(\tau-t)}] \\ &\quad + \alpha D_{\tau} e^{-r(\tau-t)} \Phi_1(b_2). \end{aligned}$$

Ahora bien, si se considera la identidad $\Phi_2(a, -b, -\rho) = \Phi_1(a) - \Phi_2(a, b, \rho)$, la expresión anterior sobre el precio de la opción americana se reduce a:

$$\begin{aligned} C(S_t, t; T, K) &= S_t [\Phi_1(b_1) + \Phi_2(a_1, -b_1, -\rho)] \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} [\Phi_1(b_2)e^{-r(T-\tau)} + \Phi_2(a_2, -b_2, -\rho)] \\ &\quad + \alpha D_{\tau} e^{-r(\tau-t)} \Phi_1(b_2). \end{aligned} \tag{30.3}$$

30.4 Un ejemplo numérico

Con la finalidad de ilustrar el uso de la fórmula (30.3) para valuar una opción americana sobre una acción que paga dividendos, se presenta a continuación un ejemplo numérico. Conviene recordar que la función de distribución acumulada normal estándar bivariada se define como:

$$\Phi_2(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{u^2 - 2\rho uv + v^2}{2(1-\rho^2)}\right) du dv,$$

la cual puede ser aproximada mediante el siguiente procedimiento con una precisión de hasta seis decimales. Observe, primero, que para aproximar la distribución acumulada de una variable normal estándar se utiliza la fórmula de Abramowitz y Stegun (1972):

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\} [a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + a_4 k^4 + a_5 k^5], & x \geq 0, \\ 1 - \Phi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

junto con

$$\begin{aligned} k &= 1/(1 + 0.2316419x), & a_1 &= 0.319381530, & a_2 &= -0.356563782, \\ a_3 &= 1.781477937, & a_4 &= -1.821255978, & a_5 &= 1.330274429. \end{aligned}$$

Para el caso de la distribución acumulada normal bivariada estándar, la fórmula de aproximación de Drezner (1978) se obtiene como sigue. Se define primero

$$H(y, z; \rho) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \nu_i \nu_j G(w_i, w_j),$$

donde

$$G(w_i, w_j) = \exp\{y_1(2w_i - y_1) + z_1(2w_j - z_1) + 2\rho(w_i - y_1)(w_j - z_1)\},$$

junto con

$$\begin{aligned} y_1 &= y/\sqrt{2(1-\rho^2)}, & z_1 &= z/\sqrt{2(1-\rho^2)}, \\ \nu_1 &= 0.24840615, & w_1 &= 0.10024215, & \nu_2 &= 0.39233107, & w_2 &= 0.48281397, \\ \nu_3 &= 0.21141819, & w_3 &= 1.0609498, & \nu_4 &= 0.033246660, & w_4 &= 1.7797294, \\ \nu_5 &= 0.00082485334, & w_5 &= 2.6697604. \end{aligned}$$

Si el producto de y, z y ρ no es positivo, entonces se approxima $\Phi_2(y, z; \rho)$ utilizando las siguientes reglas:

- a) Si $y \leq 0, z \leq 0$ y $\rho \leq 0$, entonces $\Phi_2(y, z; \rho) = H(y, z; \rho)$,
- b) Si $y \leq 0, z \geq 0$ y $\rho \geq 0$, entonces $\Phi_2(y, z; \rho) = \Phi_1(y) - H(y, -z; -\rho)$,
- c) Si $y \geq 0, z \leq 0$ y $\rho \geq 0$, entonces $\Phi_2(y, z; \rho) = \Phi_1(z) - H(-y, z; -\rho)$,
- d) Si $y \geq 0, z \geq 0$ y $\rho \leq 0$, entonces $\Phi_2(y, z; \rho) = \Phi_1(y) + \Phi_1(z) - 1 + H(-y, -z; \rho)$.

En los casos en los que el producto de y, z y ρ sea positivo, se utiliza

$$\Phi_2(y, z; \rho) = \bar{\Phi}_2(y, 0; \rho_1) + \bar{\Phi}_2(z, 0; \rho_2) - L,$$

donde $\bar{\Phi}_2(y, 0; \rho_1)$ y $\bar{\Phi}_2(z, 0; \rho_2)$ se calculan con las reglas establecidas cuando el producto de y, z y ρ no es positivo, y¹

$$\rho_1 = \frac{(\rho y - z)\text{sgn}(y)}{\sqrt{y^2 - 2yz\rho + z^2}}, \quad \rho_2 = \frac{(\rho z - y)\text{sgn}(z)}{\sqrt{y^2 - 2yz\rho + z^2}}, \quad L = \frac{1 - \text{sgn}(y)\text{sgn}(z)}{4}.$$

¹ La función signo, $\text{sgn}(\cdot)$ se define como:

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \geq 0, \\ -1 & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

Considere al tiempo $t = 0$, una opción americana de compra con vencimiento en $T = 2$ y precio de ejercicio $K = 100$ sobre una acción que entregará su próximo dividendo en $\tau = 1$, lo cual ocasionará una caída en el precio de la acción de $\alpha D_\tau = 5$. Asimismo, considere una tasa de interés libre de riesgo $r = 0.04$ y una volatilidad en los rendimientos del precio limpio $\sigma = 0.2$. Al resolver numéricamente la igualdad $c_{\text{BS}}(S_\tau^*, \tau; T - \tau, K) = S_\tau^* + \alpha D_\tau - K$, se obtiene que el precio de indiferencia es $S_\tau^* = 123.581855$. El Cuadro 30.1 muestra los valores de las opciones americanas obtenidos con el modelo de Whaley para diferentes valores del precio limpio de S_t , utilizando la aproximación de Abramowitz-Stegun para la distribución normal univariada y la aproximación de Drezner (1978) para la normal bivariada.

$r = 0.04, \sigma = 0.2, t = 0, \tau = 1, T = 2, K = 100, S_1^* = 123.581855$				
Precio sucio P_t	Precio limpio S_t	Modelo de Whaley * $C(S_t, t; T, K)$	Reportado por Whaley	Opción europea $c_{\text{BS}}(S_t, t; T, K)$
80.00	75.1960528	3.275	3.212	3.208
85.00	80.1960528	4.962	4.818	4.808
90.00	85.1960528	7.129	6.839	6.820
95.00	90.1960528	9.794	9.276	9.239
100.00	95.1960528	12.954	12.111	12.048
105.00	100.1960528	16.581	15.316	15.215
110.00	105.1960528	20.626	18.851	18.703
115.00	110.1960528	25.025	22.676	22.470
120.00	115.1960528	29.708	26.748	26.476

* $\Phi_1(\cdot)$ es calculada à-la Abramowitz-Stegun y $\Phi_2(\cdot, \cdot)$ à-la Drezner

Cuadro 30.1 Valuación de opciones americanas.

30.5 Código VisualBasicTM para calcular la fórmula de Whaley

A continuación se muestra el código VisualBasicTM utilizado en los cálculos del Cuadro 30.1.

```
'*****
'* CÓDIGO VisualBasic DE LA FÓRMULA PARA CALCULAR EL VALOR DE UNA *
'* OPCIÓN AMERICANA SOBRE UNA ACCIÓN QUE PAGA UN DIVIDENDO CON EL *
'* MODELO DE ROBERT WHALEY. LOS PARÁMETROS SON: EL PRECIO LIMPIO, *
'* EL PERÍODO ENTRE LA FECHA DE PAGO DE DIVIDENDO Y EL DÍA DE VA-
'* LUACIÓN, EL PERÍODO ENTRE LA FECHA DE VENCIMIENTO Y EL DÍA DE *
'* VALUACIÓN, EL PRECIO DE EJERCICIO, EL PRECIO DE INDIFERENCIA, *
'* LA TASA LIBRE DE RIESGO, LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LOS RENDI-
'* MIENTOS DEL PRECIO LIMPIO Y LA CAÍDA DEL PRECIO POR DIVIDENDOS *
'*****
```

```
Option Explicit
'Constantes generales del programa
Public Const pi = 3.14159265358979
'Constantes para la Normal Univariada
Public Const gamma = 0.2316419: Public Const a1 = 0.31938153
Public Const a2 = -0.356563782: Public Const a3 = 1.781477937
Public Const a4 = -1.821255978: Public Const a5 = 1.330274429
'Constantes para la Normal Bivariada
Public Const x1 = 0.325303: Public Const x2 = 0.4211071
Public Const x3 = 0.1334425: Public Const x4 = 0.006374323
Public Const y1 = 0.1337764: Public Const y2 = 0.6243247
Public Const y3 = 1.3425378: Public Const y4 = 2.2626645
'Distribución Normal Univariada por aproximación de
'Abrahamowitz y Stegun
Public Function DistNormAcum(K As Double) As Double
```

```

Dim L As Double, q As Double
L = Abs(K): q = 1 / (1 + gamma * L)
DistNormAcum = 1 - 1 / Sqr(2 * pi) * Exp(-L ^ 2 / 2) * -
(a1 * q + a2 * q ^ 2 + a3 * q ^ 3 + a4 * q ^ 4 + a5 * q ^ 5)
If K < 0 Then
    DistNormAcum = 1 - DistNormAcum
End If
End Function
'Distribución Normal Bivariada por aproximación de
'Drezner
,
'Función f(Bi,Bj).
Public Function fdrez(K As Double, y As Double, -
a As Double, b As Double, rho As Double) As Double
    Dim aprima As Double, bprima As Double
    aprima = a / (2 - 2 * rho ^ 2) ^ 0.5
    bprima = b / (2 - 2 * rho ^ 2) ^ 0.5
    fdrez = Exp(aprima * (2 * K - aprima) + bprima * -
(2 * y - bprima) + 2 * rho * (K - aprima) * (y - bprima))
End Function
'Función sgn(x).
Public Function signo(K As Double) As Double
    If K >= 0 Then signo = 1 Else signo = -1
End Function
'Distribución Normal Bivariada Directa ( a,b y rho <=0)
Public Function DNBAD(a As Double, b As Double, rho As Double) -
As Double
    Dim i As Integer, j As Integer
    Dim SumAfB As Double
    Dim MatA() As Double
    ReDim MatA(2, 4) As Double
    MatA(1, 1) = x1: MatA(1, 2) = x2
    MatA(1, 3) = x3: MatA(1, 4) = x4
    MatA(2, 1) = y1: MatA(2, 2) = y2
    MatA(2, 3) = y3: MatA(2, 4) = y4
    SumAfB = 0
    For i = 1 To 4: For j = 1 To 4
        SumAfB = SumAfB + MatA(i, i) * MatA(1, j) * -
        fdrez(MatA(2, i), MatA(2, j), a, b, rho)
    Next j: Next i
    DNBAD = (1 - rho ^ 2) ^ 0.5 * SumAfB / pi
End Function
'Distribución Normal Bivariada (cuando es posible usar identidades)
Public Function DistNormBivAcum(a As Double, b As Double, -
rho As Double)
    Dim rho1 As Double, rho2 As Double, delta As Double
    If a <= 0 And b <= 0 And rho <= 0 Then
        DistNormBivAcum = DNBAD(a, b, rho)
    Else
        If a * b * rho <= 0 Then
            If a <= 0 And b >= 0 And rho >= 0 Then
                DistNormBivAcum = DistNormAcum(a) - DNBAD(a, -b, -rho)
            End If
            If a >= 0 And b <= 0 And rho >= 0 Then
                DistNormBivAcum = DistNormAcum(b) - DNBAD(-a, b, -rho)
            End If
            If a >= 0 And b >= 0 And rho <= 0 Then
                DistNormBivAcum = DistNormAcum(a) + DistNormAcum(b) -
                1 + DNBAD(-a, -b, rho)
            End If
        End If
    End If
End Function

```

```

        End If
    Else
        DistNormBivAcum = -999.999
    End If
End If
End Function
'Distribución Normal Bivariada Acumulada General
Public Function DNormBivAcGen(a As Double, b As Double, _
rho As Double)
    Dim rho1 As Double, rho2 As Double, delta As Double
    Dim denom As Double
    If a * b * rho > 0 Then
        denom = (a ^ 2 - 2 * rho * a * b + b ^ 2) ^ 0.5
        rho1 = (rho * a - b) * signo(a) / denom
        rho2 = (rho * b - a) * signo(b) / denom
        delta = 0.25 - signo(a) * signo(b) / 4
        DNormBivAcGen = DistNormBivAcum(a, 0, rho1) + _
        DistNormBivAcum(b, 0, rho2) - delta
    Else
        DNormBivAcGen = DistNormBivAcum(a, b, rho)
    End If
End Function
'Función que calcula el valor de una opción americana
'sobre una acción que paga un sólo dividendo, con el
'Modelo propuesto por Whaley
Public Function Call_Am_Whal(S As Double, tDiv As Double, -
T As Double, K As Double, Sind As Double, r As Double, -
sigma As Double, alfaDiv As Double) As Double
    Dim a1 As Double, a2 As Double, b1 As Double, b2 As Double
    a1 = ((Log(S / K) + (r + 0.5 * sigma ^ 2) * T)) -
    / (sigma ^ 2 * T) ^ 0.5
    a2 = a1 - (sigma ^ 2 * T) ^ 0.5
    b1 = ((Log(S / Sind) + (r + 0.5 * sigma ^ 2) * tDiv)) -
    / (sigma ^ 2 * tDiv) ^ 0.5
    b2 = b1 - (sigma ^ 2 * tDiv) ^ 0.5
    Call_Am_Whal = S * (DistNormAcum(b1) + DNormBivAcGen(a1, -b1, -
    -1 * (tDiv / T) ^ 0.5)) - K * Exp(-r * T) * (DistNormAcum(b2) -
    * Exp(-r * (T - tDiv)) + DNormBivAcGen(a2, -b2, -1 * (tDiv / -
    T) ^ 0.5)) + alfaDiv * Exp(-r * tDiv) * DistNormAcum(b2)
End Function
***** FIN *****

```

Es importante mencionar que una versión de código en C++, desarrollada por Bernt, se encuentra disponible en http://finance.bi.no/bernt/gcc_prog/recipes/recipes/node9.html#code:anal_price_am_call_div.cc

30.6 Bibliografía sugerida

- Abramowitz, M. and I. A. Stegun (1972). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing, New York, Dover.
- Barone-Adesi, G. and R. E. Whaley (1987). "Efficient Analytic Approximation of American Option Values". *Journal of Finance*, Vol. 42, No. 2, pp. 301-320.
- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Drezner, Z. (1978). "Computation of the Bivariate Normal Integral". *Mathematics of Computation*, Vol. 32, No. 141, pp. 277-279.
- Geske, R. (1979). "The valuation of compound options". *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, No. 1, pp. 63-81.

Whaley, R. E. (1981). "On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends." *Journal of Financial Economics*, Vol. 9, No. 2, pp. 207-211.

30.7 Ejercicios

30.1 Utilice la aproximación de la distribución normal bivariada de la sección 30.4 para obtener el precio de la opción en el modelo de Whaley. Utilice también los datos de la sección 30.4.

30.2 Demuestre que la ecuación (30.3) es equivalente a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} C(S_t, t; T, K) = & (S_t - \alpha D_\tau e^{-r(\tau-t)})\Phi_1(b_1) \\ & + (S_t - \alpha D_\tau e^{-r(\tau-t)})\Phi_2(a_1, -b_1, -\rho) \\ & - Ke^{-r(T-t)}\Phi_2(a_2, -b_2, -\rho) \\ & - (K - \alpha D_\tau)e^{-r(\tau-t)}\Phi_1(b_2), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\ln [(S_t - \alpha D_\tau e^{-r(\tau-t)})/K] + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ a_2 &= a_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \\ b_1 &= \frac{\ln [(S_t - \alpha D_\tau e^{-r(\tau-t)})/S_\tau^*] + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(\tau-t)}{\sigma\sqrt{\tau-t}}, \\ b_2 &= b_1 - \sigma\sqrt{\tau-t}, \\ \rho &= \sqrt{\frac{\tau-t}{T-t}}. \end{aligned}$$

30.3 Sean $t = 0$, $T = 3$, $K = 100$, $\tau = 1$, $\alpha D_\tau = 2.3$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.25$ y $S_t = 72$. Calcule el precio de indiferencia de una opción americana de compra. Valúe el precio de dicha opción.

30.4 Una opción americana proporciona mayores derechos que una europea, en consecuencia su precio debe ser mayor. Muestre analíticamente este resultado.

VII. TÓPICOS AVANZADOS DE OPCIONES

- 31. Modelo de Schroder-Cox-Ross de opciones con elasticidad constante de la varianza
- 32. Modelo de Geske de opciones compuestas
- 33. Opciones potencia
- 34. Modelo de Merton de opciones con procesos de difusión con saltos
- 35. Valuación de opciones con costos de transacción: modelo de Leland, Hoggard Whalley y Wilmott
- 36. Valuación de opciones con procesos de Lévy

CAPÍTULO 31

VALUACIÓN DE OPCIONES SOBRE SUBYACENTES CON ELASTICIDAD CONSTANTE DE LA VARIANZA (MODELO DE SCHRODER, COX Y ROSS)

Conceptos básicos de este capítulo:

- Subyacentes con elasticidad constante de la varianza (ECV)
- Densidad de transición y ecuación diferencial parcial de Kolmogorov
- Valuación de opciones sobre subyacentes con ECV
- Funciones de Bessel
- Distribución χ^2 no central
- Aproximación de Sankaran a la distribución χ^2 no central
- Fórmula de interpolación polinomial de Newton

31.1 Introducción

En el presente capítulo se desarrolla una fórmula para valuar opciones europeas cuando el activo subyacente, una acción, presenta elasticidad constante de la varianza (ECV). En este caso, la distribución del activo subyacente sigue una distribución χ^2 no central. Asimismo, se presenta una aproximación a esta distribución que puede ser utilizada para estimar el precio de la opción. Por último, se establece una fórmula de interpolación para aproximar el precio de la opción con un polinomio de segundo grado.

En la literatura especializada existe evidencia empírica que soporta, contundentemente, la hipótesis de que la volatilidad cambia con el precio de la acción. En este sentido, el supuesto esencial de los modelos que se estudian en este capítulo es, justamente, que el precio de la acción puede afectar la volatilidad de los rendimientos. Esta relación entre el precio y la volatilidad de los rendimientos puede ser inversa o directa. En el primer caso, un desplome en el precio produce un incremento en la volatilidad, mientras que el segundo caso produce una reducción en la volatilidad.

En los modelos ECV la valuación de la opción se lleva a cabo mediante el cálculo del valor presente del valor esperado del pago del contrato en el vencimiento. Para ello, se requiere la función de densidad del precio de la acción en la fecha de vencimiento. En este marco, los conceptos de densidad de transición y ecuación diferencial parcial hacia atrás de Kolmogorov desempeñan un papel esencial en la determinación de la densidad del precio del subyacente en la fecha de vencimiento.

31.2 Activos subyacentes con elasticidad constante de la varianza (ECV)

En esta sección se estudia una clase importante de los modelos ECV. Considere un movimiento Browniano $(W_t)_{t \in [0, T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Se supone que el precio, S_t , de una acción, es conducido por el siguiente proceso de difusión:

$$dS_t = rS_t dt + S_t \sigma(S_t, t) dW_t, \quad (31.1)$$

donde la volatilidad tiene la siguiente forma funcional:

$$\sigma(S_t, t) = \delta S_t^{(\beta-2)/2}. \quad (31.2)$$

En este caso,

$$dS_t = rS_t dt + \delta S_t^{\beta/2} dW_t \quad (31.3)$$

y la elasticidad de $\sigma^2(S_t, t)$ con respecto de S_t está dada por

$$\epsilon_{\sigma, S_t} = \frac{\frac{d\sigma^2}{\sigma^2}}{\frac{dS_t}{S_t}} = \frac{S_t}{\sigma^2} \frac{d\sigma^2}{dS_t} = \left(\frac{S_t}{\delta^2 S_t^{\beta-2}} \right) \delta^2 (\beta - 2) S_t^{\beta-3} = \beta - 2. \quad (31.4)$$

Si $\beta = 2$, es decir, si la elasticidad es cero, el precio de la acción se distribuye lognormal y la volatilidad es constante, situación que conduce al modelo de Black-Scholes.

31.3 Densidad de transición en un modelo ECV con $\beta = 2$ (el modelo de Black-Scholes)

Un concepto útil en el estudio de los modelos con elasticidad constante de la varianza es el de función de transición, el cual está ligado a la función de densidad condicional de S_T dado S_t . Suponga que la acción paga dividendos, D_t , continuamente a una tasa constante a . En este caso, se tiene que

$$dS_t = (r - a)S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Si $c = c(S_t, t)$ es el precio de una opción europea de compra sobre la acción, entonces c satisface

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (r - a)S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} - rc = 0, \quad (31.5)$$

junto con la condición final

$$c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0).$$

Asimismo, el precio de la opción satisface

$$c(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (s - K) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds,$$

donde

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - a - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}. \quad (31.6)$$

Si esta densidad condicional es vista como función de S_t y t ,

$$p(S_t, t; s, T) := f_{S_T|S_t}(s|S_t),$$

y se escribe

$$c(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (s - K) p(S_t, t; s, T) ds \quad (31.7)$$

ó

$$e^{r(T-t)} c(S_t, t) = \int_K^\infty (s - K) p(S_t, t; s, T) ds, \quad (31.8)$$

se sigue que

$$e^{r(T-t)} \frac{\partial c}{\partial S_t} = \int_K^\infty (s - K) \frac{\partial p}{\partial S_t} ds, \quad (31.9)$$

$$e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = \int_K^\infty (s - K) \frac{\partial^2 p}{\partial S_t^2} ds \quad (31.10)$$

y

$$e^{r(T-t)} \frac{\partial c}{\partial t} - r e^{r(T-t)} c = \int_K^\infty (s - K) \frac{\partial p}{\partial t} ds. \quad (31.11)$$

Las ecuaciones (31.9), (31.10) y (31.11) implican

$$\begin{aligned} & e^{r(T-t)} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + (r-a)S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} - rc \right) \\ &= \int_K^\infty (s - K) \left(\frac{\partial p}{\partial t} + (r-a)S_t \frac{\partial p}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_t^2} \right) ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (r-a)S_t \frac{\partial p}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_t^2} = 0. \quad (31.12)$$

La función $p(S_t, t; s, T)$ es llamada función de densidad de transición de S_t y la ecuación (31.12) es llamada la ecuación diferencial parcial hacia atrás de Kolmogorov. La relevancia de esta ecuación radica en que, muchas veces, es más fácil resolver o proponer candidatos de solución que con la ecuación (31.5). La condición final se determina a continuación. Observe que cuando $t = T$, se tiene que

$$p(S_t, T) = \delta(S_t - S_T).$$

La función $\delta(S_t - S_T)$ es llamada Delta de Dirac y toma el valor cero en todos lados excepto en el punto S_T en donde se torna infinita, de tal manera que su integral es la unidad. En forma más precisa,

$$\delta(S_t - S_T) = 0 \quad \text{si } S_t \neq S_T$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(S_t - S_T) dS_t = 1.$$

Por último, observe que la ecuación (31.12) coincide con la ecuación diferencial parcial de segundo orden de Black y Scholes, dada en (31.5), excepto por el término $-rp$. Por supuesto, las condiciones finales son diferentes. Dichas condiciones determinan soluciones con diferentes comportamientos en T .

31.3.1 Densidad de transición descontada

Si se define

$$g(S_t, t) = e^{-r(T-t)} p(S_t, t; s, T),$$

es decir, g es la función de transición descontada, entonces

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} e^{r(T-t)} - r g e^{r(T-t)},$$

$$\frac{\partial p}{\partial S_t} = \frac{\partial g}{\partial S_t} e^{r(T-t)}$$

y

$$\frac{\partial p^2}{\partial S_t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial S_t^2} e^{r(T-t)}.$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial g}{\partial t} + (r-a)S_t \frac{\partial g}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 g}{\partial S_t^2} - rg = 0. \quad (31.13)$$

Dado que el factor de descuento en T es igual a la unidad, la condición final es

$$p(S_t, T) = \delta(S_t - S_T).$$

31.4 Funciones características

La función característica de S_T se define como

$$\varphi_{S_T}(u) = \int_0^\infty e^{ius} f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds,$$

lo cual se puede escribir de la siguiente forma:

$$\varphi_{S_T}(S_t, t, u) = \int_0^\infty e^{ius} p(S_t, t; s, T) ds.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (r - a) S_t \frac{\partial \varphi}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial S_t^2} = 0. \quad (31.14)$$

Es decir, φ satisface la misma ecuación diferencial que p . La condición final está dada por

$$\varphi(S_t, T, u) = \int_{-\infty}^\infty e^{ius} \delta(S_t - s) ds = e^{iuS_t}.$$

Asimismo, si se utiliza la fórmula de inversión

$$p(S_t, t; s, T) = \int_0^\infty e^{-ius} \varphi_{S_T}(S_t, t, u) du,$$

se obtiene el resultado (31.14).

31.5 Funciones de Green

La función de transición descontada, g , es también llamada función de Green. La utilidad de las funciones de Green es que representan los ladrillos para construir soluciones de ecuaciones diferenciales parciales más complejas. Observe que si g es solución de (31.13), entonces

$$\begin{aligned} \max(S_T - K, 0) g(S_t, t) &= e^{-r(T-t)} \max(S_T - K, 0) p(S_t, t; s, T) \\ &= e^{-r(T-t)} \max(S_T - K, 0) f_{S_T|S_t}(s|S_t) \end{aligned}$$

también es solución (31.13) ya que $\max(S_T - K, 0)$ es constante (la variable en este caso es S_t) y la ecuación diferencial parcial en (31.13) es lineal. Por último, la suma de soluciones de (31.13) es también solución, y dado que una integral es una suma de infinitos términos, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \max(s - K, 0) g(S_t, t) ds &= \int_0^\infty e^{-r(T-t)} \max(s - K, 0) p(S_t, t; s, T) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(s - K, 0) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds, \end{aligned}$$

lo cual es justamente el precio de una opción europea de compra, la cual satisface (31.5). La condición final queda modificada como

$$c(S_t, T) = e^{-r(T-T)} \int_{-\infty}^\infty \max(s - K, 0) \delta(S_t - s) ds = \max(S_t - K, 0).$$

En el resultado anterior se han aplicado las propiedades de la Delta de Dirac, a saber,

$$\delta(S_t - s) = \delta(s - S_t)$$

y

$$\int_{-\infty}^\infty H(s) \delta(s - S_t) ds = H(S_t)$$

para cualquier función H que sea continua y acotada.

31.6 Funciones de Bessel

En esta sección se revisa, en forma breve, el concepto de función de Bessel y su relación con la distribución χ^2 no central. La función de Bessel de primera clase de orden $\mu \geq 0$ se define como:

$$J_\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\mu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2k}.$$

La función modificada de Bessel de primera clase de orden μ , se define mediante

$$I_\mu(x) = i^{-\mu} J_\mu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(\mu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2k}. \quad (31.15)$$

En particular, si μ es un número entero no negativo, la función modificada de Bessel de primera clase de orden μ , se puede escribir como

$$I_\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(\mu+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2k}. \quad (31.16)$$

31.7 Función de transición en un modelo ECV con $\beta = 1$ (modelo de Cox-Ross)

Suponga que $\beta = 1$ y que el pago de dividendos de una acción está dado por $dD = (aS_t + b)dt$, es decir, el precio de la acción tiene la siguiente dinámica estocástica:

$$dS_t = ((r - a)S_t - b)dt + \sigma \sqrt{S_t} dW_t,$$

entonces el precio, $c = c(S_t, t)$, de una opción europea de compra sobre la acción satisface

$$\frac{\partial c}{\partial t} + ((r - a)S_t - b)\frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} - rc = 0. \quad (31.17)$$

En este caso, la densidad de transición es solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t + \frac{\partial p}{\partial S_t}((r - a)S_t - b) = 0.$$

Se puede verificar que

$$p(S_t, t; s, T) := f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \left(\frac{2(r - a)}{\sigma^2(e^{(r-a)(T-t)} - 1)} \right) \left(\frac{S_t e^{(r-a)(T-t)}}{s} \right)^{\frac{1}{2}(1+(2b/\sigma^2))} \quad (31.18)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{2(r - a)(S_t e^{(r-a)(T-t)} + s)}{\sigma^2(e^{(r-a)(T-t)} - 1)} \right\} \times I_{1+(2b/\sigma^2)} \left(\frac{4(r - a)(s S_t e^{(r-a)(T-t)})^{\frac{1}{2}}}{\sigma^2(e^{(r-a)(T-t)} - 1)} \right),$$

donde $I_q(\cdot)$ es la función modificada de Bessel de primera clase de orden q , $q = 1 + (2b/\sigma^2)$. En este caso, el precio de una opción europea de compra está dado por

$$\begin{aligned} c(S_t, t) &= S_t e^{-a(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)e^{-y} y^{n+2c/\sigma^2} G(n+2, \theta K)}{\Gamma[n+2+2c/\sigma^2]} \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-y} y^{n+1+2c/\sigma^2} G(n+1, \theta K)}{\Gamma[n+2+2c/\sigma^2]}, \end{aligned}$$

donde

$$\theta = \frac{2(r-a)}{\sigma^2 [e^{(r-a)(T-t)} - 1]}, \quad y = \theta S_t e^{(r-a)(T-t)} \quad \text{y} \quad G(m, x) = [\Gamma(m)]^{-1} \int_x^\infty e^{-z} z^{m-1} dz.$$

31.8 Función de transición en un modelo ECV con $\beta < 2$

Suponga que $\beta < 2$ y el pago de dividendos es de la forma $dD_t = aS_t dt$, así

$$dS_t = (r-a)S_t dt + \sigma S_t^{\beta/2} dW_t,$$

entonces el precio, $c = c(S_t, t)$, de una opción europea de compra sobre la acción satisface

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (r-a)S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^\beta \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} - rc = 0. \quad (31.19)$$

En este caso, la densidad de transición satisface:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^\beta + \frac{\partial p}{\partial S_t} (r-a)S_t = 0.$$

La solución de esta ecuación diferencial parcial está dada por

$$\begin{aligned} p(S_t, t; s, T) &:= f_{S_T|S_t}(s|S_t) \\ &= (2-\beta) A^{1/(2-\beta)} (xw^{1-2\beta})^{1/(4-2\beta)} e^{-x-w} I_{1/(2-\beta)}(2\sqrt{xw}), \end{aligned} \quad (31.20)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{2(r-a)}{\delta^2(2-\beta) [e^{(r-a)(2-\beta)\tau} - 1]}, \\ x &= AS_t^{2-\beta} e^{(r-a)(2-\beta)\tau}, \\ w &= As^{2-\beta}, \end{aligned}$$

$\tau = T - t$, r es una tasa de interés constante y libre de riesgo e $I_q(\cdot)$ es la función modificada de Bessel de primera clase de orden q .

El precio de una opción de compra europea en t , con precio de ejercicio K y que vence en T , está dado por

$$\begin{aligned} c &= e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \max(s - K, 0) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= e^{-r\tau} \int_K^{\infty} (s - K) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= e^{-r\tau} \int_{s>K} s f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds - e^{-r\tau} \int_{s>K} K f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= e^{-r\tau} \int_{s>K} s (2-\beta) A^{1/(2-\beta)} (xw^{1-2\beta})^{1/(4-2\beta)} e^{-x-w} I_{1/(2-\beta)}(2\sqrt{xw}) ds \\ &\quad - e^{-r\tau} \int_{s>K} K (2-\beta) A^{1/(2-\beta)} (xw^{1-2\beta})^{1/(4-2\beta)} e^{-x-w} I_{1/(2-\beta)}(2\sqrt{xw}) ds \\ &= \psi_1 - \psi_2. \end{aligned} \quad (31.21)$$

A continuación se reescriben las dos últimas integrales con el cambio de variable

$$s = \left(\frac{w}{A}\right)^{\frac{1}{2-\beta}},$$

se sigue que

$$ds = \frac{1}{2-\beta} \left(\frac{w}{A} \right)^{\frac{1}{2-\beta}-1} \frac{dw}{A}. \quad (31.22)$$

Si se sustituye la ecuación (31.22) en la primera integral de (31.21), se obtiene

$$\begin{aligned} \psi_1 &= e^{-r\tau} \int_{S_T > K} s(2-\beta) A^{1/(2-\beta)} (xw^{1-2\beta})^{1/(4-2\beta)} e^{-x-w} I_q ds \\ &= e^{-r\tau} \int_{w>y} \left(\frac{w}{A} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} A^{1/(2-\beta)} x^{1/(4-2\beta)} w^{(1-2\beta)/(4-2\beta)} e^{-x-w} \left(\frac{w}{A} \right)^{\frac{1}{2-\beta}-1} I_q \frac{dw}{A} \\ &= e^{-r\tau} \int_{w>y} \left(\frac{w}{A} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} x^{1/(4-2\beta)} w^{(1-2\beta)/(4-2\beta)} w^{-(1-\beta)/(2-\beta)} e^{-x-w} I_q dw \\ &= e^{-r\tau} \int_{w>y} \left(\frac{w}{A} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \left(\frac{x}{w} \right)^{\frac{1}{4-2\beta}} e^{-x-w} I_q dw, \end{aligned} \quad (31.23)$$

donde $I_q = I_{1/(2-\beta)}(2\sqrt{yw})$ y $y = AK^{2-\beta}$. Ahora bien, recuerde, en virtud de (31.20), que $x = AS_t^{2-\beta}e^{(r-a)(2-\beta)\tau}$, si se despeja de esta ecuación $e^{-r\tau}$, se tiene

$$e^{-r\tau} = S_t \left(\frac{A}{x} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} e^{-a\tau}. \quad (31.24)$$

Al sustituir (31.24) en la primera integral de (31.23), se obtiene

$$\begin{aligned} \psi_1 &= e^{-r\tau} \int_{w>y} \left(\frac{w}{A} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \left(\frac{x}{w} \right)^{\frac{1}{4-2\beta}} e^{-x-w} I_q dw \\ &= S_t e^{-a\tau} \int_{w>y} \left(\frac{A}{x} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \left(\frac{w}{A} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \left(\frac{x}{w} \right)^{\frac{1}{4-2\beta}} e^{-x-w} I_q dw \\ &= S_t e^{-a\tau} \int_{w>y} \left(\frac{w}{x} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \left(\frac{x}{w} \right)^{\frac{1}{4-2\beta}} e^{-x-w} I_q dw \\ &= S_t e^{-a\tau} \int_{w>y} \left(\frac{w}{x} \right)^{\frac{1}{4-2\beta}} e^{-x-w} I_q dw. \end{aligned} \quad (31.25)$$

A continuación se calcula la segunda integral de (31.21)

$$\begin{aligned} \psi_2 &= Ke^{-r\tau} \int_{s>K} (2-\beta) A^{1/(2-\beta)} (xw^{1-2\beta})^{1/(4-2\beta)} e^{-x-w} I_{1/(2-\beta)}(2\sqrt{yw}) ds \\ &= Ke^{-r\tau} \int_{w>y} A^{1/(2-\beta)} x^{1/(4-2\beta)} w^{(1-2\beta)/(4-2\beta)} e^{-x-w} \left(\frac{w}{A} \right)^{\frac{1}{2-\beta}-1} I_q \frac{dw}{A} \\ &= Ke^{-r\tau} \int_{w>y} x^{1/(4-2\beta)} w^{(1-2\beta)/(4-2\beta)} w^{(1-2+\beta)/(2-\beta)} e^{-x-w} I_q dw \\ &= Ke^{-r\tau} \int_{w>y} x^{1/(4-2\beta)} w^{-1/(4-2\beta)} e^{-x-w} I_q dw \\ &= Ke^{-r\tau} \int_{w>y} \left(\frac{x}{w} \right)^{\frac{1}{4-2\beta}} e^{-x-w} I_q dw. \end{aligned} \quad (31.26)$$

En conclusión, el precio de una opción europea de compra con un subyacente con elasticidad constante de la varianza $\beta < 2$, está dado por:

$$\begin{aligned} c &= S_t e^{-a\tau} \int_y^\infty \left(\frac{w}{x} \right)^{\frac{1}{4-2\beta}} e^{-x-w} I_{1/(2-\beta)}(2\sqrt{yw}) dw \\ &\quad - Ke^{-r\tau} \int_y^\infty \left(\frac{x}{w} \right)^{\frac{1}{4-2\beta}} e^{-x-w} I_{1/(2-\beta)}(2\sqrt{yw}) dw, \end{aligned} \quad (31.27)$$

donde $y = AK^{2-\beta}$.

31.9 Distribución χ^2 no central

En esta sección se revisa el concepto de distribución χ^2 no central. Si $2z \sim \chi^2(2\nu, 2k)$ su función de densidad satisface

$$h(2z; 2\nu, 2k) = e^{-z-k} (z/k)^{(\nu-1)/2} I_{\nu-1}(2\sqrt{k}z)$$

y su función de distribución complementaria está dada por

$$Q(2y; 2\nu, 2k) = 1 - \int_{-\infty}^y h(2z; 2\nu, 2k) dz = \int_y^{\infty} e^{-z-k} (z/k)^{(\nu-1)/2} I_{\nu-1}(2\sqrt{k}z) dz.$$

Asimismo, se puede demostrar que

$$\int_y^{\infty} h(2z; 2\nu, 2k) dk = 1 - Q(2z; 2\nu - 2, 2y). \quad (31.28)$$

En efecto, la función de distribución complementaria de una variable aleatoria χ^2 no central, $Q(z; \nu, k)$, puede ser representada como un promedio ponderado de funciones de distribución complementarias χ^2 no centrales:

$$Q(z, \nu, k) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{k}{2}} \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} Q(z; \nu + 2n, 0), \quad (31.29)$$

para $z, k > 0$. La función $Q(z; \nu + 2n, 0)$ está relacionada, a su vez, con la función de distribución complementaria Gamma:

$$Q(z; \nu + 2n, 0) = G(n + (\nu/2), z/2),$$

donde

$$G(m, t) = \int_t^{\infty} g(m, x) dx$$

y

$$g(m, x) = \frac{e^{-x} x^{m-1}}{\Gamma(m)}. \quad (31.30)$$

Si se sustituyen las expresiones anteriores en (31.29) resulta que

$$Q(z, \nu, k) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n, k/2) G(n + \nu/2, z/2)$$

ó

$$Q(2z, 2\nu, 2k) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n, k) G(n + \nu - 1, z). \quad (31.31)$$

Observe también que si se integra por partes (31.30), se obtiene una fórmula recursiva para la función de distribución complementaria Gamma:

$$\begin{aligned} G(m+1, t) &= \int_t^{\infty} \frac{e^{-x} x^m}{\Gamma(m+1)} dx \\ &= \frac{-e^{-x} x^m}{\Gamma(m+1)} \Big|_t^{\infty} + \int_t^{\infty} \frac{e^{-x} x^{m-1}}{\Gamma(m)} dx \\ &= g(m+1, t) + G(m, t). \end{aligned} \quad (31.32)$$

Si se sustituye la ecuación (31.31) en (31.32), se obtiene que

$$\begin{aligned} Q(2z; 2\nu, 2k) &= g(1, k) [G(\nu - 1, z) + g(\nu, z)] \\ &\quad + g(2, k) [G(\nu - 1, z) + g(\nu, z) + g(1 + \nu, z)] \\ &\quad + g(3, k) [G(\nu - 1, z) + g(\nu, z) + g(1 + \nu, z) + g(2 + \nu, z)] \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (31.33)$$

Debido a que la doble suma es absolutamente convergente (todos los términos, por supuesto, son positivos), el orden de los términos en la suma puede ser reacomodado. Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n, k) = e^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} = 1.$$

Al sumar las columnas hacia abajo resulta

$$\begin{aligned} Q(2z; 2\nu, 2k) &= G(\nu - 1, z) + g(\nu, z) \\ &\quad + g(1 + \nu, z) (1 - g(1, k)) \\ &\quad + g(2 + \nu, z) (1 - g(1, k) - g(2, k)) \\ &\quad + \dots. \end{aligned} \tag{31.34}$$

A continuación se muestra que

$$G(\nu - 1, z) + \sum_{n=0}^{\infty} g(n + \nu, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(n + \nu, z) = 1. \tag{31.35}$$

En efecto, por un lado

$$\begin{aligned} G(\nu - 1, z) + \sum_{n=0}^{\infty} g(n + \nu, z) &= G(\nu - 1, z) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(i + \nu, z) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (g(\nu, z) + g(1 + \nu, z) + \dots + g(n + \nu, z)) + G(\nu - 1, z) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (g(n + \nu, z) + g(n + \nu - 1, z) + \dots + g(\nu, z) + G(\nu - 1, z)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} G(n + \nu, z). \end{aligned}$$

Mientras que, por otro lado,

$$\begin{aligned} G(\nu - 1, z) + \sum_{n=0}^{\infty} g(n + \nu, z) &= g(\nu - 1, z) + g(\nu - 2, z) + \dots + g(1, z) \\ &\quad + G(0, z) + \sum_{n=0}^{\infty} g(n + \nu, z) \\ &= g(1, z) + g(2, z) + \dots + g(\nu - 1, z) + g(\nu, z) + \dots \\ &= 1. \end{aligned}$$

Al aplicar la ecuación (31.35) a (31.34), se obtiene

$$\begin{aligned} Q(2z; 2\nu, 2k) &= 1 - g(1 + \nu, z)g(1, k) \\ &\quad - g(2 + \nu, z)(g(1, k) + g(2, k)) \\ &\quad - g(3 + \nu, z)(g(1, k) + g(2, k) + g(3, k)) \\ &\quad - \dots. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Q(2z; 2\nu, 2k) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} g(n + \nu, z) \sum_{i=1}^n g(i, k). \tag{31.36}$$

Así, la función de distribución puede ser expresada como una doble suma infinita de funciones Gamma. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int_y^\infty h(2z; 2\nu, 2k) dk &= \int_y^\infty e^{-z-k} (z/k)^{(\nu-1)/2} I_{\nu-1}(2\sqrt{kz}) dk \\
&= \int_y^\infty e^{-z-k} (z/k)^{(\nu-1)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+\nu-1)!} (\sqrt{kz})^{\nu-1+2n} dk \\
&= \int_y^\infty e^{-z-k} (z/k)^{(\nu-1)/2} (\sqrt{kz})^{\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kz)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu)} dk \\
&= \int_y^\infty e^{-z-k} z^{\nu-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1} k^{n-1}}{\Gamma(n+\nu-1)\Gamma(n)} dk \\
&= \int_y^\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-z-k} z^{n+\nu-2} k^{n-1}}{\Gamma(n+\nu-1)\Gamma(n)} \right) dk \\
&= \int_y^\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-z} z^{n+\nu-2}}{\Gamma(n+\nu-1)} \times \frac{e^{-k} k^{n-1}}{\Gamma(n)} \right) dk \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_y^\infty \frac{e^{-z} z^{n+\nu-2}}{\Gamma(n+\nu-1)} \times \frac{e^{-k} k^{n-1}}{\Gamma(n)} dk \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-z} z^{n+\nu-2}}{\Gamma(n+\nu-1)} \int_y^\infty \frac{e^{-k} k^{n-1}}{\Gamma(n)} dk \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} g(n+\nu-1, z) G(n, y) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} g(n+\nu-1, z) \sum_{i=1}^n g(i, y).
\end{aligned}$$

De acuerdo con (31.36), se concluye el resultado (31.28).

31.10 Valuación de una opción de compra en un modelo ECV, $\beta < 2$

Observe que los integrandos de (31.21) son funciones de densidad de variables aleatorias χ^2 no centrales. El primer integrando es la función de densidad de una variable aleatoria

$$2w \sim \chi^2 \left(2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x \right),$$

ya que $\nu - 1 = 1/(2 - \beta) > 0$ implica

$$2\nu = 2 + \frac{2}{2-\beta}.$$

En este caso, la función de distribución complementaria está dada por

$$\begin{aligned}
Q \left(2y; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x \right) &= \int_y^\infty h \left(2w; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x \right) dw \\
&= \int_y^\infty \left(\frac{w}{x} \right)^{\frac{1}{4-2\beta}} e^{-x-w} I_{1/(2-\beta)}(2\sqrt{wx}) dw.
\end{aligned}$$

En virtud de (31.28), la segunda integral satisface

$$\int_y^\infty \left(\frac{x}{w} \right)^{\frac{1}{4-2\beta}} e^{-x-w} I_{1/(2-\beta)}(2\sqrt{wx}) dw = 1 - Q \left(2y; \frac{2}{2-\beta}, 2y \right).$$

Por lo tanto, el precio de una opción europea de compra en modelo ECV está dado por:

$$c = S_t e^{-a(T-t)} Q \left(2y; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x \right) - K e^{-r(T-t)} \left(1 - Q \left(2x; \frac{2}{2-\beta}, 2y \right) \right). \quad (31.37)$$

31.11 Casos especiales

Para grados de libertad impares, $Q(z; \nu, k)$ puede ser representada por la suma de distribuciones normales y funciones elementales. Sean $\phi(\cdot)$ y $\Phi(\cdot)$ las funciones de densidad y distribución, respectivamente de una variable aleatoria normal estándar, la función $Q(z; \nu, k)$ para 1, 3 y 5 grados de libertad está dada por

$$Q(z; 1, k) = \Phi(\sqrt{k} - \sqrt{z}) + \Phi(-\sqrt{k} - \sqrt{z}),$$

$$Q(z; 3, \kappa) = Q(z; 1, \kappa) + [\phi(\sqrt{k} - \sqrt{z}) - \phi(\sqrt{k} + \sqrt{z})] / \sqrt{z}$$

y

$$\begin{aligned} Q(z; 5, \kappa) &= Q(z; 1, \kappa) \\ &\quad + k^{-3/2} [(k-1+\sqrt{kz})\phi(\sqrt{k}-\sqrt{z}) - (k-1-\sqrt{kz})\phi(\sqrt{k}+\sqrt{z})]. \end{aligned}$$

Para valuar el precio de la opción cuando $\beta = 0$, se utilizan $Q(z; 1, \kappa)$ y $Q(z; 3, \kappa)$. De la misma forma, la fórmula del precio de la opción de compra con $\beta = \frac{4}{3}$ utiliza $Q(z; 3, \kappa)$ y $Q(z; 5, \kappa)$.

31.12 Fórmula de interpolación de Newton

Suponga que una función es conocida en puntos $(x_i, f(x_i))$, $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Se definen las diferencias divididas, recursivamente, como:

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0), \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}, \\ &\vdots \\ f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] &= \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \end{aligned}$$

La fórmula de interpolación de Newton que ajusta un polinomio de grado n a los puntos $(x_i, f(x_i))$, $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, está dada por

$$\begin{aligned} P(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + \cdots + f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i). \end{aligned}$$

Claramente, se cumple que

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Sean $c(0)$, $c(2)$ y $c(4/3)$ los precios de opciones de compra para $\beta = 0$, $\beta = 2$ y $\beta = 4/3$. El caso $\beta = 2$ conduce a la fórmula de valuación de Black-Scholes. La fórmula de interpolación de Newton que ajusta un polinomio, $c(\beta)$, $\beta \in [0, 2]$, de segundo grado a los puntos $(0, c(0))$, $(4/3, c(4/3))$ y $(2, c(2))$ está dada por

$$c(\beta) = c(0) + \frac{3}{4}\beta [c(4/3) - c(0)] + \frac{1}{4}\beta(\beta - \frac{4}{3}) [3c(0) - 9c(4/3) + 6c(2)].$$

31.13 Aproximación de Sankaran a la distribución χ^2 no central

Existen en la literatura varias aproximaciones para la distribución χ^2 no central. Una aproximación, particularmente buena, está dada por

$$Q(z; \nu, \kappa) \sim \frac{1 - hp[1 - h + (1 - (h/2))mp] - [z/(\nu + \kappa)]^h}{h \sqrt{2p(1 + mp)}}, \quad (31.38)$$

donde

$$h = 1 - \frac{2}{3}(\nu + \kappa)(\nu + 3\kappa)(\nu + 2\kappa)^{-2},$$

$$p = \frac{\nu + 2\kappa}{(\nu + \kappa)^2}$$

y

$$m = (h - 1)(1 - 3h).$$

31.14 Bibliografía sugerida

- Cox, J. and S. Ross (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes." *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 2, pp. 145-166.
- Emanuel, D. and J. Macbeth (1982), "Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 17, pp. 533-554.
- Sankaran, M. (1963). "Approximations to the Non-Central Chi-Square Distribution." *Biometrika*, Vol. 50, pp. 199-204.
- Schroder, M. (1989). "Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula". *The Journal of Finance*, Vol. 44, No. 1, pp. 211-219.
- Venegas-Martínez, F. (2005). "Bayesian Inference, Prior Information on Volatility, and Option Pricing: A Maximum Entropy Approach". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 8, No. 1, pp. 1-12.

31.15 Ejercicios

31.1 Para el caso $\beta = 1$ muestre que

$$\begin{aligned} p(S_t, t; s, T) &= \left(\frac{2(r-a)}{\sigma^2(e^{(r-a)(T-t)} - 1)} \right) \left(\frac{S_t e^{(r-a)(T-t)}}{s} \right)^{\frac{1}{2}(1+(2b/\sigma^2))} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{2(r-a)(S_t e^{(r-a)(T-t)} + s)}{\sigma^2(e^{(r-a)(T-t)} - 1)} \right\} \times I_{1+(2b/\sigma^2)} \left(\frac{4(r-a)(s S_t e^{(r-a)(T-t)})^{\frac{1}{2}}}{\sigma^2(e^{(r-a)(T-t)} - 1)} \right), \end{aligned}$$

donde $I_q(\cdot)$ es la función modificada de Bessel de primera clase de orden q , $q = 1 + (2b/\sigma^2)$ satisface

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (r-a)S_t \frac{\partial p}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S_t^2} = 0.$$

Asimismo, demuestre que el precio de una opción europea de compra está dado por

$$\begin{aligned} c(S_t, t) &= S_t e^{-a(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)e^{-y} y^{n+2c/\sigma^2} G(n+2, \theta K)}{\Gamma[n+2+2c/\sigma^2]} \\ &- K e^{-r(T-t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-y} y^{n+1+2c/\sigma^2} G(n+1, \theta K)}{\Gamma[n+2+2c/\sigma^2]} \end{aligned}$$

donde

$$\theta = \frac{2(r - a)}{\sigma^2 [e^{(r-a)(T-t)} - 1]},$$

$$y = \theta S_t e^{(r-a)(T-t)}$$

y

$$G(m, x) = [\Gamma(m)]^{-1} \int_x^\infty e^{-z} z^{m-1} dz.$$

31.2 Verifique que la fórmula de interpolación de Newton que ajusta un polinomio de segundo grado, $c(\beta)$, $\beta \in [0, 2]$, a los puntos $(0, c(0))$, $(4/3, c(4/3))$ y $(2, c(2))$ está dada por:

$$c(\beta) = c(0) + \frac{3}{4}\beta [c(4/3) - c(0)] + \frac{1}{4}\beta(\beta - \frac{4}{3}) [3c(0) - 9c(4/3) + 6c(2)].$$

CAPÍTULO 32

OPCIONES COMPUESTAS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Valuación de opciones compuestas
- Precios log-normales
- Distribución normal bivariada

32.1 Introducción

El presente capítulo se concentra en el estudio de las opciones compuestas. Una opción compuesta es una opción cuyo subyacente es otra opción. Evidentemente, la prima por ejercer una opción compuesta involucra el valor de otra opción. Una opción compuesta tiene, en consecuencia, dos fechas de vencimiento y dos precios de ejercicio. La mayor parte de las opciones compuestas que se negocian son del tipo europeo. Recientemente, el mercado de opciones compuestas en los países desarrollados ha mostrado un importante crecimiento.

32.2 Valuación de una opción compuesta

Consideré, por ejemplo, el caso de una opción europea de compra sobre una opción europea de compra. En la primera fecha de vencimiento, T_1 , el tenedor de la opción tiene el derecho de comprar una nueva opción de compra a un precio de ejercicio K_1 . Asimismo, suponga que esta nueva opción de compra tiene fecha de vencimiento T_2 y precio de ejercicio K_2 . Sea $c(S_\tau, \tau; K_2)$ el valor de una opción de compra que vence en τ , K_2 es el precio de ejercicio y S_τ es el valor del subyacente en τ . Denote mediante $c_{\text{call}}(S_0)$ el valor de la opción compuesta en el momento actual, $t = 0$. En la primera fecha de vencimiento, T_1 , el valor intrínseco de la opción compuesta está dado por:

$$c_{\text{call}}(S_{T_1}) = \max(K_1, c(S_{T_1}, T_2 - T_1; K_2)). \quad (32.1)$$

Sea S^* el precio crítico del activo subyacente tal que $c_{\text{BS}}(S^*, T_2; K_2) = K_1$. Es decir, S^* satisface

$$K_1 = S^* \Phi(\delta) - K_2 e^{-rT_2} \Phi\left(\delta - \sigma \sqrt{T_2}\right), \quad (32.2)$$

donde

$$\delta = \frac{\ln\left(\frac{S^*}{K_2}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}.$$

De esta manera, cuando $S_\tau > S^*$, se tiene que $c(S_\tau, T_2 - T_1; K_2) > K_1$ y, consecuentemente, el tenedor ejercerá la opción de compra en T_1 . El valor de la opción compuesta en el momento actual depende de la probabilidad conjunta de que el precio del activo sea mayor que S^* en T_1 y mayor que K_2 en T_2 . Bajo el supuesto de que el activo subyacente es log-normal, la fórmula de valuación para esta opción compuesta satisface

$$\begin{aligned} c_{\text{call}}(S_0) = & S_0 \Phi_2(d, b; \rho) - K_2 e^{-rT_2} \Phi_2\left(d - \sigma\sqrt{T_1}, b - \sigma\sqrt{T_2}; \rho\right) \\ & - K_1 e^{-rT_1} \Phi\left(d - \sigma\sqrt{T_1}\right), \end{aligned} \quad (32.3)$$

donde

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{S^*}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}},$$

$$b = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K_2}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}$$

y

$$\rho = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

En las fórmulas anteriores, r es la tasa de interés libre de riesgo, σ es la volatilidad instantánea, $\Phi(x)$ es la función de distribución acumulada normal estándar univariada, y $\Phi_2(x, y; \rho)$ es la función de distribución acumulada normal estándar bivariada con coeficiente de correlación ρ . El primer término de la fórmula de valuación del c_{call} proporciona el valor, neutral al riesgo, del activo subyacente condicionado a que $S_\tau > S^*$ en T_1 y $S > K_2$ en T_2 . El segundo término, de c_{call} , proporciona el pago esperado de ejercer la opción en T_2 y el último término es el pago esperado de ejercerla en T_1 .

32.3 Aproximaciones a las distribuciones normales univariada y bivariada

Para la distribución acumulada de una variable normal estándar se utiliza frecuentemente la siguiente fórmula de aproximación:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\} [a_1k + a_2k^2 + a_3k^3 + a_4k^4 + a_5k^5], & x \geq 0, \\ 1 - \Phi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

junto con

$$k = 1/(1 + 0.2316419x),$$

$$a_1 = 0.319381530,$$

$$a_2 = -0.356563782,$$

$$a_3 = 1.781477937,$$

$$a_4 = -1.821255978,$$

$$a_5 = 1.330274429.$$

La función de distribución acumulada normal estándar bivariada se define como

$$\Phi_2(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{u^2 - 2\rho uv + v^2}{2(1-\rho^2)}\right) du dv, \quad (32.4)$$

la cual puede ser aproximada mediante el siguiente procedimiento con una precisión de hasta seis decimales (Drezner, 1978). Se define primero

$$H(y, z; \rho) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \nu_i \nu_j G(w_i, w_j), \quad (32.5)$$

donde

$$G(w_i, w_j) = \exp\{y_1(2w_i - y_1) + z_1(2w_j - z_1) + 2\rho(w_i - y_1)(w_j - z_1)\},$$

junto con

$$\begin{aligned}y_1 &= y/\sqrt{2(1-\rho^2)}, \\z_1 &= z/\sqrt{2(1-\rho^2)}, \\\nu_1 &= 0.24840615, \\w_1 &= 0.10024215, \\\nu_2 &= 0.39233107, \\w_2 &= 0.48281397, \\\nu_3 &= 0.21141819, \\w_3 &= 1.0609498, \\\nu_4 &= 0.033246660, \\w_4 &= 1.7797294, \\\nu_5 &= 0.00082485334, \\w_5 &= 2.6697604.\end{aligned}$$

Si el producto de y, z y ρ no es positivo, entonces se aproxima $\Phi_2(y, z; \rho)$ utilizando las siguientes reglas:

- a) Si $y \leq 0, z \leq 0$ y $\rho \leq 0$, entonces $\Phi_2(y, z; \rho) = H(y, z; \rho)$,
- b) Si $y \leq 0, z \geq 0$ y $\rho \geq 0$, entonces $\Phi_2(y, z; \rho) = \Phi(y) - H(y, -z; -\rho)$,
- c) Si $y \geq 0, z \leq 0$ y $\rho \geq 0$, entonces $\Phi_2(y, z; \rho) = \Phi(z) - H(-y, z; -\rho)$,
- d) Si $y \geq 0, z \geq 0$ y $\rho \leq 0$, entonces $\Phi_2(y, z; \rho) = \Phi(y) + \Phi(z) - 1 + H(-y, -z; \rho)$.

En los casos en que el producto de y, z y ρ es positivo, entonces se utiliza

$$\Phi_2(y, z; \rho) = \bar{\Phi}_2(y, 0; \rho_1) + \bar{\Phi}_2(z, 0; \rho_2) - L,$$

donde $\bar{\Phi}_2(y, 0; \rho_1)$ y $\bar{\Phi}_2(z, 0; \rho_2)$ se calculan con las reglas establecidas cuando el producto de y, z y ρ no es positivo, así como con

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{(\rho y - z)\text{sgn}(y)}{\sqrt{y^2 - 2yz\rho + z^2}}, \\\rho_2 &= \frac{(\rho z - y)\text{sgn}(z)}{\sqrt{y^2 - 2yz\rho + z^2}}. \\L &= \frac{1 - \text{sgn}(y)\text{sgn}(z)}{4}\end{aligned}$$

32.4 Bibliografía recomendada

Geske, R. (1977). "The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options." *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 12, No. 4, pp. 541-552.

Drezner, Z. (1978). "Computations of the Bivariate Normal Integral". *Mathematics of Computation*, Vol. 32. pp. 277-279.

32.5 Ejercicios

32.1 Demuestre la fórmula (32.3).

32.2 Obtenga la fórmula de valuación de una opción europea de compra sobre una opción europea de venta c_{put} .

32.3 Intente encontrar fórmulas para los casos p_{call} y p_{put} .

32.4 Muestre que la fórmula (32.5) aproxima a la función de distribución acumulada normal estándar bivariada definida en (32.4).

CAPÍTULO 33

OPCIONES POTENCIA

Conceptos básicos de este capítulo:

- Opción potencia
- Movimiento geométrico Browniano
- Distribución de la potencia del precio del activo subyacente

33.1 Introducción

Una opción potencia es un contrato en el que una de las partes (la posición larga) adquiere el derecho de recibir, en una fecha futura, la diferencia entre el precio de un activo elevado a una potencia y el precio de ejercicio; como contraprestación el tenedor entrega una prima a la contraparte (la posición corta).

En este capítulo, bajo el supuesto de que el activo subyacente (una acción) sigue un movimiento geométrico Browniano, se obtiene una fórmula de valuación para opciones europeas sobre una potencia del precio del activo subyacente. Por supuesto, cuando la potencia es igual a la unidad se recupera la fórmula de Black y Scholes (1973).

33.2 Planteamiento del problema de valuación

Se desea calcular el valor de una opción europea de compra en la que el valor del activo subyacente elevado a una potencia se compara con el precio de ejercicio. Si dicha potencia del precio del activo es mayor que el precio de ejercicio, $S_T^a > K$, entonces se ejerce la opción, por lo que el valor intrínseco del contrato está dado por

$$c(S_T^a, t) = \max(S_T^a - K, 0).$$

La prima de la opción es el valor presente, descontando a una tasa de interés libre de riesgo r en un plazo $T - t$, del pago esperado, el cual está dado por

$$c(S_t^a, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} [\max(S_T^a - K, 0)].$$

Con el propósito de determinar la prima de la opción, $c = c(S_t^a, t)$, se supone que la dinámica del precio del activo subyacente está dada por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{33.1}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y W_t es un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Es decir, W_t tiene incrementos normales e independientes con $\mathbb{E}[dW_t] = 0$ y $\text{Var}[dW_t] = \mathbb{E}[(dW_t)^2] = dt$. En este caso, se puede escribir

$$dW_t = \mathcal{E} \sqrt{dt} \quad \text{con} \quad \mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1). \tag{33.2}$$

Si se aplica el lema de Itô a $\ln S_t$, se tiene que

$$d \ln S_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma dW_t. \tag{33.3}$$

La ecuación anterior se puede reescribir como

$$\int_t^T d \ln S_u = \int_t^T (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) du + \int_t^T \sigma dW_u$$

6

$$\ln S_T - \ln S_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t),$$

lo cual implica que

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma W_{T-t}. \quad (33.4)$$

Al despejar S_T en la expresión anterior, se obtiene que

$$S_T = S_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma W_{T-t}}. \quad (33.5)$$

Por lo tanto, al elevar S_T a la potencia a , se sigue que

$$S_T^a = S_t^a e^{a(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + a\sigma W_{T-t}}. \quad (33.6)$$

Si se escribe $W_{T-t} = \sqrt{T-t} \mathcal{E}$ con $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, entonces, en virtud de la ecuación (33.6), la potencia del precio del subyacente al vencimiento se puede expresar como

$$S_T^a = S_t^a e^{a(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + a\sigma\sqrt{T-t} \mathcal{E}}. \quad (33.7)$$

Si ahora se despeja \mathcal{E} de la ecuación anterior, se tiene

$$\mathcal{E} = \frac{\ln\left(\frac{S_T^a}{S_t^a}\right) - a(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{a\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (33.8)$$

Recuerde que la función de densidad de \mathcal{E} , $\phi(\varepsilon)$, está dada por

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}. \quad (33.9)$$

En consecuencia,

$$\ln\left(\frac{S_T^a}{S_t^a}\right) \sim \mathcal{N}\left(a(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t), a^2\sigma^2(T-t)\right). \quad (33.10)$$

Es decir, $S_T^a/S_t^a > 0$ tiene una distribución log-normal. A partir de la ecuación (33.7), se tiene que S_T^a se puede escribir como una función $g(\mathcal{E})$. En efecto,

$$S_T^a \equiv g(\mathcal{E}) = S_t^a \exp\left\{a\mathcal{E}\sigma\sqrt{T-t} + a(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right\}.$$

De esta forma, se cumple que

$$\begin{aligned} g^{-1}(S_T^a) &\equiv \frac{\ln\left(\frac{S_T^a}{S_t^a}\right) - a(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{a\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned} \quad (33.11)$$

La función de densidad de S_T^a se puede obtener mediante la fórmula de cambio de variable, es decir,

$$f_{S_T^a|S_t^a}(s^a) = \phi_\varepsilon(g^{-1}(s^a)) \left| \frac{dg^{-1}(s^a)}{ds^a} \right|. \quad (33.12)$$

El argumento de la función anterior, s^a , representa los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria S_T^a . En consecuencia,

$$f_{S_T^a|S_t^a}(s^a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s^a}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2\right\} \left| \frac{dg^{-1}(s^a)}{ds^a} \right|,$$

donde

$$\left| \frac{dg^{-1}(s^a)}{ds^a} \right| = \frac{1}{as^a\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Por lo tanto,

$$f_{S_T^a|S_t^a}(s^a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)a\sigma s^a}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}. \quad (33.13)$$

33.3 Valuación de una opción potencia

Una opción potencia europea de compra se ejerce si $S_T^a > K$, equivalentemente si $S_T > K^{1/a}$. De esta manera, en virtud de (33.13), la prima de dicha opción se determina como

$$\begin{aligned} c(S_t^a, t) &= e^{-r(T-t)} E[\max(S_T^a - K, 0)] \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{\{s > K^{1/a}\}} (s^a - K) f_{S_T^a|S_t^a}(s^a) ds^a \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{\{s > K^{1/a}\}} s^a f_{S_T^a|S_t^a}(s^a) ds^a - e^{-r(T-t)} \int_{\{s > K^{1/a}\}} K f_{S_T^a|S_t^a}(s^a) ds^a \\ &= \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2. \end{aligned} \quad (33.14)$$

Primero se calculará \mathcal{I}_2 . Observe que, en este caso,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= e^{-r(T-t)} \int_{\{s > K^{1/a}\}} K f_{S_T^a|S_t^a}(s^a) ds^a \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{\{s > K^{1/a}\}} \frac{K}{\sqrt{2\pi(T-t)a\sigma s^a}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds^a. \end{aligned} \quad (33.15)$$

Si se considera ahora la ecuación (33.7) y se calcula la derivada del precio del activo elevado a la potencia a con respecto de ε , se tiene que

$$\frac{ds^a}{d\varepsilon} = S_t^a e^{a(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + a\sigma\sqrt{T-t}\varepsilon} a\sigma\sqrt{T-t}. \quad (33.16)$$

Si se sustituye la ecuación anterior en (33.15), se produce el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= e^{-r(T-t)} \int_{\{s > K^{1/a}\}} \frac{K}{\sqrt{2\pi(T-t)a\sigma s^a}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} ds^a \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{\Lambda} K \frac{S_t^{-a} e^{-a(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) - a\sigma\varepsilon\sqrt{T-t}} S_t^a a\sigma\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi(T-t)a\sigma}} \times \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - a(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} e^{a(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + a\sigma\varepsilon\sqrt{T-t}} d\varepsilon \\ &= K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon. \end{aligned} \quad (33.17)$$

Observe ahora que el conjunto Λ se define mediante la desigualdad $S_T > K^{1/a}$. Si se utiliza la ecuación (33.7), se sigue que

$$S_t \exp \left\{ (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\varepsilon\sqrt{T-t} \right\} > K^{1/a}.$$

Por lo tanto,

$$\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\varepsilon\sqrt{T-t} > \ln\left(\frac{K^{1/a}}{S_t}\right) = -\ln\left(\frac{S_t}{K^{1/a}}\right). \quad (33.18)$$

Al despejar ε de la ecuación anterior, se obtiene

$$\varepsilon > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K^{1/a}}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (33.19)$$

lo que produce

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \left\{ \varepsilon \mid \varepsilon > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K^{1/a}}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\} \\ &= \left\{ \varepsilon \mid -\infty < \varepsilon < \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K^{1/a}}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\} \\ &= \left\{ \varepsilon \mid -\infty < \varepsilon < d_2 \right\}, \end{aligned} \quad (33.20)$$

donde

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K^{1/a}}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Así,

$$\mathcal{I}_2 = K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon. \quad (33.21)$$

En conclusión,

$$\mathcal{I}_2 = K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (33.22)$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar. A continuación se calcula \mathcal{I}_1 . En virtud de la ecuación (33.14), se sigue que

$$\mathcal{I}_1 = e^{-r(T-t)} \int_{\{s>K^{1/a}\}} \frac{s^a}{\sqrt{2\pi(T-t)a\sigma s^a}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\} ds^a. \quad (33.23)$$

A partir de la ecuación (33.16), se tiene que

$$ds^a = S_t^a e^{a\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + a\sigma\varepsilon\sqrt{T-t}} a\sigma\sqrt{T-t} d\varepsilon. \quad (33.24)$$

Al sustituir la ecuación (33.24) en (33.23), se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= e^{-r(T-t)} \int_{\Lambda} s^a \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right\}}{\sqrt{2\pi(T-t)a\sigma s^a}} S_t^a a\sigma\sqrt{T-t} e^{a(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + a\sigma\varepsilon\sqrt{T-t}} d\varepsilon \\ &= S_t^a e^{-r(T-t)} e^{a(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \int_{\Lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2} e^{a\sigma\varepsilon\sqrt{T-t}} d\varepsilon \\ &= S_t^a e^{-r(T-t) + a(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \int_{\Lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 2a\sigma\varepsilon\sqrt{T-t} + a^2\sigma^2(T-t))} e^{\frac{1}{2}a^2\sigma^2(T-t)} d\varepsilon \\ &= S_t^a e^{-r(T-t) + a(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \int_{\Lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon - a\sigma\sqrt{T-t})^2} e^{\frac{1}{2}a^2\sigma^2(T-t)} d\varepsilon, \end{aligned} \quad (33.25)$$

donde Λ es el conjunto definido mediante (33.20). Considere el siguiente cambio de variable $w = \varepsilon - a\sigma\sqrt{T-t}$, así $dw = d\varepsilon$. De esta manera,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= S_t^a e^{-r(T-t)+a(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \int_{\Lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon-a\sigma\sqrt{T-t})^2} e^{\frac{1}{2}a^2\sigma^2(T-t)} d\varepsilon \\ &= S_t^a e^{-r(T-t)+a(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\frac{1}{2}a^2\sigma^2(T-t)} \int_{\Psi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw,\end{aligned}\quad (33.26)$$

donde el conjunto Ψ se determina de la desigualdad (33.19), es decir,

$$\varepsilon > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K^{1/a}}\right) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Si ahora se considera el cambio de variable $\varepsilon = w + a\sigma\sqrt{T-t}$, se tiene que

$$w + a\sigma\sqrt{T-t} > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K^{1/a}}\right) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Al despejar w de la desigualdad anterior y simplificar los cálculos, se tiene

$$w > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K^{1/a}}\right) + (\mu - \sigma^2(\frac{1}{2}-a))(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.\quad (33.27)$$

De esta forma, los valores que puede tomar w en Ψ se pueden caracterizar mediante

$$\begin{aligned}\Psi &:= \left\{ w \mid w > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K^{1/a}}\right) + (\mu - \sigma^2(\frac{1}{2}-a))(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\} \\ &= \left\{ w \mid -\infty < w < \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K^{1/a}}\right) + (\mu - \sigma^2(\frac{1}{2}-a))(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\} \\ &= \left\{ w \mid -\infty < w < d_1 \right\}.\end{aligned}\quad (33.28)$$

Asimismo, observe que el argumento que aparece en la primera exponencial de la ecuación (33.26) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}-r(T-t) + a(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \frac{1}{2}a^2\sigma^2(T-t) &= (-r + a\mu - \frac{1}{2}a\sigma^2 + \frac{1}{2}a^2\sigma^2)(T-t) \\ &= (-r + a(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2(a-1)))(T-t) \\ &= -(r - a(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2(a-1)))(T-t) \\ &= -(r + a(\frac{1}{2}\sigma^2(1-a) - \mu))(T-t).\end{aligned}\quad (33.29)$$

Si se sustituye (33.29) en (33.26), se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= S_t^a e^{-r(T-t)+a(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\frac{1}{2}a^2\sigma^2(T-t)} \int_{\Psi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw \\ &= S_t^a e^{-(r+a(\frac{1}{2}\sigma^2(1-a)-\mu))(T-t)} \int_{\Psi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw.\end{aligned}\quad (33.30)$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{I}_1 = S_t^a e^{-(r+a(\frac{1}{2}\sigma^2(1-a)-\mu))(T-t)} \Phi(d_1),\quad (33.31)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K^{1/a}}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad (33.32)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K^{1/a}}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t} \quad (33.33)$$

y

$$\Phi(d) = \mathbb{P}_{\mathcal{E}}\{\mathcal{E} \leq d\} = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon = 1 - \Phi(-d). \quad (33.34)$$

Si se sustituyen (33.22) y (33.31) en la ecuación (3.14), se tiene que el valor de la opción potencia es

$$\begin{aligned} c(S_t^a, t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\max(S_T^a - K, 0)] \\ &= \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 \\ &= S_t^a e^{-(r+a(\frac{1}{2}\sigma^2(1-a)-\mu))(T-t)} \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2). \end{aligned} \quad (33.35)$$

Por lo tanto,

$$c(S_t^a, t) = S_t^a e^{-(r+a(\frac{1}{2}\sigma^2(1-a)-\mu))(T-t)} \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$

donde d_1 y d_2 se toman como en (33.32) y (33.33) respectivamente. Por último, es importante destacar que si la valuación es neutral al riesgo, basta sustituir el parámetro de preferencias, μ , por la tasa de interés constante y libre de riesgo crédito, r , lo cual se justifica mediante el teorema de Girsanov. Evidentemente, si $a = 1$ se recupera la ecuación de Black y Scholes (1973).

33.4 Bibliografía sugerida

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
 Esser, A. (2003). General Valuation Principles for Arbitrary Payoffs and Applications to Power Options under Stochastic Volatility. Manuscript, Goethe University, Frankfurt, Germany.

33.5 Ejercicios

- 33.1** Valúe una opción europea de compra de potencia 2 con los parámetros que se muestran en la siguiente tabla:

Precios y parámetros relevantes				
S_t	K	r	σ	$T - t$
42.00	41.00	0.11	0.13	0.25

- 33.2** Obtenga la fórmula de valuación de una opción potencia utilizando el teorema de Girsanov.

- 33.3** Pruebe que la ecuación diferencial parcial que conduce el precio, c , de una opción potencia es

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} a^2 \sigma^2 S_t^2 + a \left(\frac{1}{2} \sigma^2 (a - 1) + r \right) S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} - r c = 0.$$

CAPÍTULO 34

VALUACIÓN DE OPCIONES CON PROCESOS DE DIFUSIÓN CON SALTOS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Sesgo, curtosis y colas pesadas
- Procesos de difusión con saltos
- Lema de Itô para difusiones con saltos
- Fórmula de Merton de valuación de opciones de difusión con saltos
- Cobertura con varianza mínima

34.1 Introducción

El presente capítulo se concentra en el modelado del comportamiento del precio de un activo subyacente cuyo rendimiento logarítmico no puede ser solamente descrito con el movimiento Browniano, sino que es necesario mezclarlo con un proceso de Poisson. Así pues, los movimientos pequeños, que se presentan todos los días en los rendimientos de los activos, se modelan a través del movimiento Browniano y los movimientos extremos e inesperados que, esporádicamente, ocurren en los rendimientos, se modelan a través del proceso de Poisson. Después de todo, una de las principales características que distingue a los mercados financieros es que, ocasionalmente, se presentan movimientos bruscos e inesperados en los rendimientos de los activos, y en muchos casos estos movimientos ocurren con mayor frecuencia de lo que se esperaría bajo el supuesto de una distribución normal, incluso con una volatilidad razonablemente moderada.

Asimismo, se presentan dos modelos de valuación de opciones cuando el precio del activo subyacente es conducido por un proceso de difusión con saltos. En el primer modelo, el precio de la opción se calcula como la media de los precios de opciones que cubren saltos secuenciales del activo subyacente. En el segundo modelo, el precio de la opción se determina mediante la minimización de la varianza del valor de un portafolio que contiene acciones cuyo precio puede saltar y opciones sobre la misma acción.

34.2 Sesgo, exceso de curtosis y colas pesadas

En la valuación de diversos productos derivados, el supuesto de que la variable subyacente sigue una distribución lognormal, o que su tasa de crecimiento sigue una distribución normal, es muy común. En particular, es usual suponer que los precios de los activos subyacentes siguen un movimiento geométrico Browniano, en cuyo caso el rendimiento logarítmico es normal. Sin embargo, existe evidencia empírica contundente de que, en la mayoría de los casos, los precios de los activos, sobre todo cuando se trata de datos intradía, no se comportan de acuerdo a una distribución lognormal; véase, por ejemplo, Ball y Torous (1985). De hecho, dichos precios casi nunca se comportan de acuerdo a distribuciones teóricas comúnmente conocidas. Se observa con frecuencia que las distribuciones empíricas de los rendimientos logarítmicos intradía estandarizados de muy diversos activos subyacentes presentan exceso de curtosis y sesgo (al compararse con una distribución normal), y no siempre es posible ajustar una distribución teórica simple.

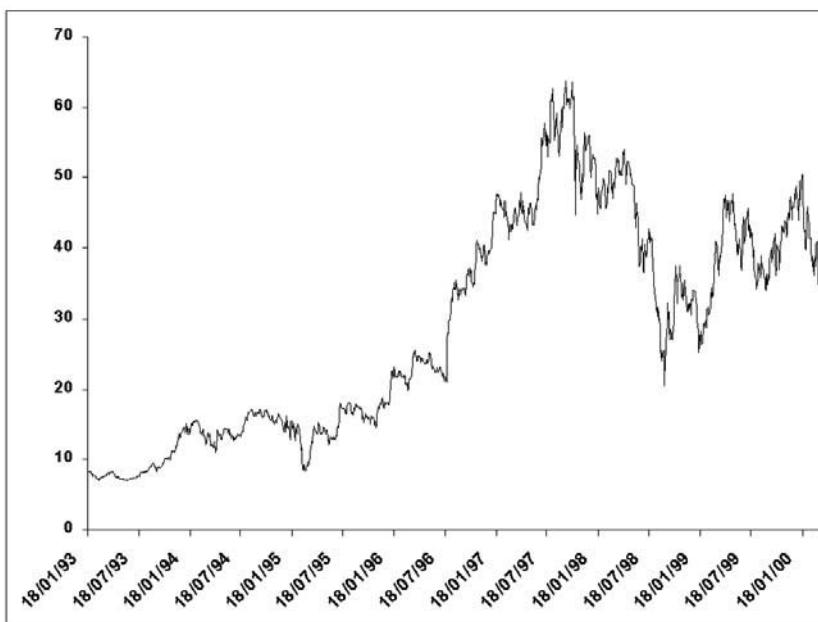
Al comparar la distribución empírica estandarizada de los rendimientos de un activo con una distribución normal estándar, se observa con frecuencia que la cresta de la distribución empírica es más alta. Dado que ambas distribuciones tienen la misma desviación estándar, es decir, los mismos puntos de inflexión, entonces las colas de la distribución empírica tienen necesariamente que ser más anchas para compensar el área de la cresta, que en ambos casos tiene que ser igual a uno. La cresta más alta significa que existe una probabilidad más grande de movimientos

pequeños que la de una variable aleatoria con distribución normal. Por otro lado, debido a las colas más gordas (o pesadas) de la distribución empírica, se tiene una mayor probabilidad de que ocurran valores extremos en comparación con la distribución normal. En este caso, si la distribución normal se mezcla con una distribución que genere movimientos extremos en el rendimiento del activo subyacente, se producirán colas más pesadas y se tendría una mejor aproximación a lo observado.

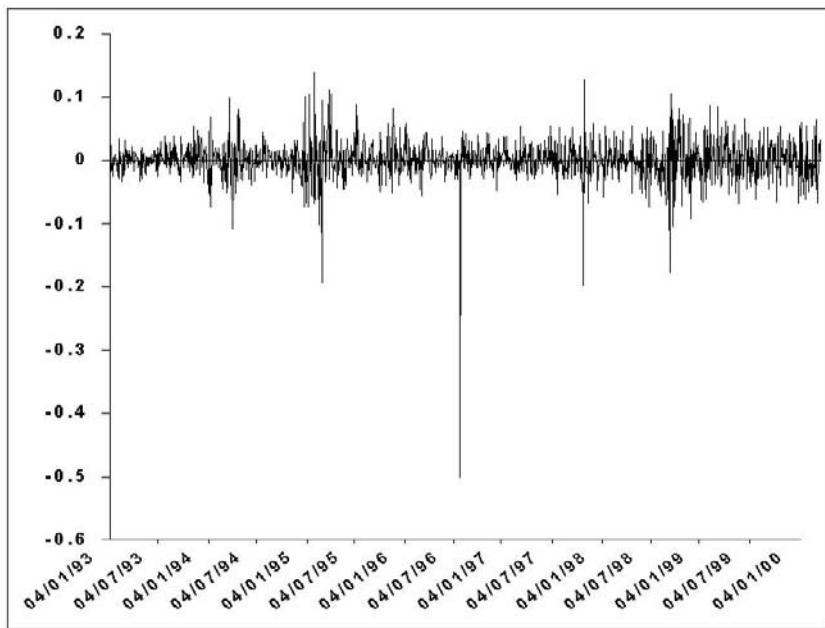
34.3 Evidencia de sesgo, saltos y colas pesadas

En esta sección se analiza la dinámica de los rendimientos logarítmicos diarios de los títulos de capital de GCARSO A1. En particular, se analiza qué tan lejos se encuentra la distribución empírica de los rendimientos de una distribución normal y qué tan cerca de una mezcla de una variable normal con un proceso de Poisson. En la Gráfica 34.1 se observa el comportamiento del precio ajustado de la acción GCARSO A1 durante el período comprendido entre el 4 de enero de 1993 y el 23 de marzo de 2000, y la Gráfica 34.2 muestra los rendimientos. En la Gráfica 34.3 se compara la distribución empírica normalizada del rendimiento logarítmico diario de la acción con la distribución normal estándar. Se observa que la cresta de la distribución empírica es notablemente superior a la de la distribución normal. Dado que ambas distribuciones tienen la misma desviación estándar y la cresta de la distribución empírica es mayor, esta última tendrá necesariamente colas más pesadas.

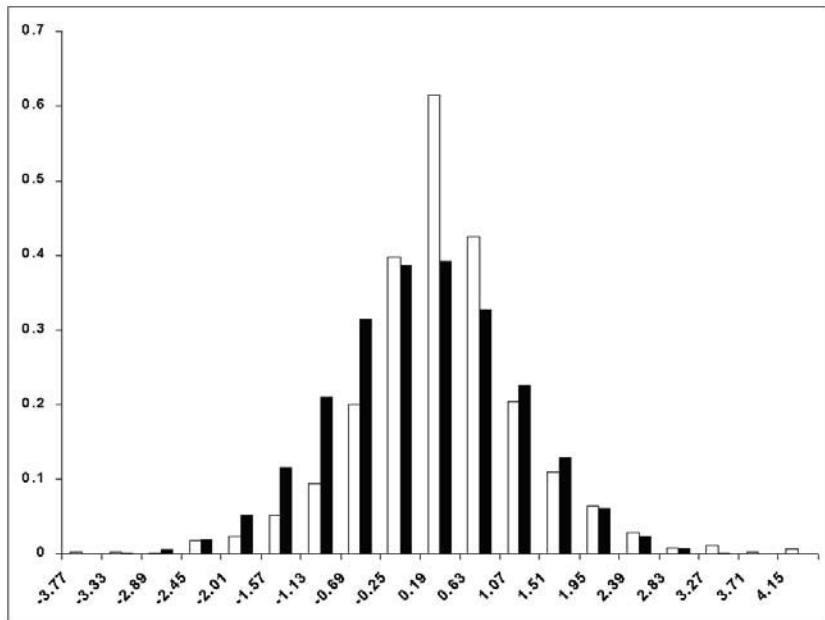
La diferencia entre las distribuciones, observada en la Gráfica 34.3, es típica en muchos activos subyacentes. La distribución empírica tiene una cresta más alta que la de una variable aleatoria con distribución normal, lo más importante es observar que las colas de la distribución empírica son más pesadas y debido a ellas se tiene una mayor probabilidad de que valores extremos ocurran en comparación con la distribución normal. En este caso, si la distribución normal se mezcla con una distribución que genere movimientos extremos o saltos en el valor del rendimiento del título, se producirían colas más pesadas y se tendría una aproximación más realista del comportamiento del rendimiento del activo.



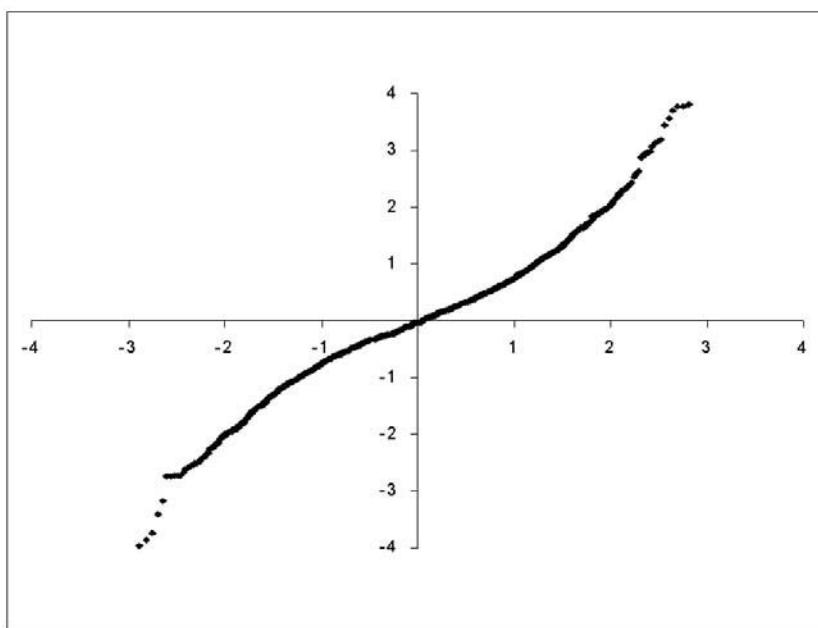
Gráfica 34.1 Comportamiento del precio diario del título GCARSO A1.



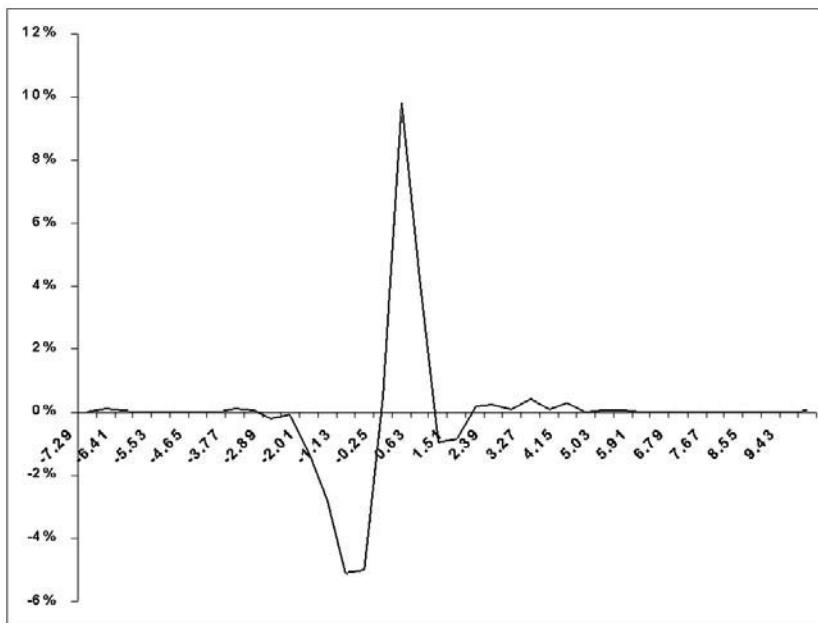
Gráfica 34.2 Rendimientos logarítmicos diarios del título GCARSO A1.



Gráfica 34.3 Distribución empírica normalizada del rendimiento logarítmico diario del título GCARSO A1 y la distribución normal estándar. Las barras oscuras representan a la distribución normal estándar.



Gráfica 34.4 Gráfica Q - Q del rendimiento logarítmico diario del título GCARSO A1.



Gráfica 34.5 Diferencia entre la distribución acumulada de los rendimientos logarítmicos diarios de GCARSO A1 y la distribución normal estándar.

La Gráfica 34.4 es llamada gráfica Cuantil-Cuantil o gráfica Q - Q . Esta gráfica nos proporciona otra forma de visualizar la diferencia entre una distribución empírica y una distribución normal, particularmente cuando se está interesado en la detección de colas pesadas. Esta gráfica se elabora como sigue: se ordenan los rendimientos logarítmicos observados en forma creciente, denotados como $R_{(t)}$ con un índice t que va de 1 hasta T . Luego se obtienen los valores (argumentos) Q_t de la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar que proporcionan el valor $(t - 0.5)/T$. Por último, se grafica cada punto $(Q_t, R_{(t)})$. Cuando la curva que une los

puntos es una línea recta, el supuesto de normalidad de las observaciones $R_{(t)}$ podría ser el correcto. Sin embargo, en el caso examinado la curva está lejos de ser una recta debido a la presencia de colas pesadas.

Por último, la Gráfica 34.5, muestra la diferencia entre la distribución acumulada de los rendimientos logarítmicos de la acción de GCARSO A1 y la distribución acumulada de una variable normal estándar, en donde se observa una mayor variabilidad alrededor del origen.

34.4 Procesos de difusión con saltos

En los últimos años, la ingeniería financiera ha experimentado cambios profundos en la forma de diseñar portafolios que combinan activos con sus derivados. Estos cambios han propuesto nuevos paradigmas que resaltan la necesidad de administrar diferentes riesgos financieros. Estos paradigmas, en general, han abierto nuevos horizontes a la teoría y, consecuentemente, al empleo de herramientas más sofisticadas que permitan una mayor comprensión de los fenómenos financieros que presentan discontinuidades de naturaleza estocástica.

Considere un proceso estocástico dN_t que satisface:

$$dN_t = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \lambda dt + o(dt), \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - \lambda dt + o(dt), \end{cases}$$

en donde $o(dt)/dt \rightarrow 0$ cuando $dt \rightarrow 0$. Más precisamente,

$$\mathbb{P}\{\text{un salto de tamaño 1 durante } dt\} = \mathbb{P}\{dN_t = 1\} = \lambda dt + o(dt),$$

mientras que

$$\mathbb{P}\{\text{ningún salto durante } dt\} = \mathbb{P}\{dN_t = 0\} = 1 - \lambda dt + o(dt).$$

Por lo tanto, existe una probabilidad finita de que ocurra un salto en un tiempo finito. Observe que $E[dN_t] = \lambda dt$ y $\text{Var}[dN_t] = \lambda dt$. Observe también que se tiene una probabilidad λdt de un salto en N_t de tamaño 1 en el instante dt . El parámetro λ es conocido como la intensidad del proceso de Poisson y define el número medio esperado de saltos por unidad de tiempo. Observe también que

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^t g(s)dN_s\right] &= \int_0^t E[g(s)dN_s] \\ &= \int_0^t E[\ E[g(s)dN_s \mid N_s]\] \\ &= \int_0^t E[\ g(s)E[\ dN_s \mid N_s]\] \\ &= \int_0^t E[\ g(s)\lambda ds\] \\ &= \int_0^t g(s)\lambda ds \\ &= \lambda \int_0^t g(s)ds \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left[\int_0^t g(s) dN_s \right] &= \int_0^t \text{Var}[g(s) dN_s] \\
&= \int_0^t \text{Var}[\mathbb{E}[g(s) dN_s | N_s]] + \int_0^t \mathbb{E}[\text{Var}[g(s) dN_s | N_s]] \\
&= \int_0^t \text{Var}[g(s)\lambda ds] + \int_0^t \mathbb{E}[\text{Var}[g(s) dN_s | N_s]] \\
&= 0 + \int_0^t \mathbb{E}[g^2(s) \text{Var}[dN_s | N_s]] \\
&= \int_0^t \mathbb{E}[g^2(s)\lambda ds] \\
&= \int_0^t g^2(s)\lambda ds \\
&= \lambda \int_0^t g^2(s)ds.
\end{aligned}$$

Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\bar{\mathbb{F}} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ su filtración aumentada, la cual representa información del mercado disponible hasta el tiempo t . El proceso de Poisson, N_t , puede ser incorporado en la ecuación de difusión de una variable subyacente, S_t , de la siguiente forma:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + \nu S_t dN_t, \quad (34.1)$$

en donde las constantes μ y σ representan, respectivamente, la media esperada y la volatilidad instantánea de los rendimientos, condicionales a que ningún salto ocurra. Se supone que los procesos dW_t y dN_t no están correlacionados entre sí. Si hay un salto, es decir, si $dN_t = 1$, entonces S_t inmediatamente toma el valor $S_t(1 + \nu)$, con lo que se puede modelar un incremento brusco en el rendimiento de tamaño ν . En lo que sigue, se supone que ν , el tamaño del salto, es una variable aleatoria independiente de dW_t y dN_t .

34.5 El lema de Itô para procesos de difusión con saltos de Poisson

El lema de Itô para procesos de difusión con saltos se puede establecer como sigue. Dada la ecuación diferencial estocástica lineal homogénea

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t + \nu dN_t) \quad (34.2)$$

y $c = c(S_t, t)$ una función dos veces diferenciable, con segundas derivadas parciales continuas, entonces la diferencial estocástica de $c(S_t, t)$ está dada por

$$\begin{aligned}
dc &= \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt \\
&\quad + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t + [c(S_t(1 + \nu), t) - c(S_t, t)] dN_t.
\end{aligned} \quad (34.3)$$

Por ejemplo, si S_t cumple con (34.2), entonces el rendimiento logarítmico satisface

$$d \ln(S_t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma dW_t + \ln(1 + \nu) dN_t, \quad (34.4)$$

y, en este caso,

$$S_t = S_0 \exp \left\{ (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \int_0^t dW_u + \ln(1 + \nu) \int_0^t dN_u \right\}. \quad (34.5)$$

De lo anterior, se desprende que el rendimiento logarítmico, $d \ln(S_t)$, puede tomar valores positivos y negativos, y el nivel en el precio, S_t , se mantiene siempre positivo.

34.6 Un portafolio con subyacentes que presentan saltos de Poisson

En esta sección se presenta el problema de valuación de una opción europea sobre una acción, que no paga dividendos, cuya dinámica es guiada por un proceso mixto de difusión con saltos. En este contexto, el activo subyacente genera, por una parte, información en tiempo continuo que afecta sólo el precio marginal y, por otra parte, de vez en cuando genera información específica de la emisora en tiempos discretos afectando más que marginalmente el precio del título.

Considere un portafolio con α_1 títulos accionarios de precio S_t y una cantidad α_2 de opciones de precio $c(S_t, t)$. Así, el valor del portafolio, en el tiempo t , está dado por

$$\Pi_t = \alpha_1 S_t + \alpha_2 c(S_t, t). \quad (34.6)$$

El cambio en el valor del portafolio debido sólo a fluctuaciones del mercado, con base en (34.2) y (34.3), satisface

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \alpha_1 dS_t + \alpha_2 dc(S_t, t) \\ &= \alpha_1 (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + \nu S_t dN_t) \\ &\quad + \alpha_2 \left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t \right] \\ &\quad + \alpha_2 [c(S_t(1 + \nu), t) - c(S_t, t)] dN_t. \end{aligned} \quad (34.7)$$

Después de reacomodar términos, se obtiene la siguiente expresión equivalente:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt + \left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t \\ &\quad + \alpha_2 \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt \\ &\quad + [\alpha_2 (c(S_t(1 + \nu), t) - c(S_t, t)) + \alpha_1 \nu S_t] dN_t. \end{aligned} \quad (34.8)$$

Si no existe un salto en el instante dt , es decir, si $dN_t = 0$, entonces se puede seleccionar, por ejemplo, la cobertura Delta definida por $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_1 = -\partial c / \partial S_t \equiv -\Delta$ para eliminar el riesgo inducido por dW_t . Sin embargo, si existe un salto, en cuyo caso $dN_t = 1$, entonces el portafolio cambia de valor y la cobertura Delta deja de ser efectiva debido al riesgo asociado con dN_t . En las siguientes secciones se discuten algunas alternativas para administrar dicho riesgo. Observe, por último, que una opción que cubra contra saltos en el subyacente tiene que ser más cara que una opción en un escenario en donde no se presentan saltos.

34.7 Valuación con difusión y saltos de Poisson en el subyacente

En esta sección se valúa una opción europea de compra bajo un conjunto de supuestos sobre la distribución asociada al tamaño del salto. Observe primero que bajo la cobertura Delta, es decir, si se seleccionan $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_1 = -\partial c / \partial S_t$ y estos valores se sustituyen en la ecuación (34.8), se cubre una operación de venta en corto del subyacente con una posición larga sobre una opción de compra. Además, es importante destacar que bajo esta elección particular de α_1 y α_2 , el parámetro de preferencias μ desaparece. En este caso, el cambio en el valor del portafolio está dado por:

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \left[c(S_t(1 + \nu), t) - c(S_t, t) - \nu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} \right] dN_t, \quad (34.9)$$

donde se ha utilizado el superíndice Δ a fin de resaltar la aplicación de la cobertura Delta. Bajo esta cobertura, el cambio en el valor del portafolio no se comporta completamente en forma determinista en el instante dt , ya que existe la posibilidad de que se presenten saltos con

una media esperada por unidad de tiempo igual a λ . Claramente, se observa que la cobertura Delta no es eficiente para administrar el riesgo por un salto en el precio del subyacente, de $S_t + \nu S_t = (1 + \nu)S_t$. Si se toma la esperanza de (34.9) y se iguala al rendimiento libre de riesgo del valor inicial del portafolio, bajo $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_1 = -\partial c / \partial S_t$, con una tasa de interés constante, r , para todos los plazos, a fin de evitar oportunidades de arbitraje libres de riesgo, es decir,

$$E[d\Pi_t^{(r)}] = r \left(c(S_t, t) - \left(\frac{\partial c}{\partial S_t} \right) S_t \right) dt.$$

De hecho, la esperanza en la expresión anterior es condicional, $E[d\Pi_t^{(r)} | S_t]$; sin embargo, por simplicidad, se mantendrá la notación omitiendo el condicionante. Si, además, se utiliza que $E[d\Pi_t^{(\Delta)}] = E_\nu[E[d\Pi_t^{(\Delta)}]]$, entonces

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial c}{\partial S_t} - rc + \lambda E_\nu[c(S_t(1 + \nu), t)] - \lambda c(S_t, t) - \lambda \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t E_\nu[\nu] = 0, \quad (34.10)$$

con las condiciones de frontera $c(0, t) = 0$ y $c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0)$ donde K es el precio de ejercicio de la opción. Observe que el término que aparece en el valor esperado de (34.10) satisface

$$E_\nu[c(S_t(1 + \nu), t)] = \int_{-\infty}^{\infty} c(S_t(1 + \nu), t) f(\nu) d\nu,$$

donde $f(\cdot)$ es la función de densidad de ν . Debido a la presencia de este valor esperado en (34.10), la ecuación es del tipo diferencial-integral. Esta ecuación presenta complicaciones técnicas para su solución y, en general, requiere de métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas de $c(S_t, t)$.

Vale la pena destacar también que si ν es determinista y suficientemente pequeña, entonces la cobertura Delta proporciona, en términos generales, una protección adecuada aun cuando se presentan saltos ya que

$$\frac{c(S_t(1 + \nu), t) - c(S_t, t)}{\nu S_t} \approx \frac{\partial c}{\partial S_t}.$$

En este caso, el coeficiente de dN_t en (34.9) es muy pequeño. Por último, observe que cuando $\nu = 0$ ó $\lambda = 0$, la ecuación (34.10) se reduce simplemente, como era de esperarse, a la ecuación diferencial parcial de segundo orden parabólica de Black-Scholes.

El lector podría pensar que una alternativa para reducir el riesgo de mercado generado por los factores dW_t y dN_t , con base en la ecuación (34.8), sería resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} = 0, \\ \alpha_2(c(S_t(1 + \nu), t) - c(S_t, t)) + \alpha_1 \nu S_t = 0. \end{cases}$$

Se contemplan los siguientes casos:

1) Si $\alpha_2 = 0$, entonces $\alpha_1 = 0$, lo cual no resuelve el problema de cobertura.

2) Si $\alpha_2 \neq 0$, entonces

$$\alpha_1 = -\alpha_2 \frac{\partial c}{\partial S_t}.$$

Después de sustituir la expresión anterior en (34.7) e igualar el resultado con el retorno libre de riesgo del portafolio se obtiene

$$\begin{aligned} & r(c - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t) dt \\ &= \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \left[(c(S_t(1 + \nu), t) - c(S_t, t)) - \frac{\partial c}{\partial S_t} \nu S_t \right] dN_t. \end{aligned}$$

Esta última expresión conduce de nuevo a la ecuación (34.10).

34.8 Fórmula de Merton para valuación de opciones

Una posibilidad para determinar $c(S_t, t)$, partir de (34.10), consiste en definir una sucesión de variables aleatorias Y_n que tienen la misma distribución que el producto de n variables independientes e idénticamente distribuidas a $\nu + 1$, definiendo $Y_0 = 1$. Es decir, si $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas a ν , se definen:

$$\begin{aligned} Y_0 &= 1 \\ Y_1 &= \nu_1 + 1 \\ Y_2 &= (\nu_1 + 1)(\nu_2 + 1) \\ &\vdots \\ Y_n &= \prod_{k=1}^n (\nu_k + 1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

En este caso particular, la solución de la ecuación (34.10) con las condiciones de frontera

$$c(0, t) = 0, \quad \text{y} \quad c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0),$$

está dada por

$$c(S_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} [\lambda(T-t)]^n}{n!} E_{Y_n} [c_{BS}(S_t Y_n e^{-\lambda E_{\nu}[\nu](T-t)}, t; \sigma^2, r)], \quad (34.11)$$

donde $c_{BS}(\cdot)$ es la solución básica de Black-Scholes. La ecuación anterior proporciona un valor medio, $c(S_t, t)$, de las primas esperadas, $E_{Y_n}[c_{BS}(\cdot)]$, con respecto a una distribución de Poisson con media $\lambda(T-t)$. En efecto, considere

$$c(S_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,t} E_{Y_n} [c_{BS}^{(n)}], \quad (34.12)$$

donde

$$P_{n,t} = \frac{e^{-\lambda(T-t)} [\lambda(T-t)]^n}{n!},$$

$$U_{n,t} = Y_n e^{-\lambda E_{\nu}[\nu](T-t)}$$

y

$$c_{BS}^{(n)} = c_{BS}^{(n)}(S_t U_{n,t}, t)$$

es la solución básica de Black-Scholes. Para lo que sigue, es conveniente también introducir la notación

$$V_{n,t} = S_t U_{n,t}.$$

En este caso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial S_t} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,t} E_{Y_n} \left[\frac{\partial c_{BS}^{(n)}}{\partial V_{n,t}} \frac{\partial V_{n,t}}{\partial S_t} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,t} E_{Y_n} \left[U_{n,t} \frac{\partial c_{BS}^{(n)}}{\partial V_{n,t}} \right], \end{aligned} \quad (34.13)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,t} E_{Y_n} \left[U_{n,t}^2 \frac{\partial^2 c_{BS}^{(n)}}{\partial V_{n,t}^2} \right] \quad (34.14)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} = & \lambda E_{\nu}[\nu] \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,t} E_{Y_n} \left[V_{n,t} \frac{\partial c_{BS}^{(n)}}{\partial V_{n,t}} \right] \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,t} E_{Y_n} \left[\frac{\partial c_{BS}^{(n)}}{\partial t} \right] \\ & + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,t} E_{Y_n} [c_{BS}^{(n)}] \\ & - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} [\lambda(T-t)]^{n-1}}{(n-1)!} E_{Y_n} [c_{BS}^{(n)}]. \end{aligned} \quad (34.15)$$

Por lo tanto, en virtud de (34.12) y (34.13), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} = & \lambda E_{\nu}[\nu] S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,t} E_{Y_n} \left[\frac{\partial c_{BS}^{(n)}}{\partial t} \right] + \lambda c(S_t, t) \\ & - \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} [\lambda(T-t)]^m}{(m)!} E_{Y_{m+1}} [c_{BS}^{(m+1)}]. \end{aligned} \quad (34.16)$$

Observe que el último sumando se puede reescribir como

$$\begin{aligned} E_{\nu}[c((1+\nu)S_t, t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,t} E_{Y_n} [c_{BS}^{(n)}(V_{n,t}(1+\nu), t)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,t} E_{Y_{n+1}} [c_{BS}^{(n+1)}(V_{n+1,t}, t)], \end{aligned} \quad (34.17)$$

ya que $V_{n+1,t}$ y $V_{n,t}(1+\nu)$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas. Por lo tanto, la ecuación (34.16) se transforma en

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,t} E_{Y_n} \left[\frac{\partial c_{BS}^{(n)}}{\partial t} \right] - \lambda \left[E_{\nu}[c((1+\nu)S_t, t)] - c(S_t, t) - E_{\nu}[\nu] S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} \right]. \quad (34.18)$$

A partir de (34.10) y (34.13)-(34.18), se sigue que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} - r c \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,t} E_{Y_n} \left[\frac{\partial c_{BS}^{(n)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 V_{n,t}^2 \frac{\partial^2 c_{BS}^{(n)}}{\partial V_{n,t}^2} + r V_{n,t} \frac{\partial c_{BS}^{(n)}}{\partial V_{n,t}} - r c_{BS}^{(n)} \right] \\ & \quad - \lambda \left[E_{\nu}[c((1+\nu)S_t, t)] - c(S_t, t) - E_{\nu}[\nu] S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} \right]. \end{aligned} \quad (34.19)$$

En vista de que para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple que

$$\frac{\partial c_{BS}^{(n)}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 V_{n,t}^2 \frac{\partial^2 c_{BS}^{(n)}}{\partial V_{n,t}^2} + r V_{n,t} \frac{\partial c_{BS}^{(n)}}{\partial V_{n,t}} - r c_{BS}^{(n)} = 0,$$

con lo cual se deduce, inmediatamente, que (34.11) es solución de (34.10).

34.9 Fórmula de Merton para valuación de opciones cuando el tamaño del salto es lognormal

Suponga que $Y = \ln(X - a) \sim \mathcal{N}(\nu, \delta^2)$, $X > a$, entonces $X = a + e^Y$. La función de densidad de X satisface

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta(x-a)} \exp\left\{-\frac{(\ln(x-a)-\nu)^2}{2\delta^2}\right\} & \text{si } x > a, \\ 0 & \text{si } x \leq a. \end{cases}$$

En este caso,

$$\mathbb{E}_X[X] = a + e^{\nu + \frac{1}{2}\delta^2}, \quad \mathbb{E}_X[\ln(X - a)] = \nu,$$

$$\text{Var}_X[X] = e^{2\nu + \delta^2}(e^{\delta^2} - 1) \quad \text{y} \quad \text{Var}_X[\ln(X - a)] = \delta^2.$$

En el caso particular de que ν tenga distribución lognormal con media $-1 + e^\gamma$, es decir,

$$1 + \mathbb{E}_\nu[\nu] = e^\gamma, \quad \text{ó} \quad \gamma = \ln(1 + \mathbb{E}_\nu[\nu])$$

y si

$$\text{Var}_\nu[\ln(\nu + 1)] = \delta^2,$$

entonces Y_n se distribuye también lognormal con $\mathbb{E}_{Y_n}[Y_n] = e^{n\gamma} = \exp\{n \ln(1 + \mathbb{E}_\nu[\nu])\}$ y $\text{Var}_{Y_n}[\ln(Y_n)] = n\delta^2$, entonces el precio de la opción está dado por

$$c(S_t, t; T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda'(T-t)} \frac{(\lambda'(T-t))^n}{n!} c_{\text{BS}}(S_t, t; \sigma_n^2, r_n, T), \quad (34.20)$$

donde

$$\lambda' = \lambda(1 + \mathbb{E}_\nu[\nu]),$$

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{T-t}$$

y

$$r_n = r - \lambda \mathbb{E}_\nu[\nu] + \frac{n \ln(1 + \mathbb{E}_\nu[\nu])}{T-t}.$$

En efecto, el n -ésimo sumando, ξ_n , de la fórmula de Merton, (34.20), satisface

$$\begin{aligned} \xi_n &= \frac{e^{-\lambda(T-t)} [\lambda(T-t)]^n}{n!} \mathbb{E}_{Y_n} \left[c_{\text{BS}}(S_t Y_n e^{-\lambda \mathbb{E}_\nu[\nu](T-t)}, t; \sigma^2, r) \right] \\ &= \frac{e^{-\lambda(T-t)} [\lambda(T-t)]^n}{n!} e^{-r(T-t)} \times \\ &\quad \mathbb{E}_{Y_n} \left[\int_0^\infty \max(s Y_n e^{-\lambda \mathbb{E}_\nu[\nu](T-t)} - K, 0) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \right] \\ &= \frac{e^{-\lambda(T-t)} e^{-\lambda \mathbb{E}_\nu[\nu](T-t)} [\lambda(T-t)]^n}{n!} e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{Y_n} \left[\int_{K'}^\infty (s Y_n - K') f_{S_T|S_t}^{(n)}(s|S_t) ds \right] \\ &= \frac{e^{-\lambda'(T-t)} [\lambda(T-t)]^n}{n!} e^{-r(T-t)} \left(\int_{K'}^\infty (\mathbb{E}_{Y_n}[s Y_n] - K') f_{S_T|S_t}^{(n)}(s|S_t) ds \right) \\ &= \frac{e^{-\lambda'(T-t)} [\lambda(T-t)]^n}{n!} e^{-r(T-t)} \left(\int_{K'}^\infty (s e^{n\gamma} - K') f_{S_T|S_t}^{(n)}(s|S_t) ds \right) \\ &= \frac{e^{-\lambda'(T-t)} [\lambda(T-t)]^n}{n!} e^{n\gamma} e^{-r(T-t)} \left(\int_{K_n}^\infty (s - K_n) f_{S_T|S_t}^{(n)}(s|S_t) ds \right) \\ &= \frac{e^{-\lambda'(T-t)} [\lambda(T-t)]^n (1 + \mathbb{E}_\nu[\nu])^n}{n!} e^{-r(T-t)} \left(\int_{K_n}^\infty (s - K_n) f_{S_T|S_t}^{(n)}(s|S_t) ds \right) \\ &= \frac{e^{-\lambda'(T-t)} [\lambda'(T-t)]^n}{n!} e^{-r(T-t)} \left(\int_{K_n}^\infty (s - K_n) f_{S_T|S_t}^{(n)}(s|S_t) ds \right), \end{aligned} \quad (34.21)$$

donde

$$K' = K e^{\lambda \mathbb{E}_\nu[\nu](T-t)} \quad \text{y} \quad K_n = K' e^{-n\gamma}.$$

Claramente, la integral de (34.21), traída a valor presente, es la fórmula de valuación de Black-Scholes con precio de ejercicio K_n , es decir,

$$c_{\text{BS}}(S_t, t; K_n) = e^{-r(T-t)} \int_{K_n}^{\infty} (s - K_n) f_{S_T|S_t}^{(n)}(s|S_t) ds.$$

Observe también que el principio de valuación de una opción, en equilibrio, no se modifica, es decir, la prima de la opción es igual al valor presente del pago esperado. En este caso,

$$\begin{aligned} d_1^{(n)} &= \frac{\ln(S_t/K_n) + r(T-t) + \text{Var}[\ln(S_T Y_n)]}{\sqrt{\text{Var}[\ln(S_T Y_n)]}} \\ &= \frac{\ln(S_t/K) - \lambda E_\nu[\nu](T-t) + n \ln(1 + E_\nu[\nu]) + r(T-t)}{\sqrt{(\sigma^2 + (n\delta^2/(T-t)))(T-t)}} \\ &\quad + \sqrt{(\sigma^2 + (n\delta^2/(T-t)))(T-t)} \\ &= \frac{\ln(S_t/K) + (r - \lambda E_\nu[\nu] + (n \ln(1 + E_\nu[\nu]))/(T-t))(T-t)}{\sqrt{(\sigma^2 + (n\delta^2/(T-t)))(T-t)}} \\ &\quad + \sqrt{(\sigma^2 + (n\delta^2/(T-t)))(T-t)}, \end{aligned}$$

ya que

$$\text{Var}[\ln(S_T Y_n)] = \text{Var}_{S_T}[\ln(S_T)] + \text{Var}_{Y_n}[\ln(Y_n)] = \sigma^2(T-t) + n\delta^2.$$

Por último, observe que

$$d_2^{(n)} = d_1^{(n)} - \sqrt{(\sigma^2 + (n\delta^2/(T-t)))(T-t)}.$$

Por lo tanto, de acuerdo con (34.20), el precio de la opción, $c(S_t, t)$, se calcula como el valor medio, con respecto a la distribución de Poisson, de los precios de las opciones que cubren secuencialmente los saltos, $c_{\text{BS}}(S_t, t; \sigma_n^2, r_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Dicha ecuación permite, para n suficientemente grande, calcular soluciones aproximadas en forma sencilla. Con el propósito de obtener aproximaciones numéricas de (34.20) para el precio de una opción sobre el título GCARSO A1, se utilizan los precios y las estimaciones de los parámetros del Cuadro 34.1.

Precios y parámetros relevantes					
S	K	r	σ	$T-t$	c_{BS}
42.00	41.00	0.11	0.13	0.25	2.436

Cuadro 34.1. Valores de los parámetros y precio de la opción.

En el Cuadro 34.2 se muestran valores aproximados de la valuación de la opción bajo difusión y saltos para distintos valores de λ manteniendo fijo $E_\nu[\nu]$, con $n = 100$, bajo el supuesto de que ν sigue una distribución lognormal con media 0.01 y varianza 0.001. Los valores S , K , r , σ y $T-t$ se toman como en c_{BS} del Cuadro 34.1. Como puede esperarse, ante la presencia de saltos en el subyacente, la opción se vuelve más cara.

Valuación bajo difusión y saltos					
$E_\nu[\nu]=0.01, \text{Var}[\nu]=0.001$					
λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
c	2.506	2.575	2.641	2.706	2.747
(Continuación)					
λ	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
c	2.830	2.890	2.896	3.006	3.061

Cuadro 34.2 Precios de la opción en función de λ .

Bajo el supuesto anterior de que ν sigue una distribución lognormal con varianza 0.001, el Cuadro 34.3 muestra el comportamiento del precio de la opción de compra en función de $E_\nu[\nu]$. En este ejercicio los valores S , K , r , σ y $T-t$ se toman como en c_{BS} del Cuadro 34.1.

Valuación bajo difusión y saltos					
Var[ν]=0.001 $\lambda=0.1$					
E $_{\nu}[\nu]$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
c	2.506	2.514	2.523	2.532	2.542
(Continuación)					
E $_{\nu}[\nu]$	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
c	2.551	2.561	2.571	2.581	2.591

Cuadro 34.3 Precios de la opción en función de E[ν].

Los supuestos sobre el comportamiento de la sucesión $\{Y_n\}$ pueden ser muy restrictivos para determinar soluciones de (34.10), la siguiente sección presenta una alternativa de cobertura en donde la prima de la opción se determina a través de la minimización de la varianza del cambio en el valor del portafolio.

34.10 Cobertura con varianza mínima

En la sección anterior se estudiaron estrategias de cobertura de naturaleza no-local. Otra posibilidad para cubrir la difusión y los saltos, a partir de la ecuación (34.8), tanto como sea posible, es fijar $\alpha_2 = 1$ y, posteriormente, obtener α_1 de tal manera que se minimice la varianza del cambio en el valor en el portafolio.

En virtud de (34.8), el cambio en el valor del portafolio tomando en cuenta sólo los factores de riesgo, con α_1 arbitraria, es

$$d\Pi_t = \left(\alpha_1 + \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t + [c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 \nu S_t] dN_t + \dots$$

La varianza de este cambio, la cual mide el riesgo en el portafolio, está dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}[d\Pi_t] &= \text{Var}_{\nu}[\text{E}[d\Pi_t]|\nu] + \text{E}_{\nu}[\text{Var}[d\Pi_t]|\nu] \\ &= \text{Var}[\lambda(c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 \nu S_t) dt] \\ &\quad + \left(\alpha_1 + \frac{\partial c}{\partial S_t} \right)^2 \sigma^2 S_t^2 dt + \lambda \text{E}_{\nu} \left[(c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 \nu S_t)^2 \right] dt \\ &= \lambda^2 (dt)^2 \text{Var}[(c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 \nu S_t)] \\ &\quad + \left(\alpha_1 + \frac{\partial c}{\partial S_t} \right)^2 \sigma^2 S_t^2 dt + \lambda \text{E}_{\nu} \left[(c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 \nu S_t)^2 \right] dt \\ &= \left(\alpha_1 + \frac{\partial c}{\partial S_t} \right)^2 \sigma^2 S_t^2 dt + \lambda \text{E}_{\nu} \left[(c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 \nu S_t)^2 \right] dt, \end{aligned} \tag{34.22}$$

ya que $(dt)^2 = 0$. Observe que la varianza $\text{Var}[d\Pi_t]$, es de hecho condicional $\text{Var}[d\Pi_t|S_t]$. Por simplicidad, se omitirá el condicionante. Observe ahora que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Var}[d\Pi_t]}{\partial \alpha_1} &= 2 \left(\alpha_1 + \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma^2 S_t^2 dt \\ &\quad + 2 S_t \lambda \text{E}_{\nu} [\nu (c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 \nu S_t)] dt \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial^2 \text{Var}[d\Pi_t]}{\partial \alpha_1^2} = 2\sigma^2 S_t^2 dt + 2S_t^2 \lambda \text{E}_{\nu} [\nu^2] dt > 0.$$

Esta última condición, suficiente, asegura la existencia de un mínimo. Por lo tanto, el valor de α_1 que minimiza (34.22), el cual se obtiene de $\partial \text{Var}[d\Pi_t]/\partial \alpha_1 = 0$, satisface

$$\alpha_1 = -\frac{\lambda \text{E}_{\nu} [\nu (c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t))] + \sigma^2 S_t \frac{\partial c}{\partial S_t}}{\lambda S_t \text{E}_{\nu} [\nu^2] + \sigma^2 S_t}. \tag{34.23}$$

Si se valúa la opción en términos de la esperanza sobre la mejor estrategia de cobertura. Es decir, si en (34.8) se sustituye α_1 y se calcula $E[d\Pi_t]$ para igualarse con el retorno libre de riesgo del portafolio inicial con una tasa de interés constante a todos los plazos, se llega a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{\lambda E_\nu[\nu^2] + \sigma^2} (\mu + \lambda E_\nu[\nu] - r) \right) - rc \\ + \lambda E_\nu \left[(c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t)) \left(1 - \frac{\nu}{\lambda E_\nu[\nu^2] + \sigma^2} (\mu + \lambda E_\nu[\nu] - r) \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (34.24)$$

Cuando $\lambda = 0$, se obtiene, de nuevo, la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.

En este punto surge una pregunta natural, por qué no se determinan α_2 y α_1 que minimicen $Var[d\Pi_t]$, en lugar de fijar $\alpha_2 = 1$ y determinar sólo α_1 . La respuesta es simple, en este caso, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} \alpha_2 \frac{\left(\frac{\partial c}{\partial S_t} \right)^2 \sigma^2 S_t^2 + \lambda E_\nu[(c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t))^2]}{\frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma^2 S_t^2 + \lambda S_t E_\nu[\nu(c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t))] } + \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 \frac{\frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma^2 S_t^2 + S_t \lambda E_\nu[\nu(c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t))]}{\sigma^2 S_t^2 + S_t^2 \lambda E_\nu[\nu^2]} + \alpha_1 = 0, \end{aligned} \quad (34.25)$$

y la única solución es $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$, lo que no resuelve el problema de cobertura de una venta en corto del subyacente.

Observe, por último, que en el caso extremo cuando no existe difusión, es decir, si $\sigma = 0$, entonces $dS_t = \mu S_t dt + \nu S_t dN_t$, y (34.22) se transforma en

$$Var[d\Pi_t] = \lambda E_\nu \left[(c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 \nu S_t)^2 \right] dt. \quad (34.26)$$

En este caso, se tiene que

$$\frac{\partial Var[d\Pi_t]}{\partial \alpha_1} = 2 S_t \lambda E_\nu [\nu (c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 \nu S_t)] dt$$

y

$$\frac{\partial^2 Var[d\Pi_t]}{\partial \alpha_1^2} = 2 S_t^2 \lambda E_\nu [\nu^2] dt > 0.$$

Por lo tanto, el valor de α_1 que minimiza (34.26) satisface

$$\alpha_1 = - \frac{E_\nu [\nu (c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t))]}{S_t E [\nu^2]}. \quad (34.27)$$

Si se sustituye α_1 en (34.8) y el resultado se iguala con el retorno libre de riesgo del portafolio, se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial c}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} - rc \\ + \lambda E_\nu \left[(c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t)) \left(1 - \frac{\nu}{\lambda E_\nu[\nu^2]} (\mu + \lambda E_\nu[\nu] - r) \right) \right]. \end{aligned}$$

34.11 Limitaciones de los modelos

Es importante resaltar las limitaciones de los supuestos de los modelos estudiados: 1) la tendencia, μ , la volatilidad, σ , y el parámetro de intensidad, λ , del proceso que guía al subyacente son constantes; 2) no se consideran costos de transacción (comisiones e impuestos); 3) los títulos de capital son divisibles en cualquier fracción; 4) no hay pago de dividendos durante el periodo de cobertura; 5) la cotización y negociación en el mercado de contado es continua; 6) la tasa de interés libre de riesgo es constante para todos los plazos y; 7) la estimación de los parámetros μ y σ está sujeta a la disponibilidad de observaciones. En este marco, y considerando sólo los supuestos que merecen más atención, el trabajo se puede extender en varias direcciones. Primero, es posible considerar, sin cambios sustanciales, que la tendencia, volatilidad e intensidad del proceso que guía al subyacente sean funciones del tiempo. Segundo, se requiere considerar una estructura de plazos de la tasa de interés; estructuras modeladas a través de procesos estocásticos que están disponibles en la literatura. Por último, es importante, incluir en el análisis presentado el pago de dividendos y el caso de opciones americanas.

34.12 Bibliografía sugerida

- Ball, C. A. and W. N. Torous (1985). "On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing". *The Journal of Finance*, Vol. 40, No. 1, pp. 155-173.
- Cox, J. and S. Ross (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes." *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 2, pp. 145-166.
- Merton, R. C. (1976). "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous". *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1-2, pp. 125-144.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO". *Estudios Económicos*, Vol. 16, No. 32, pp. 203-226.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Una guía completa para economistas en la valuación de opciones". *Gaceta de Economía*, Año 6, No. 12, pp. 155-212.
- Venegas-Martínez, F. (2002). "Cobertura de flujos financieros con instrumentos de renta fija". *Estudios Económicos*, Vol. 17, No. 2, pp. 171-192.

34.13 Ejercicios

34.1 Si N_t es un proceso de Poisson definido en el espacio muestral $\mathbb{N} \cup \{0\}$, demuestre que

$$\text{Var} \left[\int_0^t g(s) dN_s \right] = \int_0^t \text{Var}[g(s)dN_s].$$

Solución: Sea $t_{k_0} < t_{k_1} < \dots < t_{k_n}$ una partición de $[0, t]$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\int_0^t g(s) dN_s \right] &= \text{Var} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n g(s_{t_{k-1}})(N_{t_k} - N_{t_{k-1}}) \right] \\ &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \text{Var}[g(s_{t_{k-1}})(N_{t_k} - N_{t_{k-1}})] \right] \\ &= \int_0^t \text{Var}[g(s)dN_s]. \end{aligned}$$

La segunda igualdad se debe a la independencia de los incrementos en un proceso de Poisson. El límite, por supuesto, se toma en media cuadrática.

34.2 Suponga que $Y = \ln(X - a) \sim \mathcal{N}(\nu, \delta^2)$, $X > a$, entonces $X = a + e^Y$. Si ν tiene distribución lognormal con media $-1 + e^\gamma$, cuál es la relación entre (a, γ) con (ν, δ^2) .

Solución: $a = -1$ y $\gamma = \nu + \frac{1}{2}\delta^2$.

34.3 De acuerdo con la sección 34.10, sobre la cobertura que minimiza a $\text{Var}[d\Pi_t]$, muestre que

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{\lambda E_\nu[\nu^2] + \sigma^2} (\mu + \lambda E_\nu[\nu] - r) \right) - rc \\ + \lambda E_\nu \left[(c(S_t(1+\nu), t) - c(S_t, t)) \left(1 - \frac{\nu}{\lambda E_\nu[\nu^2] + \sigma^2} (\mu + \lambda E_\nu[\nu] - r) \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 35

VALUACIÓN DE OPCIONES CON COSTOS DE TRANSACCIÓN: MODELO DE LELAND, HOGGARD, WHALLEY Y WILMOTT

Conceptos básicos de este capítulo:

- Aproximación discreta del movimiento geométrico Browniano
- Valuación local de opciones con costos de transacción
- Comisiones por volumen o por valor

35.1 Introducción

En este capítulo se generaliza la fórmula de valuación de Black-Scholes mediante la incorporación de costos de transacción (comisiones) asociadas al rebalanceo de la cobertura Delta. Los efectos que estos costos de transacción tienen sobre los precios de las opciones es un tema central y apasionante en el desarrollo de las matemáticas financieras modernas. El presente capítulo se concentra en el modelo propuesto, inicialmente, por Hayne E. Leland en 1985 y, después, extendido por T. Hoggard, A. Elizabeth Whalley y Paul Wilmott en 1994. El modelo produce fórmulas de valuación analíticas bajo costos de transacción que se realizan en tiempos discretos de magnitud constante.

Con el propósito de concretar ideas, considere a continuación una bolsa de opciones listadas. Las comisiones que cobran los socios de la bolsa a un cliente por operar consisten, usualmente, de una cantidad fija más un porcentaje por volumen o por valor. Estos costos pueden tener variaciones significativas entre un socio y otro. Si las comisiones son altas, entonces el rebalanceo frecuente para cubrir un portafolio puede resultar costoso. Por otro lado, clientes con diferentes costos de transacción pueden asociar diferentes precios a un mismo contrato.

Uno de los principales resultados de la metodología de valuación de Black-Scholes es que un portafolio, compuesto por una venta en corto de un subyacente y una posición larga sobre una opción de compra sobre el mismo subyacente, se cubre continua y perfectamente. Sin embargo, en tiempo discreto y en presencia de costos de transacción, la cobertura es imperfecta y se puede requerir un número infinito de transacciones para mantener el portafolio cubierto hasta la fecha de vencimiento, lo que puede conducir a costos de transacción y precios de magnitud infinita.

35.2 Aproximación discreta

El presente capítulo se concentra en el desarrollo de estrategias de cobertura en tiempos discretos de magnitud constante. A diferencia de las estrategias de cobertura en tiempo continuo en donde se emplea la regla “informal”

$$(dW_t)^2 = dt, \quad dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt), \quad (35.1)$$

una estrategia de cobertura en tiempo discreto utiliza la aproximación

$$(\sqrt{h}\epsilon)^2 = h\epsilon^2, \quad (35.2)$$

en un intervalo de tiempo $[t, t+h]$, con h fija, y $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$. En este caso, $\epsilon^2 \sim \chi_1^2$, así $E[\epsilon^2] = 1$. Observe que el lado derecho de (35.1) es una cantidad determinista, mientras que en (35.2), el

lado derecho, es una cantidad estocástica. En el transcurso de este capítulo se verá que, bajo la presencia de costos de transacción, el comportamiento estocástico de (35.2) no permite coberturas perfectas.

35.3 Valuación de opciones con costos de transacción en tiempo discreto

Considere un portafolio consistente de una venta en corto de $\Delta = \partial c / \partial S_t$ unidades del subyacente y una posición larga de una opción europea de compra con precio de ejercicio K y vencimiento en T :

$$\Pi_t = -\frac{\partial c}{\partial S_t} S_t + c. \quad (35.3)$$

En virtud de (35.2), el cambio en el valor del portafolio en $[t, t+h]$, $t+h < T$, con h fijo, está dado por:

$$\Pi_{t+h} - \Pi_t = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \epsilon^2 \right) h - A |N_h| S_t, \quad (35.4)$$

donde $A > 0$ es el porcentaje por valor que cobra como comisión el socio operador por la venta en corto del activo subyacente, N_h es el número de acciones compradas o vendidas durante $[t, t+h]$ y $A |N_h| S_t$ son los costos de transacción por volumen. Si $N_h > 0$, se compran acciones, en caso contrario, $N_h < 0$, se venden. Note ahora que

$$N_h \approx \left| \frac{\partial c}{\partial S_t} (S_{t+h}, t+h) - \frac{\partial c}{\partial S_t} (S_t, t) \right| = \left| \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} (S_{t+h} - S_t) + \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial S_t} h + \dots \right|,$$

donde $\partial c / \partial S_t (S_{t+h}, t+h)$ y $\partial c / \partial S_t (S_t, t)$ son el número de unidades que se cubren en $t+h$ y t , con un call largo, respectivamente.

Ahora bien, si r es la tasa de interés libre de riesgo, entonces bajo el supuesto de valuación neutral al riesgo es posible escribir

$$S_{t+h} - S_t = \sigma S_t \sqrt{h} \epsilon + r S_t h = \sigma S_t \sqrt{h} \epsilon + O(h). \quad (35.5)$$

Observe que el término dominante de (35.5) es

$$\sigma S_t \sqrt{h} \epsilon = O(\sqrt{h}),$$

ya que

$$\frac{S_{t+h} - S_t}{\sqrt{h}} = \sigma S_t \epsilon + r S_t \sqrt{h} \rightarrow \sigma S_t \epsilon$$

cuando $h \rightarrow 0$. Por lo tanto,

$$N_h \approx \left| \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right| |\epsilon| \sigma S_t \sqrt{h}, \quad (35.6)$$

lo que significa, debido a la presencia de $|\epsilon|$, que N_h es una cantidad aleatoria. Este resultado es de esperarse ya que la cobertura es imperfecta en $[t, t+h]$. Después de sustituir (35.6) en (35.4), se tiene que

$$\Pi_{t+h} - \Pi_t = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \epsilon^2 \right) h - A \left| \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right| |\epsilon| \sigma S_t^2 \sqrt{h}. \quad (35.7)$$

Observe también que dado que $E[\epsilon^2] = 1$ y

$$E[|\epsilon|] = 2 \int_0^\infty \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}} e^{-\epsilon^2/2} d\epsilon = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

entonces el valor esperado de (35.7), condicional en S_t , satisface

$$E[\Pi_{t+h} - \Pi_t | S_t] = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) h - A \left| \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right| \sigma S_t^2 \sqrt{\frac{2}{\pi h}} h. \quad (35.8)$$

Si se iguala (35.8) con el rendimiento proveniente de la tasa de interés libre de riesgo r ,

$$\mathcal{R}_h = r \left(-\frac{\partial c}{\partial S_t} S_t + c \right) h,$$

con h visto como un parámetro, se sigue que,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t - A \left| \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right| \sigma S_t^2 \sqrt{\frac{2}{\pi h}} - rc = 0, \quad t \leq T, \quad (35.9)$$

junto con las condiciones, inicial y de frontera,

$$c(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad c(S_t, t) = \max(S_t - K, 0),$$

respectivamente. El término que contiene el valor absoluto, en (35.9), representa el ajuste por costos de transacción. Claramente, la presencia del valor absoluto en (35.9), indica que la ecuación diferencial parcial no es lineal.

35.4 Casos particulares de costos de transacción

A continuación se analizan algunos casos particulares que simplifican la valuación de una opción europea de compra en presencia de costos de transacción. Suponga, primero, que

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} > 0,$$

entonces

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(1 - \frac{A}{\sigma} \sqrt{\frac{8}{\pi h}} \right) \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t - rc = 0. \quad (35.10)$$

Si se define ahora la varianza

$$\sigma_h^2 = \sigma^2 - A \sigma \sqrt{\frac{8}{\pi h}}, \quad (35.11)$$

se obtiene una ecuación similar a la de Black-Scholes

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_h^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t - rc = 0, \quad t \leq T. \quad (35.12)$$

Es importante destacar que para que (35.10) y el problema de valuación tengan sentido, se debe cumplir

$$\sigma > A \sqrt{\frac{8}{\pi h}}. \quad (35.13)$$

Observe también que la varianza σ_h^2 es menor que la varianza sin costos de ajuste. Esto se debe a que cuando el precio del activo se incrementa, el propietario de la opción debe vender algunos activos para continuar con la cobertura delta. Sin embargo, el spread “bid-ask” sobre el subyacente reduce el precio al cual el activo es vendido y así el efecto neto en el precio del activo es menor que el incremento actual. Lo contrario se cumple para una opción en una posición corta.

Por otro lado, note que (35.13) implica

$$\sigma \sqrt{h} > A. \quad (35.14)$$

Es decir, la volatilidad, en el horizonte h , es mayor que el porcentaje de comisión por valor. En consecuencia, el precio de una opción europea de compra, c , bajo costos de transacción, está dado por:

$$c = c_{BS}(S_t, t; \sigma_h, A) \equiv S_t \Phi(d_h) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_h - \sigma_h \sqrt{T-t}), \quad (35.15)$$

donde

$$d_h = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma_h^2)(T - t)}{\sigma_h\sqrt{T - t}}$$

y Φ es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar. Si diferentes clientes tienen distintos valores de A , entonces $c_{BS}(S_t, t; \sigma_h, A)$ produce diferentes precios. En caso de que

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} < 0,$$

se define

$$\tilde{\sigma}_h^2 = \sigma^2 + A\sigma\sqrt{\frac{8}{\pi h}}, \quad (35.16)$$

y se obtiene una ecuación similar a (35.12) con solución $c_{BS}(S_t, t; \tilde{\sigma}_h)$. En consecuencia, para una posición larga de una opción de compra $\partial^2 c / \partial S_t^2 > 0$, ya que cuando se considera la prima $c_{BS}(S_t, t; \sigma_h, A)$, la gamma está dada por

$$\Gamma_h \equiv \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} c_{BS}(S_t, t; \sigma_h) = \frac{\Phi'(d_h)}{S_t \sigma_h \sqrt{T - t}} = \frac{1}{S_t \sqrt{2\pi \sigma_h^2(T - t)}} e^{-d_h^2/2} > 0,$$

mientras que para una posición corta la gamma tiene signo negativo.

35.5 Costos de transacción más generales

Se extiende ahora el modelo de la sección anterior a fin de considerar costos fijos y por volumen. En este caso, la ecuación (35.4) se transforma en

$$\Pi_{t+h} - \Pi_t = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \epsilon^2 \right) h - (A_1 + A_2 |N_h| + A_3 |N_h| S_t), \quad (35.17)$$

donde A_1 es una cantidad fija que se cobra para comenzar a operar, A_2 y A_3 son porcentajes que se cobran por volumen y valor de la operación, respectivamente. Así, bajo el esquema de costos planteado en (35.17), la ecuación (35.8) se convierte ahora en

$$E[\Pi_{t+h} - \Pi_t | S_t] = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 - \frac{A_1}{h} \right) h - (A_2 + A_3 S_t) \left| \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right| \sigma S_t \sqrt{\frac{2}{\pi h}} h. \quad (35.18)$$

Asimismo, la ecuación (35.9) se transforma en

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t - \frac{A_1}{h} - (A_2 + A_3 S_t) \left| \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right| \sigma S_t \sqrt{\frac{2}{\pi h}} - r c = 0, \quad t \leq T. \quad (35.19)$$

En particular, si la comisión que representa el porcentaje por volumen es cero, $A_2 = 0$, y la gamma se mantiene positiva, entonces el valor de una opción europea de compra, para una posición larga, está dada por

$$c_{BS}(S_t, t, \sigma_h, A_3) - \frac{A_1}{r h} \left(1 - e^{-r(T-t)} \right), \quad (35.20)$$

mientras que si la gamma se mantiene negativa para una posición corta, se sigue que

$$c_{BS}(S_t, t, \tilde{\sigma}_h, A_3) + \frac{A_1}{r h} \left(1 - e^{-r(T-t)} \right). \quad (35.21)$$

Observe que (35.19) puede producir precios negativos y que si $h \rightarrow 0$, entonces los precios (35.20) y (35.21) se tornan de magnitud infinita.

35.6 Bibliografía

- Leland, H. E. (1985). "Option Pricing and Replication with Transaction Costs". *Journal of Finance*, Vol. 40, No. 5, pp. 1283-1301.
- Hoggard, T., A. E. Whalley, and P. Wilmott (1994). "Hedging Option Portfolios in the Presence of Transaction Costs". *Advances in Futures and Options Research*, Vol. 7, pp. 21-35.

35.7 Ejercicios

35.1 En el marco de costos de transacción, demuestre que, para una posición larga,

$$c_{BS}(S_t, t, \sigma_h, A_3) - \frac{A_1}{rh} \left(1 - e^{-r(T-t)}\right),$$

es solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t - \frac{A_1}{h} - A_3 S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma S_t \sqrt{\frac{2}{\pi h}} - r c = 0.$$

35.2 En el marco del problema de valuación con costos de transacción, si el precio de contado de una acción es $S_t = 42$, el precio de ejercicio es $K = 43$, la tasa de interés está dada por $r = 0.049$, la vida de la opción, $T - t$, es de 3 meses, la volatilidad satisface $\sigma = 0.08$, h es una semana, $A_1 = 0.10$ y $A_3 = 0.01$, encuentre el valor de una opción europea de compra.

35.3 Calcule Θ y encuentre su valor para los datos del ejercicio anterior.

CAPÍTULO 36

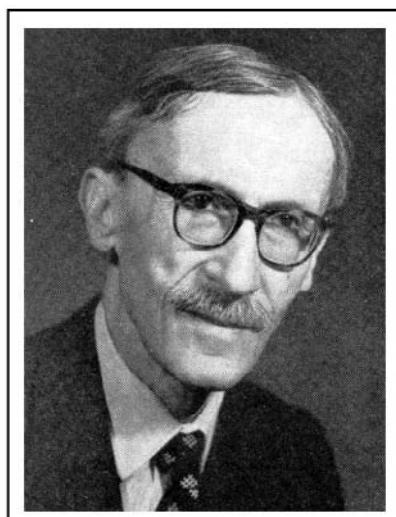
VALUACIÓN DE OPCIONES CON PROCESOS DE LÉVY

Conceptos básicos de este capítulo:

- Función característica
- Transformada inversa de Fourier
- Distribuciones infinitamente divisibles
- Fórmula de Lévy-Khintchin
- Valuación Merton-Black-Scholes con funciones características
- Procesos regulares de Lévy
- Teorema de Cauchy
- Teorema del residuo

36.1 Introducción

El presente capítulo se concentra en la valuación de una opción europea cuando el precio del activo subyacente es conducido por un proceso de Lévy. A diferencia de la metodología de valuación de Black-Scholes que utiliza funciones de densidad, en este caso la valuación se lleva a cabo mediante el uso de funciones características. Se proporcionan fórmulas explícitas de valuación de opciones sobre subyacentes guiados por procesos de Lévy.



Fuente: www.annales.org

Paul Lévy (1886-1971)

36.2 Valuación con funciones de densidad

Considere un proceso de Wiener $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Se supone que el precio del subyacente al tiempo t , S_t , es guiado por el movimiento geométrico Browniano, en un ambiente neutral al riesgo, a través de la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (36.1)$$

Si $f_{S_T|S_t}(s|S_t)$ es la función de densidad de S_T condicional a S_t y

$$c(S_t, t) = \mathbb{E} \left\{ e^{-r(T-t)} \max(S_T - K, 0) \mid \mathcal{F}_t \right\} \quad (36.2)$$

es el precio de una opción europea de compra, entonces se satisface

$$\begin{aligned} c(S_t, t) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \max(s - K, 0) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (s - K) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} s f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds - K e^{-r(T-t)} \int_{\{s>K\}} f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} [S_T 1_{\{S_T>K\}} \mid S_t] - K e^{-r(T-t)} \mathbb{P}\{S_T > K \mid S_t\}. \end{aligned} \quad (36.3)$$

El primer término representa el valor presente del valor esperado del subyacente cuando la opción está dentro del dinero y el segundo el valor presente del precio de ejercicio por la probabilidad de que la opción esté dentro del dinero. Si S_t satisface (36.1), una simple aplicación del lema de Itô conduce a

$$d \ln(S_t) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t, \quad (36.4)$$

lo que, a su vez, implica

$$S_T = S_t e^{\sigma(W_T - W_t) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}. \quad (36.5)$$

Esta expresión lleva a dos hechos importantes. En primer lugar, el proceso $\{S_t\}_{t \geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, ya que (36.5) es invertible, en el sentido que es posible despejar W_t en dicha ecuación. Por lo tanto,

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_t | s \leq t) = \sigma(S_t | s \leq t) = \mathcal{F}_t^S.$$

En segundo lugar, la función de densidad de S_T , condicional a S_t , está dada por:

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma s}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}. \quad (36.6)$$

En cuyo caso, a partir de (36.3) se puede demostrar que

$$c(S_t, t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (36.7)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (36.8)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

y

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

36.3 Funciones características y sus propiedades

Las funciones características han sido herramientas muy útiles en el desarrollo de la teoría de probabilidad, sobre todo en lo que respecta al estudio de teoremas límite. En esta sección se presenta la definición de función característica de una variable aleatoria y se discuten algunas de sus principales propiedades.

La función característica $\varphi_X(u)$, $u \in \mathbb{R}$, de una variable aleatoria, X , se define como el valor esperado de e^{iux} , donde $i = \sqrt{-1}$. Es decir,

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[e^{iux}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ux) dF_X(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(ux) dF_X(x),\end{aligned}\tag{36.9}$$

donde $F_X(x)$ es la función de distribución acumulada de X . La integral se interpreta en el sentido de Riemann-Stieltjes. En caso de que $F_X(x)$ sea absolutamente continua con densidad $F'_X(x) = f_X(x)$, entonces

$$\varphi_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_X(x) dx.\tag{36.10}$$

Es decir, $\varphi_X(u)$ es la transformada de Fourier de la función de densidad, $f_X(x)$. La primera propiedad relevante de $\varphi_X(u)$ es que ésta siempre existe y $|\varphi_X(u)| \leq 1$ con igualdad en $u = 0$. En efecto, observe primero que el módulo $|e^{iux}|$ satisface

$$|e^{iux}|^2 = |\cos(ux) + i\sin(ux)|^2 = \cos^2(ux) + \sin^2(ux) = 1.$$

En consecuencia,

$$|\varphi_X(u)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF_X(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{iux}| dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_X(x) = 1.$$

Se puede ver también, sin mucha dificultad, que $\varphi_X(u)$ es absolutamente continua en todo \mathbb{R} .

Otra propiedad de la función característica es que $\varphi_X(-u) = \overline{\varphi_X(u)}$. En particular, si X es simétrica con respecto al origen, entonces $\varphi_X(u)$ es una función real par. Claramente,

$$\varphi_X(-u) = \mathbb{E}[e^{-iuX}] = \mathbb{E}[\overline{e^{iux}}] = \overline{\mathbb{E}[e^{iux}]} = \overline{\varphi_X(u)}.\tag{36.11}$$

Por otro lado, si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes, no necesariamente idénticamente distribuidas, entonces la función característica de su suma es igual al producto de las funciones características de cada uno de los sumandos. Esto se puede ver como sigue. Sea $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi_{S_n}(u) &= \mathbb{E}[e^{iuS_n}] \\ &= \mathbb{E}[e^{iuX_1} e^{iuX_2} \dots e^{iuX_n}] \\ &= \mathbb{E}[e^{iuX_1}] \mathbb{E}[e^{iuX_2}] \dots \mathbb{E}[e^{iuX_n}] \\ &= \varphi_{X_1}(u) \varphi_{X_2}(u) \dots \varphi_{X_n}(u) \\ &= \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(u).\end{aligned}\tag{36.12}$$

La tercera igualdad se debe a la independencia de los sumandos. Por último, sea X una variable aleatoria tal que los primeros n momentos $E[X^k] = M_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, existen, es decir, $E[|X^k|] < \infty$ para $k = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$\frac{d}{du}\varphi_X(u)\Big|_{u=0} = i^k M_k. \quad (36.13)$$

36.4 Funciones características de algunas distribuciones

En esta sección se determinan explícitamente las funciones características de algunas distribuciones útiles en el estudio de las finanzas.

36.4.1 Función característica de la distribución normal

Sea $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $x \in \mathbb{R}$, es decir,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\begin{aligned} \varphi_X(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2iux - u^2)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \int_L e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \end{aligned} \quad (36.14)$$

donde L es la línea horizontal $z = x - iu$, $x \in \mathbb{R}$, en el plano complejo \mathbb{C} . Es usual denotar

$$\int_L e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-\infty-iu}^{+\infty-iu} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

La función $e^{-\frac{1}{2}z^2}$ es entera, es decir, es analítica (holomorfa) en todos los puntos finitos del plano complejo \mathbb{C} . Por lo tanto, su integral en cualquier contorno cerrado simple es cero (teorema de Cauchy) y, en particular, en el rectángulo, \mathcal{R} , determinado por los vértices $-x - iu$, $x - iu$, x y $-x$.

$$\oint_{\mathcal{R}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \left(\int_{-x-iu}^{x-iu} + \int_{x-iu}^x + \int_x^{-x} + \int_{-x}^{-x-iu} \right) e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0.$$

Observe ahora que

$$0 \leq \left| \int_{x-iu}^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right| \leq e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_0^{|u|} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds,$$

lo cual implica que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| \int_{x-iu}^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right| = 0.$$

Es decir, los lados verticales del rectángulo, \mathcal{R} , tienden a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$. Por lo tanto,

$$\int_{-x-iu}^{x-iu} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = - \int_x^{-x} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-x}^x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

De esta manera,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_L e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1.$$

Consecuentemente,

$$\varphi_X(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2}.$$

Ahora bien, en el caso general cuando $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, se tiene que $Y = \mu + \sigma X$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned}\varphi_Y(u) &= \mathbb{E}[e^{iuY}] \\ &= \mathbb{E}[e^{iu(\mu+\sigma X)}] \\ &= \mathbb{E}[e^{iu\mu}e^{iu\sigma X}] \\ &= e^{iu\mu}\mathbb{E}[e^{iu\sigma X}] \\ &= e^{iu\mu}\varphi_X(\sigma u) \\ &= e^{iu\mu}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2} \\ &= e^{iu\mu-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2}.\end{aligned}\tag{36.15}$$

36.4.2 Función característica de la distribución Poisson

Sea $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $x = 0, 1, 2, \dots$, es decir,

$$\mathbb{P}_x\{X = x\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

entonces

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{iux} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{iu})^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{iu}} \\ &= e^{\lambda(e^{iu}-1)}.\end{aligned}\tag{36.16}$$

36.4.3 Función característica de la distribución Gamma

Sea $X \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$, $x \geq 0$, es decir, X tiene función de densidad

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0,$$

entonces

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{(iu-\beta)x}}{\Gamma(\alpha)} dx \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta - iu}\right)^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\beta - iu)^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta - iu)x}}{\Gamma(\alpha)} dx \\ &= \left(1 - \frac{iu}{\beta}\right)^{-\alpha}.\end{aligned}\tag{36.17}$$

36.4.4 Función característica de la distribución Gaussiana inversa

Sea $\tau_{a,b}$ la primera vez que un movimiento Browniano con tendencia $b \geq 0$, $\{W_t + bt\}_{t \geq 0}$, visita un estado $a > 0$. En este caso, se dice que la variable aleatoria $\tau_{a,b}$ tiene una distribución normal inversa con parámetros a y b , y este hecho se denota en forma simplificada mediante $\tau_{a,b} \sim \mathcal{IG}(a, b)$. La función de densidad de $\tau_{a,b}$ está dada por:

$$f_{\tau_{a,b}}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{ab} t^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{t} + b^2 t \right) \right\}, \quad t > 0, \quad (36.18)$$

y su función característica satisface

$$\varphi_X(u) = \exp \left\{ -a \left(\sqrt{-2iu + b^2} - b \right) \right\}. \quad (36.19)$$

Otra forma de escribir (36.18) es como sigue

$$f_{\tau_{a,b}}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(a - bt)^2}{t} \right\}, \quad t > 0. \quad (36.20)$$

En este caso, $E[\tau_{a,b}] = a/b$ y $\text{Var}[\tau_{a,b}] = a/b^3$. La densidad (36.20) se puede presentar en forma alternativa a través de la definición de un conjunto nuevo de parámetros $\mu = a/b$ y $a = 1/\sqrt{\sigma}$, $\sigma > 0$, de tal forma que

$$f_{\tau_{\mu,\sigma}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t^3}} \exp \left\{ -\frac{(t - \mu)^2}{2t\mu^2\sigma} \right\}, \quad t > 0. \quad (36.21)$$

Observe que ahora $E[\tau_{\mu,\sigma}] = \mu$ y $\text{Var}[\tau_{\mu,\sigma}] = \mu^3/\sigma$. En particular, si $b = 0$, el tiempo de primera visita τ_a a un estado $a > 0$ se define como:

$$\tau_a = \inf \{t \mid W_t = a\}.$$

La continuidad en las trayectorias de $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es esencial para que la definición anterior tenga sentido. Observe que si

$$\mathcal{M}_t^W = \max_{0 \leq s \leq t} W_s,$$

entonces

$$\tau_a \leq t \text{ si y sólo si } \mathcal{M}_t^W \geq a. \quad (36.22)$$

Ahora bien, claramente,

$$\mathbb{P}\{\mathcal{M}_t^W \geq a\} = \mathbb{P}\{W_t < a, \mathcal{M}_t^W \geq a\} + \mathbb{P}\{W_t \geq a, \mathcal{M}_t^W \geq a\}. \quad (36.23)$$

El primer sumando de (36.23) satisface

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{W_t < a, \mathcal{M}_t^W \geq a\} \\ &= \mathbb{P}\{W_t - W_{\tau_a} < 0 \mid \tau_a \leq t\} \mathbb{P}\{\tau_a \leq t\} \\ &= \mathbb{P}\{W_t - W_{\tau_a} \geq 0 \mid \tau_a \leq t\} \mathbb{P}\{\tau_a \leq t\} \\ &= \mathbb{P}\{W_t \geq a, \mathcal{M}_t^W \geq a\}. \end{aligned} \quad (36.24)$$

En la segunda igualdad se ha utilizado el hecho de que $\mathbb{P}\{W_{\tau_a} = a\} = 1$, ya que la primera vez que W_t visita al estado $a > 0$, es justamente en el instante τ_a . La tercera igualdad se debe a la simetría de la variable aleatoria $W_t - W_{\tau_a} \sim \mathcal{N}(0, t - \tau_a)$. La última expresión en (36.24) es justamente el segundo sumando de (36.23). Se sigue entonces de (36.24) que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\mathcal{M}_t^W \geq a\} &= 2\mathbb{P}\{W_t \geq a, \mathcal{M}_t^W \geq a\} \\ &= 2\mathbb{P}\{W_t \geq a\}, \end{aligned} \quad (36.25)$$

ya que $\mathcal{M}_t^W \geq W_t$. Así,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\mathcal{M}_t^W \geq a\} &= 2\mathbb{P}\{W_t \geq a\} \\ &= \mathbb{P}\{W_t \geq a\} + \mathbb{P}\{W_t \leq -a\} \\ &= \mathbb{P}\{|W_t| \geq a\} \\ &= \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \int_a^\infty e^{-z^2/2t} dz.\end{aligned}$$

Es decir, la distribución de \mathcal{M}_t^W coincide con la de $|W_t|$. Por lo tanto, la distribución del tiempo de primera visita, τ_y , se calcula como sigue: si $a > 0$, entonces

$$\begin{aligned}F_{\tau_a}(t) &= \mathbb{P}\{\tau_a \leq t\} \\ &= \mathbb{P}\{\mathcal{M}_t^W \geq a\} \\ &= \mathbb{P}\{|W_t| \geq a\} \\ &= \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \int_a^\infty e^{-z^2/2t} dz \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{a/\sqrt{t}}^\infty e^{-v^2/2} dv \\ &= \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi u^3}} e^{-a^2/2u} du,\end{aligned}\tag{36.26}$$

donde en la penúltima integral se utilizó la sustitución $v = z/\sqrt{t}$, de esta forma el límite inferior cambia de a a a/\sqrt{t} , y el superior se mantiene. En la última integral se empleó el cambio de variable $\sqrt{u} = a/v$, así el límite inferior cambia de a/\sqrt{t} a cero, y el superior de ∞ a t . Además,

$$dv = -\frac{1}{2} \frac{a}{u^{3/2}} du,$$

lo que permite intercambiar los límites de integración. Después de derivar (36.26) con respecto de t , se concluye que

$$f_{\tau_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2t}\right\} \quad t > 0.\tag{36.27}$$

Otra forma alternativa de obtener (36.27) es como sigue. Sea $X \sim \mathcal{N}(0, 1/a^2)$ y defina $T = 1/X^2$, entonces $X = \pm 1/\sqrt{T}$. De esta manera,

$$f_T(t) = f_X(1/\sqrt{t}) \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \right| + f_X(-1/\sqrt{t}) \left| \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \right| = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2t}\right\}.$$

Cuando $b=0$, este razonamiento motiva el nombre de distribución Gaussiana inversa. Sin embargo, en el caso general, $b > 0$, dicho nombre podría ser inadecuado. Observe también que

$$f_{\tau_{a,b}}(t) = e^{ab} e^{-b^2/2t} f_{\tau_a}(t).$$

36.5 Transformada inversa de Fourier (distribución)

Sea $\varphi_X(u)$ la función característica de una variable aleatoria X con distribución $F_X(x)$. Si a y b , con $a < b$, son puntos de continuidad de $F_X(x)$, entonces se tiene la siguiente fórmula de inversión de (36.26):

$$F_X(b) - F_X(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi_X(u) \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{2iu} - \varphi_X(-u) \frac{e^{iua} - e^{iub}}{2iu} \right) du. \quad (36.28)$$

En virtud de que $\varphi_X(-u) = \overline{\varphi_X(u)}$, se sigue que

$$F_X(b) - F_X(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left[\varphi_X(u) \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu} \right] du. \quad (36.29)$$

36.6 Transformada inversa de Fourier (densidad)

Si la función característica de una variable aleatoria X , $\varphi_X(u)$, satisface que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(u)| du < \infty,$$

se tiene entonces que X tiene función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \varphi_X(u) du. \quad (36.30)$$

La expresión (36.30) es conocida como la transformada inversa de Fourier. La función de densidad $f_X(x)$ es uniformemente continua y acotada.

36.7 Distribuciones infinitamente divisibles

Si $\varphi_X(u)$ es la función característica de una variable aleatoria X , se dice que la distribución de X es infinitamente divisible si para todo $n \in \mathbb{N}$ la función $[\varphi_X(u)]^n$ es, a su vez, la función característica de alguna variable aleatoria.

36.8 Fórmula de Lévy-Khinchin

La función $\varphi_X(u)$ es la función característica de una distribución infinitamente divisible si, y sólo si $\psi_X(u) \stackrel{\text{def}}{=} \log \varphi_X(u)$ tiene la forma

$$\psi_X(u) = i\gamma u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ixu} - 1 - iux 1_{\{|x|<1\}}) \nu(dx), \quad (36.31)$$

donde

$$1_{\{|x|<1\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{si } x \notin (-1, 1). \end{cases}$$

Este resultado es conocido como la fórmula de Lévy-Khinchin. Observe que en (36.31) el primer sumando es lineal en u , el segundo es la componente Browniana y el tercero es la componente de salto. La función $\psi_X(u)$ es, frecuentemente, llamada el exponente característico o función característica de cumulantes, o simplemente la función de cumulantes.

36.9 Ejemplos de distribuciones infinitamente divisibles

A continuación se presentan algunos ejemplos de distribuciones infinitamente divisibles con base en la fórmula de Lévy-Khintchin. Cada distribución infinitamente divisible tiene asociada una terna característica $(\gamma, \sigma^2, \nu(dx))$. Al primer elemento se le conoce como tendencia, al segundo como componente Browniana y al tercero como medida de Lévy. En ocasiones, la terna $(\gamma, \sigma^2, \nu(dx))$ es llamada la terna de Lévy.

36.9.1 La distribución normal es infinitamente divisible

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\psi_X(u) = iu\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2. \quad (36.32)$$

Basta tomar $\gamma = \mu$ y $\nu(dx) = \delta(x - 0)dx$. Es importante recordar que la delta de Dirac satisface

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\delta(x - 0)dx$$

si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|dx < \infty$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{ixu} - 1 - iux1_{\{|x|<1\}}) \delta(x - 0)dx = e^0 - 1 - 0 = 0.$$

En este caso, la Delta de Dirac es la densidad de Lévy. La terna característica de la distribución normal es $(\mu, \sigma^2, \delta(x - 0)dx)$.

36.9.2 La distribución de Poisson es infinitamente divisible

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, entonces

$$\psi_X(u) = \lambda(e^{iu} - 1). \quad (36.33)$$

En este caso, se eligen $\gamma = 0$, $\sigma = 0$ y $\nu(dx) = \lambda\delta(x - 1)dx$. Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{ixu} - 1 - iux1_{\{|x|<1\}}) \delta(x - 1)dx = (e^{iu} - 1 - iux1_{\{|x|<1\}}) \lambda = \lambda(e^{iu} - 1).$$

Observe que cuando $x = 1$, la función indicatriz $1_{\{|x|<1\}} = 0$. De esta manera, la terna característica de la distribución Poisson es $(0, 0, \delta(x - 1)dx)$.

36.9.3 La distribución Gamma es infinitamente divisible

Si $X \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$, entonces

$$\varphi_X(u) = \left(1 - \frac{iu}{\beta}\right)^{-\alpha}. \quad (36.34)$$

En este caso, se puede mostrar que la terna característica está dada por

$$(\alpha(1 - e^{-\beta})/\beta, 0, \alpha e^{-\beta x} x^{-1} 1_{\{x>0\}} dx).$$

36.10 Valuación Merton-Black-Scholes con funciones características

A continuación se generaliza la metodología de Merton-Black-Scholes para valuar una opción europea de compra cuando el precio del subyacente no sigue un proceso Gaussiano. En esta generalización, la fórmula de valuación teórica utiliza la función característica del proceso, en lugar de la función de densidad del proceso que conduce el precio del subyacente.

Con el fin de motivar e ilustrar las ideas y conceptos centrales sobre los que descansa la extensión de la fórmula de Merton-Black-Scholes, se partirá del supuesto de normalidad y se abandonará justo en el momento en que la teoría alternativa exija de nuevos y más sofisticados planteamientos.

Se supone que el precio, S_t , del activo subyacente, una acción que no paga dividendos, tiene una dinámica estocástica como la definida en (36.1), una simple aplicación del lema de Itô produce

$$d(\ln S_t) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma dW_t. \quad (36.35)$$

Si se discretiza (36.35) con $dt = T - t$, entonces

$$\ln S_T = \ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) + \sigma(W_T - W_t). \quad (36.36)$$

Por lo tanto,

$$\ln(S_T) \sim \mathcal{N}(\ln(S_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t), \sigma^2(T - t)). \quad (36.37)$$

En otras palabras, el rendimiento logarítmico también tiene distribución normal, pero con parámetro de tendencia menor que el del subyacente. La fórmula de valuación conduce a

$$c(x, t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[g(\ln(S_T))|s], \quad (36.38)$$

donde $x = \ln(S_t)$. Equivalentemente,

$$c(x, t) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) g(x+y) dy, \quad (36.39)$$

donde $Y \sim \mathcal{N}((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t), \sigma^2(T - t))$. Por otro lado, si $\varphi_Y(u)$ es la función característica de Y , entonces

$$\varphi_Y(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} f_Y(y) dy. \quad (36.40)$$

En este caso, de acuerdo con (36.30), la transformada inversa de Fourier está dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} \varphi_Y(u) du. \quad (36.41)$$

Si ahora se define $X \sim \mathcal{N}((r - \frac{1}{2}\sigma^2), \sigma^2)$, se tiene que

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy + (T-t)\psi_X(u)} du. \quad (36.42)$$

36.11 Procesos regulares de Lévy (propiedades holomórficas de la función de cumulantes)

Un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ definido en un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un proceso de Lévy si cumple las siguientes propiedades: 1) X_t tiene una distribución infinitamente divisible para todo t ; 2) $(X_t)_{t \geq 0}$ tiene incrementos independientes, es decir, para cualquier conjunto finito de tiempos $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ con $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, las variables aleatorias $X_{t_0} - X_{t_1}, X_{t_1} - X_{t_2}, \dots, X_{t_{n-1}} - X_{t_n}$ son independientes; 3) $(X_t)_{t \geq 0}$ tiene incrementos estacionarios, es decir, $X_{t+h} - X_t$ y X_h tienen exactamente la misma distribución; 4) $X_0 = 0$ casi dondequiera; 5) X_t es continua en probabilidad, es decir, $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}\{|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon\} = 0$ para todo $\epsilon > 0$; y 6) existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$

con $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, tal que para todo $\omega \in \Omega_0$ se tiene que si $X_t(\omega)$ es vista como función de t , entonces $X_t(\omega)$ es continua por la derecha con límite por la izquierda.

Un proceso regular de Lévy es un proceso con propiedades holomórficas del integrando de la transformada inversa de Fourier. Sea

$$h(z) = e^{\alpha y} e^{-iyz + \psi_X(z+i\alpha)}, \quad z = u - i\alpha,$$

donde $\psi_X(u)$ es la función de cumulantes de un proceso de Lévy $(X_t)_{t \geq 0}$, se dice que $(X_t)_{t \geq 0}$ es regular si existen λ_- y λ_+ tales que $h(z)$ es analítica en una banda horizontal, \mathcal{B} , determinada por $z = u - i\alpha$, $u \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (\lambda_-, \lambda_+)$. Además, se debe cumplir que

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \left| \int_{u-i\alpha}^u h(z) dz \right| = 0 \quad \text{para } \alpha \in (\lambda_-, \lambda_+).$$

Es importante destacar que el movimiento Browniano y el proceso Gaussiano inverso son procesos regulares de Lévy.

36.12 Desplazamiento de la línea de integración en la transformada inversa de Fourier para un proceso regular de Lévy

Sea $h(z) = e^{\alpha y} e^{-iyz + (T-t)\psi_X(z+i\alpha)}$, $z = u - i\alpha$, $\alpha \in (\lambda_-, \lambda_+)$ y considere al rectángulo \mathcal{R} determinado por los vértices $-u - i\alpha$, $u - i\alpha$, u , $-u$, entonces por el teorema de Cauchy

$$\oint_{\mathcal{R}} h(z) dz = \left(\int_{-u-i\alpha}^{u-i\alpha} + \int_{u-i\alpha}^u + \int_u^{-u} + \int_{-u}^{-u-i\alpha} \right) h(z) dz = 0.$$

Por otro lado, las condiciones de regularidad conducen a

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \left| \int_{u-i\alpha}^u h(z) dz \right| = 0.$$

Es decir, cuando $|u| \rightarrow \infty$, las integrales sobre los lados verticales del rectángulo se anulan. De esta manera,

$$\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} h(z) dz = \int_{\infty}^{-\infty} h(u) du.$$

En consecuencia,

$$\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{\alpha y} e^{-iy(u-i\alpha) + \psi_X(u-i\alpha+i\alpha)} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha y} e^{-iyu + \psi_X(u+i\alpha)} du,$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{-iyu + \psi_X(u)} du &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha y} e^{-iyu + \psi_X(u+i\alpha)} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy(u+i\alpha) + \psi_X(u+i\alpha)} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyv + \psi_X(v)} dv. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyu + \psi_X(u)} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{-iyu + \psi_X(u)} du. \end{aligned} \tag{36.43}$$

36.13 Fórmula de valuación de Merton-Black-Scholes para procesos regulares de Lévy

En esta sección se obtiene la fórmula de valuación de Merton-Black-Scholes-Lévy. Después de sustituir (36.43) en (36.39) se obtiene que

$$c(x, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{-iuy+(T-t)\psi_X(u)} g(x+y) du dy. \quad (36.44)$$

Observe que $\psi_X(u)$ ha sido premultiplicada por $T-t$ a fin de introducir el plazo del instrumento. Si se lleva a cabo el cambio de variable de y a $y-x$, y se utiliza el exponente característico $\psi_Y(u)$, entonces (36.44) se puede escribir como

$$c(x, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{-iu(y-x)+(T-t)\psi_X(u)} g(y) du dy. \quad (36.45)$$

Si, para fines prácticos, se define

$$\tilde{g}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} g(y) dy,$$

entonces

$$\begin{aligned} c(x, t) &= \frac{1}{2\pi} e^{-r(T-t)} \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{iux+(T-t)\psi_X(u)} \tilde{g}(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{iux+(T-t)[-r+\psi_X(u)]} \tilde{g}(u) du. \end{aligned} \quad (36.46)$$

Observe ahora que si $g(y)$ es el valor intrínseco de una opción europea de compra, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{g}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} \max(e^y - K, 0) dy \\ &= \int_{\ln(K)}^{\infty} (e^{-(iu-1)y} - K e^{-iuy}) dy \\ &= \int_{\ln(K)}^{\infty} e^{-(iu-1)y} dy - K \int_{\ln(K)}^{\infty} e^{-iuy} dy \\ &= \frac{e^{-(iu-1)\ln(K)}}{(iu-1)} - \frac{K e^{-iu\ln(K)}}{iu} \\ &= \frac{K e^{-iu\ln(K)}}{i(u+i)} - \frac{K e^{-iu\ln(K)}}{iu} \\ &= K e^{-iu\ln(K)} \left(\frac{1}{i(u+i)} - \frac{1}{iu} \right) \\ &= -\frac{K e^{-iu\ln(K)}}{u(u+i)}. \end{aligned} \quad (36.47)$$

Después de sustituir (36.47) en (36.46), y dado que $x = \ln(S_t)$, se sigue que

$$c(x, t) = -\frac{K}{2\pi} \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} \frac{e^{iu\ln(S_t/K)+(T-t)[-r+\psi_X(u)]}}{u(u+i)} du. \quad (36.48)$$

Sea

$$\xi(u) = \exp \{iu \ln(S_t/K) + (T-t)[-r + \psi_X(u)]\},$$

entonces el integrando puede reescribirse como

$$H(u) = \frac{\xi(u)}{u(u+i)} = \frac{\frac{\xi(u)}{i}}{u} + \frac{\frac{\xi(u)}{-i}}{u+i} \quad (36.49)$$

Claramente, $u = 0$ y $u = -i$ son dos polos de $H(u)$. Considere el rectángulo \mathcal{R} determinado por los vértices $-u - i\alpha$, $u - i\alpha$, $u - i\beta$, $-u - i\beta$, con $\alpha \in (1, \lambda_+)$, $\beta \in (\lambda_-, 0)$ y $u \in \mathbb{R}$. Por el teorema del residuo, se tiene que

$$\oint_{\mathcal{R}} H(u) du = 2\pi i [\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -i)] = 2\pi i \left(\frac{\xi(0)}{i} + \frac{\xi(-i)}{-i} \right).$$

Observe también que

$$\oint_{\mathcal{R}} H(u) du = \left(\int_{-u-i\alpha}^{u-i\alpha} + \int_{u-i\alpha}^{u-i\beta} + \int_{u-i\beta}^{-u-i\beta} + \int_{-u-i\beta}^{-u-i\alpha} \right) H(u) du.$$

En virtud de las condiciones de regularidad, se tiene que las integrales sobre los lados verticales del rectángulo se anulan, en consecuencia

$$\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} H(u) du + \int_{\infty-i\beta}^{-\infty-i\beta} H(u) du = 2\pi i \left(\frac{\xi(0)}{i} + \frac{\xi(-i)}{-i} \right).$$

Equivalentemente,

$$c(x, t) = - \left(\frac{K}{2\pi} \right) 2\pi i \left(\frac{\xi(0)}{i} + \frac{\xi(-i)}{-i} \right) - \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty-i\beta}^{\infty-i\beta} H(u) du.$$

Note ahora que $r + \psi_x(-i) = 0$ y $\psi_x(0) = 0$, entonces

$$\frac{\xi(0)}{i} = \frac{\exp\{0 - (r(T-t))\}}{i} = \frac{e^{-r(T-t)}}{i}$$

y

$$\frac{\xi(-i)}{-i} = \frac{\exp\{\ln(S_t/K)\}}{-i} = -\frac{S_t}{iK}.$$

Así

$$\begin{aligned} c(x, t) &= -Ki \left(\frac{e^{-r(T-t)}}{i} - \frac{S_t}{iK} \right) + \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty-i\beta}^{\infty-i\beta} H(u) du \\ &= -Ke^{-r(T-t)} + S_t - \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty-i\beta}^{\infty-i\beta} H(u) du. \end{aligned} \quad (36.50)$$

Esta expresión representa la condición de paridad put-call. Por lo tanto, el precio de una opción europea de venta satisface

$$p(x, t) = -\frac{K}{2\pi} \int_{-\infty-i\beta}^{\infty-i\beta} \frac{e^{iu \ln(S_t/K) + (T-t)[-r+\psi_x(u)]}}{u(u+i)} du, \quad \beta \in (\lambda_-, 0). \quad (36.51)$$

36.14 Bibliografía sugerida

- Boyarchenko, S. I. and Levendorskii, S. Z. (2002). Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory. Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability. World Scientific Publishing Company, New Jersey, USA.
- Schoutens, W. (2003). Lévy Processes in Finance (Pricing Financial Derivatives). Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd, England.
- Venegas-Martínez, F. (2006). “Valuación de productos derivados con procesos regulares de Lévy”. *Panorama Económico*, por aparecer.

36.15 Ejercicios

36.1 Ecuaciones de Cauchy-Riemann y teorema de Cauchy. Sea $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ donde $z = x + iy$. De esta manera, $dz = dx + idy$. Observe que

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

de donde

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2} \quad y \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2i}.$$

Dado que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z},$$

muestre que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right].$$

Observe ahora que sobre el eje real $\partial f / \partial y = 0$, así

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Por otro lado, sobre el eje imaginario $\partial f / \partial x = 0$, se sigue que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Si f es diferenciable en \mathbb{C} , la derivada tiene que ser la misma para un dz dado, sin importar la dirección. Pruebe que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Asimismo, verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad y \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

En este caso, también pruebe que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Suponga ahora que $f(z)$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann dentro de un contorno \mathcal{L} que encierra una región \mathcal{N} . De esta forma,

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{L}} f(z) dz &= \oint_{\mathcal{L}} (u + iv)(dx + idy) \\ &= \oint_{\mathcal{L}} u dx - v dy + i \oint_{\mathcal{L}} v dx + u dy. \end{aligned}$$

Aplique ahora el teorema de Green,

$$\oint_{\mathcal{L}} g(x, y) dx + h(x, y) dy = \int \int_{\mathcal{N}} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy,$$

para demostrar finalmente que

$$\oint_{\mathcal{L}} f(z) dz = 0.$$

36.2 Demuestre que

$$0 \leq \left| \int_{x-iu}^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right| \leq e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_0^{|u|} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

y concluya que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| \int_{x-iu}^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right| = 0.$$

36.3 Obtenga, de la siguiente forma, la función característica de una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Observe primero que

$$\varphi'_X(u) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{iux} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Integre por partes la expresión anterior y verifique que $\varphi'_X(u) = -u\varphi_X(u)$, $\varphi'_X(0) = 1$. Resuelva esta ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

36.4 Teorema del residuo. Suponga que $f(z)$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann y considere la siguiente expansión en serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Si \mathcal{L} es un contorno cerrado que contiene a z_0 , muestre utilizando el teorema de Cauchy que

$$\oint_{\mathcal{L}} f(z) dz = a_{-1} \oint_{\mathcal{L}} \frac{1}{z - z_0} dz.$$

Escriba ahora la parametrización $z = e^{it} + z_0$ y pruebe que

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i.$$

Concluya que

$$\oint_{\mathcal{L}} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}.$$

En este caso, a_{-1} es llamado el residuo de f en z_0 .

36.5 Suponga que \mathcal{L} es un contorno cerrado que contiene a $z = i$ y $z = -i$. Demuestre utilizando el teorema del residuo que

$$\int_{\mathcal{L}} \frac{2z}{z^2 + 1} dz = 4\pi i.$$

36.6 Muestre que

$$F_X(b) - F_X(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi_X(u) \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{2iu} - \varphi_X(-u) \frac{e^{iua} - e^{iub}}{2iu} \right) du$$

implica

$$F_X(b) - F_X(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left[\varphi_X(u) \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{2iu} \right] du.$$

36.7 Si $X \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$, pruebe que la terna característica está dada por

$$(\alpha(1 - e^{-\beta})/\beta, 0, \alpha e^{-\beta x} x^{-1} 1_{\{x>0\}} dx).$$

36.8 De acuerdo con la ecuación (36.50), si $(X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Lévy con función de cumulantes

$$\psi_X(u) = iu\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2,$$

muestre que

$$c(x, t) = -Ki \left(\frac{e^{-r(T-t)}}{i} - \frac{S_t}{iK} \right) + \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty-i\beta}^{\infty-i\beta} \frac{e^{iu \ln(S_t/K) + (T-t)[-r+\psi_X(u)]}}{u(u+i)} du,$$

donde $\beta \in (\lambda_-, 0)$, conduce a la fórmula de valuación de Merton-Black-Scholes para una opción europea de compra, dada en (36.7).

36.9 Considere un proceso de Lévy, $(X_t)_{t \geq 0}$, con función de cumulantes

$$\psi_X(u) = \lambda(e^{iu} - 1).$$

Determine una fórmula de valuación para una opción europea de compra.

36.10 Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Lévy con función de cumulantes $\psi_X(u)$. Pruebe, sin utilizar la condición de paridad put-call, que el precio de una opción europea de venta satisface

$$p(x, t) = \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty-i\beta}^{\infty-i\beta} \frac{e^{iu \ln(S_t/K) + (T-t)[-r+\psi_X(u)]}}{u(u+i)} du, \quad \beta \in (\lambda_-, 0).$$

VIII. OPCIONES EXÓTICAS

- 37. Opciones asiáticas
- 38. Tiempos de paro, tiempos de primera visita y principio de reflexión
- 39. Máximo y mínimo del movimiento Browniano, teorema de Girsanov y principio de reflexión
- 40. Modelo de Goldman-Sosin-Gatto de opciones lookback I: precios de ejercicio flotantes
- 41. Modelo de Conze-Viswanathan de opciones lookback II: precios de ejercicio fijos
- 42. Modelo de Merton de opciones con barreras

CAPÍTULO 37

OPCIONES ASIÁTICAS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Opciones asiáticas
- Media aritmética y media geométrica del precio del activo subyacente
- Precio de ejercicio fijo y flexible
- Ecuaciones diferenciales parciales
- Condiciones finales y de frontera

37.1 Introducción

En este capítulo se caracteriza, en términos de una ecuación diferencial parcial, el precio de una opción cuando el valor intrínseco del contrato no sólo depende del precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento, sino también del valor medio del subyacente durante la vida del contrato, ya sea aritmético o geométrico. Este tipo de contratos son conocidos en la literatura como opciones asiáticas. Así, por ejemplo, en una opción asiática de compra, con precio de ejercicio constante, el pago en la fecha de vencimiento es la diferencia entre el precio promedio del activo durante la vida del contrato y el precio de ejercicio, o bien, si el precio de ejercicio es variable (flotante), el pago del contrato en la fecha de vencimiento es igual a la diferencia entre el precio de contado del subyacente y su promedio. En ambos casos, el empleo de la fórmula de valuación de Black-Scholes es inadecuada, pues diferentes realizaciones del precio del subyacente producen diferentes valores del contrato. Un tratamiento adecuado de este tipo de contratos, requiere de la consideración de una nueva variable independiente que represente la trayectoria del subyacente durante la vigencia del contrato.

37.2 Opciones asiáticas con precio de ejercicio variable igual a la media aritmética

Considere un movimiento Browniano $(W_t)_{t \in [0, T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Se supone que el precio del subyacente al tiempo t , S_t , es conducido por el movimiento geométrico Browniano

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (37.1)$$

donde el parámetro de tendencia, $\mu \in \mathbb{R}$, representa el rendimiento medio esperado y $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea. En una opción asiática de compra, con precio de ejercicio variable, el pago del contrato en la fecha de vencimiento, T , es igual a

$$\max(S_T - K_{t,T}, 0), \quad (37.2)$$

donde

$$K_{t,T} = \frac{1}{T-t} \int_t^T S_u du. \quad (37.3)$$

El precio de una opción asiática de compra c_a , con precio de ejercicio variable $K_{t,T}$, satisface

$$c_a = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\max(S_T - K_{t,T}, 0) \mid \mathcal{F}_t]. \quad (37.4)$$

37.3 Opciones asiáticas con precio de ejercicio constante

En una opción asiática de compra, con precio de ejercicio constante, K , el pago del contrato en la fecha de vencimiento, T , es igual a

$$\max(K_{t,T} - K, 0), \quad (37.5)$$

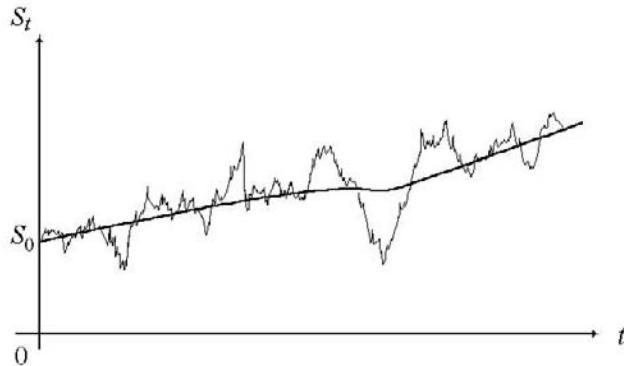
donde $K_{t,T}$ es definido como (37.3). El precio de una opción asiática de compra c_{aK} , está dada por

$$c_{aK} = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\max(K_{t,T} - K, 0) \mid \mathcal{F}_t]. \quad (37.6)$$

Si se escribe

$$c = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\gamma \max(\alpha S_T + (-1)^{\beta+1} K_{t,T} - \beta K, 0) \mid \mathcal{F}_t], \quad (37.7)$$

con base en (37.4) y (37.6), se tiene que si $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, la opción asiática es de precio de ejercicio flexible, y si $(\alpha, \beta) = (0, 1)$, la opción es de precio de ejercicio constante. Si $\gamma = 1$ la opción es de compra, si $\gamma = -1$ la opción es de venta.



Gráfica 37.1 Movimiento geométrico Browniano y su media aritmética.

37.4 Enfoque de ecuaciones diferenciales parciales, valuación de opciones asiáticas con precio de ejercicio igual a la media aritmética

Considere una opción asiática de compra con precio de ejercicio flexible igual a la media aritmética y defina

$$I_t = \int_0^t S_u du. \quad (37.8)$$

De acuerdo con (37.1), la historia del precio del activo subyacente es independiente del precio actual. Por lo tanto, S_t e I_t pueden tratarse como variables de estado independientes. Observe también que

$$dI_t = S_t dt. \quad (37.9)$$

Si se denota el precio de una opción asiática de compra con precio de ejercicio variable e igual a la media aritmética del precio del subyacente durante $[t, T]$ como $c_a = c_a(S_t, I_t, t)$, entonces el lema de Itô conduce

$$dc_a = \left(\frac{\partial c_a}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_a}{\partial S_t^2} + \mu S_t \frac{\partial c_a}{\partial S_t} + S_t \frac{\partial c_a}{\partial I_t} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial c_a}{\partial S_t} dW_t. \quad (37.10)$$

Es importante destacar que dI_t no introduce otra fuente de riesgo distinta a dW_t , por lo tanto, la opción puede ser cubierta utilizando sólo al subyacente.

37.4.1 Administración del riesgo de mercado

Si se conforma un portafolio con una opción asiática de compra y una venta en corto de Δ unidades del subyacente, $\Delta := \partial c_a / \partial S_t$, se tiene entonces que el valor marginal del portafolio está dado por

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = \left(\frac{\partial c_a}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_a}{\partial S_t^2} + S_t \frac{\partial c_a}{\partial I_t} \right) dt. \quad (37.11)$$

Esta ecuación será utilizada para caracterizar a c_a bajo condiciones de equilibrio.

37.4.2 Equilibrio general y condición de no arbitraje

Si existe un mercado de crédito en donde los agentes pueden prestar o pedir prestado a una tasa constante libre de riesgo r , bajo argumentos típicos de arbitraje, se concluye que

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = (-\Delta S_t + c_a) r dt,$$

equivalentemente

$$\frac{\partial c_a}{\partial t} + S_t \frac{\partial c_a}{\partial I_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_a}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial c_a}{\partial S_t} - r c_a = 0. \quad (37.12)$$

Observe que esta ecuación tiene un término adicional comparada con la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, a saber, $S_t(\partial c_a / \partial I_t)$. Como siempre, para que (37.12) tenga una única solución se requiere una condición final en la fecha de maduración del contrato:

$$c_a(S_t, I_t, T) = \max \left(S_t - \frac{I_t}{T}, 0 \right). \quad (37.13)$$

37.5 Opciones asiáticas con precio de ejercicio igual a la media geométrica

En esta sección se caracteriza el precio de una opción asiática con precio de ejercicio igual a la media geométrica. Considere el proceso

$$\exp \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \ln(S_u) du \right\}, \quad (37.14)$$

el cual es el límite cuando $n \rightarrow \infty$ de la media discreta geométrica

$$\left(\prod_{i=1}^n S_{t_i} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \log(S_{t_i}) \right\},$$

donde los tiempos t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, representan una partición de $(0, t]$. En este caso, se define

$$J_t = \int_0^t \ln(S_u) du,$$

de tal manera que

$$dJ_t = \ln(S_t) dt. \quad (37.15)$$

Si se sigue un argumento de arbitraje similar al de una opción asiática de compra con precio de ejercicio flexible igual a la media aritmética, la ecuación diferencial parcial que caracteriza el precio, c_g , de una opción asiática con media geométrica es

$$\frac{\partial c_g}{\partial t} + \ln(S_t) \frac{\partial c_g}{\partial J_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_g}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial c_g}{\partial S_t} - r c_g = 0. \quad (37.16)$$

37.6 Reducción de la dimensión del problema de valuación de una opción asiática con media aritmética

El valor de una opción asiática, de compra con precio de ejercicio flexible igual a la media aritmética, depende de tres variables S_t , t e I_t . Suponga que

$$c_a = S_t^\alpha C_a(H_t, t), \quad H_t := \frac{I_t}{S_t} \quad (37.17)$$

para alguna constante α (usualmente igual a 0 ó 1). Observe que las derivadas parciales de c_a con respecto de sus argumentos están dadas por:

$$\frac{\partial c_a}{\partial t} = S_t^\alpha \frac{\partial C_a}{\partial t},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_a}{\partial S_t} &= \alpha S_t^{\alpha-1} C_a + S_t^\alpha \frac{\partial C_a}{\partial H_t} \frac{\partial H_t}{\partial S_t} \\ &= \alpha S_t^{\alpha-1} C_a - S_t^\alpha \frac{\partial C_a}{\partial H_t} \left(\frac{I_t}{S_t^2} \right) \\ &= \alpha S_t^{\alpha-1} C_a - S_t^{\alpha-1} \frac{\partial C_a}{\partial H_t} H_t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c_a}{\partial S_t^2} &= \alpha(\alpha-1) S_t^{\alpha-2} C_a + \alpha S_t^{\alpha-1} \frac{\partial C_a}{\partial H_t} \frac{\partial H_t}{\partial S_t} - (\alpha-1) S_t^{\alpha-2} \frac{\partial C_a}{\partial H_t} H_t \\ &\quad - S_t^{\alpha-1} \frac{\partial^2 C_a}{\partial H_t^2} \frac{\partial H_t}{\partial S_t} H_t - S_t^{\alpha-1} \frac{\partial C_a}{\partial H_t} \frac{\partial H_t}{\partial S_t} \\ &= \alpha(\alpha-1) S_t^{\alpha-2} C_a - \alpha S_t^{\alpha-2} \frac{\partial C_a}{\partial H_t} H_t - (\alpha-1) S_t^{\alpha-2} \frac{\partial C_a}{\partial H_t} H_t \\ &\quad + S_t^{\alpha-2} \frac{\partial^2 C_a}{\partial H_t^2} H_t^2 + S_t^{\alpha-2} \frac{\partial C_a}{\partial H_t} H_t \\ &= \alpha(\alpha-1) S_t^{\alpha-2} C_a + 2(1-\alpha) S_t^{\alpha-2} \frac{\partial C_a}{\partial H_t} H_t + S_t^{\alpha-2} \frac{\partial^2 C_a}{\partial H_t^2} H_t^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_a}{\partial I_t} &= S_t^\alpha \frac{\partial C_a}{\partial H_t} \frac{\partial H_t}{\partial I_t} \\ &= S_t^{\alpha-1} \frac{\partial C_a}{\partial H_t}. \end{aligned}$$

De esta manera, la sustitución de las derivadas parciales anteriores en la ecuación (37.12) conduce a la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial C_a}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 H_t^2 \frac{\partial^2 C_a}{\partial H_t^2} + (1 + (\sigma^2(1-\alpha) - r) H_t) \frac{\partial C_a}{\partial H_t} - (1-\alpha) \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \alpha + r \right) C_a = 0. \quad (37.18)$$

con la condición final

$$C_a(H, T) = S_t^{1-\alpha} \max \left(1 - \frac{H_t}{T}, 0 \right).$$

37.7 Valuación de opciones asiáticas con subyacentes con difusión con saltos

Sea $\hat{c}_a = \hat{c}_a(S_t, I_t, t)$ el precio de una opción asiática de compra con precio de ejercicio flexible igual a la media aritmética. Como antes, denote

$$I_t = \int_0^t S_u du.$$

Suponga que el precio del subyacente es conducido por

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t + \nu dN_t),$$

donde μ y σ representan, respectivamente, la media esperada y la volatilidad instantánea de S_t , ν es el tamaño medio esperado del salto, W_t es un movimiento Browniano y N_t es un proceso de Poisson. El proceso N_t es tal que

$$dN_t = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \lambda dt + o(dt), \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - \lambda dt + o(dt). \end{cases}$$

La constante λ representa el número medio esperado de saltos por unidad de tiempo y es llamada parámetro de intensidad. Suponga también, por simplicidad, que dW_t y dN_t no están correlacionados entre sí. Se puede mostrar fácilmente, mediante el lema de Itô, que \hat{c}_a satisface

$$\begin{aligned} d\hat{c}_a = & \left(\frac{\partial \hat{c}_a}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \hat{c}_a}{\partial S_t^2} + \mu S_t \frac{\partial \hat{c}_a}{\partial S_t} + S_t \frac{\partial \hat{c}_a}{\partial I_t} \right) dt \\ & + \sigma S_t \frac{\partial \hat{c}_a}{\partial S_t} dW_t + [\hat{c}_a(S_t(1 + \nu), t) - \hat{c}_a(S_t, t)] dN_t. \end{aligned}$$

Asimismo, se tiene que el precio de la opción es caracterizado por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{c}_a}{\partial t} + S_t \frac{\partial \hat{c}_a}{\partial I_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \hat{c}_a}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial \hat{c}_a}{\partial S_t} - r \hat{c}_a \\ + \lambda E_\nu [\hat{c}_a(S_t(1 + \nu), t)] - \lambda \hat{c}_a(S_t, t) - \lambda \frac{\partial \hat{c}_a}{\partial S_t} S_t E_\nu [\nu] = 0. \end{aligned}$$

37.8 Bibliografía sugerida

- Dewynne, J. N., A. E. Whalley, and P. Wilmott (1994). "Path-Dependent Options and Transaction Costs". *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering*, Vol. 347, No. 1684, Mathematical Models in Finance, pp. 517-529.
- Hansen, A. T. and P. L. Jorgensen (2000). "Analytical Valuation of American-Style Asian Options". *Management Science*, Vol. 46, No. 8, pp. 1116-1136.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO". *Estudios Económicos*, Vol. 16, No. 32, pp. 203-226.

37.9 Ejercicios

37.1 Verifique que la sustitución de las derivadas parciales

$$\frac{\partial c_a}{\partial t}, \quad \frac{\partial c_a}{\partial S_t} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 c_a}{\partial S_t^2},$$

calculadas en la sección 37.6, en la ecuación (37.12) conduce a

$$\frac{\partial C_a}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 H_t^2 \frac{\partial^2 C_a}{\partial H_t^2} + (1 + (\sigma^2(1 - \alpha) - r)H_t) \frac{\partial C_a}{\partial H_t} - (1 - \alpha) \left(\frac{1}{2}\sigma^2 \alpha + r \right) C_a = 0.$$

Discuta los casos cuando $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

Solución: La ecuación diferencial parcial anterior es más complicada que la de Black-Scholes. En el caso particular de $\alpha = 1$, se simplifica a

$$\frac{\partial C_a}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 H_t^2 \frac{\partial^2 C_a}{\partial H_t^2} + (1 - r)H_t \frac{\partial C_a}{\partial H_t} = 0. \quad (37.19)$$

junto con

$$C_a(H, T) = \max \left(1 - \frac{H_t}{T}, 0 \right).$$

37.2 Suponga que el precio, S_t , del subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $(W_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Sea

$$I_t = \int_0^t S_u du.$$

Utilice el lema de Itô para mostrar que

$$dc_a = \left(\frac{\partial c_a}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_a}{\partial S_t^2} + \mu S_t \frac{\partial c_a}{\partial S_t} + S_t \frac{\partial c_a}{\partial I_t} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} dW_t.$$

37.3 Sea $\tilde{c}_a = \tilde{c}_a(S_t, N_t, t)$ el precio de una opción asiática de compra con precio de ejercicio flexible igual al cuadrado de la media aritmética donde

$$N_t = \left(\int_0^t S_u du \right)^2.$$

Encuentre la ecuación diferencial parcial y la condición de frontera que caracteriza a \tilde{c}_a .

37.4 Sea $\hat{c}_a = \hat{c}_a(S_t, I_t, t)$ el precio de una opción asiática de compra con precio de ejercicio flexible igual a la media aritmética donde $I_t = \int_0^t S_u du$. Suponga que el precio del subyacente es conducido por

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t + \nu dN_t),$$

donde μ y σ representan, respectivamente, la media esperada y la volatilidad instantánea de S_t , ν es el tamaño medio esperado del salto, W_t es un movimiento Browniano y N_t es un proceso de Poisson. Muestre que $\hat{c}_a = \hat{c}_a(S_t, I_t, t)$ satisface

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{c}_a}{\partial t} + S_t \frac{\partial \hat{c}_a}{\partial I_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \hat{c}_a}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial \hat{c}_a}{\partial S_t} - r\hat{c}_a \\ + \lambda E_\nu [\hat{c}_a(S_t(1 + \nu), t)] - \lambda \hat{c}_a(S_t, t) - \lambda \frac{\partial \hat{c}_a}{\partial S_t} S_t E_\nu [\nu] = 0. \end{aligned}$$

37.5 Suponga que la tasa de interés es estocástica y es gobernada por

$$dr_t = \alpha(r_t, t)dt + \beta(r_t, t)dU_t,$$

donde $\alpha(r_t, t)$ y $\beta(r_t, t)$ son funciones conocidas y U_t es un movimiento Browniano. Así mismo, suponga que el subyacente es guiado por

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y W_t es un movimiento Browniano con $Cov(dU_t, dW_t) = \rho dt$. Si $c_a = c_a(S_t, r_t, t)$ es el precio de una opción asiática de compra con precio de ejercicio flexible igual a la media aritmética, encuentre la ecuación diferencial parcial que caracteriza a c_a .

CAPÍTULO 38

TIEMPOS DE PARO, TIEMPOS DE PRIMERA VISITA Y PRINCIPIO DE REFLEXIÓN

Conceptos básicos de este capítulo:

- Tiempos de paro de un movimiento Browniano
- Distribución del tiempo de primera visita a un estado
- Principio de reflexión del movimiento Browniano
- Distribuciones del máximo y mínimo de un movimiento Browniano

38.1 Introducción

En este capítulo se introducen los conceptos de tiempo de paro y de tiempo primera visita a un estado de un movimiento Browniano. Asimismo, se estudia el principio de reflexión. Este principio permite calcular la distribución conjunta de un movimiento Browniano y de su valor máximo o mínimo en un intervalo finito de tiempo en términos sólo de la distribución marginal del movimiento Browniano. Esta propiedad es muy importante en la valuación de opciones europeas con precio de ejercicio flotante dependiente del valor máximo o mínimo del precio del activo subyacente durante la vigencia del contrato; como se verá en capítulos posteriores.

38.2 Tiempos de paro de un movimiento Browniano

Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ su filtración aumentada. Si se define el proceso

$$W_t^{(\tau)} = W_{\tau+t} - W_\tau, \quad t \geq 0,$$

entonces $\{W_t^{(\tau)}\}_{t \geq 0}$ es también un movimiento Browniano definido sobre el espacio de probabilidad original, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Esto se verifica fácilmente como sigue. Note primero que $W_0^{(\tau)} = W_\tau - W_\tau = 0$. Por otro lado, si $0 \leq t_0 < t_1 \cdots < t_n$, entonces los incrementos

$$W_{t_1}^{(\tau)} - W_{t_0}^{(\tau)}, \quad W_{t_2}^{(\tau)} - W_{t_1}^{(\tau)}, \dots, \quad W_{t_n}^{(\tau)} - W_{t_{n-1}}^{(\tau)}$$

coinciden con los incrementos

$$W_{\tau+t_1} - W_{\tau+t_0}, \quad W_{\tau+t_2} - W_{\tau+t_1}, \dots, \quad W_{\tau+t_n} - W_{\tau+t_{n-1}},$$

los cuales son independientes. Por último, si $s > 0$, entonces

$$W_{t+s}^{(\tau)} - W_t^{(\tau)} = W_{\tau+t+s} - W_\tau - (W_{\tau+t} - W_\tau) = W_{\tau+t+s} - W_{\tau+t} \sim \mathcal{N}(0, s).$$

Claramente, el proceso $\{W_t^{(\tau)}\}_{t \geq 0}$ es independiente de la σ -álgebra \mathcal{F}_τ . Las propiedades anteriores de $\{W_t^{(\tau)}\}_{t \geq 0}$ se mantienen aún en el caso de que τ sea una variable aleatoria que toma valores en $[0, \infty)$. En este contexto, se dice que τ es un tiempo de paro para $\{W_t\}_{t \geq 0}$ si

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{para toda } t.$$

Observe que si τ es un tiempo de paro para $\{W_t\}_{t \geq 0}$ y c una constante, entonces $\tau + c$ es un tiempo de paro para $\{W_t\}_{t \geq 0}$. En efecto, si $0 \leq t < c$, entonces $\{\tau + c \leq t\} = \{\tau \leq t - c < 0\} = \emptyset$. Si, por el contrario, $c \geq t$, entonces $\{\tau + c \leq t\} = \{\tau \leq t - c\} \in \mathcal{F}_{t-c} \subseteq \mathcal{F}_t$.

38.3 Tiempo de primera visita a un estado del movimiento Browniano

Frecuentemente se está interesado en el tiempo que toma un movimiento Browniano en visitar, por primera vez, un estado específico y . Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ su filtración aumentada. El tiempo de primera visita τ_y al estado $y \in \mathbb{R}$ se define como:

$$\tau_y = \inf \{t : W_t = y\}.$$

La continuidad en las trayectorias del movimiento Browniano es esencial para que la definición anterior tenga sentido. Un resultado relevante es que τ_y es un tiempo de paro de $\{W_t\}_{t \geq 0}$. En efecto, observe primero que $\tau_y \leq t$ si y sólo si

$$\max_{0 \leq s \leq t} W_s \geq y, \quad (38.1)$$

o más elocuentemente

$$\{\tau_y \leq t\} = \left\{ \max_{0 \leq s \leq t} W_s \geq y \right\}.$$

En efecto, si $\tau_y \leq t$, entonces W_t visitó, por primera vez, al estado $y > 0$ en algún instante en $[0, t]$, específicamente la visita se realizó en τ_y , por lo tanto el valor máximo de W_t es al menos y durante $[0, t]$. Por la continuidad de las trayectorias, el máximo es alcanzado. A partir de (38.1), se tiene que

$$\sup_{0 \leq s \leq t} W_s + \delta > y \quad \text{para toda } \delta > 0.$$

En consecuencia, si $r, q \in \mathbb{Q}$ (números racionales), se sigue que

$$\begin{aligned} \{\tau_y \leq t\} &= \bigcap_{r > 0} \left\{ \sup_{0 < s \leq t} W_s + r > y \right\} \\ &= \bigcap_{r > 0} \bigcap_{q > 0} \left\{ \sup_{0 < q \leq t} W_q + r > y \right\} \in \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

Es decir, $\{\tau_y \leq t\}$ es la intersección de una familia numerable de conjuntos \mathcal{F}_t -medibles, ya que el conjunto de números racionales, \mathbb{Q} , es numerable. Observe también que debido a la simetría de W_t , los tiempos de primera visita τ_y y τ_{-y} tienen la misma distribución. Por último, se cumple trivialmente que $\tau_0 = 0$ casi dondequiera con respecto de \mathbb{P} . Se verá en el transcurso de este capítulo que si $y > 0$, τ_y tiene la siguiente función de densidad:

$$f_{\tau_y}(t) = \frac{y}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2t} \right\}, \quad t \geq 0. \quad (38.2)$$

Claramente, si $y < 0$, entonces y se sustituye por $|y|$ en (38.2).

38.4 Distribuciones del tiempo de primera visita y del valor máximo de un movimiento Browniano

El precio de muchos de los productos derivados que se encuentran en el mercado depende del valor máximo observado durante la vigencia del contrato. En una primera aproximación a este problema se define la variable

$$\mathcal{M}_t^W = \max_{0 \leq s \leq t} W_s. \quad (38.3)$$

Se verá a continuación que \mathcal{M}_t^W tiene la misma distribución que $|W_t|$. Es decir, \mathcal{M}_t^W tiene función densidad

$$f_{\mathcal{M}_t^W}(y) = \left(\frac{2}{\pi t} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2t} \right\}, \quad y \geq 0. \quad (38.4)$$

En efecto, observe primero que si $y > 0$,

$$\tau_y \leq t \text{ si y sólo si } \mathcal{M}_t^W \geq y. \quad (38.5)$$

Ahora bien, claramente,

$$\mathbb{P}\{\mathcal{M}_t^W \geq y\} = \mathbb{P}\{W_t < y, \mathcal{M}_t^W \geq y\} + \mathbb{P}\{W_t \geq y, \mathcal{M}_t^W \geq y\}. \quad (38.6)$$

El primer sumando de (38.6) satisface

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{W_t < y, \mathcal{M}_t^W \geq y\} \\ &= \mathbb{P}\{W_t - W_{\tau_y} < 0 \mid \tau_y \leq t\} \mathbb{P}\{\tau_y \leq t\} \\ &= \mathbb{P}\{W_t - W_{\tau_y} \geq 0 \mid \tau_y \leq t\} \mathbb{P}\{\tau_y \leq t\} \\ &= \mathbb{P}\{W_t \geq y, \mathcal{M}_t^W \geq y\}. \end{aligned} \quad (38.7)$$

En la segunda igualdad se ha utilizado el hecho de que

$$\mathbb{P}\{W_{\tau_y} = y\} = 1,$$

ya que la primera vez que W_t visita al estado $y > 0$, es justamente en el instante τ_y . La tercera igualdad se debe a la simetría de la variable aleatoria $W_t - W_{\tau_y} \sim \mathcal{N}(0, t - \tau_y)$. La última expresión en (38.7) es justamente el segundo sumando de (38.6). Se sigue entonces de (38.7) que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\mathcal{M}_t^W \geq y\} &= 2\mathbb{P}\{W_t \geq y, \mathcal{M}_t^W \geq y\} \\ &= 2\mathbb{P}\{W_t \geq y\}, \end{aligned} \quad (38.8)$$

ya que $\mathcal{M}_t^W \geq W_t$. Así,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\mathcal{M}_t^W \geq y\} &= 2\mathbb{P}\{W_t \geq y\} \\ &= \mathbb{P}\{W_t \geq y\} + \mathbb{P}\{W_t \leq -y\} \\ &= \mathbb{P}\{|W_t| \geq y\} \\ &= \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \int_y^\infty e^{-z^2/2t} dz. \end{aligned}$$

Es decir, la distribución de \mathcal{M}_t^W concide con la de $|W_t|$. Claramente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\mathcal{M}_t^W \leq y\} &= \mathbb{P}\{|W_t| \leq y\} \\ &= \mathbb{P}\{W_t \leq y\} - \mathbb{P}\{W_t \leq -y\} \\ &= \mathbb{P}\{W_t \leq y\} - (1 - \mathbb{P}\{W_t \leq y\}) \\ &= 2\mathbb{P}\{W_t \leq y\} - 1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_y^\infty \exp\left\{-\frac{z^2}{2t}\right\} dz - 1. \end{aligned}$$

La media y la varianza de \mathcal{M}_t^W están dadas, respectivamente, por:

$$\mathbb{E}[\mathcal{M}_t^W] = \mathbb{E}[|W_t|] = \sqrt{2t/\pi}$$

y

$$\text{Var}[\mathcal{M}_t^W] = \text{Var}[|W_t|] = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)t.$$

La distribución del tiempo de primera visita, τ_y , se calcula como sigue: si $y > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\{\tau_y \leq t\} &= \mathbb{P}\{\mathcal{M}_t^W \geq y\} \\
 &= \mathbb{P}\{|W_t| \geq y\} \\
 &= \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \int_y^\infty e^{-z^2/2t} dz \\
 &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{y/\sqrt{t}}^\infty e^{-v^2/2} dv \\
 &= \int_0^t \frac{y}{\sqrt{2\pi u^3}} e^{-y^2/2u} du,
 \end{aligned} \tag{38.9}$$

donde en la penúltima integral se llevó a cabo la sustitución $v = z/\sqrt{t}$, de esta forma el límite inferior cambia de y a y/\sqrt{t} , y el superior se mantiene. En la última integral se empleó el cambio de variable $\sqrt{u} = y/v$, así el límite inferior cambia de y/\sqrt{t} a t , y el superior de ∞ a cero. Además,

$$dv = -\frac{1}{2} \frac{y}{u^{3/2}} du,$$

lo que permite intercambiar los límites de integración. Por otro lado, el valor esperado del tiempo de primera visita al estado $y > 0$ se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
 E[\tau_y] &= \int_0^\infty \mathbb{P}\{\tau_y > t\} dt \\
 &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{y/\sqrt{t}}^\infty e^{-z^2/2} dz\right) dt \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^{y/\sqrt{t}} e^{-z^2/2} dz dt \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left(\int_0^{y^2/z^2} dt\right) e^{-z^2/2} dz \\
 &= \frac{2y^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{z^2} e^{-z^2/2} dz \\
 &\geq \frac{2y^2 e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{1}{z^2} dz \\
 &= \infty.
 \end{aligned} \tag{38.10}$$

Note que en la cuarta igualdad el límite superior en z se toma cuando $z = y/\sqrt{t}$. Por lo tanto, el límite superior en t se toma cuando $t = y^2/z^2$. En el cálculo de (38.10) se ha utilizado el siguiente hecho. La fórmula de integración por partes conduce a

$$\begin{aligned}
 \int_0^n t f_{\tau_y}(t) dt &= \int_0^n t dF_{\tau_y}(t) \\
 &= t F_{\tau_y}(t) \Big|_0^n - \int_0^n F_{\tau_y}(t) dt \\
 &= n F_{\tau_y}(n) - \int_0^n F_{\tau_y}(t) dt \\
 &= -n [1 - F_{\tau_y}(n)] + \int_0^n (1 - F_{\tau_y}(t)) dt \\
 &= -n [1 - F_{\tau_y}(n)] + \int_0^n \mathbb{P}\{\tau_y > t\} dt.
 \end{aligned}$$

Sin embargo,

$$0 \leq n [1 - F_{\tau_y}(n)] = n \int_n^\infty f_{\tau_y}(t) dt < \int_n^\infty t f_{\tau_y}(t) dt,$$

produce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [1 - F_{\tau_y}(n)] = 0.$$

Por lo tanto,

$$E[\tau_y] = \int_0^\infty t f_{\tau_y}(t) dt = \int_0^\infty \mathbb{P}\{\tau_y > t\} dt.$$

Por último, note que si $a \geq 0$ y $y > 0$, entonces

$$E[e^{-a\tau_y}] = \int_0^\infty \frac{ye^{-au}}{\sqrt{2\pi u^{3/2}}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2u}\right\} du = e^{-\sqrt{2ay}}. \quad (38.11)$$

Es decir, la densidad de τ_y , f_{τ_y} , tiene transformada de Laplace dada por (38.11).

38.5 Eventos seguros sobre el máximo o mínimo de un movimiento Browniano

En esta sección se estudian algunos eventos seguros relacionados con el máximo o el mínimo de un movimiento Browniano en un intervalo de tiempo finito. Un resultado inmediato de (38.3) es que

$$\mathbb{P}\{\mathcal{M}_t^W > 0\} = 1.$$

Por otro lado, dado que

$$\mu_t^W = \min_{0 \leq s \leq t} W_s = -\mathcal{M}_t^W = -\max_{0 \leq s \leq t} W_s,$$

se cumple que también que

$$\mathbb{P}\{\mu_t^W < 0\} = 1.$$

Por último, note que

$$\mathbb{P}\{\tau_y < \infty\} = 1.$$

38.6 Principio de reflexión del movimiento Browniano

Este principio permite calcular la distribución conjunta de un movimiento Browniano y de su valor máximo o mínimo en un intervalo finito de tiempo en términos sólo de la distribución marginal del movimiento Browniano. Observe, primero, que a partir de (38.6) se tiene que

$$\mathbb{P}\{W_t < y, \mathcal{M}_t^W \geq y\} = \mathbb{P}\{W_t \geq y, \mathcal{M}_t^W \geq y\}. \quad (38.12)$$

Asimismo,

$$\mathbb{P}\{W_t \geq y, \mathcal{M}_t^W \geq y\} = \mathbb{P}\{W_t \geq y, |W_t| \geq y\} = \mathbb{P}\{W_t \geq y\}. \quad (38.13)$$

Por simetría,

$$\mathbb{P}\{W_t \geq y\} = \mathbb{P}\{W_t \leq -y\}. \quad (38.14)$$

Conjuntando las ecuaciones (38.12)-(38.14), se tiene que

$$\mathbb{P}\{W_t < y, \mathcal{M}_t^W \geq y\} = \mathbb{P}\{W_t \geq y, \mathcal{M}_t^W \geq y\} = \mathbb{P}\{W_t \geq y\} = \mathbb{P}\{W_t \leq -y\}. \quad (38.15)$$

38.7 Bibliografía sugerida

- Musiela, M. and M. Rutkowsky (1997). Martingale Methods in Financial Modelling. Series, Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Karatzas, I. and S. E. Shreve (1997). Brownian Motion and Stochastic Calculus, Second Edition. Series, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Revuz, D. and M. Yor (1999). Continuous Martingales and Brownian Motion, Third Edition. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

38.8 Ejercicios

38.1 Calcule $E[|W_t|]$

Solución: Observe, primero, que

$$\mathbb{P}\{|W_t| > w\} = 2\mathbb{P}\{W_t \geq w\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E[|W_t|] &= \int_0^\infty \mathbb{P}\{|W_t| > w\} dw \\ &= 2 \int_0^\infty \mathbb{P}\{W_t > w\} dw \\ &= 2E[W_t] \\ &= 2 \int_0^\infty w \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-w^2/2t} dw \\ &= \sqrt{\frac{4}{2\pi t}} \int_0^\infty w e^{-w^2/2t} dw. \end{aligned}$$

Considere el siguiente cambio de variable $u = w^2/2t$, de donde $tdu = wdw$. Al aplicar este cambio de variable en la ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} E[|W_t|] &= \sqrt{\frac{4}{2\pi t}} \int_0^\infty w e^{-w^2/2t} dw \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-u} tdu \\ &= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-u} du \\ &= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-e^{-u}\right]_0^n \\ &= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - e^{-n^2/2t}\right] \\ &= \sqrt{\frac{2t}{\pi}}. \end{aligned}$$

38.2 Calcule $\text{Var}[|W_t|]$.

Solución: Observe que

$$\text{Var}[|W_t|] = E[W_t^2] - (E[|W_t|])^2.$$

El valor esperado del valor absoluto de W_t ya fue calculado en el ejercicio (38.1), por lo que sólo falta calcular $E[W_t^2]$. En este caso,

$$\begin{aligned} E[W_t^2] &= \int_{-\infty}^\infty w^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-w^2/2t} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^\infty w^2 e^{-w^2/2t} dw. \end{aligned}$$

Para resolver la integral se utiliza integración por partes. Sean $u = w$ y

$$dv = we^{-w^2/2t}dw.$$

Así, $du = dw$ y

$$v = -te^{-w^2/2t}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t^2] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 e^{-w^2/2t} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n w^2 e^{-w^2/2t} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[-\lim_{n \rightarrow \infty} wte^{-w^2/2t} \Big|_{-n}^n + t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2/2t} dw \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[t\sqrt{2\pi t} \right] \\ &= t. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \text{Var}[|W|] &= \mathbb{E}[W_t^2] - (\mathbb{E}[|W_t|])^2 \\ &= t - \left(\sqrt{\frac{2t}{\pi}} \right)^2 \\ &= t - \frac{2t}{\pi} \\ &= \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) t. \end{aligned}$$

38.3 Sea

$$\mathcal{M}_t^w = \max_{0 \leq s \leq t} W_s,$$

donde $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Muestre que

$$\mathbb{P}\{\mathcal{M}_t^w \leq y\} = \left(\frac{2}{\pi t} \right)^{1/2} \int_0^y e^{-u^2/2t} du.$$

38.4 Sea τ_y el tiempo de primera visita al estado $y \in \mathbb{R}$, es decir,

$$\tau_y = \inf \{t : W_t = y\},$$

donde $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Verifique que

$$\mathbb{E}[e^{\sqrt{a}(\sqrt{2}y - \sqrt{a}\tau_y)}] = 1.$$

CAPÍTULO 39

MÁXIMO Y MÍNIMO DEL MOVIMIENTO BROWNIANO, TEOREMA DE GIRSANOV Y PRINCIPIO DE REFLEXIÓN

Conceptos básicos de este capítulo:

- Distribución del máximo y mínimo de un movimiento Browniano
- Teorema de Girsanov
- Derivadas de Radon-Nikodým
- Regla de la cadena de derivadas de Radon-Nikodým
- Principio de reflexión del movimiento Browniano

39.1 Introducción

A continuación se estudian las distribuciones de los valores mínimo y máximo de un movimiento geométrico Browniano en un intervalo finito de tiempo. Asimismo, se establece el principio de reflexión del movimiento Browniano, el cual permite calcular la distribución conjunta de un movimiento Browniano y de su valor mínimo (o máximo) en términos sólo de la distribución marginal del movimiento Browniano. Este resultado desempeña un papel fundamental en la valuación de opciones europeas con precio de ejercicio flotante dependiente del valor máximo o mínimo del activo subyacente durante la vida del contrato.

39.2 Teorema de Girsanov

El teorema de Girsanov es un resultado que permite simplificar sustancialmente los cálculos en la obtención de las distribuciones de los valores mínimo y máximo de un movimiento Browniano con tendencia en un intervalo finito de tiempo. Por supuesto, el teorema de Girsanov es también una herramienta fundamental en la valuación neutral al riesgo de muchos y muy diversos productos derivados.

Suponga que $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ su filtración aumentada. Asimismo, suponga que el precio, S_t , de un activo financiero es conducido por el siguiente movimiento geométrico Browniano:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (39.1)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son, respectivamente, el rendimiento medio esperado y la volatilidad del activo subyacente. Si se define

$$\widetilde{W}_t = \lambda t + W_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (39.2)$$

donde

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

representa el premio al riesgo de mercado, entonces la ecuación (39.1) puede reescribirse como

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (39.3)$$

En este caso, el teorema de Girsanov proporciona una medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$, definida en el espacio muestral original Ω , tal que

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \varphi(\lambda, T, W_T) d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}, \quad (39.4)$$

donde

$$\varphi(\lambda, T, W_T) = \exp \left\{ -\lambda W_T - \frac{1}{2} \lambda^2 T \right\}. \quad (39.5)$$

Bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}$, \tilde{W}_t es un movimiento Browniano estándar. Note también que la ecuación (39.4) puede expresarse como:

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{W}_T)}{d\mathbb{P}(W_T)} = \varphi(\lambda, T, W_T). \quad (39.6)$$

Así, $\varphi(\lambda, T, W_T)$ es la derivada de Radon-Nikodým de $\tilde{\mathbb{P}}$ con respecto de \mathbb{P} . El valor esperado de una función arbitraria $g(\tilde{W}_T)$ de \tilde{W}_T bajo $\tilde{\mathbb{P}}$ se obtiene mediante la expresión

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}[g(\tilde{W}_T)] &= \mathbb{E}[g(W_T + \lambda T)\varphi(\lambda, T, W_T)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} g(w + \lambda T) e^{-\lambda w - \frac{1}{2}\lambda^2 T} e^{-w^2/2T} dw. \end{aligned} \quad (39.7)$$

De esta manera,

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \tilde{\mathbb{E}}[1_A] = \mathbb{E}[\varphi(\lambda, T, W_T)1_A], \quad (39.8)$$

donde

$$1_A = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

En particular, si $A = \{\tilde{W}_T \leq x\}$, entonces

$$\tilde{\mathbb{P}}\left\{\tilde{W}_T \leq x\right\} = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda W_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T^2} 1_{\{W_T \leq x - \lambda T\}}\right]. \quad (39.9)$$

39.3 Valor mínimo de un movimiento geométrico Browniano en un intervalo finito de tiempo

En esta sección se discuten las propiedades del valor mínimo de un movimiento geométrico Browniano en un intervalo finito de tiempo. Una simple aplicación del lema de Itô, tomando como proceso subyacente al definido en (39.3), conduce a

$$d \ln(S_t) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma d\tilde{W}_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (39.10)$$

lo que, a su vez, implica

$$S_u = S_t e^{\sigma(\tilde{W}_u - \tilde{W}_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(u-t)} = S_t e^{-(Y_u - Y_t)}, \quad 0 \leq t \leq u \leq T, \quad (39.11)$$

donde

$$Y_u = -\sigma \tilde{W}_u + \nu u, \quad 0 \leq t \leq u \leq T \quad (39.12)$$

y

$$\nu \equiv \frac{1}{2}\sigma^2 - r. \quad (39.13)$$

En consecuencia, se puede escribir que

$$m_{t,T}^S = \min_{u \in [t,T]} S_u = S_t e^{-\mathcal{M}_{t,T}^Y}, \quad (39.14)$$

donde

$$\mathcal{M}_{t,T}^Y = \max_{u \in [t,T]} (Y_u - Y_t). \quad (39.15)$$

Claramente, $\mathcal{M}_{t,T}^Y$ es independiente de \mathcal{F}_t , ya que $\widetilde{W}_u - \widetilde{W}_t$ es independiente de \mathcal{F}_t . Asimismo, la distribución de $\mathcal{M}_{t,T}^Y$ bajo $\tilde{\mathbb{P}}$ coincide con la distribución de

$$\mathcal{M}_{T-t}^Y = \max_{u \in [0,T-t]} Y_u \quad (39.16)$$

bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, ya que $\mathcal{M}_{t,t}^Y = 0$ y $\mathcal{M}_{t,T}^Y = Y_T - Y_t = Y_{T-t}$. Aún más, m_T^S puede reescribirse como:

$$m_T^S = \min(m_t^S, m_{t,T}^S) = \min(m_t^S, S_t e^{-\mathcal{M}_{t,T}^Y}) = \min(m_t^S, S_t e^{-\mathcal{M}_{T-t}^Y}), \quad (39.17)$$

donde S_t y m_t^S son \mathcal{F}_t -medibles y \mathcal{M}_{T-t}^Y es independiente de la σ -álgebra \mathcal{F}_t .

39.4 Distribución conjunta de los valores actual y máximo de un movimiento Browniano con tendencia

En el transcurso de esta sección se estudia la distribución de probabilidad conjunta de los valores actual y máximo de un movimiento Browniano con tendencia. Dicha distribución conjunta se puede expresar en términos sólo de la distribución marginal del movimiento Browniano. Específicamente, se muestra que si $y \geq 0$, entonces

$$\tilde{\mathbb{P}} \{Y_{T-t} \leq y, \mathcal{M}_{T-t}^Y \geq y\} = e^{(1-\kappa)y} \tilde{\mathbb{P}} \{Y_{T-t} \geq y + \sigma^2(1-\kappa)(T-t)\}, \quad (39.18)$$

donde

$$\kappa = \frac{2r}{\sigma^2}. \quad (39.19)$$

Observe primero que

$$\sigma^{-1} Y_t = -\widetilde{W}_t + \phi t, \quad (39.20)$$

donde $\phi \equiv \sigma^{-1}\nu$. Ahora bien, dado que, por simetría, $\widetilde{V}_t = -\widetilde{W}_t$ es también un movimiento Browniano estándar en $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$, se puede entonces reescribir (39.20) como:

$$\sigma^{-1} Y_t = \widetilde{V}_t + \phi t. \quad (39.21)$$

Si se define

$$\widehat{W}_t \equiv \sigma^{-1} Y_t = \widetilde{V}_t + \phi t, \quad (39.22)$$

entonces a partir del teorema de Girsanov se sabe que existe una medida de probabilidad $\hat{\mathbb{P}}$ tal que \widehat{W}_t es un movimiento Browniano bajo $\hat{\mathbb{P}}$. Esta medida de probabilidad satisface, casi dondequiera con respecto de $\tilde{\mathbb{P}}$,

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}(\widehat{W}_{T-t})}{d\tilde{\mathbb{P}}(\widetilde{V}_{T-t})} = \exp \left\{ -\phi \widetilde{V}_{T-t} - \frac{1}{2} \phi^2 (T-t) \right\}. \quad (39.23)$$

Note también que si se invierte (39.23) se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbb{P}}(\widetilde{V}_{T-t})}{d\hat{\mathbb{P}}(\widehat{W}_{T-t})} &= \exp \left\{ \phi \widetilde{V}_{T-t} + \frac{1}{2} \phi^2 (T-t) \right\} \\ &= \exp \left\{ \phi [\widehat{W}_{T-t} - \phi(T-t)] + \frac{1}{2} \phi^2 (T-t) \right\} \\ &= \exp \left\{ \phi \widehat{W}_{T-t} - \phi^2 (T-t) + \frac{1}{2} \phi^2 (T-t) \right\} \\ &= \exp \left\{ \phi \widehat{W}_{T-t} - \frac{1}{2} \phi^2 (T-t) \right\}, \end{aligned} \quad (39.24)$$

casi dondequiera con respecto de $\widehat{\mathbb{P}}$. De esta manera, si $y \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} & \widetilde{\mathbb{P}} \left\{ Y_{T-t} \leq y, \mathcal{M}_{T-t}^Y \geq y \right\} \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\exp \left\{ \phi \widehat{W}_{T-t} - \frac{1}{2} \phi^2 (T-t) \right\} 1_{\{\widehat{W}_{T-t} \leq \widehat{y}, \mathcal{M}_{T-t}^W \geq \widehat{y}\}} \right], \end{aligned} \quad (39.25)$$

donde $\widehat{y} = \sigma^{-1}y$.

39.5 El principio de reflexión del movimiento y la distribución conjunta de los valores actual y máximo de un Browniano

A continuación se introduce el principio de reflexión del movimiento Browniano y su utilidad en la determinación de la distribución conjunta de los valores actual y máximo de un Browniano. Este principio, en el contexto de $\widehat{\mathbb{P}}$, establece que si $\widehat{y} \geq 0$, entonces

$$\widehat{\mathbb{P}} \left\{ \widehat{W}_{T-t} \leq \widehat{y}, \widehat{\mathcal{M}}_{T-t}^{\widehat{W}} \geq \widehat{y} \right\} = \widehat{\mathbb{P}} \left\{ \widehat{W}_{T-t} \leq -\widehat{y} \right\} = \widehat{\mathbb{P}} \left\{ \widehat{W}_{T-t} \geq \widehat{y} \right\}. \quad (39.26)$$

La segunda igualdad se debe a la simetría de \widehat{W}_{T-t} . Este principio se demuestra fácilmente si se toma en cuenta que

$$\widehat{\mathbb{P}} \left\{ \widehat{\mathcal{M}}_{T-t}^{\widehat{W}} \geq \widehat{y} \right\} = \widehat{\mathbb{P}} \left\{ |\widehat{W}_{T-t}| \geq \widehat{y} \right\}. \quad (39.27)$$

ya que $|\widehat{W}_{T-t}| \geq \widehat{y}$ implica $\widehat{W}_{T-t} \geq \widehat{y}$ ó $\widehat{W}_{T-t} \leq -\widehat{y}$. Ahora bien, si se utiliza el hecho de que

$$\widehat{\mathbb{P}} \left\{ \widehat{W}_{T-t} \geq \widehat{y} \right\} = \widehat{\mathbb{P}} \left\{ 2\widehat{y} - \widehat{W}_{T-t} \leq \widehat{y} \right\}, \quad (39.28)$$

se sigue que

$$\begin{aligned} & \widetilde{\mathbb{P}} \left\{ Y_{T-t} \leq y, \mathcal{M}_{T-t}^Y \geq y \right\} \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\exp \left\{ \phi \widehat{W}_{T-t} - \frac{1}{2} \phi^2 (T-t) \right\} 1_{\{\widehat{W}_{T-t} \leq \widehat{y}, \mathcal{M}_{T-t}^W \geq \widehat{y}\}} \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[\exp \left\{ \phi(2\widehat{y} - \widehat{W}_{T-t}) - \frac{1}{2} \phi^2 (T-t) \right\} 1_{\{2\widehat{y} - \widehat{W}_{T-t} \leq \widehat{y}\}} \right] \\ &= e^{2\phi\widehat{y}} \widehat{\mathbb{E}} \left[\exp \left\{ -\phi \widehat{W}_{T-t} - \frac{1}{2} \phi^2 (T-t) \right\} 1_{\{\widehat{W}_{T-t} \geq \widehat{y}\}} \right]. \end{aligned} \quad (39.29)$$

Considere ahora el proceso

$$\check{U}_t = \widehat{W}_t + \phi t \quad (39.30)$$

y defina otra medida más de probabilidad $\check{\mathbb{P}}$, tal que

$$\frac{d\check{\mathbb{P}}(\check{U}_{T-t})}{d\widehat{\mathbb{P}}(\widehat{W}_{T-t})} = \exp \left\{ -\phi \widehat{W}_{T-t} - \frac{1}{2} \phi^2 (T-t) \right\}. \quad (39.31)$$

De esta forma, \check{U}_t es un movimiento Browniano bajo $\check{\mathbb{P}}$ y

$$\begin{aligned} & \widetilde{\mathbb{P}} \left\{ Y_{T-t} \leq y, \mathcal{M}_{T-t}^Y \geq y \right\} \\ &= e^{2\phi\widehat{y}} \widehat{\mathbb{E}} \left[\exp \left\{ -\phi \widehat{W}_{T-t} - \frac{1}{2} \phi^2 (T-t) \right\} 1_{\{\check{U}_{T-t} - \phi(T-t) \geq \widehat{y}\}} \right] \\ &= e^{2\phi\widehat{y}} \widehat{\mathbb{E}} \left[\exp \left\{ -\phi \widehat{W}_{T-t} - \frac{1}{2} \phi^2 (T-t) \right\} 1_{\{\check{U}_{T-t} \geq \widehat{y} + \phi(T-t)\}} \right] \\ &= e^{2\phi\widehat{y}} \check{\mathbb{P}} \left\{ \check{U}_{T-t} \geq \widehat{y} + \phi(T-t) \right\}. \end{aligned} \quad (39.32)$$

En virtud de (39.21), el proceso $\sigma^{-1}Y_{T-t} - \phi(T-t) = \widehat{W}_{T-t} - \phi(T-t) = \widetilde{V}_{T-t}$ es un movimiento Browniano estándar en $\widetilde{\mathbb{P}}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\mathbb{P}} \{ Y_{T-t} \leq y, \mathcal{M}_{T-t}^Y \geq y \} \\
&= e^{2\phi y} \widetilde{\mathbb{P}} \{ \widetilde{U}_{T-t} \geq \widehat{y} + \phi(T-t) \} \\
&= e^{2\phi y} \widetilde{\mathbb{P}} \{ \widetilde{V}_{T-t} \geq \widehat{y} + \phi(T-t) \} \\
&= e^{2\phi y} \widetilde{\mathbb{P}} \{ \sigma^{-1}Y_{T-t} - \phi(T-t) \geq \widehat{y} + \phi(T-t) \} \\
&= e^{2\phi y} \widetilde{\mathbb{P}} \{ \sigma^{-1}Y_{T-t} \geq \widehat{y} + 2\phi(T-t) \} \\
&= e^{2\nu\sigma^{-2}y} \widetilde{\mathbb{P}} \{ Y_{T-t} \geq y + 2\nu(T-t) \}.
\end{aligned} \tag{39.33}$$

Ahora bien, la ecuación (39.28) implica

$$2\nu = \sigma^2(1 - \kappa),$$

se sigue que

$$\widetilde{\mathbb{P}} \{ Y_{T-t} \leq y, \mathcal{M}_{T-t}^Y \geq y \} = e^{(1-\kappa)y} \widetilde{\mathbb{P}} \{ Y_{T-t} \geq y + \sigma^2(1 - \kappa)(T-t) \}. \tag{39.34}$$

Además, de acuerdo con (39.33), se sigue que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{P}} \{ Y_{T-t} \geq y + 2\nu(T-t) \} &= \widetilde{\mathbb{P}} \{ \sigma^{-1}Y_{T-t} - \phi(T-t) \geq \sigma^{-1}y + \phi(T-t) \} \\
&= \widetilde{\mathbb{P}} \{ -\widetilde{W}_{T-t} \geq \sigma^{-1}y + \phi(T-t) \} \\
&= \widetilde{\mathbb{P}} \{ \widetilde{W}_{T-t} \leq -\sigma^{-1}y - \phi(T-t) \} \\
&= \Phi \left(\frac{-y - \nu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right).
\end{aligned} \tag{39.35}$$

Por lo tanto,

$$\widetilde{\mathbb{P}} \{ Y_{T-t} \leq y, \mathcal{M}_{T-t}^Y \geq y \} = e^{(1-\kappa)y} \Phi \left(\frac{-y - \nu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right). \tag{39.36}$$

Por último, note que

$$\widetilde{\mathbb{P}} \{ Y_{T-t} \leq y, \mathcal{M}_{T-t}^Y \leq y \} + \widetilde{\mathbb{P}} \{ Y_{T-t} \leq y, \mathcal{M}_{T-t}^Y \geq y \} = \widetilde{\mathbb{P}} \{ Y_{T-t} \leq y \}. \tag{39.37}$$

En consecuencia, la distribución conjunta de $(Y_{T-t}, \mathcal{M}_{T-t}^Y)$ está dada por

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\mathbb{P}} \{ Y_{T-t} \leq y, \mathcal{M}_{T-t}^Y \leq y \} \\
&= \widetilde{\mathbb{P}} \{ Y_{T-t} \leq y \} - \widetilde{\mathbb{P}} \{ Y_{T-t} \leq y, \mathcal{M}_{T-t}^Y \geq y \} \\
&= \widetilde{\mathbb{P}} \{ \widetilde{V}_{T-t} \leq \sigma^{-1}y - \sigma^{-1}\nu(T-t) \} - e^{(1-\kappa)y} \Phi \left(\frac{-y - \nu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{y - \nu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - e^{(1-\kappa)y} \Phi \left(\frac{-y - \nu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right).
\end{aligned} \tag{39.38}$$

39.6 Distribución del valor máximo de un movimiento Browniano con tendencia

Por otro lado, es claro que para toda $y \geq 0$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{P}}\{\mathcal{M}_{T-t}^Y \geq y\} &= \tilde{\mathbb{P}}\{Y_{T-t} \geq y\} + \tilde{\mathbb{P}}\{Y_{T-t} \leq y, \mathcal{M}_{T-t}^Y \geq y\} \\ &= \tilde{\mathbb{P}}\{Y_{T-t} \geq y\} + e^{(1-\kappa)y}\Phi\left(\frac{-y - \nu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).\end{aligned}\quad (39.39)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{P}}\{\mathcal{M}_{T-t}^Y \leq y\} &= 1 - \tilde{\mathbb{P}}\{\mathcal{M}_{T-t}^Y \geq y\} \\ &= 1 - \tilde{\mathbb{P}}\{Y_{T-t} \geq y\} - e^{(1-\kappa)y}\Phi\left(\frac{-y - \nu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &= \tilde{\mathbb{P}}\{Y_{T-t} \leq y\} - e^{(1-\kappa)y}\Phi\left(\frac{-y - \nu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{y - \nu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - e^{(1-\kappa)y}\Phi\left(\frac{-y - \nu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).\end{aligned}\quad (39.40)$$

Este resultado era de esperarse de acuerdo con (39.38).

39.7 Distribución del valor mínimo de un movimiento Browniano con tendencia

Esta sección se concentra en la distribución del valor mínimo de un movimiento Browniano con tendencia. A partir de (39.38) se sigue que

$$-\mathcal{M}_{T-t}^Y = -\max_{u \in [0, T-t]} Y_u = \min_{u \in [0, T-t]} Y_u = \mu_{T-t}^Y.$$

Por lo tanto, si $x \leq 0$, entonces

$$\tilde{\mathbb{P}}\{Y_{T-t} \geq x, \mu_{T-t}^Y \geq x\} = \Phi\left(\frac{-x + \nu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - e^{(1-\kappa)x}\Phi\left(\frac{x + \nu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \quad (39.41)$$

Asimismo, en virtud de (39.40), se tiene que

$$\tilde{\mathbb{P}}\{\mu_{T-t}^Y \geq y\} = \Phi\left(\frac{-x + \nu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - e^{(1-\kappa)y}\Phi\left(\frac{x + \nu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \quad (39.42)$$

39.8 Bibliografía sugerida

- Karatzas, I. and S. E. Shreve (1997). Brownian Motion and Stochastic Calculus, Second Edition. Series, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.
 Musiela, M. and M. Rutkowsky (1997). Martingale Methods in Financial Modelling. Series, Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer-Verlag, Berlin.

39.9 Ejercicios

39.1 Sea \widehat{W}_t un movimiento Browniano estándar sobre $\widehat{\mathbb{P}}$. Demuestre que

$$\widehat{\mathbb{P}}\{\widehat{\mathcal{M}}_{T-t}^{\widehat{W}} \geq \widehat{y}\} = \widehat{\mathbb{P}}\{|\widehat{W}_{T-t}| \geq \widehat{y}\}$$

y

$$\hat{\mathbb{P}} \left\{ \widehat{W}_{T-t} \leq \hat{y}, \widehat{\mathcal{M}}_{T-t}^{\widehat{W}} \geq \hat{y} \right\} = \hat{\mathbb{P}} \left\{ \widehat{W}_{T-t} \leq -\hat{y} \right\} = \hat{\mathbb{P}} \left\{ \widehat{W}_{T-t} \geq \hat{y} \right\}.$$

39.2 Suponga que

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}(\widehat{W}_{T-t})}{d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{V}_{T-t})} = \exp \left\{ -\phi \tilde{V}_{T-t} - \frac{1}{2} \phi^2 (T-t) \right\}$$

y

$$\frac{d\check{\mathbb{P}}(\check{U}_{T-t})}{d\hat{\mathbb{P}}(\widehat{W}_{T-t})} = \exp \left\{ -\phi \widehat{W}_{T-t} - \frac{1}{2} \phi^2 (T-t) \right\},$$

donde

$$\widehat{W}_t \equiv \sigma^{-1} Y_t = \tilde{V}_t + \phi t$$

y

$$\check{U}_t = \widehat{W}_t + \phi t = \tilde{V}_t + 2\phi t.$$

Determine la derivada de Radon-Nikodým de $\check{\mathbb{P}}$ con respecto de $\tilde{\mathbb{P}}$, es decir, aplique la regla de la cadena en las derivadas de Radon-Nikodým:

$$\frac{d\check{\mathbb{P}}(\check{U}_{T-t})}{d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{V}_{T-t})} = \frac{d\check{\mathbb{P}}(\check{U}_{T-t})}{d\hat{\mathbb{P}}(\widehat{W}_{T-t})} \frac{d\hat{\mathbb{P}}(\widehat{W}_{T-t})}{d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{V}_{T-t})}.$$

Solución: Es suficiente observar que

$$\begin{aligned} \frac{d\check{\mathbb{P}}(\check{U}_{T-t})}{d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{V}_{T-t})} &= \frac{d\check{\mathbb{P}}(\check{U}_{T-t})}{d\hat{\mathbb{P}}(\widehat{W}_{T-t})} \frac{d\hat{\mathbb{P}}(\widehat{W}_{T-t})}{d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{V}_{T-t})} \\ &= \exp \left\{ -\phi \left(\tilde{V}_{T-t} + \widehat{W}_{T-t} \right) - \phi^2 (T-t) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\phi \left(2\tilde{V}_{T-t} + \phi(T-t) \right) - \phi^2 (T-t) \right\} \\ &= \exp \left\{ -(2\phi)\tilde{V}_{T-t} - \frac{1}{2}(2\phi)^2 (T-t) \right\}. \end{aligned}$$

39.3 Sea

$$\mathcal{M}_{T-t}^W = \max_{t \leq s \leq T} W_s,$$

donde $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Muestre que

$$\mathbb{P} \left\{ \mathcal{M}_{T-t}^W \geq y \right\} = \mathbb{P} \left\{ |W_{T-t}| \geq y \right\}.$$

39.4 Con base en la notación del ejercicio anterior, pruebe que

$$\mathbb{P} \left\{ \mathcal{M}_{T-t}^Y \leq y \right\} = \Phi \left(\frac{y}{\sigma \sqrt{T-t}} - \frac{\nu}{\sigma} \sqrt{T-t} \right) - e^{(1-\kappa)y} \Phi \left(\frac{-y}{\sigma \sqrt{T-t}} - \frac{\nu}{\sigma} \sqrt{T-t} \right), \quad y \geq 0,$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar.

CAPÍTULO 40

OPCIONES CON PRECIO DE EJERCICIO FLOTANTE (OPCIONES LOOKBACK I): MODELO DE GOLDMAN, SOSIN Y GATTO

Conceptos básicos de este capítulo:

- Valuación de opciones con precio de ejercicio flotante
- Teorema de Girsanov
- Valuación neutral al riesgo
- Principio de reflexión del movimiento Browniano
- Fórmulas de Goldman, Sosin y Gatto
- Opciones americanas con precio de ejercicio flotante

40.1 Introducción

Una opción de compra con precio de ejercicio igual al valor mínimo del subyacente, otorga al propietario del instrumento el derecho de comprar el subyacente al menor precio observado durante la vida del contrato. Similarmente, una opción de venta con precio de ejercicio igual al valor máximo del subyacente, otorga al propietario del instrumento el derecho de vender el subyacente al mayor precio observado durante la vida del contrato. Los casos de una opción de compra con precio de ejercicio igual al valor máximo del subyacente y una opción de venta con precio de ejercicio igual al valor mínimo del subyacente carecen de sentido, pues ningún agente “racional” compra caro y vende barato.

Las opciones con precios de ejercicio dependientes del valor máximo o mínimo de un título de capital, o un índice bursátil, fueron presentadas, por primera vez, en el trabajo de Goldman, Sosin, y Gatto (1979). En el proceso de valuación de este tipo de opciones, el principio de reflexión de un movimiento Browniano con tendencia y el teorema de Girsanov desempeñan un papel relevante.

En este capítulo se obtienen las fórmulas de valuación de Goldman, Sosin y Gatto (GSG) y se estudia su relación con la fórmula de valuación de Black y Scholes (1973). Asimismo, se discute el caso de opciones americanas con precio de ejercicio flotante.

40.2 Supuestos básicos del modelo de Goldman, Sosin y Gatto

Los supuestos básicos del modelo de Goldman, Sosin y Gatto (GSG) para valuar opciones con precio de ejercicio flotante, dependiente del valor máximo o mínimo del activo subyacente, que se utilizarán en este capítulo son:

- (i) El precio del activo subyacente, una acción, es conducido por un movimiento geométrico Browniano, es decir, el precio es log-normal o el rendimiento es normal. Sea $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Se supone que la dinámica del precio del activo subyacente es conducido por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t; \quad (40.1)$$

- (ii) La volatilidad, σ , del precio de la acción se mantiene constante a través del tiempo;
(iii) Las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas;

- (iv) El mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente se puede comprar y vender en cualquier fracción de unidad;
- (v) No hay costos de transacción (comisiones e impuestos);
- (vi) El mercado opera en forma continua;
- (vii) Existe un mercado de crédito, un sistema bancario, en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante para todos los plazos, y libre de riesgo r ;
- (viii) No existen oportunidades de arbitraje.

Observe que los supuestos del modelo básico de Black y Scholes (1973) se mantienen. Sin embargo, las opciones que a continuación se estudian tienen precio de ejercicio flotante.

40.3 Valuación de opciones con precio de ejercicio flotante dependiente del valor máximo o mínimo del activo subyacente

En esta sección se desarrolla una fórmula para valuar opciones con precio de ejercicio flotante dependiente del valor máximo o mínimo del activo subyacente. Para ello, se empleará la siguiente notación:

0 : tiempo en el que se emite la opción;

t : fecha actual (hoy);

T : fecha de vencimiento de la opción; y

$T - t$: periodo de vida que le resta al contrato.

Una opción europea de compra con precio de ejercicio igual al valor mínimo del subyacente durante $[0, T]$, otorga al propietario del instrumento el derecho de comprar el subyacente al menor precio observado, m_T^S , durante la vida del contrato:

$$m_T^S = \min_{u \in [0, T]} S_u.$$

De esta manera, el pago al vencimiento está dado por

$$\max(S_T - m_T^S, 0) = S_T - m_T^S. \quad (40.2)$$

En este caso, el tenedor del instrumento estará comprando el activo subyacente al menor precio realizado durante el intervalo $[0, T]$. Similarmente, una opción de venta con precio de ejercicio igual al valor máximo del subyacente durante $[0, T]$, otorga al propietario del instrumento el derecho de vender el subyacente al mayor precio observado, M_T^S , durante la vida del contrato, es decir,

$$M_T^S = \max_{u \in [0, T]} S_u.$$

Por lo tanto, el pago, al vencimiento, de esta opción de venta es

$$\max(M_T^S - S_T, 0) = M_T^S - S_T. \quad (40.3)$$

En este caso, el tenedor del instrumento estará vendiendo el activo subyacente al mayor precio observado durante la vigencia del contrato.

Suponga que una opción europea de compra con precio de ejercicio igual al valor mínimo del subyacente se emite al tiempo cero. En lo que sigue se denotará el precio actual, al tiempo t , de dicha opción mediante $c_m \equiv c_m(S_t, m_t^S, t)$. Es importante enfatizar que c_m es el precio actual y no el precio en la fecha en que se emitió la opción. Si se supone que el precio de la acción, S_t , es conducido por el movimiento geométrico Browniano definido en (40.1) y si además se denota

$$\widetilde{W}_t = \lambda t + W_t, \quad (40.4)$$

donde

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

es el precio que asigna el mercado al riesgo por unidad de volatilidad, entonces (40.1) se puede reescribir como

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t. \quad (40.5)$$

El teorema de Girsanov proporciona una medida de probabilidad

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \varphi(\lambda, T, W_T) d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F},$$

donde

$$\varphi(\lambda, t, W_t) = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{W}_t)}{d\mathbb{P}(W_t)} = \exp \left\{ -\lambda W_t - \frac{1}{2} \lambda^2 t \right\}.$$

La medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$, neutral al riesgo, se encuentra definida en el espacio muestral original, Ω . La característica relevante de $\tilde{\mathbb{P}}$ y \tilde{W}_t es que bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, \tilde{W}_t es un movimiento Browniano. En este caso, el precio al tiempo t de una opción europea de compra con precio de ejercicio igual al valor mínimo del subyacente satisface

$$c_m = e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}} [S_T - m_T^S \mid \mathcal{F}_t]. \quad (40.6)$$

Así,

$$\begin{aligned} c_m &= e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}} [S_T \mid \mathcal{F}_t] - e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}} [m_T^S \mid \mathcal{F}_t] \\ &= S_t - e^{-r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}} [m_T^S \mid \mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

ya que $\tilde{\mathbb{E}} [S_T \mid \mathcal{F}_t] = S_t e^{r(T-t)}$. Por otro lado, es posible verificar que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}} [m_T^S \mid \mathcal{F}_t] &= m_t^S \left[\Phi(d_m - \sigma \sqrt{T-t}) - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{S_t}{m_t^S} \right)^{1-\kappa} \Phi(-d_m + \kappa \sigma \sqrt{T-t}) \right] \\ &\quad + e^{r(T-t)} S_t \left(1 + \frac{1}{\kappa} \right) \Phi(-d_m), \end{aligned} \quad (40.7)$$

donde

$$\kappa = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad (40.8)$$

$$d_m = \frac{\ln(S_t/m_t^S) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \quad (40.9)$$

y $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar. En efecto, una simple aplicación del lema de Itô, tomando en cuenta el proceso (40.5), conduce a

$$d \ln(S_t) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma d\tilde{W}_t, \quad (40.10)$$

lo que, a su vez, implica

$$S_u = S_t e^{\sigma(\tilde{W}_u - \tilde{W}_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(u-t)} = S_t e^{-(Y_u - Y_t)}, \quad u > t > 0,$$

donde

$$Y_t = -\sigma \tilde{W}_t + \nu t \quad (40.11)$$

y

$$\nu = \frac{1}{2}\sigma^2 - r. \quad (40.12)$$

En consecuencia,

$$m_{t,T}^S = \min_{u \in [t,T]} S_u = S_t e^{-\mathcal{M}_{t,T}^Y},$$

donde

$$\mathcal{M}_{t,T}^Y = \max_{u \in [t,T]} Y_{u-t}. \quad (40.13)$$

Claramente, $\mathcal{M}_{t,T}^Y$ es independiente de \mathcal{F}_t , ya que $\widetilde{W}_u - \widetilde{W}_t$ es independiente de \mathcal{F}_t . Asimismo, la distribución de $\mathcal{M}_{t,T}^Y$ bajo $\widetilde{\mathbb{P}}$ coincide con la distribución de

$$\mathcal{M}_{T-t}^Y = \max_{u \in [0, T-t]} Y_u,$$

ya que $\mathcal{M}_{t,t}^Y = 0$ y $\mathcal{M}_{t,T}^Y = Y_T - Y_t = Y_{T-t}$. Además, m_T^S puede reescribirse como:

$$m_T^S = \min(m_t^S, m_{t,T}^S) = \min\left(m_t^S, S_t e^{-\mathcal{M}_{T-t}^Y}\right), \quad (40.14)$$

donde S_t y m_t^S son \mathcal{F}_t -medibles y \mathcal{M}_{T-t}^Y es independiente de la σ -álgebra \mathcal{F}_t . Observe que en la ecuación (40.14), m_T^S se ha expresado en términos de lo que se conoce hasta t , m_t^S , y lo que no se conoce justamente después de t , $m_{t,T}^S$. Observe también que $m_t^S = m_{0,t}^S$. Ahora bien, con el propósito de calcular (40.6) considere

$$\mathcal{L}_t \equiv \widetilde{\mathbb{E}}[m_T^S | \mathcal{F}_t] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\min\left(m_t^S, S_t e^{-\mathcal{M}_{T-t}^Y}\right) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Si se define $z = -\ln(m_t^S/S_t)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t - m_t^S &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\min\left(0, S_t e^{-\mathcal{M}_{T-t}^Y} - m_t^S\right) \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\left(S_t e^{-\mathcal{M}_{T-t}^Y} - m_t^S\right) 1_{\{S_t e^{-\mathcal{M}_{T-t}^Y} \leq m_t^S\}} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\left(S_t e^{-\mathcal{M}_{T-t}^Y} - m_t^S\right) 1_{\{\mathcal{M}_{T-t}^Y \geq -\ln(m_t^S/S_t)\}} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\left(S_t e^{-\mathcal{M}_{T-t}^Y} - S_t e^{-z}\right) 1_{\{\mathcal{M}_{T-t}^Y \geq z\}} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= S_t \widetilde{\mathbb{E}}\left[\left(e^{-\mathcal{M}_{T-t}^Y} - e^{-z}\right) 1_{\{\mathcal{M}_{T-t}^Y \geq z\}} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= -S_t \int_z^\infty e^{-y} \widetilde{\mathbb{P}}\{\mathcal{M}_{T-t}^Y \geq y\} dy. \end{aligned} \quad (40.15)$$

La última igualdad se justifica como sigue: observe primero que $z, a \in \mathbb{R}$, $(e^{-a} - e^{-z})1_{\{a \geq z\}} = -\int_z^\infty e^{-y} 1_{\{a \geq y\}} dy$. Si a es una variable aleatoria no negativa, se tiene entonces que $\mathbb{E}[(e^{-a} - e^{-z})1_{\{a \geq z\}}] = -\int_z^\infty e^{-y} \mathbb{P}_a\{a \geq y\} dy$. Ahora bien, dado que

$$\widetilde{\mathbb{P}}\{\mathcal{M}_{T-t}^Y \geq y\} = \widetilde{\mathbb{P}}\{Y_{T-t} \geq y\} + e^{2\nu\sigma^{-2}y} \widetilde{\mathbb{P}}\{Y_{T-t} \geq y + 2\nu(T-t)\}, \quad (40.16)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t - m_t^S &= -S_t \int_z^\infty e^{-y} \widetilde{\mathbb{P}}\{\mathcal{M}_{T-t}^Y \geq y\} dy \\ &= -S_t \int_z^\infty e^{-y} \widetilde{\mathbb{P}}\{Y_{T-t} \geq y\} dy \\ &\quad - S_t \int_z^\infty e^{-\kappa y} \widetilde{\mathbb{P}}\{Y_{T-t} \geq y + 2\nu(T-t)\} dy, \end{aligned} \quad (40.17)$$

donde, de acuerdo con (40.8), se ha utilizado el hecho de que

$$2\nu\sigma^{-2} - 1 = -2r\sigma^{-2} = -\kappa.$$

Las integrales que aparecen en (40.17) se calcularán por separado, y para tal fin se denotarán como:

$$\mathcal{L}_t^{(1)} \equiv -S_t \int_z^\infty e^{-y} \widetilde{\mathbb{P}}\{Y_{T-t} \geq y\} dy \quad (40.18)$$

y

$$\mathcal{L}_t^{(2)} \equiv -S_t \int_z^\infty e^{-\kappa y} \tilde{\mathbb{P}} \{Y_{T-t} \geq y + 2\nu(T-t)\} dy. \quad (40.19)$$

La primera integral puede expresarse, en virtud de (40.11) y (40.12), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^{(1)} &= -S_t \int_z^\infty e^{-y} \tilde{\mathbb{P}} \{Y_{T-t} \geq y\} dy \\ &= S_t \tilde{\mathbb{E}} \left[(e^{-Y_{T-t}} - e^{-z}) 1_{\{Y_{T-t} \geq z\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= S_t e^{r(T-t)} \tilde{\mathbb{E}} \left[\exp \left\{ \sigma \tilde{W}_{T-t} - \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) \right\} 1_{\{Y_{T-t} \geq z\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad - m_t^S \tilde{\mathbb{P}} \{Y_{T-t} \geq z\}. \end{aligned} \quad (40.20)$$

Por el teorema de Girsanov, existe una medida de probabilidad $\mathbb{P}^{(\sigma)}$ definida en (Ω, \mathcal{F}) tal que

$$\frac{d\mathbb{P}^{(\sigma)}(V_T^{(\sigma)})}{d\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{W}_T)} = \exp \left\{ \sigma \tilde{W}_T - \frac{1}{2} \sigma^2 T \right\}, \quad (40.21)$$

donde

$$V_t^{(\sigma)} = \tilde{W}_t - \sigma t.$$

Así, con base en (40.11), se tiene que

$$\begin{aligned} Y_{T-t} &= -\sigma \tilde{W}_{T-t} + \nu(T-t) \\ &= -\sigma \left(V_{T-t}^{(\sigma)} + \sigma(T-t) \right) + \nu(T-t) \\ &= -\sigma V_{T-t}^{(\sigma)} + (\nu - \sigma^2)(T-t) \\ &= -\sigma V_{T-t}^{(\sigma)} - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t). \end{aligned} \quad (40.22)$$

A partir de (40.20), se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^{(1)} &= S_t e^{r(T-t)} \mathbb{P}^{(\sigma)} \{Y_{T-t} \geq z\} - m_t^S \tilde{\mathbb{P}} \{Y_{T-t} \geq z\} \\ &= S_t e^{r(T-t)} \mathbb{P}^{(\sigma)} \left\{ -\sigma V_{T-t}^{(\sigma)} - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \geq -\ln(m_t^S/S_t) \right\} \\ &\quad - m_t^S \tilde{\mathbb{P}} \left\{ -\sigma \tilde{W}_{T-t} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \geq -\ln(m_t^S/S_t) \right\} \\ &= S_t e^{r(T-t)} \mathbb{P}^{(\sigma)} \left\{ \sigma V_{T-t}^{(\sigma)} \leq \ln(m_t^S/S_t) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right\} \\ &\quad - m_t^S \tilde{\mathbb{P}} \left\{ \sigma \tilde{W}_{T-t} \leq \ln(m_t^S/S_t) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right\} \\ &= S_t e^{r(T-t)} \Phi \left(\frac{\ln(m_t^S/S_t) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) \\ &\quad - m_t^S \Phi \left(\frac{\ln(m_t^S/S_t) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right). \end{aligned} \quad (40.23)$$

Ahora bien, para el caso de $\mathcal{L}_t^{(2)}$, definida anteriormente en (40.19), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^{(2)} &= -S_t \int_z^\infty e^{-\kappa y} \tilde{\mathbb{P}} \{Y_{T-t} \geq y + 2\nu(T-t)\} dy \\ &= \frac{S_t}{\kappa} \tilde{\mathbb{E}} \left[\left(e^{-\kappa(Y_{T-t}-2\nu(T-t))} - e^{-\kappa z} \right) 1_{\{Y_{T-t} \geq z+2\nu(T-t)\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{S_t}{\kappa} \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{-\kappa(Y_{T-t}-2\nu(T-t))} 1_{\{Y_{T-t} \geq z+2\nu(T-t)\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad - e^{-\kappa z} \frac{S_t}{\kappa} \tilde{\mathbb{P}} \{Y_{T-t} \geq z + 2\nu(T-t)\}. \end{aligned}$$

Asimismo, en virtud de (40.8) y (40.11), se tiene que $Y_{T-t} = -\sigma \widetilde{W}_{T-t} + \nu(T-t)$, lo cual implica

$$e^{-\kappa(Y_{T-t}-2\nu(T-t))} = e^{-2r\sigma^{-2}(Y_{T-t}-2\nu(T-t))} = e^{r(T-t)} e^{\gamma \widetilde{W}_{T-t} - \frac{1}{2}\gamma^2(T-t)},$$

donde

$$\gamma = 2r\sigma^{-1}.$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^{(2)} &= \frac{e^{r(T-t)} S_t}{\kappa} \widetilde{\mathbb{E}} \left[\exp \left\{ \gamma \widetilde{W}_{T-t} - \frac{1}{2}\gamma^2(T-t) \right\} \mathbf{1}_{\{Y_{T-t} \geq z+2\nu(T-t)\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad - e^{-\kappa z} \frac{S_t}{\kappa} \widetilde{\mathbb{P}} \left\{ \sigma \widetilde{W}_{T-t} \leq \ln(m_t^S/S_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right\}. \end{aligned}$$

En virtud, una vez más, del teorema de Girsanov, existe una medida de probabilidad $\mathbb{P}^{(\gamma)}$ definida en (Ω, \mathcal{F}) tal que

$$\frac{d\mathbb{P}^{(\gamma)}(U_T^{(\gamma)})}{d\widetilde{\mathbb{P}}(\widetilde{W}_T)} = \exp \left\{ \gamma \widetilde{W}_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T \right\}, \quad (40.24)$$

donde

$$U_t^{(\gamma)} = \widetilde{W}_t - \gamma t.$$

Además, si se procede como en (40.22), se sigue que

$$Y_{T-t} = -\sigma U_{T-t}^{(\gamma)} + (\nu - \sigma\gamma)(T-t).$$

De lo anterior, se concluye que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t^{(2)} &= \frac{e^{r(T-t)} S_t}{\kappa} \mathbb{P}^{(\gamma)} \{ Y_{T-t} \geq z + 2\nu(T-t) \} \\ &\quad - e^{-\kappa z} \frac{S_t}{\kappa} \Phi \left(\frac{\ln(m_t^S/S_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\ &= \frac{e^{r(T-t)} S_t}{\kappa} \mathbb{P}^{(\gamma)} \left\{ \sigma V_{T-t}^{(\gamma)} \leq -z - (\nu + \sigma\gamma)(T-t) \right\} \\ &\quad - e^{-\kappa z} \frac{S_t}{\kappa} \Phi \left(\frac{\ln(m_t^S/S_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\ &= \frac{e^{r(T-t)} S_t}{\kappa} \mathbb{P}^{(\gamma)} \left\{ \sigma V_{T-t}^{(\gamma)} \leq \ln(m_t^S/S_t) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right\} \\ &\quad - e^{-\kappa z} \frac{S_t}{\kappa} \Phi \left(\frac{\ln(m_t^S/S_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\ &= \frac{e^{r(T-t)} S_t}{\kappa} \Phi \left(\frac{\ln(m_t^S/S_t) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\ &\quad - e^{\kappa \ln(m_t^S/S_t)} \frac{S_t}{\kappa} \Phi \left(\frac{\ln(m_t^S/S_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right). \end{aligned} \quad (40.25)$$

Por lo tanto, a partir de (40.17), (40.23) y (40.25), se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbb{E}} [m_T^S | \mathcal{F}_t] &= m_t^S + \mathcal{L}_t \\
 &= m_t^S + \mathcal{L}_t^{(1)} + \mathcal{L}_t^{(2)} \\
 &= m_t^S + S_t e^{r(T-t)} \Phi \left(\frac{\ln(m_t^S/S_t) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\
 &\quad - m_t^S \Phi \left(\frac{\ln(m_t^S/S_t) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\
 &\quad + \frac{e^{r(T-t)} S_t}{\kappa} \Phi \left(\frac{\ln(m_t^S/S_t) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\
 &\quad - e^{\kappa \ln(m_t^S/S_t)} \frac{S_t}{\kappa} \Phi \left(\frac{\ln(m_t^S/S_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right).
 \end{aligned}$$

Si ahora se toma en cuenta la definición de d_m en (40.9) y se utiliza el hecho básico de la distribución normal acumulada:

$$\Phi(d_m - \sigma\sqrt{T-t}) = 1 - \Phi(-d_m + \sigma\sqrt{T-t}),$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbb{E}} [m_T^S | \mathcal{F}_t] &= m_t^S + e^{r(T-t)} S_t \Phi(-d_m) - m_t^S \Phi(-d_m + \sigma\sqrt{T-t}) \\
 &\quad + \frac{e^{r(T-t)} S_t}{\kappa} \Phi(-d_m) - \frac{m_t^S}{\kappa} \left(\frac{S_t}{m_t^S} \right)^{1-\kappa} \Phi(-d_m + \kappa\sigma\sqrt{T-t}) \\
 &= e^{r(T-t)} S_t \Phi(-d_m) \left(1 + \frac{1}{\kappa} \right) + m_t^S \left(1 - \Phi(-d_m + \sigma\sqrt{T-t}) \right) \\
 &\quad - \frac{m_t^S}{\kappa} \left(\frac{S_t}{m_t^S} \right)^{1-\kappa} \Phi(-d_m + \kappa\sigma\sqrt{T-t}) \\
 &= e^{r(T-t)} S_t \left(1 + \frac{1}{\kappa} \right) \Phi(-d_m) + m_t^S \Phi(d_m - \sigma\sqrt{T-t}) \\
 &\quad - \frac{m_t^S}{\kappa} \left(\frac{S_t}{m_t^S} \right)^{1-\kappa} \Phi(-d_m + \kappa\sigma\sqrt{T-t}) \\
 &= m_t^S \left[\Phi(d_m - \sigma\sqrt{T-t}) - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{S_t}{m_t^S} \right)^{1-\kappa} \Phi(-d_m + \kappa\sigma\sqrt{T-t}) \right] \\
 &\quad + e^{r(T-t)} S_t \left(1 + \frac{1}{\kappa} \right) \Phi(-d_m).
 \end{aligned} \tag{40.26}$$

En conclusión, con base en (40.6) y (40.26), el precio de una opción de compra europea con precio de ejercicio igual al valor mínimo del subyacente

$$\begin{aligned}
 c_m &= S_t - e^{-r(T-t)} m_t^S \Phi(d_m - \sigma\sqrt{T-t}) \\
 &\quad + \frac{e^{-r(T-t)} S_t}{\kappa} \left(\frac{S_t}{m_t^S} \right)^{-\kappa} \Phi(-d_m + \kappa\sigma\sqrt{T-t}) \\
 &\quad - S_t \left(1 + \frac{1}{\kappa} \right) \Phi(-d_m) \\
 &= S_t (1 - \Phi(-d_m)) - m_t^S e^{-r(T-t)} \Phi(d_m - \sigma\sqrt{T-t}) \\
 &\quad + \frac{S_t e^{-r(T-t)}}{\kappa} \left[\left(\frac{S_t}{m_t^S} \right)^{-\kappa} \Phi(-d_m + \kappa\sigma\sqrt{T-t}) - e^{r(T-t)} \Phi(-d_m) \right].
 \end{aligned}$$

Dado que $\Phi(d_m) = 1 - \Phi(-d_m)$, se tiene, finalmente, que:

$$\begin{aligned} c_m = & S_t \Phi(d_m) - m_t^S e^{-r(T-t)} \Phi\left(d_m - \sigma \sqrt{T-t}\right) \\ & + \frac{S_t e^{-r(T-t)}}{\kappa} \left[\left(\frac{S_t}{m_t^S}\right)^{-\kappa} \Phi\left(-d_m + \kappa \sigma \sqrt{T-t}\right) - e^{r(T-t)} \Phi(-d_m) \right]. \end{aligned} \quad (40.27)$$

40.4 Opción de compra sobre una acción que paga dividendos a una tasa continua con precio de ejercicio igual al mínimo precio observado del subyacente

En caso de que la acción pague dividendos a una tasa continua q . El precio del subyacente al tiempo t , S_t , es conducido por un movimiento geométrico Browniano de acuerdo con

$$dS_t = (\mu - q)S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (40.28)$$

entonces la opción de compra con el mínimo precio observado del subyacente como precio de ejercicio tiene prima

$$\begin{aligned} c_m = & S_t e^{-q(T-t)} \Phi(d_m) - m_t^S e^{-r(T-t)} \Phi\left(d_m - \sigma \sqrt{T-t}\right) \\ & + \frac{S_t e^{-r(T-t)}}{\kappa} \left[\left(\frac{S_t}{m_t^S}\right)^{-\kappa} \Phi\left(-d_m + \kappa \sigma \sqrt{T-t}\right) - e^{(r-q)(T-t)} \Phi(-d_m) \right], \end{aligned} \quad (40.29)$$

donde

$$\kappa = \frac{2(r-q)}{\sigma^2}, \quad (40.30)$$

y

$$d_m = \frac{\ln(S_t/m_t^S) + (r-q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}. \quad (40.31)$$

Observe, como siempre, que la incorporación de una tasa continua de pago de dividendos sólo tiene efectos sobre la tasa de interés.

40.5 Opciones de venta sobre una acción que paga dividendos a una tasa continua con precio de ejercicio igual al máximo precio observado del subyacente

Si se denota el precio de una opción europea de venta con el valor máximo observado del subyacente como precio de ejercicio mediante $p_M \equiv p_M(S_t, M_t^S, t)$, entonces

$$\begin{aligned} p_M = & M_t^S e^{-r(T-t)} \Phi\left(-d_M + \sigma \sqrt{T-t}\right) - S_t e^{-q(T-t)} \Phi(-d_M) \\ & + \frac{S_t e^{-r(T-t)}}{\kappa} \left[- \left(\frac{S_t}{M_t^S}\right)^{-\kappa} \Phi\left(d_M - \kappa \sigma \sqrt{T-t}\right) + e^{(r-q)(T-t)} \Phi(d_M) \right], \end{aligned} \quad (40.32)$$

donde κ se toma como en (40.8) y

$$d_M = \frac{\ln(S_t/M_t^S) + (r-q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}. \quad (40.33)$$

40.6 Relación de las fórmulas de Goldman, Sosin y Gatto con Black-Scholes

En esta sección se discute la relación que existe entre las fórmulas de Goldman, Sosin y Gatto (GSG) y la fórmula de valuación de Black-Scholes. En el caso particular de $\kappa = 1$, es decir, cuando se cumple que $r - q = \frac{1}{2}\sigma^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} c_m(S_t, m_t^S, t) &= S_t e^{-q(T-t)} \Phi(d_m) - m_t^S e^{-r(T-t)} \Phi(d_m - \sigma\sqrt{T-t}) \\ &\quad + m_t^S e^{-r(T-t)} \Phi(-d_m + \sigma\sqrt{T-t}) - S_t e^{-q(T-t)} \Phi(-d_m) \\ &= c_{\text{BS}}(S_t, t; m_t^S) + p_{\text{BS}}(S_t, t; m_t^S), \end{aligned} \quad (40.34)$$

donde d_m se toma como en (40.31). El subíndice BS se refiere a la solución estándar de Black-Scholes del precio de una opción europea de compra con precio de ejercicio m_t^S . Similarmente, con $\kappa = 1$,

$$\begin{aligned} p_M(S_t, M_t^S, t) &= M_t^S e^{-r(T-t)} \Phi(-d_M + \sigma\sqrt{T-t}) - S_t e^{-q(T-t)} \Phi(-d_M) \\ &\quad + S_t e^{-q(T-t)} \Phi(d_M) - M_t^S e^{-r(T-t)} \Phi(d_M - \sigma\sqrt{T-t}) \\ &= p_{\text{BS}}(S_t, t; M_t^S) + c_{\text{BS}}(S_t, t; M_t^S), \end{aligned} \quad (40.35)$$

donde d_M se toma como en (40.31), pero en lugar de m_t^S se escribe M_t^S .

40.7 Ecuación diferencial parcial de una opción de compra europea con precio de ejercicio flotante e igual al mínimo precio observado del subyacente

Al igual que en la sección anterior, en el transcurso de la presente sección se supone $\kappa = 1$. Si se define un operador \mathcal{L}_{BS} como

$$\mathcal{L}_{\text{BS}}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S_t^2}(\cdot) + (r - q)S_t \frac{\partial}{\partial S_t}(\cdot) - rI(\cdot),$$

donde $I(x) \equiv x$, se tiene, evidentemente, que

$$\mathcal{L}_{\text{BS}}(c_{\text{BS}}(S_t, t; m_t^S)) = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_{\text{BS}}(p_{\text{BS}}(S_t, t; m_t^S)) = 0.$$

En virtud de la linealidad del operador \mathcal{L}_{BS} , se cumple que

$$\mathcal{L}_{\text{BS}}(c_m(S_t, m_t^S, t)) = \mathcal{L}_{\text{BS}}(c_{\text{BS}}(S_t, t; m_t^S)) + \mathcal{L}_{\text{BS}}(p_{\text{BS}}(S_t, t; m_t^S)) = 0.$$

Es decir,

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_m}{\partial S_t^2} + (r - q)S_t \frac{\partial c_m}{\partial S_t} - rc_m = 0. \quad (40.36)$$

Asimismo, las condiciones de frontera satisfacen

$$c_{\text{BS}}(S_t, t; m_t^S) = \max(S_t - m_t^S, 0) = S_t - m_t^S$$

y

$$p_{\text{BS}}(S_t, t; m_t^S) = \max(m_t^S - S_t, 0) = 0.$$

De esta manera,

$$c_m(S_t, m_t^S, t) = c_{\text{BS}}(S_t, t; m_t^S) + p_{\text{BS}}(S_t, t; m_t^S) = S_t - m_t^S. \quad (40.37)$$

40.8 Caracterización de una opción de compra americana con precio de ejercicio flotante e igual al mínimo precio observado del subyacente

Cuando la opción de compra con precio de ejercicio flotante dependiente del valor mínimo del subyacente es americana, en ocasiones puede ser óptimo ejercer antes del vencimiento. Suponga, como en las dos secciones anteriores que $\kappa = 1$. En este caso, el rendimiento de un portafolio combinado del subyacente y la opción de compra no puede exceder el rendimiento de un depósito bancario, igual al valor del portafolio, con tasa libre de riesgo, r . Es decir,

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_m}{\partial S_t^2} \leq r \left(c_m - S_t \frac{\partial c_m}{\partial S_t} \right). \quad (40.38)$$

40.9 Bibliografía sugerida

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Goldman, M. B., H. B. Sosin, and M. A. Gatto (1979). "Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High". *The Journal of Finance*, Vol. 34, No. 5, pp. 1111-1127.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Una guía completa para economistas en la valuación de opciones". *Gaceta de Economía*, Año 6, No. 12, pp. 155-212.

40.10 Ejercicios

- 40.1** Denote el precio de una opción europea de venta con el máximo precio observado del subyacente como precio de ejercicio mediante $p_M \equiv p_M(S_t, M_t^S, t)$. Muestre que

$$p_M = M_t^S e^{-r(T-t)} \Phi \left(-d_M + \sigma \sqrt{T-t} \right) - S_t e^{-q(T-t)} \Phi(-d_M) \\ + \frac{S_t e^{-r(T-t)}}{\kappa} \left[- \left(\frac{S_t}{M_t^S} \right)^{-\kappa} \Phi \left(d_M - \kappa \sigma \sqrt{T-t} \right) + e^{(r-q)(T-t)} \Phi(d_M) \right],$$

donde

$$d_M = \frac{\ln(S_t/M_t^S) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

y

$$\kappa = \frac{2(r-q)}{\sigma^2}.$$

- 40.2** Si a es una variable aleatoria no negativa, demuestre que

$$E[(e^{-a} - e^{-z})1_{\{a \geq z\}}] = - \int_z^\infty e^{-y} \mathbb{P}_a\{a \geq y\} dy.$$

- 40.3** Considere una opción americana de compra con precio de ejercicio flotante dependiente del valor mínimo del subyacente. Suponga que $\kappa = 1$ y que el activo subyacente es una acción que paga dividendos de manera continua a una tasa q . Muestre que el precio de la opción satisface

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c_m}{\partial S_t^2} - q S_t \frac{\partial c_m}{\partial S_t} \leq r \left(c_m - S_t \frac{\partial c_m}{\partial S_t} \right).$$

CAPÍTULO 41

OPCIONES SOBRE EL MÁXIMO Y MÍNIMO PRECIO OBSERVADO DEL SUBYACENTE CON PRECIO DE EJERCICIO FIJO (OPCIONES LOOKBACK II): MODELO DE CONZE Y VISWANATHAN

Conceptos básicos de este capítulo:

- Opción de compra sobre el máximo precio observado con precio de ejercicio fijo
- Opción de venta sobre el mínimo precio observado con precio de ejercicio fijo
- Máximo y mínimo de un movimiento Browniano

41.1 Introducción

Las opciones europeas sobre el máximo o mínimo precio observado de un título de capital (o un índice bursátil) con precio de ejercicio fijo fueron estudiadas, por primera vez, en el trabajo de Conze y Viswanathan (1991). Este tipo de opciones se negocian fundamentalmente sobre divisas, títulos de capital e índices bursátiles.

En el presente capítulo, bajo el supuesto de que el activo subyacente sigue un movimiento geométrico Browniano, se establecen varias fórmulas cerradas para valuar opciones sobre el máximo y el mínimo precio observado del activo subyacente cuando el precio de ejercicio es fijo.

41.2 Opciones sobre el máximo o mínimo precio observado del subyacente con precio de ejercicio fijo

En el transcurso de este capítulo se empleará la notación siguiente:

t : tiempo en el que se emiten todas las opciones;

t : fecha actual (hoy);

T : fecha de vencimiento de las opciones; y

$T - t$: periodo de vida que les resta a las opciones.

Una opción de compra sobre el máximo precio observado del activo subyacente con un precio de ejercicio fijo (predeterminado) paga en la fecha de vencimiento la diferencia entre

$$M_T^S = \max_{u \in [0, T]} S_u \quad (41.1)$$

y el precio de ejercicio K siempre y cuando dicha diferencia sea positiva; en caso contrario el pago es cero. Es decir, el pago de este tipo de opción, en la fecha de vencimiento, está dado por:

$$\max(M_T^S - K, 0). \quad (41.2)$$

Similarmente, una opción de venta sobre el mínimo precio observado del activo subyacente con un precio de ejercicio fijo (predeterminado) paga en la fecha de vencimiento la diferencia entre el precio de ejercicio K y

$$m_T^S = \min_{u \in [0, T]} S_u \quad (41.3)$$

siempre y cuando dicha diferencia sea positiva. Así, el pago de esta opción, en la fecha de vencimiento, satisface

$$\max(K - m_T^S, 0). \quad (41.4)$$

41.3 Opciones de compra sobre el máximo precio observado del subyacente con precio de ejercicio fijo

En el caso de una opción de compra sobre el máximo precio observado del subyacente con precio de ejercicio fijo, K , se puede utilizar la siguiente aproximación cuando $K > M_t^S$

$$\begin{aligned} c(t, S_t, M_t^S) = & S_t e^{-q(T-t)} \Phi(d_M) - K B(t, T) \Phi\left(d_M - \sigma \sqrt{T-t}\right) \\ & - \frac{S_t B(t, T)}{\gamma} \left[- \left(\frac{S_t}{K}\right)^\gamma \Phi\left(d_M + \gamma \sigma \sqrt{T-t}\right) \right. \\ & \left. + \exp\{(r-q)(T-t)\} \Phi(d_M) \right], \end{aligned} \quad (41.5)$$

donde $B(t, T) = e^{-r(T-t)}$,

$$\gamma = \frac{2(q-r)}{\sigma^2} \quad (41.6)$$

y

$$d_M = \frac{\ln(S_t/K) + [r - q + (\sigma^2/2)](T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}. \quad (41.7)$$

En caso de que $K \leq M_t^S$, se utiliza

$$\begin{aligned} c(t, S_t, M_t^S) = & B(t, T)(M_t^S - K) + S_t e^{-q(T-t)} \Phi(d_M) \\ & - M_t^S B(t, T) \Phi\left(d_M - \sigma \sqrt{T-t}\right) \\ & - \frac{S_t B(t, T)}{\gamma} \left[- \left(\frac{S_t}{M_t^S}\right)^\gamma \Phi\left(d_M + \gamma \sigma \sqrt{T-t}\right) \right. \\ & \left. + \exp\{(r-q)(T-t)\} \Phi(d_M) \right], \end{aligned} \quad (41.8)$$

donde d_M se define como en (41.7), excepto que en lugar de K se escribe M_t^S .

41.4 Opciones de venta sobre el mínimo precio observado del subyacente con precio de ejercicio fijo

Para valuar una opción de venta sobre el mínimo precio observado del subyacente con precio de ejercicio fijo cuando $K < m_t^S$, se utiliza la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} p(t, S_t, m_t^S) = & K B(t, T) \Phi\left(-d_m + \sigma \sqrt{T-t}\right) - S_t e^{-q(T-t)} \Phi(-d_m) \\ & - \frac{S_t B(t, T)}{\gamma} \left[\left(\frac{S_t}{K}\right)^\gamma \Phi\left(-d_m - \gamma \sigma \sqrt{T-t}\right) \right. \\ & \left. - \exp\{(r-q)(T-t)\} \Phi(-d_m) \right], \end{aligned} \quad (41.9)$$

donde

$$d_m = \frac{\ln(S_t/K) + [r - q + (\sigma^2/2)](T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}. \quad (41.10)$$

Si $K \geq m_t^S$, entonces se utiliza

$$\begin{aligned} p(t, S_t, m_t^S) = & B(t, T)(K - m_t^S) - S_t e^{-q(T-t)} \Phi(-d_m) \\ & + m_t^S B(t, T) \Phi\left(-d_m + \sigma \sqrt{T-t}\right) \\ & - \frac{S_t B(t, T)}{\gamma} \left[\left(\frac{S_t}{m_t^S} \right)^\gamma \Phi\left(-d_m - \gamma \sigma \sqrt{T-t}\right) \right. \\ & \left. - \exp\{(r-q)(T-t)\} \Phi(-d_m) \right], \end{aligned} \quad (41.11)$$

donde d_m es tomada como en (41.10), excepto que en lugar de K se escribe m_t^S .

41.5 Bibliografía sugerida

- Conze, A. and Viswanathan (1991). "Path Dependent Options: The Case of Lookback Options". *The Journal of Finance*, Vol. 46, No. 5, pp. 1893-1907.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Una guía completa para economistas en la valuación de opciones". *Gaceta de Economía*, Año 6, No. 12, pp. 155-212.

41.6 Ejercicios

41.1 Considere el precio de una opción de compra, $c(t, S_t, M_t^S)$, sobre el máximo precio observado del subyacente con precio de ejercicio fijo, K . Deduzca la fórmula de valuación para el caso $K > M_t^S$.

41.2 Repita el ejercicio anterior para el caso $K \leq M_t^S$.

41.3 Considere el precio de una opción europea de venta, $p(t, S_t, m_t^S)$, sobre el mínimo precio observado del subyacente con precio de ejercicio fijo, K . Obtenga la fórmula de valuación para el caso $K \geq m_t^S$.

41.4 Repita el ejercicio anterior para el caso $K < m_t^S$.

CAPÍTULO 42

OPCIONES CON BARRERAS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Opciones europeas con barrera
- Ecuación de calor
- Relación entre opciones con barreras y la fórmula de valuación de Black-Scholes

42.1 Introducción

Este capítulo se concentra en el estudio de las opciones europeas con barreras y proporciona fórmulas explícitas de valuación. Es importante destacar que en 1973, Robert Merton en el artículo de “Theory of Rational Option Pricing” publicado en el “Bell Journal of Economics and Management Science” estudia y evalúa, por primera vez, este tipo de opciones.

Las opciones con barreras son principalmente negociadas en los mercados OTC. Este tipo de opciones se han convertido en instrumentos muy populares y ciertamente entre las llamadas opciones exóticas son las más negociadas. Asimismo, el CBOE (Chicago Board Options Exchange) y la AOE (American Options Exchange) tienen listadas opciones de compra up-and-out y de venta down-and-out sobre índices accionarios en un mercado muy activo.

42.2 Tipos básicos de opciones con barreras

Los cuatro tipos de opciones europeas con barreras que más se negocian en los mercados listados y sobre mostrador son:

- (i) “down and out”,
- (ii) “down and in”,
- (iii) “up and out”,
- (iv) “up and in”.

El término “out” en una opción significa que ésta pierde su vigencia cuando el precio del activo subyacente alcanza un nivel preestablecido B , mientras que el término “in” significa que la opción cobra vigencia cuando el precio del subyacente alcanza un nivel preestablecido B . La cantidad B es llamada la barrera de la opción. Por otro lado, el término “down” en una opción significa que el precio del activo subyacente cae por debajo de un nivel preestablecido B , mientras que el término “up” significa que el precio del subyacente excede un nivel preestablecido B . Así, por ejemplo, en una opción europea de compra del tipo “down and out”, ésta pierde su valor cuando el precio del subyacente cae por debajo de un nivel preestablecido B , mientras que en una opción “up and out” ésta pierde su valor justo en el momento en que el precio de subyacente excede al nivel B . Los otros dos tipos de opciones “down and in” y “up and in”, justo en el momento en que cruzan el nivel B , ya sea debajo o por arriba, se convierten en opciones europeas de compra.

42.3 Opción europea de compra del tipo “down and out”

Si en una opción europea de compra del tipo “down and out” el precio del activo subyacente, S_t , permanece por arriba de su barrera, B , es decir, $S_t > B$ en $0 \leq t \leq T$, entonces la opción tiene un valor intrínseco igual a $\max(S_T - K, 0)$ y en este caso, el precio de la opción satisface la ecuación diferencial parcial parabólica de segundo orden de Black-Scholes. Sin embargo, si para algún $t' \in (0, T]$, la barrera se activa, es decir, $S_{t'} = B$, entonces el precio de la opción es cero. Bajo supuestos típicos, es posible encontrar una fórmula explícita para el valor de una opción

europea de compra del tipo “down and out”. Por el momento, se examina el caso $K \geq B$, es decir, el precio de ejercicio excede a la barrera.

En lo que sigue, se denotará el precio de una opción europea de compra del tipo “down and out” por $c_{DO}(S_t, t)$. Para el desarrollo del presente capítulo, el activo subyacente puede pensarse como una acción que no paga dividendos. Mientras S_t sea mayor que B , el valor de la opción $c_{DO}(S_t, t)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial c_{DO}}{\partial t} + \frac{\partial c_{DO}}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_{DO}}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 - r c_{DO} = 0$$

con condición final

$$c_{DO}(S_t, T) = \max(S_t - K, 0).$$

Sin embargo, si S_t alcanza a B , entonces la opción pierde su valor, por lo cual

$$c_{DO}(B, t) = 0.$$

Para encontrar $c_{DO}(S_t, t)$ que resuelva el planteamiento anterior, se utiliza, primero, el siguiente cambio de variable:

$$S = K e^x, \quad t = \frac{T - \tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad \text{y} \quad c_{DO} = K e^{\alpha x + \beta \tau} v(x, \tau)$$

con

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k - 1), \quad \beta = -\frac{1}{4}(k + 1)^2 \quad \text{y} \quad \kappa = \frac{2r}{\sigma^2}. \quad (42.1)$$

De esta manera, la barrera se transforma en

$$x_0 = \ln\left(\frac{B}{K}\right)$$

y el problema de valuar una opción de compra del tipo “down and out” se transforma en

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad x_0 \leq x \leq \infty, \quad \tau \geq 0, \quad (42.2)$$

con

$$v_0(x) \equiv v(x, 0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right), \quad x_0 \leq x \leq \infty$$

y

$$v_0(x_0) = 0. \quad (42.3)$$

Esta última condición, que se añade a la ecuación de calor dada en (42.2), puede tratarse a través del método de imágenes. La interpretación ahora es que el calor se difunde en una barra semi-infinita con temperatura cero en el punto $x = \ln(B/K)$.

La difusión del calor en una barra es independiente del sistema de coordenadas que se elija para su estudio. Por lo tanto, la ecuación (42.3) es invariante bajo traslaciones, de x a $x + x_0$, o reflexiones, de x a $-x$. En consecuencia, si $v(x, \tau)$ es una solución de (42.1), entonces $v(x + x_0, \tau)$ y $v(-x + x_0, \tau)$ son también soluciones para cualquier constante x_0 . Se verá ahora cómo se resuelve un problema de difusión de calor en una barra semi-infinita con el método de imágenes mediante los siguientes pasos. Primero, se resuelve el problema para una barra infinita hecha de dos barras semi-infinitas con distribuciones iniciales de temperaturas opuestas, pero de la misma magnitud, es decir, media barra es caliente y media barra es fría. De esta manera, la temperatura en el punto de unión de las barras es cero. Se reflejan los valores iniciales, $x \geq x_0$, en el punto $x = \ln(B/K)$. Al mismo tiempo, con la reflexión se están cambiando los signos lo que garantiza (42.3). Por lo anterior, tenemos que, en lugar de resolver con (42.2) y (42.3) en el intervalo $x_0 \leq x < \infty$ se resuelve (42.2) para todo x sujeto a:

$$u(x, 0) = v_0(x) - v_0(2x_0 - x) \quad -\infty < x < \infty. \quad (42.4)$$

En efecto, por el método de imágenes, se tiene que:

$$\begin{aligned} v_0(-x) &= v_0(-(x - x_0)) \\ &= v_0(-x + x_0). \end{aligned}$$

En la segunda igualdad se ha utilizado una primera traslación de x a $x - x_0$. Si además se hace otra traslación de x a $x - x_0$, se tiene que

$$v_0(-x) = v_0(-(x - x_0) + x_0) = v_0(2x_0 - x)$$

también es solución. En conclusión, se obtiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= v_0(x) - v_0(-x) \\ &= v_0(x) - v_0(2x_0 - x). \end{aligned}$$

Esto es,

$$u(x, 0) = \begin{cases} \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right) = u_0(x) & \text{si } x \geq x_0, \\ -\max\left(e^{(k+1)(x_0 - \frac{1}{2}x)} - e^{(k-1)(x_0 - \frac{1}{2}x)}, 0\right) & \text{si } x < x_0. \end{cases} \quad (42.6)$$

Evidentemente, $u(x_0, 0) = 0$. De esta forma, $u(x, \tau)$ satisface

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty \leq x \leq \infty, \quad \tau \geq 0, \quad (42.7)$$

con

$$u_0(x) \equiv u(x, 0) \quad (42.8)$$

y

$$u_0(x_0) = 0, \quad (42.9)$$

la cual es una ecuación típica de calor y su solución está dada por:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-(s-x)^2/4\tau} ds \quad (42.10)$$

y

$$c_{D0}(S_t, t) = K e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau),$$

donde α, β se toman como en (42.1). Se realiza a continuación el siguiente cambio de variable:

$$y = \frac{s - x}{\sqrt{2\tau}} \Rightarrow x = s - y\sqrt{2\tau},$$

esto implica que

$$ds = \sqrt{2\tau} dy.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(s) e^{-\frac{(s-x)^2}{4\tau}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau}y) e^{-y^2/2} dy. \end{aligned}$$

Si se sustituye el valor de $u_0(x + \sqrt{2\tau}y)$ dado en (42.6), se tiene:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[- \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} \max\left(e^{(k+1)(x_0 - \frac{1}{2}(x + \sqrt{2\tau}y))} - e^{(k-1)(x_0 - \frac{1}{2}(x + \sqrt{2\tau}y))}, 0\right) e^{-y^2/2} dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)(x + \sqrt{2\tau}y)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x + \sqrt{2\tau}y)}, 0\right) e^{-y^2/2} dy \right]. \end{aligned} \quad (42.11)$$

Ahora bien, dado que $y < (2x_0 - x)/\sqrt{2\tau}$ para la primer integral y $y > -x/\sqrt{2\tau}$ para la segunda, la ecuación (42.11) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(- \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k+1)(x_0 - \frac{1}{2}(x + \sqrt{2\tau}y))} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right. \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k-1)(x_0 - \frac{1}{2}(x + \sqrt{2\tau}y))} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &\quad + \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x + \sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &\quad \left. - \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x + \sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right) \\ &= -\Theta(k+1) + \Theta(k-1) + \Psi(k+1) - \Psi(k-1), \end{aligned}$$

donde las funciones Ψ y Θ se definen, respectivamente, como:

$$\Theta(k+1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k+1)(x_0 - \frac{1}{2}(x + \sqrt{2\tau}y))} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \quad (42.12)$$

y

$$\Psi(k+1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x + \sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy. \quad (42.13)$$

La integral Θ se resuelve a continuación:

$$\begin{aligned} \Theta(k+1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k+1)(x_0 - \frac{1}{2}(x + \sqrt{2\tau}y))} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k+1)x_0 - \frac{1}{2}(k+1)x - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}y - \frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{(k+1)x_0 - \frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(y^2 + (k+1)\sqrt{2\tau}y + \frac{1}{2}((k+1)\sqrt{2\tau})^2)} dy \\ &= \frac{e^{(k+1)x_0 - \frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{1}{2}[y + \frac{1}{2}((k+1)\sqrt{2\tau})]^2} dy. \end{aligned} \quad (42.14)$$

Se define ahora otro cambio de variable

$$\epsilon = y + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau},$$

se tiene que $d\epsilon = dy$. Observe ahora que cuando $y = (2x_0 - x)/\sqrt{2\tau}$, entonces

$$\epsilon = \frac{2x_0 - x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} = \frac{2x_0 - x + (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}.$$

Después de sustituir la ecuación anterior en (42.14), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \Theta(k+1) &= e^{(k+1)x_0 - \frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{2x_0-x+(k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\ &= e^{(k+1)x_0 - \frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{-\infty < \epsilon < \frac{2x_0-x+(k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon. \end{aligned} \quad (42.15)$$

Si se define

$$d_1 = \frac{2x_0 - x + (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

y

$$\Phi(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon,$$

se tiene, finalmente, que

$$\Theta(k+1) = e^{(k+1)x_0 - \frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(d_1). \quad (42.16)$$

Al seguir el mismo procedimiento para $\Theta(k-1)$, se obtiene que

$$d_2 = \frac{2x_0 - x + (k-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}. \quad (42.17)$$

Consecuentemente,

$$\Theta(k-1) = e^{(k-1)x_0 - \frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \Phi(d_2). \quad (42.18)$$

La integral $\Psi(k+1)$ se calcula como sigue

$$\begin{aligned} \Psi(k+1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+\sqrt{2\tau}y)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{-\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - (k+1)\sqrt{2\tau}y)} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - (k+1)\sqrt{2\tau}y + \frac{1}{2}(k+1)^2\tau)} dy \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dy. \end{aligned} \quad (42.19)$$

Consideré el cambio de variable

$$\epsilon = y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau},$$

se tiene entonces que $d\epsilon = dy$. Observe que cuando $y = -x/\sqrt{2\tau}$, se sigue que

$$\epsilon = -\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} = \frac{-x - (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}. \quad (42.20)$$

Si se sustituye el cambio de variable (42.20) en (42.19) se tiene que:

$$\begin{aligned} \Psi(k+1) &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - (k+1)\sqrt{2\tau})^2} dy \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \int_{\{\epsilon > -\frac{x+(k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \int_{\{-\infty < \epsilon < \frac{x+(k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon. \end{aligned}$$

Si ahora se define

$$b_1 = \frac{x + (k+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

y

$$\Phi(b_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b_1} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon,$$

se obtiene:

$$\Psi(k+1) = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(b_1). \quad (42.21)$$

Al seguir el mismo procedimiento para $\Psi(k-1)$, se tiene que:

$$b_2 = \frac{x + (k-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}$$

y

$$\Psi(k-1) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \Phi(b_2). \quad (42.22)$$

En vista del cambio de variable,

$$x = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right), \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \quad \kappa = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad \text{y} \quad x_0 = \ln\left(\frac{B}{K}\right).$$

Se concluye que:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{B^2}{S_t K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{B^2}{S_t K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}},$$

$$b_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$b_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= -\Theta(k+1) + \Theta(k-1) + \Psi(k+1) - \Psi(k-1) \\ &= -e^{(k+1)x_0 - \frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(d_1) + e^{(k-1)x_0 - \frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \Phi(d_2) \\ &\quad + e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(b_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \Phi(b_2). \end{aligned} \quad (42.23)$$

Así, el valor de la opción con barrera se calcula como

$$c_{\text{DO}}(S_t, t) = K e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau). \quad (42.24)$$

es decir,

$$\begin{aligned}
c_{DO}(S_t, t) &= K e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \\
&\quad \left(-e^{(k+1)x_0 - \frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(d_1) \right. \\
&\quad + e^{(k-1)x_0 - \frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \Phi(d_2) \\
&\quad \left. + e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \Phi(b_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} \Phi(b_2) \right) \\
&= -K e^{x_0(k+1)-kx} \Phi(d_1) + K e^{(k-1)x_0-(k-1)x-k\tau} \Phi(d_2) \\
&\quad + \left(K e^x \Phi(b_1) - K e^{k\tau} \Phi(b_2) \right) \\
&= -\left(\frac{B}{S_t}\right)^k B \Phi(d_1) + K \left(\frac{B}{S_t}\right)^{(k-1)} e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\
&\quad + c_{BS}(S_t, t) \\
&= c_{BS}(S_t, t) - \left(\frac{B}{S_t}\right)^{(k-1)} \left(\frac{B^2}{S_t} \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \right) \\
&= c_{BS}(S_t, t) - \left(\frac{S_t}{B}\right)^{-(k-1)} \left(\frac{B^2}{S_t} \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \right) \\
&= c_{BS}(S_t, t) - \left(\frac{S_t}{B}\right)^{-(k-1)} c_{BS}(B^2/S_t, t).
\end{aligned} \tag{42.25}$$

Observe, por último, que si $S_t = B$, entonces

$$c_{DO}(B, t) = c_{BS}(B, t) - c_{BS}(B, t) = 0. \tag{42.26}$$

42.4 Bibliografía sugerida

- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economic and Management Science*. Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.
- Musiela, M. and M. Rutkowski (1997). Martingale Methods in Financial Modelling (Stochastic Modelling and Applied Probability). Springer-Verlag; Berlin, Heidelberg, New York.
- Wilmott, P., Howison, S. and J. Dewynne (1995). The Mathematics of Financial Derivatives (A Student Introduction). Cambridge University Press.

42.5 Ejercicios

42.1 Discuta el caso de las opciones del tipo "knock-in".

42.2 Obtenga la ecuación (42.26) utilizando el enfoque probabilista y el teorema de Girsanov.

Solución: El valor del c_{DO} , para toda $t \in [0, T]$, está dado por:

$$\begin{aligned}
c_{DO} &= e^{-rT} \mathbb{E} [\max(S_T - K, 0)] \mathbb{1}_{\{S_t > B\}} \\
&= e^{-rT} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{(S_T > K) \cap (S_t > B)\}} S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right\} \right] \\
&\quad - K e^{-rT} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{(S_T > K) \cap (S_t > B)\}} \right].
\end{aligned}$$

Observe primero que mediante el teorema de Girsanov se cambia la medida de probabilidad para el primer término, de modo que:

$$\begin{aligned}
c_{DO} &= S_0 \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{(S_T > K) \cap (S_t > B)\}} \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right\} \right] \\
&\quad - K e^{-rT} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{S_T > K \cap S_t > B\}}] \\
&= S_0 \tilde{\mathbb{P}} \{(S_T > K) \cap (S_t > B)\} - K e^{-rT} \mathbb{P} \{(S_T > K) \cap (S_t > B)\}.
\end{aligned}$$

Al aplicar el lema de Itô a la variable $x_t = \ln(S_t/S_0)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \\ &= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

en la medida de probabilidad original y

$$d\tilde{x}_t = \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma d\tilde{W}_t$$

en la medida de probabilidad equivalente. Adicionalmente, si se calculan los valores de referencia de las desigualdades en las funciones indicadoras se satisface que:

$$x_b = \ln \frac{B}{S_0} \quad \text{y} \quad x_k = \ln \frac{K}{S_0}.$$

Se define ahora (independientemente del espacio de probabilidad) el valor mínimo observado del proceso x_t durante $[0, t]$ como:

$$m_t^x = \min x_s, \quad \text{para toda } s \in [0, t].$$

En el caso particular de que $K < B$, es decir, $x_k < x_b$, se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{(S_T > K) \cap (S_t > B)\} &= \mathbb{P}\{(x_T > x_k) \cap (m_T^x > x_b)\} \\ &= \mathbb{P}\{m_T^x > x_b\}. \end{aligned}$$

Se puede verificar fácilmente que

$$\mathbb{P}\{m_T^x > x_b\} = \Phi \left(\frac{\nu T - x_b}{\sigma \sqrt{T}} \right) - \exp \left\{ \frac{2\nu}{\sigma^2} x_b \right\} \Phi \left(\frac{x_b + \nu T}{\sigma \sqrt{T}} \right),$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar y ν es la tendencia del movimiento Browniano que corresponda a la medida de probabilidad en cuestión. Si se definen

$$\nu_k \equiv \nu = r - \frac{1}{2}\sigma^2 \quad \text{y} \quad \nu_s \equiv \tilde{\nu} = r + \frac{1}{2}\sigma^2.$$

y se combinan los resultados anteriores, se tiene que cuando $K < B$, se cumple que

$$\begin{aligned} c_{DO} &= S_0 \Phi \left(\frac{\ln(S_0/B) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - K e^{-rT} \Phi \left(\frac{\ln(S_0/B) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\ &\quad - S_0 \left(\frac{B}{S_0} \right)^{(2r+\sigma^2)/\sigma^2} \Phi \left(\frac{\ln(B/S_0) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\ &\quad + K e^{-rT} \left(\frac{B}{S_0} \right)^{(2r-\sigma^2)/\sigma^2} \Phi \left(\frac{\ln(B/S_0) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma \sqrt{T}} \right). \end{aligned}$$

Por otro lado, cuando $K > B$, se tiene que

$$\mathbb{P}\{(S_T > K) \cap (S_t > B)\} = \Phi \left(\frac{\nu T - x_k}{\sigma \sqrt{T}} \right) - \exp \left\{ \frac{2\nu}{\sigma^2} x_b \right\} \Phi \left(\frac{2x_b - x_k + \nu T}{\sigma \sqrt{T}} \right).$$

Por lo anterior, se concluye que

$$\begin{aligned} c_{DO} &= S_0 \Phi \left(\frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - Ke^{-rT} \Phi \left(\frac{\ln(S_0/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\ &\quad - S_0 \left(\frac{B}{S_0} \right)^{(2r+\sigma^2)/\sigma^2} \Phi \left(\frac{\ln(B^2/S_0K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\ &\quad - Ke^{-rT} \left(\frac{B}{S_0} \right)^{(2r-\sigma^2)/\sigma^2} \Phi \left(\frac{\ln(B^2/S_0K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right). \end{aligned}$$

42.3 Con el propósito de obtener fórmulas de valuación de las diferentes opciones con barrera en forma sistemática, se definen las siguientes cantidades:

$$A_i(\gamma) = \gamma S_t e^{-q(T-t)} \Phi(\gamma X_i) - \gamma K P(t, T) \Phi(\gamma X_i - \gamma \sigma \sqrt{T-t}), \quad i = K, H,$$

$$\begin{aligned} B_i(\gamma, \eta) &= \gamma S_t e^{-q(T-t)} (H/S_t)^{2(1+\mu)} \Phi(\eta y_i) \\ &\quad - \gamma K P(t, T) (H/S_t)^{2\mu} \Phi(\eta y_i - \eta \sigma \sqrt{T-t}), \quad i = K, H, \end{aligned}$$

$$E(\eta) = M \left[B(t, T) \Phi(\eta x_H - \eta \sigma \sqrt{T-t}) - (H/S_t)^{2\mu} \Phi(\eta y_H - \eta \sigma \sqrt{T-t}) \right]$$

y

$$F(\eta) = M \left[(H/S_t)^{\mu+\lambda} \Phi(\eta z) - (H/S_t)^{\mu-\lambda} \Phi(\eta z - 2\eta \lambda \sigma \sigma \sqrt{T-t}) \right],$$

donde

$$x_K = \frac{\ln(S_t/K)}{\sigma\sqrt{T-t}} + (1+\mu)\sigma\sqrt{T-t},$$

$$x_H = \frac{\ln(H/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + (1+\mu)\sigma\sqrt{T-t},$$

$$y_K = \frac{\ln(H^2/S_t K)}{\sigma\sqrt{T-t}} + (1+\mu)\sigma\sqrt{T-t},$$

$$y_H = \frac{\ln(H/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + (1+\mu)\sigma\sqrt{T-t},$$

$$z = \frac{\ln(H/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \lambda\sigma\sqrt{T-t},$$

$$\mu = -\frac{\ln[B(t, T)] + q + (\sigma^2/2)}{\sigma^2}$$

y

$$\lambda = \sqrt{\mu^2 - (2\ln[P(t, T)]/\sigma^2)}.$$

Como ya se sabe, las opciones “out” son similares a la opciones estándar europeas, excepto que la opción pierde vigencia y, por lo tanto, su valor cuando S_t alcanza la barrera H antes de la fecha de vencimiento. El pago de una opción de compra del tipo “down-and-out” es $\max(S_t - K, 0)$ siempre y cuando S_t nunca caiga por debajo (siempre permanezca por arriba) de la barrera H durante la vida de la opción. En el momento en que S_t alcanza la barrera H , la opción pierde su vigencia y por lo tanto su valor. En algunas ocasiones, se especifica de antemano una cantidad adicional a pagar, M , si la opción no alcanza la barrera durante su periodo de vida. Muestre que las fórmulas de valuación para un call del tipo “down-and-out”, siempre y cuando $S_t > H$ con un pago en efectivo, M están dadas por:

$$c(\text{down-and-out}, K > H) = A_K(1) - B_K(1, 1) + F(1)$$

y

$$c(\text{down-and-out}, K < H) = A_H(1) - B_H(1, 1) + F(1).$$

Similarmente, el pago de una opción de compra del tipo “up-and-out” es $\max(S_t - K, 0)$ siempre y cuando S_t nunca exceda a H en el tiempo de vida de la opción. En caso de que S_t alcance a H , la opción deja de tener valor. Muestre que los precios de este tipo de opciones están dados por

$$c(\text{up-and-out}, K > H) = F(-1)$$

y

$$c(\text{up-and-out}, K < H) = A_K(1) - A_H(1) + B_K(1, -1) - B_H(1, -1) + F(-1).$$

Asimismo, el pago de una opción de venta del tipo “down-and-out” es $\max(K - S_t, 0)$ siempre y cuando S_t nunca caiga por debajo de H en el tiempo de vida de la opción. Si S_t alcanza a H , entonces la opción pierde todo valor. Muestre que en este caso

$$p(\text{down-and-out}, K > H) = A_K(-1) - A_H(-1) + B_K(-1, 1) - B_H(-1, 1) + F(1)$$

y

$$p(\text{down-and-out}, K < H) = F(1).$$

De la misma manera, el pago de una opción de venta del tipo “up-and-out” es $\max(K - S_t, 0)$ siempre y cuando S_t no exceda a H durante la vida de la opción. En el momento en que S_t alcance a H , la opción pierde vigencia. Pruebe que

$$p(\text{up-and-out}, K > H) = A_H(-1) - B_H(-1, -1) + F(-1)$$

y

$$p(\text{up-and-out}, K < H) = A_K(-1) - B_K(-1, -1) + F(-1).$$

Por último, observe que cuando $M = 0$, entonces

$$c(\text{down-and-out}, K > H) + c(\text{down-and-in}, K > H) = c_{BS}(t, S_t; K, T, \sigma, q).$$

Relaciones similares son válidas para puts, así como para los casos “up-and out” y “up-and-in”. Por otra parte, las opciones “in” entran en vigencia en el momento en que S_t alcanza la barrera H . En otras palabras, si S_t alcanza a H , entonces la opción se convierte en una opción europea. Si en algún momento $S_t \leq H$, entonces el pago de un call del tipo “down-and-in” en el vencimiento está dado por $\max(S_t - K, 0)$. Pruebe que

$$c(\text{down-and-in}, K > H) = B_K(1, 1) + E(1)$$

y

$$c(\text{down-and-in}, K < H) = A_K(1) - B_K(1, 1) + B_H(1, 1) + E(1).$$

Si $S_t \geq H$ en algún momento, el pago que se obtiene por un call del tipo “up-and-in” es $\max(K - S_t, 0)$. Muestre que el precio de este tipo de opciones satisface:

$$c(\text{up-and-in}, K > H) = A_K(1) + E(-1)$$

y

$$c(\text{down-and-in}, K < H) = A_H(1) - B_K(1, -1) + B_H(1, -1) + E(-1).$$

Si en algún momento $S_t \leq H$, entonces el pago de un put del tipo “down-and-in” en el vencimiento está dado por $\max(K - S_t, 0)$. Demuestre que

$$p(\text{down-and-in}, K > H) = A_H(-1) - B_K(-1, 1) + B_H(-1, 1) + E(1)$$

y

$$p(\text{down-and-in}, K < H) = A_K(-1) + E(1).$$

Por último, si $S_t \geq H$ en algún momento, el pago que se obtiene por un put del tipo “up-and-in” es $\max(K - S_t, 0)$. Muestre que una fórmula para valuar esta opción es

$$p(\text{up-and-in}, K > H) = A_K(-1) - A_H(-1) + B_H(-1, -1) + E(-1)$$

y

$$p(\text{up-and-in}, K < H) = B_K(-1, -1) + E(-1).$$

42.4 ¿Una opción con barrera es más barata que una sin barrera?

42.5 Las opciones parisinas “out” son similares a las opciones con barrera “out”, excepto que la opción pierde vigencia y, por lo tanto, su valor cuando S_t cruza la barrera H y permanece allí cierto tiempo (especificado en los términos del contrato) antes de la fecha de vencimiento. Intente valuar este tipo de opciones.

IX. TASAS Y BONOS

- 43. Valuación de bonos cupón cero: marco determinista
- 44. Ecuación diferencial parcial de Garman-Vasicek
- 45. Modelo de tasa corta de Merton para valuar bonos
- 46. Modelo de tasa corta de Vasicek para valuar bonos (I)
- 47. Modelo de tasa corta de Vasicek para valuar bonos (II): enfoque de ecuaciones diferenciales parciales
- 48. Modelo de tasa corta de Vasicek para valuar bonos (III): enfoque probabilista
- 49. Modelo de tasa corta de Cox-Ingersoll-Ross para valuar bonos (I): enfoque de ecuaciones diferenciales
- 50. Modelo de tasa corta de Cox-Ingersoll-Ross para valuar bonos (II): resultados adicionales
- 51. Modelo de tasa corta de Ho-Lee para valuar bonos: calibración con precios actuales
- 52. Modelo de tasa corta de Hull-White para valuar bonos: calibración con precios actuales
- 53. Modelo de tasa corta de Longstaff para valuar bonos: modelo de doble raíz
- 54. Modelo de tasa corta de Brennan y Schwartz para valuar bonos: modelo de dos factores
- 55. Modelo de tasa corta de Black-Derman-Toy para valuar bonos
- 56. Modelo de tasa forward de Heath-Jarrow-Morton para valuar bonos
- 57. Teorema de Girsanov y valuación de bonos cupón cero
- 58. Inmunización de flujos de efectivo esperados mediante un portafolio de bonos: duración y convexidad

CAPÍTULO 43

VALUACIÓN DE BONOS CUPÓN CERO: MARCO DETERMINISTA

Conceptos básicos de este capítulo:

- Valuación de bonos cupón cero
- Valor del dinero en el tiempo
- Estructura de plazos
- Tasa forward
- Tasa corta
- Convergencia de la tasa corta a un valor de largo plazo

43.1 Introducción

En este capítulo se presenta el marco teórico determinista para la valuación de los instrumentos de renta fija más simples que existen en el mercado: los bonos cupón cero (bonos que no pagan cupones). Asimismo, se discuten los conceptos de curva de rendimiento, tasa forward instantánea y tasa corta de interés, también llamada tasa “spot” o tasa instantánea.

43.2 Conceptos básicos de bonos cupón cero

Un bono cupón cero es una promesa de pago (impersonalizada) en la que el emisor se compromete a pagar incondicionalmente una cantidad preestablecida, el valor nominal (o principal), en una fecha futura, la cual será referida como vencimiento del título. El interesado, en adquirir este pagaré entrega una cantidad inicial en una fecha previa al vencimiento; la fecha de colocación. En general, la cantidad inicial que se paga por este certificado es menor que la cantidad que se recibe al vencimiento, es decir, se compra a descuento. Cabe destacar que el propietario de este tipo de instrumentos se encuentra expuesto al riesgo de incumplimiento por parte del emisor. Sin embargo, en todo lo que sigue del presente capítulo se supondrá que todos los bonos son libres de riesgo crédito. Asimismo, si el tenedor de un bono cupón cero requiere liquidez antes del vencimiento y desea vender este certificado, entonces estará sujeto al riesgo de mercado. Por supuesto, si se espera a la fecha de vencimiento para recibir la cantidad prometida, el riesgo de mercado será inexistente.

43.3 Valuación con interés simple

El precio, al tiempo t , de un bono cupón cero que paga una unidad monetaria al vencimiento T , será denotado por $B(t, T)$. El rendimiento al vencimiento, $L(t, T)$, por unidad de tiempo, se define como

$$L(t, T) = \frac{1 - B(t, T)}{B(t, T)} \frac{1}{T - t}, \quad t < T, \quad (43.1)$$

equivalentemente,

$$B(t, T) = \frac{1}{1 + L(t, T)(T - t)}, \quad t \leq T. \quad (43.2)$$

En este último caso, $L(t, T)$ puede verse como la tasa (anualizada) de interés de plazo $T - t$ asociada a $B(t, T)$. La diferencia $T - t$, en (43.2), se interpreta como la proporción de año a la que se aplica la tasa anualizada $L(t, T)$. Por último, observe que en la ecuación (43.2), la tasa $L(t, T)$ actúa como una tasa de interés simple en el cálculo del valor presente de una unidad monetaria disponible hasta T .

Si se supone que el emisor cumplirá sus obligaciones y el tenedor del bono lo mantiene hasta la fecha de vencimiento, entonces $L(t, T)$ puede verse como una tasa de plazo $T - t$ anualizada y libre de los riesgos de incumplimiento y de mercado. Por supuesto, si el tenedor del instrumento tiene necesidad de liquidez y recurre al mercado para vender el título de deuda en una fecha $\tau \in (t, T)$, entonces quedará expuesto al riesgo mercado. Si muchos tenedores de bonos comparten la necesidad de liquidez y quieren deshacerse de su bono, en el tiempo τ , antes del vencimiento, T , entonces el precio, $B(\tau, T)$, disminuirá (existe un exceso de oferta) y la tasa, $L(\tau, T)$, aumentará ya que

$$L(\tau, T) = \left(\frac{1}{B(\tau, T)} - 1 \right) \frac{1}{\tau}, \quad t \leq \tau \leq T.$$

Recíprocamente, si pocos tenedores de bonos comparten la necesidad de liquidez y quieren mantener sus bonos hasta el vencimiento (existe un exceso de demanda), entonces el precio, $B(\tau, T)$, aumentará y la tasa, $L(\tau, T)$, disminuirá.

43.4 Tasa de descuento

En esta sección se introduce el concepto de tasa de descuento de un bono cupón cero. Si el bono se vende a una tasa (anualizada) de descuento, $D(t, T)$, entonces se puede escribir

$$B(t, T) = 1 - D(t, T)(T - t). \quad (43.3)$$

De esta manera, al combinar (43.2) con (43.3), se sigue que

$$1 - D(t, T)(T - t) = \frac{1}{1 + L(t, T)(T - t)}. \quad (43.4)$$

Por lo tanto, si $L(t, T)$ es conocida, entonces a partir de la ecuación anterior se determina $D(t, T)$ y viceversa.

43.5 Valuación con interés continuamente capitalizable

El precio de un bono cupón cero, $B(t, T)$, que se coloca en t y que paga una unidad monetaria al vencimiento T , con tasa de interés continuamente capitalizable de vencimiento en T , $R(t, T)$, se define como:

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad t \leq T. \quad (43.5)$$

De esta manera, el rendimiento obtenido en el intervalo $[t, T]$ satisface:

$$R(t, T) = \frac{-\ln B(t, T)}{T - t}, \quad t \leq T.$$

La ecuación (43.5) se puede justificar como el límite de la aplicación de $L(t, T)$ en intervalos de tiempo que cada vez se hacen más pequeños. En efecto, suponga primero que $T - t = 1$ (vencimiento en un año), entonces la aplicación de la fórmula de interés compuesto en n subintervalos, de igual longitud, conduce a

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{L(t, T)}{n}} \right)^n \longrightarrow e^{-L(t, T)}$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Si el vencimiento $T - t$ es arbitrario, se sigue que

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{L(t, T)(T-t)}{n}} \right)^n \longrightarrow e^{-L(t, T)(T-t)} \quad (43.6)$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Lo anterior equivale a que se aplique $L(t, T)$ en $[t, T]$ y, posteriormente, se subdivida este intervalo en un número infinito de subintervalos de la misma longitud. Observe

también que si se utiliza la aproximación $e^x \approx 1 + x$ válida para x suficientemente pequeña ($e^x = 1 + x + (x^2/2!) + (x^3/3!) + \dots$), se tiene que

$$\frac{1}{1 + L(t, T)(T - t)} \approx e^{-L(t, T)(T - t)} \quad (43.7)$$

es válida cuando $L(t, T)(T - t)$ es suficientemente pequeña. Es importante hacer una aclaración esencial con respecto de la fórmula (43.6). Cuando se aplica interés simple durante $[t, T]$, se supone que no hay pagos intermedios durante dicho periodo. Mientras que si se utiliza interés continuamente capitalizable, se producen pagos instantáneos que se reinvierten de manera instantánea (cuando $n \rightarrow \infty$). Para destacar esta distinción, en lugar de escribir $L(t, T)$ en el exponente de e , se utilizará $R(t, T)$ cuando se haga referencia a una tasa de interés continuamente capitalizable.

43.5.1 Un primer ejemplo

Sin duda, un ejemplo sencillo consiste en suponer que $R(t, T) = r$ es constante para cualquier plazo $T - t$, entonces

$$B(t, T) = e^{-r(T-t)}$$

y

$$r = \frac{-\ln B(t, T)}{T - t}.$$

Es decir, la cantidad $-\ln B(t, T)$ es proporcional al plazo $T - t$; siendo la constante de proporcionalidad, justamente, r .

43.5.2 Valor del dinero en el tiempo

Uno de los conceptos fundamentales en finanzas es el valor del dinero en el tiempo. De hecho, todas las fórmulas teóricas de valuación de activos utilizan este concepto implícita o explícitamente. Si hoy, al tiempo t , se cuenta con M_t unidades monetarias, son varias las cosas que se pueden hacer con ese dinero; por ejemplo, se puede guardar en una alcancía o depositarlo en una cuenta de ahorro. En el último caso, el banco regresaría posteriormente, en T , el principal, M_t , más una cantidad adicional, $\Delta M_t > 0$, conocida como el interés. Si se supone que la tasa de interés que paga el banco es constante e igual a r y M_0 es el depósito inicial, entonces el interés a un año es $\Delta M_0 = rM_0$ y el retorno de la inversión (capital más intereses), M_1 , calculado con interés simple al final del año está dado por

$$M_1 = M_0 + \Delta M_0 = M_0 + rM_0 = M_0(1 + r). \quad (43.8)$$

Si se aplica la fórmula de interés compuesto a dos años, entonces el retorno de la inversión al final del segundo año está dado por:

$$\begin{aligned} M_2 &= M_0 + \Delta M_0 + \Delta(M_0 + \Delta M_0) = M_0(1 + r) + \Delta(M_0(1 + r)) \\ &= M_0(1 + r) + rM_0(1 + r) = M_0(1 + r)(1 + r) = M_0(1 + r)^2. \end{aligned} \quad (43.9)$$

En general, para n años, se cumple que

$$M_n = M_0(1 + r)^n. \quad (43.10)$$

Se supone ahora que durante el intervalo $[t, s]$, $s \leq T$, se realizan m pagos de interés en m períodos de longitud $(s - t)/m$ a una tasa de $r(s - t)/m$. En este caso, al final de $[t, s]$ se tendrá un retorno igual a:

$$M_s = M_t \left(1 + \frac{r(s - t)}{m}\right)^m. \quad (43.11)$$

Si la frecuencia de estos m pagos de interés durante el año se incrementa y, en consecuencia, la longitud de los períodos de pago disminuye, entonces

$$M_s \longrightarrow M_t e^{r(s-t)}, \quad (43.12)$$

cuando $m \rightarrow \infty$, ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (x/n))^n = e^x$. En este caso, el lado derecho de (43.12) representa el retorno (capital más intereses) después de un periodo de tiempo de longitud $s - t$, a una tasa de interés continuamente capitalizable r .

Una forma alternativa de obtener (43.12) consiste en utilizar ecuaciones diferenciales. Si se supone que se invierte una cantidad M_s al tiempo s , el incremento en M_s después de un tiempo ds se calcula como

$$dM_s = r M_s ds, \quad M_t \text{ conocida,}$$

equivalentemente,

$$\frac{dM_s}{M_s} \frac{1}{ds} = r, \quad M_t \text{ conocida.}$$

En otras palabras, el rendimiento instantáneo de la inversión, por unidad de tiempo ds , es constante e igual a r . La solución de esta ecuación diferencial satisface

$$M_s = M_t e^{r(s-t)}, \quad s \geq t. \quad (43.13)$$

De esta manera, las ecuaciones (43.12) ó (43.13) relacionan el valor que tiene el dinero hoy, t , con su valor en un tiempo futuro, s . Así, M_s proporciona el valor futuro de M_t . Recíprocamente, si M_s estará disponible hasta T , entonces su valor presente M_t , en $t < T$, está dado por

$$M_t = M_s e^{-r(s-t)}.$$

43.6 Tasa forward instantánea

Uno de los conceptos más importantes en el estudio de modelos de tasas de interés es el de tasa forward. Considere una inversión de una unidad monetaria en un plazo $T - t$ a una tasa de interés continuamente capitalizable, entonces el retorno (principal más intereses) en este plazo es

$$I(t, T) = \exp\{R(t, T)(T - t)\}.$$

Si esta cantidad se reinvierte en el periodo $[T, T + \Delta T]$, el retorno total de la inversión, en $T + \Delta T$, está dado por

$$\begin{aligned} I(t, T, T + \Delta T) &= I(t, T) \exp\{f(t, T, T + \Delta T)\Delta T\} \\ &= \exp\{R(t, T)(T - t)\} \exp\{f(t, T, T + \Delta T)\Delta T\}, \end{aligned}$$

donde $f(t, T, T + \Delta T)$ es tasa forward instantánea referenciada en t y definida en $[T, T + \Delta T]$. De la misma manera, el retorno de una unidad monetaria en un plazo $[t, T + \Delta T]$ está dado por

$$J(t, T + \Delta T) = \exp\{R(t, T + \Delta T)(T + \Delta T - t)\}.$$

Si el mercado de este tipo de inversiones está en equilibrio, es decir, si no existen oportunidades de arbitraje para generar ganancias extraordinarias, entonces estas dos alternativas de inversión producen el mismo retorno, así $I(t, T, T + \Delta T) = J(t, T + \Delta T)$, equivalentemente

$$R(t, T)(T - t) + f(t, T, T + \Delta T)\Delta T = R(t, T + \Delta T)(T + \Delta T - t).$$

En consecuencia,

$$-\ln B(t, T) + f(t, T, T + \Delta T)\Delta T = -\ln B(t, T + \Delta T),$$

lo cual implica, a su vez, que

$$\frac{B(t, T)}{B(t, T + \Delta T)} = \exp\{f(t, T, T + \Delta T)\Delta T\}.$$

Equivalentemente,

$$f(t, T, T + \Delta T) = -\left(\frac{\ln B(t, T + \Delta T) - \ln B(t, T)}{\Delta T}\right).$$

La tasa forward instantánea se define, a partir de la ecuación anterior, como:

$$\begin{aligned} f(t, T) &\equiv \lim_{\Delta T \rightarrow 0} f(t, T, T + \Delta T) \\ &= -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T}. \end{aligned}$$

Observe que, en virtud, de esta última

$$\begin{aligned} \int_t^T f(t, s) ds &= - \int_t^T d \ln B(t, s) \\ &= -\ln B(t, T) + \ln B(t, t). \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $B(t, t) = 1$, se sigue que

$$\int_t^T f(t, s) ds = -\ln B(t, T). \quad (43.14)$$

En virtud de las dos últimas expresiones para $B(t, T)$, se puede concluir que

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \exp \left\{ - \int_t^T f(t, s) ds \right\} \\ &= \exp \left\{ - \left(\frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds \right) (T-t) \right\}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)},$$

lo cual implica que

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds.$$

De la misma manera, la tasa instantánea r_t , o tasa de interés del plazo más corto posible, se define mediante el siguiente límite:

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) \equiv R(t, t).$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} r_t &= \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) \\ &= \lim_{T \rightarrow t} \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds \\ &= \lim_{T \rightarrow t} \left(\frac{1}{T-t} f(t, T) (T-t) + o(T-t) \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow t} f(t, T) + \lim_{T \rightarrow t} \frac{o(T-t)}{T-t} \\ &= f(t, t). \end{aligned}$$

La tasa r_t está asociada con un bono con vencimiento infinitesimal. Es común llamar, simplemente, a r_t como tasa corta. Por supuesto, en los mercados no existen bonos de vencimiento instantáneo. Sin embargo, en la práctica se toma a r_t como la tasa de plazo más pequeño disponible en el mercado.

Por último, se proporciona una relación que permite determinar la tasa forward instantánea, $f(t, T)$, a partir la curva de rendimiento, $R(t, T)$. Para ello, observe primero que la ecuación (43.14) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \int_t^T f(t, s) ds &= -\ln B(t, T) \\ &= R(t, T)(T-t). \end{aligned}$$

En consecuencia, después de derivar la expresión anterior con respecto de T , se sigue que

$$f(t, T) = R(t, T) + (T - t) \frac{\partial}{\partial T} R(t, T).$$

43.7 Valuación de bonos con especificación de la tasa corta

Es importante destacar que muchos de los modelos que se encuentran en la literatura para valuar bonos utilizan una especificación exógena sobre el comportamiento de la tasa corta, es decir, especifican exógenamente una ecuación diferencial que determina la dinámica de r_t .

Si se supone que hay un mercado de crédito en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a la tasa corta, r_t , entonces si se presta una unidad monetaria en t , $M_t = 1$, el cambio en la cuenta de este mercado de dinero durante ds está dado por

$$dM_s = M_s r_s ds, \quad t < s. \quad (43.15)$$

La cuenta acumulada en este mercado de dinero hasta el tiempo s , denotada por M_s , es la solución de la ecuación diferencial anterior,

$$M_s = 1 \cdot \exp \left\{ \int_t^s r_u du \right\}. \quad (43.16)$$

En otras palabras, la tasa r_s es aplicada en forma continua al principal, o alternativamente,

$$M_s = \exp \left\{ \left(\frac{1}{s-t} \int_t^s r_u du \right) (s-t) \right\}, \quad (43.17)$$

es decir, el promedio de la tasa durante $[t, s]$ es aplicada al principal. Si no existen oportunidades de arbitraje entre el mercado de crédito con tasa r_t y el mercado de títulos de deuda de plazo T , entonces el precio de un bono cupón cero, que paga una unidad monetaria al vencimiento, está dado por

$$B(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\}. \quad (43.18)$$

Equivalentemente,

$$B(t, T) = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds \right) (T-t) \right\}. \quad (43.19)$$

De esta manera, el precio del bono $B(t, T)$ se descuenta a la tasa corta promedio durante $[t, T]$. Si se denota

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds,$$

entonces (43.19) se puede reescribir como

$$B(t, T) = \exp \{ -R(t, T)(T-t) \}. \quad (43.20)$$

Evidentemente, $B(t, t) = B(T, T) = 1$.

43.8 Tasa corta de interés de comportamiento exponencial

En esta sección se presenta un modelo de tendencia (determinista) de la tasa corta con crecimiento exponencial. Este comportamiento aunque no es muy usual, se observa en periodos cortos de tiempo en países con crisis financieras (Méjico 1995, Argentina 2002).

Suponga que la dinámica de la tasa corta, r_s , dado un valor inicial $r_t > 0$, es conducida por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dr_s}{ds} = -ar_s, \quad r_t \text{ dado}, \quad s > t.$$

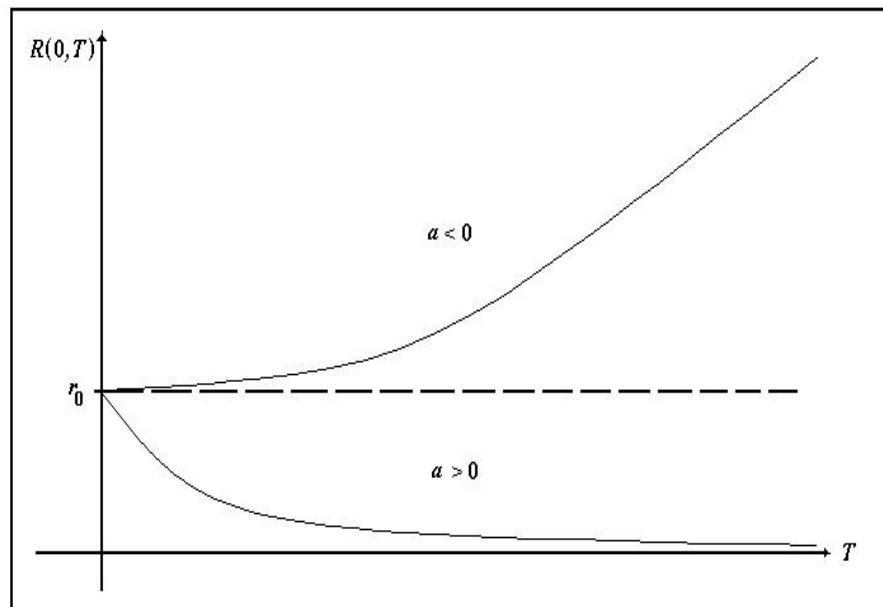
En este caso, la solución de la ecuación anterior satisface

$$r_s = r_t e^{-a(s-t)}, \quad s > t > 0.$$

Es fácil verificar que la estructura de plazos está dada por

$$\begin{aligned} R(t, T) &= \frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds \\ &= \frac{r_t e^{at}}{T-t} \int_t^T e^{-as} ds \\ &= r_t \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right). \end{aligned}$$

La Gráfica 43.1 muestra la estructura de plazos asociada a una tasa corta exponencial. Como puede observarse, las tasas de interés a diferentes plazos crecen con el plazo cuando $a < 0$ y decrecen con el plazo cuando $a > 0$.



Gráfica 43.1 Curva de rendimiento asociada a una tasa corta exponencial.

43.9 Tasa de interés con convergencia a un valor de largo plazo

En esta sección se examina un modelo de tendencia de una tasa corta con convergencia hacia un valor, b , de largo plazo. Suponga que la tasa corta es conducida por una ecuación diferencial (ordinaria) de la forma

$$\frac{dr_s}{ds} = -ar_s + ab = a(b - r_s), \quad s \geq t, \quad r_t > 0 \quad \text{dada,}$$

donde a y b son constantes positivas y conocidas. La solución de la ecuación diferencial anterior está dada por

$$\begin{aligned} r_s &= r_te^{-a(s-t)} + e^{-a(s-t)} \int_t^s e^{a(u-t)} abdu \\ &= r_te^{-a(s-t)} + e^{-a(s-t)} b \left(e^{a(s-t)} - 1 \right) \\ &= (r_t - b) e^{-a(s-t)} + b. \end{aligned}$$

En este caso, se sigue, inmediatamente, que $\lim_{s \rightarrow \infty} r_s = b$, lo cual determina el valor de largo plazo de la tasa corta. Asimismo, observe también que la estructura de plazos (o curva de rendimiento) satisface

$$\begin{aligned} R(t, T) &= \frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds \\ &= \frac{1}{T-t} \left\{ \int_t^T \left[(r_t - b) e^{-a(s-t)} + b \right] ds \right\} \\ &= \frac{r_t - b}{T-t} \int_t^T e^{-a(s-t)} ds + b \\ &= \frac{r_t - b}{(T-t)a} \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) + b \\ &= \frac{r_t - b}{(T-t)} \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) + b. \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede también escribir como

$$R(t, T) = \frac{D(t, T)r_t}{T-t} - \frac{A(t, T)}{T-t},$$

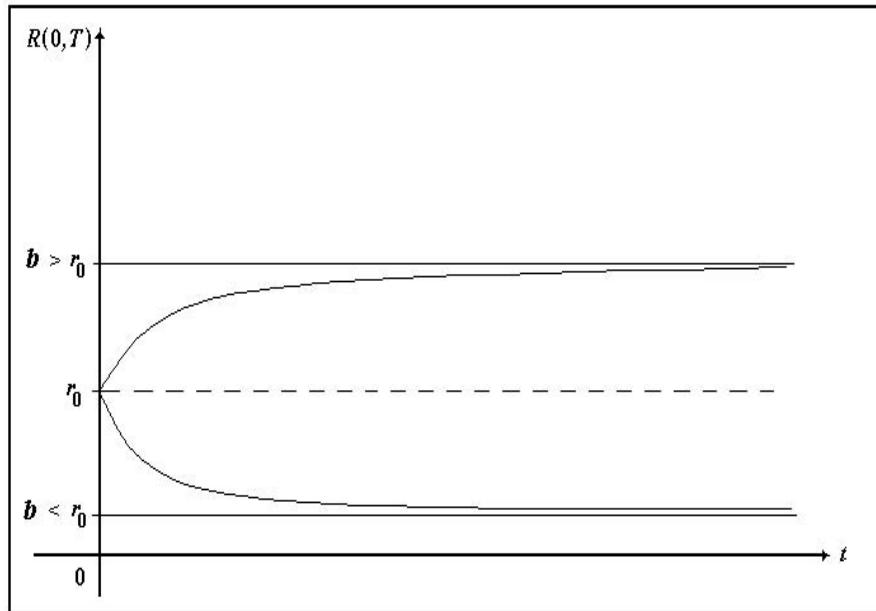
donde

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

y

$$A(t, T) = -b(T-t) + \frac{b}{a} \left(1 - e^{-a(T-t)} \right).$$

La Gráfica 43.2 muestra la curva de rendimiento asociada a una tasa corta con convergencia al valor de largo plazo b .

Gráfica 43.2 Curva de rendimiento asociada a una tasa corta con convergencia hacia b .

43.10 Bibliografía sugerida

- James, J. and N. Webber (2000). Interest Rate Modelling: Financial Engineering. John Wiley & Sons. Chichester, England.
- Rebonato, R. (1998). Interest-Rate Option Models. Second edition. John Wiley & Sons. Chichester, England.
- Venegas-Martínez, F. (2005). "Caracterización del precio de un bono cupón cero en un modelo de equilibrio general". *Revista de Estadística, Econometría y Finanzas Aplicadas*, Vol. 3, No. 3, pp. 1-16.

43.11 Ejercicios

43.1 Demuestre, utilizando tasas de interés simples, que

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T}.$$

43.2 Pruebe que $f(t, t) = R(t, t) = r_t$.

43.3 Muestre que si la tasa corta es conducida por una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dr_s}{ds} = a(b - r_s), \quad s \geq t, \quad a, b, r_t > 0, \quad r_t \text{ dada},$$

entonces la estructura de plazos se puede escribir como

$$R(t, T) = R(t, \infty) + (r_t - R(t, \infty)) \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) + b.$$

43.4 Suponga que

$$f(t, T) = \beta_0 + \left[\beta_1 + \beta_2 \left(\frac{T-t}{\tau} \right) \right] e^{-(T-t)/\tau},$$

donde β_0 , β_1 y τ son parámetros conocidos. Encuentre la estructura de plazos $R(t, T)$.

Solución: Es fácil verificar que

$$R(t, T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - e^{-(T-t)/\tau}}{\frac{T-t}{\tau}} - \beta_2 e^{-(T-t)/\tau}.$$

43.5 Suponga que la tasa corta es conducida por

$$\frac{dr_s}{ds} = a(b - r_s), \quad s \geq t, \quad a, b, r_t > 0, \quad r_t \text{ dada.}$$

Si

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

y

$$A(t, T) = -b(T-t) + bD(t, T),$$

muestre que $B(t, T) = e^{-D(t, T)r_t + A(t, T)}$.

43.6 Muestre que la tasa forward instantánea satisface

$$f(t, T) = -\frac{\epsilon_{B,T}}{T},$$

donde $\epsilon_{B,T}$ es la elasticidad de $B(t, T)$ con respecto de T , es decir,

$$\epsilon_{B,T} = \left(\frac{\partial B(t, T)}{\partial T} \right) \frac{T}{B(t, T)}.$$

CAPÍTULO 44

ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE GARMAN-VASICEK

Conceptos básicos de este capítulo:

- Tasa de interés instantánea o tasa corta
- Equilibrio y condiciones de no arbitraje
- Ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero
- Premio al riesgo de mercado
- Tasa corta neutral al riesgo

44.1 Introducción

Un bono cupón cero es una promesa, impersonalizada, de pago en el futuro. La cantidad que será pagada recibe el nombre de nominal o principal. Esta promesa se coloca en el mercado a diferentes plazos y, en la fecha de vencimiento, dicho nominal se entrega en una sola emisión. La promesa de pago se puede comprar en el presente con un descuento sobre el valor nominal. En este capítulo se caracteriza el comportamiento del precio de un bono cupón cero mediante una ecuación diferencial parcial de segundo orden parabólica. Dicha ecuación diferencial se debe a Vasicek (1977) y a Garman (1977), quienes la obtuvieron de manera independiente.

44.2 Modelos estocásticos de tasa de interés corta

Muchos de los modelos disponibles en la literatura para valuar bonos cupón cero se concentran en la evolución de la tasa de interés instantánea, también llamada tasa “spot” o, simplemente, tasa corta. Es importante reconocer que el objetivo que persiguen los modelos de tasa corta no es el de elaborar pronósticos precisos (adivinar el valor futuro) de su nivel, sino explicar en términos estadísticos su comportamiento en el mercado. Así pues, estos modelos intentan describir esencialmente propiedades estadísticas del mercado, por ejemplo, tendencia, reversión, sesgo, curtosis, colas pesadas, intervalos de confianza, probabilidades de ocurrencia, precios promedio, etcétera.

Dado que no existen tasas de interés instantáneas en el mercado, es importante contar con una definición práctica (operativa) de tasa corta. Se define la tasa corta como la tasa de interés de plazo más corto disponible en el mercado asociada a un bono cupón cero. El supuesto de que la tasa corta se mantiene constante, o bien que su dinámica está determinada por una función conocida en el tiempo, difícilmente podría ser aceptado en la práctica. En general, se observa que la tasa de interés corta tiene un comportamiento impredecible. La tasa de interés corta, que prevalece hoy en el mercado, asociada a un bono cupón cero, no tiene por qué ser la misma de mañana o de la semana entrante, su nivel dependerá de la oferta y la demanda por títulos de deuda al plazo más corto disponible en el mercado.

En vista de que no es posible predecir el comportamiento de la tasa corta, podría ser razonable modelarla a través de un proceso estocástico. Existen en la literatura un número importante (varias docenas) de modelos de tasa corta ligados al movimiento Browniano. Al respecto, el movimiento Browniano no sólo describe las fluctuaciones propias del mercado, sino también proporciona un conjunto de herramientas de análisis.

Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ su filtración aumentada, la cual representa la información del mercado disponible hasta el tiempo t . Se supone que la dinámica estocástica de la tasa corta, r_t , es conducida por una ecuación de la forma:

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t, \quad (44.1)$$

donde $\mu(r_t, t)$ y $\sigma(r_t, t)$ son procesos adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Como puede observarse, el proceso $\{W_t\}_{t \geq 0}$ modela el riesgo de mercado. En las siguientes secciones se estudiarán varias formas funcionales de $\mu(r_t, t)$ y $\sigma(r_t, t)$ que determinan dinámicas específicas de la tasa corta. Es importante prevenir al lector de la notación simplificada que se utilizó en (44.1), la expresión correcta es

$$r_t = r_0 + \int_0^t \mu(r_u, u)du + \int_0^t \sigma(r_u, u)dW_u. \quad (44.2)$$

De hecho, la ecuación (44.1) es un abuso de notación, ya que el objeto de estudio del cálculo estocástico es la integral estocástica. Sin embargo, la mayor parte del desarrollo de la teoría financiera moderna utiliza como notación simplificada una ecuación diferencial estocástica, teniendo, por supuesto, siempre en mente una integral estocástica.

Con el propósito de asegurar que (44.2) tenga una solución única, r_t , adaptada a la filtración \mathbb{F} , se requiere que $\mu(r_t, t)$ y $\sigma(r_t, t)$ satisfagan la condición global de Lipschitz

$$|\mu(x, t) - \mu(y, t)| \leq K|x - y| \quad \text{para toda } t \in [0, \infty) \text{ y } x, y \in \mathbb{R},$$

donde K es una constante independiente de x y y , así como la condición de crecimiento

$$\mu^2(x, t) + \sigma^2(x, t) \leq K(1 + x^2) \quad \text{para toda } t \in [0, \infty) \text{ y } x \in \mathbb{R}.$$

Asimismo, para que la media y la varianza del proceso definido en (44.2) estén bien definidas, se requiere que se satisfagan las siguientes condiciones de integrabilidad, casi dondequiera con respecto de \mathbb{P} ,

$$\int_0^\infty |\mu(r_t, t)|dt < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \sigma^2(r_t, t)dt < \infty.$$

Bajo las condiciones anteriores existe un único proceso r_t , adaptado a la filtración \mathbb{F} , con media y varianza finitas, condicionales en la información \mathcal{F}_0 , dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}[r_t | \mathcal{F}_0] = r_0 + \int_0^t \mu(r_u, u)du \leq r_0 + \int_0^\infty |\mu(r_t, t)|dt < \infty$$

y

$$\text{Var}[r_t | \mathcal{F}_0] = \int_0^t \sigma^2(r_u, u)du.$$

44.3 Inmunización del riesgo de mercado de un portafolio de bonos

En lo que sigue se denotará al precio de un bono cupón cero mediante las expresiones alternativas $B(t, T)$ ó $B(r_t, t; T)$. Esta última hará énfasis, cuando sea necesario, en la dependencia de la tasa corta. La valuación de un bono es, en cierto sentido, diferente a la valuación de un producto derivado de una acción, pues no existe un activo subyacente con el cual se cubra el derivado, ya que, a diferencia de una acción, la tasa corta, r_t , no tiene un precio. Una posibilidad de inmunizar un portafolio de dos bonos, consiste en cubrir un bono con otro bono pero de vencimiento diferente.

Considere un portafolio con dos bonos con vencimientos diferentes T_1 y T_2 . De acuerdo con la notación previamente introducida, el bono con vencimiento T_1 tiene precio $B_1(r_t, t; T_1)$ y el bono con vencimiento T_2 tiene precio $B_2(r_t, t; T_2)$. El portafolio a cubrir consiste de w_1 unidades del bono de precio $B_1(r_t, t; T_1)$ y w_2 unidades del bono de precio $B_2(r_t, t; T_2)$. Si se denota el valor de este portafolio en la fecha t por Π_t , se tiene que:

$$\Pi_t = w_1 B_1 + w_2 B_2.$$

El cambio en el valor del portafolio en el instante dt , debido a fluctuaciones en los precios de los activos y no en el rebalanceo del portafolio (cambios en w_1 ó w_2), se calcula mediante el lema de Itô. Así, por ejemplo, en el caso de B_1 se tiene que

$$dB_1 = \left(\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\partial B_1}{\partial r_t} \mu(r_t, t) + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} \right) dt + \frac{\partial B_1}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) dW_t,$$

en tal caso se encuentra que

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= w_1 dB_1 + w_2 dB_2 \\ &= w_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} \right) dt + w_2 \left(\frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B_2}{\partial r_t^2} \right) dt \\ &\quad + \left(w_1 \frac{\partial B_1}{\partial r_t} + w_2 \frac{\partial B_2}{\partial r_t} \right) \mu(r_t, t) dt + \left(w_1 \frac{\partial B_1}{\partial r_t} + w_2 \frac{\partial B_2}{\partial r_t} \right) \sigma(r_t, t) dW_t. \end{aligned}$$

Si se eligen $w_1 = 1$ y $w_2 = -(\partial B_1 / \partial r_t) / (\partial B_2 / \partial r_t)$, el coeficiente de dW_t se anula y, como consecuencia, se elimina la componente aleatoria correspondiente a dW_t , es decir, se elimina el riesgo de mercado. En este caso, se tiene que

$$d\Pi_t^{(w)} = \left[\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} - \left(\frac{\partial B_1}{\partial r_t} \Big/ \frac{\partial B_2}{\partial r_t} \right) \left(\frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r_t^2} \right) \right] dt. \quad (44.3)$$

44.4 Existencia de un sistema bancario

Suponga ahora que, en el tiempo t , existe un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a la tasa r_t . Si se eligen $w_1 = 1$ y $w_2 = -(\partial B_1 / \partial r_t) / (\partial B_2 / \partial r_t)$ en el valor del portafolio, éste puede resultar positivo en cuyo caso se deposita Π_t y se genera durante dt un ingreso adicional $d\Pi_t^{(r)} = r_t \Pi_t dt > 0$ o bien puede resultar negativo en cuyo caso se pide prestado Π_t y se genera en dt un adeudo de monto $d\Pi_t^{(r)} = r_t \Pi_t dt < 0$. En cualquier caso,

$$d\Pi_t^{(r)} = r_t \Pi_t dt = r_t \left[B_1 - \left(\frac{\partial B_1}{\partial r_t} \Big/ \frac{\partial B_2}{\partial r_t} \right) B_2 \right] dt. \quad (44.4)$$

44.5 Condición de equilibrio

Si el mercado está en equilibrio, entonces no existen oportunidades de arbitraje (libres de riesgo) y, por lo tanto, los rendimientos de inversiones alternativas tienen que ser iguales. Es decir, $d\Pi_t^{(w)} = d\Pi_t^{(r)}$. Si, por ejemplo, la alternativa de inversión en el portafolio generará una ganancia mayor que la de un depósito bancario, es decir, $d\Pi_t^{(w)} > d\Pi_t^{(r)}$, entonces se pide prestado al banco la cantidad Π_t y se invierte en el portafolio de bonos. Después de dt , se paga al banco el principal y los intereses $d\Pi_t^{(r)}$ y se genera una ganancia $d\Pi_t^{(w)} - d\Pi_t^{(r)} > 0$ libre de riesgo. Sin embargo, esta ventaja no se podrá explotar indefinidamente ya que los rendimientos eventualmente se ajustarían, eliminando oportunidades de arbitraje. En consecuencia, si el mercado está en equilibrio, entonces (44.3) y (44.4) tienen que ser iguales. Después de agrupar términos en B_1 en el lado izquierdo y términos en B_2 en el lado derecho, se obtiene que

$$\left(\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\sigma^2(r_t, t)}{2} \frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} - r_t B_1 \right) \Big/ \frac{\partial B_1}{\partial r_t} = \left(\frac{\partial B_2}{\partial t} + \frac{\sigma^2(r_t, t)}{2} \frac{\partial^2 B_2}{\partial r_t^2} - r_t B_2 \right) \Big/ \frac{\partial B_2}{\partial r_t}.$$

Se observa que el lado izquierdo de la ecuación anterior es función sólo de T_1 y la del lado derecho es función sólo de T_2 . Dado que ambos lados son iguales, se concluye entonces que los cocientes, de cada lado de la igualdad, son independientes de la fecha de vencimiento. Por lo tanto, ambos

lados son iguales a alguna función que no depende del vencimiento, que por conveniencia se denota por $m(r_t, t)$. Después de omitir los subíndices, se sigue que

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - r_t B \right) \Bigg/ \frac{\partial B}{\partial r_t} = m(r_t, t). \quad (44.5)$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - m(r_t, t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0. \quad (44.6)$$

La función $m(r_t, t)$ será llamada tendencia neutral (al riesgo de mercado) del precio del bono. Para resolver (44.6) se requiere una forma funcional específica de $m(r_t, t)$, la cual se determinará en la siguiente sección.

44.6 Ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero: valuación neutral al riesgo

En el transcurso de la presente sección se determina la ecuación diferencial parcial que caracteriza el precio de un bono cupón cero bajo el supuesto de neutralidad al riesgo. Si se aplica el lema de Itô a B_1 , se tiene que

$$dB_1 = \left(\frac{\partial B_1}{\partial t} + \mu(r_t, t) \frac{\partial B_1}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} \right) dt + \frac{\partial B_1}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) dW_t.$$

Equivalentemente,

$$dB_1 = \mu_1(r_t, t) B_1 dt + \sigma_1(r_t, t) B_1 dW_t,$$

donde

$$\mu_1(r_t, t) = \left(\frac{\partial B_1}{\partial t} + \mu(r_t, t) \frac{\partial B_1}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} \right) \Bigg/ B_1 \quad (44.7)$$

y

$$\sigma_1(r_t, t) = \left(\frac{\partial B_1}{\partial r_t} \right) \frac{\sigma(r_t, t)}{B_1}. \quad (44.8)$$

Expresiones semejantes pueden derivarse para B_2 . Considere ahora el valor del portafolio Π_t

$$\Pi_t = \theta_1 B_1 + \theta_2 B_2. \quad (44.9)$$

Si las cantidades θ_1 y θ_2 no se modifican ante variaciones en el mercado, entonces

$$d\Pi_t = \theta_1 dB_1 + \theta_2 dB_2. \quad (44.10)$$

También puede suponerse que $B_1 d\theta_1 + B_2 d\theta_2 = 0$. De esta manera,

$$d\Pi_t = (\theta_1 \mu_1(r_t, t) B_1 + \theta_2 \mu_2(r_t, t) B_2) dt + (\theta_1 \sigma_1(r_t, t) B_1 + \theta_2 \sigma_2(r_t, t) B_2) dW_t. \quad (44.11)$$

Si se eligen ahora

$$\theta_1 = \frac{\sigma_2(r_t, t)}{B_1(\sigma_2(r_t, t) - \sigma_1(r_t, t))}$$

y

$$\theta_2 = -\frac{\sigma_1(r_t, t)}{B_2(\sigma_2(r_t, t) - \sigma_1(r_t, t))},$$

entonces el coeficiente del factor de riesgo dW_t se anula y

$$d\Pi_t = \left(\frac{\sigma_2(r_t, t)\mu_1(r_t, t) - \sigma_1(r_t, t)\mu_2(r_t, t)}{\sigma_2(r_t, t) - \sigma_1(r_t, t)} \right) dt. \quad (44.12)$$

Si la expresión anterior se iguala con el rendimiento de un depósito en el banco

$$d\Pi_t = \Pi_t r_t dt = (\theta_1 B_1 + \theta_2 B_2) r_t dt = r_t dt,$$

el cual es libre de riesgo al tiempo t , pues el nivel de la tasa r_t es conocido, se tiene que

$$\frac{\mu_1(r_t, t) - r_t}{\sigma_1(r_t, t)} = \frac{\mu_2(r_t, t) - r_t}{\sigma_2(r_t, t)}. \quad (44.13)$$

Es decir, el premio al riesgo, normalizado por la volatilidad, que ofrecen dos bonos de diferentes vencimientos es igual. En consecuencia, bonos de mayor volatilidad pagarán un mayor diferencial entre el rendimiento medio del bono y la tasa libre de riesgo. Dado que en la ecuación (44.13), el lado izquierdo sólo depende del vencimiento T_1 y el derecho del vencimiento T_2 , se sigue que el premio al riesgo es independiente de la fecha de vencimiento del bono, el cual será denotado por $\lambda(r_t, T)$. En virtud de (44.6), (44.7) y (44.8), se tiene que

$$\frac{\partial B}{\partial t} + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)) \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - r_t B = 0. \quad (44.14)$$

Se observa que a partir de (44.13)

$$-m(r_t, t) = \mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t). \quad (44.15)$$

Es decir, la tendencia neutral al riesgo es función de la tendencia y volatilidad de la tasa corta, así como del premio al riesgo. Para encontrar la solución de (44.14) se tienen que especificar una condición final y dos de frontera. La condición final corresponde al pago en el vencimiento para un bono cupón cero $B(r_T, T; T) = 1$. Las condiciones de frontera dependen de las formas funcionales de $\mu(r_t, t)$ y $\sigma(r_t, t)$.

44.7 Reinterpretación del premio al riesgo

En esta sección se proporciona una interpretación alternativa del premio al riesgo de mercado. Para ello, observe que la ecuación (44.14) y el lema de Itô conducen al siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B &= 0, \\ dB &= \left[\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + \frac{\partial B}{\partial r_t} \mu(r_t, t) \right] dt + \frac{\partial B}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) dW_t, \end{aligned}$$

las cuales conducen a:

$$\begin{aligned} dB - r_t B dt &= \sigma(r_t, t) \lambda(r_t, t) \frac{\partial B}{\partial r_t} dt + \frac{\partial B}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) dW_t \\ &= \sigma(r_t, t) \frac{\partial B}{\partial r_t} (\lambda(r_t, t) dt + dW_t). \end{aligned} \quad (44.16)$$

El término que contiene a dW_t , dentro del paréntesis del lado derecho de (44.16), representa el riesgo de mercado del bono. El otro término dentro del paréntesis expresa el incentivo para adquirir un instrumento con riesgo. Así, si se hiciera un depósito de M_0 unidades monetarias en un banco que paga la tasa corta de interés, el rendimiento durante el instante dt está dado por $dM_t/M_t = r_t dt$. Note que al tiempo t , la tasa r_t es conocida. De esta manera, al comparar los diferenciales $dM_t - r_t M_t dt$ y $dB_t - r_t B_t dt$, el primero tiene un valor cero, mientras que el segundo es igual a las variaciones del mercado modeladas a través del término en dW_t , así como el premio esperado por adquirir un instrumento con riesgo, representado por $\lambda(r_t, t)$.

44.8 Tasa corta neutral al riesgo

Con base en las secciones anteriores se desarrolla, a continuación, el concepto de tasa corta neutral al riesgo. Observe primero que a partir de (44.1), se tiene que

$$dr_t = (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)) dt + \sigma(r_t, t)(\lambda(r_t, t)dt + dW_t). \quad (44.17)$$

La expresión anterior se puede comparar con la ecuación (44.16) reescrita como

$$dB = r_t B dt + \sigma(r_t, t) \frac{\partial B}{\partial r_t} (\lambda(r_t, t)dt + dW_t).$$

Como puede observarse, las componentes estocásticas de las dos ecuaciones anteriores son idénticas. Es decir, tanto la tasa corta como el precio del bono comparten el mismo factor de riesgo. Finalmente, en virtud de (44.14), se sigue que la ecuación diferencial parcial de segundo orden que caracteriza el precio de un bono cupón cero asociado a r_t está dada por

$$\frac{\partial B}{\partial t} + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)) \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - r_t B = 0. \quad (44.18)$$

Es importante destacar la similitud de la expresión anterior con la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes. Observe también que la tendencia de (44.17) coincide con el coeficiente de $\partial B / \partial r_t$ en la ecuación (44.18).

44.9 Revisión de supuestos

Por último, en esta sección se enlistan los supuestos que se utilizaron para obtener la ecuación diferencial parcial del comportamiento de un bono cupón cero:

- (i) existe una especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa corta;
- (ii) existe un mercado en el que se negocian bonos a todos los plazos comprendidos entre 0 y T ;
- (iii) existe un sistema bancario, o si se prefiere un mercado de crédito, en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a la tasa corta;
- (iv) no existen costos de transacción (impuestos o comisiones);
- (v) no existen oportunidades de arbitraje (libres de riesgo);
- (vi) la información con que cuentan los agentes es simétrica.

44.10 Bibliografía sugerida

- Garman, M. B. (1977). A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes. Working paper No. 50. January. Research Program in Finance. University of California, Berkeley.
- Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No. 2, pp. 177-188.

44.11 Ejercicios

- 44.1** Suponga que $\tau = T - t$, $\mu(r_t, t) = \bar{\mu}$, $\sigma(r_t, t) = \bar{\sigma}$ y $\lambda(r_t, t) = 0$. De esta manera, la ecuación diferencial parcial parabólica que satisface el precio de un bono cupón cero, $B(r_t, \tau; T)$, está dada por:

$$-\frac{\partial B}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + \bar{\mu} \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0.$$

La condición final que corresponde al pago en el vencimiento es $B(r_t, 0; T) = 1$. Resuelva la ecuación anterior suponiendo una solución de la forma

$$B(r_t, \tau; T) = e^{A(\tau) - r_t \tau}.$$

Solución: Al derivar parcialmente con respecto del tiempo de vigencia y la variable de estado el candidato de solución, se sigue que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial \tau} &= \left(\frac{\partial A}{\partial \tau} - r_t \right) B, \\ \frac{\partial B}{\partial r_t} &= -\tau B, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} &= \tau^2 B.\end{aligned}$$

Después de sustituir las ecuaciones anteriores en la ecuación diferencial parcial del precio del bono, se tiene que

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\tau^2 - \bar{\mu}\tau.$$

La solución de esta ecuación diferencial ordinaria está dada por

$$\begin{aligned}A(\tau) &= \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 \int_0^\tau s^2 ds - \bar{\mu} \int_0^\tau s ds \\ &= \frac{1}{6}\bar{\sigma}^2\tau^3 - \frac{1}{2}\bar{\mu}\tau^2.\end{aligned}$$

44.2 Suponga que $\tau = T - t$, $\mu(r_t, t) = \bar{\mu}$, $\sigma(r_t, t) = \bar{\sigma}$ y $\lambda(r_t, t) = \bar{\mu}/\bar{\sigma}$, de tal suerte que, la ecuación diferencial parcial parabólica que satisface el precio de un bono cupón cero, $B(r_t, \tau; T)$, está dada por:

$$-\frac{\partial B}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - r_t B = 0$$

junto con la condición final $B(r_t, 0; T) = 1$. Resuelva la ecuación anterior suponiendo una solución de la forma

$$B(r_t, \tau; T) = e^{A(\tau) - r_t \tau}.$$

Solución: En este caso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial \tau} &= \left(\frac{\partial A}{\partial \tau} - r_t \right) B, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} &= \tau^2 B.\end{aligned}$$

Después de sustituir las ecuaciones en la ecuación diferencial parcial del precio del bono, se obtiene

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\tau^2.$$

La solución de esta ecuación diferencial ordinaria está dada por

$$\begin{aligned}A(\tau) &= \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 \int_0^\tau s^2 ds \\ &= \frac{1}{6}\bar{\sigma}^2\tau^3.\end{aligned}$$

Observe también que $A(0) = 0$, lo que garantiza que $B(r_t, 0; T) = 1$.

44.3 Suponga que $dr_t = \bar{\mu}dt$, entonces $r_t = r_0 + \bar{\mu}t$. En este caso, la ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero con tasa corta r_t está dada por

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \bar{\mu} \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B_t = 0$$

junto con la condición final $B(r_t, T; T) = 1$. Resuelva la ecuación diferencial anterior.

44.4 Suponga que la tasa corta sigue un proceso de la forma

$$dr_t = ar_t^2 + \beta\sqrt{r_t}dW_t.$$

Determine y resuelva la ecuación diferencial parcial que caracteriza el precio de un bono cupón cero asociado con r_t .

CAPÍTULO 45

MODELO DE TASA CORTA DE MERTON PARA VALUAR BONOS CUPÓN CERO

Conceptos básicos de este capítulo:

- Modelo de Merton de tasa corta
- Valuación de bonos cupón cero
- Enfoque probabilista de valuación
- Curva de rendimiento
- Tasa forward
- Enfoque de ecuaciones diferenciales parciales de valuación

45.1 Introducción

En 1973, Robert C. Merton, en su artículo “Theory of Rational Option Pricing”, en su nota 45 al pie de la página 163, propuso uno de los primeros modelos para explicar la dinámica estocástica de la tasa de interés instantánea, también llamada tasa corta. En esta nota de 17 líneas se encuentran las bases de la teoría moderna de tasas de interés en tiempo continuo, la cual se fundamenta en el movimiento Browniano. Este trabajo de Merton, es uno de los artículos más fascinantes sobre matemáticas financieras que deben ser leídos con gran atención en todos sus detalles, ya que en ellos se guardan muchos de los puntos finos de la teoría de tasas de interés en tiempo continuo. Cuatro años después, en 1977, aparece la segunda contribución más importante a esta teoría, el llamado modelo de Vasicek, el cual se revisará en detalle en un capítulo posterior.

A partir del comportamiento del promedio de la tasa corta, en el modelo de Merton, se calculan los factores de descuento para valuar un bono cupón cero con diferentes vencimientos, de acuerdo con alguna hipótesis sobre las expectativas de los agentes en el proceso de valuación. Este primer intento de modelar el comportamiento de la tasa corta para valuar un bono, cuenta con varias limitaciones, entre las que se destacan: 1) existe una probabilidad positiva de que la tasa corta tome valores negativos; 2) no presenta reversión a la media, es decir, no existe un mecanismo que obligue a la tasa corta a regresar a un nivel de largo plazo conforme el tiempo transcurre; 3) la esperanza y la varianza condicionales de la tasa corta crecen sin límite al transcurrir el tiempo; y 4) la curva de rendimiento y la tasa forward decrecen sin cota conforme el tiempo aumenta. ¿Cuál es entonces el beneficio o ventaja de estudiar este modelo? A pesar de sus limitaciones, el modelo de Merton permite introducir de manera sencilla muchos de los conceptos fundamentales en el estudio de las tasas de interés y la valuación de bonos cupón cero. En capítulos posteriores se discutirán varios modelos más realistas que, en esencia, corrigen las limitaciones antes mencionadas.

45.2 Dinámica estocástica de la tasa corta

Considere un movimiento Browniano $(W_t)_{t \geq 0}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Como siempre, \mathcal{F}_t es toda la información relevante disponible en el tiempo t . Suponga que el comportamiento de la tasa corta es conducido por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = bdt + \sigma dW_t, \quad (45.1)$$

donde b y σ son cantidades positivas conocidas, entonces

$$r_s = r_t + b(s - t) + \sigma \int_t^s dW_u, \quad s > t. \quad (45.2)$$

Claramente, r_t se distribuye normalmente con media (condicional)

$$\mathbb{E} [r_s | \mathcal{F}_t] = r_t + b(s - t) \quad (45.3)$$

y varianza (condicional)

$$\text{Var} [r_s | \mathcal{F}_t] = \sigma^2(s - t), \quad (45.4)$$

ya que $\int_t^s dW_u = W_s - W_t$, $\mathbb{E}[W_s - W_t | \mathcal{F}_t] = 0$ y $\text{Var}[W_s - W_t | \mathcal{F}_t] = s - t$. Observe también que a partir de (45.3), se tiene que si $s > t$,

$$\mathbb{E} [r_s - bs | \mathcal{F}_t] = r_t - bt.$$

En otras palabras, la tasa corta menos su tendencia es una martingala. En palabras más simples, el mejor pronóstico de $r_s - bs$, dada la información disponible hasta el tiempo $s > t$, es $r_t - bt$. Por último, note que $\mathbb{E} [r_s | \mathcal{F}_t]$ y $\text{Var} [r_s | \mathcal{F}_t]$ crecen sin cota conforme s aumenta.

45.3 Determinación del precio de un bono cupón cero

En esta sección se determina, mediante el enfoque probabilista, el precio de un bono cupón cero asociado al modelo de tasa corta de Merton. El precio de un bono cupón cero que se emite en t y que paga una unidad monetaria en el tiempo T está dado por:

$$B(t, T) = \mathbb{E} \left\{ \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\}. \quad (45.5)$$

Cuando sea necesario enfatizar la dependencia del precio del bono sobre la tasa de interés se utilizará la notación alternativa $B = B(r_t, t; T)$. Considere, primero, la suma de las tasas cortas instantáneas durante $[t, T]$

$$I(t, T) = \int_t^T r_s ds$$

y observe que, a partir de (45.2),

$$\begin{aligned} I(t, T) &= r_t(T - t) + \frac{1}{2}b(T - t)^2 + \sigma \int_t^T \int_t^s dW_u ds \\ &= r_t(T - t) + \frac{1}{2}b(T - t)^2 + \sigma \int_t^T (W_s - W_t) ds \\ &= r_t(T - t) + \frac{1}{2}b(T - t)^2 + \sigma \left(\int_t^T W_s ds - W_t(T - t) \right). \end{aligned} \quad (45.6)$$

Al integrar por partes la última integral de (45.6), se tiene que

$$\int_t^T W_s ds = TW_T - tW_t - \int_t^T s dW_s. \quad (45.7)$$

Por lo tanto, después de sustituir (45.7) en (45.6), se sigue que

$$\begin{aligned} I(t, T) &= r_t(T - t) + \frac{1}{2}b(T - t)^2 + \sigma \left(TW_T - tW_t - \int_t^T s dW_s - W_t(T - t) \right) \\ &= r_t(T - t) + \frac{1}{2}b(T - t)^2 + \sigma \left(T(W_T - W_t) - \int_t^T s dW_s \right) \\ &= r_t(T - t) + \frac{1}{2}b(T - t)^2 + \sigma \left(T \int_t^T dW_s - \int_t^T s dW_s \right) \\ &= r_t(T - t) + \frac{1}{2}b(T - t)^2 + \sigma \left(\int_t^T (T - s) dW_s \right). \end{aligned} \quad (45.8)$$

En consecuencia, $I(t, T) = \int_t^T r_s ds$ es normal con media y varianza

$$\mathbb{E}[I(t, T) | \mathcal{F}_t] = r_t(T - t) + \frac{1}{2}b(T - t)^2 \quad (45.9)$$

y

$$\text{Var}[I(t, T) | \mathcal{F}_t] = \sigma^2 \int_t^T (T - s)^2 ds = \frac{1}{3}\sigma^2(T - t)^3, \quad (45.10)$$

respectivamente. Observe que en (45.10) se ha utilizado el hecho de que

$$\text{Var}\left[\int_t^T f(s)dW_s \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_t^T f(s)dW_s\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right] = \int_t^T f^2(s)ds \quad (45.11)$$

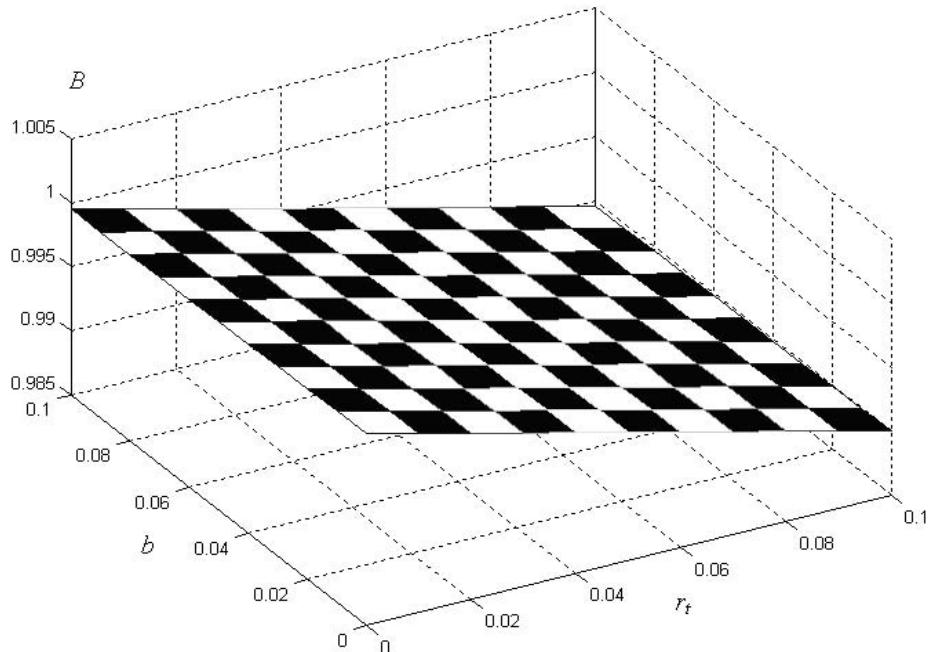
con $f(s) = T - s$. En virtud de las propiedades de la distribución normal, en particular de la función generatriz de momentos de dicha distribución, se sigue que el precio del bono, $B(r_t, t; T)$, satisface

$$\begin{aligned} B(r_t, t; T) &= \mathbb{E}[\exp\{-I(t, T)\} | \mathcal{F}_t] \\ &= \exp\left\{-\mathbb{E}[I(t, T) | \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2}\text{Var}[I(t, T) | \mathcal{F}_t]\right\}. \end{aligned} \quad (45.12)$$

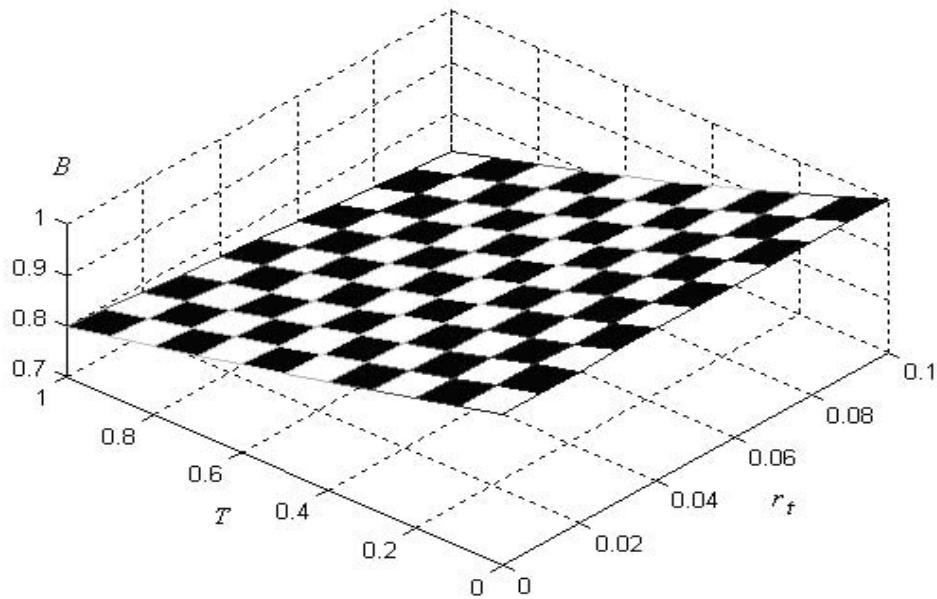
Al sustituir (45.9) y (45.10) en (45.12), se encuentra que

$$B(r_t, t; T) = \exp\left\{-r_t(T - t) - \frac{b}{2}(T - t)^2 + \frac{\sigma^2}{6}(T - t)^3\right\}. \quad (45.13)$$

En la Gráfica 45.1 se muestra el precio de un bono cupón cero, B , en función de b y r_t . Los otros parámetros permanecen fijos, $T = 0.1$ y $\sigma = 0.1$. En la Gráfica 45.2 se muestra el precio del bono, B , en función de T y r_t . En este caso, $b = 0.1$ y $\sigma = 0.1$.



Gráfica 45.1 Precio de un bono cupón cero, B , en función de b y r_t .



Gráfica 45.2 Precio de un bono cupón cero, B , en función de T y r_t .

45.4 Determinación alternativa del precio de un bono cupón cero

En esta sección se obtiene de manera alternativa la varianza de $I(t, T)$ para calcular el precio de un bono cupón cero en el que la tasa corta corta es conducida por el modelo de Merton. En virtud de las ecuaciones (45.6) y (45.8), se sigue que

$$\begin{aligned} \int_t^T r_s ds &= r_t(T-t) + \frac{1}{2}b(T-t)^2 + \sigma \left(\int_t^T W_s ds - W_t(T-t) \right) \\ &= r_t(T-t) + \frac{1}{2}b(T-t)^2 + \sigma \left(T(W_T - W_t) - \int_t^T s dW_s \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Var}[I(t, T)|\mathcal{F}_t] &= \sigma^2 T^2 \text{Var} \left[\int_t^T dW_s \middle| \mathcal{F}_t \right] + \sigma^2 \text{Var} \left[\int_t^T s dW_s \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad - 2\sigma^2 T \text{Cov} \left(\int_t^T dW_s, \int_t^T s dW_s \right). \end{aligned}$$

Asimismo, observe que

$$\text{Cov} \left(\int_t^T 1 dW_s, \int_t^T s dW_s \right) = \int_t^T 1 \cdot s ds = \frac{1}{2} (T^2 - t^2).$$

En consecuencia,

$$\text{Var}[I(t, T)|\mathcal{F}_t] = \sigma^2 [T^2(T-t) + \frac{1}{3}(T^3 - t^3) - T(T^2 - t^2)] = \frac{1}{3}\sigma^2(T-t)^3.$$

Este resultado coincide con (45.10), lo cual al combinarse con (45.9) produce (45.13).

45.5 Determinación de la curva de rendimiento

En esta sección se calcula la curva de rendimiento al vencimiento asociada a un bono cupón cero, o simplemente la curva de ceros. Si se denotan $D(t, T) = T - t$ y

$$A(T, t) = -\frac{b}{2}(T - t)^2 + \frac{\sigma^2}{6}(T - t)^3, \quad (45.14)$$

entonces se puede escribir

$$B(r_t, t; T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}.$$

Por lo tanto, la estructura de plazos de la tasa de interés está dada por

$$R(t, T) = -\frac{\ln B(t, T)}{T - t} = \frac{r_t D(t, T) - A(t, T)}{T - t} = r_t + \frac{b}{2}(T - t) - \frac{\sigma^2}{6}(T - t)^2. \quad (45.15)$$

Es decir, $R(t, T)$ como función de T es una parábola que abre hacia abajo. Es importante destacar en (45.15) que cambios en r_t conducen a movimientos paralelos en la curva de rendimiento. Asimismo, observe primero que

$$\frac{\partial}{\partial T} R(t, T) = \frac{b}{2} - \frac{\sigma^2}{3}(T - t)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} R(t, T) = -\frac{\sigma}{3}(T - t)^2 < 0.$$

En otras palabras, la curva de rendimiento $R(t, T)$ es una función decreciente en T para $T > t + (3b/2\sigma^2)$ y decreciente en la volatilidad σ . Por otro lado, observe que

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} R(t, T) = -\frac{\sigma^2}{3} < 0$$

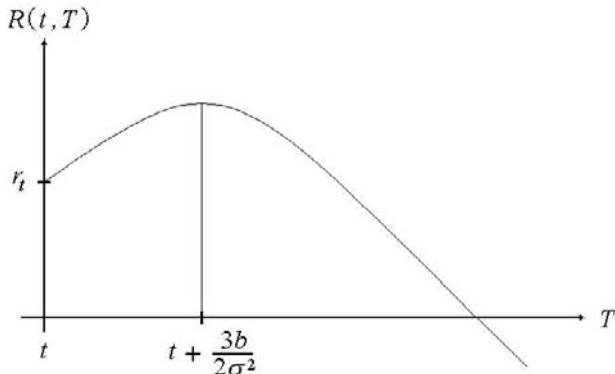
y

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} R(t, T) = -\frac{1}{3}(T - t)^2 < 0,$$

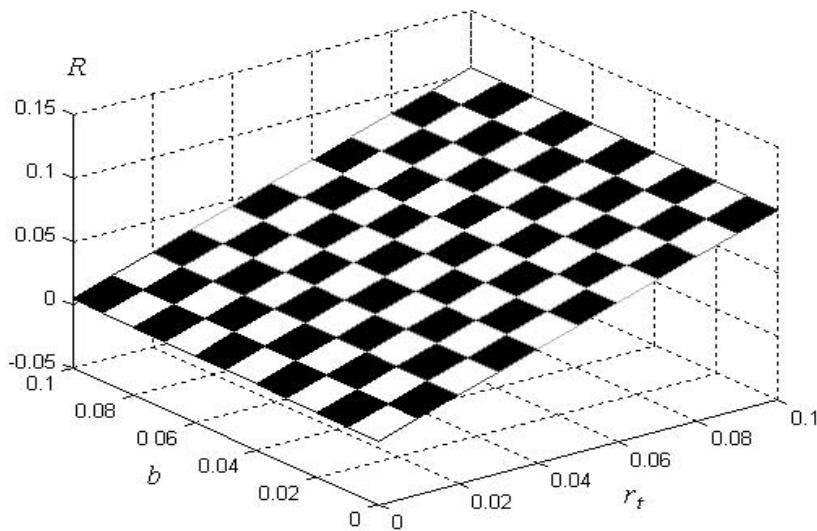
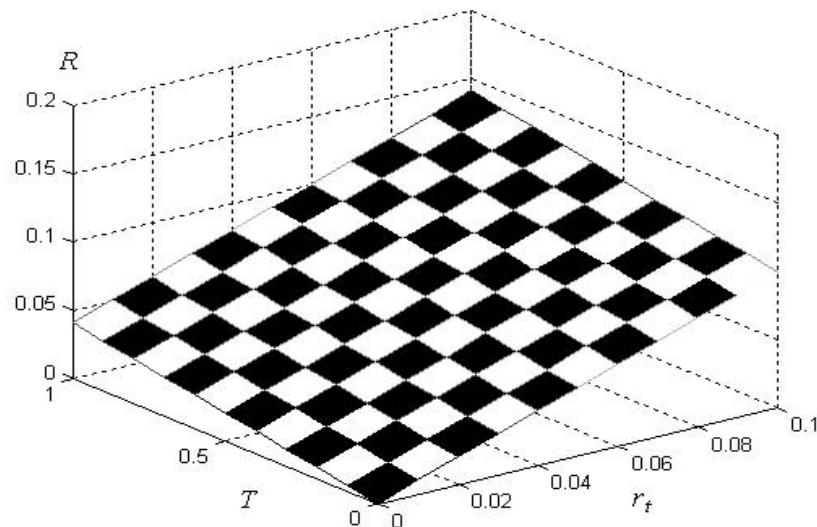
es decir, $R(t, T)$ es una función cóncava tanto del plazo, T , como de la volatilidad, σ . Claramente, el máximo de $R(t, T)$ se alcanza en $T = t + (3b/2\sigma^2)$. Observe, por último, que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = R(t, \infty) = -\infty.$$

La Gráfica 45.3 muestra, en resumen, el comportamiento de la estructura de plazos de la tasa de interés $R(t, T)$. La Gráfica 45.4 muestra la curva de rendimiento, $R(0, T)$, en función de b y r_t , con $T = 0.1$ y $\sigma = 0.1$. La Gráfica 45.5 muestra la curva de rendimiento, $R(0, T)$, en función de T y r_t , con $b = 0.1$ y $\sigma = 0.1$.



Gráfica 45.3 Curva de rendimiento del modelo de tasa corta de Merton.

Gráfica 45.4 Curva de rendimiento en función de b y r_t .Gráfica 45.5 Curva de rendimiento en función de T y r_t .

45.6 Dinámica de la tasa forward

A continuación se examina la dinámica de la tasa forward instantánea, asociada al modelo de Merton. La tasa forward se calcula a través de la siguiente ecuación:

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln B(t, T).$$

En este caso, se sigue que

$$f(t, T) = r_t + b(T - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)^2$$

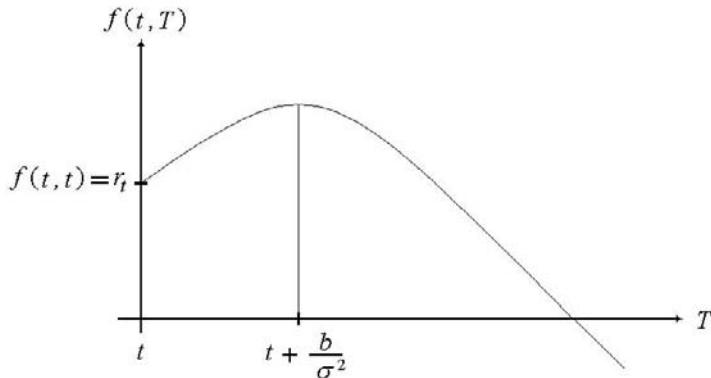
y

$$\frac{\partial}{\partial T} f(t, T) = -\frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(t, T) = b - \sigma^2(T - t) < 0.$$

Es decir, la tasa forward es una parábola que abre hacia abajo y es una función decreciente para $T > t + (b/\sigma^2)$. Por último, observe que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f(t, T) = f(t, \infty) = -\infty,$$

el cual es un resultado esperado, ya que $f(t, T)$ es decreciente para valores grandes de T .



Gráfica 45.6 Tasa forward asociada al modelo de Merton.

45.7 Determinación del precio de un bono mediante ecuaciones diferenciales parciales

En esta sección, bajo el supuesto de tasa corta neutral al riesgo, se obtiene el precio del bono cupón cero mediante la solución de una ecuación diferencial parcial, de segundo orden y parabólica. Así pues, bajo el supuesto de tasa corta neutral al riesgo se tiene:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + b \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0. \quad (45.16)$$

La condición final corresponde al pago en el vencimiento, $B(r_t, T; T) = 1$. Las condiciones de frontera dependen de b , σ y r_t .

Dado que la expresión anterior no cuenta con derivadas parciales cruzadas, se supone una solución en variables separables:

$$B(r_t, t; T) = e^{A(t, T) - r_t(T-t)}. \quad (45.17)$$

Observe que $A(T, T) = 0$. Al derivar parcialmente B en (45.17), con respecto de t y r_t , se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= \left(\frac{\partial A}{\partial t} + r_t \right) B, \\ \frac{\partial B}{\partial r_t} &= -(T-t)B, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} &= (T-t)^2 B. \end{aligned}$$

Después de sustituir las ecuaciones anteriores en (45.16), se tiene que:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)^2. \quad (45.18)$$

La solución de esta ecuación diferencial ordinaria, con condición final $A(T, T) = 0$, está dada por

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \int_T^t \left(b(T-s) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-s)^2 \right) dt \\ &= -\frac{1}{2}b(T-t)^2 + \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3, \end{aligned} \quad (45.19)$$

resultado que, como era de esperarse, coincide con (45.14). Vale la pena señalar que la selección de una solución de la forma (45.17) permitió transformar una ecuación diferencial parcial de segundo orden, dada en (45.16), en una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, especificada en (45.18).

45.8 Bibliografía sugerida

- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.
- Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No. 2, pp. 177-188.
- Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2002). "Cobertura de tasas de interés con futuros del mercado mexicano de derivados: un modelo estocástico de duración y convexidad". *El Trimestre Económico*, Vol. 59(2), No. 274, pp. 227-250.

45.9 Ejercicios

- 45.1** Verifique que las funciones $B(t, T)$, $R(t, T)$ y $f(t, T)$ que se obtuvieron del modelo de Merton satisfacen las siguientes identidades:

$$f(t, T) = R(t, T) + (T-t)\frac{\partial}{\partial T}R(t, T)$$

y

$$B(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(t, s) ds \right\}.$$

¿Puede probar estas identidades?

- 45.2** La sensibilidad del precio del bono $B = B(r_t, t; T)$ con respecto a la tasa corta está dada por la cantidad

$$\frac{\partial B}{\partial r_t}.$$

La duración (de Macaulay) del precio del bono se define como

$$\gamma(t, T) = -\frac{\partial B}{\partial r_t} \frac{1}{B}.$$

Asimismo, la convexidad de B se define como

$$\zeta(t, T) = \frac{\partial \gamma}{\partial r_t} \frac{1}{B} = \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \frac{1}{B}.$$

De esta manera, se tiene una aproximación en serie de Taylor del precio del bono hasta el término de segundo orden dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dB}{B} &\approx \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r_t} dr_t + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \right) (dr_t)^2 \\ &= -\gamma(t, T) dr_t + \frac{1}{2} \zeta(t, T) (dr_t)^2. \end{aligned}$$

Demuestre que en el caso del modelo de Merton

$$\gamma(t, T) = T - t \quad \text{y} \quad \zeta(t, T) = (T - t)^2.$$

Es decir, $\gamma(t, T)$ proporciona el tiempo medio entre pagos y $\zeta(t, T)$ la dispersión del tiempo entre pagos alrededor de la duración.

45.3 Considere una versión del modelo de Merton en donde

$$dr_t = b_t dt + \sigma_t dW_t,$$

con b_t y σ_t funciones conocidas del tiempo. Determine $B = B(r_t, t; T)$ y $R(t, T)$. Suponga, en particular, que

$$b_t = a + \mu t \quad \text{y} \quad \sigma_t = \sigma_0 e^{-\delta t},$$

donde $a, \mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma_0, \delta > 0$ son constantes conocidas. Encuentre $B = B(r_t, t; T)$ y $R(t, T)$ y examine su comportamiento.

45.4 Demuestre que si se tienen $N + 1$ observaciones $r_{t_0}, r_{t_1}, r_{t_2}, \dots, r_{t_N}$ de la tasa corta, entonces los estimadores de máxima verosimilitud de b y σ^2 en el modelo de Merton son, respectivamente,

$$\hat{b} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta r_{t_i}$$

y

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta r_{t_i} - \hat{b})^2,$$

donde $\Delta r_{t_i} = r_{t_i} - r_{t_{i-1}}$.

45.5 Considere la ecuación diferencial parcial del comportamiento del precio de un bono cupón cero asociado al modelo de Merton

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + (b - \lambda(r_t, t)\sigma) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0,$$

donde $\lambda = \lambda(r_t, t)$ representa el precio de mercado del riesgo. Demuestre que en este caso

$$B(r_t, t; T) = \exp \left\{ -r_t(T-t) - \frac{b + \lambda\sigma}{2}(T-t)^2 + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3 \right\}$$

y

$$R(t, T) = r_t + \frac{b + \lambda\sigma}{2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^2.$$

45.6 Extienda el modelo de Merton de la siguiente forma. Suponga que la dinámica de la tasa corta está dada por

$$dr_t = b_t dt + \sigma dW_t,$$

con

$$b_t = b_0 e^{\alpha t}$$

donde $b_0, \alpha > 0$ son constantes conocidas. Determine el precio de un bono cupón cero que se coloca en t y paga una unidad monetaria en el vencimiento T . Obtenga también la curva de ceros (o curva de rendimiento).

Solución: Observe que si $s > t$

$$r_s - r_t = \int_t^s b_u du + \sigma (W_s - W_t).$$

De esta manera,

$$I(t, T) = r_t(T - t) + \int_t^T \left(\int_t^s b_0 e^{\alpha u} du + \sigma (W_s - W_t) \right) ds.$$

Posteriormente, proceda como en la sección 45.3.

45.7 Resuelva el problema anterior con $b_t = \alpha + \beta t$.

45.8 Demuestre, con base en el modelo de Merton, que

$$\frac{\partial B}{\partial T} = E \left[-e^{-I(t,T)} (r_t + b(T-t) + \sigma (W_T - W_t)) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

y

$$\frac{\partial^2 B}{\partial T^2} = E \left[e^{-I(t,T)} \left(r_t^2 + \sigma^2(T-t) + 2b \int_t^T r_s ds + 2\sigma \int_t^T r_s dW_s - b \right) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Solución: Es suficiente calcular

$$\frac{\partial B}{\partial T} = E \left[-e^{-I(t,T)} r_T \mid \mathcal{F}_t \right],$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial T^2} = E \left[e^{-I(t,T)} r_T^2 - e^{-I(t,T)} \frac{\partial r_T}{\partial T} \mid \mathcal{F}_t \right],$$

$$r_T = r_t + b(T-t) + \sigma (W_T - W_t)$$

y

$$\frac{\partial r_T}{\partial T} = b.$$

Posteriormente, utilice el lema de Itô para calcular r_T^2 . Concluya que

$$dr_s^2 = (2r_u b + \sigma^2) du + 2r_u \sigma dW_u,$$

es decir,

$$r_T^2 = r_t^2 + \sigma^2(T-t) + 2b \int_t^T r_s ds + 2\sigma \int_t^T r_s dW_s.$$

45.9 Con base en el problema anterior pruebe que

$$\left. \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} \right|_{T=t} = r_t - b.$$

45.10 Demuestre que si $B(t, T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$, entonces

$$\frac{\partial^2 B}{\partial T^2} = B(t, T) \left[\left(\frac{\partial R}{\partial T}(T-t) + R(t, T) \right)^2 - \frac{\partial^2 R}{\partial T^2}(T-t) - 2 \frac{\partial R}{\partial T} \right].$$

En este caso,

$$\left. \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} \right|_{T=t} = r_t^2 - 2 \left. \frac{\partial R}{\partial T} \right|_{T=t}.$$

Concluya, utilizando el problema anterior que

$$\left. \frac{\partial R}{\partial T} \right|_{T=t} = \frac{1}{2} b.$$

Obtenga este último resultado directamente a partir de (45.15) ¿Cuál es la interpretación de este resultado?

45.11 Demuestre, en el modelo de Merton, que

$$\begin{aligned} & B(t, T+h) - B(t, T) \\ & \approx \mathbb{E} \left[e^{-I(t,T)} \left(-r_T(T-t+h) + \frac{1}{2} (r_T^2 - b) (T-t+h)^2 \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Solución: Observe primero que la expansión en serie de Taylor de $B(t, T+h)$ hasta el término de segundo orden conduce a

$$B(t, T+h) - B(t, T) \approx \frac{\partial B}{\partial T}(T-t+h) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial T^2}(T-t+h)^2.$$

La primera y segunda derivadas parciales de B con respecto de T satisfacen

$$\frac{\partial B}{\partial T} = \mathbb{E} \left[-e^{-I(t,T)} r_T \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

y

$$\frac{\partial^2 B}{\partial T^2} = \mathbb{E} \left[e^{-I(t,T)} (r_T^2 - b) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

45.12 Resuelva la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + b \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0$$

con condición final $B(r_t, T; T) = 1$ bajo el supuesto de que el precio del bono satisface

$$B(r_t, t; T) = e^{A(t,T) - r_t C(t,T)},$$

donde $A(t, T)$ y $C(t, T)$ son funciones por determinar con condiciones finales $A(T, T) = C(t, T) = 0$.

CAPÍTULO 46

MODELO DE TASA CORTA DE VASICEK PARA VALUAR BONOS (I)

Conceptos básicos de este capítulo:

- Modelos de equilibrio general para valuación de bonos
- Ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero
- Curva de rendimiento
- Tasa forward
- Estimación de parámetros

46.1 Introducción

Oldrich Alfons Vasicek, de nacionalidad checa, fue fundador de la empresa KMV y actualmente es asesor de Moody's KMV. También fue vice-presidente del Departamento de Ciencias Administrativas del banco "Wells Fargo". Vasicek ha sido profesor de finanzas en la Universidad de Rochester, la Universidad de California en Berkeley y en la "Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales" (ESSEC) en Francia. El profesor Vasicek se dedica a las matemáticas financieras, particularmente al desarrollo de modelos de valuación de empresas, valuación de instrumentos financieros y análisis de mercados financieros. El profesor Vasicek ha publicado más de 30 artículos en "Journals" financieros y matemáticos y ha recibido varios premios y reconocimientos por su destacada labor académica. Su modelo de equilibrio para determinar la estructura de plazos de la tasa de interés ("An Equilibrium Characterization of the Term Structure"), publicado en 1977, es reconocido generalmente como pionero en la teoría de tasas de interés en tiempo continuo.

En el artículo original de Vasicek (1977) se obtiene una estructura de plazos de la tasa de interés bajo los siguientes supuestos: 1) la tasa instantánea de interés sigue un proceso de difusión; 2) el precio de un bono cupón cero depende solamente de la tasa corta y de su vigencia (periodo entre colocación y vencimiento); y 3) no hay costos de transacción. Asimismo, mediante argumentos de arbitraje se obtiene una ecuación diferencial cuya solución es el precio de un bono cupón cero.

Una de las contribuciones más importantes del trabajo de Vasicek es la determinación de una ecuación diferencial parcial parabólica que caracteriza el precio de un bono cupón cero en ausencia de oportunidades de arbitraje. Bajo el supuesto de que la tasa instantánea de interés es conducida por un proceso de difusión, el lema de Itô y argumentos de arbitraje desempeñan un papel fundamental en la obtención de dicha ecuación diferencial parcial.

46.2 Supuestos del modelo

Considere un mercado en donde los inversionistas compran y emiten promesas del pago de una unidad monetaria en el futuro, libres de riesgo crédito, que se compran a descuento. Estas promesas serán llamadas bonos cupón cero. Sea $B(t, T)$ el precio en el tiempo t de un bono que se compra a descuento con vencimiento en el tiempo T , $T > t$, y que paga una unidad monetaria al vencimiento, es decir

$$B(T, T) = 1. \quad (46.1)$$

El rendimiento al vencimiento o estructura de plazos o curva de rendimiento o, simplemente, curva de ceros, en el tiempo t de un bono con vencimiento T , está dada por

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T), \quad T > t. \quad (46.2)$$

La tasa forward instantánea $f(t, T)$ es definida por la siguiente ecuación:

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds. \quad (46.3)$$

Equivalentemente,

$$f(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} [(T-t)R(t, T)]. \quad (46.4)$$

La tasa de interés instantánea o tasa de interés “spot” o, simplemente, tasa corta a la que los agentes pueden prestar o pedir prestado es

$$r_t = R(t, t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) \quad (46.5)$$

ó

$$r_t = f(t, t) = \lim_{T \rightarrow t} f(t, T). \quad (46.6)$$

Un crédito de monto M_t a la tasa spot r_t , aumentará su valor, durante el instante dt , en

$$dM_t = M_t r_t dt. \quad (46.7)$$

Esta ecuación es válida con toda certeza en t , ya que r_t es conocida en t . Sin embargo, después de t el nivel de la tasa corta es incierto. En otras palabras r_t es un proceso estocástico, sujeto a dos requerimientos. Primero, r_t es una función continua del tiempo. Segundo, se supone que r_t sigue un proceso Markoviano. Bajo este último supuesto, el comportamiento futuro de la tasa corta, dado su valor actual, es independiente del pasado. En otras palabras, la distribución de r_{t+u} dado r_s , $s \leq u$, sólo depende de la información disponible en el tiempo u , es decir, sólo depende del valor de r_u .

Los procesos que son continuos y Markovianos son llamados procesos de difusión. Estos procesos pueden ser descritos a través de una ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$dr_t = \alpha(r_t, t)dt + \beta(r_t, t)dW_t, \quad (46.8)$$

donde $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Las funciones $\alpha(r, t)$ y $\beta^2(r, t)$ son conocidas como la tendencia y la varianza instantáneas, respectivamente, del proceso r_t .

Asimismo, se supone que no existen costos de transacción, la información está disponible para todos los agentes de forma simultánea, todos los inversionistas actúan de forma racional (prefieren más riqueza que menos y utilizan toda la información disponible), todos los inversionistas tienen expectativas homogéneas y el mercado está en equilibrio, es decir, no hay oportunidades de arbitraje.

El precio del bono cupón cero que se coloca en t y que al vencimiento T paga una unidad monetaria se denotará mediante $B = B(r_t, t; T)$, o en forma más simple como $B = B(t, T)$ cuando no sea necesario destacar la dependencia con la tasa corta. Así, la tasa corta es la única variable de estado de la estructura de plazos.

46.3 Estructura de plazos

A partir de la ecuación (46.8) y del hecho que $B = B(r_t, t; T)$, se sigue del lema de Itô

$$dB = B\mu(r_t, t; T)dt + B\sigma(r_t, t, T)dW_t, \quad (46.9)$$

donde

$$\mu(r_t, t; T) = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \alpha \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \right) \quad (46.10)$$

y

$$\sigma(r_t, t; T) = \frac{\beta}{B} \frac{\partial B}{\partial r_t}. \quad (46.11)$$

Considere ahora un inversionista que al tiempo t emite una cantidad w_1 de bonos con fecha de vencimiento T_1 y precio B_1 , y simultáneamente compra una cantidad w_2 de bonos con vencimiento T_2 y precio B_2 . Considere el valor del portafolio $\Pi_t = w_2B_2 - w_1B_1$. Si se denota $W_1 = w_1B_1$ y $W_2 = w_2B_2$ el lema de Itô conduce a

$$d\Pi_t = (W_2\mu(r_t, t; T_2) - W_1\mu(r_t, t; T_1)) dt + (W_2\sigma(r_t, t; T_2) - W_1\sigma(r_t, t; T_1)) dW_t. \quad (46.12)$$

Suponga que las cantidades W_1, W_2 se seleccionan de tal forma que

$$W_1 = \frac{M_t\sigma(r_t, t; T_2)}{\sigma(r_t, t; T_1) - \sigma(r_t, t; T_2)}$$

y

$$W_2 = \frac{M_t\sigma(r_t, t; T_1)}{\sigma(r_t, t; T_1) - \sigma(r_t, t; T_2)}.$$

En consecuencia, el segundo término en (46.12), que modela el riesgo de mercado, es cero. Por lo tanto, la ecuación (46.12) toma la forma

$$d\Pi_t = M_t \left(\frac{\mu(r_t, t; T_2)\sigma(r_t, t; T_1) - \mu(r_t, t; T_1)\sigma(r_t, t; T_2)}{\sigma(r_t, t; T_1) - \sigma(r_t, t; T_2)} \right) dt. \quad (46.13)$$

De esta manera, el portafolio es libre de riesgo. Si los mercados están en equilibrio, el portafolio debería producir el mismo rendimiento que el que se obtiene por hacer un préstamo a la tasa r_t . Si el rendimiento del portafolio fuera mayor, el portafolio puede ser comprado con fondos prestados a la tasa r_t , en caso contrario el portafolio es vendido y las ganancias son prestadas, lo que produce oportunidades de arbitraje.

Al comparar las ecuaciones (46.7) y (46.13), se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{\mu(r_t, t; T_2)\sigma(r_t, t; T_1) - \mu(r_t, t; T_1)\sigma(r_t, t; T_2)}{\sigma(r_t, t; T_1) - \sigma(r_t, t; T_2)} &= r_t \\ \text{o} \quad \frac{\mu(r_t, t; T_1) - r_t}{\sigma(r_t, t; T_1)} &= \frac{\mu(r_t, t; T_2) - r_t}{\sigma(r_t, t; T_2)}. \end{aligned} \quad (46.14)$$

Observe que los cocientes en cada lado de la ecuación (46.14) son iguales para fechas de vencimiento arbitrarias T_1 y T_2 , se sigue que la razón $(\mu(r_t, t; T) - r_t)/\sigma(r_t, t; T)$ es independiente de T . Sea $\lambda(r_t, t)$ el valor común de tal razón, entonces

$$\lambda(r_t, t) = \frac{\mu(r_t, t; T) - r_t}{\sigma(r_t, t; T)}, \quad T \geq t. \quad (46.15)$$

La cantidad $\lambda(r_t, t)$ es llamada el precio de riesgo mercado, es decir, el valor que el mercado asigna al riesgo. La cantidad $\lambda(r_t, t)$ también puede interpretarse como el rendimiento adicional, por la exposición al riesgo, por unidad de riesgo. La ecuación (46.15) se puede reescribir como

$$\mu(r_t, t; T) - r_t = \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t; T). \quad (46.16)$$

Si se sustituyen la ecuaciones (46.10) y (46.11) en (46.16), se tiene que

$$\frac{\partial B}{\partial t} + [\alpha(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\beta(r_t, t)] \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\beta^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - r_t B = 0, \quad t \leq T, \quad (46.17)$$

junto con la condición final $B(r_t, T, T) = 1$. Esta ecuación permite valuar bonos descontados en un mercado caracterizado por los supuestos establecidos en la sección 46.2. Una vez que la forma de la dinámica estocástica de la tasa spot r_t , expresada en (46.8), ha sido determinada y el precio de riesgo mercado ha sido especificado $\lambda(r_t, t)$, dada en la ecuación (46.15), el precio del bono,

asociado a la dinámica de r_t , es obtenido como solución de la ecuación (46.17). Posteriormente, la estructura de plazos $R(t, T)$ de las tasas de interés es calculada mediante

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T). \quad (46.18)$$

46.4 Representación estocástica del precio del bono

La solución a la ecuación diferencial parcial (46.17) puede ser representada en forma integral como

$$B(t, T) = E \left[\exp \left\{ - \int_t^T r_s ds - \frac{1}{2} \int_t^T \lambda^2(r_s, s) ds - \int_t^T \lambda(r_s, s) dW_s \right\} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (46.19)$$

Para verificar que la ecuación (46.19) satisface (46.17), defina

$$Y(W_u, u) = \exp \left\{ - \int_t^u r_s ds - \frac{1}{2} \int_t^u \lambda^2(r_s, s) ds - \int_t^u \lambda(r_s, s) dW_s \right\},$$

entonces el lema de Itô conduce a

$$\begin{aligned} dY &= \left(\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial W_u^2} \right) du + \frac{\partial Y}{\partial W_u} dW_u \\ &= Y \left(-r_u - \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 \right) du - Y \lambda dW_u \\ &= -Y r_u du - Y \lambda dW_u. \end{aligned}$$

Los cálculos en la segunda igualdad se pueden obtener de manera sencilla si se utiliza directamente la definición de integral estocástica en el término que contiene al movimiento Browniano. Si ahora se aplica el lema de Itô al producto $B(r_u, u; T)Y(W_u, u) = B(u, T)Y(W_u, u)$, se tiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} d(BY) &= Y dB + B dY + dB dY \\ &= Y \left(\frac{\partial B}{\partial u} + \alpha \frac{\partial B}{\partial r_u} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_u^2} \right) du + Y \frac{\partial B}{\partial r_u} \beta dW_u + BY (-\lambda dW_u - r_u du) \\ &\quad - Y \frac{\partial B}{\partial r_u} \beta \lambda du \\ &= Y \left(\frac{\partial B}{\partial u} + (\alpha - \lambda \beta) \frac{\partial B}{\partial r_u} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_u^2} - r_u B \right) du - BY \lambda dW_u + Y \frac{\partial B}{\partial r_u} \beta dW_u \\ &= -BY \lambda dW_u + Y \frac{\partial B}{\partial r_u} \beta dW_u \\ &= \left(-BY \lambda + Y \frac{\partial B}{\partial r_u} \beta \right) dW_u. \end{aligned}$$

Si se integra la expresión anterior de t a T y se toma la esperanza se obtiene

$$E[B(T, T)Y(T) - B(t, T)Y(t) \mid \mathcal{F}_t] = 0.$$

Pero, $B(T, T) = 1$. Por lo tanto,

$$E[B(t, T)Y(t) \mid \mathcal{F}_t] = E[Y(T) \mid \mathcal{F}_t]$$

ó

$$E[B(t, T) \mid \mathcal{F}_t] = E \left[\frac{Y(T)}{Y(t)} \mid \mathcal{F}_t \right],$$

lo que conduce, inmediatamente, a la ecuación (46.19). En el caso especial en que $\lambda \equiv 0$, se sigue que

$$\mu(r_t, t; T) = r_t, \quad t \leq T$$

y

$$B(t, T) = E \left[\exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (46.20)$$

Se puede dar una interpretación económica de la ecuación (46.19). Para ello, construya un portafolio consistente de un bono cuyo vencimiento tiende a infinito y preste o pida prestado a la tasa corta, con proporciones $\gamma(r_t, t; \infty)$ y $1 - \gamma(r_t, t; \infty)$, respectivamente, donde:

$$\gamma(r_t, t) = \frac{\mu(r_t, t; \infty) - r_t}{\sigma^2(r_t, t; \infty)}.$$

El valor P_t de este portafolio sigue la ecuación:

$$\begin{aligned} dP_t &= \gamma(r_t, t; \infty) P_t \frac{dB}{B} + (1 - \gamma(r_t, t; \infty)) P_t r_t dt \\ &= \gamma(r_t, t; \infty) P_t [\mu(r_t, t; \infty) dt + \sigma(r_t, t; \infty) dW_t] + (1 - \gamma(r_t, t; \infty)) P_t r_t dt. \end{aligned}$$

Esta ecuación puede integrarse calculando la diferencial estocástica de $\ln(P_t)$ y utilizando el hecho que $\gamma(r_t, t; \infty) \sigma(r_t, t; \infty) = \lambda(r_t, t)$. Esto conduce al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} d(\ln(P_t)) &= \gamma(r_t, t; \infty) \mu(r_t, t; \infty) dt + \gamma(r_t, t; \infty) \sigma(r_t, t; \infty) dW_t + (1 - \gamma(r_t, t; \infty)) r_t dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma^2(r_t, t; \infty) \sigma^2(r_t, t; \infty) dt \\ &= r_t dt + \frac{1}{2} \lambda^2(r_t, t) dt + \lambda(r_t, t) dW_t \end{aligned}$$

y consecuentemente:

$$\frac{P_t}{P_T} = \exp \left\{ - \int_t^T r_s ds - \frac{1}{2} \int_t^T \lambda^2(r_s, s) ds - \int_t^T \lambda(r_s, s) dW_s \right\}.$$

Así, la ecuación (46.19) puede reescribirse como:

$$B(r_t, t; T) = E \left[\frac{P_t}{P_T} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad t \leq T. \quad (46.21)$$

La ecuación anterior establece que el precio de cualquier bono medido en unidades del valor del portafolio P_t sigue una martingala, es decir,

$$E \left[\frac{B(r_t, T; T)}{P_T} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{B(r_t, t; T)}{P_t}.$$

En otras palabras, el mejor pronóstico de la razón entre el precio del bono y el portafolio es el valor actual de dicha razón.

46.5 Bibliografía sugerida

Merton, R. C. (1973). "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model". *Econometrica*, Vol. 41, No. 5, pp. 867-887.

Merton, R. C. (1974). "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates". *Journal of Finance*, Vol. 29, No. 2, pp. 449-470.

Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No. 2, pp. 177-188.

46.6 Ejercicios

46.1 En la práctica se requiere conocer la tendencia y la volatilidad, α y β , del proceso de la tasa corta, así como el precio de mercado del riesgo, λ . Las primeras dos cantidades pueden obtenerse a partir del análisis estadístico del proceso (observable) r_t . Aunque λ puede ser estimado a partir de (46.15), es deseable contar con al menos una forma más directa de observar empíricamente λ . En cuyo caso, puede emplearse la siguiente igualdad:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial T} \right|_{T=t} = \frac{1}{2} [\alpha(r_t, t) + \lambda(r_t, t)\beta(r_t, t)].$$

De esta manera, si las funciones $\alpha(r_t, t)$ y $\beta(r_t, t)$ son conocidas, entonces $\lambda(r_t, t)$ puede determinarse a partir de la pendiente en el origen de la curva de rendimiento. Demuestre la ecuación anterior derivando parcialmente dos veces la ecuación (46.19) con respecto de T , así

$$\left. \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} \right|_{T=t} = r_t^2 - \alpha(t, r_t) - \lambda(t, r_t)\beta(t, r_t).$$

Por otro lado, a partir de (46.2),

$$\left. \frac{\partial^2 B}{\partial s^2} \right|_{T=t} = r_t^2 - 2 \left. \frac{\partial R}{\partial T} \right|_{T=t}.$$

46.2 En este ejercicio se trata un caso específico, el cual es conocido en la literatura como el modelo de tasa corta de Vasicek. Suponga que $\lambda(r_t, t) \equiv \lambda$. Asimismo, suponga que la tasa corta r_t sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck de la forma:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t,$$

donde a , b y $\sigma > 0$. Esta forma funcional del proceso de la tasa corta ha sido propuesta por Merton (1971). El proceso Ornstein-Uhlenbeck es algunas veces llamado caminata aleatoria elástica, el cual es un proceso de Markov con incrementos normalmente distribuidos. En contraste con la caminata aleatoria (el proceso de Wiener o movimiento Browniano, el cual es un proceso inestable que después de un largo tiempo diverge a valores infinitos, el proceso Ornstein-Uhlenbeck posee una distribución estacionaria. El término de tendencia $a(b - r_t)$ representa una fuerza que jala al proceso hacia su media de largo plazo b . La componente estocástica, σdW_t , la cual tiene una varianza instantánea constante σ^2 , hace que el proceso fluctúe, continuamente, alrededor del nivel de largo plazo b en una forma errática. Demuestre que la esperanza y varianza, condicionales, del proceso dado el nivel actual r_t son, respectivamente,

$$E[r_T | r_t] = b + (r_t - b)e^{-a(T-t)}, \quad t \leq T$$

y

$$\text{Var}[r_T | r_t] = \frac{\sigma^2}{2a} \left(1 - e^{-2a(T-t)} \right), \quad t \leq T.$$

46.3 Evidentemente, el proceso dado en el ejercicio anterior no representa la mejor descripción del comportamiento de la tasa corta. Esta especificación sólo sirve como un ejemplo para ilustrar la teoría desarrollada en este capítulo. Demuestre, utilizando la tasa corta del ejercicio anterior, que el precio del bono cupón cero está dado por:

$$\begin{aligned} B(t, T) = \exp & \left\{ \frac{1}{a} \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) (R(t, \infty) - r) - R(t, \infty)(T-t) \right. \\ & \left. - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left(1 - e^{-a(T-t)} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

donde

$$R(t, \infty) = b + \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}.$$

46.4 Con base en el problema anterior, demuestre que la media $\mu(r_t, t; T)$ y la desviación estándar $\sigma(r_t, t; T)$ del rendimiento instantáneo de un bono cupón cero con vencimiento en T , definidas en las ecuaciones (46.10) y (46.11), satisfacen

$$\mu(r_t, t; T) = r_t + \frac{\lambda\sigma}{a} \left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right)$$

y

$$\sigma(r_t, t; T) = \frac{\sigma}{a} \left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right)$$

válidas para $t \leq T$. Se observa que entre más grande sea el plazo del bono, mayor es la varianza del rendimiento del bono. Para un plazo muy grande, es decir, cuando $T \rightarrow \infty$, la media y la desviación estándar se acercan a los límites

$$\mu(r_t, t; \infty) = r_t + \frac{\lambda\sigma}{a} \quad \text{y} \quad \sigma(r_t, t; \infty) = \frac{\sigma}{a}.$$

46.5 Con respecto al problema anterior demuestre que la estructura de plazos de la tasa de interés tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} R(t, T) = & R(t, \infty) + (r_t - R(t, \infty)) \frac{1}{a(T-t)} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) \\ & + \frac{\sigma^2}{4a^3(T-t)} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2. \end{aligned}$$

46.6 El premio de liquidez inducido por la estructura de plazos del problema anterior se define como $\pi(t, T) = f(t, T) - E[r_T]$. Demuestre que si la tasa corta es conducida por el proceso del ejercicio 46.2, entonces

$$\pi(t, T) = \left(R(t, \infty) - b + \frac{\sigma}{2a^2} e^{-a(T-t)}\right) \left(1 - e^{-a(T-t)}\right).$$

CAPÍTULO 47

MODELO DE TASA CORTA DE VASICEK (II): ENFOQUE DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Conceptos básicos de este capítulo:

- Modelos de equilibrio general para valuación de bonos cupón cero
- Ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero
- Curva de rendimiento
- Tasa forward
- Estimación de parámetros
- Árboles binomiales

47.1 Introducción

El artículo de Oldrich Alfons Vasicek, “An Equilibrium Characterization of the Term Structure”, publicado en 1977, representa una de las contribuciones más importantes a la teoría de tasas de interés en tiempo continuo. En este capítulo se desarrolla una ecuación diferencial parabólica que caracteriza el precio de un bono cupón cero cuando la tasa corta es conducida por un proceso Markoviano de difusión y el mundo es neutral al riesgo.

Un aspecto curioso relacionado con el artículo de Vasicek es que en la última sección de su trabajo se analiza un ejemplo específico para ilustrar cómo se obtiene el precio de un bono cupón cero mediante el uso de ecuaciones diferenciales parciales. Lo sorprendente es que el nombre de Vasicek ha sido asociado más con el ejemplo que presentó en su investigación que con toda la teoría desarrollada a lo largo del artículo. Este ejemplo particular describe la dinámica estocástica de una tasa de interés instantánea que presenta reversión a la media. En dicho ejemplo, el movimiento Browniano desempeña un papel fundamental en el modelado del riesgo de mercado.

En el presente capítulo se obtiene el precio de un bono cupón cero como solución de una ecuación diferencial parcial parabólica. Posteriormente, a partir de los precios del bono, con diferentes vencimientos, se genera la estructura de plazos de la tasa de interés, es decir, se determina la tasa de interés a todos los plazos. En este caso, la curva de rendimiento es función de la tasa corta, del periodo de maduración y de los parámetros del modelo.

47.2 Fundamentos del modelo de Vasicek

En el modelo de Vasicek (1977) se estudia, como caso particular, la dinámica de una tasa corta que presenta reversión a la media hacia un valor constante. Este comportamiento se observa, en muchos casos, cuando se analizan series de tiempo de tasas de corto plazo. A continuación se formaliza la noción de reversión a la media a través de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ su filtración aumentada, la cual representa la información del mercado disponible hasta el tiempo t . En el modelo de Vasicek, la tasa corta, r_t es conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad (47.1)$$

donde a , b y σ son constantes positivas y conocidas. En este caso, como puede observarse, W_t es la única fuente de incertidumbre. En la especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa corta, expresada en (47.1), r_t es forzada a moverse, en promedio, hacia un nivel de largo plazo b a una velocidad a . Si la tasa corta está por arriba de b , ésta es forzada a moverse, en promedio, hacia abajo al nivel b y, viceversa, si la tasa corta está por abajo de b , ésta es forzada a moverse, en promedio, hacia arriba al nivel b .

Por último, vale la pena mencionar que la ecuación (47.1) es una notación simplificada de la integral estocástica

$$\begin{aligned} r_t - r_s &= \int_s^t a(b - r_u)du + \int_s^t \sigma dW_u \\ &= ab(t - s) - a \int_s^t r_u du + \sigma \int_s^t dW_u, \end{aligned} \quad (47.2)$$

ya que el objeto principal de estudio del cálculo estocástico es, precisamente, la integral estocástica. Así pues, cuando se escribe (47.1), se debe estar pensando en (47.2).

47.3 Ecuación diferencial parcial del comportamiento de un bono con tasa corta conducida por el modelo de Vasicek

El modelo de Vasicek forma parte de los llamados modelos de equilibrio general debido al uso de condiciones de no arbitraje para caracterizar el precio de un bono cupón cero a un plazo dado. En esta sección, bajo los supuestos de equilibrio general y tasa corta neutral al riesgo, se resuelve la ecuación diferencial parabólica del comportamiento del precio de un bono cupón cero.

En lo que sigue, el precio de un bono cupón cero que se coloca en t y que al vencimiento T paga una unidad monetaria se denotará mediante $B = B(r_t, t; T)$, o en forma más simple como $B = B(t, T)$. En el caso del modelo de Vasicek, el precio B de un bono cupón cero satisface:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + a(b - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0. \quad (47.3)$$

La condición final corresponde al pago en el vencimiento del bono,

$$B(T, T) = 1.$$

Las condiciones de frontera dependen de a , b , σ y, por supuesto de, r_t . Dado que la ecuación (47.3) no cuenta con derivadas parciales cruzadas, se supone una solución en variables separables de la siguiente forma:

$$B(t, T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}. \quad (47.4)$$

Observe que en la fecha de vencimiento, necesariamente, $A(T, T) = 0$ y $D(T, T) = 0$, ya que $B(T, T) = 1$. Con base en (47.3), las derivadas parciales de B con respecto de t y r_t , así como la segunda derivada parcial con respecto de r_t están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= \left(\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) B, \\ \frac{\partial B}{\partial r_t} &= -D B, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} &= D^2 B. \end{aligned}$$

Después de sustituir las ecuaciones anteriores en (47.3), se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - a(b - r_t)D - r_t &= 0 \\ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - abD + r_t \left(-\frac{\partial D}{\partial t} + aD - 1 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (47.5)$$

Si se deriva (47.5) con respecto a r_t se obtiene

$$-\frac{\partial D}{\partial t} + aD - 1 = 0 \quad (47.6)$$

ó

$$\frac{\partial D}{\partial t} = aD - 1.$$

De hecho, la ecuación diferencial anterior es ordinaria y el uso de derivadas parciales es un abuso de notación. La solución de la ecuación diferencial anterior con condición final $D(T, T) = 0$ está dada por:

$$\begin{aligned} D(t, T) &= D(T, T)e^{-a(T-t)} - e^{-a(T-t)} \int_T^t e^{a(T-s)} ds \\ &= -e^{-a(T-t)} \int_T^t e^{a(T-s)} ds \\ &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}. \end{aligned} \quad (47.7)$$

De esta manera, al sustituir (47.7) en (47.5) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial A}{\partial t} - r_t(aD - 1) + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + (ar_t - ab)D - r_t \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - abD. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = abD - \frac{1}{2}\sigma^2 D^2,$$

o bien,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)} \right)^2. \quad (47.8)$$

La solución de la ecuación diferencial ordinaria anterior, con condición de frontera $A(T, T) = 0$, está dada por:

$$\begin{aligned} A(t, T) &= b(t - T) - b \int_T^t e^{-a(T-s)} ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(t - T) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{a^2} \int_T^t e^{-a(T-s)} ds - \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_T^t e^{-2a(T-s)} ds \\ &= b(t - T) - \frac{b}{a} \left(e^{-a(T-t)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{2a^2}(t - T) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{a^3} \left(e^{-a(T-t)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left(e^{-2a(T-t)} - 1 \right) \\ &= b(t - T) - \frac{b}{a} \left(e^{-a(T-t)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{2a^2}(t - T) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2a^3} \left(e^{-a(T-t)} - 1 \right) + \frac{\sigma^2}{2a^3} \left(e^{-a(T-t)} - 1 \right) \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left(e^{-2a(T-t)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{a^2}(t - T) \left(a^2b - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) + \frac{1}{a^2}D \left(a^2b - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2a^3} \left(e^{-a(T-t)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left(e^{-2a(T-t)} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{a^2}(D(t, T) - T + t) \left(a^2b - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) - \frac{\sigma^2 D^2(t, T)}{4a}. \end{aligned} \quad (47.9)$$

Vale la pena resaltar que la selección de una solución de la forma (47.4) ha permitido transformar una ecuación diferencial parcial de segundo orden, dada en (47.3), en un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, dadas en (47.6) y (47.8). El sistema está acoplado de tal manera que primero se resuelve (47.6) y, posteriormente, con base en su solución, se resuelve (47.8).

47.4 Curva de rendimiento del modelo de Vasicek

En esta sección, a partir de los precios del bono para diferentes vencimientos, $B(t, T)$, $T \geq t$, se genera la estructura de plazos de la tasa de interés, $R(t, T)$, mediante la relación

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T). \quad (47.10)$$

Observe que la sustitución de (47.7) y (47.9) en (47.10) conduce a

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T) \\ &= \frac{1}{T-t} [r_t D(t, T) - A(t, T)] \\ &= \frac{1}{T-t} \left[r_t D(t, T) - (D(t, T) - T+t) \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) + \frac{\sigma^2 D^2(t, T)}{4a} \right] \\ &= r_t \frac{D(t, T)}{T-t} - \left(\frac{D(t, T)}{T-t} - 1 \right) \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) + \frac{\sigma^2 D^2(t, T)}{4a(T-t)} \\ &= r_t \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} - \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} - 1 \right) \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2 (1 - e^{-a(T-t)})^2}{4a^3(T-t)}. \end{aligned}$$

Claramente, la tasa de interés de plazo más largo disponible en el mercado, también llamada tasa larga, $R(t, \infty)$, satisface

$$R(t, \infty) = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}.$$

En consecuencia,

$$R(t, T) = R(t, \infty) + [r_t - R(t, \infty)] \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) + \frac{\sigma^2(T-t)}{4a} \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right)^2$$

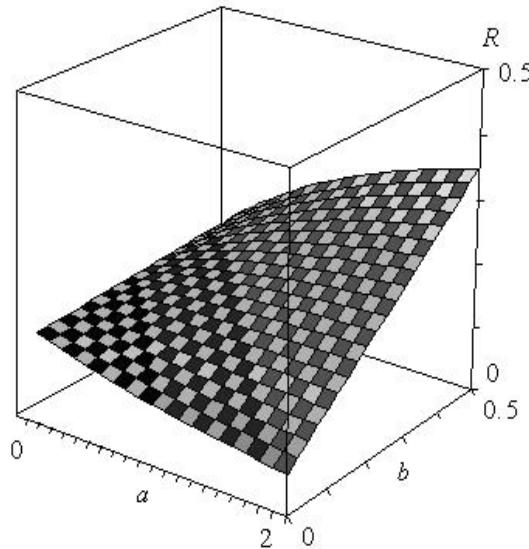
o, en forma más breve,

$$R(t, T) = R(t, \infty) + [r_t - R(t, \infty)] G(t, T) + \frac{\sigma^2(T-t)}{4a} G^2(t, T), \quad (47.11)$$

donde

$$G(t, T) = \frac{D(t, T)}{T-t}.$$

De esta manera, la curva de rendimiento, $R(t, T)$, es una función cuadrática de $G(t, T)$. La Gráfica 47.1 muestra la curva de rendimiento en función de los parámetros a y b . En este caso se fijaron los valores de $T - t = 1$, $\sigma = 0.0239$ y $r_t = 0.15$.

Gráfica 47.1 Curva de rendimiento en función de los parámetros a y b .

47.5 Precio de un bono cupón cero en el modelo de Vasicek

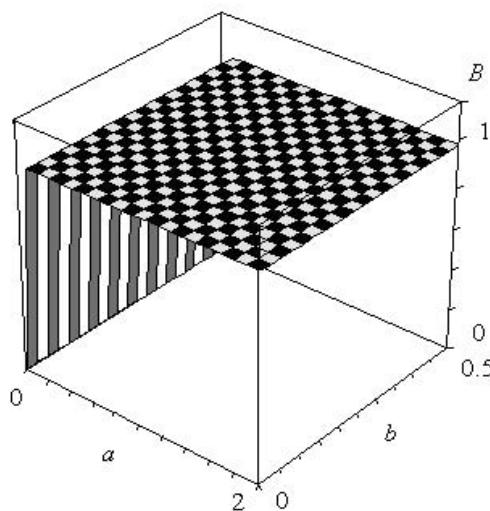
A continuación se expresa el precio de un bono cupón cero en términos de r_t , $R(t, \infty)$ y $D(t, T)$. Observe primero que

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}.$$

Así, en virtud de la ecuación (47.11), el precio de un bono cupón cero que se coloca en t y que al vencimiento T paga una unidad monetaria, asociado al modelo de Vasicek de tasa corta, se puede reescribir como:

$$B(t, T) = \exp \left\{ -R(t, \infty)(T-t) - [r_t - R(t, \infty)] D(t, T) - \frac{\sigma^2}{4a} D^2(t, T) \right\}. \quad (47.12)$$

En la Gráfica 47.2 se muestra el precio de un bono cupón cero en función de los parámetros a y b . En este caso se consideraron fijos los siguientes valores $T-t = 1$, $\sigma = 0.0239$ y $r_t = 0.15$. Observe que a medida que la velocidad, a , con que el proceso se revierte hacia la media aumenta, el precio del bono, B , se incrementa y se estabiliza en valores cercanos a su nominal.

Gráfica 47.2 Precio de un bono cupón cero en función de los parámetros $a \in [0, 2]$ y $b \in [0, \frac{1}{2}]$.

47.6 Tasa forward instantánea del modelo de Vasicek

En esta sección se describe el comportamiento de la tasa forward asociada al modelo de Vasicek. La tasa forward instantánea se calcula mediante la siguiente expresión:

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln B(t, T) = r_t \frac{\partial D}{\partial T} - \frac{\partial A}{\partial T}.$$

A partir de (47.7) y (47.9), se tiene que

$$\frac{\partial D}{\partial T} = e^{-a(T-t)}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T} &= -b + be^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} - \frac{\sigma^2}{a^2} e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} e^{-2a(T-t)} \\ &= -b + be^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)}\right) \\ &= -b + be^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(t, T) &= r_t e^{-a(T-t)} + b - be^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2 \\ &= b - (b - r_t)e^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2} D^2(t, T). \end{aligned} \tag{47.13}$$

En este caso, se verifica inmediatamente que $f(t, \infty) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} f(t, T) = b - (\sigma^2/2a^2)$.

47.7 Aplicación del modelo de Vasicek

En esta sección se lleva a cabo una aplicación del modelo de Vasicek. Asimismo, se muestra cómo los parámetros pueden ser estimados utilizando un modelo de regresión lineal simple con el supuesto estándar de errores normales no correlacionados, o bien con un proceso autoregresivo de orden uno con tendencia.

Para fines prácticos, el modelo de Vasicek puede plantearse en términos discretos como una ecuación estocástica en diferencias. Si se escribe $\beta_0 = ab$ y $\beta_1 = 1 - a$, una versión discreta de (47.1) es

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{47.14}$$

donde $\{\varepsilon_t\}$ son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con media cero y varianza σ^2 . La media (incondicional) de r_t es

$$E[r_t] = \beta_0 / (1 - \beta_1) = b$$

y su varianza (incondicional) está dada por

$$\text{Var}[r_t] = \sigma^2 / (1 - \beta_1^2) = \sigma^2 / [1 - (1 - a)^2].$$

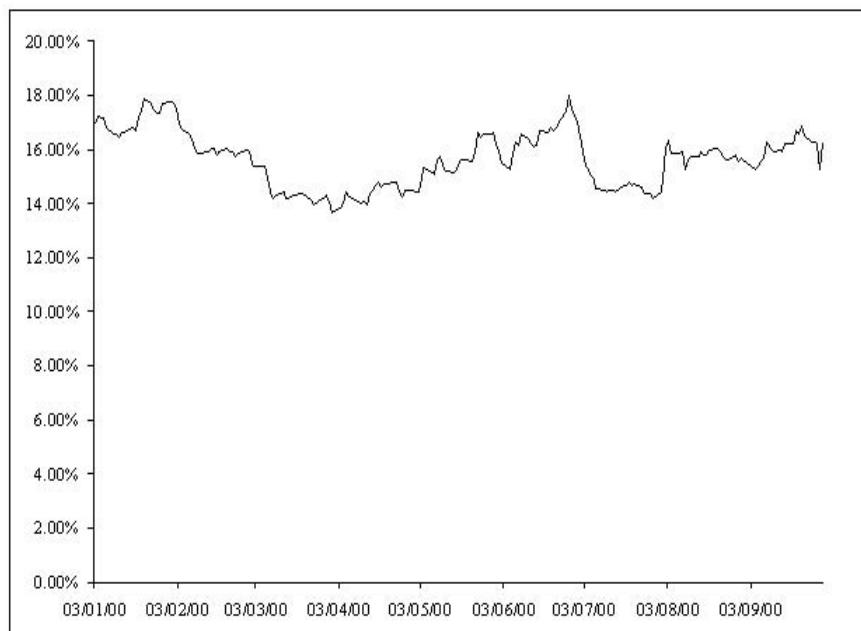
La varianza condicional de r_t , dado r_{t-1} , es por supuesto σ^2 . La Gráfica 47.3 muestra el comportamiento de la tasa corta (rendimiento anualizado de CETES a un día), entre el 3 de enero de 2000 y el 29 de octubre de 2000. Los resultados de la estimación de los parámetros del modelo (47.14), con errores estándar entre paréntesis, son los siguientes:

$$\begin{aligned} r_t &= 0.0289 + 0.8305 r_{t-1}. \\ &\quad (0.0075) \quad (0.02819) \end{aligned} \tag{47.15}$$

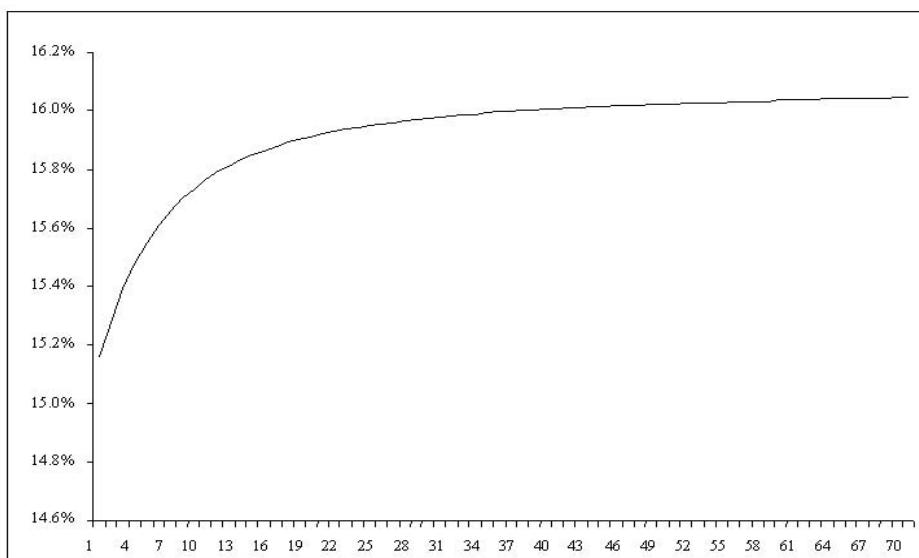
En este caso, se puede apreciar que las estimaciones son significativamente distintas de cero con un 95% de confianza. La Gráfica 47.4 muestra la estructura de plazos definida a través de la

ecuación (47.10) con $a=0.1695$, $b=0.1705$, $r_t=0.15$ y $\sigma = 0.0239$. Como puede observarse, la estructura de plazos es creciente y, en el largo plazo, se estabiliza en un valor cercano al 16%.

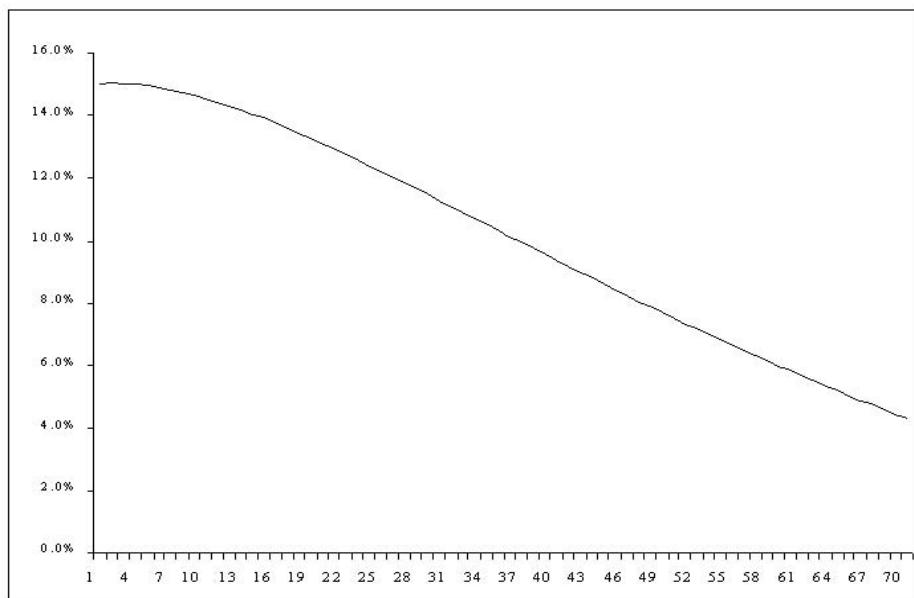
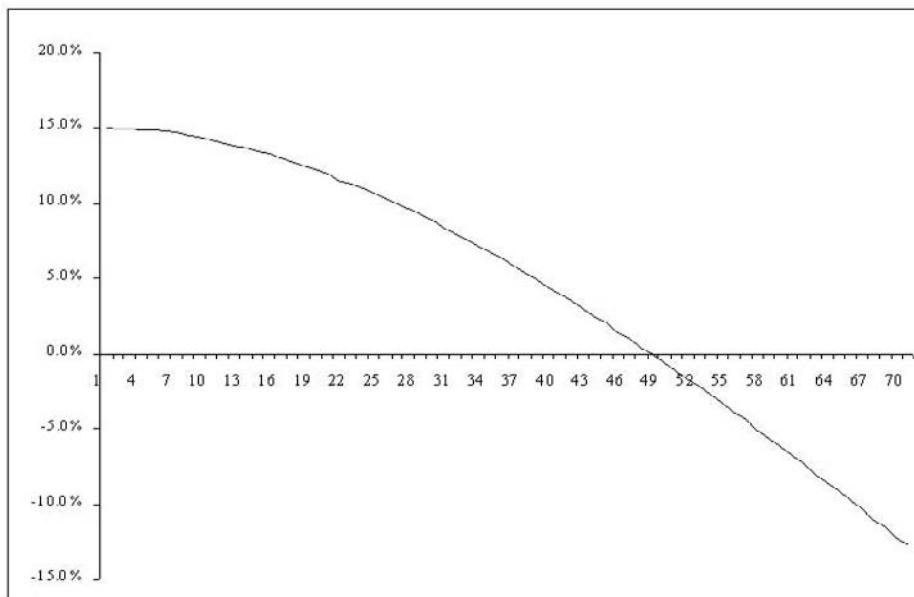
Las Gráficas 47.5-47.8 muestran el comportamiento de la estructura de plazos para diferentes valores del parámetro a , manteniendo los otros parámetros en los valores estimados. Se observa, primero, que $R(t, T)$ puede tener cualquier comportamiento (cóncava, convexa, etc.). En segundo lugar, $R(t, T)$ puede ser negativa para algunos valores de los parámetros. Cabe destacar que en el caso estimado, la función $R(t, T)$ es siempre positiva y creciente.

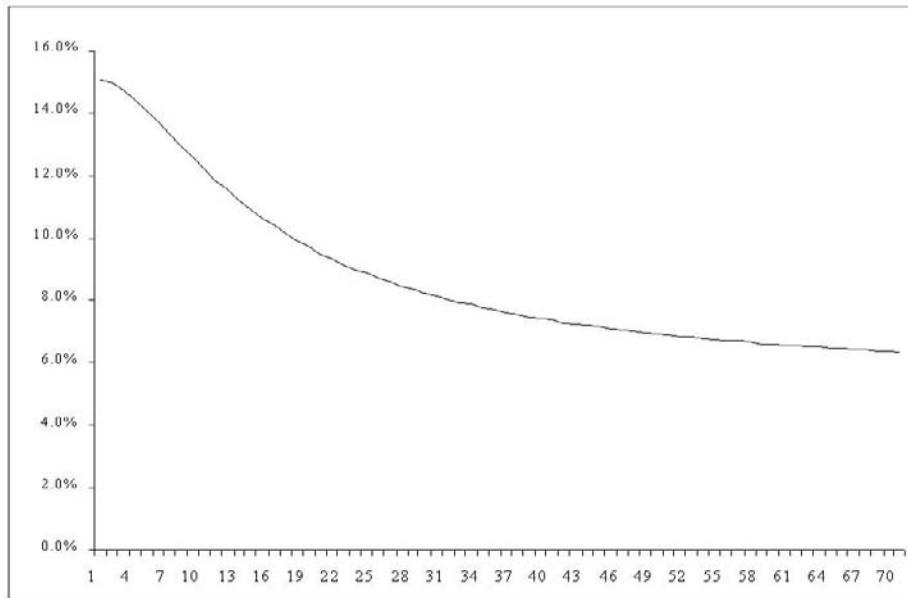
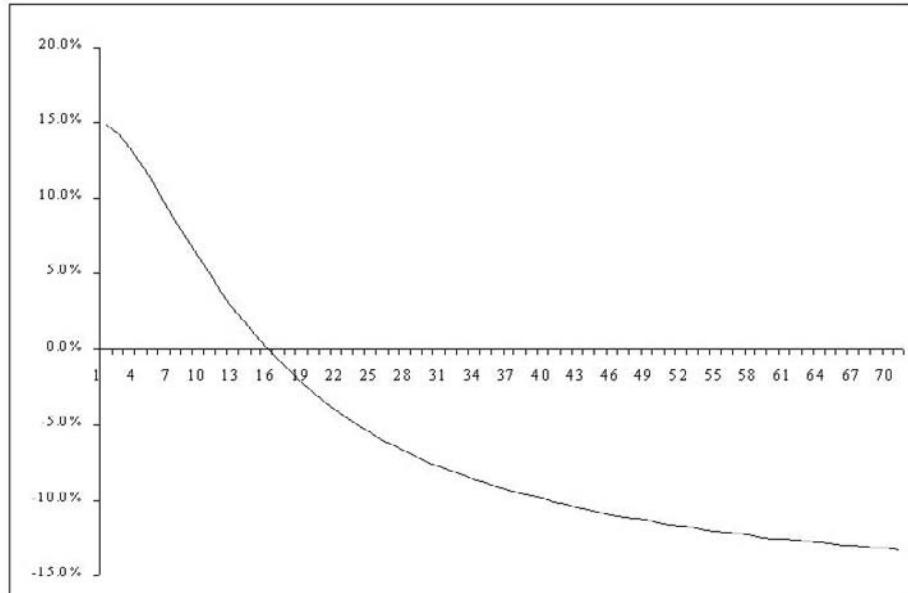


Gráfica 47.3 Comportamiento de la tasa corta anualizada
(3 de enero de 2000 - 29 de octubre de 2000).



Gráfica 47.4 Estructura de plazos estimada (eje horizontal en días).

Gráfica 47.5 Estructura de plazos con $a=0.0316$.Gráfica 47.6 Estructura de plazos con $a=0.0101$.

Gráfica 47.7 Estructura de plazos con $\sigma=0.0834$.Gráfica 47.8 Estructura de plazos con $\sigma=0.1414$.

47.8 Modelo de Vasicek y árboles binomiales

En esta sección se presenta una versión discreta del modelo de Vasicek en donde, en términos de árboles binomiales, se determina la dinámica de la tasa corta. En el modelo de Vasicek se cumple que

$$r_h = r_0 e^{-ah} + b (1 - e^{-ah}) + \sigma \int_0^h e^{-a(h-s)} dW_s. \quad (47.16)$$

Por lo tanto, la esperanza condicional de r_h , dado r_0 , satisface

$$E[r_h | r_0] = r_0 e^{-ah} + b (1 - e^{-ah}) \quad (47.17)$$

y la varianza (condicional) está dada por

$$\text{Var}[r_h|r_0] = \sigma^2 \int_0^h e^{-2a(h-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2ah}). \quad (47.18)$$

Suponga que $h > 0$ es suficientemente pequeña de tal manera que se puede utilizar la aproximación $e^{-ah} \approx 1 - ah$. De esta forma, se puede escribir

$$\begin{aligned} r_h &\approx r_0(1 - ah) + bah + \sigma \int_0^h (1 - a(h-s)) dW_s \\ &= r_0 + a(b - r_0)h + \sigma W_h - \sigma ah W_h + \sigma a \int_0^h s dW_s \\ &= r_0 + a(b - r_0)h + \sigma W_h(1 - ah) + \sigma a \int_0^h s dW_s. \end{aligned} \quad (47.19)$$

Observe que

$$\int_0^h s dW_s = h W_h - \int_0^h W_s ds$$

y, si h es suficientemente pequeña,

$$\int_0^h W_s ds \rightarrow 0,$$

cuando $h \rightarrow 0$. En consecuencia, si h es suficientemente pequeña, se sigue que

$$r_h \approx r_0 + a(b - r_0)h + \sigma W_h, \quad (47.20)$$

así,

$$\mathbb{E}[r_h|r_0] \approx r_0 + a(b - r_0)h \quad (47.21)$$

y

$$\text{Var}[r_h|r_0] \approx \sigma^2 h. \quad (47.22)$$

Las ecuaciones (47.21)-(47.22) serán utilizadas en la siguiente sección para construir un árbol binomial.

47.8.1 Construcción del árbol de la tasa corta

A continuación se construye un árbol que parte de la tasa corta inicial, r_0 , y que después de un periodo de tiempo de longitud h la tasa corta puede tomar dos posibles valores r_{11} y r_{12} con probabilidad $\frac{1}{2}$, específicamente

$$r_{11} = r_0 + a(b - r_0)h + \sigma \sqrt{h}$$

y

$$r_{12} = r_0 + a(b - r_0)h - \sigma \sqrt{h}.$$

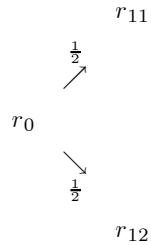
En este caso, la media y la varianza de una tasa corta aleatoria, r_1 , que puede tomar los valores r_{11} y r_{12} están dadas, respectivamente, por

$$r_0 + a(b - r_0)h = \frac{r_{11} + r_{12}}{2}$$

y

$$\sigma^2 h = \frac{(r_{11} - f_1)^2 + (r_{12} - f_1)^2}{2}.$$

Los posibles valores de la tasa corta se muestran en el árbol de la Gráfica 47.9.

Gráfica 47.9 Expansión del árbol binomial de una etapa para r_t .

Para la segunda etapa se construyen ramas con posibles valores r_{21} , r_{22} , r_{23} y r_{24} de tal manera que su promedio sea igual a $r_1 + a(b - r_1)h$. Una posibilidad es que

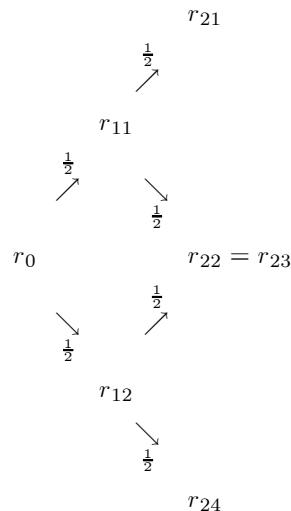
$$r_{21} = r_1 + a(b - r_1)h + 2\sigma\sqrt{h},$$

$$r_{22} = r_{23} = r_1 + a(b - r_1)h + 0 \cdot \sigma\sqrt{h}$$

y

$$r_{24} = r_1 + a(b - r_1)h - 2\sigma\sqrt{h}.$$

La Gráfica 47.10 muestra el árbol binomial resultante para dos etapas.

Gráfica 47.10 Expansión del árbol binomial de dos períodos para r_t .

Si se procede como antes, en la tercera etapa se tendrá que

$$r_{31} = r_2 + a(b - r_2)h + 3\sigma\sqrt{h},$$

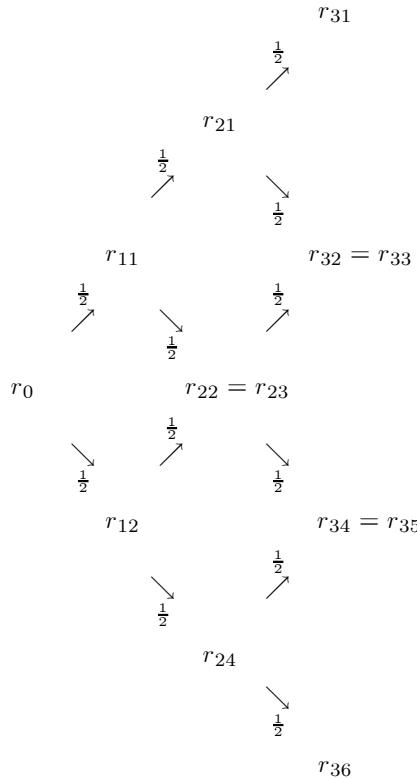
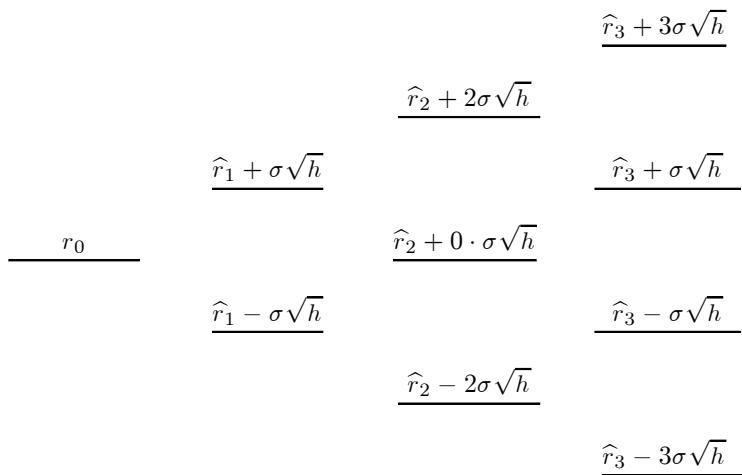
$$r_{32} = r_{33} = r_2 + a(b - r_2)h + \sigma\sqrt{h},$$

$$r_{34} = r_{35} = r_2 + a(b - r_2)h - \sigma\sqrt{h}$$

y

$$r_{36} = r_2 + a(b - r_2)h - 3\sigma\sqrt{h}.$$

En la Gráfica 47.11 se muestra el árbol binomial para tres períodos y en la Gráfica 47.12 se muestra una representación alternativa de dicho árbol donde $\tilde{r}_j = r_{j-1} + a(b - r_{j-1})h$, $j = 1, 2, \dots$

Gráfica 47.11 Expansión del árbol binomial de tres períodos para r_t .Gráfica 47.12 Expansión alternativa del árbol binomial de tres períodos para r_t .

47.8.2 Construcción del árbol hacia adelante del precio del bono

Los posibles precios de los bonos para diferentes vencimientos se calculan hacia adelante de la siguiente forma. Si $B_0 = 1$ y $B_1 = (1 + r_0 h)B_0$, entonces

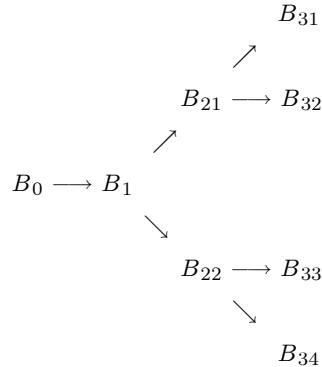
$$B_{21} = (1 + r_{11} h)B_1 \quad \text{y} \quad B_{22} = (1 + r_{12} h)B_1. \quad (47.23)$$

De la misma manera,

$$B_{31} = (1 + r_{21} h)B_{21}, \quad B_{32} = (1 + r_{22} h)B_{21}, \quad (47.24)$$

$$B_{33} = (1 + r_{23}h)B_{22} \quad \text{y} \quad B_{34} = (1 + r_{24}h)B_{22}. \quad (47.25)$$

Observe que aunque $r_{22} = r_{23}$, B_{32} no es necesariamente igual a B_{33} . En este caso, se dice que el árbol no es recombinante (recombinable); véase la Gráfica 47.13.



Gráfica 47.13 Árbol hacia adelante del precio de un bono cupón cero.

47.8.3 Construcción del árbol hacia atrás del precio del bono

Para calcular el precio de un bono en $t = 0$ que vence dentro de tres períodos se utiliza el siguiente proceso recurrente hacia atrás. Suponga que los posibles valores r_{11} , r_{12} , r_{21} , r_{22} , r_{23} y r_{24} son conocidos, y que

$$B_{31} = B_{32} = B_{33} = B_{34} = 1,$$

entonces

$$B_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{B_{31}}{1 + r_{21}h} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{B_{32}}{1 + r_{22}h} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + r_{21}h} + \frac{1}{1 + r_{22}h} \right),$$

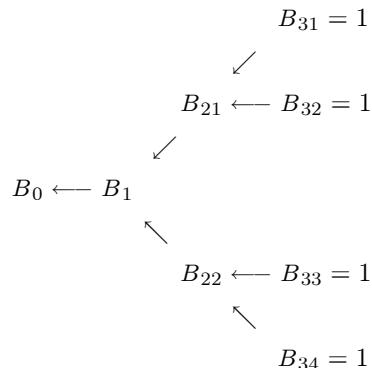
$$B_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{B_{33}}{1 + r_{23}h} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{B_{34}}{1 + r_{24}h} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + r_{23}h} + \frac{1}{1 + r_{24}h} \right),$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{B_{21}}{1 + r_{11}h} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{B_{22}}{1 + r_{12}h} \right)$$

y

$$B_0 = \frac{B_1}{1 + r_0h}.$$

La Gráfica 47.14 muestra el árbol hacia atrás para obtener el precio de un bono cupón cero.



Gráfica 47.14 Árbol hacia atrás del precio de un bono cupón cero.

47.9 Bibliografía sugerida

- Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No. 2, pp. 177-188.
- Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2002). "Cobertura de tasas de interés con futuros del mercado mexicano de derivados: un modelo estocástico de duración y convexidad". *El Trimestre Económico*, Vol. 59(2), No. 274, pp. 227-250.

47.10 Ejercicios

47.1 Muestre que

$$A(t, T) = b(t - T) - b \int_T^t e^{-a(T-s)} ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(t - T)$$

es solución de

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2, \quad A(T, T) = 0.$$

Repita el ejercicio anterior con el cambio de variable $\tau = T - t$.

47.2 Pruebe que cuando $a = 0$, entonces $D(t, T) = T - t$ y $A(t, T) = \sigma^2/6(T - t)^3$.

47.3 Demuestre que

$$f(t, T) = -r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t},$$

en cuyo caso es inmediato que

$$f(t, T) = abD - \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + r_t e^{-a(T-t)}.$$

Verifique también que $f(t, \infty) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} f(t, T) = b - (\sigma^2/2a^2)$.

47.4 Demuestre que la tasa forward satisface

$$f(t, T) = r_T - \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s - \frac{1}{2}\sigma^2 D^2(t, T).$$

Solución: Es suficiente utilizar la ecuación (47.13) y observar que

$$r_T = r_t e^{-a(T-t)} + b \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s.$$

47.5 Demuestre que la tasa forward instantánea, $f = f(t, T)$, del modelo de Vasicek satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden no homogénea

$$\frac{\partial f}{\partial T} + af = ab + \frac{\sigma^2}{2a} \left(e^{-2a(T-t)} - 1\right).$$

Solución: Observe primero que

$$f(t, T) = b - (b - r_t)e^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2}D^2(t, T).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial T} &= a(b - r_t)e^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{a} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) e^{-a(T-t)} \\
 &= -a \left[b - (b - r_t)e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) e^{-a(T-t)} \right] + ab \\
 &= -a \left[b - (b - r_t)e^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{a^2} \left(\frac{1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)}}{2}\right) \right] + ab \\
 &\quad + \frac{\sigma^2}{2a} \left(e^{-2a(T-t)} - 1\right) \\
 &= -af + ab + \frac{\sigma^2}{2a} \left(e^{-2a(T-t)} - 1\right).
 \end{aligned}$$

47.6 La duración y convexidad del precio de un bono se definen, respectivamente, como

$$\gamma(t, T) = -\frac{\partial B}{\partial r_t} \frac{1}{B}$$

y

$$\zeta(t, T) = \frac{\partial \gamma}{\partial r_t} \frac{1}{B} = \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \frac{1}{B}.$$

Demuestre que en el caso del modelo de Vasicek

$$\gamma(t, T) = D(t, T) \quad \text{y} \quad \zeta(t, T) = D^2(t, T).$$

47.7 Considere la ecuación diferencial parcial del comportamiento de un bono cupón cero asociado al modelo de Vasicek

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + [a(b - r_t) - \lambda\sigma] \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0,$$

donde λ (=constante) es el precio de mercado del riesgo. Demuestre que

$$R(t, \infty) = b - \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}.$$

En este caso $R(t, T)$ y $B(r_t, t; T)$ se calculan como en (47.11) y (47.12), pero tomando en cuenta el valor de $R(t, \infty)$.

47.8 Considere la estructura de plazos de la tasa de interés generada con el modelo de Vasicek, a saber,

$$\begin{aligned}
 R(t, T) &= R(t, \infty) + [r_t - R(t, \infty)] \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) \\
 &\quad + \frac{\sigma^2(T-t)}{4a} \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Esta curva de rendimiento parte del nivel actual r_t de la tasa corta y se aproxima asintóticamente a $R(t, \infty)$ cuando $T \rightarrow \infty$. Demuestre que si

$$r_t \leq R(t, \infty) - \frac{\sigma^2}{4a^2},$$

entonces la curva de rendimiento es monótonamente creciente. Si

$$R(t, \infty) - \frac{\sigma^2}{4a^2} < r_t < R(t, \infty) + \frac{\sigma^2}{2a^2},$$

la curva de rendimiento tiene una joroba. Por último, si

$$r_t \geq R(t, \infty) + \frac{\sigma^2}{2a^2},$$

la curva de rendimiento es monótonamente decreciente.

47.9 Considere la ecuación (47.6) dada por:

$$-\frac{\partial D}{\partial t} + aD - 1 = 0.$$

Obtenga mediante la separación de variables la función $D(t, T)$.

Solución:

$$\frac{dD}{aD - 1} = dt.$$

De esta manera,

$$\int_0^{D(t, T)} \frac{du}{au - 1} = -(T - t).$$

47.10 Considere el siguiente modelo con dos factores

$$dx_t = a_x(b_x - x_t)dt + \sigma_x dW_{xt},$$

$$dy_t = a_y(b_y - y_t)dt + \sigma_y dW_{yt},$$

$$E[dW_{xt}dW_{yt}] = \rho dt$$

y

$$r_t = x_t + y_t.$$

Demuestre que

$$\begin{aligned} R(t, T) = & b_x + \left(\frac{1 - e^{-a_x(T-t)}}{a_x(T-t)} \right) + b_y + \left(\frac{1 - e^{-a_y(T-t)}}{a_y(T-t)} \right) \\ & - \frac{\sigma_x^2}{a_x^2} \left[1 + \frac{1 - e^{-2a_x(T-t)}}{2a_x(T-t)} - 2 \left(\frac{1 - e^{-a_x(T-t)}}{a_x(T-t)} \right) \right] \\ & - \frac{\sigma_y^2}{a_y^2} \left[1 + \frac{1 - e^{-2a_y(T-t)}}{2a_y(T-t)} - 2 \left(\frac{1 - e^{-a_y(T-t)}}{a_y(T-t)} \right) \right] \\ & - \frac{\sigma_x \sigma_y \rho}{a_x a_y} \left[1 - \frac{1 - e^{-a_x(T-t)}}{a_x(T-t)} - \frac{1 - e^{-a_y(T-t)}}{a_y(T-t)} + \frac{1 - e^{-(a_x+a_y)(T-t)}}{(a_x + a_y)(T-t)} \right]. \end{aligned}$$

47.11 Suponga que $h = 0.25$, $a = 0.039$, $b = 0.061$, $\sigma = 0.011$ y $r_0 = 0.05$. Utilice árboles binomiales para determinar la dinámica de la tasa corta. A través de árboles binomiales hacia adelante determine los precios de un bono cupón cero a diferentes plazos (cuatro etapas). Asimismo, mediante árboles binomiales hacia atrás determine los precios de un bono cupón cero a diferentes plazos.

CAPÍTULO 48

MODELO DE TASA CORTA DE VASICEK (III): ENFOQUE PROBABILISTA

Conceptos básicos de este capítulo:

- Proceso de Ornstein-Uhlenbeck
- Distribución de la tasa corta en el modelo de Vasicek
- Valuación de bonos cupón cero
- Curva de rendimiento

48.1 Introducción

En el capítulo anterior se presentó el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales para determinar el precio de un bono cupón cero cuando la tasa corta es conducida por el modelo de Vasicek. A continuación se discute un desarrollo alternativo para valuar el precio de un bono con base en las propiedades de la distribución de la tasa corta.

48.2 El modelo de Vasicek

Sea $(W_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ y considere la siguiente dinámica de la tasa corta:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad (48.1)$$

donde a , b y σ son cantidades positivas, constantes y conocidas. La expresión (48.1) es conocida en la literatura como el proceso de tasa corta del modelo de Vasicek para valuar bonos cupón cero. En esta sección se determina la distribución de la tasa corta y se establece la relación de los parámetros de (48.1) con la media y la varianza de r_t .

48.3 El proceso de Ornstein-Uhlenbeck

En esta sección se estudia uno de los conceptos más importantes en la teoría de procesos estocásticos en tiempo continuo, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck, el cual está relacionado con el modelo de Vasicek. Considere el siguiente cambio de variable para r_t ,

$$m_t = ar_t - ab, \quad (48.2)$$

entonces el modelo de Vasicek puede reescribirse como

$$dm_t = -am_t dt + a\sigma dW_t. \quad (48.3)$$

Esta ecuación es conocida como el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Una característica distintiva del proceso (48.3) es que su solución es similar a la de una ecuación diferencial no homogénea de primer orden, es decir,

$$\begin{aligned} m_t &= m_0 e^{-at} + a\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s \\ &= m_0 e^{-at} + a\sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s, \end{aligned} \quad (48.4)$$

lo cual se puede verificar como sigue. Sea

$$X_t = m_t e^{at}.$$

En este caso, una aplicación simple del lema de Itô a $X_t = X_t(m_t, t)$ con el proceso subyacente definido en (48.4) conduce a

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(\frac{\partial X_t}{\partial t} - \frac{\partial X_t}{\partial m_t} am_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial m_t^2} a^2 \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial X}{\partial m_t} a \sigma dW_t \\ &= (am_t e^{at} - am_t e^{at}) dt + a \sigma e^{at} dW_t \\ &= a \sigma e^{at} dW_t. \end{aligned}$$

Es decir, $d(m_t e^{at}) = a \sigma e^{at} dW_t$. Después de integrar la ecuación anterior, se tiene que

$$m_t e^{at} - m_0 = a \sigma \int_0^t e^{as} dW_s.$$

Este resultado lleva, inmediatamente, a (48.4). Por último, observe que una forma alternativa, muy útil, de escribir la ecuación (48.4) es

$$\begin{aligned} m_{t+h} &= m_t e^{-ah} + a \sigma \int_t^{t+h} e^{-a(t+h-s)} dW_s \\ &= e^{-ah} \left(m_t + a \sigma \int_t^{t+h} e^{-a(t-s)} dW_s \right) \end{aligned}$$

válida para $h > 0$.

48.4 Distribución de la tasa corta en el modelo de Vasicek

En esta sección se determina la distribución de la tasa corta en el modelo de Vasicek. Observe, primero, que a partir de las ecuaciones (48.2) y (48.4), se tiene que

$$\begin{aligned} ar_t - ab &= (ar_0 - ab) e^{-at} + a \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s \\ r_t &= r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s \end{aligned} \tag{48.5}$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} r_{t+h} &= r_t e^{-ah} + b(1 - e^{-ah}) + \sigma \int_t^{t+h} e^{-a(t+h-s)} dW_s \\ &= e^{-ah} \left(r_t + b(e^{ah} - 1) + \sigma \int_t^{t+h} e^{-a(t-s)} dW_s \right) \end{aligned}$$

para toda $h > 0$. Claramente, a partir de (48.5), r_t se distribuye normal con media (condicional)

$$E[r_t | r_0] = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) \tag{48.6}$$

y varianza (condicional)

$$\text{Var}[r_t | r_0] = \sigma^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}), \tag{48.7}$$

en donde se ha utilizado la propiedad

$$\text{Var} \left[\int_0^t g(s) dW_s \mid \mathcal{F}_0 \right] = E \left[\left(\int_0^t g(s) dW_s \right)^2 \mid \mathcal{F}_0 \right] = \int_0^t [g(s)]^2 ds$$

válida cuando la última integral es finita. Aquí, \mathcal{F}_0 es toda la información relevante disponible en el tiempo $t = 0$.

48.5 Casos especiales de la distribución inicial de la tasa corta

A continuación se discuten algunos casos particulares sobre la distribución de la tasa corta. En virtud de (48.6) y (48.7), si se supone $r_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2a)$ con $\text{Cov}(r_t, W_t) = 0$, entonces

$$E[r_t] = E\{E[r_t|r_0]\} = b(1 - e^{-at}) \quad (48.8)$$

y

$$\text{Var}[r_t] = \text{Var}\{E[r_t|r_0]\} + E\{\text{Var}[r_t|r_0]\} = \frac{\sigma^2}{2a}e^{-2at} + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) = \frac{\sigma^2}{2a}. \quad (48.9)$$

Asimismo, si $r_0 \sim \mathcal{N}(b, \sigma^2/2a)$ y $\text{Cov}(r_t, W_t) = 0$, entonces

$$E[r_t] = E\{E[r_t|r_0]\} = b \quad (48.10)$$

y

$$\text{Var}[r_t] = \text{Var}\{E[r_t|r_0]\} + E\{\text{Var}[r_t|r_0]\} = \frac{\sigma^2}{2a}. \quad (48.11)$$

En virtud de (48.10), el proceso r_t presenta reversión a la media $E[r_t] = b$.

48.6 Determinación del precio de un bono cupón cero

El precio de un bono cupón cero que se emite en t y que paga una unidad monetaria en el tiempo T satisface

$$B(r_t, t; T) = E \left[\exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (48.12)$$

Considere ahora la suma de las tasas cortas instantáneas durante $[t, T]$:

$$I(t, T) = \int_t^T r_s ds.$$

A continuación se verá que $I(t, T)$ es normal. Del modelo de Vasicek se sigue que

$$\int_t^T dr_s = ab(T - t) - a \int_t^T r_s ds + \sigma \int_t^T dW_s.$$

Equivalentemente,

$$r_T - r_t = ab(T - t) - aI(t, T) + \sigma \int_t^T dW_s.$$

En consecuencia,

$$I(t, T) = -\frac{1}{a}(r_T - r_t) + b(T - t) + \frac{\sigma}{a} \int_t^T dW_s. \quad (48.13)$$

Por otro lado, del mismo modelo de Vasicek se tiene que si en (48.5) se sustituye 0 por t y t por T , es decir, se cambia de solución inicial y valor final, entonces

$$r_T = r_t e^{-a(T-t)} + b \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} r_T - r_t &= r_t \left(e^{-a(T-t)} - 1 \right) + b \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s \\ &= (b - r_t) \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s. \end{aligned} \quad (48.14)$$

A partir de (48.13) y (48.14), se encuentra que

$$\begin{aligned} I(t, T) &= -\frac{1}{a} \left[(b - r_t) \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s \right] \\ &\quad + b(T-t) + \frac{\sigma}{a} \int_t^T dW_s \\ &= b(T-t) + (r_t - b) \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) + \sigma \int_t^T \left(\frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a} \right) dW_s. \end{aligned} \quad (48.15)$$

Es decir, $I(t, T)$ sigue una distribución normal. Ahora bien, se sabe que la función generatriz de momentos de una variable aleatoria $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ está dada por

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \exp \{tE[X] + \frac{1}{2}t^2\text{Var}[X]\}.$$

En particular, si $t = 1$ y $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, entonces

$$E[e^X] = \exp \{E[X] + \frac{1}{2}\text{Var}[X]\}.$$

Por lo tanto, dado que $I(t, T) = \int_t^T r_s ds$ es normal, se tiene que el precio del bono, $B(r_t, t; T)$, satisface

$$B(r_t, t; T) = E \{ \exp(-I(t, T)) | \mathcal{F}_t \} = \exp \{ -E[I(t, T)] | \mathcal{F}_t + \frac{1}{2}\text{Var}[I(t, T)] | \mathcal{F}_t \}. \quad (48.16)$$

A partir de (48.15), se encuentra que

$$E[I(t, T) | \mathcal{F}_t] = b(T-t) + (r_t - b) \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \quad (48.17)$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}[I(t, T) | \mathcal{F}_t] &= \sigma^2 \int_t^T \left(\frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a} \right)^2 ds \\ &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T-t - 2 \int_t^T e^{-a(T-s)} ds + \int_t^T e^{-2a(T-s)} ds \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left[T-t - \frac{2}{a} \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) + \frac{1}{2a} \left(1 - e^{-2a(T-t)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (48.18)$$

Como puede observarse, la propiedad de normalidad de la tasa corta simplifica el cálculo del precio teórico del bono. Así pues, a partir de (48.16), (48.17) y (48.18), se puede verificar que

$$B(r_t, t; T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}, \quad (48.19)$$

donde

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

y

$$A(t, T) = \frac{1}{a^2} (D(t, T) - T + t) (a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2) - \frac{\sigma^2 D(t, T)^2}{4a}.$$

Por último, la curva de rendimiento, $R(t, T)$, se calcula, mediante (48.19), como

$$R(t, T) = \frac{r_t D(t, T) - A(t, T)}{T-t}. \quad (48.20)$$

48.7 Obtención alternativa del precio de un bono cupón cero

A continuación se obtiene de manera alternativa el precio de un bono cupón cero cuando la tasa corta es conducida por el modelo de Vasicek. Para ello, defina, primero, el siguiente cambio de variable:

$$Y_t = r_t - b. \quad (48.21)$$

En este caso, se obtiene el siguiente proceso de Ornstein-Uhlenbeck

$$dY_t = -aY_t dt + \sigma dW_t. \quad (48.22)$$

Es fácil verificar que la solución de la ecuación diferencial estocástica está dada por la siguiente expresión:

$$Y_t = Y_0 e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$$

ó

$$\begin{aligned} Y_{t+h} &= Y_t e^{-ah} + \sigma \int_t^{t+h} e^{-a(t+h-s)} dW_s \\ &= e^{-ah} \left(Y_t + \sigma \int_t^{t+h} e^{-a(t-s)} dW_s \right) \end{aligned} \quad (48.23)$$

válida para toda $h > 0$. Observe que, en este caso, el precio de un bono cupón cero satisface la siguiente relación

$$\begin{aligned} B(t, T) &= E \left\{ \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\ &= E \left\{ \exp \left(- \int_t^T (Y_s + b) ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\ &= e^{-b(T-t)} E \left\{ \exp \left(- \int_t^T Y_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\}. \end{aligned} \quad (48.24)$$

Sea

$$\begin{aligned} G(t, T) &= \int_t^T Y_s ds \\ &= Y_t \int_t^T e^{-a(s-t)} ds + \sigma \int_t^T \left(\int_t^s e^{-a(s-u)} dW_u \right) ds. \end{aligned} \quad (48.25)$$

Claramente,

$$\begin{aligned} E[G(t, T) \mid \mathcal{F}_t] &= Y_t \int_t^T e^{-a(s-t)} ds \\ &= (r_t - b) \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right). \end{aligned}$$

Por otro lado, observe que si $t < u < s$, entonces

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(Y_s, Y_u) &= \text{Cov} \left(\sigma \int_t^s e^{-a(s-x)} dW_x, \sigma \int_t^u e^{-a(u-x)} dW_x \right) \\
 &= \sigma^2 e^{-a(s+u)} \text{Cov} \left(\int_t^s e^{ax} dW_x, \int_t^u e^{ax} dW_x \right) \\
 &= \sigma^2 e^{-a(s+u)} \text{Cov} \left(\int_t^u e^{ax} dW_x + \int_u^s e^{ax} dW_x, \int_t^u e^{ax} dW_x \right) \\
 &= \sigma^2 e^{-a(s+u)} \text{Cov} \left(\int_t^u e^{ax} dW_x, \int_t^u e^{ax} dW_x \right) \\
 &\quad + \sigma^2 e^{-a(s+u)} \text{Cov} \left(\int_u^s e^{ax} dW_x, \int_t^u e^{ax} dW_x \right) \\
 &= \sigma^2 e^{-a(s+u)} \text{Var} \left[\int_t^u e^{ax} dW_x \right] \\
 &= \sigma^2 e^{-a(s+u)} \int_t^u e^{2ax} dx \\
 &= \sigma^2 e^{-a(s+u)} \left(\frac{e^{2au} - e^{2at}}{2a} \right).
 \end{aligned}$$

Observe que en la cuarta igualdad se ha utilizado el hecho de que incrementos del movimiento Browniano son independientes. En resumen,

$$\text{Cov}(Y_s, Y_u) = \sigma^2 e^{-a(s+u)} \left(\frac{e^{2a \min(s,u)} - e^{2at}}{2a} \right). \quad (48.26)$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[G(t, T) \mid \mathcal{F}_t] &= \text{Cov} \left(\int_t^T Y_s ds, \int_t^T Y_u du \right) \\
 &= \int_t^T \int_t^T \text{Cov}(Y_s, Y_u) ds du \\
 &= \frac{\sigma^2}{2a} \int_t^T \int_t^T e^{-a(s+u)} \left(e^{2a \min(s,u)} - e^{2at} \right) ds du.
 \end{aligned} \quad (48.27)$$

Si se definen los siguientes cambios de variable:

$$y = s - t$$

y

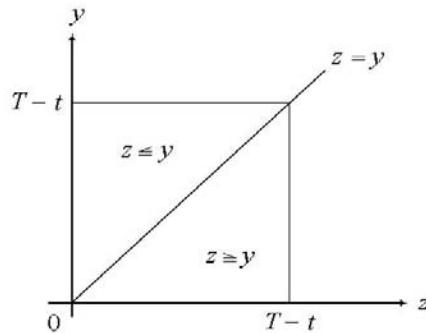
$$z = u - t,$$

entonces la varianza (condicional) de $G(t, T)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[G(t, T) \mid \mathcal{F}_t] &= \frac{\sigma^2}{2a} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{-a(y+z+2t)} \left(e^{2a \min(y,z)+2at} - e^{2at} \right) dy dz \\
 &= \frac{\sigma^2}{2a} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{-a(y+z)} \left(e^{2a \min(y,z)} - 1 \right) dy dz \\
 &= \frac{\sigma^2}{2a} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{-a(y+z-2 \min(y,z))} dy dz - \frac{\sigma^2}{2a} \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{-a(y+z)} dy dz.
 \end{aligned} \quad (48.28)$$

La segunda integral en (48.28) se calcula de manera inmediata

$$\begin{aligned}
 \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{-a(y+z)} dy dz &= \left(\int_0^{T-t} e^{-ax} dx \right)^2 \\
 &= \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)^2.
 \end{aligned}$$



Gráfica 48.1 Región de integración en las variables z y y .

La primera integral de (48.28) se puede calcular utilizando la región de integración \mathcal{R} de la Gráfica 48.1. Observe que $\mathcal{R} = [0, T - t] \times [0, T - t] = \{0 \leq z \leq T - t, 0 \leq y \leq z\} \cup \{0 \leq z \leq T - t, z \leq y \leq T - t\}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} e^{-a(y+z-2\min(y,z))} dy dz \\
&= \int_0^{T-t} \left(\int_0^{y=z} e^{-a(z-y)} dy + \int_{y=z}^{T-t} e^{-a(y-z)} dy \right) dz \\
&= \int_0^{T-t} e^{-az} \left(\int_0^{y=z} e^{ay} dy \right) dz + \int_0^{T-t} e^{az} \left(\int_{y=z}^{T-t} e^{-ay} dy \right) dz \\
&= \int_0^{T-t} e^{-az} \left(\frac{e^{az} - 1}{a} \right) dz + \int_0^{T-t} e^{az} \left(\frac{e^{-az} - e^{-a(T-t)}}{a} \right) dz \\
&= \int_0^{T-t} \left(\frac{1 - e^{-az}}{a} \right) dz + \int_0^{T-t} \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)} e^{az}}{a} \right) dz \\
&= \frac{2(T-t)}{a} - \frac{1}{a} \int_0^{T-t} e^{-az} dz - \frac{e^{-a(T-t)}}{a} \int_0^{T-t} e^{az} dz \\
&= \frac{2(T-t)}{a} - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a^2} - \frac{e^{-a(T-t)}}{a} \left(\frac{e^{a(T-t)} - 1}{a} \right) \\
&= \frac{2(T-t)}{a} - 2 \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a^2} \right).
\end{aligned} \tag{48.29}$$

La sustitución de la integral anterior en (48.28) produce

$$\begin{aligned}\text{Var}[G(t, T) \mid \mathcal{F}_t] &= \frac{\sigma^2}{2a} \left[\frac{2(T-t)}{a} - 2 \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a^2} \right) \right] - \frac{\sigma^2}{2a^3} \left(1 - e^{-a(T-t)} \right)^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{2a^3} \left[2a(T-t) - 2 \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) - \left(1 - e^{-a(T-t)} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2a^3} \left[2a(T-t) - 3 + 4e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)} \right].\end{aligned}$$

Es decir,

$$\text{Var}[G(t, T) \mid \mathcal{F}_t] = \text{Var}[I(t, T) \mid \mathcal{F}_t].$$

48.8 Bibliografía sugerida

- Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No. 2, pp. 177-188.
- Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2002). "Cobertura de tasas de interés con futuros del mercado mexicano de derivados: un modelo estocástico de duración y convexidad". *El Trimestre Económico*, Vol. 59(2), No. 274, pp. 227-250.

48.9 Ejercicios

48.1 Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, demuestre que la función generatriz de momentos está dada por

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \exp\left\{tE[X] + \frac{1}{2}t^2\text{Var}[X]\right\}.$$

48.2 Demuestre la propiedad

$$\text{Var}\left[\int_0^t g(s)dW_s\right] = E\left[\left(\int_0^t g(s)dW_s\right)^2\right] = \int_0^t [g(s)]^2 ds$$

válida cuando la última integral es finita. Más generalmente, demuestre que

$$\text{Cov}\left(\int_0^t f(s)dW_s, \int_0^t g(s)dW_s\right) = \int_0^t f(s)g(s)ds$$

es válida cuando la última integral es finita.

48.3 Demuestre que si r_t es normal, entonces $I(t, T) = \int_t^T r_s ds$ es también normal y

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t}E[I(t, T)|\mathcal{F}_t] - \frac{1}{2(T-t)}\text{Var}[I(t, T)|\mathcal{F}_t].$$

48.4 Suponga que $r_t = b + Y_t$ y $dY_t = -aY_t dt + \sigma dW_t$, entonces

$$R(t, T) = b + \frac{1}{T-t}E[G(t, T)|\mathcal{F}_t] - \frac{1}{2(T-t)}\text{Var}[G(t, T)|\mathcal{F}_t],$$

donde $G(t, T) = \int_t^T Y_s ds$.

48.5 Pruebe que

$$B(t, T) = E\left[\exp\left\{-\int_t^T r_s ds\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right] \geq \exp\left\{-E\left[\int_t^T r_s ds\right] \middle| \mathcal{F}_t\right\}.$$

Solución: Utilice la desigualdad de Jensen y el hecho de que $f(x) = e^{-x}$ es una función convexa.

48.6 Demuestre que

$$\ln\left(E\left[\exp\left\{-\int_t^T r_s ds\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right]\right) \geq -\int_t^T E[r_s | \mathcal{F}_t] ds$$

y

$$R(t, T) \leq \frac{1}{T-t} \int_t^T E[r_s | \mathcal{F}_t] ds.$$

48.7 Muestre que si r_t es normal, entonces $I(t, T) = \int_t^T r_s ds$ es también normal y existe una función $H(t, T) \geq 0$, tal que

$$B(t, T) = E\left[\exp\left\{-\int_t^T r_s ds\right\} \middle| \mathcal{F}_t\right] = H(t, T) \exp\left\{-E\left[\int_t^T r_s ds\right] \middle| \mathcal{F}_t\right\},$$

Solución: Dicha función $H(t, T)$ está dada por

$$H(t, T) = \exp\left\{\frac{1}{2}\text{Var}[I(t, T)] \middle| \mathcal{F}_t\right\}.$$

48.8 Con base en los resultados de la sección 48.7, muestre que

$$\text{Var}[G(t, T) | \mathcal{F}_t] = \text{Var}[I(t, T) | \mathcal{F}_t].$$

CAPÍTULO 49

MODELO DE TASA CORTA DE COX, INGERSOLL Y ROSS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Enfoque de ecuaciones diferenciales parciales para valuar bonos
- Curva de rendimiento
- Estimación de parámetros
- Método generalizado de momentos (MGM)
- Método de Newton-Raphson

49.1 Introducción

Existen en la literatura varias clases de modelos que describen el comportamiento de una tasa corta con reversión a la media. En particular, si la tasa corta sigue un proceso de la forma:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma r_t^\beta dW_t, \quad (49.1)$$

donde a , b y σ son constantes positivas, $\beta \geq 0$, y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ junto con su filtración aumentada $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, entonces se obtiene una de las familias más importantes de modelos de tasa corta con reversión a la media y parámetros constantes.

Observe que en la ecuación (49.1) existe un término aleatorio con varianza $\sigma^2 r_t^{2\beta}$ por unidad de tiempo, donde $\beta \geq 0$. Las situaciones en las que $\beta = 0$ y $\beta = \frac{1}{2}$ son de particular interés, ya que conllevan a modelos que pueden tratarse analíticamente. En particular, el modelo de Vasicek se obtiene cuando $\beta = 0$, mientras que el modelo de Cox, Ingersoll y Ross se obtiene cuando $\beta = \frac{1}{2}$. Especificaciones de (49.1) con valores de β distintos de 0 y $\frac{1}{2}$ no son muy populares en la literatura debido a la complejidad y dificultad técnica que presentan en su tratamiento analítico.

49.2 Fundamentos del modelo CIR

Es imprescindible mencionar que en la estructura de plazos generada con el modelo de Vasicek, el cual se obtiene con $\beta = 0$, puede producir tasas negativas con probabilidad positiva. Afortunadamente, esta limitación se desvanece en el modelo propuesto por Cox, Ingersoll y Ross en su artículo “A Theory of the Term Structure of Interest Rates”, publicado en 1985 en “Econometrica”, ya que en su modelo las tasas siempre son positivas. Esta sección se concentra en una dinámica de la tasa corta conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t. \quad (49.2)$$

Es importante observar que al considerar $\sqrt{r_t}$ en el término estocástico, el proceso de la tasa corta deja de tener una distribución normal. De hecho, en este caso, la distribución corresponde a una χ^2 no central. Este proceso presenta reversión a la media como en el modelo de Vasicek, pero la varianza es proporcional a $\sigma^2 r_t$ por unidad de tiempo. Esto significa que conforme la tasa de interés corta aumenta, la desviación estándar aumenta.

49.3 Ecuación diferencial parcial del comportamiento del precio de un bono cupón cero en el modelo de CIR

En un mundo neutral al riesgo, el precio de un bono cupón cero, denotado por $B(t, T)$, satisface la ecuación diferencial parcial parabólica:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + a(b - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - rB_t = 0, \quad (49.3)$$

junto con la condición de frontera $B(T, T) = 1$.

49.4 Solución de la ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero

En esta sección se resuelve la ecuación diferencial parcial que caracteriza el precio de un bono cupón cero en el modelo CIR. En vista de que la ecuación (49.3) no presenta derivadas parciales cruzadas, se supone una solución en variables separables, específicamente:

$$B(t, T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}.$$

Claramente, $A(T, T) = D(T, T) = 0$, ya que el valor nominal del bono está dado por

$$B(T, T) = e^{A(T, T) - r_T D(T, T)} = 1.$$

En este caso, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= \left(\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) B, \\ \frac{\partial B}{\partial r_t} &= -D B \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} = D^2 B.$$

Si se sustituyen las derivadas parciales anteriores en (49.3), se obtiene

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) B + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t D^2 B - r_t B + (ar_t - ab)DB = 0.$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t D^2 - r_t + (ar_t - ab)D = 0. \quad (49.4)$$

Si se deriva (49.4) con respecto de r_t , se sigue que:

$$-\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + aD - 1 = 0. \quad (49.5)$$

Es decir,

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \left(D^2 + \frac{2aD}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma^2} \right). \quad (49.6)$$

Observe que (49.6) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. A continuación se resuelve (49.5) separando variables y utilizando fracciones parciales. Suponga que (49.6) se puede reescribir como:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2(D - x_1)(D + x_2)$$

ó

$$\frac{dD}{(D - x_1)(D + x_2)} = \frac{1}{2}\sigma^2 dt. \quad (49.7)$$

En este caso, se encuentra que

$$x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \quad (49.8)$$

y

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}. \quad (49.9)$$

En efecto, observe primero que

$$\begin{aligned} (D - x_1)(D + x_2) &= D^2 + Dx_2 - Dx_1 - x_1x_2 \\ &= D^2 + D(x_2 - x_1) - x_1x_2. \end{aligned}$$

En virtud de (49.6), se deben cumplir, simultáneamente, las siguientes dos condiciones

$$x_1x_2 = \frac{2}{\sigma^2} \quad (49.10)$$

y

$$x_2 - x_1 = \frac{2a}{\sigma^2}. \quad (49.11)$$

Se observa en (49.10) que $x_1x_2 > 0$, es decir, x_1 y x_2 tienen el mismo signo. Asimismo, de (49.10) y (49.11), se sigue que x_1 satisface la siguiente ecuación cuadrática:

$$x_1^2 + \frac{2a}{\sigma^2}x_1 - \frac{2}{\sigma^2} = 0. \quad (49.12)$$

Las raíces de (49.12) están dadas por

$$x_1 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}.$$

En consecuencia

$$x_2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}.$$

Dado que x_1 y x_2 deben tener el mismo signo, existen dos posibilidades:

$$\mathcal{I}_1 : \begin{cases} x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}, \\ x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}, \end{cases}$$

cuando x_1 y x_2 son ambos positivos, o

$$\mathcal{I}_2 : \begin{cases} x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}, \\ x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}, \end{cases}$$

cuando x_1 y x_2 son ambos negativos. En lo que sigue se considera el par \mathcal{I}_1 . Así pues, con base en (49.7), se tiene que

$$\int_{D(T,T)=0}^{D(t,T)} \frac{du}{(u - x_1)(u + x_2)} = \int_T^t q du = -q(T - t), \quad (49.13)$$

donde $q = \frac{1}{2}\sigma^2$. Observe ahora que el integrando se puede expresar en términos de fracciones parciales como

$$\begin{aligned} \frac{1}{(u-x_1)(u+x_2)} &= \frac{C_1}{u-x_1} + \frac{C_2}{u+x_2} \\ &= \frac{C_1(u+x_2) + C_2(u-x_1)}{(u-x_1)(u+x_2)} \\ &= \frac{(C_1+C_2)u + C_1x_2 - C_2x_1}{(u-x_1)(u+x_2)}, \end{aligned}$$

lo cual implica que $C_1 = -C_2$ y $C_1x_2 - C_2x_1 = 1$. Consecuentemente,

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{x_1+x_2} = \frac{\sigma^2}{2\sqrt{a^2+2\sigma^2}} = \frac{q}{\sqrt{a^2+2\sigma^2}}.$$

Por lo tanto, la integral de (49.13) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \int_0^{D(t,T)} \frac{du}{(u-x_1)(u+x_2)} &= \frac{1}{x_1+x_2} \int_0^{D(t,T)} \frac{du}{u-x_1} \\ &\quad - \frac{1}{x_1+x_2} \int_0^{D(t,T)} \frac{du}{u+x_2} \\ &= \frac{1}{x_1+x_2} [\ln(x_1 - D(t, T)) - \ln(x_1)] \\ &\quad - \frac{1}{x_1+x_2} [\ln(x_2 + D(t, T)) - \ln(x_2)] \tag{49.14} \\ &= \frac{1}{x_1+x_2} \ln \left(1 - \frac{D(t, T)}{x_1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{x_1+x_2} \ln \left(1 + \frac{D(t, T)}{x_2} \right) \\ &= \frac{1}{x_1+x_2} \ln \left[\left(1 - \frac{D(t, T)}{x_1} \right) / \left(1 + \frac{D(t, T)}{x_2} \right) \right], \end{aligned}$$

donde se ha supuesto que $x_1 > D(t, T)$ y $D(t, T) > 0$. Si la solución $D(t, T)$ no satisface las condiciones anteriores, junto con $D(T, T) = 0$, entonces se deben modificar los supuestos y repetir todo el análisis subsecuente hasta que los supuestos sean congruentes con la solución. Así pues, (49.13) y (49.14) implican

$$\left(1 + \frac{D(t, T)}{x_2} \right) = \left(1 - \frac{D(t, T)}{x_1} \right) e^{(x_1+x_2)q(T-t)},$$

lo cual conduce a

$$x_1x_2 + x_1D(t, T) = (x_1x_2 - x_2D(t, T))e^{(x_1+x_2)q(T-t)}$$

6

$$D(t, T) = \frac{x_1x_2 (e^{(x_1+x_2)q(T-t)} - 1)}{x_2e^{(x_1+x_2)q(T-t)} + x_1} > 0. \tag{49.15}$$

Claramente, $D(t, T) < x_1$, si y sólo si

$$\frac{x_1x_2 (e^{(x_1+x_2)q(T-t)} - 1)}{x_2e^{(x_1+x_2)q(T-t)} + x_1} < x_1,$$

si y sólo si

$$x_1x_2e^{(x_1+x_2)q(T-t)} < x_1x_2 + x_1x_2e^{(x_1+x_2)q(T-t)} + x_1^2,$$

por lo que $\ln(|D(t, T) - x_1|) = \ln(x_1 - D(t, T))$. Ahora bien, dado que $x_1 x_2 = 1/q$, la función $D(t, T)$ se puede reescribir como:

$$D(t, T) = \frac{e^{(x_1+x_2)q(T-t)} - 1}{qx_2 e^{(x_1+x_2)q(T-t)} + qx_1}.$$

Equivalentemente,

$$D(t, T) = \frac{2(e^{(x_1+x_2)q(T-t)} - 1)}{2qx_2(e^{(x_1+x_2)q(T-t)} - 1) + 2q(x_1 + x_2)}.$$

Por lo tanto,

$$D(t, T) = \frac{2(e^{\sqrt{a^2+2\sigma^2}(T-t)} - 1)}{(a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2})(e^{\sqrt{a^2+2\sigma^2}(T-t)} - 1) + 2\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}. \quad (49.16)$$

Por otro lado, la sustitución de (49.5) en (49.4) produce

$$\frac{\partial A}{\partial t} = abD. \quad (49.17)$$

Es decir,

$$A(t, T) - A(T, T) = abx_1 x_2 \int_T^t \frac{(e^{(x_1+x_2)q(T-s)} - 1)}{x_2(e^{(x_1+x_2)q(T-s)} - 1) + x_1 + x_2} ds.$$

Sea

$$v_s = e^{(x_1+x_2)q(T-s)} - 1,$$

entonces

$$dv_s = -(x_1 + x_2)qe^{(x_1+x_2)q(T-s)} ds = -(x_1 + x_2)q(v + 1)ds,$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} A(t, T) &= -abx_1 x_2 \int_0^{v_t} \left(\frac{v_s}{x_2 v_s + x_1 + x_2} \right) \left(\frac{1}{(x_1 + x_2)q(v_s + 1)} \right) dv_s \\ &= -\frac{abx_1 x_2}{(x_1 + x_2)q} \int_0^{v_t} \frac{v_s}{[x_2 v_s + x_1 + x_2](v_s + 1)} dv_s \\ &= -\frac{abx_1}{(x_1 + x_2)q} \int_0^{v_t} \frac{v_s}{[v_s + 1 + (x_1/x_2)](v_s + 1)} dv_s. \end{aligned}$$

Defina, por el momento, $\alpha = 1 + (x_1/x_2)$ y $\beta = 1$. Consideré la integral en la ecuación anterior y su solución por fracciones parciales

$$\begin{aligned} \int_0^{v_t} \frac{v}{(v + \alpha)(v + \beta)} dv &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \int_0^{v_t} \frac{dv}{v + \alpha} - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \int_0^{v_t} \frac{dv}{v + \beta} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \ln(v + \alpha) \Big|_0^{v_t} - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \ln(v + \beta) \Big|_0^{v_t} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \ln\left(\frac{v_t + \alpha}{\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \ln(v_t + \beta) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\alpha \ln\left(\frac{v_t + \alpha}{\alpha}\right) - \beta \ln(v_t + \beta) \right]. \end{aligned}$$

Por lo anterior, la función $A(t, T)$ satisface

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \frac{abx_1}{(x_1 + x_2)q} \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \left[-\frac{x_1 + x_2}{x_2} \ln\left(\frac{v_t + 1 + (x_1/x_2)}{1 + (x_1/x_2)}\right) + \ln(v_t + 1) \right] \\ &= \frac{ab}{q} \left[-\ln\left(\frac{x_2 v_t + x_1 + x_2}{x_1 + x_2}\right) + \frac{x_2}{x_1 + x_2} \ln(v_t + 1) \right] \\ &= \frac{2ab}{\sigma^2} \left[-\ln\left(\frac{x_2 v_t + x_1 + x_2}{x_1 + x_2}\right) + \ln\left[(v_t + 1)^{x_2/(x_1+x_2)}\right] \right] \\ &= \frac{2ab}{\sigma^2} \ln\left[\frac{(x_2 + x_1)(v_t + 1)^{x_2/(x_1+x_2)}}{x_2 v_t + x_1 + x_2}\right] \\ &= \frac{2ab}{\sigma^2} \ln\left[\frac{2\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}e^{(a+\sqrt{a^2+2\sigma^2})(T-t)/2}}{(a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2})(e^{\sqrt{a^2+2\sigma^2}(T-t)} - 1) + 2\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}\right] \end{aligned}$$

6

$$A(t, T) = \ln \left[\frac{2\sqrt{a^2 + 2\sigma^2} e^{(a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2})(T-t)/2}}{(a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2})(e^{\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}(T-t)} - 1) + 2\sqrt{a^2 + 2\sigma^2}} \right]^{2ab/\sigma^2}. \quad (49.18)$$

Vale la pena señalar que la selección de un candidato de la forma $B(t, T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}$ ha permitido transformar la ecuación (49.3) en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden definido por (49.6) y (49.17).

49.5 Precio de un bono cupón cero con el modelo CIR en términos de funciones trigonométricas hiperbólicas

Es frecuente encontrar en la literatura expresiones equivalentes a $D(t, T)$ en (49.16) y a $A(t, T)$, en (49.18). Observe que si se definen

$$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2\sigma^2} \quad \text{y} \quad \tau = T - t,$$

y se utilizan las identidades

$$\operatorname{senh}(\gamma\tau) = \frac{e^{\gamma\tau} - e^{-\gamma\tau}}{2}$$

y

$$\cosh(\gamma\tau) = \frac{e^{\gamma\tau} + e^{-\gamma\tau}}{2},$$

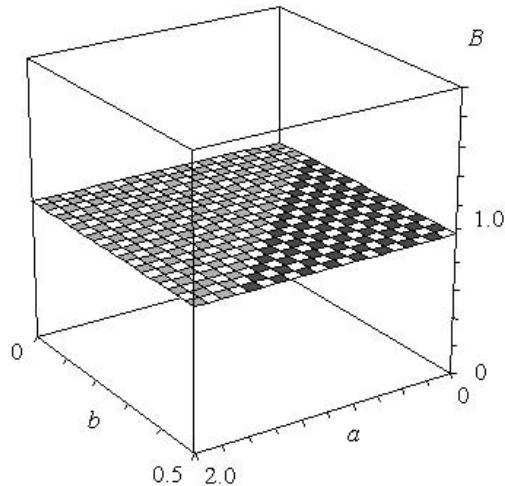
entonces $D(t, T)$ y $A(t, T)$ pueden escribirse en forma alternativa como:

$$D(t, t + \tau) = \frac{\operatorname{senh}(\gamma\tau)}{\gamma \cosh(\gamma\tau) + \frac{1}{2}a \operatorname{senh}(\gamma\tau)} \quad (49.19)$$

y

$$A(t, t + \tau) = \frac{2ab}{\sigma^2} \ln \left[\frac{\gamma e^{\frac{1}{2}a\tau}}{\gamma \cosh(\gamma\tau) + \frac{1}{2}a \operatorname{senh}(\gamma\tau)} \right]. \quad (49.20)$$

La Gráfica 49.1 muestra el precio de un bono cupón cero en función de los parámetros a y b . En este caso, se fijaron los valores de $T - t = 1$, $\sigma = 0.0239$ y $r_t = 0.15$.



Gráfica 49.1 Precio de un bono en función de los parámetros a y b .

49.6 Curva de rendimiento del modelo CIR

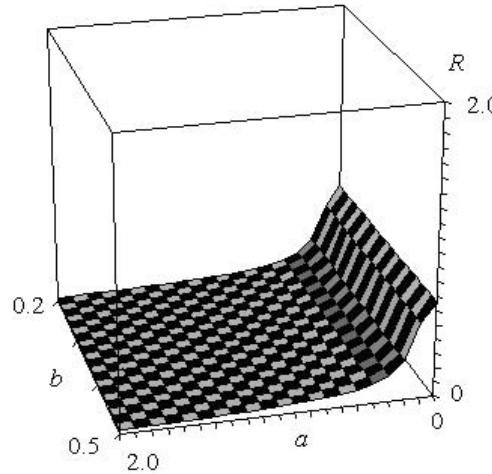
En el caso del modelo CIR es posible obtener curvas de rendimiento con pendiente positiva, con pendiente negativa o con jorobas. La curva de rendimiento del modelo CIR se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{\ln B(t, T)}{T-t} \\ &= \frac{r_t D(t, T) - A(t, T)}{T-t}, \end{aligned} \quad (49.21)$$

la cual es una función lineal de r_t . En este caso, se puede demostrar que

$$R(t, \infty) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = \frac{2ab}{a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}.$$

La Gráfica 49.2 muestra la curva de rendimiento en función de los parámetros a y b , con valores fijos $T - t = 1$, $\sigma = 0.0239$ y $r_t = 0.15$.



Gráfica 49.2 Curva de rendimiento en función de los parámetros a y b .

49.7 Cambio de variable en el modelo CIR para obtener volatilidad constante

En esta sección, a través de un cambio de variable, se transforma el modelo CIR en otra ecuación diferencial estocástica con volatilidad constante. Si se define $y_t \equiv y(r_t) = 2\sqrt{r_t}$, se tiene que

$$\frac{\partial y_t}{\partial r_t} = \frac{1}{\sqrt{r_t}} = \frac{2}{y_t}$$

y

$$\frac{\partial^2 y_t}{\partial r_t^2} = -\frac{1}{2r_t\sqrt{r_t}} = -\frac{1}{r_t y_t}.$$

Una aplicación simple del lema de Itô conduce a

$$\begin{aligned} dy_t &= \left(\frac{\partial y_t}{\partial r_t} a(b - r_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y_t}{\partial r_t^2} \sigma^2 r_t \right) dt + \frac{\partial y_t}{\partial r_t} \sigma \sqrt{r_t} dW_t \\ &= \left[\frac{2}{y_t} a \left(b - \frac{y_t^2}{4} \right) - \frac{1}{2r_t y_t} \sigma^2 r_t \right] dt + \frac{2}{y_t} \sigma \sqrt{r_t} dW_t \\ &= \left[\left(2ab - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{1}{y_t} - \frac{a}{2} y_t \right] dt + \sigma dW_t. \end{aligned} \quad (49.22)$$

De esta manera, el coeficiente, σ , que multiplica al movimiento Browniano es constante.

49.8 Estimación de los parámetros

A continuación se presentan varios métodos de estimación de los parámetros del modelo CIR. Dichos métodos utilizan un registro histórico de la tasa corta o de la curva de rendimiento.

49.8.1 Estimación de parámetros en el modelo CIR con MGM

En esta sección se discute sobre la estimación de parámetros en el modelo CIR mediante el método generalizado de momentos (MGM). Considere la versión discreta del modelo CIR

$$r_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 r_t + \sqrt{r_t} \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim (0, \sigma^2), \quad (49.23)$$

donde $\beta_0 = ab$ y $\beta_1 = 1 - a$. En este se calculan estimadores, $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\sigma}$, con el método generalizado de momentos, MGM, sujeto a las restricciones

$$\sum_{t=1}^n \epsilon_t = 0,$$

$$\sum_{t=1}^n \epsilon_t \epsilon_{t-1} = 0$$

y

$$\sum_{t=1}^n (\epsilon_t^2 - r_t \sigma^2) = 0.$$

Por lo tanto, $\hat{a} = 1 - \hat{\beta}_1$ y $\hat{b} = \hat{\beta}_0/\hat{a}$. Es importante destacar que MGM no requiere de un supuesto sobre la distribución de los errores.

49.8.2 Estimación de los parámetros del modelo CIR transformado en un modelo de varianza constante con MCO

Considere ahora la ecuación (49.22) en la siguiente versión discreta

$$y_{t+1} = \beta_1 y_t^{-1} + \beta_2 y_t + \epsilon_t, \quad (49.24)$$

donde $y_t = 2\sqrt{r_t}$, $\beta_1 = 2ab - (\sigma^2/2)$, $\beta_2 = 1 - (a/2)$ y $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Si $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2$ y $\tilde{\sigma}^2 = \widetilde{\sigma}^2$ son los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios, MCO, los cuales son de máxima verosimilitud, entonces

$$\tilde{a} = 2(1 - \tilde{\beta}_2)$$

y

$$\tilde{b} = \frac{2\tilde{\beta}_1 + \tilde{\sigma}^2}{4\tilde{a}} = \frac{2\tilde{\beta}_1 + \tilde{\sigma}^2}{8(1 - \tilde{\beta}_2)},$$

son también estimadores de máxima verosimilitud.

49.8.3 Estimación de los parámetros utilizando la curva de rendimiento del modelo CIR (Newton-Raphson)

A continuación se estiman los parámetros del modelo CIR utilizando la curva de rendimiento. Considere la curva de rendimiento del modelo CIR:

$$R(t, T) = \frac{r_t D(t, T) - A(t, T)}{T - t}.$$

Las funciones $D(t, T)$ y $A(t, T)$ dependen de los parámetros a , b y σ , lo cual se destaca mediante la notación $D(t, T; a, b, \sigma)$ y $A(t, T; a, b, \sigma)$. Posteriormente, se fijan tres plazos, cuyas magnitudes dependen del horizonte al que se desea estimar la curva de rendimiento (semanas, meses o años).

Sea $\bar{R}(t, T_i)$, $i = 1, 2, 3$, la tasa de interés promedio de plazo T_i . Considere el siguiente sistema de tres ecuaciones en las incógnitas a , b y σ :

$$\begin{cases} \bar{R}(t, T_1)(T_1 - t) - r_t D(t, T_1; a, b, \sigma) + A(t, T_1; a, b, \sigma) = 0, \\ \bar{R}(t, T_2)(T_2 - t) - r_t D(t, T_2; a, b, \sigma) + A(t, T_2; a, b, \sigma) = 0, \\ \bar{R}(t, T_3)(T_3 - t) - r_t D(t, T_3; a, b, \sigma) + A(t, T_3; a, b, \sigma) = 0. \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones simultáneas se puede resolver con el método de Newton-Raphson.

49.9 Aplicación del modelo de Cox, Ingersoll y Ross con el MGM

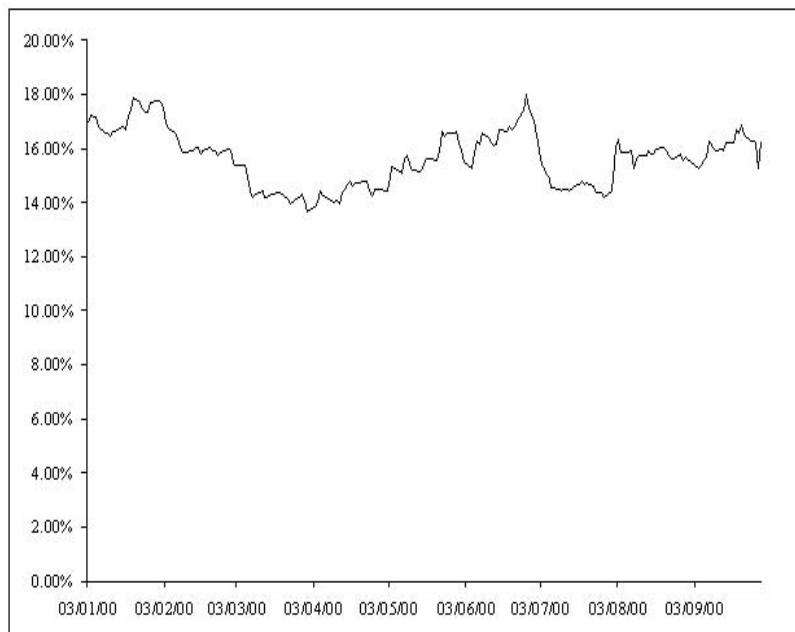
En esta sección se lleva a cabo una aplicación del modelo CIR utilizando MGM para la estimación de los parámetros. Para fines prácticos, el modelo CIR puede plantearse en términos discretos como una ecuación estocástica en diferencias:

$$r_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 r_t + \sqrt{r_t} \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim (0, \sigma^2),$$

donde $\beta_0 = ab$ y $\beta_1 = 1 - a$, junto con las restricciones:

$$\sum_{t=1}^n \epsilon_t = 0, \quad \sum_{t=1}^n \epsilon_t \epsilon_{t-1} = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{t=1}^n (\epsilon_t^2 - r_t \sigma^2) = 0.$$

La Gráfica 49.3 muestra el comportamiento de la tasa corta (rendimiento anualizado de CETES a un día) entre el 3 de enero de 2000 y el 29 de diciembre de 2000.



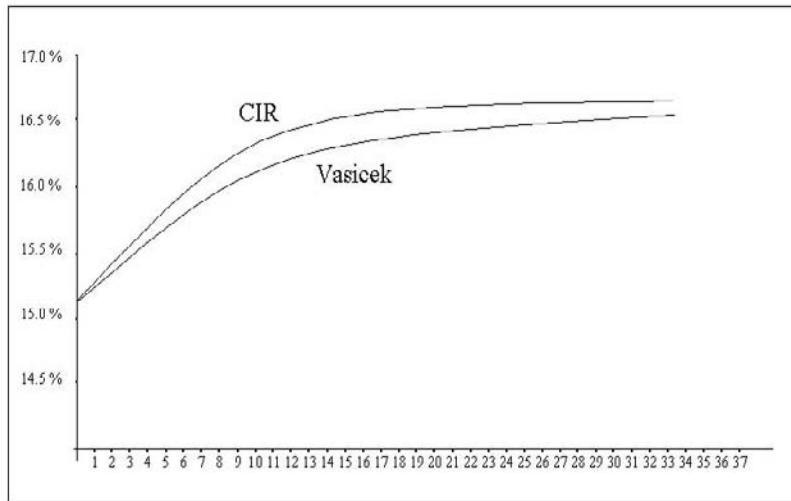
Gráfica 49.3 Comportamiento de la tasa corta anualizada
(3 de enero de 2000 - 29 de octubre de 2000).

Los resultados de la estimación de los parámetros utilizando MGM, con errores estándar entre paréntesis, son los siguientes:

$$\Delta r_t = 0.01737(0.1682 - r_t) + 0.0399\sqrt{r_t}.$$

(0.0221) (0.0253) (0.0118)

Todas las estimaciones son significativamente distintas de cero con un 95% de confianza. La Gráfica 49.4 muestra la estructura de plazos definida a través de la ecuación (49.21). En este caso, la estructura de plazos es creciente y, en el largo plazo, se estabiliza en un valor cercano al 16.8%. Se observa que el modelo CIR produce tasas mayores que las de Vasicek, con una diferencia máxima del 0.05% conforme el plazo crece, lo cual se debe fundamentalmente a un valor estimado mayor que b con el MGM.



Gráfica 49.4 Estructura de plazos estimada con el modelo CIR
(eje horizontal en días).

49.10 Bibliografía

- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates." *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 363-384.
 Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2002). "Cobertura de tasas de interés con futuros del mercado mexicano de derivados: un modelo estocástico de duración y convexidad". *El Trimestre Económico*, Vol. 59(2), No. 274, pp. 227-250.

49.11 Ejercicios

- 49.1** Demuestre que el caso del modelo CIR la tasa larga está dada por

$$R(t, \infty) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = \frac{2ab}{a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}.$$

Solución: Considere

$$R(\tau) = \frac{r_t D(\tau) - A(\tau)}{\tau} \quad \text{y} \quad \tau = T - t.$$

En vista de que $D(\tau) \rightarrow 2/(a + 2\gamma)$ y $A(\tau) \rightarrow \infty$ cuando $\tau \rightarrow \infty$, la regla de L'Hôpital conduce a

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} -\frac{\partial A}{\partial \tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} abD(\tau) \\ &= \frac{2ab}{a + 2\gamma} \\ &= \frac{2ab}{a + \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}.\end{aligned}$$

49.2 Considere el caso en que x_1 y x_2 son números negativos, es decir,

$$\mathcal{I}_2 : \begin{cases} x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}, \\ x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2}, \end{cases}$$

y discuta cómo se modifica la solución $D(t, T)$.

49.3 Obtenga las expresiones alternativas de $D(t, T)$ y $A(t, T)$ dadas en (49.19) y (49.20), a saber,

$$D(t, t + \tau) = \frac{\operatorname{senh}(\gamma\tau)}{\gamma \cosh(\gamma\tau) + \frac{1}{2}a \operatorname{asenh}(\gamma\tau)}$$

y

$$A(t, t + \tau) = \frac{2ab}{\sigma^2} \ln \left[\frac{\gamma e^{\frac{1}{2}a\tau}}{\gamma \cosh(\gamma\tau) + \frac{1}{2}a \operatorname{asenh}(\gamma\tau)} \right].$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 2\sigma^2} \quad \text{y} \quad \tau = T - t.$$

49.4 Considere la ecuación diferencial parcial que caracteriza el precio, $B(t, T)$, del bono cupón cero, en un mundo neutral al riesgo,

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + (a(b - r_t) - \lambda(r_t, t)\sqrt{r_t}\sigma) \frac{\partial B}{\partial r_t} - rB_t = 0,$$

junto con la condición de frontera $B(T, T) = 1$. Suponga que el premio al riesgo de mercado es una constante, $\lambda(r_t, t) \equiv \lambda$. Demuestre que

$$A(t, T) = \ln \left[\frac{2\sqrt{\bar{a}^2 + 2\sigma^2} e^{(\bar{a} + \sqrt{\bar{a}^2 + 2\sigma^2})(T-t)/2}}{(\bar{a} + \sqrt{\bar{a}^2 + 2\sigma^2})(e^{\sqrt{\bar{a}^2 + 2\sigma^2}(T-t)} - 1) + 2\sqrt{\bar{a}^2 + 2\sigma^2}} \right]^{2ab/\sigma^2}$$

y

$$D(t, T) = \frac{2(e^{\sqrt{\bar{a}^2 + 2\sigma^2}(T-t)} - 1)}{(\bar{a} + \sqrt{\bar{a}^2 + 2\sigma^2})(e^{\sqrt{\bar{a}^2 + 2\sigma^2}(T-t)} - 1) + 2\sqrt{\bar{a}^2 + 2\sigma^2}},$$

donde

$$\bar{a} = a - \lambda\sigma.$$

49.5 Demuestre, con base en el problema anterior, que la estructura de plazos de la tasa de interés en el modelo CIR se puede escribir como

$$R(t, T) = \eta_1(\bar{a}, \sigma, t, T)r_t + \eta_2(\bar{a}, \sigma, t, T)R(t, \infty),$$

donde

$$\begin{aligned}\eta_1(\bar{a}, \sigma, t, T) &= \frac{D(t, T)}{T - t}, \\ \eta_2(\bar{a}, \sigma, t, T) &= -\frac{\bar{a} + \sqrt{\bar{a}^2 + 2\sigma^2}}{2ab} \left(\frac{A(t, T)}{T - t} \right), \\ \bar{a} &= a - \lambda\sigma\end{aligned}$$

y

$$R(t, \infty) = \frac{2ab}{\bar{a} + \sqrt{\bar{a}^2 + 2\sigma^2}}.$$

49.6 Suponga que la tasa corta sigue un proceso de la forma

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t,$$

donde $\mu(r_t, t)$ y $\sigma(r_t, t)$ son funciones conocidas y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ junto con su filtración aumentada $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Sea $B = B(r_t, t; T)$ el precio de un bono a descuento que se coloca en t y al vencimiento, T , paga una unidad monetaria. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t))\frac{\partial B}{\partial r_t} + r_t B &= 0, \\ dB &= \left[\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t)\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{\partial B}{\partial r_t}\mu(r_t, t) \right] dt + \frac{\partial B}{\partial r_t}\sigma(r_t, t)dW_t.\end{aligned}$$

La primera ecuación es la ecuación diferencial parcial que satisface cualquier bono cupón cero, la segunda corresponde al lema de Itô. Estas ecuaciones conducen a

$$dB = \left(r_t + \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)\frac{\partial B}{\partial r_t} \frac{1}{B} \right) B dt + \frac{\partial B}{\partial r_t}\sigma(r_t, t)dW_t.$$

En el caso del modelo CIR

$$dB = \left(r_t + \lambda(r_t, t)\sigma\sqrt{r_t}\frac{\partial B}{\partial r_t} \frac{1}{B} \right) B dt + \frac{\partial B}{\partial r_t}\sigma\sqrt{r_t}dW_t,$$

suponga que

$$\lambda(r_t, t) = \bar{\lambda}\frac{\sqrt{r_t}}{\sigma},$$

entonces el rendimiento esperado del bono satisface

$$\mathbb{E} \left[\frac{dB}{B} \mid \mathcal{F}_t \right] = r_t + \bar{\lambda}\epsilon_{B,r},$$

donde

$$\epsilon_{B,r} = \frac{\partial B}{\partial r_t} \frac{r_t}{B}$$

es la elasticidad del precio del bono con respecto de la tasa de interés. De esta manera, la ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero está dada por

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + (a(b - r_t) - \bar{\lambda}r_t)\frac{\partial B}{\partial r_t} + r_t B = 0.$$

Demuestre que la solución de la ecuación diferencial parcial anterior está dada por

$$B(r_t, T) = M(t, T)e^{-D(t, T)r_t}$$

donde

$$M(t, T) = \left[\frac{2\gamma e^{[(a+\bar{\lambda}+\gamma)(T-t)]/2}}{(\gamma + a + \bar{\lambda})(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{2ab/\sigma^2},$$

$$D(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a + \bar{\lambda})(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

y

$$\gamma = ((a + \bar{\lambda})^2 + 2\sigma^2)^{1/2}.$$

CAPÍTULO 50

RESULTADOS ADICIONALES DEL MODELO DE COX, INGERSOLL Y ROSS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Distribución de la tasa corta del modelo CIR
- Distribución Ji cuadrada no central y parámetros del modelo CIR
- Estados absorbentes, recurrentes, transitorios y polares

50.1 Introducción

Varios resultados adicionales sobre el modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985) se discuten en el presente capítulo. En particular se muestra que la tasa corta del modelo CIR sigue una distribución Ji cuadrada con parámetro de no centralidad. Se recuerda que en este modelo la dinámica de la tasa de interés corta es conducida por una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t, \quad (50.1)$$

donde $a, b, \sigma, r_0 > 0$ y $\{W_t\}_{t>0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

50.2 Distribución de la tasa corta en el modelo CIR

El objetivo de esta sección es determinar la distribución de la tasa corta en el modelo CIR. Consideré el proceso de Ornstein-Uhlenbeck

$$dy_t = -ay_t dt + \sigma dU_t, \quad (50.2)$$

donde $a, \sigma > 0$ y $\{U_t\}_{t>0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La solución de este proceso es similar a la de una ecuación diferencial no homogénea de primer orden, a saber,

$$\begin{aligned} y_t &= e^{-at} \left(y_0 + \sigma \int_0^t e^{as} dU_s \right) \\ &= y_0 e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dU_s. \end{aligned} \quad (50.3)$$

Así, y_t se distribuye normal con media y varianza (condicionales)

$$E[y_t|y_0] = y_0 e^{-at} \quad (50.4)$$

y

$$\text{Var}[y_t|y_0] = \sigma^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}). \quad (50.5)$$

Observe también que una simple aplicación del lema de Itô a $x_t = y_t^2$ conduce a

$$\begin{aligned} dx_t &= \left(-a \frac{\partial x_t}{\partial y_t} y_t + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 x_t}{\partial y_t^2} \right) dt + \frac{\partial x_t}{\partial y_t} \sigma dU_t \\ &= 2y_t (-ay_t dt + \sigma dU_t) + \sigma^2 dt \\ &= 2y_t dy_t + \sigma^2 dt. \end{aligned} \quad (50.6)$$

Suponga ahora que se tienen $U_{1t}, U_{2t}, \dots, U_{nt}$ movimientos Brownianos independientes definidos sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y defina los siguientes n procesos de Ornstein-Uhlenbeck:

$$dy_{kt} = -\frac{1}{2}ay_{kt}dt + \frac{1}{2}\sigma dU_{kt}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (50.7)$$

En cuyo caso, de (50.3)-(50.5), se tiene que

$$y_{kt} = e^{-at/2} \left(y_{k0} + \frac{1}{2}\sigma \int_0^t e^{as/2} dU_{ks} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (50.8)$$

junto con

$$\mathbb{E}[y_{kt}|y_{k0}] = y_{k0}e^{-at/2} \equiv \mu_{k,t} \quad (50.9)$$

y

$$\text{Var}[y_{kt}|y_{k0}] = \frac{\sigma^2}{4} \int_0^t e^{-a(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-at}) \equiv \nu_t^2. \quad (50.10)$$

Considere ahora el proceso

$$r_t = \sum_{k=1}^n y_{kt}^2, \quad (50.11)$$

entonces,

$$\frac{r_t}{\nu_t^2} \sim \chi^2(n, \delta_t), \quad (50.12)$$

con parámetro de no centralidad

$$\delta_t = \frac{1}{\nu_t^2} \sum_{k=1}^n \mu_{k,t}^2. \quad (50.13)$$

Es decir, r_t/ν_t^2 sigue una distribución χ^2 no central con n grados de libertad y parámetro de no centralidad δ_t .

50.3 Distribución Ji cuadrada no central y parámetros del modelo CIR

En esta sección se muestra que la tasa corta del modelo CIR sigue una distribución Ji cuadrada no central. Observe primero que a partir de (50.6), (50.7) y (50.11), se sigue que

$$\begin{aligned} dr_t &= \sum_{k=1}^n dy_{kt}^2 \\ &= \sum_{k=1}^n 2y_{kt} \left(-a\frac{1}{2}y_{kt}dt + \frac{1}{2}\sigma dU_{kt} \right) + \frac{n\sigma^2}{4}dt \\ &= -ar_t dt + \sigma \sum_{k=1}^n y_{kt} dU_{kt} + \frac{n\sigma^2}{4}dt \\ &= \left(\frac{n\sigma^2}{4} - ar_t \right) dt + \sigma \sqrt{r_t} \sum_{k=1}^n \frac{y_{kt} dU_{kt}}{\sqrt{r_t}}. \end{aligned} \quad (50.14)$$

Se define

$$dW_t \equiv \sum_{k=1}^n \frac{y_{kt} dU_{kt}}{\sqrt{r_t}}. \quad (50.15)$$

Claramente W_t es una martingala, pues no tiene tendencia. Si se define

$$V_t = W_t^2, \quad (50.16)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} dV_t &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial W_t^2} \sum_{k=1}^n \frac{y_{kt}^2}{r_t} dt + \frac{\partial V_t}{\partial W_t} \sum_{k=1}^n \frac{y_{kt} dU_{kt}}{\sqrt{r_t}} \\ &= \frac{1}{r_t} \sum_{k=1}^n y_{kt}^2 dt + 2W_t dW_t \\ &= dt + 2W_t dW_t. \end{aligned} \quad (50.17)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} W_t^2 &= \int_0^t ds + 2 \int_0^t W_s dW_s \\ &= t + 2 \int_0^t W_s dW_s, \end{aligned} \quad (50.18)$$

lo cual implica que

$$W_t^2 - t = 2 \int_0^t W_s dW_s \quad (50.19)$$

es una martingala. En virtud del teorema de representación de Lévy, se tiene que W_t es un movimiento Browniano definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En consecuencia, se puede escribir

$$dr_t = \left(\frac{n\sigma^2}{4} - ar_t \right) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t. \quad (50.20)$$

Si se compara (50.20) con (50.1) se tiene que

$$ab = \frac{n\sigma^2}{4}. \quad (50.21)$$

Por lo tanto,

$$n = \frac{4ab}{\sigma^2}.$$

Esta ecuación y, por lo tanto, (50.21), tiene aún sentido cuando n no es un entero positivo. Así, el parámetro de no centralidad satisface

$$\begin{aligned} \delta_t &= \frac{1}{\nu_t^2} \sum_{k=1}^n y_{k0}^2 e^{-at} \\ &= \frac{1}{\nu_t^2} r_0 e^{-at}. \end{aligned} \quad (50.22)$$

De acuerdo con (50.12), se puede concluir que

$$\frac{4a}{\sigma^2 (1 - e^{-at})} r_t \sim \chi^2 \left(\frac{4ab}{\sigma^2}, \frac{4ar_0 e^{-at}}{\sigma^2 (1 - e^{-at})} \right). \quad (50.23)$$

Si $n = 4ab/\sigma^2 = 0$, entonces $r_t \equiv 0$ es solución de (50.1) y, así, el 0 es un estado absorbente del proceso r_t . Claramente, en este caso, la medida de Lebesgue, $\mu_{\mathcal{L}}$, del conjunto $\{t \mid r_t = 0\}$ satisface

$$\mu_{\mathcal{L}} \{t \mid r_t = 0\} = \infty.$$

Si se define el evento

$$\mathcal{A}_0 = \{\text{existe al menos un } t > 0 \text{ tal que } r_t = 0\}$$

y $0 \leq n < 2$, entonces se puede verificar que

$$\mathbb{P} \{\mathcal{A}_0\} = E^{\mathbb{P}}[1_{\mathcal{A}_0}] = 1.$$

Es decir, el 0 es un estado recurrente del proceso r_t . Si $0 < n < 2$, entonces

$$\mu_{\mathcal{L}} \{t \mid r_t = 0\} = 0,$$

en cuyo caso se dice que el estado 0 es instantáneamente reflejado. Asimismo, si $n \geq 3$, entonces

$$\mathbb{P} \{\mathcal{A}_0\} = 0.$$

En otras palabras, el 0 es un estado transitorio del proceso r_t . Por otra parte, el tiempo de primera visita, T_0 , al estado $r_t = 0$ se define como:

$$T_0 = \inf \{t : r_t = 0\}.$$

Se tiene ahora que si $0 \leq n < 2$, entonces

$$\mathbb{P} \{T_0 < \infty\} = 1,$$

mientras que si $n \geq 2$,

$$\mathbb{P} \{T_0 < \infty\} = 0.$$

En este último caso, se dice que el estado 0 es polar para r_t . Si además, para $n \geq 2$, el estado 0 ha sido visitado y el proceso r_t nunca más regresa a él después de dejarlo se dice que dicho estado es una frontera de entrada. Por último, si se define el evento

$$\mathcal{B}_0 = \{\text{existe un número infinito de tiempos } t > 0 \text{ para los cuales } r_t = 0\},$$

entonces para $n = 1$,

$$\mathbb{P} \{r_t > 0\} = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{P} \{\mathcal{B}_0\} = 1.$$

50.4 Bibliografía sugerida

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1985). “A Theory of the Term Structure of Interest Rates.” *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 363-384.

Elliot, R. J. and P. E. Kopp (1999). Mathematics of Financial Markets. Springer-Verlag, New York.

50.5 Ejercicios

50.1 Muestre que

$$\mathbb{E} \left[\frac{r_t}{\nu_t^2} \mid r_0 \right] = n + \frac{e^{-at}}{\nu_t^2} r_0.$$

Solución: Observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{r_t}{\nu_t^2} \mid r_0 \right] &= \frac{1}{\nu_t^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [y_{kt}^2 \mid y_{k0}] \\ &= \frac{1}{\nu_t^2} \sum_{k=1}^n (\text{Var}[y_{kt} \mid y_{k0}] + (\mathbb{E}[y_{kt} \mid y_{k0}])^2) \\ &= \frac{n}{\nu_t^2} \nu_t^2 + \frac{e^{-at}}{\nu_t^2} \sum_{k=1}^n y_{k0}^2 \\ &= n + \frac{e^{-at}}{\nu_t^2} r_0. \end{aligned}$$

50.2 Pruebe que

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{r_t}{\nu_t^2} \right)^2 \mid r_0 \right] = \frac{r_0 e^{-at}}{\nu_t^4} + \frac{n}{\nu_t^2} + \frac{2e^{-at}}{\nu_t^4} \sum_{1 \leq k < j \leq n} y_{k0} y_{j0}.$$

Solución: Debido a la independencia entre las variables aleatorias U_{kt} , $k = 1, 2, \dots, n$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\frac{r_t}{\nu_t^2} \right)^2 \mid r_0 \right] &= \frac{1}{\nu_t^4} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E} [y_{kt}^2 \mid y_{k0}] + 2 \sum_{1 \leq k < j \leq n} \mathbb{E} [y_{kt} y_{jt} \mid y_{k0}, y_{j0}] \right) \\ &= \frac{e^{-at}}{\nu_t^4} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\left(y_{k0} + \frac{1}{2}\sigma \int_0^t e^{as/2} dU_{ks} \right)^2 \right] + \frac{2e^{-at}}{\nu_t^4} \sum_{1 \leq k < j \leq n} y_{k0} y_{j0} \\ &= \frac{e^{-at}}{\nu_t^4} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[y_{k0}^2 + y_{k0} \sigma \int_0^t e^{as/2} dU_{ks} + \frac{1}{4}\sigma^2 \left(\int_0^t e^{as/2} dU_{ks} \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{2e^{-at}}{\nu_t^4} \sum_{1 \leq k < j \leq n} y_{k0} y_{j0} \\ &= \frac{e^{-at}}{\nu_t^4} \sum_{k=1}^n \left\{ y_{k0}^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t e^{as/2} dU_{ks} \right)^2 \right] \right\} + \frac{2e^{-at}}{\nu_t^4} \sum_{1 \leq k < j \leq n} y_{k0} y_{j0} \\ &= \frac{e^{-at}}{\nu_t^4} \sum_{k=1}^n \left(y_{k0}^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 \int_0^t e^{as} ds \right) + \frac{2e^{-at}}{\nu_t^4} \sum_{1 \leq k < j \leq n} y_{k0} y_{j0} \\ &= \frac{e^{-at}}{\nu_t^4} \sum_{k=1}^n \left(y_{k0}^2 + \frac{\sigma^2}{4a} (e^{at} - 1) \right) + \frac{2e^{-at}}{\nu_t^4} \sum_{1 \leq k < j \leq n} y_{k0} y_{j0} \\ &= \frac{e^{-at}}{\nu_t^4} \left(r_0 + \frac{n\sigma^2}{4a} (e^{at} - 1) \right) \\ &= \frac{r_0 e^{-at}}{\nu_t^4} + \frac{n\sigma^2}{4\nu_t^4 a} (1 - e^{-at}) + \frac{2e^{-at}}{\nu_t^4} \sum_{1 \leq k < j \leq n} y_{k0} y_{j0} \\ &= \frac{r_0 e^{-at}}{\nu_t^4} + \frac{n}{\nu_t^2} + \frac{2e^{-at}}{\nu_t^4} \sum_{1 \leq k < j \leq n} y_{k0} y_{j0}. \end{aligned}$$

50.3 Con base en los dos ejercicios anteriores, demuestre que

$$\text{Var} \left[\frac{r_t}{\nu_t^2} \right] = \frac{r_0 e^{-at}}{\nu_t^4} + \frac{n}{\nu_t^2} - \left(n + \frac{e^{-at}}{\nu_t^2} r_0 \right)^2 + \frac{2e^{-at}}{\nu_t^4} \sum_{1 \leq k < j \leq n} y_{k0} y_{j0}.$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\frac{r_t}{\nu_t^2} \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{r_t}{\nu_t^2} \right)^2 \mid r_0 \right] - \left(\mathbb{E} \left[\frac{r_t}{\nu_t^2} \mid r_0 \right] \right)^2 \\ &= \frac{r_0 e^{-at}}{\nu_t^4} + \frac{n}{\nu_t^2} - \left(n + \frac{e^{-at}}{\nu_t^2} r_0 \right)^2 + \frac{2e^{-at}}{\nu_t^4} \sum_{1 \leq k < j \leq n} y_{k0} y_{j0}. \end{aligned}$$

50.4 Suponga que

$$dr_t = \left(\frac{n\sigma^2}{4} - ar_t \right) dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t.$$

El tiempo de primera visita, T_0 , al estado $r_t = 0$ se define como:

$$T_0 = \inf \{t : r_t = 0\}.$$

Demuestre que si $0 \leq n < 2$, entonces $\mathbb{P}\{T_0 < \infty\} = 1$, mientras que si $n \geq 2$, se cumple que $\mathbb{P}\{T_0 < \infty\} = 0$.

50.5 En el modelo de tasa corta de CIR muestre que si $t < T$, entonces

$$\mathbb{E}[r_T | \mathcal{F}_t] = b + (r_t - b)e^{-a(T-t)}$$

y

$$\text{Var}[r_T | \mathcal{F}_t] = r_t \left(\frac{\sigma^2}{a} \right) \left(e^{-a(T-t)} - e^{-2a(t-t)} \right) + \frac{ab\sigma^2}{2} \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)^2.$$

Concluya de lo anterior que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}[r_T | \mathcal{F}_t] = b$$

y

$$\text{Var}[r_T | \mathcal{F}_t] = b \left(\frac{\sigma^2}{2a} \right).$$

Solución: En el modelo CIR, la tasa corta se distribuye como una Ji cuadrada no central:

$$\frac{r_t}{\nu_t^2} \sim \chi^2 \left(\frac{4ab}{\sigma^2}, \frac{4ar_o e^{-at}}{\sigma^2(1 - e^{-at})} \right)$$

donde $\nu_t^2 = \sigma^2(1 - e^{-at})/4a$. Recuerde que una variable aleatoria Y que se distribuye como una χ^2 no central con n grados de libertad y parámetro de no centralidad δ , $Y \sim \chi^2(n, \delta)$, si

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2 / \sigma^2$$

donde las X_i son variables aleatorias normales independientes con la misma varianza, σ^2 , y con media $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. El parámetro de no centralidad de Y se define como $\delta = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 / \sigma^2$. La media y la varianza de Y están dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n [\text{Var}[X_i] + \mathbb{E}^2[X_i]] \\ &= n\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \\ &= n + \delta \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\text{Var}[Y] &= \text{Var} \left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sigma^2} \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i^2] \\
&= \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (\text{E}[X_i^2] - \text{E}^2[X_i]) \\
&= \frac{1}{\sigma^4} \left(\sum_{i=1}^n (3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu_i^2 + \mu_i^4) - \sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu_i^2)^2 \right) \\
&= \frac{1}{\sigma^4} (2n\sigma^4 + 4\sigma^2 \sum_{i=1}^n \mu_i^2) \\
&= 2(n + 2\delta).
\end{aligned}$$

A partir de estos resultados y la distribución de r_t/ν_t^2 , se tiene que

$$\begin{aligned}
\text{E}[r_t | \mathcal{F}_0] &= \nu_t^2 \text{E} \left[\frac{r_t}{\nu_t^2} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\
&= \nu_t^2 (n + \delta) \\
&= \frac{\sigma^2(1 - e^{-at})}{4a} \left(\frac{4ab}{\sigma^2} + \frac{4ar_0e^{-at}}{\sigma^2(1 - e^{-at})} \right) \\
&= b(1 - e^{-at}) + r_0e^{-at} \\
&= b + (r_0 - b)e^{-at}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\text{Var}[r_t | \mathcal{F}_0] &= \nu_t^4 \text{Var} \left[\frac{r_t}{\nu_t^2} \right] \\
&= 2\nu_t^4 (n + 2\delta) \\
&= \frac{2\sigma^4(1 - e^{-at})^2}{16a^2} \left(\frac{4ab}{\sigma^2} + \frac{8ar_0e^{-at}}{\sigma^2(1 - e^{-at})} \right) \\
&= \frac{b\sigma^2}{2a} (1 - e^{-at})^2 + \frac{\sigma^2}{a} (1 - e^{-at}) r_0 e^{-at} \\
&= r_0 \left(\frac{\sigma^2}{a} \right) (e^{-at} - e^{-2at}) + \left(\frac{ab\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{1 - e^{-at}}{a} \right)^2.
\end{aligned}$$

Cuando $T \rightarrow \infty$, todas las exponentiales en los dos resultados anteriores tienden a cero, por lo que $\lim_{T \rightarrow \infty} \text{E}[r_T | \mathcal{F}_t] = b$ y $\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}[r_T | \mathcal{F}_t] = b\sigma^2/2a$.

50.6 En el modelo CIR la tasa spot es no negativa. Se sabe que $r_t > 0$ cuando $\sigma^2 \leq ab/2$, mientras que $r_t \geq 0$ cuando $\sigma^2 > ab/2$. Muestre que r_t tiene densidad

$$f(r_t) = ce^{-c(r_t+v)} \left(\frac{r_t}{v} \right)^{q/2} I_q(2c\sqrt{rv}); \quad r_t \geq 0,$$

donde

$$c = \frac{2a}{\sigma^2(1 - e^{-at})}, \quad v = r_0e^{-at}, \quad q = \frac{2ab}{\sigma^2} - 1$$

y

$$I_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+q}}{k!\Gamma(k+q+1)}$$

es la función modificada de Bessel de primera clase de orden q . Como siempre, $\Gamma(x)$ es la función Gamma. Se dice, en este caso, que la función de densidad corresponde a una variable aleatoria con distribución χ^2 no central con $2(q+1)$ grados de libertad y parámetro de no centralidad $2cv$. Observe que $f(r_t)$ se puede escribir en términos de la función de distribución Poisson y la función de densidad Gamma. Para ello, note que si en la función modificada de Bessel de primera clase de orden q se efectúa el cambio de variable $x = 2c\sqrt{r_tv}$, se sigue que

$$\begin{aligned} I_q(x) &= I_q(2c\sqrt{r_tv}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+q+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+q} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+q+1)} (c\sqrt{r_tv})^{2k+q}. \end{aligned}$$

Si se sustituye la expresión anterior en $f(r_t)$, se tiene que

$$f(r_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cv)^k}{k!} e^{-cv} \frac{1}{\Gamma(k+q+1)} c^{q+k+1} r_t^{q+k} e^{-cr_t}.$$

Si se denota ahora $\alpha = k + q + 1$, se obtiene

$$f(r_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cv)^k}{k!} e^{-cv} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} c^\alpha r_t^{\alpha-1} e^{-cr_t}.$$

Si además se supone $c = \lambda$, se puede escribir que

$$f(r_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda v)^k}{k!} e^{-\lambda v} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha r_t^{\alpha-1} e^{-\lambda r_t}.$$

En este caso,

$$h(r_t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha r_t^{\alpha-1} e^{-\lambda r_t}$$

es la función de densidad de una variable aleatoria con distribución Gamma con media $E[r_t] = \alpha/\lambda$ y varianza $\text{Var}(r_t) = \alpha/\lambda^2$.

CAPÍTULO 51

MODELO DE TASA CORTA DE HO Y LEE: CALIBRACIÓN CON UNA CURVA INICIAL DE CEROS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Modelos de calibración de curvas de ceros con precios actuales
- Ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero
- Ecuaciones integrales
- Tasa forward

51.1 Introducción

Hasta ahora, en varios de los capítulos anteriores, se ha visto que a partir de una especificación exógena de la dinámica de la tasa de interés instantánea, o tasa corta, es posible determinar el precio de un bono cupón cero de manera endógena. Esto se hizo utilizando los enfoques de ecuaciones diferenciales parciales y probabilista. En el primer caso, se caracteriza el precio del bono como solución de una ecuación diferencial parcial de segundo orden. Dicha ecuación diferencial parcial se obtiene al cubrir, del riesgo de mercado, un portafolio de bonos a distintos vencimientos y a través de argumentos económicos de equilibrio general. El supuesto fundamental fue que si los mercados estaban en equilibrio, entonces no podían existir oportunidades de arbitraje. Una vez que la ecuación diferencial parcial era resuelta, su solución se utilizaba para generar una curva de rendimiento, la cual estaba en función del valor más reciente de la tasa corta y de los parámetros que intervenían en el modelo. El siguiente paso era decidirse por un método de estimación de los parámetros en cuestión, el cual se basaba, usualmente, en registros históricos de la tasa corta. Estos pasos se resumen, a continuación, con mayor precisión:

(i) Se supone una especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa corta:

$$dr_t = \mu(r_t; \theta)dt + \sigma(r_t; \theta)dW_t, \quad (51.1)$$

donde $(W_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, y θ era un vector de parámetros.

(ii) El precio de equilibrio, $B(r_t, t; T, \theta)$, en t , de un bono cupón cero que al vencimiento, T , paga una unidad monetaria satisface

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t; \theta)\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + \mu(r_t; \theta)\frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0, \quad (51.2)$$

junto con la condición final

$$B(r_t, T; T, \theta) = 1.$$

(iii) La ecuación diferencial parcial en (51.2) se resuelve suponiendo una solución de la forma

$$B(r_t, t; T, \theta) = e^{A(t, T; \theta) - r_t D(t, T; \theta)}. \quad (51.3)$$

(iv) En virtud de (51.3), la curva de rendimiento se calcula mediante

$$R(t, T; \theta) = -\frac{\ln B(r_t, t; T, \theta)}{T - t} = \frac{r_t D(t, T; \theta) - A(t, T; \theta)}{T - t}. \quad (51.4)$$

(v) Se obtiene un estimador, $\hat{\theta}$, del vector de parámetros, θ , y se sustituye en (51.3) y (51.4).

Por otro lado, el enfoque probabilista calcula de manera directa

$$B(r_t, t; T, \theta) = E \left\{ \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\} \quad (51.5)$$

utilizando la distribución de $\int_t^T r_s ds$.

Otra alternativa para valuar bonos cupón cero, con base en el comportamiento de una tasa corta, es propuesta por Thomas S. Y. Ho y Sang-Bin Lee en su artículo “Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims”, publicado en 1986 en el “Journal of Finance”. En su metodología, Ho y Lee, a partir de una curva de rendimiento conocida, calibran para un tiempo posterior una curva de rendimiento factible. La nueva curva de rendimiento se obtiene calibrando la tendencia de la tasa corta con la pendiente de la tasa forward asociada a la curva de rendimiento conocida más un término lineal en la variable tiempo. De esta forma, los valores de la curva de rendimiento conocida son consistentes con los valores teóricos obtenidos a través de la metodología propuesta por Ho y Lee. Por esta razón el modelo de Ho y Lee no pertenece a la clase de modelos de tasas de equilibrio general.

Es importante mencionar también que en los modelos de Merton (1973), Vasicek (1973) y Cox, Ingersoll y Ross (1985), la estimación de todos los parámetros se lleva a cabo mediante una serie histórica de la tasa corta, mientras que en el modelo de Ho y Lee sólo el parámetro de volatilidad se estima con un registro histórico de la tasa corta, pues como se mencionó antes, la curva de rendimiento se calibra ajustando la información actual del mercado a la tendencia de la tasa corta.

Por último, vale la pena destacar que al igual que en el modelo de Vasicek, el de Ho y Lee puede producir valores negativos de r_t , lo cual es una limitación seria. Aun cuando la probabilidad de que se presenten valores negativos en el modelo de Ho y Lee es muy pequeña, la posibilidad de que estos valores ocurran siempre está presente.

51.2 Planteamiento del modelo

El modelo original de Ho y Lee (1986) es desarrollado en tiempo discreto. Con el propósito de que dicho modelo pueda compararse con los modelos estudiados en capítulos anteriores, es necesario plantearlo en tiempo continuo. El modelo de tasa corta propuesto por Ho y Lee considera, como en los modelos de Merton, Vasicek y Cox, Ingersoll y Ross, un solo factor de incertidumbre. En este modelo el término de tendencia es dependiente del tiempo e independiente del nivel de la tasa corta. El comportamiento de la tasa corta es conducido por el siguiente proceso:

$$dr_t = h_t dt + \sigma dW_t, \quad (51.6)$$

donde $\sigma > 0$ es una cantidad constante, $h_t = h(t)$ es una función del tiempo y $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$. Es decir, la dinámica estocástica de la tasa corta sigue una distribución normal y

$$r_t = r_0 + \int_0^t h_s ds + \sigma \int_0^t dW_s.$$

En este caso, la media y varianza de la tasa corta satisfacen, respectivamente,

$$E[r_t | \mathcal{F}_0] = r_0 + \int_0^t h_s ds$$

y

$$\text{Var}[r_t | \mathcal{F}_0] = \sigma^2 t,$$

donde \mathcal{F}_0 es la información relevante disponible en $t = 0$. La función h_t determina, en promedio, hacia donde se moverá r_t en el futuro y se elegirá de tal manera que la curva de rendimiento sea consistente con una curva de rendimiento anterior. Finalmente, observe que la volatilidad es constante, es decir, es independiente del nivel de la tasa corta y del tiempo.

51.3 Ecuación diferencial parcial del comportamiento de un bono cupón cero

En el modelo de Ho y Lee el precio del bono cupón cero, $B(t, T)$, satisface la siguiente ecuación diferencial parcial parabólica:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + h_t \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - r_t B = 0, \quad (51.7)$$

junto con la condición final $B(T, T) = 1$. Dado que la ecuación anterior no tiene derivadas parciales cruzadas y h_t no depende de r_t , se puede suponer una solución en variables separables, como en el modelo de tasa corta de Merton, de la forma:

$$B(t, T) = e^{A(t, T) - r_t(T-t)}. \quad (51.8)$$

Claramente, en este caso, se cumple que $A(T, T) = 0$, ya que el valor nominal del bono en el tiempo T , está dado por

$$B(T, T) = e^{A(T, T)} = 1.$$

Observe ahora que

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= \left(\frac{\partial A}{\partial t} + r_t \right) B, \\ \frac{\partial B}{\partial r_t} &= -(T-t)B \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} = (T-t)^2 B.$$

Si se sustituyen las derivadas parciales anteriores en (51.7), se encuentra que

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} + r_t \right) B + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)^2 B - r_t B - h_t(T-t)B = 0.$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = h_t(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)^2. \quad (51.9)$$

Es relevante destacar que al suponer una solución de la forma (51.8), la ecuación diferencial parcial de segundo orden en B , expresada en (51.7), se ha transformado en una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, dada en (51.9). La solución de la ecuación diferencial ordinaria en (51.9) está dada por

$$A(t, T) = - \int_t^T h_s(T-s)ds + \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3. \quad (51.10)$$

En virtud de (51.4), $A(t, T) - r_t(T-t) = \ln B(t, T)$, de donde se desprende que

$$\int_t^T h_s(T-s)ds = - \ln B(t, T) + \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3 - r_t(T-t),$$

o en forma alternativa, en términos de la curva de rendimiento $R(t, T)$,

$$R(t, T)(T-t) = \int_t^T h_s(T-s)ds - \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3 + r_t(T-t). \quad (51.11)$$

De esta manera, si se conociera h_t se podría determinar $R(t, T)$. Sin embargo, h_t no es conocida. ¿Qué se puede hacer para resolver este problema? La forma de contestar esta pregunta es justamente la contribución de Ho y Lee, como se verá en la siguiente sección.

51.4 Calibración con una curva inicial de ceros

En lo que sigue, se supone que σ ha sido estimada por algún método de inferencia estadística. La función, $h_s^{(0)}$ se elegirá de tal manera que sea consistente con los valores de $B(0, T) = e^{-R(0,T)T}$, obtenidos en $t = 0$. Es decir, se desea determinar $h_s^{(0)}$ de tal manera que se satisfaga (51.11), esto es,

$$\int_0^T h_s^{(0)}(T-s)ds = -\ln B(0, T) + \frac{1}{6}\sigma^2 T^3 - r_0 T. \quad (51.12)$$

Como puede observarse, la expresión anterior es una ecuación integral en $h_s^{(0)}$. En esta ecuación $-\ln B(0, T)$ es conocido y sólo el miembro izquierdo es desconocido. Este razonamiento contiene justamente toda la esencia del modelo de Ho y Lee. Aunque la ecuación (51.7) se deriva en el marco del equilibrio general, la calibración de $h_s^{(0)}$ con $B(0, T) = e^{-R(0,T)T}$ rompe con dicho marco. Por esta razón, este tipo de modelos son conocidos como de no arbitraje. Una forma de resolver la ecuación integral (51.12) es calculando sus dos primeras derivadas. Con el fin de derivar (51.12) con respecto de T , denote el integrando de (51.12), por un momento, como

$$g(T, s) = h_s^{(0)}(T-s).$$

En este caso, la regla de Leibnitz conduce a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T g(T, s)ds &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} g(T, s)ds + g(T, T) \frac{\partial T}{\partial T} - g(T, 0) \frac{\partial 0}{\partial T} \\ &= \int_0^T h_s^{(0)} ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada parcial de (51.12) con respecto de T , está dada por

$$\int_0^T h_s^{(0)} ds = -\frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) + \frac{1}{2}\sigma^2 T^2 - r_0. \quad (51.13)$$

Si se deriva de nuevo (51.12), con respecto de T , se encuentra que

$$h_T^{(0)} = -\frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) + \sigma^2 T,$$

o bien en términos de la tasa forward instantánea

$$h_T^{(0)} = \frac{\partial}{\partial T} f(0, T) + \sigma^2 T. \quad (51.14)$$

Lo anterior significa que la tasa corta se moverá, en promedio, en la dirección de la pendiente de la tasa forward.

Para encontrar $A(t, T)$, se escribe primero (51.14) sustituyendo t en lugar de T , es decir,

$$h_t^{(0)} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln B(0, t) + \sigma^2 t \quad (51.15)$$

6

$$h_t^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + \sigma^2 t.$$

De esta manera, la dinámica estocástica de la tasa corta no presenta reversión a la media. Observe que si la pendiente de la tasa forward es positiva, entonces $h_t^{(0)}$ es positiva. Mientras que si la

pendiente de la tasa forward es negativa y grande en valor absoluto, entonces $h_t^{(0)}$ podría ser negativa. Ahora bien, en virtud de (51.15), el término integral en (51.12) satisface

$$\begin{aligned} \int_t^T h_s^{(0)}(T-s)ds &= \int_t^T \left(-\frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) + \sigma^2 s \right) (T-s)ds \\ &= - \int_t^T (T-s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) ds + \sigma^2 \int_t^T s(T-s)ds \\ &= -T \int_t^T \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) ds + \int_t^T s \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) ds + \frac{\sigma^2}{6} (T^3 - 3Tt^2 + 2t^3). \end{aligned} \quad (51.16)$$

La segunda integral puede resolverse mediante integración por partes, como sigue:

$$\begin{aligned} \int_t^T s \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) ds &= s \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) \Big|_t^T - \int_t^T \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \\ &= T \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) - t \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \ln B(0, T) + \ln B(0, t). \end{aligned}$$

En consecuencia, la integral en (51.16) satisface

$$\begin{aligned} \int_t^T h_s^{(0)}(T-s)ds &= -T \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) + T \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) \\ &\quad + T \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) - t \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{6} (T^3 - 3Tt^2 + 2t^3) \\ &= (T-t) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) + \frac{\sigma^2}{6} (T^3 - 3Tt^2 + 2t^3). \end{aligned} \quad (51.17)$$

Si se sustituye (51.17) en (51.10), se obtiene que

$$A(t, T) = \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - (T-t) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{6} (T^3 - 3Tt^2 + 2t^3) + \frac{\sigma^2}{6} (T-t)^3$$

ó

$$A(t, T) = \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - (T-t) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{2} t(T-t)^2. \quad (51.18)$$

51.5 Calibración de la curva de rendimiento

Una vez que la tendencia se ha calibrado con una curva de rendimiento conocida, en virtud de (51.11), la curva de rendimiento está dada por:

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left(\int_t^T h_s^{(0)}(T-s)ds - \frac{1}{6} \sigma^2 (T-t)^3 + r_t(T-t) \right).$$

Es decir,

$$R(t, T) = \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{1}{T-t} \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t(T-t) + r_t, \quad (51.19)$$

o en términos de la tasa forward

$$R(t, T) = -f(0, t) - \frac{1}{T-t} \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t(T-t) + r_t. \quad (51.20)$$

En la práctica, se utiliza en (51.15) y en (51.20) la aproximación

$$-f(0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) \approx \frac{\ln B(0, t + \Delta t) - \ln B(0, t)}{\Delta t} \quad (51.21)$$

con Δt pequeña. Bajo esta aproximación es usual cambiar el término de segundo orden en t , $\sigma^2 t(T-t)/2$, por el término modificado $\sigma^2 t[T-t-\Delta t]/2$. Las cantidades que se refieren al tiempo cero, a saber $B(0, t)$, $B(0, t+\Delta t)$ y $B(0, T)$ representan precios en un periodo anterior; las cantidades referenciadas al tiempo t se consideran disponibles en el presente. Si al día siguiente se presentan cambios en el mercado, es recomendable estimar $h_t^{(0)}$ y el parámetro de volatilidad. La metodología de Ho y Lee es muy popular y no se puede pedir más cuando se trabaja con modelos de calibración con un solo factor de incertidumbre.

En la práctica, los tiempos 0 y t se pueden pensar de dos formas. Por un lado, el tiempo cero es una fecha anterior y t es el presente, momento en que se conoce r_t . De esta manera, $R(t, T)$ es la curva de rendimiento actual. Por otro lado, el tiempo cero puede ser el presente y t es una fecha futura. En este caso, se debe conocer toda la curva de rendimiento actual, $R(0, T)$, y se tiene que estimar r_t . De esta manera, $R(t, T)$ es una curva de rendimiento estimada para una fecha futura t . A fin de estimar r_t en una fecha futura se puede utilizar, con base en (51.15),

$$r_t = r_0 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(0, s) ds + \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \sigma \int_0^t dW_s,$$

equivalentemente

$$r_t = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \sigma W_t,$$

ya que $f(0, 0) = r_0$. En este caso, se tiene la siguiente aproximación

$$E[r_t | \mathcal{F}_t] \approx -\frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{B(0, t)}{B(0, t + \Delta t)} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2.$$

51.6 Precio del bono cupón cero

En esta sección se determina el precio de un bono cupón cero asociado al modelo de tasa corta de Ho y Lee. A partir de (51.3) se sigue que

$$B(t, T) = \exp \left\{ \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - (T-t) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{2} t(T-t)^2 - r_t(T-t) \right\}. \quad (51.22)$$

Para fines prácticos, la aproximación (51.21) también puede ser utilizada en este caso.

51.7 Tasa forward

A continuación se calcula la tasa forward asociada al modelo de tasa corta de Ho y Lee. Consideré la identidad

$$\int_t^T f(t, s) ds = -\ln B(t, T) = R(t, T)(T-t).$$

Después de derivar la expresión anterior con respecto de T , se sigue que

$$\begin{aligned} f(t, T) &= R(t, T) + (T-t) \frac{\partial}{\partial T} R(t, T) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{1}{T-t} \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t(T-t) + r_t \\ &\quad + \frac{1}{T-t} \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) + \frac{1}{2} \sigma^2 t(T-t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) + \sigma^2 t(T-t) + r_t. \end{aligned}$$

51.8 Dinámica de la tasa corta

En esta sección se determina la dinámica estocástica de la tasa corta. En virtud de que

$$h_t = \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + \sigma^2 t, \quad (51.23)$$

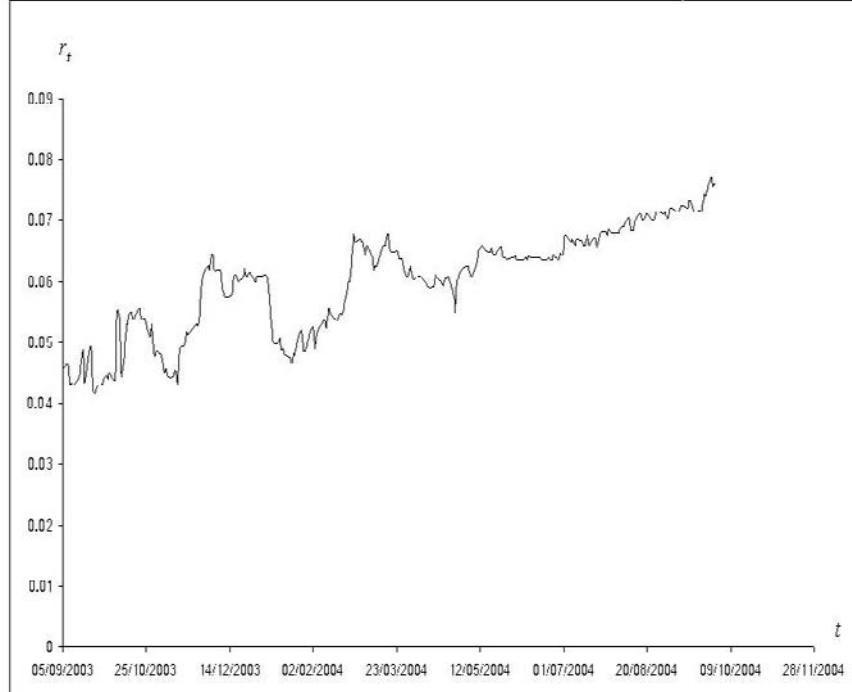
se tiene

$$dr_t = \left(\frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + \sigma^2 t \right) dt + \sigma dW_t.$$

Es decir, la tendencia de la tasa corta está dada por la pendiente de la tasa forward más un término lineal en t .

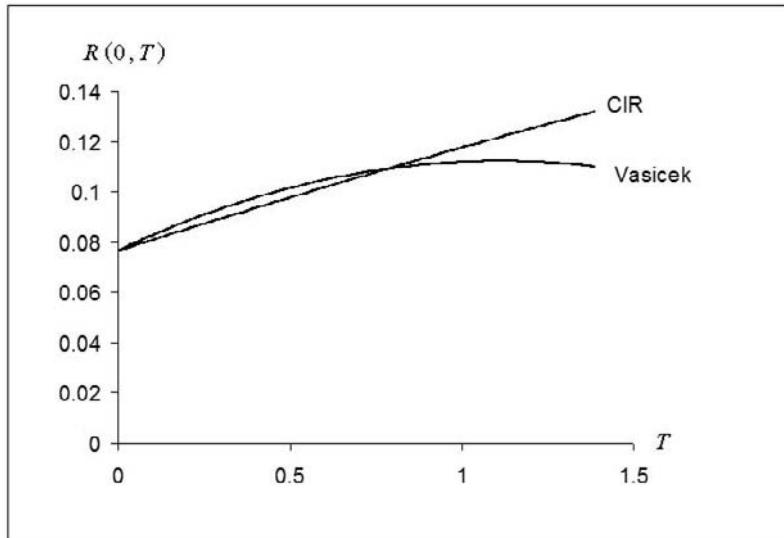
51.9 Aplicación del modelo de Ho y Lee

A continuación se lleva a cabo una aplicación del modelo de Ho y Lee. En la Gráfica 51.1 se muestra un registro histórico de los valores diarios de la tasa de CETES a 7 días (tasa corta) en el periodo comprendido entre el 5 de septiembre de 2003 y el 30 de septiembre de 2004.

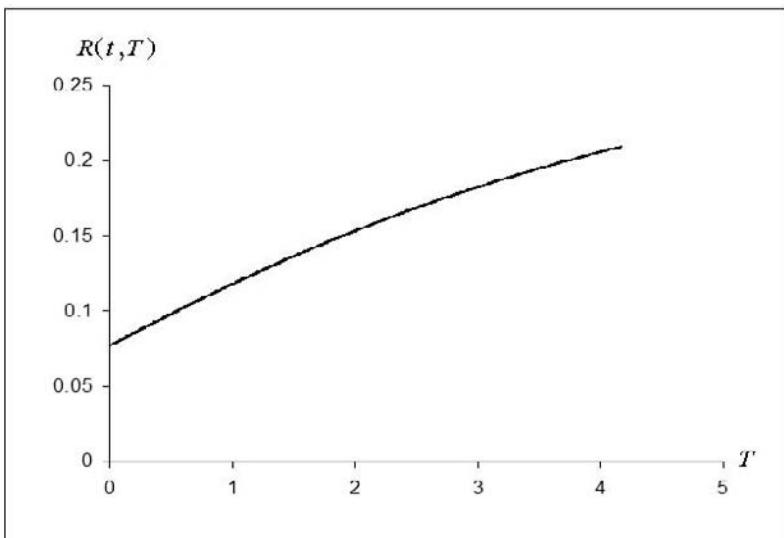


Gráfica 51.1 Comportamiento histórico de la tasa corta r_t .

La Gráfica 51.2 muestra las curvas de ceros obtenidas con los modelos de Vasicek ($a = 0.0199$, $b = 6.5804$, $\sigma = 0.4203$) y CIR ($a = 0.0224$, $b = 3.9444$, $\sigma = 0.3593$). La curva de rendimiento de Vasicek es la que comienza a decrecer a partir de 1.16 años. La Gráfica 51.3 muestra la curva de ceros calibrada con la metodología de Ho y Lee, en un periodo de 4.17 años y tomando como base la estructura de plazos de la tasa de interés del modelo CIR. La tasa corta actual está dada por $r_t = 0.0765$, $t = 1/360$. El valor estimado de la volatilidad fue $\hat{\sigma} = 0.3593$.



Gráfica 51.2 Curvas iniciales de ceros generadas con los modelos de Vasicek y CIR.



Gráfica 51.3 Curva de ceros calculada con el modelo de Ho y Lee.

51.10 Árboles binomiales y modelo de Ho y Lee

En el modelo de Ho y Lee se tiene que

$$r_h = f(0, h) + \frac{1}{2}\sigma^2 h^2 + \sigma W_h.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[r_h | \mathcal{F}_0] = f(0, h) + \frac{1}{2}\sigma^2 h^2 \quad (51.24)$$

y

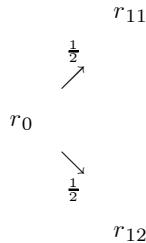
$$\text{Var}[r_h | \mathcal{F}_0] = \sigma^2 h. \quad (51.25)$$

Suponga que h es suficientemente pequeña de tal manera que h^2 es despreciable. De esta manera, se puede escribir

$$\mathbb{E}[r_h | \mathcal{F}_0] \approx f(0, h). \quad (51.26)$$

51.10.1 Construcción del árbol de la tasa corta

A continuación se construye un árbol que parte de la tasa corta inicial, $r_0 = f(0, 0)$, y que después de un periodo de tiempo de longitud h la tasa corta puede tomar dos posibles valores r_{11} y r_{12} con probabilidad $\frac{1}{2}$, tal y como lo muestra el árbol de la Gráfica 51.4.



Gráfica 51.4 Expansión del árbol binomial de una etapa para r_t .

De acuerdo con las ecuaciones (51.25) y (51.26), se debe satisfacer que

$$f_1 = \frac{r_{11} + r_{12}}{2} \quad (51.27)$$

y

$$\sigma^2 h = \frac{(r_{11} - f_1)^2 + (r_{12} - f_1)^2}{2}, \quad (51.28)$$

donde $f_1 = f(0, h, 2h)$ (utilizando la notación de la tasa forward discreta). Si f_1 es conocida, las expresiones anteriores determinan un sistema de dos ecuaciones simultáneas en r_{11} y r_{12} . La solución de dicho sistema está dado por

$$r_{11} = f_1 + \sigma\sqrt{h}$$

y

$$r_{12} = f_1 - \sigma\sqrt{h}.$$

Si se supone que $f_2 = f(0, 2h, 3h)$, entonces para la segunda etapa se construyen ramas con posibles valores r_{21}, r_{22}, r_{23} y r_{24} de tal manera que su promedio sea igual a f_2 . Una posibilidad es que

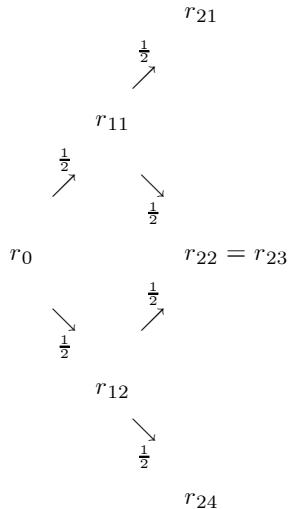
$$r_{21} = f_2 + 2\sigma\sqrt{h},$$

$$r_{22} = r_{23} = f_2 + 0 \cdot \sigma\sqrt{h}$$

y

$$r_{24} = f_2 - 2\sigma\sqrt{h}.$$

La Gráfica 51.5 muestra el árbol binomial resultante para dos etapas.

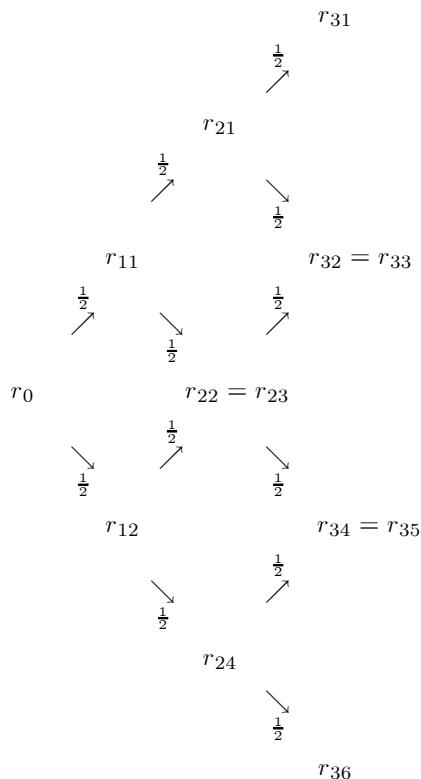


Gráfica 51.5 Expansión del árbol binomial de dos períodos para r_t .

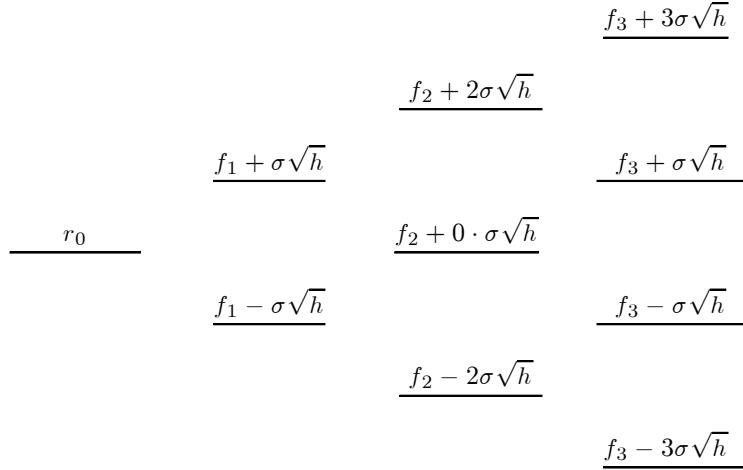
Si se procede como antes y $f_3 = f(0, 3h, 4h)$, en la tercera etapa se tendrá que

$$\begin{aligned} r_{31} &= f_3 + 3\sigma\sqrt{h}, & r_{32} &= r_{33} = f_3 + \sigma\sqrt{h}, \\ r_{34} &= r_{35} = f_3 - \sigma\sqrt{h} & \text{y} & \quad r_{36} = f_3 - 3\sigma\sqrt{h}. \end{aligned}$$

En la Gráfica 51.6 se muestra el árbol binomial para tres períodos y en la Gráfica 51.7 se muestra una representación alternativa de dicho árbol que puede ser encontrada en la literatura.



Gráfica 51.6 Expansión del árbol binomial de tres períodos para r_t .

Gráfica 51.7 Expansión alternativa del árbol binomial de tres períodos para r_t .

51.10.2 Construcción del árbol hacia adelante del precio del bono

Los posibles precios de los bonos para diferentes vencimientos se calculan hacia adelante de la siguiente forma. Si $B_0 = 1$ y $B_1 = (1 + r_0 h)B_0$, entonces

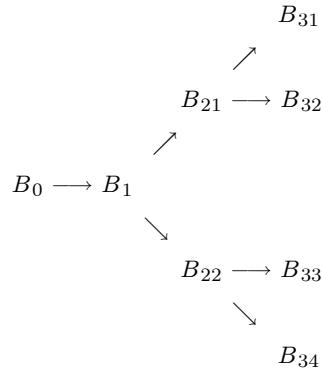
$$B_{21} = (1 + r_{11} h)B_1 \quad \text{y} \quad B_{22} = (1 + r_{12} h)B_1. \quad (51.29)$$

De la misma manera,

$$B_{31} = (1 + r_{21} h)B_{21}, \quad B_{32} = (1 + r_{22} h)B_{21}, \quad (51.30)$$

$$B_{33} = (1 + r_{23} h)B_{22} \quad \text{y} \quad B_{34} = (1 + r_{24} h)B_{22}. \quad (51.31)$$

Observe que aunque $r_{22} = r_{23}$, B_{32} no es necesariamente igual a B_{33} . En este caso, se dice que el árbol no es recombinante.



Gráfica 51.8 Árbol hacia adelante del precio de un bono cupón cero.

51.10.3 Construcción del árbol hacia atrás del precio del bono

Para calcular el precio de un bono en $t = 0$ que vence dentro de tres períodos se utiliza el siguiente proceso recurrente hacia atrás. Suponga $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}$, y que

$$B_{31} = B_{32} = B_{33} = B_{34} = 1,$$

entonces

$$B_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{B_{31}}{1 + r_{21} h} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{B_{32}}{1 + r_{22} h} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + r_{21} h} + \frac{1}{1 + r_{22} h} \right),$$

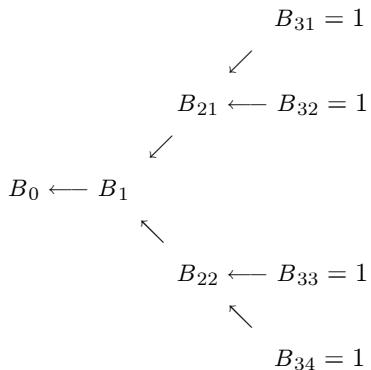
$$B_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{B_{33}}{1 + r_{23}h} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{B_{34}}{1 + r_{24}h} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + r_{23}h} + \frac{1}{1 + r_{24}h} \right),$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{B_{21}}{1 + r_{11}h} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{B_{22}}{1 + r_{12}h} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + r_{11}h} + \frac{1}{1 + r_{12}h} \right)$$

y, por último,

$$B_0 = \frac{B_1}{1 + r_0h}.$$

La Gráfica 51.9 muestra el árbol hacia atrás para obtener el precio de un bono cupón cero



Gráfica 51.9 Árbol hacia atrás del precio de un bono cupón cero.

51.11 Conclusiones

El modelo de Ho y Lee fue el primero para calibrar una estructura de plazos de una tasa de interés con información actual del mercado. Así, la calibración de la función h_t se lleva a cabo con precios actuales de un bono cupón cero. Es importante destacar que el modelo supone que existen precios actuales de los bonos para todos los vencimientos y que los precios son dos veces diferenciables con respecto a la fecha de vencimiento.

51.12 Bibliografía sugerida

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates." *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 363-384.
- Ho, T. and S. Lee (1986). "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims". *Journal of Finance*, Vol. 41, No. 5. pp. 1129-1142.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

51.13 Ejercicios

51.1 Suponga que h_t es constante, $h_t = \bar{h}$ para toda t , demuestre que

$$R(t, T) = \frac{1}{2}\bar{h}(T - t) - \frac{1}{6}\sigma^2(T - t)^2 + r_t.$$

Solución: Es suficiente utilizar la ecuación (51.11).

51.2 Con base en el ejercicio anterior verifique que

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t, T) = \frac{1}{2}\bar{h} - \frac{1}{3}\sigma^2(T - t).$$

Discuta las consecuencias del resultado cuando T es grande.

Solución: El resultado anterior implica que conforme T aumenta, la pendiente de la curva de rendimiento se tornará negativa, lo cual puede producir eventualmente valores negativos de $R(t, T)$.

51.3 Demuestre que (51.18) puede reescribirse como:

$$B(t, T) = \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) \left(\frac{B(0, t + \Delta t)}{B(0, t)} \right)^{-\frac{T-t}{\Delta t}} \times \\ \exp \left\{ -(T-t) \left(\frac{\sigma^2}{2} t(T-t-\Delta t) - r_t \right) \right\}.$$

51.4 A partir de la estructura de plazos de la tasa de interés obtenida para el modelo de Ho y Lee, verifique que cuando el plazo del bono tiende a cero, es decir, cuando $T \rightarrow t$, se obtiene la tasa corta.

Solución: Observe que si $v = T - t$, entonces

$$R(t, t+v) = -f(0, t) - \frac{1}{v} \ln \left(\frac{B(0, t+v)}{B(0, t)} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 t v + r_t,$$

lo que conduce a

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0} R(t, t+v) &= -f(0, t) - \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\ln B(0, t+v) - \ln B(0, t)}{v} + r_t \\ &= -f(0, t) - \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) + r_t \\ &= -f(0, t) + f(0, t) + r_t \\ &= r_t, \end{aligned}$$

que era de esperarse.

51.5 Demuestre que (51.20) puede escribirse de manera alternativa como

$$R(t, T) = -f(0, t) \frac{1}{T-t} + \int_t^T f(0, s) ds + \frac{1}{2} \sigma^2 t (T-t) + r_t.$$

Solución: Es suficiente observar que

$$-\int_t^T f(0, s) ds = \int_t^T \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds = \ln B(0, T) - \ln B(0, t).$$

51.6 De acuerdo con la ecuación (51.10), para obtener $A(t, T)$ hay que calcular $\int_t^T h_s(T-s) ds$. Considere la aproximación $e^{-(T-s)} \approx 1 - (T-s)$ ó $1 - e^{-(T-s)} \approx T-s$ válida para $T-s \ll 1$. Lleve a cabo, de nuevo, todo el procedimiento de la sección 51.4 empleando la aproximación $\int_t^T h_s(1 - e^{-(T-s)}) ds$ en lugar de $\int_t^T h_s(T-s) ds$.

51.7 Suponga que $h = 1/12$ (un mes) y $\sigma = 0.01$, si

$$r_0 = 0.07, \quad f_1 = 0.075, \quad f_2 = 0.08, \quad f_3 = 0.085 \quad \text{y} \quad f_4 = 0.09,$$

genere los árboles binomiales (hacia adelante) de tasa corta y precios de bonos cupón cero.

51.8 Determine las fórmulas de los árboles hacia adelante y hacia atrás del precio de un bono cupón cero para cuatro períodos.

CAPÍTULO 52

MODELO DE TASA CORTA DE HULL Y WHITE: CALIBRACIÓN CON UNA CURVA INICIAL DE CEROS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Modelos de calibración con una curva inicial de ceros
- Ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero
- Ecuaciones integrales
- Tasa forward

52.1 Introducción

Existen en la literatura varios modelos de tasa corta en donde el término de tendencia se calibra con una curva inicial de ceros, siendo el caso más sencillo el de Ho y Lee (1986). En 1990, John C. Hull y Alan White publican el artículo “Pricing Interest Rate Derivative Securities” en el “Review of Financial Studies”, en el cual extienden el modelo de Vasicek utilizando fundamentalmente las ideas centrales del modelo de Ho y Lee (1986).

Vale la pena mencionar que John Hull y Alan White, de la Universidad de Toronto, han acumulado una prominente producción intelectual de más de 20 artículos elaborados de manera conjunta. Sus investigaciones han abordado muchas y muy diversas áreas de las matemáticas financieras. Por esta razón, existen en la literatura varios modelos que se conocen como de Hull y White, lo cual requiere, cuando se habla de algún modelo de Hull y White, precisar el área en cuestión (tasas, derivados, coberturas, volatilidad estocástica, métodos de aproximación, riesgo crédito, derivados de crédito, etc.). En este capítulo se analizará, en detalle, el modelo de Hull y White (1990), en el cual se calibra una estructura de plazos con una curva inicial de ceros utilizando observaciones de mercado, específicamente precios de bonos.

52.2 El modelo de tasa corta de Hull y White

En el modelo de Vasicek, la dinámica de la tasa corta es conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad (52.1)$$

donde a , b y σ son constantes positivas y $(W_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. En su artículo, Hull y White extienden este modelo para incluir un parámetro dependiente del tiempo, específicamente se supone que el nivel de largo plazo de la tasa corta, b , es dependiente del tiempo, lo cual se denotará mediante b_t , de esta manera (52.1) se transforma en:

$$dr_t = a(b_t - r_t)dt + \sigma dW_t. \quad (52.2)$$

Si se supone que a y σ han sido estimadas por algún método estadístico, se desea seleccionar $b_t^{(0)}$, en el tiempo $t = 0$, de tal manera que los precios de mercado y los teóricos coincidan en dicho tiempo.

52.3 Ecuación diferencial parcial de un bono cupón cero

En esta sección se establece la ecuación diferencial parcial que determina el precio de un bono cupón cero asociado a la tasa corta definida en (52.2). Para ello, se supone que el precio, $B(t, T)$, de un bono cupón cero que se valúa en t y que en el vencimiento, T , paga una unidad monetaria satisface:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + a(b_t - r_t) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0, \quad (52.3)$$

junto con la condición final $B(T, T) = 1$.

52.4 Solución de la ecuación diferencial parcial de un bono cupón cero

Con base en la sección anterior, se observa que la ecuación diferencial parcial que determina el precio de un bono no tiene derivadas parciales cruzadas. Por esta razón, se supone una solución en variables separables de la forma:

$$B(t, T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}. \quad (52.4)$$

Claramente, en este caso, se cumple que $A(T, T) = 0$ y $D(T, T) = 0$, ya que el valor nominal del bono en el tiempo T , está dado por

$$B(T, T) = 1.$$

Al diferenciar parcialmente $B(t, T)$ en (52.4) se sigue que:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} \right) B,$$

$$\frac{\partial B}{\partial r_t} = -D B$$

y

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} = D^2 B.$$

Después de sustituir las ecuaciones anteriores en (52.3), se obtiene

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - a(b_t - r_t)D - r_t = 0. \quad (52.5)$$

Dado que A y D son funciones de t y T , si se deriva (52.5) con respecto a r_t , se obtiene

$$-\frac{\partial D}{\partial t} + aD - 1 = 0, \quad (52.6)$$

equivalentemente,

$$\frac{\partial D}{\partial t} = aD - 1.$$

La solución de la ecuación diferencial anterior con condición final $D(T, T) = 0$ está dada por

$$\begin{aligned} D(t, T) &= D(T, T)e^{-a(T-t)} - e^{-a(T-t)} \int_T^t e^{a(T-s)} ds \\ &= -e^{-a(T-t)} \int_T^t e^{a(T-s)} ds \\ &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}. \end{aligned} \quad (52.7)$$

Por lo tanto, al sustituir (52.6) en (52.5), se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial A}{\partial t} - r_t(aD - 1) + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 + a(r_t - b_t)D - r_t \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2 - ab_t D. \end{aligned}$$

En otras palabras,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = ab_t D - \frac{1}{2}\sigma^2 D^2,$$

o bien,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = b_t \left(1 - e^{-a(T-t)}\right) - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2. \quad (52.8)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \int_T^t b_s \left(1 - e^{-a(T-s)}\right) ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(t - T) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{a^2} \int_T^t e^{-a(T-s)} ds - \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_T^t e^{-2a(T-s)} ds \\ &= - \int_t^T b_s \left(1 - e^{-a(T-s)}\right) ds - \frac{\sigma^2}{2a^2}(t - T) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{a^3} \left(e^{-a(T-t)} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left(e^{-2a(T-t)} - 1\right) \\ &= - \int_t^T b_s \left(1 - e^{-a(T-s)}\right) ds \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T - t + \frac{2}{a}e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}\right). \end{aligned} \quad (52.9)$$

Es importante destacar que el suponer una solución de la forma (52.4) ha permitido transformar la ecuación diferencial parcial (52.3) en dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, a saber, (52.6) y (52.8). En las próximas secciones se utilizarán las expresiones obtenidas para $D(t, T)$ y $A(t, T)$, en (52.7) y (52.9) respectivamente, para calibrar b_s con una curva inicial de ceros.

52.5 Calibración del nivel de largo plazo de la tasa corta utilizando una curva inicial de ceros

Si se supone que a y σ han sido estimados por algún método de inferencia estadística y se desea calibrar $A(0, T)$ con una curva de rendimiento inicial, $B(0, T) = e^{-R(0,T)T}$, es decir, se desea encontrar $b_T^{(0)}$ tal que

$$A(0, T) = - \int_0^T b_s^{(0)} \left(1 - e^{-a(T-s)}\right) ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T + \frac{2}{a}e^{-aT} - \frac{1}{2a}e^{-2aT} - \frac{3}{2a}\right),$$

equivalentemente, se desea encontrar $b_T^{(0)}$ tal que

$$\begin{aligned} &- \int_0^T b_s^{(0)} \left(1 - e^{-a(T-s)}\right) ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T + \frac{2}{a}e^{-aT} - \frac{1}{2a}e^{-2aT} - \frac{3}{2a}\right) \\ &= \ln B(0, T) + r_0 D(0, T) \\ &= \ln B(0, T) + r_0 \left(\frac{1 - e^{-aT}}{a}\right). \end{aligned} \quad (52.10)$$

Observe que la ecuación anterior es una ecuación integral en $b_t^{(0)}$. Una forma de resolver esta ecuación integral consiste en calcular sus dos primeras derivadas con respecto de T . Para ello, denote el integrando de (52.10), por un momento, como

$$g(T, s) = b_s^{(0)} \left(1 - e^{-a(T-s)} \right).$$

En este caso, la regla de Leibnitz conduce a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T g(T, s) ds &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} g(T, s) ds \\ &= a \int_0^T b_s^{(0)} e^{-a(T-s)} ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada parcial de (52.10) con respecto de T está dada por:

$$-a \int_0^T b_s^{(0)} e^{-a(T-s)} ds + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - 2e^{-aT} + e^{-2aT}) = \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) + r_0 e^{-aT} \quad (52.11)$$

ó

$$\int_0^T b_s^{(0)} e^{-a(T-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-aT})^2 - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) - \frac{r_0}{a} e^{-aT}. \quad (52.12)$$

Con el propósito de derivar nuevamente (52.11) con respecto de T , se define ahora

$$G(T, s) = b_s^{(0)} e^{-a(T-s)}$$

y en este caso la regla de Leibnitz conduce a la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T G(T, s) ds &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial T} G(T, s) ds + G(T, T) \frac{\partial T}{\partial T} - G(T, 0) \frac{\partial 0}{\partial T} \\ &= -a \int_0^T b_s^{(0)} e^{-a(T-s)} ds + b_T^{(0)}. \end{aligned}$$

De esta manera, al derivar (52.11), se obtiene

$$a^2 \int_0^T b_s^{(0)} e^{-a(T-s)} ds - ab_T^{(0)} + \frac{\sigma^2}{a} (1 - e^{-aT}) e^{-aT} = \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) - r_0 a e^{-aT}$$

ó

$$\int_0^T b_s^{(0)} e^{-a(T-s)} ds = \frac{1}{a} b_T^{(0)} - \frac{\sigma^2}{a^3} (1 - e^{-aT}) e^{-aT} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) - \frac{r_0}{a} e^{-aT}. \quad (52.13)$$

Después de igualar (52.13) con (52.12) se cumple que

$$b_T^{(0)} - \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-aT}) e^{-aT} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) = \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 - \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T),$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} b_T^{(0)} &= -\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) - \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) + \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-aT}) e^{-aT} + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 \\ &= -\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \ln B(0, T) - \frac{\partial}{\partial T} \ln B(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2aT}) \\ &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial T} f(0, T) + f(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2aT}). \end{aligned} \quad (52.14)$$

Para encontrar $A(t, T)$ a partir de (52.9), se escribe (52.14) empleando t en lugar de T , es decir,

$$b_t^{(0)} = -\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln B(0, t) - \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2at}).$$

Por lo tanto, el término integral en la última igualdad de (52.9) satisface

$$\begin{aligned} & \int_t^T b_s^{(0)} (1 - e^{-a(T-s)}) ds \\ &= \int_t^T \left(-\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) - \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2as}) \right) (1 - e^{-a(T-s)}) ds \\ &= -\frac{1}{a} \int_t^T (1 - e^{-a(T-s)}) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) ds - \int_t^T (1 - e^{-a(T-s)}) \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_t^T (1 - e^{-2as}) (1 - e^{-a(T-s)}) ds. \end{aligned} \tag{52.15}$$

La primera integral de la última igualdad de (52.15) se calcula mediante integración por partes, de tal manera que

$$\begin{aligned} \int_t^T (1 - e^{-a(T-s)}) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln B(0, s) ds &= - (1 - e^{-a(T-t)}) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) \\ &\quad + a \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds. \end{aligned} \tag{52.16}$$

La segunda integral en (52.15) satisface

$$\begin{aligned} & \int_t^T (1 - e^{-a(T-s)}) \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \\ &= \int_t^T \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds - \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \\ &= \ln B(0, T) - \ln B(0, t) - \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \\ &= \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds. \end{aligned} \tag{52.17}$$

Por último, la tercera integral de (52.15) está dada por

$$\begin{aligned} & \int_t^T (1 - e^{-2as}) (1 - e^{-a(T-s)}) ds \\ &= \int_t^T (1 - e^{-2as} - e^{-a(T-s)} + e^{-a(T+s)}) ds \\ &= T - t - \frac{1}{2a} (e^{-2at} - e^{-2aT}) - \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) + \frac{1}{a} (e^{-a(T+t)} - e^{-2aT}) \\ &= T - t + \left(-\frac{1}{2a} e^{-2at} - \frac{1}{2a} e^{-2aT} + \frac{1}{a} e^{-a(T-t)} + \frac{1}{a} e^{-a(T+t)} - \frac{1}{a} \right). \end{aligned} \tag{52.18}$$

Después de sustituir las ecuaciones (52.16), (52.17) y (52.18) en la expresión (52.15), se sigue que

$$\begin{aligned} & \int_t^T b_s^{(0)} (1 - e^{-a(T-s)}) ds \\ &= \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \\ &\quad - \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) + \int_t^T e^{-a(T-s)} \frac{\partial}{\partial s} \ln B(0, s) ds \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T - t - \frac{1}{2a} e^{-2at} - \frac{1}{2a} e^{-2aT} + \frac{1}{a} e^{-a(T-t)} + \frac{1}{a} e^{-a(T+t)} - \frac{1}{a} \right). \end{aligned} \tag{52.19}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
A(t, T) &= - \int_t^T b_s^{(0)} \left(1 - e^{-a(T-s)} \right) ds \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) \\
&= \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T - t - \frac{1}{2a} e^{-2at} - \frac{1}{2a} e^{-2aT} + \frac{1}{a} e^{-a(T-t)} + \frac{1}{a} e^{-a(T+t)} - \frac{1}{a} \right) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) \\
&= \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left(-e^{-2aT} - e^{-2at} + 1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)} + 2e^{-a(T+t)} \right).
\end{aligned}$$

En conclusión,

$$\begin{aligned}
A(t, T) &= \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - D(t, T) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (e^{-aT} - e^{-at})^2 (e^{2at} - 1) \\
&= \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - D(t, T) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} D^2(t, T) (1 - e^{-2at}). \tag{52.20}
\end{aligned}$$

Una vez que se han obtenido $D(t, T)$ y $A(t, T)$, en (52.7) y (52.20), respectivamente, se puede calcular, de acuerdo con (52.4), el precio de un bono cupón cero y, por ende, la curva de ceros asociada a dicho bono. En la siguiente sección se proporcionará una aproximación para $A(t, T)$ que se utiliza con mucha frecuencia en la práctica.

52.6 Aproximación de la tasa forward

En la práctica es común utilizar la siguiente aproximación sobre la pendiente del precio inicial del bono:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) \approx \frac{\ln B(0, t + \Delta t) - \ln B(0, t)}{\Delta t}$$

con Δt pequeña. De tal forma que (52.20) se transforma en

$$A(t, T) = \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \frac{D(t, T)}{\Delta t} \ln \left(\frac{B(0, t + \Delta t)}{B(0, t)} \right) - \frac{\sigma^2}{4a} D^2(t, T) (1 - e^{-2at}). \tag{52.21}$$

Observe también que

$$D(t, t + \Delta t) = \frac{1 - e^{-a\Delta t}}{a} \approx \Delta t,$$

ya que $e^{-a\Delta t} \approx 1 - a\Delta t$ si Δt es suficientemente pequeña. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
A(t, T) &= \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \frac{D(t, T)}{D(t, t + \Delta t)} \ln \left(\frac{B(0, t + \Delta t)}{B(0, t)} \right) \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{4a} D^2(t, T) (1 - e^{-2at}). \tag{52.22}
\end{aligned}$$

Es frecuente utilizar en esta aproximación un término cuadrático en $D(t, T)$ modificado de tal forma que

$$\begin{aligned}
A(t, T) &= \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \frac{D(t, T)}{D(t, t + \Delta t)} \ln \left(\frac{B(0, t + \Delta t)}{B(0, t)} \right) \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2at}) D(t, T) [D(t, T) - D(t, t + \Delta t)]. \tag{52.23}
\end{aligned}$$

52.7 Curva de rendimiento y precios de bonos

Una vez determinadas las funciones $D(t, T)$ y $A(t, T)$ en (52.7) y (52.20), así como sus aproximaciones en (52.23), se calculan la curva de ceros y el vector de precios, respectivamente, mediante

$$R(t, T) = \frac{r_t D(t, T) - A(t, T)}{T - t}$$

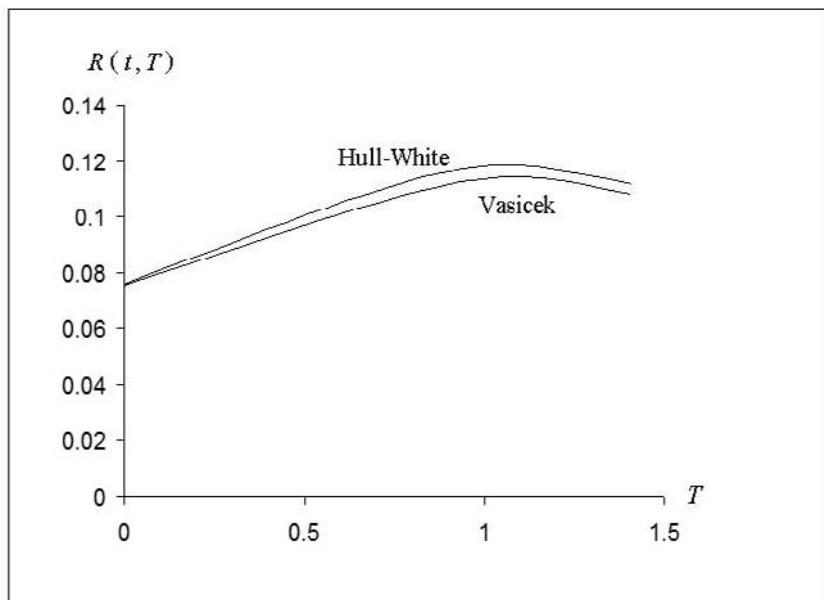
y

$$B(t, T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}.$$

Por supuesto, la aproximación (52.23) puede ser empleada en las ecuaciones anteriores. Desde una perspectiva práctica, poco se puede argumentar en contra de la calibración de un modelo utilizando precios de mercado. Sin embargo, frecuentemente los resultados de este tipo de modelos en el mediano y largo plazo pueden mostrar grandes inconsistencias. ¿Cómo se justifica esto? La respuesta es simple, con modelos de calibración que toman en cuenta un solo factor de riesgo es lo mejor que se puede hacer.

52.8 Ejemplo de aplicación del modelo de Hull y White

En esta sección se lleva a cabo una aplicación del modelo de Hull y White. Para ello, se utilizan los mismos datos del ejemplo desarrollado en el capítulo 51 para el modelo de Ho y Lee. La tasa corta es la tasa de CETES a 7 días. La Gráfica 52.1 muestra la curva de ceros calibrada con la metodología de Hull y White, $R(t, T)$, en un periodo de 1.4 años, tomando como curva inicial de ceros la calculada con el modelo de Vasicek con $a = 0.0199$, $b = 6.5804$ y $\sigma = 0.4203$. La Gráfica 52.1 también muestra la curva inicial de rendimiento, $R(0, T)$, calculada con el modelo de Vasicek en el capítulo 47. La tasa corta actual está dada por $r_t = 0.0765$, $t = 1/360$. Los valores de la volatilidad y velocidad (σ y a) empleados en el modelo de Hull y White son los estimados en el modelo de Vasicek. Observe que después de 1.17 años, aproximadamente, ambas curvas decrecen conforme el tiempo aumenta.



Gráfica 52.1 Curva de ceros calculada con el modelo de Hull y White.

52.9 Bibliografía sugerida

- Ho, T. and S. Lee (1986). "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims". *Journal of Finance*, Vol. 41, No. 5, pp. 1129-1142.
- Hull, J. and A. White (1990). "Pricing Interest Rate Derivatives Securities". *Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, pp. 573-592.

52.10 Ejercicios

52.1 Muestre la regla de Leibnitz:

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} g(T, s) ds = \int_{\alpha(T)}^{\beta(T)} \frac{\partial}{\partial T} g(T, s) ds + g(T, \beta(T)) \frac{\partial \beta(T)}{\partial T} - g(T, \alpha(T)) \frac{\partial \alpha(T)}{\partial T}.$$

Solución: Defina

$$f(T, x, y) = \int_x^y g(T, s) ds,$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{df}{dT} &= \frac{\partial f}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dT} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dT} \\ &= \int_x^y \frac{\partial f}{\partial T} g(T, s) ds - g(T, x) \frac{dx}{dT} + g(T, y) \frac{dy}{dT}. \end{aligned}$$

52.2 Verifique la segunda igualdad en (52.10).

52.3 Suponga que la tasa corta sigue un proceso de la forma

$$dr_t = a(b_t - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t.$$

Repita el procedimiento del modelo de Hull y White para obtener $b_t^{(0)}$ consistente con una curva de rendimiento inicial, $B(0, T) = e^{-R(0, T)T}$.

CAPÍTULO 53

MODELO DE TASA CORTA DE LONGSTAFF: EL MODELO DE DOBLE RAÍZ

Conceptos básicos de este capítulo:

- Modelos de equilibrio general para valuación de bonos
- Modelo de doble raíz
- Corrección Beaglehole-Tenney al modelo de Longstaff
- Ecuación diferencial parcial no lineal del precio de un bono
- Estructura de plazos
- Estimación de parámetros

53.1 Introducción

En 1989 Francis A. Longstaff en su artículo “A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates” publicado en el “Journal of Financial Economics”, propone un modelo de tasa corta que mantiene la volatilidad del modelo Cox, Ingersoll y Ross (1985), pero difiere en la especificación del término de tendencia. En este caso la tendencia es no lineal en la tasa corta y, por ende, la ecuación diferencial asociada a un bono cupón cero es no lineal.

Este capítulo presenta el modelo de tasa corta de Longstaff (1989), el cual es desarrollado dentro del enfoque de ecuaciones diferenciales parciales. Asimismo, se discute sobre la estimación de los parámetros y se lleva a cabo una aplicación del modelo.

53.2 Modelo de Longstaff

Existe en la literatura una clase importante de procesos con reversión a la media para el modelado del comportamiento de la tasa corta. Dicha clase está representada por la ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = a_t(b - r_t^\alpha)dt + \sigma r_t^\beta dW_t \quad (53.1)$$

en donde b y σ son constantes positivas y $(W_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. El término aleatorio en la ecuación (53.1) tiene varianza $\sigma^2 r_t^{2\beta}$ por unidad de tiempo, donde $\beta \geq 0$. Los casos en que $a_t \equiv a$, $\alpha = 1$ y $\beta \in \{0, \frac{1}{2}\}$ son de particular interés ya que pueden tratarse analíticamente en un marco de equilibrio general. El modelo de Vasicek se obtiene cuando $\beta = 0$ y el modelo de Cox, Ingersoll y Ross cuando $\beta = \frac{1}{2}$. El modelo de Longstaff se obtiene cuando $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ y $b = \sigma^2/4a$. De esta forma

$$dr_t = \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t}\right) dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t. \quad (53.2)$$

Este modelo también es de equilibrio general y proporciona una solución analítica. Se le conoce también en la literatura como el modelo de doble raíz. Es importante destacar que modelos con valores β distintos de 0 y $\frac{1}{2}$ no son muy populares en la literatura debido a su complejidad. El Cuadro 53.1 presenta un resumen de los modelos de tasa corta que se pueden obtener a partir de la ecuación (53.1).

Modelo	Parámetros	b, a_t	Proceso
Merton (1970)	$\alpha = 0 \quad \beta = 0$	$\mu + 1, 1$	$dr_t = \mu dt + \sigma dW_t$ μ, σ son constantes.
Vasicek (1977)	$\alpha = 1 \quad \beta = 0$	b, a	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$ a, b, σ son constantes.
CIR (1985)	$\alpha = 1 \quad \beta = \frac{1}{2}$	b, a	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$ a, b, σ son constantes.
Ho y Lee (1986)	$\alpha = 0 \quad \beta = 0$	$2, h_t$	$dr_t = h_t dt + \sigma dW_t$ σ es constante.
Hull y White (1990)	$\alpha = 1 \quad \beta = 0$	b_t, a	$dr_t = a(b_t - r_t)dt + \sigma dW_t$ b_t, σ son funciones del tiempo.
Longstaff (1989)	$\alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{2}$	b, a	$dr_t = a(b - \sqrt{r_t})dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t$ a, b, σ son constantes.

Cuadro 53.1 Resumen de casos particulares de la ecuación (53.1).

53.3 Corrección Beaglehole-Tenney al modelo de Longstaff

En 1992, David Beaglehole y Mark Tenney publican el artículo “Corrections and Additions to A Nonlinear Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates” en el “Journal of Financial Economics”. En su artículo original Longstaff (1989) considera el proceso $X_t > 0$ conducido por

$$dX_t = m dt + s dW_t,$$

donde $m < 0$, $s > 0$ y $(W_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Si $X_t = 0$, entonces X_t se refleja para tomar de nuevo valores positivos. Ahora bien, si se define $r_t = \gamma X_t^2$, con $\gamma > 0$, se verifica mediante el lema de Itô que

$$dr_t = (\gamma s^2 + 2m\sqrt{\gamma}\sqrt{r_t}) dt + 2s\sqrt{\gamma}\sqrt{r_t} dW_t.$$

Si se redefinen las constantes de la expresión anterior como $\sigma = 2s\sqrt{\gamma} > 0$ y $a = -2m\sqrt{\gamma} > 0$, se obtiene que

$$dr_t = \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t}\right) dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t.$$

De acuerdo con Beaglehole-Tenney (1992), el proceso correcto debe ser

$$dX_t = (m - kX_t)dt + s dW_t,$$

donde m , k y σ son constantes positivas. En este caso, el lema de Itô aplicado a $r_t = \gamma X_t^2$ conduce a

$$dr_t = (\gamma s^2 + 2m\sqrt{\gamma}\sqrt{r_t} - 2kr_t) dt + 2s\sqrt{\gamma}\sqrt{r_t} dW_t.$$

Si se denotan $\sigma = 2s\sqrt{\gamma} > 0$ y $a = -2m\sqrt{\gamma} > 0$, se obtiene

$$dr_t = \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t} - 2kr_t \right) dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t.$$

En este caso, no es necesario suponer que X_t se refleja en el cero. Como puede observarse, el modelo de Longstaff (1989) es un caso particular de la corrección de Beaglehole y Tenney (1992) cuando $k = 0$.

53.4 Solución de la ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero cuando la tasa corta sigue el modelo de Longstaff

Si r_t es la tasa corta neutral al riesgo en (53.2), es decir, el premio al riesgo es cero, entonces el precio de un bono cupón cero, $B(t, T)$, que se coloca en t y que paga una unidad monetaria al vencimiento T , satisface la ecuación diferencial parcial parabólica no lineal:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t} \right) \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0. \quad (53.3)$$

Se propone una solución de (53.3) en términos de variables separables como sigue:

$$B(t, T) = e^{A(t, T) + r_t D(t, T) + C(t, T)\sqrt{r_t}}. \quad (53.4)$$

Claramente, $A(T, T) = D(T, T) = C(T, T) = 0$ ya que el valor nominal del bono está dado por

$$B(T, T) = e^{A(T, T) + r_T D(T, T) + C(T, T)\sqrt{r_T}} = 1.$$

Después de derivar parcialmente a $B = B(t, T)$ con respecto de t y r_t se encuentra que:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = B \left(\frac{\partial A}{\partial t} + r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \sqrt{r_t} \frac{\partial C}{\partial t} \right), \quad (53.5)$$

$$\frac{\partial B}{\partial r_t} = B \left(D + \frac{C}{2\sqrt{r_t}} \right) \quad (53.6)$$

y

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} = B \left[\left(-\frac{C}{4\sqrt{r_t} r_t} \right) + \left(D + \frac{C}{2\sqrt{r_t}} \right)^2 \right]. \quad (53.7)$$

Si se sustituyen las expresiones (53.5), (53.6) y (53.7) en la ecuación (53.3), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t} + r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \sqrt{r_t} \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\sigma^2 C}{8\sqrt{r_t}} + \frac{\sigma^2 r_t}{2} \left(D + \frac{C}{2\sqrt{r_t}} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\sigma^2}{4} - a\sqrt{r_t} \right) \left(D + \frac{C}{2\sqrt{r_t}} \right) - r_t = 0. \end{aligned} \quad (53.8)$$

Después de desarrollar la expresión anterior, se sigue que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t} + r_t \frac{\partial D}{\partial t} + \sqrt{r_t} \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\sigma^2 C}{8\sqrt{r_t}} + \frac{\sigma^2 r_t}{2} D^2 + \frac{\sigma^2 \sqrt{r_t}}{2} DC + \frac{\sigma^2}{8} C^2 + \frac{\sigma^2}{4} D \\ & + \frac{\sigma^2 C}{8\sqrt{r_t}} - aD\sqrt{r_t} - \frac{aC}{2} - r_t = 0. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial t} + r_t \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\sigma^2 D^2}{2} - 1 \right) + \sqrt{r_t} \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \left(\frac{C\sigma^2}{2} - a \right) D \right] \\ & + \left(\frac{C\sigma^2}{8} - \frac{a}{2} \right) C + \frac{D\sigma^2}{4} = 0. \end{aligned} \quad (53.9)$$

Si se deriva la expresión anterior con respecto de r_t , se tiene que

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\sigma^2 D^2}{2} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{r_t}} \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \left(\frac{C\sigma^2}{2} - a \right) D \right] = 0. \quad (53.10)$$

A fin de que (53.10) se cumpla para toda r_t , es necesario que se satisfaga

$$\frac{\partial D}{\partial t} = 1 - \frac{\sigma^2 D^2}{2}, \quad (53.11)$$

junto con

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left(a - \frac{C\sigma^2}{2} \right) D. \quad (53.12)$$

La ecuación diferencial ordinaria (53.11) es del tipo de Riccati. Con el propósito de resolver esta ecuación se reescribe como

$$\frac{\partial D(t, T)}{\partial t} = - \left(\frac{\sigma^2 D^2(t, T)}{2} - 1 \right). \quad (53.13)$$

De la ecuación (53.13), se tiene

$$\begin{aligned} \int_{D(T, T)}^{D(t, T)} \frac{dU(s, T)}{\frac{1}{2}\sigma^2 U^2(s, T) - 1} &= - \int_T^t ds \\ &= -(t - T), \end{aligned} \quad (53.14)$$

donde U es una variable de integración. El lado izquierdo de la ecuación (53.14), se puede reescribir como

$$\int_0^{D(t, T)} \frac{dU}{\frac{1}{2}\sigma^2 U^2 - 1} = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{D(t, T)} \frac{dU}{U^2 - (2/\sigma^2)}. \quad (53.15)$$

La integral que aparece en (53.15) se calcula mediante integración por fracciones parciales, esto es,

$$\int_0^{D(t, T)} \frac{dU}{U^2 - (2/\sigma^2)} = \int_0^{D(t, T)} \frac{dU}{[U + (\sqrt{2}/\sigma)][U - (\sqrt{2}/\sigma)]}. \quad (53.16)$$

Note que el integrando en (53.16) se puede reescribir como

$$\frac{1}{[U + (\sqrt{2}/\sigma)][U - (\sqrt{2}/\sigma)]} = \frac{A_0}{U + \sqrt{2}/\sigma} + \frac{B_0}{U - \sqrt{2}/\sigma}.$$

De lo anterior, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales en A_0 y $B_0 = 0$:

$$A_0 + B_0 = 0$$

y

$$\frac{\sqrt{2}}{\sigma} B_0 - \frac{\sqrt{2}}{\sigma} A_0 = 1.$$

La solución de este sistema de ecuaciones es

$$A_0 = -\frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \quad (53.17)$$

y

$$B_0 = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}. \quad (53.18)$$

Al sustituir (53.17) y (53.18) en (53.16), se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_0^{D(t,T)} \frac{dU}{U^2 - (2/\sigma^2)} &= \int_0^{D(t,T)} \frac{dU}{[U + (\sqrt{2}/\sigma)] [U - (\sqrt{2}/\sigma)]} \\
 &= -\frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \int_0^{D(t,T)} \frac{dU}{U + (\sqrt{2}/\sigma)} \\
 &\quad + \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \int_0^{D(t,T)} \frac{dU}{U - (\sqrt{2}/\sigma)} \\
 &= \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \left[-\ln |U + (\sqrt{2}/\sigma)| \Big|_0^{D(t,T)} \right. \\
 &\quad \left. + \ln |U - (\sqrt{2}/\sigma)| \Big|_0^{D(t,T)} \right] \\
 &= \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{U - (\sqrt{2}/\sigma)}{U + (\sqrt{2}/\sigma)} \right| \Big|_0^{D(t,T)} \\
 &= \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \left\{ \ln \left| \frac{D(t,T) - (\sqrt{2}/\sigma)}{D(t,T) + (\sqrt{2}/\sigma)} \right| - \ln \left| \frac{0 - (\sqrt{2}/\sigma)}{0 + (\sqrt{2}/\sigma)} \right| \right\} \\
 &= \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{D(t,T) - (\sqrt{2}/\sigma)}{D(t,T) + (\sqrt{2}/\sigma)} \right|.
 \end{aligned} \tag{53.19}$$

Note que en la ecuación (53.19) se ha considerado que $D(T, T) = 0$ y que $\ln |-1| = 0$. Si se sustituye la ecuación (53.19) en la ecuación (53.15) y (53.14), se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int_{D(T,T)}^{D(t,T)} \frac{dU}{\frac{1}{2}\sigma^2 U^2 - 1} &= \int_0^{D(t,T)} \frac{dU}{\frac{1}{2}\sigma^2 [U^2 - (\frac{1}{2\sigma^2})]} \\
 &= \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{D(t,T)} \frac{dU}{U^2 - (\frac{2}{\sigma^2})} \\
 &= \frac{2}{\sigma^2} \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{D(t,T) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}{D(t,T) + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} \right| \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \ln \left(\frac{D(t,T) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}{D(t,T) + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} \right) = -(t - T),
 \end{aligned} \tag{53.20}$$

donde se ha supuesto que la cantidad que aparece dentro del valor absoluto es positiva. Por lo tanto,

$$\ln \left(\frac{D(t,T) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma}}{D(t,T) + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} \right) = \sqrt{2}\sigma(T - t). \tag{53.21}$$

De la ecuación (53.21), se obtiene

$$D(t, T) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \left(\frac{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right). \tag{53.22}$$

Equivalentemente,

$$D(t, T) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \left(1 + \frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right). \tag{53.23}$$

La función $D(t, T)$ satisface la ecuación diferencial (53.11). Sin embargo, observe que (53.23) no cumple la condición final $D(T, T) = 0$. Por lo tanto, se retoma la ecuación (53.20) suponiendo ahora que el argumento del valor absoluto es una cantidad negativa, lo que conduce a

$$\ln \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{\sigma} - D(t, T)}{D(t, T) + \frac{\sqrt{2}}{\sigma}} \right) = \sqrt{2}\sigma(T-t). \quad (53.24)$$

Al despejar $D(t, T)$, se tiene

$$D(t, T) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \left(\frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right) \quad (53.25)$$

6

$$D(t, T) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \left(1 - \frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right). \quad (53.26)$$

Esta función satisface la ecuación diferencial (53.11) y cumple la condición final $D(T, T) = 0$. La solución obtenida, $D(t, T)$, se sustituye en la ecuación diferencial parcial (53.12), lo cual lleva a

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \left(a - \frac{C\sigma^2}{2} \right) D \\ &= \left(a - \frac{C\sigma^2}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \left(\frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right). \end{aligned} \quad (53.27)$$

La ecuación diferencial (53.27) es de variables separables, así

$$-\int_{C(T,T)}^{C(t,T)} \frac{dU(s, T)}{\left(\frac{U\sigma^2}{2}\right) - a} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_T^t \frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} ds. \quad (53.28)$$

Al resolver la integral del lado izquierdo de la ecuación (53.28), se tiene que

$$\begin{aligned} -\int_0^{C(t,T)} \frac{dU}{\left(\frac{U\sigma^2}{2}\right) - a} &= -\int_0^{C(t,T)} \frac{dU}{\frac{\sigma^2}{2} \left(U - \frac{2a}{\sigma^2}\right)} \\ &= \frac{-2}{\sigma^2} \int_0^{C(t,T)} \frac{dU}{U - \frac{2a}{\sigma^2}} \\ &= \frac{-2}{\sigma^2} \ln \left| U - \frac{2a}{\sigma^2} \right| \Big|_0^{C(t,T)} \\ &= \frac{-2}{\sigma^2} \left[\ln \left| C(t, T) - \frac{2a}{\sigma^2} \right| - \ln \left| 0 - \frac{2a}{\sigma^2} \right| \right] \\ &= \frac{-2}{\sigma^2} \ln \left| \frac{\frac{2a}{\sigma^2} - C(t, T)}{2a/\sigma^2} \right| \\ &= \frac{-2}{\sigma^2} \ln \left| \frac{2a - \sigma^2 C(t, T)}{2a} \right| \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \ln \left(\frac{2a - \sigma^2 C(t, T)}{2a} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

donde se ha tomado en cuenta que $C(T, T) = 0$ y se ha supuesto que $C(t, T) < 2a/\sigma^2$. Por lo tanto,

$$-\int_0^{C(t,T)} \frac{dU}{\left(\frac{U\sigma^2}{2}\right) - a} = \frac{2}{\sigma^2} \ln \left(\frac{2a}{2a - \sigma^2 C(t, T)} \right). \quad (53.29)$$

Considere ahora el lado derecho de (53.28) y defina el cambio de variable $U = 1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}$, entonces

$$dU = -\sqrt{2}\sigma e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}ds = -\sqrt{2}\sigma(U-1)ds,$$

así

$$\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_T^t \frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} ds = \frac{1}{\sigma^2} \int_T^t \frac{U-2}{U(U-1)} dU. \quad (53.30)$$

Por simplicidad, los límites de integración del lado derecho de (53.30) se mantienen sin cambio. El lado derecho de la ecuación (53.30) se resuelve por fracciones parciales, esto es, se desea determinar A_1 y B_1 tales que

$$\frac{U-2}{U(U-1)} = \frac{A_1}{U} + \frac{B_1}{U-1} = \frac{A_1(U-1) + B_1U}{U(U-1)}.$$

Es decir,

$$A_1 + B_1 = 1 \quad y \quad A_1 = 2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^2} \int_T^t \frac{U-2}{U(U-1)} dU &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\int_T^t \frac{A_1}{U} dU + \int_T^t \frac{B_1}{U-1} dU \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left(2 \ln \left| 1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)} \right| \Big|_T^t - \ln \left| 1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)} - 1 \right| \Big|_T^t \right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left[2 \left(\ln \left| 1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right| - \ln 2 \right) - \ln \left| e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)} \right| \Big|_T^t \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left[\ln \left[\frac{\left(1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right)^2}{4} \right] - \ln \left(e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \ln \left[\frac{\left(1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right)^2}{4e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right]. \end{aligned} \quad (53.31)$$

Si, por un lado, se sustituye (53.31) en (53.30) y, por otro lado, se sustituyen (53.29) y (53.30) en (53.28), se sigue que

$$\begin{aligned} - \int_{C(T,T)}^{C(t,T)} \frac{dU}{\left(\frac{U\sigma^2}{2}\right) - a} &= \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_T^t \frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} ds \\ \frac{2}{\sigma^2} \ln \left(\frac{2a}{2a - \sigma^2 C(t,T)} \right) &= \frac{1}{\sigma^2} \ln \left[\frac{\left(1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right)^2}{4e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right]. \end{aligned} \quad (53.32)$$

Al despejar $C(t,T)$ de la ecuación anterior, se tiene que

$$C(t,T) = \frac{2a}{\sigma^2} \left[\frac{\left(1 - e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma(T-t)} \right)^2}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right]. \quad (53.33)$$

Observe que $C(t,T) < 2a/\sigma^2$ y que si $t = T$, entonces $C(T,T) = 0$. Se puede verificar, de manera sencilla, que (53.26) y (53.33) cumplen con (53.12). Por otro lado, si se sustituyen (53.11), (53.12), (53.26) y (53.33) en (53.9), se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{a^2 \left(1 - e^{\sigma(T-t)/\sqrt{2}} \right)^4}{2\sigma^2 \left(1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right)^2} - \frac{a^2 \left(1 - e^{\sigma(T-t)/\sqrt{2}} \right)^2}{\sigma^2 \left(1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right)} \\ + \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right) = 0. \end{aligned}$$

La expresión anterior se puede reescribir como:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{a^2}{2\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right)^2 - \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right). \quad (53.34)$$

Por lo tanto,

$$A(t, T) = \frac{a^2}{2\sigma^2} \int_T^t \left(\frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} \right)^2 ds - \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \int_T^t \left(1 - \frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} \right) ds. \quad (53.35)$$

Para calcular la primera integral, del lado derecho de la ecuación anterior, se define el cambio de variable $u = 1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}$, de donde $du = -\sqrt{2}\sigma(u-1)ds = \sqrt{2}\sigma(1-u)ds$. En consecuencia,

$$\frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3} \int_T^t \frac{(2-u)^2}{u^2(1-u)} du = \frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3} \int_T^t \frac{4-4u+u^2}{u^2(1-u)} du. \quad (53.36)$$

La integral, del lado derecho de (53.36), se calcula por fracciones parciales. Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{4-4u+u^2}{u^2(1-u)} &= \frac{A_2}{u^2} + \frac{B_2}{u} + \frac{C_2}{1-u} \\ &= \frac{A_2 + u(B_2 - A_2) + u^2(C_2 - B_2)}{u^2(1-u)}. \end{aligned}$$

La solución del sistema generado es $A_2 = 4$, $B_2 = 0$, y $C_2 = 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3} \int_T^t \frac{4-4u+u^2}{u^2(1-u)} du &= \frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3} \left(\int_T^t \frac{4}{u^2} du + \int_T^t \frac{1}{1-u} du \right) \\ &= \frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3} \left(\int_T^t \frac{4}{u^2} du - \int_T^t \frac{1}{u-1} du \right) \\ &= \frac{a^2}{2\sqrt{2}\sigma^3} \left[-4 \left(\frac{1}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} \right) \right]_T^t \\ &\quad - \ln \left(e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)} \right) \Big|_T^t \\ &= -\frac{\sqrt{2}a^2}{\sigma^3 \left(1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right)} + \frac{a^2}{\sqrt{2}\sigma^3} - \frac{a^2(T-t)}{2\sigma^2}. \end{aligned} \quad (53.37)$$

A continuación se calcula la segunda integral que aparece en (53.35), es decir,

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \int_T^t \left(1 - \frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} \right) ds &= -\frac{\sigma^2}{4} \left[\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_T^t \left(1 - \frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} \right) ds \right] \\ &= -\frac{\sigma^2}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_T^t \frac{1 - e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-s)}} ds \right) \\ &= -\frac{1}{4} \ln \left[\frac{\left(1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right)^2}{4e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2e^{\sigma(T-t)/\sqrt{2}}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right). \end{aligned} \quad (53.38)$$

Note que la integral que aparece en la segunda igualdad de (53.38) ya fue resuelta en (53.30). Por último, si se sustituyen las ecuaciones (53.37) y (53.38) en (53.35), se obtiene que

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2e^{\sigma(T-t)/\sqrt{2}}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right) + \frac{a^2}{\sqrt{2}\sigma^3} - \frac{a^2(T-t)}{2\sigma^2} \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}a^2}{\sigma^3 \left(1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right)}. \end{aligned} \quad (53.39)$$

La expresión anterior se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right) + \frac{a^2}{\sqrt{2}\sigma^3} + \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{2}} - \frac{a^2}{2\sigma^2} \right) (T-t) \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}a^2}{\sigma^3 \left(1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)} \right)}. \end{aligned} \quad (53.40)$$

Claramente, si $t = T$, entonces $A(T, T) = 0$. A continuación se establece la estructura de plazos asociada al modelo de tasa corta de Longstaff.

53.5 Estructura de plazos del modelo de Longstaff

En esta sección se estudia la estructura de plazos del modelo de Longstaff. En este modelo la curva de rendimiento está dada por:

$$R(t, T) = -\frac{\ln B(t, T)}{T-t} = \frac{-r_t D(t, T) - A(t, T) - C(t, T)\sqrt{r_t}}{T-t}. \quad (53.41)$$

En este caso, puede verificarse, fácilmente, que

$$R(t, \infty) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} = \frac{a^2}{2\sigma^2} - \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}, \quad (53.42)$$

lo cual determina la tasa larga.

53.6 Estimación de parámetros

En esta sección se estiman los parámetros del modelo de tasa corta de Longstaff. Recuerde que la ecuación diferencial estocástica del comportamiento de la tasa corta está representada por:

$$dr_t = \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t} \right) dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t. \quad (53.43)$$

Considere el cambio de variable $X_t = 2\sqrt{r_t}$. Se calculan las derivadas parciales de X_t con respecto de r_t y t . Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_t}{\partial r_t} &= \frac{1}{\sqrt{r_t}} = \frac{2}{X_t}, \\ \frac{\partial^2 X_t}{\partial r_t^2} &= -\frac{1}{2r_t\sqrt{r_t}} = -\frac{1}{r_t X_t} \end{aligned} \quad (53.44)$$

y

$$\frac{\partial X_t}{\partial t} = 0. \quad (53.45)$$

El lema de Itô conduce a

$$\begin{aligned}
 dX_t &= \left[\frac{\partial X_t}{\partial t} + \frac{\partial X_t}{\partial r_t} \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 X_t}{\partial r_t^2} \right] dt + \sigma\sqrt{r_t} \frac{\partial X_t}{\partial r_t} dW_t \\
 &= \left[\frac{2}{X_t} \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{r_t} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \left(\frac{-1}{r_t X_t} \right) \right] dt + \sigma \frac{X_t}{2} \frac{2}{X_t} dW_t \\
 &= \left(\frac{1}{2X_t} \sigma^2 - \frac{2a\sqrt{r_t}}{X_t} - \frac{1}{2X_t} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \\
 &= -adt + \sigma dW_t.
 \end{aligned} \tag{53.46}$$

Por lo tanto,

$$X_t - X_{t-1} = -a + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, N,$$

donde $u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[X_t - X_{t-1}] = -a \tag{53.47}$$

y

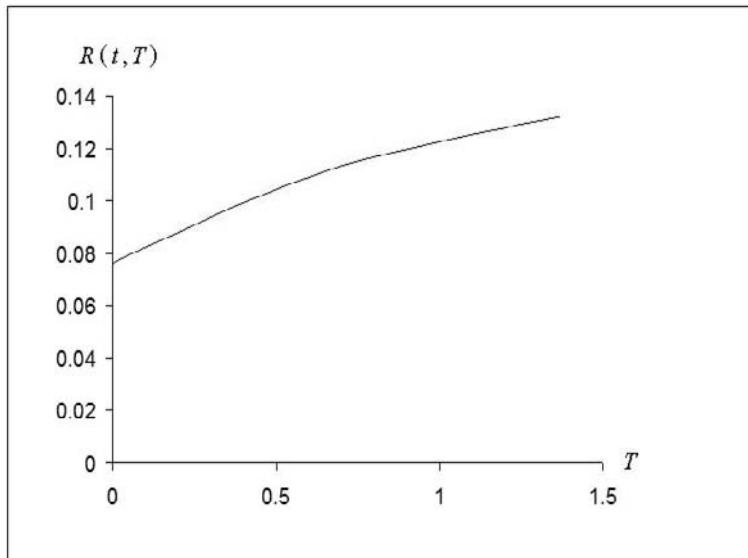
$$\text{Var}[X_t - X_{t-1}] = \sigma^2. \tag{53.48}$$

Así pues, si $Y_t = X_t - X_{t-1}$, los estimadores de a y σ se obtienen a través de las siguientes ecuaciones

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Y_t = \hat{a} \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Y_t^2} = \hat{\sigma}. \tag{53.49}$$

53.7 Ejemplo de aplicación del modelo de Longstaff

En esta sección se lleva a cabo una aplicación del modelo de Longstaff. Para ello, se utilizan los mismos datos del ejemplo desarrollado en el capítulo destinado al modelo CIR. La tasa corta es la tasa de CETES a 7 días. La Gráfica 53.1 muestra las curvas de ceros de Longstaff en un periodo de 1.4 años. La tasa corta actual está dada por $r_t = 0.0765$. Los estimadores de la volatilidad y velocidad calculados a partir de las ecuaciones (53.49) están dados por $\hat{a} = 0.0216$ y $\hat{\sigma} = 0.3601$.



Gráfica 53.1 Curva de ceros calculada con el modelo de Longstaff.

53.8 Bibliografía sugerida

- Beaglehole, D. and M. Tenney (1992). "Corrections and Additions to a Nonlinear Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial Economics*, Vol. 32, No. 3, pp. 345-353.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates." *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 363-384.
- Longstaff, F. A. (1989). "A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial Economics*, Vol. 23, No. 2, pp. 195-224.

53.9 Ejercicios

53.1 Demuestre que el precio, $B(t, T)$, de un bono cupón cero en el modelo de Longstaff satisface

$$\frac{dB}{B} = r_t dt + \left(D(t, T) \sqrt{r_t} + \frac{1}{2} C(t, T) \right) \sigma dW_t.$$

53.2 Muestre que

$$D(t, T) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \left(1 - \frac{2e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right)$$

y

$$C(t, T) = \frac{2a}{\sigma^2} \left[\frac{\left(1 - e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma(T-t)} \right)^2}{1 + e^{\sqrt{2}\sigma(T-t)}} \right]$$

satisfacen

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left(a - \frac{C\sigma^2}{2} \right) D.$$

53.3 Verifique, de acuerdo con la sección 53.5, que

$$R(t, \infty) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = \frac{a^2}{2\sigma^2} - \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}.$$

53.4 Suponga que la solución de la ecuación diferencial parcial en el modelo de Longstaff es de la forma

$$B(t, T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T) + C(t, T) \sqrt{r_t}}.$$

Observe que la tasa corta en el exponente es premultiplicada por un signo menos. Obtenga $D(t, T)$ y $A(t, T)$. Discuta las propiedades de estas soluciones.

53.5 Suponga que la tasa corta sigue un proceso de la forma

$$dr_t = \mu(r_t, t) dt + \sigma(r_t, t) dW_t$$

donde $\mu(r_t, t)$ y $\sigma(r_t, t)$ son funciones conocidas y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ junto con su filtración aumentada $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Sea $B = B(r_t, t; T)$ el precio de un bono a descuento que se coloca en t y al vencimiento, T , paga una unidad monetaria. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)) \frac{\partial B}{\partial r_t} + r_t B &= 0, \\ dB &= \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + \frac{\partial B}{\partial r_t} \mu(r_t, t) \right) dt + \frac{\partial B}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) dW_t. \end{aligned}$$

La primera ecuación es la ecuación diferencial parcial que satisface cualquier bono cupón cero, la segunda corresponde al lema de Itô. Estas ecuaciones conducen a

$$dB = \left(r_t + \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t) \frac{\partial B}{\partial r_t} \frac{1}{B} \right) B dt + \frac{\partial B}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) dW_t.$$

En el caso del modelo de Longstaff se tiene que

$$dB = \left(r_t + \lambda(r_t, t)\sigma\sqrt{r_t} \frac{\partial B}{\partial r_t} \frac{1}{B} \right) B dt + \frac{\partial B}{\partial r_t} \sigma\sqrt{r_t} dW_t,$$

suponga que

$$\lambda(r_t, t) = 2\bar{\lambda}\frac{\sqrt{r_t}}{\sigma},$$

entonces el rendimiento esperado del bono satisface

$$E \left[\frac{dB}{B} \mid \mathcal{F}_t \right] = r_t + 2\bar{\lambda}\epsilon_{B,r},$$

donde

$$\epsilon_{B,r} = \frac{\partial B}{\partial r_t} \frac{r_t}{B}$$

es la elasticidad del precio del bono con respecto de la tasa de interés. De esta manera, la ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero está dada por

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - a\sqrt{r_t} - 2\bar{\lambda}r_t \right) \frac{\partial B}{\partial r_t} + r_t B = 0.$$

Obtenga la solución de la ecuación diferencial parcial anterior.

Solución: La solución está dada por

$$B(r_t, \tau) = M(\tau) \exp \{ D(\tau)r_t + C(\tau)\sqrt{r_t} \}$$

donde

$$M(\tau) = \left(\frac{1 - c_0}{1 - c_0 e^{\gamma\tau}} \right)^{1/2} \exp \left\{ c_1 + c_2\tau + \frac{c_3 + c_4 e^{\gamma\tau/2}}{1 - c_0 e^{\gamma\tau}} \right\},$$

$$D(\tau) = \frac{2\bar{\lambda} - \gamma}{\sigma^2} + \frac{2\gamma}{\sigma^2(1 - c_0 e^{\gamma\tau})},$$

$$C(\tau) = \frac{2a(2\bar{\lambda} + \gamma)(1 - e^{\gamma\tau/2})^2}{\gamma\sigma^2(1 - e^{\gamma\tau})},$$

$$\tau = T - t,$$

$$\gamma = \sqrt{4\bar{\lambda}^2 + 2\sigma^2},$$

$$c_0 = \frac{2\bar{\lambda} + \gamma}{2\bar{\lambda} - \gamma},$$

$$c_1 = \frac{-a^2}{\gamma^3 \sigma^2} (4\bar{\lambda} + \gamma)(2\bar{\lambda} - \gamma),$$

$$c_2 = \frac{2\bar{\lambda} + \gamma}{4} - \frac{a^2}{\gamma^2},$$

$$c_3 = \frac{4a^2}{\gamma^3 \sigma^2} (2\bar{\lambda}^2 - \sigma^2)$$

y

$$c_4 = \frac{-8\bar{\lambda}a^2}{\gamma^3 \sigma^2} (2\bar{\lambda} + \gamma).$$

CAPÍTULO 54

MODELO DE BRENNAN Y SCHWARTZ DE DOS FACTORES

Conceptos básicos de este capítulo:

- Modelos de equilibrio general para valuación de bonos cupón cero
- Bonos consol
- Modelos de tasas con dos factores
- Premio instantáneo al riesgo de mercado
- Ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero

54.1 Introducción

En el modelo de Brennan y Schwartz de dos factores que aparece en el artículo “A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds” publicado en el “Journal of Banking and Finance” en 1979, la determinación de la curva de rendimiento no sólo considera la dinámica de la tasa de interés de plazo más corto disponible en el mercado, sino también el comportamiento de la tasa de interés de plazo más largo con que se cuenta en el mercado. La dinámica de estas tasas se especifica a través de un sistema de dos ecuaciones diferenciales estocásticas. Vale la pena señalar que Michael J. Brennan y Eduardo S. Schwartz han producido más de 30 artículos de manera conjunta. Sus investigaciones se concentran principalmente en el área de tasas de interés.

El presente capítulo estudia, en cierto detalle, el modelo de Brennan y Schwartz de dos factores, en el cual se plantea un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas que considera las dinámicas de las tasas de interés de plazos más corto y más largo en el mercado; esta última asociada a un bono “consol” (una perpetuidad) que periódicamente paga un cupón.

54.2 Bonos “consol”

Un bono “consol” es una perpetuidad, es decir, un instrumento de renta fija que paga periódicamente y, por siempre, un cupón constante. En 1815, el gobierno británico colocó un monto considerable de bonos de consolación (“consol”) a fin de liquidar la deuda en que incurrió durante la guerra contra Napoleón. Estos bonos recibieron el nombre de bonos de consolación porque su propósito era dar consuelo a aquellos con los que el gobierno británico tenía adeudos.

De esta manera, si un bono de consolación paga en cada instante un cupón c y se descuenta a una tasa $b_t \equiv R(t, \infty)$, entonces su precio $C(b_t, t; \infty)$ al tiempo t , está dado por

$$C(b_t, t; \infty) = \int_t^\infty ce^{-b_t(s-t)} ds = \frac{c}{b_t}. \quad (54.1)$$

54.3 Fundamentos del modelo de Brennan y Schwartz

A continuación se presenta una versión simplificada del modelo de Brennan y Schwartz. Se supone que la tasa corta, $r_t \equiv R(t, t)$, y la tasa larga, $b_t \equiv R(t, \infty)$, es decir, las tasas de interés de plazos más corto y más largo en el mercado, respectivamente, satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\begin{aligned} dr_t &= a(b_t - r_t)dt + r_t\sigma dW_t, \\ db_t &= b_t\gamma dt + b_t\beta dV_t. \end{aligned} \quad (54.2)$$

Se supone también que los factores de riesgo se encuentran correlacionados entre sí, de tal manera que

$$\text{Cov}(\text{d}W_t, \text{d}V_t) = \rho \text{dt}. \quad (54.3)$$

Si $B = B(r_t, b_t, t; T)$ denota el precio de un bono cupón cero que paga una unidad monetaria al vencimiento T , el cual depende de r_t y b_t , se tiene que

$$\begin{aligned} \text{d}B = & \left[\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r_t} a(b_t - r_t) + \frac{\partial B}{\partial b_t} b_t \gamma \right. \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} r_t^2 \sigma^2 + \frac{\partial^2 B}{\partial b_t^2} b_t^2 \beta^2 + 2r_t b_t \sigma \beta \rho \frac{\partial^2 B}{\partial r_t \partial b_t} \right) \left. \right] \text{dt} \\ & + \frac{\partial B}{\partial r_t} r_t \sigma \text{d}W_t + \frac{\partial B}{\partial b_t} b_t \beta \text{d}V_t. \end{aligned} \quad (54.4)$$

Si se denota

$$\begin{aligned} \nu_B = \nu_B(r_t, b_t, t; T) = & \left[\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r_t} a(b_t - r_t) + \frac{\partial B}{\partial b_t} b_t \gamma \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} r_t^2 \sigma^2 + \frac{\partial^2 B}{\partial b_t^2} b_t^2 \beta^2 + 2r_t b_t \sigma \beta \rho \frac{\partial^2 B}{\partial r_t \partial b_t} \right) \right] \frac{1}{B}, \end{aligned}$$

$$s_r = s_r(r_t, b_t, t; T) = \frac{\partial B}{\partial r_t} r_t \sigma \frac{1}{B}$$

y

$$s_b = s_b(r_t, b_t, t; T) = \frac{\partial B}{\partial b_t} b_t \beta \frac{1}{B},$$

se sigue que

$$\text{d}B = \nu_B B \text{dt} + s_r B \text{d}W_t + s_b B \text{d}V_t. \quad (54.5)$$

54.4 Condición de no arbitraje

Con el propósito de caracterizar el equilibrio entre rendimientos de bonos de diferentes fechas de vencimiento, considere un portafolio con w_i , $i = 1, 2, 3$, unidades de bonos $B_i = B(r_t, b_t, t; T_i)$, $i = 1, 2, 3$, con fechas de vencimiento T_i , $i = 1, 2, 3$. En este caso, el valor, Π_t , del portafolio está dado por:

$$\Pi_t = w_1 B_1 + w_2 B_2 + w_3 B_3, \quad (54.6)$$

y el cambio en su valor, por fluctuaciones propias del mercado, se calcula mediante

$$\text{d}\Pi_t = w_1 \text{d}B_1 + w_2 \text{d}B_2 + w_3 \text{d}B_3. \quad (54.7)$$

Si se sustituye el cambio en el precio de cada bono en la expresión anterior y se denotan $\nu_{B_i} = \nu_B(r_t, b_t, t; T_i)$, $s_{ri} = s_r(r_t, b_t, t; T_i)$ y $s_{bi} = s_b(r_t, b_t, t; T_i)$, $i = 1, 2, 3$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{d}\Pi_t = & w_1 (\nu_{B_1} B_1 \text{dt} + s_{r1} B_1 \text{d}W_t + s_{b1} B_1 \text{d}V_t) \\ & + w_2 (\nu_{B_2} B_2 \text{dt} + s_{r2} B_2 \text{d}W_t + s_{b2} B_2 \text{d}V_t) \\ & + w_3 (\nu_{B_3} B_3 \text{dt} + s_{r3} B_3 \text{d}W_t + s_{b3} B_3 \text{d}V_t) \\ = & (w_1 \nu_{B_1} B_1 + w_2 \nu_{B_2} B_2 + w_3 \nu_{B_3} B_3) \text{dt} \\ & + (w_1 s_{r1} B_1 + w_2 s_{r2} B_2 + w_3 s_{r3} B_3) \text{d}W_t \\ & + (w_1 s_{b1} B_1 + w_2 s_{b2} B_2 + w_3 s_{b3} B_3) \text{d}V_t. \end{aligned}$$

El rendimiento del portafolio está dado por

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} &= (x_1\nu_{B_1} + x_2\nu_{B_2} + x_3\nu_{B_3}) dt \\ &\quad + (x_1s_{r1} + x_2s_{r2} + x_3s_{r3}) dW_t \\ &\quad + (x_1s_{b1} + x_2s_{b2} + x_3s_{b3}) dV_t,\end{aligned}\tag{54.8}$$

donde

$$x_i = \frac{w_i B_i}{\Pi_t}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{y} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

El cambio en el rendimiento del portafolio, $d\Pi_t/\Pi_t$, será libre de riesgo si las x_i , $i = 1, 2, 3$, se seleccionan de tal manera que los coeficientes de los factores de riesgo dW_t y dV_t son cero, esto es, si se cumplen simultáneamente las dos siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_1s_{r1} + x_2s_{r2} + x_3s_{r3} &= 0, \\ x_1s_{b1} + x_2s_{b2} + x_3s_{b3} &= 0.\end{aligned}\tag{54.9}$$

Por otro lado, a fin de evitar oportunidades de arbitraje, es necesario que la tasa de rendimiento sobre este portafolio sea igual a la tasa de interés libre de riesgo r_t . Por supuesto que r_t es variable, de hecho es estocástica, pero al tiempo t es completamente conocida. En consecuencia,

$$x_1\nu_{B_1} + x_2\nu_{B_2} + x_3\nu_{B_3} = r_t.$$

Equivalentemente,

$$x_1\nu_{B_1} + x_2\nu_{B_2} + x_3\nu_{B_3} = r_t(x_1 + x_2 + x_3).\tag{54.10}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$x_1(\nu_{B_1} - r_t) + x_2(\nu_{B_2} - r_t) + x_3(\nu_{B_3} - r_t) = 0.\tag{54.11}$$

Las ecuaciones (54.9) y (54.11) se pueden escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} s_{r1} & s_{r2} & s_{r3} \\ s_{b1} & s_{b2} & s_{b3} \\ \nu_{B_1} - r_t & \nu_{B_2} - r_t & \nu_{B_3} - r_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\tag{54.12}$$

Observe que si el determinante de la matriz es distinto de cero, entonces el sistema tiene como única solución la trivial, es decir, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, lo cual implica que $w_1 = w_2 = w_3 = 0$. Lo que se busca es una solución no trivial, por lo que las filas de la matriz en (54.12) deben ser linealmente dependientes, entonces existen λ_r y λ_b tales que:

$$\begin{aligned}\nu_{B_1} &= r_t + s_{r1}\lambda_r + s_{b1}\lambda_b, \\ \nu_{B_2} &= r_t + s_{r2}\lambda_r + s_{b2}\lambda_b, \\ \nu_{B_3} &= r_t + s_{r3}\lambda_r + s_{b3}\lambda_b.\end{aligned}\tag{54.13}$$

Dado que estas ecuaciones son idénticas para cualquier fecha de vencimiento, se tiene que

$$\nu_B = r_t + \frac{\partial B}{\partial r_t} \frac{r_t \sigma}{B} \lambda_r + \frac{\partial B}{\partial b_t} \frac{b_t \beta}{B} \lambda_b\tag{54.14}$$

es independiente del vencimiento T , así $\lambda_r = \lambda_r(r_t, b_t, t)$ y $\lambda_b = \lambda_b(r_t, b_t, t)$. En la siguiente sección se encontrará una expresión analítica para λ_b .

54.5 Premio al riesgo de un bono de consolación

Observe, primero, que la ecuación (54.14) se cumple, en particular, para un bono de consolación que paga cupones $c = 1$ y cuyo precio $1/b_t$ es independiente de r_t . Así, si $B(r_t, b_t, t, \infty) = C(b_t, t; \infty) = 1/b_t$, se tiene en particular que

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial r_t} &= \frac{\partial^2 C}{\partial r_t^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial r_t \partial b_t} = \frac{\partial C}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial b_t} &= -\frac{1}{b_t^2}, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial b_t^2} &= \frac{2}{b_t^3}.\end{aligned}\tag{54.15}$$

Por un lado, si se supone que el bono “consol” es comerciable, entonces del lema de Itô se sigue que

$$\begin{aligned}dC &= d\left(\frac{1}{b_t}\right) \\ &= \left(\frac{\beta^2 - \gamma}{b_t}\right) dt - \frac{\beta}{b_t} dV_t \\ &= (\beta^2 - \gamma) C dt - \beta C dV_t.\end{aligned}\tag{54.16}$$

De esta manera, ν_C está dado por la ganancia esperada de capital, dada por la tendencia de (54.16), más la tasa cupón. Es decir

$$\nu_C = \beta^2 - \gamma + b_t.\tag{54.17}$$

Mientras que, por otro lado, a partir de (54.14), se tiene que

$$\begin{aligned}\nu_C &= r_t + \frac{\partial C}{\partial b_t} \frac{b_t \beta}{C} \lambda_b \\ &= r_t - \beta \lambda_b.\end{aligned}\tag{54.18}$$

Después de igualar (54.17) con (54.18), se obtiene

$$\lambda_b = \frac{r_t - b_t + \gamma - \beta^2}{\beta}.\tag{54.19}$$

La prima al riesgo de mercado λ_b no depende de las características específicas del instrumento que se utilizó para calcularla y debe ser la misma para cualquier bono, incluyendo un bono “consol”.

54.6 Ecuación diferencial parcial del precio de un bono que depende de las tasas corta y larga

Dado que la prima al riesgo de mercado λ_b es la misma para el bono a descuento y el bono “consol”, a partir de (54.14), se tiene

$$\nu_B = r_t + \frac{\partial B}{\partial r_t} \frac{r_t \sigma}{B} \lambda_r + \frac{\partial B}{\partial b_t} \frac{b_t}{B} (r_t - b_t + \gamma - \beta^2).$$

Al igualar la ecuación anterior con el término de tendencia de (54.5), se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r_t} [a(b_t - r_t) - r_t \sigma \lambda_r] + \frac{\partial B}{\partial b_t} (\beta^2 b_t + b_t^2 - r_t b_t) \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} r_t^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial b_t^2} b_t^2 \beta^2 + \rho r_t \sigma b_t \beta \frac{\partial^2 B}{\partial r_t \partial b_t} - r_t B = 0,\end{aligned}\tag{54.20}$$

junto con la condición de frontera $B(r_t, b_t, T) = 1$. Note que en la ecuación (54.20) no aparece el premio al riesgo λ_b . Falta, por supuesto, la estimación del premio al riesgo λ_r , lo cual puede ser una tarea complicada.

54.7 Bibliografía sugerida

- Brennan, M. J. and E. S. Schwartz (1979). "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds". *Journal of Banking and Finance*, Vol. 3, No. 2, pp. 133-155.
- González-Aréchiga, B., J. Díaz-Tinoco y F. Venegas-Martínez (2001). "Riesgo cambiario, brecha de madurez y cobertura con futuros: análisis local y de valor en riesgo". *Economía Mexicana, Nueva Época*, Vol. 10, No. 2, pp. 259-290.
- González-Aréchiga, B., F. Venegas-Martínez y J. Díaz-Tinoco (2000). "Riesgo de tasas de interés e inmunización por duración y convexidad con futuros: análisis local y de valor en riesgo". *Investigación Económica*, Vol. 60, No. 233, pp. 72-112.

54.8 Ejercicios

54.1 Considere el modelo

$$\begin{aligned} dr_t &= \beta_1(r_t, b_t, t)dt + \eta_1(r_t, b_t, t)dW_t, \\ db_t &= \beta_2(r_t, b_t, t)dt + \eta_2(r_t, b_t, t)dV_t \end{aligned}$$

y

$$E[dW_t dV_t] = \rho dt.$$

Demuestre que el premio al riesgo asociado a la tasa larga satisface

$$\lambda_b = -\frac{\eta_2}{b_t} + \frac{\beta_2 - b_t^2 + r_t b_t}{\eta_2}.$$

Asimismo, demuestre que la ecuación diferencial parcial que caracteriza el precio de un bono cupón cero está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r_t}(\beta_1 - \lambda_r \eta_1) + \frac{\partial B}{\partial b_t} \left(\frac{\eta_2^2}{b_t^2} + b_t^2 - r_t b_t \right) \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \eta_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial b_t^2} \eta_2^2 + \rho \eta_1 \eta_2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t \partial b_t} - r_t B = 0. \end{aligned}$$

54.2 Analice con la metodología de Brennan y Schwartz el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} dr_t &= [\theta_1 + \theta_2(b_t - r_t)]dt + r_t \sigma_1 dW_t, \\ db_t &= b_t (\gamma_1 + \gamma_2 r_t + \gamma_3 b_t)dt + b_t \sigma_2 dV_t \end{aligned}$$

y

$$E[dW_t, dV_t] = \rho dt,$$

donde $\theta_1, \theta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \sigma_1, \sigma_2$ y ρ son constantes.

CAPÍTULO 55

MODELO DE TASA CORTA DE BLACK, DERMAN Y TOY

Conceptos básicos de este capítulo:

- Modelo de tasa corta de Black, Derman y Toy
- Estructura de plazos de la volatilidad
- Valuación de bonos cupón cero
- Árboles binomiales

55.1 Introducción

En 1990, Fischer Black, Emanuel Derman y William Toy (BDT) publican el artículo “A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options” en el “Financial Analysts Journal”. En la metodología propuesta por BDT, la tasa corta sigue una distribución lognormal y la valuación de bonos se lleva a cabo mediante el uso de árboles binomiales. La curva de rendimiento actual se obtiene a partir de una estructura inicial de plazos de la tasa de interés (proveniente del mercado) y de una estructura estimada de plazos de la volatilidad, lo cual, en cierto sentido, es comparable con los modelos de Ho y Lee (1986) y Hull y White (1990) en donde se requiere una curva inicial de rendimiento y estimar el parámetro de volatilidad.

Asimismo, en este capítulo se presenta un algoritmo, desarrollado por BDT, para determinar la dinámica de la tasa corta y los precios de bonos cupón cero a distintos vencimientos. El algoritmo requiere una estructura de plazos de la volatilidad así como información inicial de una curva de rendimiento. Por último, a manera de ilustración, se desarrolla una aplicación detallada del algoritmo de BDT.

55.2 Dinámica de la tasa corta con un solo factor

En el modelo de BDT, la tasa corta sigue un proceso lognormal, lo que evita que ésta se torne negativa. El modelo de BDT se puede obtener del modelo de Vasicek al sustituir la tasa corta por su logaritmo. Es también importante destacar que para ciertas especificaciones de la función de la volatilidad, la tasa instantánea puede no presentar reversión a la media. Asimismo, debido a que la tasa corta sigue un comportamiento lognormal, no es posible, en general, contar con una solución analítica del precio del bono para un vencimiento dado. En este sentido, Black, Derman y Toy han propuesto un algoritmo de valuación de bonos a descuento que se presenta, en detalle, en el transcurso de este capítulo.

El modelo original de BDT es desarrollado en tiempo discreto. A continuación se presenta una versión en tiempo continuo, suponga que la dinámica de la tasa corta es guiada por la siguiente ecuación:

$$r_t = \mu_t e^{\sigma_t W_t}, \quad (55.1)$$

donde μ_t y σ_t son, respectivamente, la media y la volatilidad de la tasa corta al tiempo t y $(W_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. La ecuación (55.1) puede reescribirse como

$$r_t = e^{\ln \mu_t + \sigma_t W_t}. \quad (55.2)$$

Otra forma alternativa de expresar la ecuación anterior está dada por

$$\ln r_t = \ln \mu_t + \sigma_t W_t, \quad (55.3)$$

a partir de lo cual, se obtiene que

$$W_t = \frac{\ln r_t - \ln \mu_t}{\sigma_t}. \quad (55.4)$$

Es decir, la diferencia logarítmica de r_t con su media, por unidad de volatilidad, se distribuye como una variable aleatoria normal con media cero y varianza t . Una simple aplicación del lema de Itô al logaritmo de la tasa corta conduce a

$$d \ln r_t = \left(\frac{\partial \ln r_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln r_t}{\partial W_t^2} \right) dt + \frac{\partial \ln r_t}{\partial W_t} dW_t. \quad (55.5)$$

Observe también que

$$\frac{\partial \ln r_t}{\partial t} = \frac{\partial \ln \mu_t}{\partial t} + W_t \frac{\partial \sigma_t}{\partial t}, \quad (55.6)$$

$$\frac{\partial \ln r_t}{\partial W_t} = \sigma_t \quad (55.7)$$

y

$$\frac{\partial^2 \ln r_t}{\partial W_t^2} = 0. \quad (55.8)$$

Si se sustituyen las derivadas parciales (55.6), (55.7) y (55.8) en (55.5), se obtiene que

$$d \ln r_t = \left[\frac{\partial \ln \mu_t}{\partial t} + \left(\frac{\ln r_t - \ln \mu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \sigma_t}{\partial t} \right] dt + \sigma_t dW_t. \quad (55.9)$$

Por otro lado, es fácil verificar que

$$\frac{1}{\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial t} = \frac{\partial \ln \sigma_t}{\partial t}. \quad (55.10)$$

Por lo tanto, después de sustituir la ecuación (55.10) en (55.9), se sigue que

$$d \ln r_t = \left[\frac{\partial \ln \mu_t}{\partial t} - \frac{\partial \ln \sigma_t}{\partial t} (\ln \mu_t - \ln r_t) \right] dt + \sigma_t dW_t. \quad (55.11)$$

En conclusión, la ecuación diferencial estocástica (55.11) representa la dinámica del logaritmo de la tasa corta en el modelo de BDT. En ocasiones, es conveniente introducir la siguiente notación:

$$a_t = -\frac{\partial \ln \sigma_t}{\partial t},$$

$$b_t = \ln \mu_t,$$

$$\gamma_t = \frac{\partial \ln \mu_t}{\partial t}$$

y

$$X_t = \ln r_t. \quad (55.12)$$

Después de sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (55.11), se tiene que

$$dX_t = [\gamma_t + a_t (b_t - X_t)] dt + \sigma_t dW_t. \quad (55.13)$$

Observe, en particular, que si σ_t y μ_t son constantes, entonces $a_t = \gamma_t = 0$. En este caso, la ecuación (55.13) no presenta reversión a la media y, en este caso, la ecuación (55.11) se transforma en

$$d \ln r_t = \sigma_t dW_t, \quad (55.14)$$

lo que conduce a

$$\ln r_t = \ln r_0 + \sigma_t (W_t - W_0)$$

ó

$$r_t = r_0 e^{\sigma_t W_t}. \quad (55.15)$$

Por otro lado, si se supone que la volatilidad decae a una tasa positiva, entonces se producirá el efecto de reversión de X_t a b_t . Por ejemplo, se puede suponer que la volatilidad decae como

$$\sigma_t = \sigma_0 e^{-at},$$

donde $a > 0$. De esta manera,

$$-\frac{\partial \ln \sigma_t}{\partial t} = a.$$

Por lo tanto,

$$dX_t = [\gamma_t + a(b_t - X_t)] dt + \sigma_t dW_t. \quad (55.16)$$

Si además se supone que el logaritmo de la media de la tasa corta es constante, es decir $\ln \mu_t = b$, o bien $\mu_t = e^b$, entonces

$$\gamma_t = \frac{\partial \ln \mu_t}{\partial t} = 0.$$

Por lo que la ecuación (55.16) se transforma en:

$$dX_t = a(b - X_t) dt + \sigma_t dW_t. \quad (55.17)$$

Esta ecuación es, claramente, del tipo de Vasicek en la variable X_t . A partir de (55.17) es posible estimar, a través de una regresión lineal simple, los parámetros a y b . Si los estimadores de estos parámetros se denotan mediante \hat{a} y \hat{b} , respectivamente, entonces

$$\sigma_t = \sigma_0 e^{-\hat{a}t}$$

y

$$\mu_t = e^{\hat{b}}.$$

Por lo tanto,

$$r_t = e^{\hat{b} + \sigma_0 e^{-\hat{a}t} \sqrt{t} \varepsilon}, \quad (55.18)$$

donde $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

55.3 El algoritmo de BDT para calcular el precio de un bono cupón cero y la tasa corta mediante árboles binomiales

A continuación se presenta el algoritmo de BDT para calcular el precio de un bono cupón cero a diferentes plazos y para calcular la tasa corta en distintos precios a través de árboles binomiales, con base en una estructura inicial de plazos de la tasa de interés y una estructura estimada de plazos de la volatilidad. Para ello, se supone que la tasa corta sigue una distribución lognormal, en particular, sigue una ecuación de la forma (55.1). Con el propósito de ilustrar el funcionamiento del algoritmo, se supone un horizonte de valuación de 4 años. Para iniciar el algoritmo, se requiere de la información que aparece en la Cuadro 55.1.

Estructuras de plazo iniciales		
No. de años para el vencimiento	Rendimiento $R(0, T)$	Volatilidad $\sigma(0, T)$
1	$R(0, 1)$	$\sigma(0, 1)$
2	$R(0, 2)$	$\sigma(0, 2)$
3	$R(0, 3)$	$\sigma(0, 3)$
4	$R(0, 4)$	$\sigma(0, 4)$

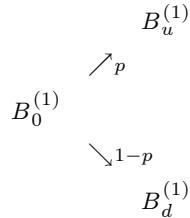
Cuadro 55.1 Información inicial.

En el algoritmo de BDT, se supone que al final del último periodo el bono cupón cero siempre paga una unidad monetaria, independientemente de la trayectoria tomada en el árbol. De esta

manera, el precio del bono se calcula yendo hacia atrás, es decir, se trae a valor presente el valor esperado del precio del bono con la tasa de interés correspondiente. La tasa corta es la tasa de interés anual y ésta se calcula yendo hacia adelante. A continuación se ilustra este procedimiento en detalle.

55.3.1 Paso 1 del algoritmo de BDT

En este primer paso, identificado con el superíndice “(1)”, se determina el precio de un bono cupón cero hoy, $n = 0$, y que vence en un año, $T = 1$. El precio del bono, hoy, es denotado por $B_0^{(1)}$. Los dos posibles precios del bono en $n = T = 1$, se denotan mediante $B_u^{(1)}$ y $B_d^{(1)}$. El árbol binomial inicial se muestra en la Gráfica 55.1.



Gráfica 55.1 Árbol binomial inicial.

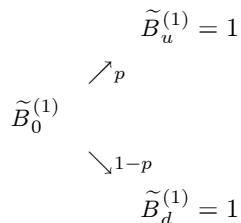
Si se supone que el bono siempre paga una unidad monetaria en el vencimiento, entonces es posible calcular $B_0^{(1)}$. En efecto, sean $\tilde{B}_u^{(1)} = 1$ y $\tilde{B}_d^{(1)} = 1$, con probabilidades de ocurrencia p y $1 - p$, respectivamente. De ahora en adelante, todas las literales que tengan una tilde serán consideradas como cantidades conocidas. Claramente, el precio esperado dentro de un año, en $T = 1$, es

$$E[B_0^{(1)} | \mathcal{I}^{(1)}] = p\tilde{B}_u^{(1)} + (1 - p)\tilde{B}_d^{(1)} = 1, \quad (55.19)$$

donde $\mathcal{I}^{(1)}$ es la información disponible en $T = 1$. Este valor esperado traído a valor presente, proporciona el precio del bono hoy, $n = 0$, es decir,

$$\tilde{B}_0^{(1)} = \frac{E[B_0^{(1)} | \mathcal{I}^{(1)}]}{1 + R(0, 1)} = \frac{1}{1 + R(0, 1)}, \quad (55.20)$$

donde $R(0, 1)$ es la tasa del bono que vence dentro de un año. Así, $\tilde{B}_0^{(1)} = B(0, 1)$ tiene ahora un valor conocido. El árbol binomial para el precio de un bono cupón cero que al final del primer periodo paga una unidad monetaria, se muestra en la Gráfica 55.2.

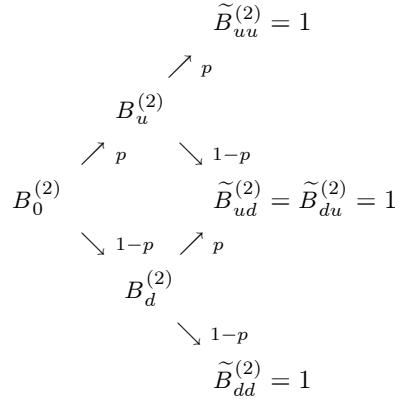


Gráfica 55.2 Precio de un bono cupón cero que vence en un año.

55.3.2 Paso 2 del algoritmo de BDT

A continuación se determina el precio, hoy, de un bono cupón cero que vence dentro de dos años, $T = 2$, $B_0^{(2)}$, a partir de precios futuros. Para relacionar los precios futuros con los precios de hoy se utiliza un árbol binomial de dos períodos. En la Gráfica 55.3, se muestra el árbol binomial

de precios del bono cupón cero. En este caso, hay dos periodos: de $n = 0$ a $n = 1$ y de $n = 1$ a $n = 2$, así como una fecha de vencimiento $T = 2$.



Gráfica 55.3 Árbol binomial de dos períodos del precio de un bono cupón cero.

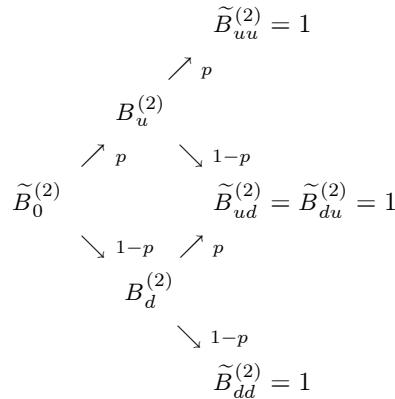
Observe que en la Gráfica 55.3, no se conocen los precios del bono para $n = 0$ y $n = 1$, es decir, no se conocen $B_0^{(2)}$, $B_u^{(2)}$ y $B_d^{(2)}$, los cuales se tienen que determinar a través del algoritmo. A partir de la estructura de plazos de la tasa de interés (Cuadro 55.1), se calcula el precio de un bono cupón cero, hoy, con vencimiento dentro de dos años, $B_0^{(2)}$. De esta manera y, como era de esperarse,

$$\mathbb{E}[B_0^{(2)} | \mathcal{I}^{(2)}] = p^2 \tilde{B}_{uu}^{(2)} + 2p(1-p) \tilde{B}_{ud}^{(2)} + (1-p)^2 \tilde{B}_{dd}^{(2)} = 1. \quad (55.21)$$

Así,

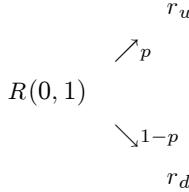
$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_0^{(2)} &= \frac{\mathbb{E}[B_0^{(2)} | \mathcal{I}^{(2)}]}{(1 + R(0, 2))^2} \\
 &= \frac{1}{(1 + R(0, 2))^2},
 \end{aligned} \quad (55.22)$$

por lo que $\tilde{B}_0^{(2)} \equiv B(0, 2)$ tiene ahora un valor conocido. A continuación se calcula el precio del bono dentro de un año cuando éste vence en dos años. Para ello, se necesita determinar la tasa corta vigente dentro de un año. En la Gráfica 55.4 se muestra el árbol binomial de los precios de un bono cupón cero que vence en $T = 2$.



Gráfica 55.4 Árbol binomial de dos períodos para un bono cupón cero.

Note que todos los precios $\tilde{B}_0^{(2)}$, $\tilde{B}_{uu}^{(2)}$, $\tilde{B}_{ud}^{(2)}$ y $\tilde{B}_{dd}^{(2)}$ son conocidos. Observe también que para calcular $B_u^{(2)}$ y $B_d^{(2)}$ se requieren los valores de la tasa corta r_u y r_d . El árbol binomial para la tasa corta se presenta en la Gráfica 55.5.



Gráfica 55.5 Árbol binomial de un periodo para la tasa corta.

A continuación se procede como en la ecuación (55.19) a fin de determinar el precio esperado del bono en un año, esto es,

$$E[B_0^{(2)} | \mathcal{I}^{(1)}] = B_u^{(2)}p + B_d^{(2)}(1-p). \quad (55.23)$$

El valor presente del valor esperado del precio del bono dentro de un año cuando tiene vencimiento en dos años satisface

$$\tilde{B}_0^{(2)} = \frac{B_u^{(2)}p + B_d^{(2)}(1-p)}{1 + R(0,1)}, \quad (55.24)$$

donde $R(0,1)$ es el rendimiento de un bono que vence dentro de un año. El valor $\tilde{B}_0^{(2)}$ ya fue calculado en la ecuación (55.22). Observe que $B_u^{(2)}$ y $B_d^{(2)}$ son cantidades desconocidas, para calcularlas se procede como sigue. En un árbol binomial estándar se tiene que

$$r_u = e^{\sigma(0,T)\sqrt{T/n}} \quad (55.25)$$

y

$$r_d = e^{-\sigma(0,T)\sqrt{T/n}}, \quad (55.26)$$

donde n representa el número de periodos en el árbol binomial de la tasa corta y T la fecha de vencimiento del bono. Después de tomar el cociente entre r_u y r_d , se tiene que

$$\ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right) = 2\sigma(0,T)\sqrt{\frac{T}{n}}. \quad (55.27)$$

Si se despeja $\sigma(0,T)$ de la ecuación anterior, se obtiene

$$\sigma(0,T) = \frac{1}{2\sqrt{T/n}} \ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right), \quad (55.28)$$

así,

$$r_u = r_d e^{\sigma(0,T)(2\sqrt{T/n})}. \quad (55.29)$$

Observe, en particular, que si $T = n = 2$, se obtiene

$$\sigma(0,2) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r_u}{r_d}\right), \quad (55.30)$$

o bien

$$r_u = r_d e^{2\sigma(0,2)}. \quad (55.31)$$

Por otro lado, observe que el precio de un bono cupón cero $B_u^{(2)}$ dentro de un año que paga una unidad monetaria dentro de dos años, traído a valor presente a una tasa corta, r_u , está dado por

$$B_u^{(2)} = \frac{1}{1 + r_u}. \quad (55.32)$$

Análogamente, para $B_d^{(2)}$,

$$B_d^{(2)} = \frac{1}{1 + r_d}. \quad (55.33)$$

Si se sustituyen (55.32) y (55.33) en la ecuación (55.24), se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{B}_0^{(2)} &= \frac{B_u^{(2)}p + B_d^{(2)}(1-p)}{1+R(0,1)} \\ &= \frac{(1+r_u)^{-1}p + (1+r_d)^{-1}(1-p)}{1+R(0,1)}.\end{aligned}\quad (55.34)$$

Si ahora se sustituye (55.31) en la ecuación (55.34), se sigue que

$$\tilde{B}_0^{(2)} = \frac{(1+r_d e^{2\sigma(0,2)})^{-1}p + (1+r_d)^{-1}(1-p)}{1+R(0,1)}. \quad (55.35)$$

Recuerde que $R(0,1)$, $\tilde{B}_0^{(2)}$ y $\sigma(0,2)$ son valores conocidos. Por lo que la ecuación (55.35) se puede reescribir como una ecuación cuadrática homogénea,

$$r_d^2 + b r_d + c = 0, \quad (55.36)$$

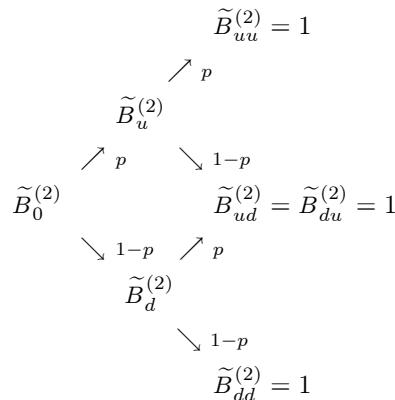
donde b y c son cantidades conocidas. Esta ecuación, para un valor fijo de p , proporciona, una solución de r_d , denotada por \tilde{r}_d . Al sustituir este valor en la ecuación (55.31), se tiene que

$$\tilde{r}_u = \tilde{r}_d e^{2\sigma(0,2)} \quad (55.37)$$

es también una cantidad conocida. Con los valores de \tilde{r}_u y \tilde{r}_d calculados en (55.36) y (55.37), respectivamente, se calculan los precios $B_u^{(2)}$ y $B_d^{(2)}$ de (55.32) y (55.33), mediante

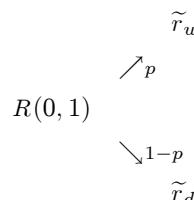
$$\tilde{B}_d^{(2)} = \frac{1}{1+\tilde{r}_d} \quad \text{y} \quad \tilde{B}_u^{(2)} = \frac{1}{1+\tilde{r}_u}. \quad (55.38)$$

El árbol binomial de dos períodos de los precios de los bonos cupón cero, completamente determinados, se muestra en la Gráfica 55.6.



Gráfica 55.6 Árbol binomial de dos períodos del precio de un bono cupón cero.

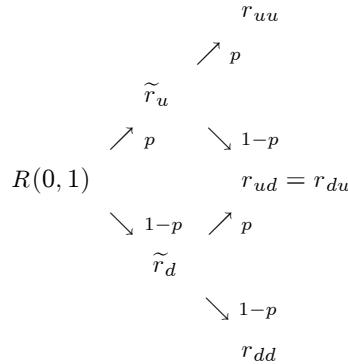
Observe ahora que ya se conocen los precios del bono para $n = 0$ y $n = 1$ con el supuesto de que en $T = 2$ el bono vence pagando una unidad monetaria. Además, se han calculado los valores de la tasa corta como se muestra en el árbol binomial de la Gráfica 55.7.



Gráfica 55.7 Árbol binomial de dos períodos de la tasa corta.

55.3.3 Paso 3 del algoritmo de BDT

A continuación se construye el árbol binomial para dos períodos de la tasa corta, la cual es la tasa de interés de plazo a un año. El árbol binomial para dos períodos se presenta en la Gráfica 55.8.



Gráfica 55.8 Árbol binomial de dos períodos para la tasa corta.

Observe que ahora hay tres tasas cortas desconocidas r_{uu} , r_{ud} y r_{dd} , y sólo se cuenta con dos fuentes de información: el Cuadro 55.1 y las tasas \tilde{r}_u , \tilde{r}_d . Para resolver este problema, se consideran los supuestos básicos del modelo de BDT, en cuyo caso

$$\sigma(0, 3) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{2}}} \ln \left(\frac{r_{uu}}{r_{ud}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{2}}} \ln \left(\frac{r_{ud}}{r_{dd}} \right), \quad (55.39)$$

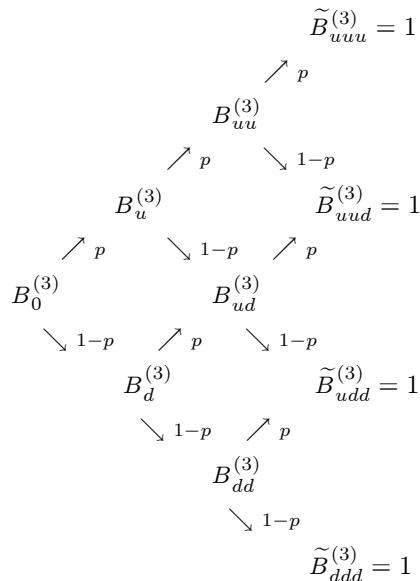
lo cual implica

$$\ln \left(\frac{r_{uu}}{r_{ud}} \right) = \ln \left(\frac{r_{ud}}{r_{dd}} \right). \quad (55.40)$$

En consecuencia,

$$r_{dd} = \frac{r_{ud}^2}{r_{uu}}. \quad (55.41)$$

El árbol binomial de tres períodos del precio de un bono cupón cero se muestra en la Gráfica 55.9. Observe que no se conocen los precios de los bonos $B_0^{(3)}$, $B_u^{(3)}$, $B_d^{(3)}$, $B_{uu}^{(3)}$, $B_{ud}^{(3)}$ y $B_{dd}^{(3)}$.



Gráfica 55.9 Árbol binomial de tres períodos.

Al igual que en el caso del árbol binomial de dos períodos, se determina el precio del bono cupón cero al inicio del árbol binomial. En este caso, el bono paga una unidad monetaria al final del tercer año. El precio del bono en el presente se calcula trayendo a valor presente dicha unidad monetaria, esto es,

$$\begin{aligned}\tilde{B}_0^{(3)} &= \frac{\mathbb{E}[B_0^{(3)} | \mathcal{I}^{(3)}]}{(1 + R(0, 3))^3} \\ &= \frac{1}{(1 + R(0, 3))^3}.\end{aligned}\quad (55.42)$$

De esta manera $\tilde{B}_0^{(3)}$ es ahora una cantidad conocida. Por otro lado, observe que los precios de los bonos cupón cero $B_{uu}^{(3)}$, $B_{ud}^{(3)}$ y $B_{dd}^{(3)}$ dentro de dos años, $n = 2$, y que pagan una unidad monetaria dentro de tres años, $T = 3$, traídos a valor presente al segundo año, $n = 2$, a las tasas r_{uu} , r_{ud} y r_{dd} , respectivamente, están dados por

$$B_{uu}^{(3)} = \frac{1}{1 + r_{uu}}, \quad B_{ud}^{(3)} = \frac{1}{1 + r_{ud}} \quad \text{y} \quad B_{dd}^{(3)} = \frac{1}{1 + r_{dd}}. \quad (55.43)$$

Asimismo, el precio del bono en el primer año en términos del precio del bono del segundo año y traído a valor presente en el primer año con la tasa corta calculada en el paso 2, es igual a:

$$B_u^{(3)} = \frac{p B_{uu}^{(3)} + (1 - p) B_{ud}^{(3)}}{1 + \tilde{r}_u} \quad (55.44)$$

y

$$B_d^{(3)} = \frac{(1 - p) B_{dd}^{(3)} + p B_{ud}^{(3)}}{1 + \tilde{r}_d}. \quad (55.45)$$

Además, el valor esperado del precio del bono en el primer año, $n = 1$, traído a valor presente debe ser igual al precio, hoy, del bono cupón cero, es decir,

$$\tilde{B}_0^{(3)} = \frac{p B_u^{(3)} + (1 - p) B_d^{(3)}}{1 + R(0, 1)}. \quad (55.46)$$

Si al bono le restan dos años para vencer, sus posibles rendimientos, en cada estado de la naturaleza, ν_u y ν_d deben satisfacer las siguientes relaciones:

$$B_u^{(3)} = \frac{1}{(1 + \nu_u)^2} \quad (55.47)$$

y

$$B_d^{(3)} = \frac{1}{(1 + \nu_d)^2}. \quad (55.48)$$

Si se despeja el rendimiento en las ecuaciones (55.47) y (55.48), esto es,

$$\nu_u = \sqrt{\frac{1}{B_u^{(3)}}} - 1 \quad (55.49)$$

y

$$\nu_d = \sqrt{\frac{1}{B_d^{(3)}}} - 1, \quad (55.50)$$

entonces al utilizar la ecuación (55.28), se tiene que la aplicación de $\sigma(0, 3)$ para $n = T = 3$, satisface

$$\sigma(0, 3) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\nu_u}{\nu_d} \right). \quad (55.51)$$

Por lo tanto,

$$\nu_u = \nu_d e^{2\sigma(0,3)}. \quad (55.52)$$

Si se sustituye la ecuación (55.50) en (55.52), se obtiene

$$\nu_u = \left(\sqrt{\frac{1}{B_d^{(3)}}} - 1 \right) e^{2\sigma(0,3)}. \quad (55.53)$$

Ahora es posible expresar $B_u^{(3)}$ en términos de $B_d^{(3)}$ al sustituir la ecuación (55.53) en la ecuación (55.47), es decir,

$$\begin{aligned} B_u^{(3)} &= \frac{1}{(1 + \nu_u)^2} \\ &= \frac{1}{\left[1 - \left(1 - \left(B_d^{(3)} \right)^{-1/2} \right) e^{2\sigma(0,3)} \right]^2}. \end{aligned} \quad (55.54)$$

Por otra parte, si se sustituyen (55.47), (55.48) y (55.52) en la ecuación (55.46), se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0^{(3)} &= \frac{p B_u^{(3)} + (1-p) B_d^{(3)}}{1 + R(0,1)} \\ &= \frac{p(1 + \nu_u)^{-2} + (1-p)(1 + \nu_d)^{-2}}{1 + R(0,1)} \\ &= \frac{p(1 + \nu_d e^{2\sigma(0,3)})^{-2} + (1-p)(1 + \nu_d)^{-2}}{1 + R(0,1)}. \end{aligned} \quad (55.55)$$

Observe que si se fija el valor de p en la ecuación anterior todo, en (55.55), es conocido, excepto ν_d . La ecuación (55.55) se puede expresar como un polinomio de cuarto grado en ν_d igualado a cero, es decir,

$$\nu_d^4 + a_1 \nu_d^3 + b_1 \nu_d^2 + c_1 \nu_d + d_1 = 0, \quad (55.56)$$

donde a_1, b_1, c_1 y d_1 son cantidades conocidas. Al resolver esta ecuación se obtiene un valor $\tilde{\nu}_d$, el cual se sustituye en (55.52), obteniendo con esto que

$$\tilde{\nu}_u = \tilde{\nu}_d e^{2\sigma(0,3)}. \quad (55.57)$$

Una vez que se tienen los valores $\tilde{\nu}_u$ y $\tilde{\nu}_d$, éstos se sustituyen en la ecuaciones (55.47) y (55.48), respectivamente, de tal manera que:

$$\tilde{B}_u^{(3)} = \frac{1}{(1 + \tilde{\nu}_u)^2} \quad (55.58)$$

y

$$\tilde{B}_d^{(3)} = \frac{1}{(1 + \tilde{\nu}_d)^2}. \quad (55.59)$$

A continuación se determinan los valores de r_{uu} , r_{ud} y r_{dd} . Para ello, se utilizan las ecuaciones (55.44) y (55.45) expresadas como

$$(1 + \tilde{r}_u)\tilde{B}_u^{(3)} = pB_{uu}^{(3)} + (1 - p)B_{ud}^{(3)} \quad (55.60)$$

y

$$(1 + \tilde{r}_d)\tilde{B}_d^{(3)} = pB_{dd}^{(3)} + (1 - p)B_{ud}^{(3)}, \quad (55.61)$$

donde $\tilde{B}_u^{(3)}$ y $\tilde{B}_d^{(3)}$ son valores conocidos. Si se sustituyen las expresiones para $B_{uu}^{(3)}$, $B_{ud}^{(3)}$ y $B_{dd}^{(3)}$ que aparecen en la ecuación (55.43), las dos ecuaciones anteriores se pueden reescribir en una sola ecuación que considera a

$$r_{uu} = r_{ud}e^{2\sigma(0,3)} \quad \text{y} \quad r_{dd} = r_{ud}e^{-2\sigma(0,3)}. \quad (55.62)$$

Además, a partir de (55.41) se tiene que

$$r_{uu}r_{dd} = r_{ud}^2.$$

Al resolver la ecuación resultante en r_{ud} , después de realizar todas las sustituciones planteadas, se obtiene un polinomio de segundo grado en r_{ud} igualado a cero:

$$r_{ud}^2 + b_2r_{ud} + c_2 = 0,$$

donde b_2 y c_2 son cantidades conocidas. La solución de esta ecuación cuadrática proporciona un valor \tilde{r}_{ud} . Posteriormente, se sustituye este valor de \tilde{r}_{ud} en (55.62), de tal manera que

$$\tilde{r}_{uu} = \tilde{r}_{ud}e^{2\sigma(0,3)} \quad (55.63)$$

y

$$\tilde{r}_{dd} = \tilde{r}_{ud}e^{-2\sigma(0,3)}. \quad (55.64)$$

Los tres posibles valores que se han obtenido de la tasa corta, \tilde{r}_{uu} , \tilde{r}_{ud} y \tilde{r}_{dd} , se sustituyen en las ecuaciones que aparecen en (55.43), esto es,

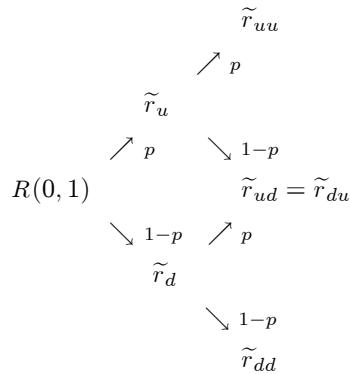
$$\tilde{B}_{uu}^{(3)} = \frac{1}{1 + \tilde{r}_{uu}}, \quad (55.65)$$

$$\tilde{B}_{ud}^{(3)} = \frac{1}{1 + \tilde{r}_{ud}}, \quad (55.66)$$

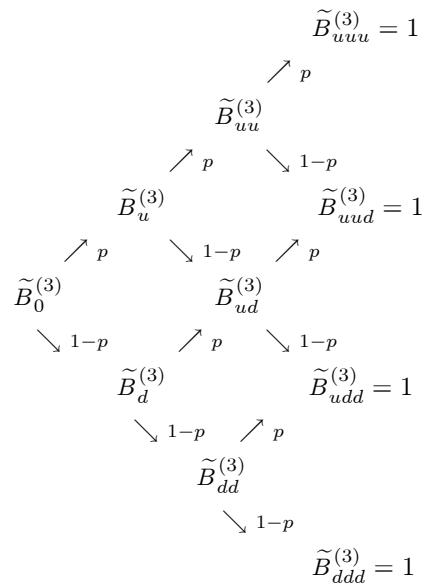
y

$$\tilde{B}_{dd}^{(3)} = \frac{1}{1 + \tilde{r}_{dd}}. \quad (55.67)$$

Por lo tanto, ya se conocen los valores $\tilde{B}_{uu}^{(3)}$, $\tilde{B}_{ud}^{(3)}$ y $\tilde{B}_{dd}^{(3)}$. Los árboles binomiales de la tasa corta para dos períodos y del precio del bono cupón cero para tres períodos se muestran, respectivamente, en las Gráficas 55.10 y 55.11.



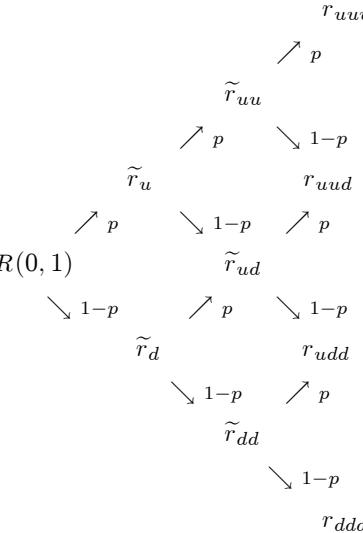
Gráfica 55.10 Árbol binomial de dos períodos de la tasa corta.



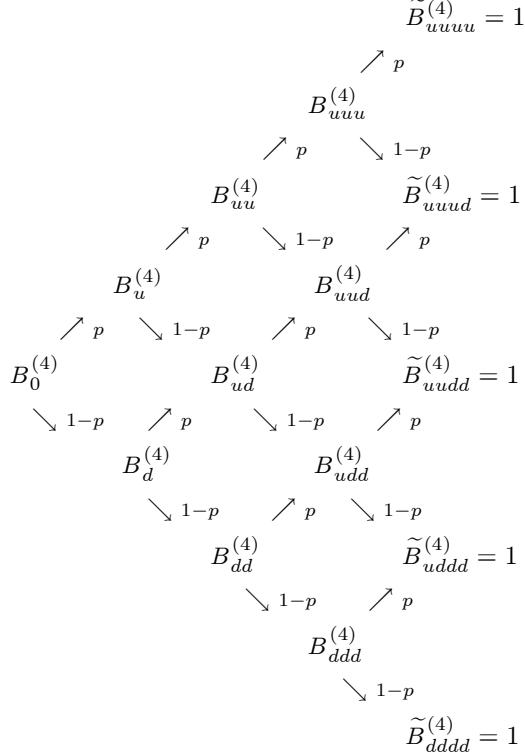
Gráfica 55.11 Árbol binomial de tres períodos del precio de un bono cupón cero.

55.3.4 Paso 4 del algoritmo de BDT

A continuación se construyen los árboles binomiales de la tasa corta para tres períodos y del precio del bono cupón cero para cuatro períodos (Gráficas 55.12 y 55.13).



Gráfica 55.12 Árbol binomial de tres períodos de la tasa corta.



Gráfica 55.13 Árbol binomial de cuatro períodos del precio de un bono cupón cero.

Las ecuaciones que se utilizan para resolver estos árboles binomiales de tasas y precios son:

$$\tilde{B}_0^{(4)} = \frac{(p + (1 - p))^4}{(1 + R(0, 4))^4} = \frac{1}{(1 + R(0, 4))^4}, \quad (55.68)$$

$$B_{uuu}^{(4)} = \frac{1}{1 + r_{uuu}}, \quad B_{uud}^{(4)} = \frac{1}{1 + r_{uud}}, \quad B_{udd}^{(4)} = \frac{1}{1 + r_{udd}} \quad \text{y} \quad B_{ddd}^{(4)} = \frac{1}{1 + r_{ddd}}. \quad (55.69)$$

Asimismo, el precio del bono en el segundo año en términos del precio del bono del tercer año y traído a valor presente en el segundo año con la tasa corta calculada en el paso 3, para cada

estado de la naturaleza, es

$$B_{uu}^{(4)} = \frac{pB_{uuu}^{(4)} + (1-p)B_{uud}^{(4)}}{1 + \tilde{r}_{uu}}, \quad (55.70)$$

$$B_{ud}^{(4)} = \frac{pB_{uud}^{(4)} + (1-p)B_{udd}^{(4)}}{1 + \tilde{r}_{ud}} \quad (55.71)$$

y

$$B_{dd}^{(4)} = \frac{pB_{ddd}^{(4)} + (1-p)B_{ddu}^{(4)}}{1 + \tilde{r}_{dd}}. \quad (55.72)$$

Posteriormente, el precio del bono en el primer año en términos del precio del bono del segundo año y traído a valor presente en el primer año con la tasa corta calculada en el paso 2 satisface, en cada estado de la naturaleza,

$$B_u^{(4)} = \frac{pB_{uu}^{(4)} + (1-p)B_{ud}^{(4)}}{1 + \tilde{r}_u} \quad (55.73)$$

y

$$B_d^{(4)} = \frac{(1-p)B_{dd}^{(4)} + pB_{ud}^{(4)}}{1 + \tilde{r}_d}. \quad (55.74)$$

Además, el valor esperado del precio del bono en el primer año y traído a valor presente debe ser igual al precio, hoy, del bono cupón cero, es decir,

$$\tilde{B}_0^{(4)} = \frac{pB_u^{(4)} + (1-p)B_d^{(4)}}{1 + R(0, 1)}. \quad (55.75)$$

Si a los bonos les restan dos años para vencer, entonces sus precios en términos de sus correspondientes rendimientos tienen que satisfacer las siguientes relaciones:

$$B_{uu}^{(4)} = \frac{1}{(1 + \nu_{uu})^2}, \quad (55.76)$$

$$B_{ud}^{(4)} = \frac{1}{(1 + \nu_{ud})^2}, \quad (55.77)$$

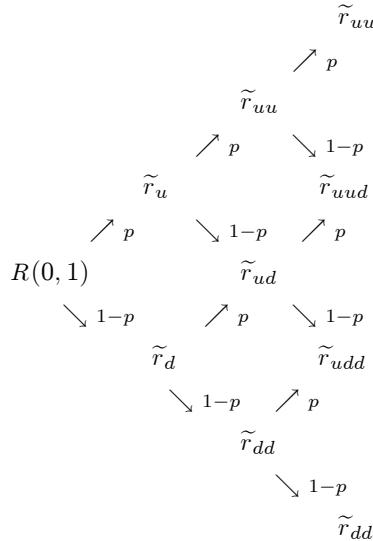
$$B_{dd}^{(4)} = \frac{1}{(1 + \nu_{dd})^2}, \quad (55.78)$$

$$B_u^{(4)} = \frac{1}{(1 + y_u)^3} \quad (55.79)$$

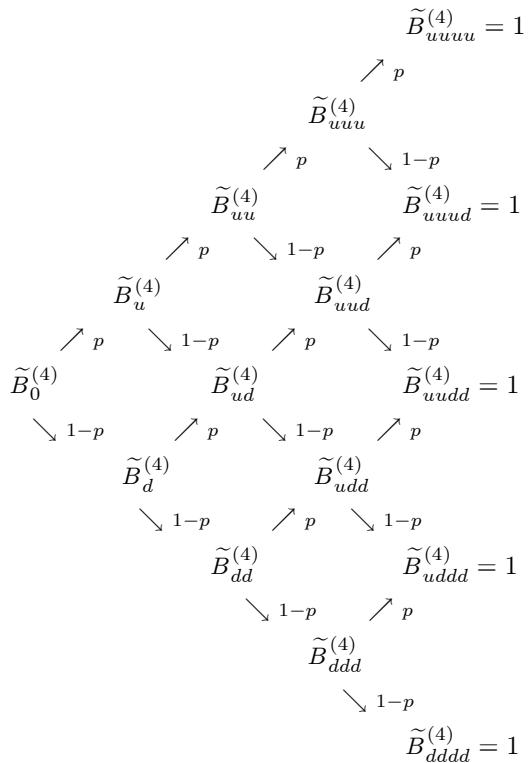
y

$$B_d^{(4)} = \frac{1}{(1 + y_d)^3}, \quad (55.80)$$

donde y_u y y_d son los rendimientos entre el primer y cuarto periodos. Al resolver las ecuaciones (55.73)-(55.75) de manera recursiva se obtienen los valores de la tasa corta para el tercer periodo y los precios del bono cupón cero para el cuarto periodo. Por lo que se tienen los árboles binomiales, resueltos completamente, en las Gráficas 55.14 y 55.15.



Gráfica 55.14 Árbol binomial de tres períodos de la tasa corta.



Gráfica 55.15 Árbol binomial de cuatro períodos del precio de un bono cupón cero.

En la siguiente sección se presenta una ilustración numérica detallada del algoritmo de Black, Derman y Toy.

55.4. Ilustración numérica del modelo de Black, Derman y Toy

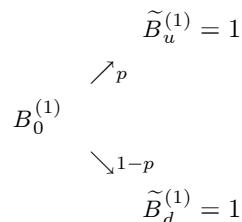
En esta sección se lleva a cabo una aplicación del algoritmo de Black, Derman y Toy. Consideré la siguiente información inicial, en el Cuadro 55.2, que requiere dicho algoritmo.

Estructura de plazos		
No. de años para el vencimiento	Curva de rendimiento $R(0, T)$	Volatilidad $\sigma(0, T)$
1	0.09	0.24
2	0.095	0.22
3	0.10	0.20
4	0.105	0.19

Cuadro 55.2 Información inicial para el algoritmo BDT.

55.4.1 Paso 1

Suponga que $\tilde{B}_u^{(1)} = 1$ y $\tilde{B}_d^{(1)} = 1$, y considere el árbol binomial de la Gráfica 55.16.

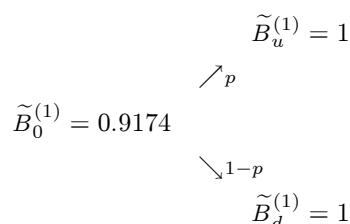


Gráfica 55.16 Árbol binomial en un periodo.

Si $R(0, 1) = 0.09$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0^{(1)} &= \frac{1}{1 + R(0, 1)} \\ &= \frac{1}{1 + 0.09} \\ &= 0.9174. \end{aligned} \tag{55.81}$$

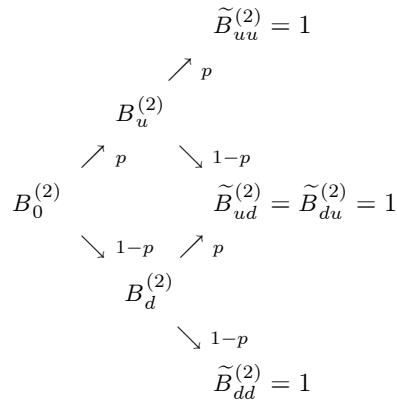
El árbol binomial resultante para el precio de un bono cupón cero que al final del periodo paga una unidad monetaria se muestra en la Gráfica 55.17.



Gráfica 55.17 Precio actual de un bono cupón cero en un periodo.

55.4.2 Paso 2

A continuación se calcula el árbol binomial de dos periodos para el precio de un bono cupón cero.

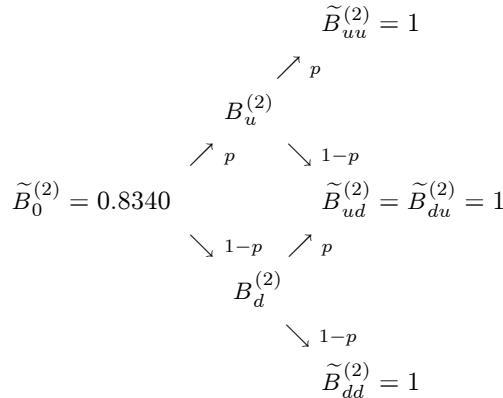


Gráfica 55.18 Árbol binomial de dos periodos.

Observe ahora que, en este caso,

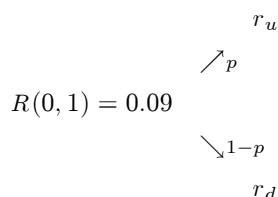
$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_0^{(2)} &= \frac{1}{(1 + R(0,2))^2} \\
 &= \frac{1}{(1 + 0.095)^2} \\
 &= 0.8340.
 \end{aligned} \tag{55.82}$$

En la Gráfica 55.19 se muestra el árbol binomial de dos periodos del precio de un bono cupón cero.



Gráfica 55.19 Árbol binomial de dos periodos.

El árbol binomial que se desea calcular para la tasa corta, con base en los resultados anteriores, se muestra en la Gráfica 55.20.



Gráfica 55.20 Árbol binomial de un periodo para la tasa corta.

Si $R(0, 1) = 0.09$ y el precio, hoy, del bono es $\tilde{B}_0^{(2)} = 0.8340$, entonces (55.24) implica

$$0.8340 = \frac{B_u^{(2)} p + B_d^{(2)} (1 - p)}{1 + 0.09}. \quad (55.83)$$

Asimismo, por (55.30)

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_u}{r_d} \right) = 0.22 = \sigma(0, 2). \quad (55.84)$$

Si se despeja r_u de la ecuación (55.84), se tiene que

$$r_u = r_d e^{0.22(2)}. \quad (55.85)$$

Por otro lado,

$$B_u^{(2)} = \frac{1}{1 + r_u}. \quad (55.86)$$

Análogamente para B_d ,

$$B_d^{(2)} = \frac{1}{1 + r_d}. \quad (55.87)$$

Se considera $p = \frac{1}{2}$ por simplicidad, pero podría tomarse cualquier otro valor. Así, la sustitución de (55.86) y (55.87) en (55.83) conduce a

$$0.8340 = \frac{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + r_u} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + r_d} \right) \right]}{1 + 0.09}. \quad (55.88)$$

Si se incorpora la ecuación (55.85) en (55.88), se obtiene que

$$0.8340 = \frac{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + r_d e^{0.22(2)}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + r_d} \right) \right]}{1 + 0.09}. \quad (55.89)$$

Esta ecuación puede reescribirse como:

$$r_d^2 + r_d \left(\frac{\gamma_1 e^{0.22(2)} - e^{0.22(2)} + \gamma_1 - 1}{\gamma_1 e^{0.22(2)}} \right) + \frac{\gamma_1 - 2}{\gamma_1 e^{0.22(2)}} = 0, \quad (55.90)$$

donde $\gamma_1 = (1 + 0.09)0.8340/0.50$. Equivalentemente,

$$r_d^2 + 0.73978564 r_d - 0.06442773 = 0.$$

La solución positiva de esta ecuación de segundo grado es $\tilde{r}_d = 0.0787$. Si se sustituye este valor en (55.85), se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{r}_u &= \tilde{r}_d e^{0.22(2)} \\ &= 0.0787 e^{0.22(2)} \\ &= 0.1222. \end{aligned}$$

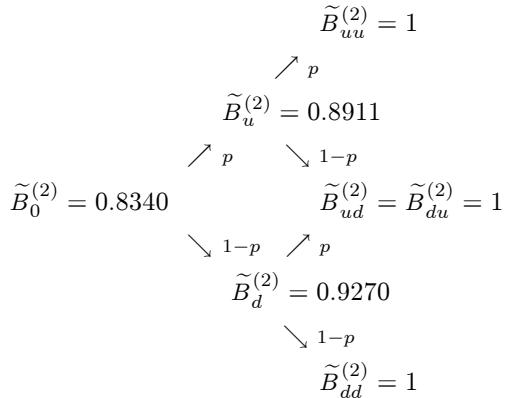
Por último, los valores \tilde{r}_u y \tilde{r}_d se sustituyen en (55.86) y (55.87), respectivamente, de tal manera que

$$\begin{aligned} \tilde{B}_d^{(2)} &= \frac{1}{1 + r_d} \\ &= \frac{1}{1 + 0.0787} \\ &= 0.9270 \end{aligned}$$

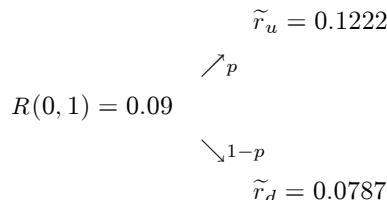
y

$$\begin{aligned}\tilde{B}_u^{(2)} &= \frac{1}{1+r_u} \\ &= \frac{1}{1+0.1222} \\ &= 0.8911.\end{aligned}$$

Los árboles binomiales, completamente determinados, para el precio de un bono cupón cero, con vencimiento en $T = 2$, y la tasa corta se muestran, respectivamente, en las Gráficas 55.21 y 55.22.



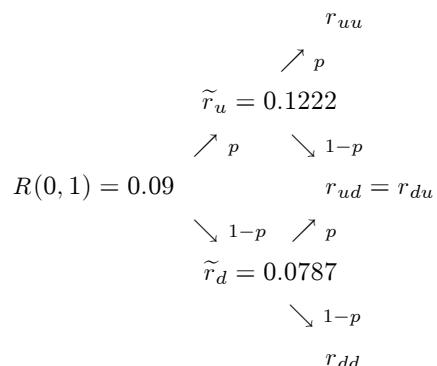
Gráfica 55.21 Árbol binomial de dos períodos del precio de un bono cupón cero.



Gráfica 55.22 Árbol binomial de dos períodos de la tasa corta.

55.4.3 Paso 3

En la Gráfica 55.23 se muestra el árbol binomial que se desea calcular para las tasas cortas en un árbol de dos períodos.



Gráfica 55.23 Árbol binomial en dos períodos de la tasa corta.

En virtud de (55.39), se tiene que

$$\sigma(0, 3) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_{uu}}{r_{ud}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_{ud}}{r_{dd}} \right). \quad (55.91)$$

Por lo tanto,

$$r_{dd} = \frac{r_{ud}^2}{r_{uu}}. \quad (55.92)$$

Considere ahora

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0^{(3)} &= \frac{1}{(1 + R(0, 3))^3} \\ &= \frac{1}{(1 + 0.10)^3} \\ &= 0.7513. \end{aligned} \quad (55.93)$$

Observe que

$$B_{uu}^{(3)} = \frac{1}{1 + r_{uu}}, \quad B_{ud}^{(3)} = \frac{1}{1 + r_{ud}} \quad \text{y} \quad B_{dd}^{(3)} = \frac{1}{1 + r_{dd}}. \quad (55.94)$$

Asimismo, note que

$$B_u^{(3)} = \frac{\frac{1}{2}B_{uu}^{(3)} + \frac{1}{2}B_{ud}^{(3)}}{1 + 0.1222} \quad (55.95)$$

y

$$B_d^{(3)} = \frac{\frac{1}{2}B_{dd}^{(3)} + \frac{1}{2}B_{ud}^{(3)}}{1 + 0.0787}. \quad (55.96)$$

Además, de (55.93) se sigue que

$$0.7513 = \frac{\frac{1}{2}B_u^{(3)} + \frac{1}{2}B_d^{(3)}}{1 + 0.09}, \quad (55.97)$$

donde

$$B_u^{(3)} = \frac{1}{(1 + \nu_u)^2} \quad (55.98)$$

y

$$B_d^{(3)} = \frac{1}{(1 + \nu_d)^2}. \quad (55.99)$$

Si se despejan ν_u y ν_d , se obtiene que

$$\nu_u = \sqrt{\frac{1}{B_u^{(3)}} - 1} \quad (55.100)$$

y

$$\nu_d = \sqrt{\frac{1}{B_d^{(3)}} - 1}. \quad (55.101)$$

Por otro lado,

$$\sigma(0, 3) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\nu_u}{\nu_d} \right) = 0.20, \quad (55.102)$$

lo cual implica

$$\nu_u = \nu_d e^{0.40}. \quad (55.103)$$

Si se sustituye (55.101) en (55.103), se sigue que

$$\begin{aligned} \nu_u &= \nu_d e^{0.40} \\ &= \left(\sqrt{\frac{1}{B_d^{(3)}} - 1} \right) e^{0.40}. \end{aligned} \quad (55.104)$$

Se verá a continuación que $B_u^{(3)}$ se puede expresar en función de $B_d^{(3)}$. En efecto, al sustituir (55.104) en la ecuación (55.98), se tiene que

$$\begin{aligned} B_u^{(3)} &= \frac{1}{(1 + \nu_u)^2} \\ &= \frac{1}{\left[1 + \left(\left(B_d^{(3)}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right) e^{0.40}\right]^2}. \end{aligned} \quad (55.105)$$

Por otra parte, si se sustituyen (55.98) y (55.99) en la ecuación (55.97), se tiene

$$\begin{aligned} 0.7513 &= \frac{\frac{1}{2}B_u^{(3)} + \frac{1}{2}B_d^{(3)}}{1 + 0.09} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1 + \nu_u)^{-2} + \frac{1}{2}(1 + \nu_d)^{-2}}{1 + 0.09}. \end{aligned} \quad (55.106)$$

Esta ecuación se puede expresar como

$$\frac{0.7513(1.09)}{0.50} = \frac{1}{(1 + \nu_u)^2} + \frac{1}{(1 + \nu_d)^2}. \quad (55.107)$$

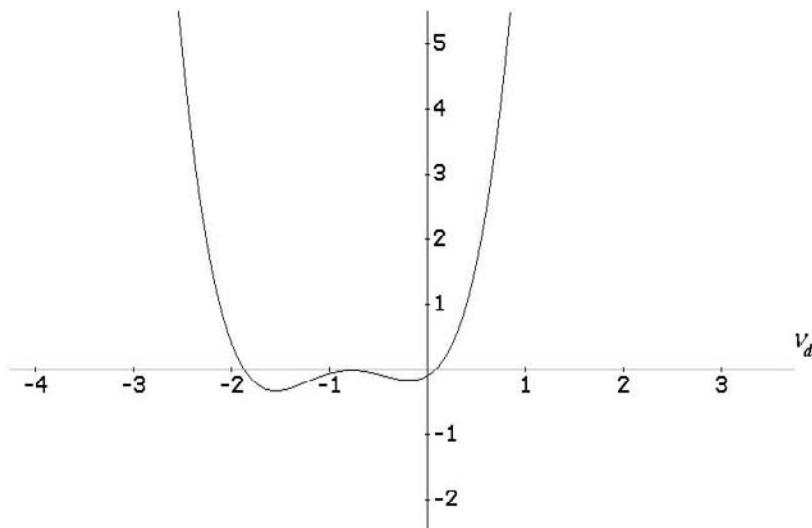
Sea $\gamma_2 = 0.7513(1.09)/0.50 = 1.64$. La sustitución de (55.103), junto con el valor de γ_2 , en (55.107), conduce a

$$1.64 = \frac{1}{(1 + \nu_d e^{0.40})^2} + \frac{1}{(1 + \nu_d)^2}. \quad (55.108)$$

Note que la ecuación (55.108) se puede expresar como un polinomio de cuarto grado igualado a cero, es decir,

$$\nu_d^4 + 3.34\nu_d^3 + 3.25\nu_d^2 + 0.87\nu_d - 0.10 = 0. \quad (55.109)$$

La solución positiva es $\tilde{\nu}_d = 0.085$. La gráfica 55.24 muestra el polinomio (55.109) en ν_d .



Grafica 55.24 Polinomio en ν_d .

El valor $\tilde{\nu}_d$ se sustituye ahora en la ecuación (55.103), así

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_u &= \tilde{\nu}_d e^{0.4} \\ &= 0.085 e^{0.40} \\ &= 0.13.\end{aligned}\tag{55.110}$$

Por otro lado, los valores $\tilde{\nu}_u$ y $\tilde{\nu}_d$ se sustituyen en (55.98) y (55.99), respectivamente, de tal forma que

$$\begin{aligned}\tilde{B}_u^{(3)} &= \frac{1}{(1 + \tilde{\nu}_u)^2} \\ &= \frac{1}{(1 + 0.13)^2} \\ &= 0.7881\end{aligned}\tag{55.111}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{B}_d^{(3)} &= \frac{1}{(1 + \tilde{\nu}_d)^2} \\ &= \frac{1}{(1 + 0.084)^2} \\ &= 0.8498.\end{aligned}\tag{55.112}$$

A continuación se determinan los valores de r_{uu} , r_{ud} y r_{dd} . Para ello, se utilizan las ecuaciones (55.95) y (55.96) expresadas como

$$(1 + 0.1222)\tilde{B}_u^{(3)} = 0.5B_{uu}^{(3)} + 0.5B_{ud}^{(3)}\tag{55.113}$$

y

$$(1 + 0.0787)\tilde{B}_d^{(3)} = 0.5B_{dd}^{(3)} + 0.5B_{ud}^{(3)}.\tag{55.114}$$

Al sustituir (55.94) en las ecuaciones anteriores, se tiene

$$1.122\tilde{B}_u^{(3)} = 0.5\frac{1}{1 + r_{uu}} + 0.5\frac{1}{1 + r_{ud}}$$

y

$$1.0787\tilde{B}_d^{(3)} = 0.5\frac{1}{1 + r_{dd}} + 0.5\frac{1}{1 + r_{ud}}.$$

Equivalentemente,

$$\frac{1}{1 + r_{uu}} + \frac{1}{1 + r_{ud}} = \frac{1.1222}{0.50}(0.7881)$$

y

$$\frac{1}{1 + r_{dd}} + \frac{1}{1 + r_{ud}} = \frac{1.0787}{0.50}(0.8498).\tag{55.115}$$

Las dos ecuaciones anteriores se pueden reescribir en una sola considerando que $r_{uu} = r_{ude}e^{0.40}$, $r_{dd} = r_{ud}e^{-0.40}$ y

$$r_{uu}r_{dd} = r_{ud}^2.\tag{55.116}$$

Por lo tanto,

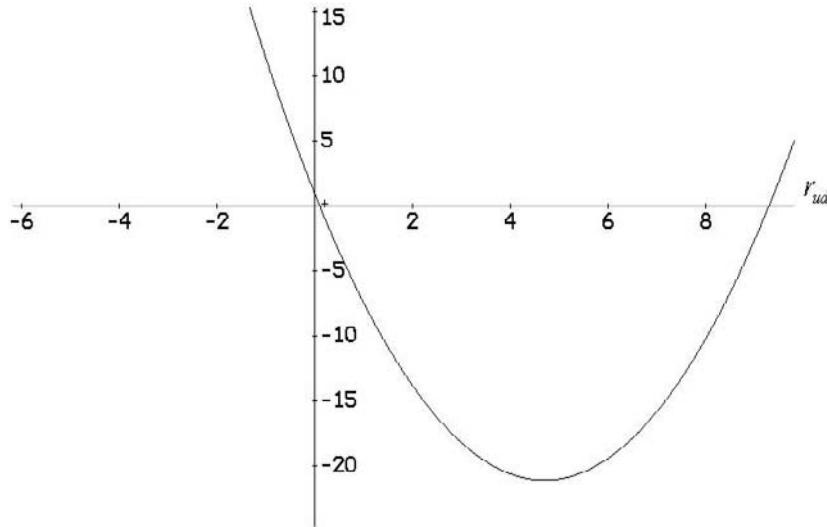
$$r_{ud}^2 - 10.55r_{ud} + 1 = 0.\tag{55.117}$$

Al resolver esta ecuación se obtienen dos soluciones $r_{ud} = 10.4496$ y $r_{ud} = 0.0957$, véase, al respecto, la Gráfica 55.25. Se considera sólo al valor menor que uno, $\tilde{r}_{ud} = 0.0957$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{uu} &= \tilde{r}_{ude}e^{0.4} \\ &= 0.0957e^{0.4} \\ &= 0.1428\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}_{dd} &= \tilde{r}_{ud} e^{-0.4} \\
 &= 0.0957 e^{-0.4} \\
 &= 0.06414.
 \end{aligned} \tag{55.118}$$

Gráfica 55.25 Polinomio en r_{ud} .

Por último, los valores obtenidos de la tasa corta, \tilde{r}_{uu} , \tilde{r}_{ud} y \tilde{r}_{dd} , se sustituyen en las ecuaciones que aparecen en (55.94), esto es,

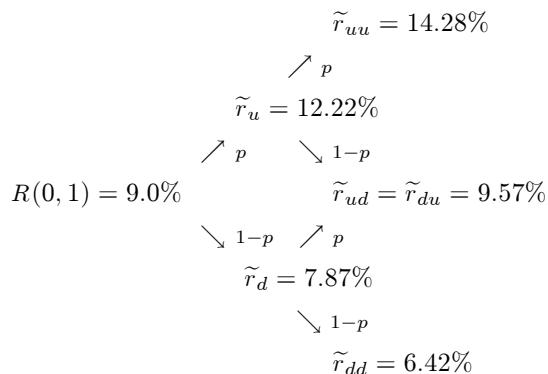
$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_{uu}^{(3)} &= \frac{1}{1 + \tilde{r}_{uu}} \\
 &= \frac{1}{1 + 0.1428} \\
 &= 0.8751,
 \end{aligned} \tag{55.119}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_{ud}^{(3)} &= \frac{1}{1 + \tilde{r}_{ud}} \\
 &= \frac{1}{1 + 0.0957} \\
 &= 0.9127
 \end{aligned} \tag{55.120}$$

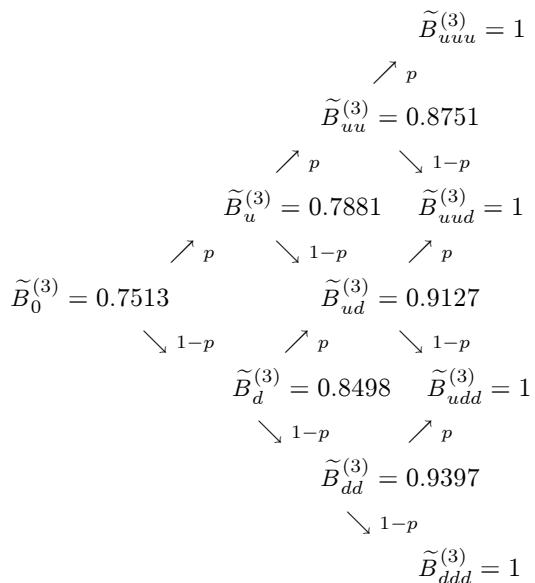
y

$$\begin{aligned}
 B_{dd}^{(3)} &= \frac{1}{1 + \tilde{r}_{dd}} \\
 &= \frac{1}{1 + 0.0642} \\
 &= 0.9327.
 \end{aligned} \tag{55.121}$$

El árbol binomial de dos períodos para la tasa corta y el árbol binomial de tres períodos para el precio del bono cupón cero que vence en $T = 3$ se muestran, respectivamente, en las Gráficas 55.26 y 55.27.



Gráfica 55.26 Árbol binomial de dos periodos para la tasa corta.



Gráfica 55.27 Árbol binomial de tres periodos para el precio de un bono cupón cero.

55.5 Bibliografía sugerida

- Black, F., E. Derman, and W. Toy (1990). "A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, Vol. 46, No. 1, pp. 33-39.
- Ho, T. and S. Lee (1986). "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims". *Journal of Finance*, Vol. 41, No. 5, pp. 1011-1029.
- Hull, J. and A. White (1990). "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities". *The Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, pp. 573-592.

55.6 Ejercicios

55.1 Desarrolle el paso 4 del ejemplo 55.4.

55.2 Aplique el algoritmo de Black, Derman y Toy para calcular la tasa corta y el precio de un bono cupón cero con los siguientes datos:

Estructura de plazos		
No. de años para el vencimiento	Curva de rendimiento $R(0, T)$	Volatilidad $\sigma(0, T)$
1	0.10	0.20
2	0.11	0.19
3	0.12	0.18
4	0.125	0.17

55.3 A partir de las tasas y volatilidades de un bono cupón cero que aparecen en el siguiente cuadro, obtenga el árbol binomial de tasas de interés de Black, Derman y Toy. Asimismo, construya los árboles binomiales para el precio del bono cupón cero en los distintos vencimientos de manera iterativa.

Estructura de plazos		
No. de años para el vencimiento	Tasa %	Volatilidad %
1	6.0	20
2	6.5	22

Solución:

Paso 1

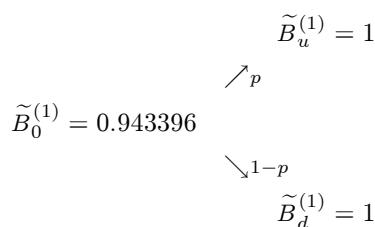
Suponga que $\tilde{B}_d^{(1)} = \tilde{B}_u^{(1)} = 1$ con la misma probabilidad de ocurrencia. En este caso, el valor esperado de estos precios traído a valor presente es

$$B_0^{(1)} = \frac{\tilde{B}_u^{(1)} p + \tilde{B}_d^{(1)}(1-p)}{1 + R(0, 1)},$$

donde $R(0, 1) = 0.06$ es la tasa del bono que madura en un año. De esta manera,

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0^{(1)} &= \frac{1}{1 + 0.06} \\ &= 0.943396. \end{aligned}$$

El árbol binomial para un bono cupón cero se muestra en la siguiente gráfica.



Paso 2

A partir de los datos del cuadro de tasas y volatilidades, se calcula ahora el precio de un bono cupón cero a dos años, $B_0^{(2)} \equiv B(0, 2)$ con $R(0, 2) = 0.065$. Esto es,

$$\begin{aligned}\tilde{B}_0^{(2)} &= \frac{1}{(1 + 0.065)^2} \\ &= 0.881659.\end{aligned}$$

A continuación se calcula el precio del bono dentro de un año con tiempo de madurez de dos años, para ello se necesita determinar la tasa corta dentro de un año. Observe que se conoce $R(0, 1)$. Así,

$$\tilde{B}_0^{(2)} = \frac{B_u^{(2)} p + B_d^{(2)} (1 - p)}{1 + R(0, 1)},$$

donde $R(0, 1)$ es la tasa del bono que madura al año. Si $R(0, 1) = 6\%$ y el precio “spot” del bono es $\tilde{B}_0^{(2)} = 0.881659$, entonces

$$0.881659 = \tilde{B}_0^{(2)} = \frac{B_u p + B_d (1 - p)}{1 + 0.06}. \quad (55.122)$$

Ahora bien, si la tasa corta se distribuye log-normal, entonces

$$r_u = e^{\sigma \sqrt{\frac{T}{n}}} \quad \text{y} \quad r_d = e^{-\sigma \sqrt{\frac{T}{n}}}.$$

Si se aplica el logaritmo al cociente r_u/r_d y se despeja σ de la expresión resultante, se tiene

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{T/n}} \ln \left(\frac{r_u}{r_d} \right),$$

donde $T/n = 1$. Por lo tanto,

$$r_u = r_d e^{2\sigma}.$$

En virtud de este resultado y con el valor de la volatilidad que se especifica en el cuadro de datos, se sigue que

$$0.22 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_u}{r_d} \right).$$

Al despejar r_u de la ecuación anterior, se sigue que

$$r_u = r_d e^{0.44}. \quad (55.123)$$

Por otro lado, observe que el precio del bono cupón cero $B_u^{(2)}$ dentro de un año traído a valor presente a una tasa r_u está dado por

$$B_u^{(2)} = \frac{1}{1 + r_u}.$$

Análogamente para B_d ,

$$B_d^{(2)} = \frac{1}{1 + r_d}.$$

Ahora, se sustituyen los valores anteriores en la ecuación (55.122), con $p = \frac{1}{2}$, de tal manera que

$$0.881659 = \frac{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+r_u} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+r_d} \right) \right]}{1 + 0.06}.$$

Si se sustituye (55.123) en la ecuación anterior, se cumple que

$$r_d^2 + 0.764458r_d - 0.0451 = 0.$$

Al resolver esta ecuación de segundo grado, se sigue que

$$r_d = 5.5\%.$$

Posteriormente, se sustituye este valor en la ecuación (55.123) y se obtiene

$$r_u = 8.54\%.$$

Con los valores de r_u y r_d calculados, se determinan

$$\begin{aligned}\tilde{B}_d^{(2)} &= \frac{1}{1 + 0.055} \\ &= 0.947837\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{B}_u^{(2)} &= \frac{1}{1 + 0.0854} \\ &= 0.921275.\end{aligned}$$

El árbol binomial para precios y tasas se muestra a continuación:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{B}_{uu}^{(2)} = 1 & & \\ & \nearrow p & & \searrow p & \\ & \tilde{B}_u^{(2)} = 0.9213 & & & \\ & \nearrow p & & \searrow 1-p & \\ \tilde{B}_0^{(2)} = 0.8817 & & & \tilde{B}_{ud}^{(2)} = \tilde{B}_{du}^{(2)} = 1 & \\ & \searrow 1-p & \nearrow p & & \\ & & \tilde{B}_d^{(2)} = 0.9478 & & \\ & & \searrow 1-p & & \\ & & \tilde{B}_{dd}^{(2)} = 1 & & \end{array}$$

Finalmente, el árbol binomial para la tasa corta es:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{r}_u = 8.54\% & & \\ & \nearrow p & & & \\ R(0, 1) = 6\% & & & & \\ & \searrow 1-p & & & \\ & & \tilde{r}_d = 5.50\% & & \end{array}$$

CAPÍTULO 56

MODELO DE TASA FORWARD DE HEATH, JARROW Y MORTON

Conceptos básicos de este capítulo:

- Modelos exógenos de tasa forward
- Dinámica estocástica del precio de un bono cupón cero
- Método Monte Carlo
- Aproximación discreta del modelo HJM
- Estimación de parámetros

56.1 Introducción

En este capítulo se presenta la metodología desarrollada por David Heath, Robert Jarrow y Andrew Morton (HJM) en su artículo “Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation”, publicado en 1992 en “Econometrica”, en el cual se generan curvas de rendimiento con base en la tasa forward actual (a todos los vencimientos) y una curva de rendimiento inicial. Para estimar los precios de un bono cupón cero a diferentes vencimientos, el modelo de Heath, Jarrow y Morton comienza con una especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa forward y, posteriormente, determina endógenamente, en un mundo neutral al riesgo, la dinámica estocástica de un bono cupón cero.

La metodología HJM es similar a la de Ho y Lee (1986) y Hull y White (1990) en varios sentidos. En primer lugar, se requiere una curva de rendimiento inicial, la cual es proporcionada por el mercado en una fecha anterior. Asimismo, la tendencia de la tasa forward instantánea se calibra de tal forma que el premio al riesgo estandarizado por volatilidad es cero. Las diferencias con Ho y Lee (1986) y Hull y White (1990) son, básicamente: 1) el proceso de valuación en HJM se inicia con una especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa forward, 2) la hipótesis de expectativas en HJM para valuar un bono es que el nominal se descuenta con el promedio de la tasa forward durante la vigencia del instrumento, razón por lo que el precio del bono es una variable aleatoria y 3) la calibración en HJM es un procedimiento implícito en la metodología y no requiere argumentos de ajuste como en el caso de Ho y Lee (1986) y Hull y White (1990). En virtud de que, bajo la metodología HJM, el precio de un bono es una variable aleatoria, el método Monte Carlo es una herramienta muy útil en la práctica. Una ventaja de la metodología HJM que debe destacarse es que puede ser extendida a varios factores de riesgo; por ejemplo, factores de corto y largo plazo. No obstante, una limitación de la metodología HJM es que se pueden producir tasas forward negativas con probabilidad positiva.

Vale la pena mencionar que cuando se parte de una especificación exógena para la dinámica estocástica de la tasa corta, la hipótesis de expectativas para valuar un bono es que, primero, el nominal se descuenta con el promedio de la tasa corta durante la vigencia del título y, posteriormente, se toma el valor esperado condicional en la información disponible en la fecha de colocación. A partir del Teorema de Feynman-Kač, como se vio en su momento, se tiene que ésta es la única hipótesis de expectativas que es congruente con el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales (EEDP), visto en varios de los capítulos anteriores. De esta manera, la metodología HJM no es compatible con EEDP.

56.2 Especificación exógena de la tasa forward instantánea

Considere un movimiento Browniano estándar $(W_t)_{t \in [0, T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. En la metodología HJM se supone que la dinámica de la tasa forward, $f(t, T)$, se especifica exógenamente por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \beta(t, T)dW_t, \quad (56.1)$$

en donde las funciones α y β satisfacen, casi seguramente con respecto de \mathbb{P} , las siguientes propiedades:

$$\int_0^T \left| \frac{\partial^k}{\partial T^k} \alpha(s, T) \right| ds < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^T \left| \frac{\partial^k}{\partial T^k} \beta(s, T) \right|^2 ds < \infty,$$

para $k = 0, 1$. Como siempre, $\partial^0 \alpha(s, T)/\partial T^0 \equiv \alpha(s, T)$ y $\partial^0 \beta(s, T)/\partial T^0 \equiv \beta(s, T)$. Asimismo, se supone que el precio de un bono cupón cero está dado por la siguiente hipótesis de expectativas

$$B(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(t, s) ds \right\}, \quad (56.2)$$

en donde la integral en (56.2) permanece finita. Una de las tareas del presente capítulo consiste en determinar endógenamente el proceso asociado al precio, $B(t, T)$, que haga consistentes los supuestos (56.1) y (56.2). La ecuación (56.1) puede considerar más de un factor de incertidumbre, por el momento el análisis subsecuente tomará en cuenta un solo factor.

56.3 Dinámica estocástica de la tasa corta

En esta sección se determina la ecuación diferencial estocástica que conduce a la tasa corta. Observe primero que a partir de (56.1) se obtiene

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \beta(s, T) dW_s. \quad (56.3)$$

Por lo tanto, la tasa instantánea satisface

$$r_t = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, t) ds + \int_0^t \beta(s, t) dW_s. \quad (56.4)$$

De esta manera,

$$\mathbb{E}[r_t | \mathcal{F}_t] = f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, t) ds$$

y

$$\text{Var}[r_t | \mathcal{F}_t] = \int_0^t \beta^2(s, t) ds.$$

Asimismo, observe que la diferencial estocástica de la tasa corta está dada por:

$$dr_t = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \alpha(s, t) ds \right) dt + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \beta(s, t) dW_s \right) dt. \quad (56.5)$$

Las derivadas parciales de las integrales del lado derecho de la ecuación anterior se calculan mediante la regla de Leibnitz, de tal forma que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \alpha(s, t) ds \right) dt = \left(\alpha(t, t) + \int_0^t \frac{\partial \alpha(s, t)}{\partial t} ds \right) dt$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \beta(s, t) dW_s \right) dt = \beta(t, t) dW_t + \left(\int_0^t \frac{\partial \beta(s, t)}{\partial t} dW_s \right) dt.$$

En consecuencia, la ecuación (56.5) puede reexpresarse como:

$$dr_t = \left(\frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \alpha(t, t) + \int_0^t \frac{\partial \alpha(s, t)}{\partial t} ds + \int_0^t \frac{\partial \beta(s, t)}{\partial t} dW_s \right) dt + \beta(t, t) dW_t. \quad (56.6)$$

Esta ecuación determina el comportamiento de la tasa corta de interés. Observe que la tendencia de r_t es la pendiente de la tasa forward inicial. Evidentemente, debido a la presencia de las integrales en la tendencia de (56.6), la evolución de la tasa corta no presenta la propiedad Markoviana.

Una vez que se ha determinado la dinámica que gobierna el comportamiento de r_t , dada en la ecuación (56.6), se describirá, en las secciones subsecuentes, la dinámica del precio del bono cupón cero asociado a r_t .

56.4 Dinámica estocástica del precio del bono

Dada la especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa forward instantánea, el objetivo de esta sección consiste en determinar endógenamente el precio del bono, $B(t, T)$, que sea consistente con los supuestos (56.1) y (56.2). Sea

$$I_t = - \int_t^T f(t, s) ds. \quad (56.7)$$

En este caso, la regla de Leibnitz produce el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} dI_t &= -d \left(\int_t^T f(t, s) ds \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_t^T f(t, s) ds \right) dt \\ &= - \int_t^T \left(\frac{\partial f(t, s)}{\partial t} dt \right) ds + f(t, t) dt \\ &= - \int_t^T df(t, s) ds + f(t, t) dt. \end{aligned} \quad (56.8)$$

La sustitución de (56.1) en (56.8) y el hecho de que $f(t, t) = r_t$ conducen a

$$\begin{aligned} dI_t &= - \int_t^T \alpha(t, s) ds dt - \int_t^T \beta(t, s) ds dW_t + r_t dt \\ &= \left(r_t - \int_t^T \alpha(t, s) ds \right) dt - \left(\int_t^T \beta(t, s) ds \right) dW_t. \end{aligned} \quad (56.9)$$

Si se denotan la tendencia y volatilidad de dI_t , respectivamente, mediante

$$U(t, T, r_t) = r_t - \int_t^T \alpha(t, s) ds$$

y

$$V(t, T) = - \int_t^T \beta(t, s) ds,$$

se sigue que

$$dI_t = U(t, T, r_t) dt + V(t, T) dW_t. \quad (56.10)$$

Note ahora que

$$B(t, T) = G(I_t) \quad \text{con} \quad G(I_t) = \exp\{I_t\}.$$

En consecuencia, el lema de Itô aplicado a G con respecto al proceso (56.10) conduce a

$$\begin{aligned} dB &= \left(\frac{\partial G}{\partial I_t} U + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial I_t^2} V^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial I_t} V dW_t \\ &= (GU + \frac{1}{2}GV^2) dt + GV dW_t \\ &= B(U + \frac{1}{2}V^2) dt + BV dW_t. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= \left[r_t - \int_t^T \alpha(t, s) ds + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \beta(t, s) ds \right)^2 \right] B(t, T) dt \\ &\quad - \left(\int_t^T \beta(t, s) ds \right) B(t, T) dW_t. \end{aligned} \tag{56.11}$$

El marco teórico de HJM, representado por las ecuaciones (56.1), (56.5) y (56.11), describe por completo los comportamientos de la tasa forward instantánea, de la tasa corta y del precio del bono. Es necesario ahora moverse al mundo neutral al riesgo para llevar a cabo el proceso de valuación.

56.5 Valuación neutral al riesgo en el modelo HJM

Considere un portafolio con dos bonos con vencimientos diferentes, T_1 y T_2 . El valor del portafolio, en el tiempo t , con w_1 unidades del bono con vencimiento en T_1 y w_2 unidades del bono con vencimiento en T_2 está dado por:

$$\Pi_t = w_1 B(t, T_1) + w_2 B(t, T_2). \tag{56.12}$$

El cambio en el valor del portafolio por fluctuaciones propias del mercado satisface

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= w_1 dB(t, T_1) + w_2 dB(t, T_2) \\ &= w_1 [(U(t, T_1, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T_1)) B(t, T_1) dt + V(t, T_1) B(t, T_1) dW_t] \\ &\quad + w_2 [(U(t, T_2, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T_2)) B(t, T_2) dt + V(t, T_2) B(t, T_2) dW_t] \\ &= [w_1 (U(t, T_1, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T_1)) B(t, T_1) \\ &\quad + w_2 (U(t, T_2, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T_2)) B(t, T_2)] dt \\ &\quad [w_1 V(t, T_1) B(t, T_1) + w_2 V(t, T_2) B(t, T_2)] dW_t. \end{aligned} \tag{56.13}$$

Si se escogen $w_1 = 1$ y

$$w_2 = -\frac{V(t, T_1) B(t, T_1)}{V(t, T_2) B(t, T_2)}, \tag{56.14}$$

entonces el coeficiente del término en dW_t se anula y, consecuentemente, el portafolio se encuentra cubierto contra el riesgo de mercado. Por lo tanto,

$$d\Pi_t = \left(U(t, T_1, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T_1) - \frac{U(t, T_2, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T_2)}{V(t, T_2)} V(t, T_1) \right) B(t, T_1) dt. \tag{56.15}$$

Si, por otro lado, existe un mercado de crédito en donde los agentes pueden prestar y pedir prestado a la tasa “spot” r_t , también llamada tasa corta o tasa instantánea (la tasa de interés de plazo más pequeño disponible en el mercado), se sigue que

$$d\Pi_t = \Pi_t r_t dt = \left(1 - \frac{V(t, T_1)}{V(t, T_2)} \right) r_t B(t, T_1) dt. \tag{56.16}$$

Después de igualar (56.15) con (56.16), se obtiene

$$\frac{U(t, T_1, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T_1) - r_t}{V(t, T_1)} = \frac{U(t, T_2, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T_2) - r_t}{V(t, T_2)}. \quad (56.17)$$

Los cocientes anteriores son independientes de la fecha de vencimiento. Es decir, el lado izquierdo de la igualdad en (56.17) sólo depende de T_1 y el derecho sólo depende de T_2 . Por lo tanto, se puede escribir

$$\lambda(r_t, t) = \frac{U(t, T, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T) - r_t}{V(t, T)}. \quad (56.18)$$

La función $\lambda(r_t, t)$ es el premio al riesgo asociado al factor de incertidumbre dW_t . En un mundo neutral al riesgo $\lambda(r_t, t) \equiv 0$. En consecuencia, el supuesto de neutralidad al riesgo en el modelo HJM conduce a:

$$U(t, T, r_t) + \frac{1}{2}V^2(t, T) = r_t.$$

Equivalentemente,

$$r_t - \int_t^T \alpha(t, s)ds + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \beta(t, s)ds \right)^2 = r_t,$$

lo cual implica

$$\int_t^T \alpha(t, s)ds = \frac{1}{2} \left(\int_t^T \beta(t, s)ds \right)^2. \quad (56.19)$$

Después de derivar la expresión anterior con respecto de T , se obtiene que

$$\alpha(t, T) = \beta(t, T) \int_t^T \beta(t, s)ds. \quad (56.20)$$

Por lo tanto, la ecuación del precio del bono definido en (56.11), bajo el supuesto de neutralidad al riesgo, se transforma en

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= r_t B(t, T)dt - \left(\int_t^T \beta(t, s)ds \right) B(t, T)dW_t \\ &= r_t B(t, T)dt - \frac{\alpha(t, T)}{\beta(t, T)} B(t, T)dW_t. \end{aligned} \quad (56.21)$$

La componente determinista de la ecuación anterior implica crecimiento exponencial en el precio del bono con tendencia igual a la tasa corta. De esta manera, la ecuación diferencial estocástica que gobierna la dinámica de la tasa forward instantánea, bajo el supuesto de neutralidad al riesgo, toma ahora la forma:

$$df(t, T) = \left(\beta(t, T) \int_t^T \beta(t, s)ds \right) dt + \beta(t, T)dW_t. \quad (56.22)$$

En consecuencia, la tendencia de la tasa forward se calibra, implícitamente, en función de su volatilidad $\beta(t, T)$.

56.6 Representaciones alternativas de las tasas forward y corta

Es frecuente encontrar en la literatura otras representaciones de las tasas forward y corta en la metodología HJM. Si se denota

$$V(t, T) = - \int_t^T \beta(t, s) ds,$$

se tiene, en virtud de (56.1) y (56.4), que

$$df(t, T) = V_T(t, T)V(t, T)dt - V_T(t, T)dW_t \quad (56.23)$$

y

$$r_t = f(0, t) + \int_0^t V_t(s, t)V(s, t)ds - \int_0^t V_t(s, t)dW_s. \quad (56.24)$$

La aplicación de la regla de Leibnitz y el hecho de que $V(t, t) = 0$, conducen ahora a:

$$\begin{aligned} dr_t &= f_t(0, t)dt + \left(\int_0^t [V_{tt}(s, t)V(s, t) + V_t(s, t)^2]ds \right) dt - \left(\int_0^t V_{tt}(s, t)dW_s \right) dt \\ &\quad - V_t(t, t)dW_t. \end{aligned}$$

Por último, observe que el precio del bono satisface

$$dB(t, T) = r_t B(t, T)dt + V(t, T)B(t, T)dW_t. \quad (56.25)$$

56.7 Un primer ejemplo de la metodología HJM

En esta sección se ilustra la metodología HJM a través de un ejemplo sencillo. Suponga que $\beta(t, T) = \sigma$. Observe, primero, que con base en (56.20), se sigue que

$$\alpha(t, T) = \beta(t, T) \int_t^T \beta(t, s)ds = \sigma^2(T - t).$$

En virtud de (56.3), se cumple que

$$\begin{aligned} f(t, T) &= f(0, T) + \sigma^2 \int_0^t (T - s)ds + \sigma W_t \\ &= f(0, T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{1}{2}t \right) + \sigma W_t. \end{aligned}$$

Así,

$$r_t = f(0, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma W_t.$$

De la misma manera, la ecuación (56.21) conduce a

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= r_t B(t, T)dt - \frac{\alpha(t, T)}{\beta(t, T)} B(t, T)dW_t \\ &= r_t B(t, T)dt - \sigma(T - t)B(t, T)dW_t. \end{aligned}$$

Por otro lado, (56.2) implica que

$$\begin{aligned}
 B(t, T) &= \exp \left\{ - \int_t^T f(t, s) ds \right\} \\
 &= \exp \left\{ - \int_t^T [f(0, s) + \sigma^2 t (s - \frac{1}{2}t) + \sigma W_t] ds \right\} \\
 &= \exp \left\{ - \int_t^T f(0, s) ds - \int_t^T [\sigma^2 t (s - \frac{1}{2}t) + \sigma W_t] ds \right\} \\
 &= \exp \left\{ \int_0^t f(0, s) ds - \int_0^T f(0, s) ds - \int_t^T [\sigma^2 t (s - \frac{1}{2}t) + \sigma W_t] ds \right\} \\
 &= \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left\{ -\sigma^2 t \int_t^T (s - \frac{1}{2}t) ds - \sigma(T-t)W_t \right\} \\
 &= \frac{B(0, T)}{B(0, t)} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t T (T-t) - \sigma(T-t)W_t}.
 \end{aligned}$$

De lo anterior, se observa la dependencia del precio $B(t, T)$ con una curva de rendimiento disponible en el tiempo $t = 0$, $R(0, T) = -\ln B(0, T)/T$. Es también importante notar que $B(t, T)$ es variable aleatoria debido a la presencia de W_t en el término exponencial.

56.8 Un segundo ejemplo de la metodología HJM

La importancia de la metodología HJM se entiende mejor a través de ejemplos ilustrativos. Con este propósito en mente, se desarrolla un ejemplo más. Suponga ahora que

$$\beta(t, T) = \sigma e^{-\lambda(T-t)}.$$

En virtud de la ecuación (56.20), se sigue que

$$\begin{aligned}
 \alpha(t, T) &= \beta(t, T) \int_t^T \beta(t, s) ds \\
 &= \sigma^2 e^{-\lambda T + 2\lambda t} \int_t^T e^{-\lambda s} ds \\
 &= \frac{\sigma^2}{\lambda} e^{-\lambda T + 2\lambda t} (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda T}) \\
 &= \frac{\sigma^2}{\lambda} (e^{-\lambda(T-t)} - e^{-2\lambda(T-t)}).
 \end{aligned}$$

Si ahora se utiliza (56.3), se obtiene

$$\begin{aligned}
 f(t, T) &= f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \beta(s, T) dW_s \\
 &= f(0, T) + \frac{\sigma^2}{\lambda} \int_0^t (e^{-\lambda(T-s)} - e^{-2\lambda(T-s)}) ds + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(T-s)} dW_s \\
 &= f(0, T) + \frac{\sigma^2}{\lambda} \left[e^{-\lambda T} \left(\frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} \right) - e^{-2\lambda T} \left(\frac{e^{2\lambda t} - 1}{2\lambda} \right) \right] + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(T-s)} dW_s \\
 &= f(0, T) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} [2e^{-\lambda T} (e^{\lambda t} - 1) - e^{-2\lambda T} (e^{2\lambda t} - 1)] + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(T-s)} dW_s.
 \end{aligned}$$

Así,

$$r_t = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (2(1 - e^{-\lambda t}) - (1 - e^{-2\lambda t})) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW_s.$$

Asimismo, la ecuación (56.21) conduce a

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= r_t B(t, T)dt - \frac{\alpha(t, T)}{\beta(t, T)} B(t, T)dW_t \\ &= r_t B(t, T)dt - \frac{\sigma}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda(T-t)} \right) B(t, T)dW_t. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \exp \left\{ - \int_t^T f(t, s)ds \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_t^T \left[f(0, s) + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} [2e^{-\lambda s} (e^{\lambda t} - 1) - e^{-2\lambda s} (e^{2\lambda t} - 1)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(s-u)} dW_u \right] ds \right\} \\ &= \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left\{ - \frac{\sigma^2}{\lambda^2} (e^{\lambda t} - 1) \int_t^T e^{-\lambda s} ds + \frac{\sigma^2}{2\lambda^2} (e^{2\lambda t} - 1) \int_t^T e^{-2\lambda s} ds \right. \\ &\quad \left. - \sigma \int_t^T \left(\int_0^t e^{-\lambda(s-u)} dW_u \right) ds \right\} \\ &= \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left\{ - \frac{\sigma^2}{\lambda^3} (e^{\lambda t} - 1) (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda T}) + \frac{\sigma^2}{4\lambda^3} (e^{2\lambda t} - 1) (e^{-2\lambda t} - e^{-2\lambda T}) \right. \\ &\quad \left. - \sigma \int_t^T e^{-\lambda s} \left(\int_0^t e^{\lambda u} dW_u \right) ds \right\}. \end{aligned}$$

56.9 Dinámica de la tasa forward con dos factores de riesgo

Si se considera un sólo factor en el modelo HJM, los bonos de diferentes plazos están perfectamente correlacionados. Esta situación se puede corregir si se incluyen otros factores de riesgo. Suponga que

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \beta_1(t, T)dW_{1t} + \beta_2(t, T)dW_{2t}.$$

donde $\beta_1(t, T) = \sigma_1$ y $\beta_2(t, T) = \sigma_2 e^{-\lambda(T-t)}$. Asimismo, suponga que

$$\text{Cov}(dW_{1t}, dW_{2t}) = 0.$$

El término dW_{1t} es un factor de riesgo de largo plazo, ya que traslada de manera uniforme la tasa forward a todos los vencimientos. El término dW_{2t} afecta la tasa forward en vencimientos pequeños más que el factor de largo plazo. Los resultados de las dos secciones anteriores conducen a

$$\begin{aligned} f(t, T) &= f(0, T) + \sigma_1^2 t \left(T - \frac{1}{2} t \right) + \sigma_1 W_{1t} + \\ &\quad \frac{\sigma_2^2}{2\lambda^2} [2e^{-\lambda T} (e^{\lambda t} - 1) - e^{-2\lambda T} (e^{2\lambda t} - 1)] \\ &\quad + \sigma_2 \int_0^t e^{-\lambda(T-s)} dW_{2s}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} r_t &= f(0, t) + \frac{1}{2} \sigma_1^2 t^2 + \sigma_1 W_{1t} + \frac{\sigma_2^2}{2\lambda^2} [2(1 - e^{-\lambda t}) - (1 - e^{-2\lambda t})] \\ &\quad + \sigma_2 \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW_{2s}. \end{aligned}$$

56.10 Versión discreta del modelo HJM

A continuación se considera una versión discreta del modelo de Heath, Jarrow y Morton (1990). Se examina el proceso de tasas forward en períodos de longitud Δ , en lugar del proceso de tasas forward instantáneas. Se definen $\alpha_{i,j}$ y $\beta_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, k$, como la tendencia y la desviación estándar, respectivamente, del proceso discretizado de la tasa forward entre los tiempos $j\Delta$ y $j\Delta + \Delta$ vista al tiempo $i\Delta$. Es decir, la versión discreta de (56.1) está dada por:

$$df(t, j\Delta, j\Delta + \Delta) = \alpha_{i,j}dt + \beta_{i,j}dW_t,$$

cuando $t = i\Delta$. Dado que

$$V_{i,j} \approx \frac{V_{i,j+1} + V_{i,j}}{2}$$

y

$$\frac{\Delta V_{i,j}}{\Delta} \approx \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta},$$

se puede escribir, en virtud de (56.23), que

$$\alpha_{i,j} = V_{i,j} \frac{\Delta V_{i,j}}{\Delta} = \frac{V_{i,j+1}^2 - V_{i,j}^2}{2\Delta}$$

y

$$\beta_{i,j} = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta},$$

donde $V_{i,j}$ es el valor de $V(t, T)$ cuando $t = i\Delta$ y $T = j\Delta$. Ahora bien, dado que $V_{i,i} = 0$, se sigue de (56.19) que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \alpha_{i,j} \Delta &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^k \beta_{i,j} \Delta \right)^2 \\ \text{o} \quad \sum_{j=1}^k \alpha_{i,j} &= \frac{1}{2} \Delta \left(\sum_{j=1}^k \beta_{i,j} \right)^2. \end{aligned} \tag{56.26}$$

56.11 Simulación Monte Carlo de HJM

El método de simulación Monte Carlo puede utilizarse para estimar el modelo HJM. El periodo de tiempo sobre el cual la simulación se lleva a cabo está dividido en n subintervalos de la misma longitud, Δ . De esta manera, la versión discreta de (56.1) consiste en

$$f_{i+1,j} - f_{i,j} = \alpha_{i,j} \Delta + \beta_{i,j} \varepsilon \sqrt{\Delta}, \tag{56.27}$$

donde $f_{i,j}$ denota a $f(i\Delta, j\Delta, j\Delta + \Delta)$, esto es, $f_{i,j}$ es la tasa forward entre los períodos $j\Delta$ y $(j+1)\Delta$ vista al tiempo $i\Delta$. Se supone que la variable aleatoria ε tiene distribución normal estándar. Los valores $\alpha_{i,j}$ pueden calcularse a partir de los valores de $\beta_{i,j}$ utilizando (56.26). Asimismo, al tiempo $i\Delta$, se almacenan los precios de los bonos que se tienen en el vencimiento $j\Delta$ para $i+1 \leq j \leq n$. Por otro lado, la ecuación (56.25) se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{B_{i+1,j} - B_{i,j}}{B_{i,j}} &= \left(\frac{1 - B_{i,j}}{B_{i,j}} \right) + V_{i,j} \varepsilon \sqrt{\Delta} \\ \text{o} \quad B_{i+1,j} &= B_{i,j} \left(\frac{1}{B_{i,j}} + V_{i,j} \varepsilon \sqrt{\Delta} \right), \end{aligned} \tag{56.28}$$

donde $B_{i,j}$ es el precio al tiempo $i\Delta$ de un bono con vencimiento al tiempo $j\Delta$. Con base en las fórmulas (56.26) y (56.27), el Cuadro 56.1 muestra el árbol de la tasa forward $f_{i,j}$ entre el 31 de diciembre de 2001 y el 30 de abril de 2002 en períodos quincenales. En este caso se utiliza la especificación $\beta(t, T) = \sigma = 12\%$. La curva estimada de rendimiento con CETES de diferentes plazos entre el 31 de diciembre de 2001 al 30 de abril de 2002, se calcula mediante la ecuación (56.28) y $R(t, T) = -\ln B(t, T)/(T - t)$.

							0.01742
						0.01724	
				0.01718		0.01756	
			0.01708		0.01723		
		0.01679		0.01718		0.01763	
	0.01679		0.01714		0.01721		
0.01644		0.01704		0.01719		0.01775	
0.01624	0.01676		0.01711		0.01731		
	0.01649	0.01709		0.01721		0.01773	
		0.01657	0.01715		0.01731		
			0.01711	0.01719		0.01796	
				0.01712	0.01731		
					0.01721		0.17899
						0.01738	
							0.01799

Cuadro 56.1 Árbol de la tasa forward $f_{i,j}$ entre el 31 de diciembre de 2001 y el 30 de abril de 2002 en períodos quincenales.

56.12 Bibliografía sugerida

- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton (1990). "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 25, No. 4. pp. 419-440.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton (1992). "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation". *Econometrica*, Vol. 60, No. 1. pp. 77-105.
- Ho, T. and S. Lee (1986). "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims". *Journal of Finance*, Vol. 42, No. 5. pp. 1011-1029.
- Hull, J. and A. White (1990). "Pricing Interest Rate Derivatives Securities". *Review of Financial Studies*, Vol. 3. No. (4), pp. 573-592.
- Venegas-Martínez, F. (2003). "Inmunización de flujos financieros de tesorerías con bonos cupón cero: un análisis de duración y convexidad con el modelo de Heath, Jarrow y Morton". *Momento Económico*, No. 129-130, pp. 3-17.

56.13 Ejercicios

56.1 Demuestre que

$$r_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - B(t, t+h)}{B(t, t+h)h} = f(t, t).$$

56.2 Sea $I_t = -\int_t^T f(t, s)ds$. Muestre que

$$dI_t = -d\left(\int_t^T f(t, s)ds\right) = -\int_t^T df(t, s)ds + f(t, t)dt.$$

56.3 Considere la siguiente dinámica estocástica del precio, $B(t, T)$, de un bono cupón cero:

$$dB(t, T) = \mu(t, T)B(t, T)dt + V(t, T)B(t, T)dW_t$$

donde

$$\mu(t, T, r_t) = r_t - \int_t^T \alpha(t, s)ds + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \beta(t, s)ds \right)^2$$

y

$$V(t, T) = - \int_t^T \beta(t, s) ds, \quad V(t, t) = 0.$$

Obtenga la ecuación que determina el comportamiento de la tasa forward

Solución: Utilice el lema de Itô en la función $H = -\ln B$, entonces

$$\begin{aligned} dH &= \left(-\frac{1}{B}\mu B + \frac{1}{2B^2}B^2V^2 \right) dt - \frac{1}{B}V B dW_t \\ &= \left(-\mu + \frac{1}{2}V^2 \right) dt - V dW_t. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} df(t, T) &= d\left(-\frac{\partial}{\partial T} \ln B\right) = \frac{\partial}{\partial T} d(-\ln B) \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \left(-\mu + \frac{1}{2}V^2 \right) dt - V_T dW_t \\ &= \alpha(t, T) dt + \beta(t, T) dW_t. \end{aligned}$$

56.4 Considere el proceso asociado al precio, $B(t, T)$, de un bono cupón cero en un mundo neutral al riesgo, es decir,

$$dB(t, T) = r_t B(t, T) dt + V(t, T) B(t, T) dW_t,$$

donde

$$V = - \int_t^T \beta(t, s) ds.$$

Obtenga el proceso estocástico que conduce a la tasa forward.

Solución: Aplique el lema de Itô a la función $H = -\ln B$, entonces

$$\begin{aligned} dH &= \left(-\frac{1}{B}r B + \frac{1}{2B^2}B^2v^2 \right) dt - \frac{1}{B}v B dW_t \\ &= \left(-r + \frac{1}{2}v^2 \right) dt - v dW_t. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} df(t, T) &= d\left(-\frac{\partial}{\partial T} \ln B\right) = \frac{\partial}{\partial T} d(-\ln B) \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \left(-r + \frac{1}{2}v^2 \right) dt - v_T dW_t \\ &= \alpha(t, T) dt + \beta(t, T) dW_t. \end{aligned}$$

Dado que

$$\alpha(t, T) = \beta(t, T) \int_t^T \beta(t, s) ds,$$

se tiene

$$\begin{aligned} df(T, t) &= \alpha(t, T) dt + \beta(t, T) dW_t \\ &= \left(\beta(t, T) \int_t^T \beta(t, s) ds \right) dt + \beta(t, T) dW_t. \end{aligned}$$

56.5 Suponga que

$$\begin{aligned} f(t, s) &= f(0, s) + \sigma_1^2 t \left(s - \frac{1}{2}t \right) + \sigma_1 W_{1t} + \\ &\quad \frac{\sigma_2^2}{2\lambda^2} [2e^{-\lambda s} (e^{\lambda t} - 1) - e^{-2\lambda s} (e^{2\lambda t} - 1)] \\ &\quad + \sigma_2 \int_0^t e^{-\lambda(s-u)} dW_{2u}. \end{aligned}$$

Obtenga $B(t, T)$ a partir de

$$B(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(t, s) ds \right\}.$$

56.6 Si

$$dB(t, T) = r_t B(t, T) dt + V(t, T) B(t, T) dW_t,$$

donde

$$V(t, T) = - \int_t^T \beta(t, s) ds.$$

Obtenga

$$df(t, T) = V_T(t, T) V(t, T) dt - V_T(t, T) dW_t.$$

Solución: Relacione la tasa forward discreta $f(t, T_1, T_2)$ con los precios de dos bonos cupón cero, de vencimientos T_1 y T_2 , mediante

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{\ln B(t, T_1) - \ln B(t, T_2)}{T_2 - T_1}.$$

Si $dB(t, T) = r_t B(t, T) dt + V(t, T) B(t, T) dW_t$ y si se aplica el lema de Itô a $\ln[B(t, T)]$, se tiene que

$$d \ln[B(t, T_1)] = \left[r_t - \frac{V^2(t, T_1)}{2} \right] dt + V(t, T_1) dW_t$$

y

$$d \ln[B(t, T_2)] = \left[r_t - \frac{V^2(t, T_2)}{2} \right] dt + V(t, T_2) dW_t.$$

La sustitución de estas ecuaciones en la expresión de la tasa forward conduce a

$$df(t, T_1, T_2) = \frac{V^2(t, T_2) - V^2(t, T_1)}{2(T_2 - T_1)} dt - \frac{V(t, T_2) - V(t, T_1)}{T_2 - T_1} dW_t$$

Si $T_2 \rightarrow T_1$ y $T = T_1$ se tiene que

$$\begin{aligned} df(t, T) &= \frac{1}{2} \frac{\partial V^2(t, T)}{\partial T} dt - V_T(t, T) dW_t \\ &= V_T(t, T) V(t, T) dt - V_T(t, T) dW_t. \end{aligned}$$

56.7 Considere una dinámica para la tasa forward de la forma

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \beta(t, T) dW_t.$$

Muestre que las siguientes expresiones son equivalentes

$$f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \beta(s, T) dW_s = f(t, T) = f(t, t) + \int_t^T \alpha(t, s) ds + \int_t^T \beta(t, s) dW_s.$$

Solución: Si se toma s como variable de integración en $df(s, T)$ y $df(t, s)$, se obtiene

$$\int_0^t df(s, T) = \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \beta(s, T) dW_s$$

y

$$\int_t^T df(t, s) = \int_t^T \alpha(t, s) ds + \int_t^T \beta(t, s) dW_s.$$

Es decir,

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \beta(s, T) dW_s$$

y

$$f(t, T) = f(t, t) + \int_t^T \alpha(t, s) ds + \int_t^T \beta(t, s) dW_s.$$

CAPÍTULO 57

EL TEOREMA DE GIRSANOV Y VALUACIÓN DE BONOS CUPÓN CERO

Conceptos básicos de este capítulo:

- Tasa corta
- Teorema de Girsanov
- Ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero
- Valuación neutral al riesgo

57.1 Introducción

El objetivo del presente capítulo consiste en mostrar cómo se valúa un bono cupón cero utilizando el teorema de Girsanov (1960). El precio del bono es expresado en términos de un numerario (o numeraria), la llamada cuenta bancaria, a fin de transformarlo en una martingala bajo una nueva medida de probabilidad equivalente neutral al riesgo. Posteriormente, con esta nueva medida de probabilidad se calcula el precio del bono como el valor esperado del inverso del numerario condicional a la información del mercado con que se cuenta en el presente.

57.2 Dinámica de la tasa corta y el teorema de Girsanov

El teorema de Girsanov construye explícitamente una medida de probabilidad equivalente, definida en el espacio muestral original, que permite transformar un movimiento Browniano con tendencia en un movimiento Browniano sin tendencia sobre el mismo espacio muestral.

Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Se supone que la dinámica de la tasa corta es conducida por el proceso

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t. \quad (57.1)$$

Se supone también que el proceso $\{r_t\}_{t \geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ y las funciones $\mu(r_t, t)$ y $\sigma(r_t, t)$ son conocidas. Ahora bien, si se define

$$\widetilde{W}_t = \int_0^t \lambda(r_s, s)ds + W_t, \quad (57.2)$$

donde la cantidad $\lambda(r_t, t)$ es el premio al riesgo (de mercado) o precio de mercado del riesgo (de tasa de interés), entonces la ecuación (57.1) puede ser reescrita como

$$dr_t = [\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)]dt + \sigma(r_t, t)d\widetilde{W}_t. \quad (57.3)$$

Observe que el término de tendencia del proceso representado en (57.3) se ha modificado sin que se altere la varianza. El teorema de Girsanov proporciona una medida de probabilidad

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \varphi_T^{(\lambda)} d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}, \quad (57.4)$$

donde

$$\varphi_T^{(\lambda)} = \exp \left\{ - \int_0^T \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds \right\}. \quad (57.5)$$

La medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ está definida en el espacio muestral original, Ω . Bajo esta nueva medida de probabilidad, \tilde{W}_t es un movimiento Browniano. Se dice en este caso que la medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ es neutral al riesgo.

57.3 Ecuación diferencial parcial de un bono cupón cero

En lo que sigue se denotará al precio de un bono cupón cero mediante $B(t, T)$ ó $B(r_t, t; T)$, en esta última se hará énfasis, cuando sea necesario, en la dependencia de la tasa corta. El lema de Itô, en términos de \tilde{W}_t , conduce a

$$dB = \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial r_t} [\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)] + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \right) dt + \frac{\partial B}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) d\tilde{W}_t. \quad (57.6)$$

Por otro lado, en ausencia de oportunidades de arbitraje, la ecuación diferencial que satisface cualquier bono cupón cero cuya dinámica estocástica de la tasa corta está dada por (57.3) (comárese con Vasicek (1977) y Garman (1977)) es:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + \frac{\partial B}{\partial r_t} [\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)] - r_t B = 0, \quad (57.7)$$

junto con la condición final $B(T, T) = 1$. Claramente, (57.6) y (57.7) implican

$$dB = r_t B dt + \frac{\partial B}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) d\tilde{W}_t \quad (57.8)$$

ó

$$dB = r_t B dt + B \hat{\sigma}_t d\tilde{W}_t, \quad (57.9)$$

donde

$$\hat{\sigma}_t = \left(\frac{\partial B}{\partial r_t} \right) \frac{\sigma(r_t, t)}{B}.$$

Observe también que a partir de la aplicación del lema de Itô a $\ln B(t, T)$ y utilizando la ecuación (57.9), se sigue que

$$\begin{aligned} B(t, T) &= B(0, T) \exp \left\{ \int_0^t \hat{\sigma}_s d\tilde{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \hat{\sigma}_s^2 ds + \int_0^t r_s ds \right\} \\ &= B(0, T) M_t \exp \left\{ \int_0^t \hat{\sigma}_s d\tilde{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \hat{\sigma}_s^2 ds \right\}, \end{aligned}$$

donde

$$M_t = \exp \left\{ \int_0^t r_s ds \right\}.$$

A esta última expresión se le dará una interpretación particular en el transcurso de la siguiente sección.

57.4 Cambio de numerario

Considere un depósito bancario de M_t unidades monetarias, al tiempo t , que paga una tasa de interés constante y libre de riesgo (incumplimiento) r_t . El rendimiento del depósito durante el instante dt está representado por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$dM_t = r_t M_t dt. \quad (57.10)$$

Observe que la tasa corta es estocástica, pero dada la información del mercado al tiempo t , \mathcal{F}_t , se tiene que r_t es conocida y por lo tanto libre de riesgo. Si se hace un depósito inicial $M_0 = 1$, el retorno (capital más intereses) de la inversión es

$$M_t = \exp \left\{ \int_0^t r_s ds \right\}. \quad (57.11)$$

La ecuación anterior es llamada la cuenta del mercado de dinero o, simplemente, la cuenta bancaria. En lo que sigue, por conveniencia, se utilizará la notación $B_t \equiv B(t, r_t; T)$, destacando la dependencia en t . Se define ahora

$$\tilde{B}_t = \frac{B_t}{M_t}. \quad (57.12)$$

Note que $M_0 = 1$, lo cual implica $\tilde{B}_0 = B_0$. La ecuación (57.12) expresa simplemente un cambio en la forma de medir una variable con respecto de una cantidad positiva en una inversión libre de riesgo M_t , la cual recibe el nombre de numerario. En este caso, en virtud de (57.8), se cumple que

$$\begin{aligned} d\tilde{B}_t &= -r_t \tilde{B}_t dt + \frac{1}{M_t} dB_t \\ &= -r_t \tilde{B}_t dt + \frac{1}{M_t} \left(r_t B_t dt + \frac{\partial B_t}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) d\tilde{W}_t \right) \\ &= \frac{1}{M_t} \frac{\partial B_t}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) d\tilde{W}_t. \end{aligned} \quad (57.13)$$

En otras palabras, bajo la medida equivalente de probabilidad, $\tilde{\mathbb{P}}$, se sigue que \tilde{B}_t es una martingala. Una forma alternativa de escribir (57.13) es

$$d\tilde{B}_t = \tilde{\sigma}_t d\tilde{W}_t, \quad (57.14)$$

donde

$$\tilde{\sigma}_t = \frac{1}{M_t} \left(\frac{\partial B_t}{\partial r_t} \right) \sigma(r_t, t) = \hat{\sigma}_t \tilde{B}_t.$$

57.5 Valuación neutral al riesgo

En esta sección se utiliza la propiedad de martingala de \tilde{B}_t para obtener una fórmula de valuación, neutral al riesgo, de un bono cupón cero. La ecuación (57.14) puede ser escrita en forma equivalente como:

$$\tilde{B}_t = \tilde{B}_0 + \int_0^t \tilde{\sigma}_s d\tilde{W}_s. \quad (57.15)$$

Por lo tanto, \tilde{B}_t es una $\tilde{\mathbb{P}}$ -martingala con respecto de la filtración aumentada $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ definida en el espacio medible original (Ω, \mathcal{F}) . Por lo tanto, si $T \geq t$,

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] = \tilde{B}_t. \quad (57.16)$$

57.6 La regla de Bayes y esperanza condicional bajo la probabilidad equivalente neutral al riesgo

De acuerdo con la sección anterior, \tilde{B}_t es una martingala en $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \tilde{\mathbb{P}})$. El teorema de Girsanov proporciona una medida martingala equivalente

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \varphi_T^{(\lambda)} d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F},$$

donde $\varphi_T^{(\lambda)}$ se calcula a partir de un tiempo inicial $t = 0$, es decir,

$$\varphi_T^{(\lambda)} = \exp \left\{ - \int_{t=0}^T \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_{t=0}^T \lambda_s^2 ds \right\},$$

donde $\lambda_s \equiv \lambda(r_s, s)$. Sin embargo, si se tiene información al tiempo t , expresada en \mathcal{F}_t , entonces

$$\begin{aligned}\varphi_{T-t}^{(\lambda)} &= \exp \left\{ - \int_t^T \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_t^T \lambda_s^2 ds \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_0^T \lambda_s dW_s + \int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^2 ds \right\} \\ &= \frac{\varphi_T^{(\lambda)}}{\varphi_t^{(\lambda)}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $A \in \mathcal{F}_t$, entonces

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A \frac{\varphi_T^{(\lambda)}}{\varphi_t^{(\lambda)}} d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}_t. \quad (57.17)$$

En consecuencia,

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[\frac{\varphi_T^{(\lambda)}}{\varphi_t^{(\lambda)}} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{1}{\varphi_t^{(\lambda)}} \mathbb{E} \left[\varphi_T^{(\lambda)} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (57.18)$$

La expresión anterior proporciona una fórmula para calcular la esperanza condicional del precio del bono bajo $\tilde{\mathbb{P}}$. Por último, se verá que si $0 \leq s \leq t \leq T$, entonces

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\tilde{W}_t \mid \mathcal{F}_s \right] = \tilde{W}_s. \quad (57.19)$$

De hecho, la verificación del resultado anterior es, fundamentalmente, la demostración del teorema de Girsanov. Consideré el producto $\phi_t = \tilde{W}_t \varphi_t^{(\lambda)}$, donde por simplicidad se ha utilizado la notación $\varphi_t^{(\lambda)} \equiv \varphi^{(\lambda)}(\lambda_t, t, W_t)$, entonces ϕ_t es una \mathbb{P} -martingala. En efecto, dado que

$$d\tilde{W}_t = \lambda_t dt + dW_t$$

y

$$d\varphi_t^{(\lambda)} = -\lambda_t \varphi_t^{(\lambda)} dW_t,$$

se sigue que

$$\begin{aligned}d(\phi_t) &= d(\tilde{W}_t \varphi_t^{(\lambda)}) \\ &= \tilde{W}_t d\varphi_t^{(\lambda)} + \varphi_t^{(\lambda)} d\tilde{W}_t + (d\tilde{W}_t)(d\varphi_t^{(\lambda)}) \\ &= -\lambda_t \tilde{W}_t \varphi_t^{(\lambda)} dW_t + \varphi_t^{(\lambda)} \lambda_t dt + \varphi_t^{(\lambda)} dW_t - \lambda_t \varphi_t^{(\lambda)} dt \\ &= \varphi_t^{(\lambda)} (1 - \lambda_t \tilde{W}_t) dW_t \\ &= \varphi_t^{(\lambda)} (1 - \lambda_t^2 t - \lambda_t W_t) dW_t.\end{aligned}$$

Así, ϕ_t es una \mathbb{P} -martingala, es decir,

$$\mathbb{E} [\phi_t \mid \mathcal{F}_s] = \phi_s. \quad (57.20)$$

En virtud de la regla de Bayes, se llega a que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}} \left[\tilde{W}_t \mid \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[\frac{\varphi_t^{(\lambda)}}{\varphi_s^{(\lambda)}} \tilde{W}_t \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= \frac{1}{\varphi_s^{(\lambda)}} \mathbb{E} \left[\varphi_t^{(\lambda)} \tilde{W}_t \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= \frac{1}{\varphi_s^{(\lambda)}} \mathbb{E} [\phi_t \mid \mathcal{F}_s] \\ &= \frac{\phi_s}{\varphi_s^{(\lambda)}} \\ &= \tilde{W}_s.\end{aligned} \quad (57.21)$$

Es decir, el proceso \tilde{W}_t es una martingala bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}$.

57.7 El teorema de Girsanov y valuación neutral al riesgo de un bono cupón cero

De acuerdo con la sección anterior \tilde{B}_t es una $\tilde{\mathbb{P}}$ -martingala. En particular, por la regla de Bayes, se obtiene

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[\frac{\varphi_T^{(\lambda)}}{\varphi_t^{(\lambda)}} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (57.22)$$

Ahora bien, en virtud de que

$$\tilde{B}_t = \mathbb{E} \left[\frac{\varphi_T^{(\lambda)}}{\varphi_t^{(\lambda)}} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (57.23)$$

y dado que $B_T = 1$, se sigue que

$$\begin{aligned} B_t &= \mathbb{E} \left[\varphi_{T-t}^{(\lambda)} \frac{M_t}{M_T} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\varphi_{T-t}^{(\lambda)} \exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ - \int_t^T \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_t^T \lambda_s^2 ds - \int_t^T r_s ds \right\} \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned} \quad (57.24)$$

Por último, observe que si el precio de un bono cupón cero se define mediante la hipótesis de expectativas neutrales al riesgo, es decir, si

$$B(t, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\} \mid \mathcal{F}_t \right] = M_t \mathbb{E} \left[\frac{1}{M_T} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad (57.25)$$

entonces el premio al riesgo es nulo, esto es, $\lambda_s \equiv 0$.

57.8 Bibliografía sugerida

- Garman, M. B. (1977). A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes. Working paper No. 50. January. Research Program in Finance. University of California, Berkeley.
- Girsanov, I. V. (1960). "On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures". *Journal of Theory of Probability and its Applications*, Vol. 5, No. 3, pp. 285-301.
- Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure." *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No. 2, pp. 177-188.

57.9 Ejercicios

- 57.1** Suponga que la dinámica de la tasa corta es conducida por un proceso de la forma

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t,$$

donde a , b y σ son constantes positivas. En este caso, la ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero está dada por

$$\frac{\partial B}{\partial t} + [a(b - r_t) - \lambda\sigma] \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - r_t B = 0.$$

Suponga que λ es constante. Muestre que la solución de la ecuación diferencial parcial anterior está dada por

$$\begin{aligned} B(t, T) = \exp & \left\{ \frac{1}{a} \left(1 - e^{a(T-t)} \right) \left(b - \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \right. \\ & \left. - (T-t) \left(b - \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) - \frac{\sigma^2}{4a^3} \left(1 - e^{a(T-t)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Asimismo, verifique el mismo resultado utilizando $d\tilde{W}_t = \lambda dt + dW_t$ y la fórmula de valuación

$$\begin{aligned} B(t, T) &= E \left[\varphi_{T-t}^{(\lambda)} \exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[\exp \left\{ -\lambda W_{T-t} - \frac{1}{2}\lambda^2(T-t) - \int_t^T r_s ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

57.2 Si la dinámica de la tasa corta es conducida por

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad a, b, \sigma > 0,$$

la ecuación diferencial parcial del precio de un bono cupón cero está dada por

$$\frac{\partial B}{\partial t} + [a(b - r_t) - \lambda\sigma\sqrt{r_t}] \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - r_t B = 0.$$

Suponga que λ es constante. Muestre que esta ecuación diferencial parcial tiene como solución a:

$$B(t, T) = A(T-t) \exp \{-r_t D(T-t)\},$$

donde

$$A(T-t) = \left[\frac{2\gamma e^{(\tilde{a}+\gamma)(T-t)/2}}{(\tilde{a}+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} \right]^{2ab/\sigma^2},$$

$$D(T-t) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\tilde{a}+\gamma)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma},$$

$$\gamma = \sqrt{\tilde{a}^2 + 2\sigma^2}$$

y

$$\tilde{a} = a + \lambda\sigma.$$

Verifique el mismo resultado utilizando $d\tilde{W}_t = \lambda\sqrt{r_t}dt + dW_t$ y la fórmula de valuación

$$B(t, T) = E \left[\varphi_{T-t}^{(\lambda)} \exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Por último, muestre que si se define $R(t, T) = -\ln B(t, T)/(T-t)$, entonces

$$R(t, \infty) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = \frac{2ab}{\tilde{a} + \gamma}$$

y

$$R(t, T) = \theta_1 R(t, t) + \theta_2 R(t, \infty),$$

donde

$$\theta_1 = \frac{B(t, T)}{T - t} \quad \text{y} \quad \theta_2 = -\frac{(\tilde{a} + \gamma) \ln[A(T - t)]}{2ab(T - t)}.$$

57.3 Pruebe que si $A \in \mathcal{F}_t$, entonces

$$\int_A \tilde{B}_T d\tilde{\mathbb{P}} = \int_A \frac{1}{\varphi_t^{(\lambda)}} E \left[\varphi_T^{(\lambda)} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] d\tilde{\mathbb{P}}.$$

Solución: Observe que

$$\begin{aligned} & \int_A \frac{1}{\varphi_t^{(\lambda)}} E \left[\varphi_T^{(\lambda)} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] d\tilde{\mathbb{P}} \\ &= E \left[\varphi_t^{(\lambda)} 1_A \frac{1}{\varphi_t^{(\lambda)}} E \left[\varphi_T^{(\lambda)} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= E \left[1_A E \left[\varphi_T^{(\lambda)} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= E \left[E \left[1_A \varphi_T^{(\lambda)} \tilde{B}_T \mid \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= E \left[\varphi_T^{(\lambda)} 1_A \tilde{B}_T \right] \\ &= \tilde{E} \left[1_A \tilde{B}_T \right] \\ &= \int_A \tilde{B}_T d\tilde{\mathbb{P}}. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 58

INMUNIZACIÓN DE FLUJOS DE EFECTIVO ESPERADOS MEDIANTE UN PORTAFOLIO DE BONOS: DURACIÓN Y CONVEXIDAD

Conceptos básicos de este capítulo:

- Inmunización con portafolios de bonos cupón cero
- Flujo esperado de efectivo
- Ecuación de compensación
- Duración
- Convexidad

58.1 Introducción

El presente capítulo se concentra en el desarrollo de un modelo de inmunización del valor presente de un conjunto de flujos de efectivo (activos y pasivos) mediante un portafolio de bonos. Se supone que se cuenta con una estructura de plazos a fin de descontar dichos flujos. Por supuesto, el portafolio de cobertura puede ser extendido a bonos cuponados y, en general, a productos derivados sobre dichos bonos.

El riesgo por fluctuaciones adversas en la tasa de interés que enfrentan las tesorerías de corporativos se refleja en la posibilidad de que el valor presente de los flujos, activos y pasivos, que se tienen planeados no se presente en la magnitud que se esperaba, lo que afecta la programación de las decisiones de operación, inversión y financiamiento. Este riesgo puede reducirse si se cubre adecuadamente el valor presente de los flujos esperados tomando posiciones (largas y cortas) sobre bonos cupón cero.

58.2 Duración y convexidad monetarias

El concepto de duración aparece por primera vez en el trabajo de Macaulay (1938) "Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest-Rates, Bond Yields and Stock Prices in the U.S. Since 1856". La duración de un bono mide el tiempo promedio en que el tenedor del instrumento recibe pagos. Por ejemplo, un bono cupón cero con vencimiento dentro de n años tiene duración n (años). Más concretamente, si B es el precio de un bono cupón cero que vence dentro de n años con rendimiento anualizado $y = R(0, 1) = R(1, 2) = \dots = R(n-1, n)$ (estructura de plazos plana) y valor nominal N , entonces, bajo un esquema de interés compuesto, $B^{(0)} = N(1+y)^{-n}$, en cuyo caso, la duración del bono puede escribirse como:

$$n = -\frac{\partial B^{(0)}}{\partial y} \frac{1+y}{B^{(0)}}. \quad (58.1)$$

Esta elasticidad es también llamada duración modificada. En ocasiones, la medida de sensibilidad $\partial B^{(0)}/\partial y$ es llamada duración del tipo Fischer-Weil.

De la misma manera, la duración de un bono cuponado con tasa cupón constante denotada por $k_B^{(y)}$, con valor nominal N , vencimiento en n años, rendimiento anualizado $y \equiv y_i = R(i, i+1)$ y que paga cupones anuales C_i , $i = 1, 2, \dots, n$, puede escribirse como:

$$k_B^{(y)} = 1w_1 + 2w_2 + \dots + nw_n, \quad (58.2)$$

donde

$$w_i = \frac{\text{VP}(C_i)}{B} \quad B = \sum_{i=1}^n \text{VP}(C_i), \quad \text{VP}(C_i) = \frac{C_i}{(1+y)^i},$$

B es el precio del bono y $\text{VP}(C_i)$ es el valor presente del cupón C_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Es decir, la duración es el promedio de los tiempos de pago ponderado por el valor presente de dichos pagos.

Observe ahora que, en el caso de un bono cuponado, la duración $k_B^{(y)}$ también puede ser expresada en términos de una elasticidad como en (58.1). En efecto,

$$k_B^{(y)} = \sum_{i=1}^n \frac{i C_i (1+y)^{-i}}{B} = - \left(\frac{1+y}{B} \right) \sum_{i=1}^n \frac{-i C_i}{(1+y)^{i+1}} = - \left(\frac{1+y}{B} \right) \frac{\partial B}{\partial y}. \quad (58.3)$$

Una fórmula útil para determinar la duración de un bono cuando los cupones anuales satisfacen $C_i = C$, $i = 1, 2, \dots, n$, está dada por (Chua, 1984)

$$k_B^{(y)} = \frac{1}{B} \left[C \left(\frac{(1+y)^{n+1} - (1+y) - yn}{y^2(1+y)^n} \right) + \left(\frac{Nn}{(1+y)^n} \right) \right].$$

Los siguientes resultados sobre duración monetaria son muy intuitivos y fáciles de probar. La duración de un bono aumenta conforme el valor de alguno de los cupones aumenta. En efecto, es suficiente notar que:

$$\frac{\partial k_B^{(y)}}{\partial C_i} = \frac{i}{B(1+y)^i} \left(1 - \frac{\text{VP}(C_i)}{B} \right) > 0.$$

Por lo tanto, si C_i aumenta, entonces la duración aumenta. Asimismo, la duración de un bono con más de un cupón es estrictamente menor a la duración de un bono cupón cero (ambos con la misma maduración). Basta observar que si $w_i = \text{VP}(C_i)/B$, entonces $w_i > 0$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ y

$$k_B^{(y)} \equiv \sum_{i=1}^n i w_i < \sum_{i=1}^n n w_i = n.$$

Por último, si $C \equiv C_i$, la duración de una perpetuidad es $1 + (1/y)$. En efecto,

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+y)^i} \right) = \frac{\partial B}{\partial y} \left(\frac{C}{y} \right) = -\frac{C}{y^2} = -\frac{B}{y}.$$

58.2.1 Duración monetaria con tasa constante de interés continuamente capitalizable

Considere, a continuación, el caso de una tasa de interés continuamente capitalizable, r . Suponga que un bono paga cupones C_i en plazos τ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. En este caso, el precio del bono es

$$B = \sum_{i=1}^n C_i e^{-r\tau_i}.$$

La duración está dada por:

$$k_B^{(r)} = -\frac{\partial B}{\partial r} \frac{1}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i C_i e^{-r\tau_i}}{B}.$$

Evidentemente, si $N_n = \min\{\tau_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ y $M_n = \max\{\tau_i | i = 1, 2, \dots, n\}$, entonces

$$\lim_{N_n \rightarrow \infty} k_B^{(r)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{M_n \rightarrow 0} k_B^{(r)} = 0.$$

58.2.2 Convexidad monetaria con rendimientos anualizados

En esta sección se considera una medida de sensibilidad de segundo orden conocida como convexidad. La convexidad es una medida de dispersión del tiempo entre pagos; entre mayor sea la convexidad más grande es la dispersión del tiempo entre pagos. En el caso de rendimientos anualizados, la convexidad monetaria se define como:

$$q_B^{(y)} = -\frac{\partial \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)}{\partial y} \frac{1+y}{\frac{\partial B}{\partial y}} = \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \frac{(1+y)^2}{B}.$$

En particular, si

$$B = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+y)^i},$$

entonces

$$\begin{aligned} q_B^{(y)} &= \sum_{i=1}^n i(1+i) \frac{C_i}{B(1+y)^i} \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 \frac{C_i}{B(1+y)^i} + k_B^{(y)} \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 w_i + k_B^{(y)}. \end{aligned}$$

Observe que si las w_i son vistas como probabilidades de una variable aleatoria X que toma valores en los tiempos de pago, $\mathbb{P}\{X = i\} = w_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \sum_{i=1}^n (i - k_B^{(y)})^2 w_i \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 w_i - (k_B^{(y)})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 w_i + k_B^{(y)} - k_B^{(y)}(1 + k_B^{(y)}) \\ &= q_B^{(y)} - k_B^{(y)}(1 + k_B^{(y)}). \end{aligned}$$

Es decir, $\text{Var}[X]$ y $q_B^{(y)}$ difieren sólo en la constante $k_B^{(y)}(1 + k_B^{(y)})$. En otras palabras, la convexidad de un bono, salvo una constante conocida, mide la dispersión de los tiempos de pago alrededor de la duración (el tiempo medio entre pagos).

Es importante destacar que para el caso de un bono cupón cero, con rendimiento anualizado y y valor nominal N , se tiene que $B^{(0)} = N(1+y)^{-n}$, en cuyo caso, la convexidad está dada por

$$q_B^{(y)} = \frac{\partial^2 B^{(0)}}{\partial y^2} \frac{(1+y)^2}{B^{(0)}} = n^2 + n = n^2 + k_B^{(y)}.$$

Por último, observe que una expansión en serie de Taylor, de B , conduce a

$$\begin{aligned} dB &\approx \frac{\partial B}{\partial y} dy + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} (dy)^2 \\ &= -B k_B^{(y)} \frac{dy}{1+y} + B q_B^{(y)} \left(\frac{dy}{1+y} \right)^2 \end{aligned}$$

ó

$$\frac{dB}{B} \approx -k_B^{(y)} \frac{dy}{1+y} + q_B^{(y)} \left(\frac{dy}{1+y} \right)^2.$$

58.2.4 Convexidad monetaria con tasa constante de interés continuamente capitalizable

La convexidad monetaria cuando la tasa constante de interés es continuamente capitalizable está dada por

$$q_B^{(r)} = \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \frac{1}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i^2 C_i e^{-r\tau_i}}{B}.$$

Este concepto de convexidad es muy usual en el desarrollo de modelos de immunización de los flujos esperados de tesorerías.

58.3 Tasa corta y precio de un bono cupón cero

En esta sección se especifica la dinámica de la tasa corta. Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ su filtración aumentada, la cual representa la información del mercado disponible hasta el tiempo t . Se supone que la dinámica estocástica de la tasa corta, r_t , es conducida por una ecuación de la forma:

$$dr_t = \alpha(r_t, t)dt + \beta(r_t, t)dW_t,$$

donde $\alpha(r_t, t)$ y $\beta(r_t, t)$ son procesos adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. El precio de un bono cupón cero que se coloca en t y que al vencimiento, T , paga una unidad monetaria se determina mediante

$$B(r_t, t; T) = E \left[\exp \left\{ - \int_t^T r_s dr_s \right\} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Por último, la estructura de plazos de la tasa de interés está dada por

$$R(r_t, t) = - \frac{\ln B(r_t, t; T)}{T - t}.$$

58.4 Ecuación de compensación entre un portafolio de bonos cupón cero y un conjunto de flujos de efectivo

En esta sección se presenta la ecuación de compensación entre un portafolio (de cobertura) de bonos y un conjunto de flujos de efectivo. Como antes, se denotará al precio de un bono cupón cero mediante $B(r_t, t; T)$. Para inmunizar el valor presente de un conjunto de flujos de efectivo se utilizarán cuatro bonos con vencimientos T_1, T_2, T_3 y T_4 , con $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$. La razón por la que se eligen únicamente cuatro bonos con distintos vencimientos se justificará más adelante. Así pues, el precio del bono con vencimiento T_i tiene precio $B_i(r_t, t; T_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, donde r_t es la tasa corta. Considere una estrategia de cobertura con x_i unidades de cada bono con vencimiento en T_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Sea $u(r, t, \Phi)$ el valor presente de un conjunto de flujos de efectivo $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$. Cada flujo ϕ_ℓ se presenta en una fecha preestablecida $t_\ell, \ell = 1, 2, \dots, n$. Observe que si $\phi_\ell > 0$, se trata de un activo; en caso contrario es un pasivo. Suponga que $0 = x_1 B_1 + x_2 B_2 + x_3 B_3 + x_4 B_4 - u$. Se desea determinar las cantidades x_1, x_2, x_3 y x_4 de tal manera que los cambios en el valor presente de Φ , $u(r, t, \Phi)$, por variaciones en la tasa de interés se compensen con los flujos generados por bonos de distintos vencimientos, es decir,

$$0 = x_1 dB_1 + x_2 dB_2 + x_3 dB_3 + x_4 dB_4 - du, \quad (58.4)$$

donde

$$u(r_t, t; \Phi) = E \left[\sum_{\ell=1}^n \phi_\ell \exp \{ R(t, t_\ell; r_t)(t_\ell - t) \} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (58.5)$$

Si $du < 0$, por lo menos un dB_i es negativo y, recíprocamente, si $du > 0$, por lo menos un dB_i es positivo. Una simple aplicación del lema de Itô a $B_i(r_t, t; T_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, y a $u(r, t; \Phi)$ conduce

a:

$$\begin{aligned}
0 &= x_1 dB_1 + x_2 dB_2 + x_3 dB_3 + x_4 dB_4 - du \\
&= x_1 \left[\left(\frac{\partial B_1}{\partial t} + \alpha(r_t, t) \frac{\partial B_1}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \beta(r_t, t)^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} \right) dt + \beta(r_t, t) \frac{\partial B_1}{\partial r_t} dW_t \right] \\
&\quad + x_2 \left[\left(\frac{\partial B_2}{\partial t} + \alpha(r_t, t) \frac{\partial B_2}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \beta(r_t, t)^2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r_t^2} \right) dt + \beta(r_t, t) \frac{\partial B_2}{\partial r_t} dW_t \right] \\
&\quad + x_3 \left[\left(\frac{\partial B_3}{\partial t} + \alpha(r_t, t) \frac{\partial B_3}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \beta(r_t, t)^2 \frac{\partial^2 B_3}{\partial r_t^2} \right) dt + \beta(r_t, t) \frac{\partial B_3}{\partial r_t} dW_t \right] \\
&\quad + x_4 \left[\left(\frac{\partial B_4}{\partial t} + \alpha(r_t, t) \frac{\partial B_4}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \beta(r_t, t)^2 \frac{\partial^2 B_4}{\partial r_t^2} \right) dt + \beta(r_t, t) \frac{\partial B_4}{\partial r_t} dW_t \right] \\
&\quad - \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(r_t, t) \frac{\partial u}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \beta(r_t, t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r_t^2} \right) dt - \beta(r_t, t) \frac{\partial u}{\partial r_t} dW_t.
\end{aligned}$$

Al reagrupar términos en dt y dr_t , se obtiene que:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(x_1 \frac{\partial B_1}{\partial t} + x_2 \frac{\partial B_2}{\partial t} + x_3 \frac{\partial B_3}{\partial t} + x_4 \frac{\partial B_4}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt \\
&\quad + \left(x_1 \frac{\partial B_1}{\partial r_t} + x_2 \frac{\partial B_2}{\partial r_t} + x_3 \frac{\partial B_3}{\partial r_t} + x_4 \frac{\partial B_4}{\partial r_t} - \frac{\partial u}{\partial r_t} \right) dr_t \\
&\quad + \frac{1}{2} \beta(r_t, t)^2 \left(x_1 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} + x_2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r_t^2} + x_3 \frac{\partial^2 B_3}{\partial r_t^2} + x_4 \frac{\partial^2 B_4}{\partial r_t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r_t^2} \right) dt.
\end{aligned} \tag{58.6}$$

Esta ecuación es fundamental para generar estrategias de cobertura con bonos cupón cero, como se verá en las siguientes secciones, pues contiene información sobre el tiempo promedio en que se presentan flujos de efectivo o se realizan pagos de los bonos, así como información de la dispersión de dichos tiempos con respecto al tiempo promedio.

58.5 Inmunización por duración y convexidad

En esta sección se presenta un procedimiento para inmunizar el valor presente de un conjunto de flujos financieros utilizando bonos cupón cero. El procedimiento emplea los conceptos de duración y convexidad útiles en la medición y el control del riesgo por desplazamientos paralelos y moderados en la tasa de interés.

En virtud de que dt y dr_t , son variables (de estado) independientes, a partir de la ecuación (58.6), se sigue que

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial B_1}{\partial t} + x_2 \frac{\partial B_2}{\partial t} + x_3 \frac{\partial B_3}{\partial t} + x_4 \frac{\partial B_4}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \\ x_1 \frac{\partial B_1}{\partial r_t} + x_2 \frac{\partial B_2}{\partial r_t} + x_3 \frac{\partial B_3}{\partial r_t} + x_4 \frac{\partial B_4}{\partial r_t} = \frac{\partial u}{\partial r_t}, \\ x_1 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} + x_2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r_t^2} + x_3 \frac{\partial^2 B_3}{\partial r_t^2} + x_4 \frac{\partial^2 B_4}{\partial r_t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r_t^2}. \end{cases} \tag{58.7}$$

El sistema anterior puede reescribirse como:

$$\begin{cases} w_1 \frac{\partial B_1}{\partial t} \frac{1}{B_1} + w_2 \frac{\partial B_2}{\partial t} \frac{1}{B_2} + w_3 \frac{\partial B_3}{\partial t} \frac{1}{B_3} + w_4 \frac{\partial B_4}{\partial t} \frac{1}{B_4} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{1}{u}, \\ w_1 \left(-\frac{\partial B_1}{\partial r_t} \frac{1}{B_1} \right) + w_2 \left(-\frac{\partial B_2}{\partial r_t} \frac{1}{B_2} \right) + w_3 \left(-\frac{\partial B_3}{\partial r_t} \frac{1}{B_3} \right) + w_4 \left(-\frac{\partial B_4}{\partial r_t} \frac{1}{B_4} \right) = \left(-\frac{\partial u}{\partial r_t} \frac{1}{u} \right), \\ w_1 \left(\frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} \frac{1}{B_1} \right) + w_2 \left(\frac{\partial^2 B_2}{\partial r_t^2} \frac{1}{B_2} \right) + w_3 \left(\frac{\partial^2 B_3}{\partial r_t^2} \frac{1}{B_3} \right) + w_4 \left(\frac{\partial^2 B_4}{\partial r_t^2} \frac{1}{B_4} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r_t^2} \frac{1}{u}, \end{cases} \tag{58.8}$$

donde $w_i = x_i B_i / u$, $i = 1, 2, 3, 4$. Observe que $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$. Ahora bien, la duración y convexidad del bono i se calculan, respectivamente, por

$$D_i = -\frac{\partial B_i}{\partial r_t} \frac{1}{B_i} \quad \text{y} \quad C_i = \frac{\partial^2 B_i}{\partial r_t^2} \frac{1}{B_i}.$$

Si además se define la sensibilidad relativa del precio del bono con respecto del tiempo como

$$A_i = \frac{\partial B_i}{\partial t} \frac{1}{B_i},$$

entonces el sistema (58.8) en las incógnitas w_1, w_2, w_3 y w_4 es equivalente a:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1, \\ w_1 A_1 + w_2 A_2 + w_3 A_3 + w_4 A_4 = A_u, \\ w_1 D_1 + w_2 D_2 + w_3 D_3 + w_4 D_4 = D_u, \\ w_1 C_1 + w_2 C_2 + w_3 C_3 + w_4 C_4 = C_u. \end{cases} \quad (58.9)$$

Por supuesto, se supone que el determinante asociado al sistema (58.9) es distinto de cero a fin de garantizar soluciones no triviales. De esta manera, los valores x_1, x_2, x_3 y x_4 que se determinan a través de w_1, w_2, w_3 y w_4 definen una estrategia de cobertura. El sistema (58.9) tiene cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, siendo ésta la razón por la que se eligieron sólo cuatro bonos de distintos vencimientos.

58.6 Conclusiones

Como puede observarse, la inmunización por duración y convexidad es fundamentalmente un método local diseñado para cubrir cambios en el valor presente debido a desplazamientos, pequeños y moderados, en la tasa de interés. Por esta razón, las estrategias de inmunización requieren de actualizaciones periódicas o rebalanceo a fin de proteger eficazmente no sólo contra pequeños desplazamientos en tasas, sino también contra cambios moderados y extremos. Si una estrategia no es rebalanceada atendiendo al comportamiento y a las expectativas del mercado, la protección se deteriora progresivamente.

58.7 Bibliografía sugerida

- Chua, J. H. (1984). "A Closed-Form Formula for Calculating Bond Duration". *Financial Analysts Journal*, Vol. 40, No. 3, pp. 76-78.
- Fabozzi, F. J. (2003). *Bond Markets: Analysis and Strategies* (5th Edition) Prentice Hall.
- González-Aréchiga, B., F. Venegas-Martínez y J. Díaz-Tinoco (2000). "Riesgo de tasas de interés e inmunización por duración y convexidad con futuros: análisis local y de valor en riesgo". *Investigación Económica*, Vol. 60, No. 233, pp. 72-112.
- González-Aréchiga, B., J. Díaz-Tinoco y F. Venegas-Martínez (2001). "Riesgo cambiario, brecha de madurez y cobertura con futuros: análisis local y de valor en riesgo". *Economía Mexicana, Nueva Época*, Vol. 10, No. 2, pp. 259-290.
- James, J. and N. Webber (2000). *Interest Rate Modelling: Financial Engineering*. John Wiley & Sons, England.
- Macaulay, F. R. (1938), Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest-Rates, Bond Yields and Stock Prices in the U.S. Since 1856. National Bureau of Economic Research, New York.
- Venegas-Martínez, F. (2002). "Cobertura de flujos financieros con instrumentos de renta fija". *Estudios Económicos*, Vol. 17, No. 2, pp. 171-192.
- Venegas-Martínez, F. (2003). "Inmunización de flujos financieros de tesorerías con bonos cupón cero: un análisis de duración y convexidad con el modelo de Heath, Jarrow y Morton". *Momento Económico*, No. 129-130, pp. 3-17.
- Venegas-Martínez, F. (2003). Inmunización del valor presente de flujos de efectivo de tesorerías de corporativos, inversionistas institucionales y fondos pensiones con futuros del MexDer. Trabajo de Investigación ganador del Primer Lugar del Premio Nacional MexDer 2003, www.mexder.com/MEX/premio.html
- Venegas-Martínez, F., B. González-Aréchiga y J. Díaz-Tinoco (2002). "Cobertura con futuros de títulos de capital". *Momento Económico*, No. 120, pp. 14-34.

58.8 Ejercicios

58.1 Si se define el precio de un bono cuponado que paga cupones C_i , en fechas τ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, como

$$B = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{1 + r\tau_i},$$

encuentre la duración y convexidad de B .

58.2 Considere un contrato forward sobre un bono cupón cero. El contrato forward tiene plazo $[t, T]$ y el bono $[T, T + M]$. En este caso, el precio forward satisface

$$F_{t,T,T+M} = N \left[\frac{1 + R(t, T)(T - t)}{1 + R(t, T + M)(T + M - t)} \right].$$

Denote $R_{t,T} = R(t, T)$ y suponga que $R(t, T + M) = R_{t,T} + \epsilon$, $\epsilon > 0$. Encuentre la duración y convexidad de $F_{t,T,T+M}$.

58.3 Especifique cuáles son las condiciones que deben satisfacer A_i , D_i y C_i , $i = 1, 2, 3, 4$, para que el determinante de la matriz en el siguiente sistema sea diferente de cero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & A_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ A_u \\ D_u \\ C_u \end{pmatrix}.$$

58.4 Si la dinámica estocástica de la tasa corta, r_t , es conducida por una ecuación de la forma:

$$dr_t = \alpha(r_t, t)dt + \beta(r_t, t)dW_t,$$

donde $\alpha(r_t, t)$ y $\beta(r_t, t)$ son funciones conocidas y $B(r_t, t; T)$ es el precio de un bono cupón cero muestre, utilizando el lema de Itô, que

$$\begin{aligned} 0 &= \left(x_1 \frac{\partial B_1}{\partial t} + x_2 \frac{\partial B_2}{\partial t} + x_3 \frac{\partial B_3}{\partial t} + x_4 \frac{\partial B_4}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt \\ &\quad + \left(x_1 \frac{\partial B_1}{\partial r_t} + x_2 \frac{\partial B_2}{\partial r_t} + x_3 \frac{\partial B_3}{\partial r_t} + x_4 \frac{\partial B_4}{\partial r_t} - \frac{\partial u}{\partial r_t} \right) dr_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \beta(r_t, t)^2 \left(x_1 \frac{\partial^2 B_1}{\partial r_t^2} + x_2 \frac{\partial^2 B_2}{\partial r_t^2} + x_3 \frac{\partial^2 B_3}{\partial r_t^2} + x_4 \frac{\partial^2 B_4}{\partial r_t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial r_t^2} \right) dt. \end{aligned}$$

58.5 Calcule la duración y convexidad de un bono cupón cero cuando la dinámica de la tasa corta es conducida por los modelos de Merton y Vasicek.

X. TÉCNICAS DE AJUSTE DE CURVAS DE RENDIMIENTO

- 59. El modelo de Nelson Siegel
 - 60. Polinomios de Chebyshev
 - 61. Suavización con Kernels
 - 62. Splines cúbicos
 - 63. Mínimos cuadrados con restricciones

CAPÍTULO 59

EL MODELO DE NELSON Y SIEGEL

Conceptos básicos de este capítulo:

- Soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden
- Dinámica de la tasa forward instantánea
- Curva de rendimiento de bonos cupón cero
- Modelos paramétricos de una curva de rendimiento
- Reversión a la media

59.1 Introducción

El modelo de Nelson y Siegel (1987) proporciona un método de estimación paramétrica de una curva de rendimiento. A diferencia de los modelos de Vasicek (1977), Cox, Ingersoll y Ross (1985), y Hull y White (1990), entre otros, el modelo de Nelson y Siegel se concentra en la evolución de la tasa forward instantánea y no en la dinámica de la tasa corta. La curva de rendimiento se obtiene como el promedio de valores futuros de la tasa forward instantánea y no como el promedio de valores futuros de la tasa corta.

El modelo de Nelson y Siegel es un modelo no polinomial que elimina cambios abruptos en la estructura de plazos de la tasa de interés, sobre todo en el largo plazo. Este modelo es muy popular en los mercados de dinero de muchos países. Más aún, este modelo se utiliza en la mayoría de bancos centrales de los países desarrollados.

59.2 Dinámica propuesta para la tasa forward instantánea

El modelo Nelson-Siegel se basa en la premisa de que la dinámica de la tasa forward instantánea puede ser modelada por la solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, la cual presenta formas muy variadas (monótona, encorvada, sigmoidea, etc.). Particularmente, Nelson y Siegel modelan el comportamiento de la tasa forward con la solución de una ecuación diferencial de segundo grado con raíces iguales y reales. Evidentemente, el modelo Nelson-Siegel no utiliza argumentos de equilibrio general y, en consecuencia, carece de cualquier interpretación económica del comportamiento de los agentes y de los mercados en que estos participan.

59.3 Tasa forward instantánea y curva de rendimiento

Uno de los conceptos centrales en el estudio de modelos de tasas de interés es el de tasa forward instantánea. Considere una inversión de una unidad monetaria en un periodo $[t, T]$ a una tasa continuamente capitalizable $R(t, T)$. El monto total, principal más intereses, que genera esta inversión en el vencimiento, T , está dado por

$$I(t, T) = \exp\{R(t, T)(T - t)\}.$$

Si esta cantidad se reinvierte en el periodo $[T, T + \Delta T]$. El monto total de la inversión, en la fecha $T + \Delta T$, es

$$\begin{aligned} L(t, T, T + \Delta T) &= I(t, T) \exp\{f(t, T, T + \Delta T)\Delta T\} \\ &= \exp\{R(t, T)(T - t)\} \exp\{f(t, T, T + \Delta T)\Delta T\}, \end{aligned}$$

donde $f(t, T, T + \Delta T)$ es la tasa forward aplicable en $[T, T + \Delta T]$ con referencia a la fecha t . Otra alternativa consiste en invertir una unidad monetaria en un plazo igual a la suma de los plazos anteriores, es decir, en $[t, T + \Delta T]$. En este caso, el monto total que genera esta inversión en el vencimiento está dado por

$$J(t, T + \Delta T) = \exp\{R(t, T + \Delta T)(T + \Delta T - t)\}.$$

Si se supone que el mercado de este tipo de inversiones está en equilibrio, entonces no existen oportunidades de arbitraje para generar ganancias en las dos alternativas de inversión anteriormente introducidas. En consecuencia se sigue que $L(t, T, T + \Delta T) = J(t, T + \Delta T)$, es decir,

$$R(t, T)(T - t) + f(t, T, T + \Delta T)\Delta T = R(t, T + \Delta T)(T + \Delta T - t).$$

Dado que $B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$, la ecuación anterior se transforma en

$$-\ln B(t, T) + f(t, T, T + \Delta T)\Delta T = -\ln B(t, T + \Delta T),$$

lo cual implica, a su vez, que

$$\frac{B(t, T)}{B(t, T + \Delta T)} = \exp \{f(t, T, T + \Delta T)\Delta T\}.$$

Al despejar la tasa forward en la expresión anterior se obtiene

$$f(t, T, T + \Delta T) = -\left(\frac{\ln B(t, T + \Delta T) - \ln B(t, T)}{\Delta T}\right).$$

La tasa forward instantánea se define como:

$$f(t, T) \equiv \lim_{\Delta T \rightarrow 0} f(t, T, T + \Delta T) = -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T}. \quad (59.1)$$

Observe que de la ecuación anterior se desprende que

$$\begin{aligned} \int_t^T f(t, s)ds &= - \int_t^T d \ln B(t, s) \\ &= -\ln B(t, T) + \ln B(t, t). \end{aligned}$$

Ahora bien, en virtud de que $B(t, t) = 1$, se obtiene

$$\int_t^T f(t, s)ds = -\ln B(t, T).$$

Por lo tanto, el precio de un bono cupón cero que paga una unidad monetaria al vencimiento satisface:

$$B(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(t, s)ds \right\}.$$

Por otro lado, dado que $B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$, se puede escribir

$$R(t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T f(t, s)ds. \quad (59.2)$$

Es decir, la curva de rendimiento se obtiene como el promedio de valores futuros de la tasa forward instantánea.

59.4 Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes

En esta sección se revisa, brevemente, la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes. Se estudian los casos cuando la ecuación característica tiene raíces reales, ya sea distintas o iguales.

59.4.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con raíces reales y distintas

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogénea, en $x = x(t)$, con coeficientes constantes y condiciones finales se puede escribir como:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) - \beta_0 b = 0, \quad t < T, \quad x(T) = A \quad \text{y} \quad \dot{x}(T) = B. \quad (59.3)$$

Las cantidades a , b y β_0 se suponen conocidas. Considere, primero, la ecuación diferencial homogénea asociada a (59.3), la cual está dada por

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0, \quad t < T. \quad (59.4)$$

La ecuación característica asociada a (59.4) se define mediante

$$m^2 + am + b = 0. \quad (59.5)$$

Las raíces de (59.5) se encuentran mediante

$$m_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Para asegurar que $m_{1,2} \in \mathbb{R}$, es necesario suponer que $a^2 > 4b$. En este caso, la solución general de la ecuación diferencial homogénea (59.4) satisface

$$x_c(t) = \beta_1 e^{m_1(t-T)} + \beta_2 e^{m_2(t-T)}, \quad t < T. \quad (59.6)$$

Observe que la sustitución de (59.6) en (59.4) conduce a

$$(m_1^2 + am_1 + b)\beta_1 e^{m_1(t-T)} + (m_2^2 + am_2 + b)\beta_2 e^{m_2(t-T)} = 0.$$

Si se denotan $m_1 = 1/\tau_1$ y $m_2 = 1/\tau_2$, entonces (59.6) se puede reescribir como

$$x_c(t) = \beta_1 e^{-(T-t)/\tau_1} + \beta_2 e^{-(T-t)/\tau_2}, \quad t < T, \quad (59.7)$$

lo que justifica la utilidad de la ecuación característica (59.5) en la solución de (59.3). Falta ahora determinar una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea (59.3). Si se supone una solución de la forma

$$x_p(t) = \alpha + \gamma(t - T), \quad (59.8)$$

la sustitución de (59.8) en (59.3) conduce a

$$a\gamma + b[\alpha + \gamma(t - T)] - \beta_0 b = 0.$$

Claramente, $\gamma = 0$, se sigue entonces que $\alpha = \beta_0$. En consecuencia, $x_p(t) = \beta_0$. La solución general de (59.3) está dada por

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau_1} + \beta_2 e^{-(T-t)/\tau_2}, \quad t < T. \quad (59.9)$$

Si además se eligen A y B en (59.3) de tal forma que

$$x(T) = A = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \quad \text{y} \quad \dot{x}(T) = B = \frac{\beta_1}{\tau_1} + \frac{\beta_2}{\tau_2}, \quad (59.10)$$

entonces (59.9) es la única solución de (59.3) que satisface las condiciones finales en (59.10).

59.4.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con raíces reales e iguales

Considere ahora la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes y condiciones finales de la forma

$$\ddot{x}(t) - 2a\dot{x}(t) + a^2x(t) - \beta_0a^2 = 0, \quad t < T, \quad (59.11)$$

con

$$x(T) = A \quad \text{y} \quad \dot{x}(T) = B.$$

Considere, primero, la ecuación diferencial homogénea asociada a (59.11), la cual está dada por

$$\ddot{x}(t) - 2a\dot{x}(t) + a^2x(t) = 0, \quad t < T. \quad (59.12)$$

La ecuación característica asociada a (59.12) se define mediante

$$m^2 - 2am + a^2 = (m - a)^2 = 0. \quad (59.13)$$

Es decir, la única raíz de (59.13) es a . En este caso, una solución de la ecuación diferencial homogénea (59.12) está dada por

$$x_c(t) = \beta_1 e^{a(t-T)}, \quad t < T. \quad (59.14)$$

Observe que la sustitución de (59.14) en (59.12) conduce a

$$(m^2 - 2am + a^2)\beta_1 e^{a(t-T)} = 0. \quad (59.15)$$

Otra solución, linealmente independiente, de (59.12) se obtiene al suponer un candidato de solución de la forma $y_c(t) = u(t)e^{a(t-T)}$. Note que en este caso

$$\dot{y}_c(t) = \dot{u}(t)e^{a(t-T)} + au(t)e^{a(t-T)}$$

y

$$\ddot{y}_c(t) = \ddot{u}(t)e^{a(t-T)} + 2a^2\dot{u}(t)e^{a(t-T)} + au(t)e^{a(t-T)}.$$

Al sustituir las derivadas anteriores en (59.12), se tiene que

$$0 = [\ddot{u}(t) + 2a^2\dot{u}(t) + a^2u(t) - 2a\dot{u}(t) - 2a^2u(t) + a^2u(t)]e^{a(t-T)}$$

ó

$$0 = \ddot{u},$$

lo cual implica que

$$u(t) = \alpha + \gamma(t - T).$$

Es decir,

$$y_c(t) = [\alpha + \gamma(t - T)]e^{a(t-T)}. \quad (59.16)$$

Resta determinar una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea (59.11). Si se supone una solución de la forma

$$x_p(t) = \theta + \phi(t - T), \quad (59.17)$$

la sustitución de (59.17) en (59.11) conduce a

$$-2a\phi + a^2(\theta + \phi(t - T)) - \beta_0a^2 = 0.$$

En este caso, $\phi = 0$, se sigue entonces que $\theta = \beta_0$. En consecuencia, $x_p(t) = \beta_0$. La solución general de (59.11) está dada por

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) + y_c(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{a(t-T)} + \beta_2[\alpha + \gamma(t - T)]e^{a(t-T)}, \quad t < T. \quad (59.18)$$

Si además se eligen A y B en (59.11) de tal forma que se impongan las condiciones

$$\begin{cases} x(T) = A = \beta_0 + \beta_1, \\ \dot{x}(T) = B = \frac{1}{\tau}(\beta_1 - \beta_2), \end{cases} \quad (59.19)$$

donde $a = 1/\tau$, se sigue que $\alpha = 0$, $\gamma = -a$ y

$$x(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau} + \beta_2 \left(\frac{T-t}{\tau} \right) e^{-(T-t)/\tau}, \quad t < T. \quad (59.20)$$

Así, (59.20) es la única solución de (59.11) que satisface las condiciones finales establecidas en (59.19).

59.5 Dinámica de la tasa forward instantánea con base en una solución con raíces reales y distintas

La dinámica de la tasa forward se modela a través de la solución de una ecuación diferencial de segundo grado con raíces reales y distintas, de tal manera que

$$f(t, T) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau_1} + \beta_2 e^{-(T-t)/\tau_2}. \quad (59.21)$$

El primer parámetro, β_0 , puede verse como la contribución de la tasa forward en el largo plazo, ya que los otros términos tienden a cero, exponencialmente, cuando el vencimiento, T , aumenta. Los dos términos siguientes en (59.21) pueden verse como la contribución de la tasa forward en el corto plazo. Estos términos actúan fundamentalmente en vencimientos pequeños ya que cuando el plazo se incrementa tienden rápidamente a cero. Evidentemente, la tasa forward de largo plazo satisface $f(t, \infty) = \beta_0$ y la tasa forward de corto plazo $f(t, t) = r_t = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$.

En virtud de (59.2) y (59.21), la curva de rendimiento, de un bono cupón cero, está dada por

$$\begin{aligned} R(t, T) &= \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds \\ &= \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-(T-t)/\tau_1}}{\frac{T-t}{\tau_1}} + \beta_2 \frac{1 - e^{-(T-t)/\tau_2}}{\frac{T-t}{\tau_2}}. \end{aligned} \quad (59.22)$$

Claramente, $R(t, \infty) = \beta_0$. Con el propósito de determinar la tasa corta a partir de la curva de rendimiento, considere el cambio de variable $v = T - t$ en (59.22), entonces

$$\begin{aligned} r_t &= \lim_{v \rightarrow 0} R(t, t+v) \\ &= \beta_0 + \beta_1 \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-v/\tau_1}}{\frac{v}{\tau_1}} + \beta_2 \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-v/\tau_2}}{\frac{v}{\tau_2}}. \end{aligned}$$

En este caso la regla de L'Hôpital conduce a

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2.$$

Por lo anterior es importante destacar que las cantidades β_0 y $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2$ tienen que ser positivas.

59.6 Dinámica de la tasa forward instantánea con base en una solución con raíces reales e iguales.

En caso de que las raíces de la ecuación característica sean reales e iguales a τ , se supone que la tasa forward es conducida por la ecuación

$$\begin{aligned} f(t, T) &= \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau} + \beta_2 \left(\frac{T-t}{\tau} \right) e^{-(T-t)/\tau} \\ &= \beta_0 + \left[\beta_1 + \beta_2 \left(\frac{T-t}{\tau} \right) \right] e^{-(T-t)/\tau}. \end{aligned} \quad (59.23)$$

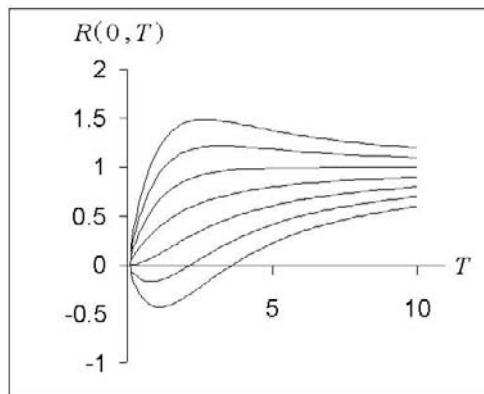
Como antes, el primer parámetro, β_0 , puede verse como la contribución de la tasa forward en el largo plazo, ya que los otros términos tienden rápidamente (exponencialmente) a cero cuando el vencimiento, T , aumenta. El segundo término en (59.23) puede verse como la contribución de la tasa forward en el corto plazo ya que al incrementar el plazo tiende rápidamente a cero. El tercer término se incrementa con el plazo al vencimiento, partiendo de $f(t, t) = 0$, hasta alcanzar un máximo para después tender a cero otra vez. Un valor positivo del parámetro τ determina la velocidad con la que el segundo y tercer términos convergen a cero. El inverso $1/\tau$ corresponde a la velocidad con la que la tasa forward instantánea converge a su valor de largo plazo β_0 . Así, se tiene un mecanismo de reversión a la media comparable con el de los modelos de Vasicek, Cox, Ingersoll y Ross, y Hull y White. En este caso, es fácil verificar que la curva de rendimiento satisface

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - e^{-(T-t)/\tau}}{\frac{T-t}{\tau}} - \beta_2 e^{-(T-t)/\tau}. \quad (59.24)$$

En efecto, si se utiliza el cambio de variable $u = -(T-s)/\tau$, entonces

$$\begin{aligned} \int_t^T \left(\frac{T-s}{\tau} \right) e^{-(T-s)/\tau} ds &= -\tau \int_{-(T-t)/\tau}^0 ue^u du \\ &= -\tau ue^u \Big|_{-(T-t)/\tau}^0 + \tau \int_{-(T-t)/\tau}^0 e^u du \\ &= -(T-t)e^{-(T-t)/\tau} + \tau \left(1 - e^{-(T-t)/\tau} \right). \end{aligned}$$

A partir del resultado anterior se obtiene inmediatamente (59.24). En conclusión, la curva de rendimiento en (59.24) se determina a partir del comportamiento futuro de las tasas forward y, en consecuencia, por cuatro parámetros, a saber β_0 , β_1 , β_2 y τ . La Gráfica 59.1 muestra el comportamiento de $R(0, T)$ con $\tau = 1$, $\beta_0 = 1$ y $\beta_1 = -1$ para diferentes valores de β_2 en un horizonte de $T = 10$ años. Las funciones en la Gráfica 59.1 corresponden, de abajo hacia arriba, a los valores $\beta_2 = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.



Gráfica 59.1 Comportamiento de $R(0, T)$ con $\tau = 1$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -1$. Las funciones en la gráfica corresponden, de abajo hacia arriba, a los valores $\beta_2 = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

A continuación se obtiene la tasa corta a partir de la curva de rendimiento. Considere, primero, el cambio de variable en (59.24) $v = T - t$, entonces

$$\begin{aligned} r_t &= \lim_{v \rightarrow 0} R(t, t+v) \\ &= \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-v/\tau}}{\frac{v}{\tau}} - \beta_2 \lim_{v \rightarrow 0} e^{-v/\tau}. \end{aligned}$$

En este caso, la regla de L'Hôpital conduce a $r_t = \beta_0 + \beta_1$, con lo cual, la tasa corta permanece constante en el tiempo, es decir,

$$r_t = r_s = \beta_0 + \beta_1, \quad \text{para } t \neq s.$$

Asimismo,

$$R(t, \infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = \beta_0,$$

de donde

$$\beta_1 = r_t - R(t, \infty).$$

En el modelo de Nelson-Siegel, β_0 , β_1 , β_2 y τ son cuatro parámetros por determinar. Claramente, si se quieren estimar económicamente estos parámetros a partir de valores de mercado, el modelo resultante es no lineal en τ . El primer paso es fijar un valor de τ que sea consistente con el comportamiento de la reversión a la media en las tasas de interés y estimar los parámetros restantes. Observe que valores pequeños de τ corresponden a una rápida reducción de las variables independientes y, por lo tanto, conducirán a una curva que se ajusta mejor en el corto plazo. Recíprocamente, valores grandes de τ incrementan rápidamente los valores de las variables independientes produciendo un mejor ajuste en el largo plazo. El procedimiento para seleccionar un valor apropiado de τ consiste en ajustar el modelo, con mínimos cuadrados ordinarios, para diferentes valores de τ , tomando en cuenta que se deben satisfacer las condiciones $R(0, \infty) = \beta_0 > 0$ y $r_t = \beta_0 + \beta_1 > 0$. Un valor de τ adecuado será aquel que produzca estimadores estadísticamente significativos que cumplan con las condiciones anteriormente especificadas. En caso de que existan varios valores de τ con estas características, se toma entonces aquel que produzca el mayor valor de R^2 . El parámetro β_0 está asociado con el comportamiento de $R(t, T)$ en el largo plazo y la suma $\beta_0 + \beta_1$ con el comportamiento de $R(t, T)$ en el corto plazo.

59.7 Un ejemplo de aplicación del modelo de Nelson-Siegel

En esta sección se presenta un ejemplo ilustrativo del modelo de Nelson-Siegel. El Cuadro 59.1 muestra los rendimientos (en el mercado secundario) de bonos cupón cero emitidos por el gobierno mexicano a distintos plazos, específicamente algunos de los plazos que se operaron el 7 de Mayo de 2004.

$R(0, T_i)$	T_i
0.0595	1/360
0.0647	7/360
0.0671	28/360
0.0703	56/360
0.0711	91/360
0.0718	136/360
0.0724	175/360
0.0766	258/360
0.0771	1
0.0773	388/360
0.0775	451/360
0.0777	542/360
0.0779	2

Cuadro 59.1 Rendimientos de mercado de bonos cupón cero a distintos plazos (Mayo 7, 2004).

En virtud de la ecuación (59.24), con $t = 0$, se puede escribir

$$R(0, T_i) = \delta_0 + \delta_1 \frac{1 - e^{-T_i/\tau}}{\frac{T_i}{\tau}} + \delta_2 e^{-T_i/\tau} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (59.25)$$

donde $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq N}$ es ruido blanco Gaussiano. En este caso, los estimadores de mínimos cuadrados (y de máxima verosimilitud) de los parámetros $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ satisfacen:

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\delta}_0, \quad \hat{\beta}_1 = \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2 \quad \text{y} \quad \hat{\beta}_2 = -\hat{\delta}_2.$$

Observe que $\hat{\delta}_0$ está asociada a la tasa de largo plazo y $\hat{\delta}_1$ a la tasa corta.

Los estimadores de los parámetros para diferentes valores de τ se muestran en el Cuadro 59.2. Como puede observarse, si $\tau = 0.1$, $\hat{\delta}_2$ no es estadísticamente significativa. Si $\tau = 0.5$, $\hat{\delta}_1$ no es significativa. Si $\tau = 1$ todos los estimadores de los parámetros son significativos. En estos tres casos, $R(0, \infty) = \hat{\beta}_0 > 0$ y R^2 es alta. Si $\tau = 10$ ó $\tau = 100$ mejora la significancia estadística de los parámetros aunque la R^2 disminuye, sin embargo, $R(0, \infty) = \hat{\beta}_0 < 0$. Por lo tanto, entre estas cinco alternativas, el caso $\tau = 1$ proporciona un modelo aceptable. En este caso, el número de datos es 13 y en el modelo se estiman tres parámetros, así el número de grados de libertad es $\nu = 10$. Si se consideran los valores $t_{10,0.025} = 2.228$ y $t_{10,0.005} = 3.169$ de tablas de las colas de la distribución $t_{\nu,\alpha}$, entonces $\hat{\delta}_0$ y $\hat{\delta}_2$ son significativas al 99% de confianza y $\hat{\delta}_1$ es significativa al 95% de confianza (véase el Cuadro 59.3). Por último, los valores estimados de las tasas corta y larga son 9% y 4%, respectivamente. Por supuesto, otros valores de τ pueden examinarse.

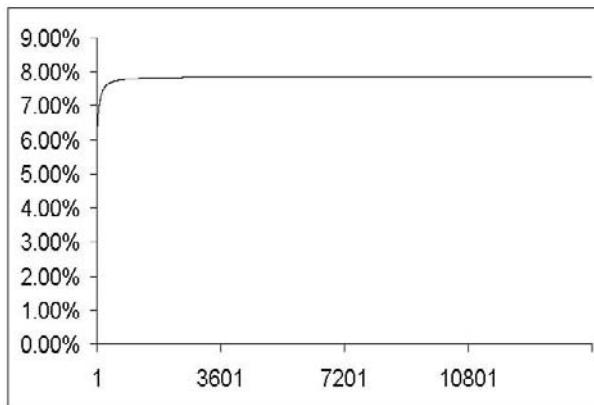
τ	$\hat{\delta}_0$ (estadístico t)	$\hat{\delta}_1$ (estadístico t)	$\hat{\delta}_2$ (estadístico t)	R^2
0.1	0.0787 (93.330)	-0.0202 (-4.501)	0.0030 (0.698)	0.95
0.5	0.0737 (159.673)	0.01702 (1.462)	-0.0278 (-3.266)	0.93
1	0.04801 (4.077)	0.0903 (2.973)	-0.0747 (-3.885)	0.92
10	-4.0128 (-3.935)	8.5754 (4.084)	-4.4982 (-4.162)	0.89
100	-420.610 (-4.159)	845.396 (4.168)	-424.721 (-4.175)	0.88

Cuadro 59.2 Estimadores de los parámetros para diferentes valores de τ .

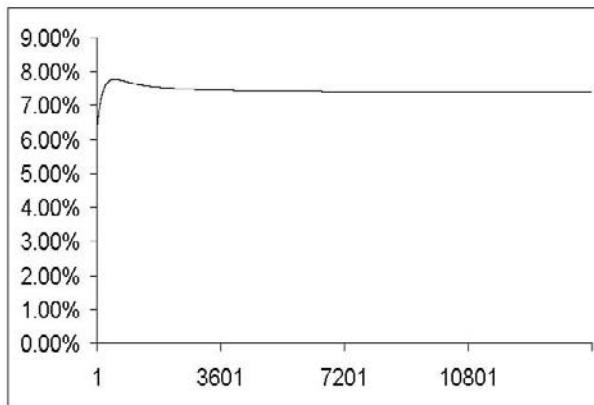
Parámetros	Estimación	Error estándar	Estadístico t	Prob.
δ_0	0.0480	0.0117	4.0779	0.0022
δ_1	0.0903	0.0303	2.9737	0.0139
δ_2	-0.0747	0.0192	-3.8852	0.0030

Cuadro 59.3 Otras estadísticas del modelo con $\tau = 1$ (estadístico $F = 58.865$).

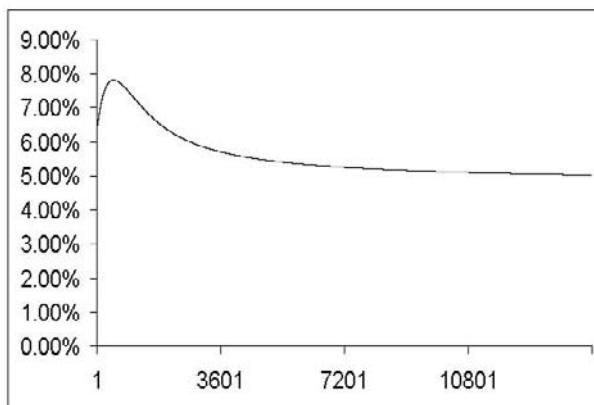
Las Gráficas 59.2-59.6 presentan las curvas de rendimientos estimadas con el modelo de Nelson-Siegel para diferentes valores del parámetro τ . En todos los casos, en el largo plazo, la curva de rendimiento se aproxima, asintóticamente a β_0 .



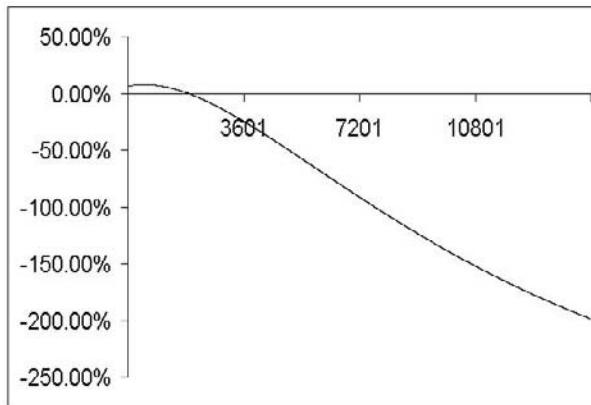
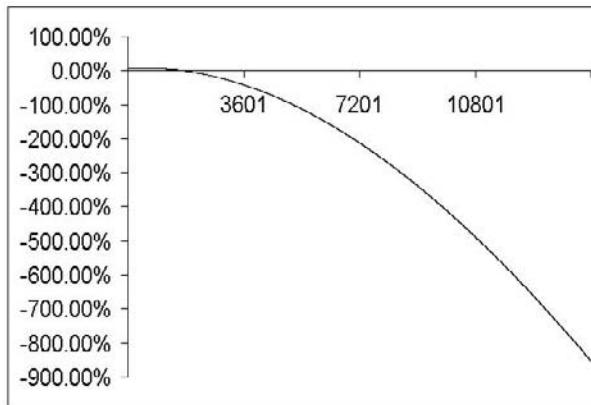
Gráfica 59.2 Curva de rendimientos estimada con $\tau = 0.1$
(eje horizontal en días).



Gráfica 59.3 Curva de rendimientos estimada con $\tau = 0.5$.



Gráfica 59.4 Curva de rendimientos estimada con $\tau = 1$.

Gráfica 59.5 Curva de rendimientos estimada con $\tau = 10$.Gráfica 59.6 Curva de rendimientos estimada con $\tau = 100$.

59.8 Análisis comparativo entre los modelos de Nelson-Siegel y Vasicek

Evidentemente, los modelos de Nelson y Siegel (1987) y de Vasicek (1977) no son comparables, ya que el primero parte de la dinámica de la tasa forward y estima una curva de rendimiento con precios de mercado y el segundo parte de la dinámica de la tasa corta y utiliza argumentos de equilibrio general para determinar una curva de rendimiento. Sin embargo, es interesante comparar las propiedades geométricas de las curvas de rendimiento obtenidas con ambos modelos. Para ello, denote $a = 1/\tau$, así la curva de rendimiento del modelo de Nelson-Siegel se puede escribir como

$$\begin{aligned} R_{NS}(t, T) &= R_{NS}(t, \infty) + [r_t - R_{NS}(t, \infty)] \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) \\ &\quad + \beta_2 \left(\frac{e^{a(T-t)} - 1}{a(T-t)} - 1 \right) e^{-a(T-t)}, \end{aligned} \tag{59.26}$$

donde

$$R_{NS}(t, \infty) = \beta_0 \quad \text{y} \quad r_t - R_{NS}(t, \infty) = (\beta_0 + \beta_1) - \beta_0 = \beta_1.$$

La expresión (59.26) se puede comparar con la curva de rendimiento generada por el modelo de Vasicek

$$\begin{aligned} R_V(t, T) &= R_V(t, \infty) + [r_t - R_V(t, \infty)] \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{4a^2} \left(\frac{e^{a(T-t)} - 2 + e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) e^{-a(T-t)}, \end{aligned}$$

donde

$$R_V(t, \infty) = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}.$$

Observe que para $a(T - t)$ suficientemente pequeña, la aproximación

$$e^{-a(T-t)} \approx 1 - a(T-t)$$

es válida, entonces

$$\begin{aligned} R_V(t, T) &\approx R_V(t, \infty) + [r_t - R_V(t, \infty)] \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) \\ &+ \frac{\sigma^2}{4a^2} \left(\frac{e^{a(T-t)} - 1}{a(T-t)} - 1 \right) e^{-a(T-t)}. \end{aligned}$$

Si se escribe $\beta_0 = b - (\sigma^2/2a^2)$ y $\beta_2 = \sigma^2/4a^2$, se sigue que

$$R_{NS}(t, T) \approx R_V(t, T).$$

Claramente, cuando aumenta el plazo, T , la diferencia entre $R_{NS}(t, T)$ y $R_V(t, T)$ disminuye, aunque hay que tomar en cuenta que la aproximación $e^{-a(T-t)} \approx 1 - a(T-t)$ se deteriora conforme $a(T-t)$ crece.

59.9 Conclusiones y recomendaciones

Se ha presentado un modelo muy versátil en la determinación de la curva de rendimiento de bonos cupón cero, el modelo de Nelson-Siegel. Es importante destacar que en mercados primarios se cuenta con pocos datos, ya que no se negocian bonos a todos los plazos, incluso esta situación se presenta en el mercado secundario. La escasez de datos podría ser una limitación en la estimación del modelo econométrico.

59.10 Bibliografía sugerida

- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates." *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 363-384.
- Hull, J. and A. White (1990). "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities". *The Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, pp. 573-592.
- Nelson, C. R. and A. F. Siegel (1987). "Parsimonious Modeling of Yield Curves". *The Journal of Business*, Vol. 60, No. 4, pp. 473-489.
- Siegel, A. F. and C. R. Nelson (1988). "Long-Term Behavior of Yield Curves". *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 23, No. 1, pp. 105-110.
- Vasicek, O. A. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure." *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No. 2, pp. 177-188.
- Venegas-Martínez, F. (2003). "Inmunización de flujos financieros con futuros de tasas de interés: un análisis de duración y convexidad con el modelo de Nelson y Siegel". *Revista de Administração Mackenzie*, Vol. 4, No. 1, pp. 107-123.

59.11 Ejercicios

59.1 Considere la solución

$$x(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau_1} + \beta_2 e^{-(T-t)/\tau_2}, \quad t < T$$

de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) - \beta_0 b = 0, \quad t < T.$$

Si se imponen condiciones finales $x(T) = A$ y $\dot{x}(T) = B$ discuta cómo se determinan β_1 y β_2 .

Solución: Observe, primero, que β_0 es una cantidad conocida. De esta manera, las condiciones finales implican $\beta_1 = A - \beta_0$ y $\beta_2 = \tau_2 B - (\tau_2/\tau_1)(A - \beta_0)$.

59.2 Resuelva la ecuación diferencial

$$2\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + x(t) - 1 = 0, \quad t < T,$$

con condiciones finales $x(T) = \dot{x}(T) = 1$.

59.3 Resuelva la ecuación diferencial

$$2\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 4x(t) - 4 = 0, \quad t < T,$$

con $x(T) = \dot{x}(T) = 1$.

59.4 Suponga que la dinámica de la tasa forward instantánea está dada por la solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$f(t, T) = \beta_0 + \left[\beta_1 + \beta_2 \left(\frac{T-t}{\tau} \right) \right] e^{-(T-t)/\tau}.$$

Demuestre que

$$R(t, T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - e^{-(T-t)/\tau}}{\frac{T-t}{\tau}} - \beta_2 e^{-(T-t)/\tau}.$$

Solución: Es suficiente definir el cambio de variable $u = -(T-s)/\tau$ y observar que

$$\begin{aligned} \int_t^T \left(\frac{T-s}{\tau} \right) e^{-(T-s)/\tau} ds &= -\tau \int_{-(T-t)/\tau}^0 ue^u du \\ &= -\tau ue^u \Big|_{-(T-t)/\tau}^0 + \tau \int_{-(T-t)/\tau}^0 e^u du \\ &= -(T-t)e^{-(T-t)/\tau} + \tau \left(1 - e^{-(T-t)/\tau} \right). \end{aligned}$$

59.5 Considere el siguiente modelo de regresión no lineal, en los parámetros $(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \tau)$,

$$R(0, T_i) = \delta_0 + \delta_1 \frac{1 - e^{-T_i/\tau}}{\frac{T_i}{\tau}} + \delta_2 e^{-T_i/\tau} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

¿Cómo podría estimar τ ?

59.6 Utilice la aproximación $e^{-T_i/\tau} \approx 1 - (T_i/\tau)$ en el modelo anterior y discuta los resultados.

CAPÍTULO 60

APROXIMACIÓN A UNA CURVA DE RENDIMIENTO CON POLINOMIOS DE CHEBYSHEV: TEOREMA DE HAAR

Conceptos básicos de este capítulo:

- Espacios normados de funciones continuas
- La mejor aproximación uniforme (en norma uniforme)
- Condición de Haar
- Puntos extremos
- Teorema de Haar sobre existencia y unicidad de la mejor aproximación
- Polinomios de Chebyshev
- Aproximación de una curva de rendimiento mediante Polinomios de Chebyshev

60.1 Introducción

En este capítulo se desarrolla un procedimiento para aproximar una curva de rendimiento mediante polinomios de Chebyshev, llamados así en honor de Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894), destacado matemático ruso. En la literatura, se hace referencia a este mismo matemático como Chebychev o Tchebyshev, pues su apellido en ruso es “Чебышев” y algunos intentos por traducirlo han sido: Chebyshev, Chebychev o Tchebyshev.

Uno de los resultados centrales de este capítulo es la construcción de los polinomios de Chebyshev, la cual se basa en el teorema de Haar. En 1916, Alfred Haar en su artículo “Über einige Eigenschaften der orthogonalen Funktionensysteme” publicado en el “American Journal of Mathematics” proporciona las condiciones que garantizan la existencia y unicidad de la mejor aproximación uniforme (con la norma uniforme) a cualquier monomio de grado fijo. De esta manera, bajo el supuesto de que la dinámica de la curva de rendimiento sigue un polinomio de cierto grado, cada uno de sus monomios será aproximado uniformemente por polinomios de Chebyshev.

60.2 Espacios normados de funciones continuas

Sea $\mathfrak{C}[a, b]$, $a < b$, el conjunto de funciones continuas definidas en $[a, b]$ que toman valores en \mathbb{R} . Si se introduce la norma

$$\|f\|_u = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad (60.1)$$

entonces $(\mathfrak{C}[a, b], \|\cdot\|_u)$ es espacio normado completo, es decir, es un espacio de Banach. En este capítulo, se tendrá particular interés en funciones definidas en el intervalo $[-1, 1]$. El cambio de un intervalo arbitrario $[a, b]$ al intervalo $[-1, 1]$ es una tarea sencilla. En efecto, sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x)$, y defina el cambio de variable:

$$t = -\frac{b-x}{b-a} + \frac{x-a}{b-a} = \frac{2x-(a+b)}{b-a},$$

entonces cuando $x = a$, $t = -1$, y cuando $x = b$, $t = 1$. De esta manera, si se define

$$\hat{f}(t) = f\left(\frac{t(b-a)+(a+b)}{2}\right) = f\left(\frac{(1+t)b+(1-t)a}{2}\right),$$

se tiene que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se transforma en $\hat{f} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. De esta manera, $\mathfrak{C}[a, b]$ se transforma en $\mathfrak{C}[-1, 1]$. En este caso, la norma de \hat{f} queda definida por:

$$\|\hat{f}\|_u = \max_{t \in [-1, 1]} |\hat{f}(t)|.$$

En lo que sigue, por simplicidad, se omitirá en la notación el símbolo “ \wedge ” cuando se haga referencia a elementos del espacio $(\mathfrak{C}[-1, 1], \|\cdot\|_u)$.

60.3 La mejor aproximación uniforme a una función

Sea Y un subespacio de dimensión n de $\mathfrak{C}[a, b]$ y sea $f \in \mathfrak{C}[a, b]$, se desea encontrar $h \in Y$, tal que

$$\|f - h\|_u = \inf_{y \in Y} \|f - y\|_u. \quad (60.2)$$

Es decir, se desea encontrar $h \in Y$ de tal manera que $\|f - h\|_u$ sea lo más pequeña posible. En este sentido, es común decir que $h \in Y$ es una mejor aproximación a f . Es importante destacar que podrían existir más de dos mejores aproximaciones. Si se define $g = f - h$, el problema planteado puede reexpresarse de la siguiente forma: se desea encontrar $h \in Y$ tal que

$$\|g\|_u = \|f - h\|_u \quad (60.3)$$

sea lo más pequeña posible, o bien que g diste de la función cero lo menos posible con respecto de la norma $\|\cdot\|_u$, que de ahora en adelante será llamada norma uniforme.

60.4 Condición de Haar sobre los ceros de una función

Se dice que un subespacio Y de dimensión finita de $\mathfrak{C}[a, b]$ satisface la condición de Haar si todo $h \in Y$, $h \neq 0$, tiene a lo más $n - 1$ ceros en $[a, b]$. Alternativamente, Y satisface la condición de Haar si y sólo si cualquier $h \in Y$ con n o más ceros en $[a, b]$ es idénticamente cero.

Observe ahora que si $\mathcal{B}_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base de Y , entonces para todo $h \in Y$ existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tales que

$$h = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k.$$

De esta manera, el subespacio Y satisface la condición de Haar si y sólo si cualquier $h = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \in Y$ con n ceros en $t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b]$ es idénticamente cero. Por lo tanto, se satisfacen las siguientes n condiciones:

$$h(t_j) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k(t_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (60.4)$$

Asimismo, dado que $h \equiv 0$, se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Así, el sistema (60.4) en las incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, tiene como única solución al $0 \in Y$ si y sólo si el determinante

$$\Delta = \det([e_k(t_j)]_{1 \leq k, j \leq n}) \neq 0. \quad (60.5)$$

En otras palabras, la condición de Haar dice que para cualquier base $\mathcal{B}_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ y n distintos puntos t_1, t_2, \dots, t_n en $[a, b]$, $\Delta \neq 0$. Esta propiedad se utilizará repetidamente en el transcurso de este capítulo.

60.5 Lema de Haar sobre los puntos extremos de una función

Un hecho relevante de la condición de Haar es que ésta es suficiente para la unicidad de la mejor aproximación. Para verificar esta proposición es necesario demostrar, primero, el lema de Haar sobre los puntos extremos de una función.

Se dice que un punto t_0 es un punto extremo de $f(t) \in \mathfrak{C}[0, \pi]$, si $|f(t_0)| = \|f\|_u$. Así, un punto extremo satisface $f(t_0) = \|f\|_u$ ó $f(t_0) = -\|f\|_u$.

Suponga que Y es un subespacio de dimensión n del espacio $\mathfrak{C}[a, b]$ y que Y satisface la condición de Haar. Si para algún $f \in \mathfrak{C}[a, b]$ y un $h \in Y$ la función $g = f - h$ tiene menos de $n + 1$ puntos extremos, entonces h no es una mejor aproximación. En efecto, suponga que la función $g = f - h$ tiene $m \leq n$ puntos extremos t_1, \dots, t_m . Si $m < n$, se escogen $n - m$ puntos adicionales t_j en $[a, b]$ hasta tener n puntos distintos t_1, \dots, t_n ; no importa que no todos sean puntos extremos. Considere estos puntos extremos y una base $B_n\{e_1, \dots, e_n\}$ de Y , y defina el siguiente sistema no homogéneo de n ecuaciones lineales:

$$\sum_{k=1}^n \beta_k e_k(t_j) = g(t_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (60.6)$$

en las incógnitas β_1, \dots, β_n . Dado que Y satisface la condición de Haar, $\Delta \neq 0$. En consecuencia, el sistema (60.6) tiene una única solución $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_n$. Esta solución se utiliza para definir

$$h_0 = \tilde{\beta}_1 e_1 + \dots + \tilde{\beta}_n e_n,$$

así como

$$\hat{h} = h + \epsilon h_0, \quad \epsilon > 0.$$

Se demuestra a continuación que para un ϵ suficientemente pequeño, la función $\hat{g} = f - \hat{h}$ satisface

$$\|\hat{g}\|_u < \|g\|_u, \quad (60.7)$$

lo que contradice que h sea una mejor aproximación de f .

Con el fin obtener (60.7), se construye \hat{g} dividiendo el intervalo $[a, b]$ en dos subconjuntos, A y $B = [a, b] - A$, donde A contiene los puntos extremos t_1, \dots, t_m de g . Observe, primero, que en los puntos extremos $|g(t_i)| = \|g\|_u > 0$ donde $g = f - h \neq 0$. Además, en virtud de la definición de h_0 y (60.6), $h_0(t_i) = g(t_i)$. Por continuidad, para cada t_i existe un intervalo abierto A_i tal que en la unión de $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ se cumple que

$$\mu = \inf_{t \in A} |g(t)| > 0 \quad \text{y} \quad \inf_{t \in A} |2h_0(t)| \geq \|g\|_u. \quad (60.8)$$

Dado que $h_0(t_i) = g(t_i) \neq 0$, se tiene, por (60.8), que $h_0(t)/g(t) > 0$ para todo $t \in A$. Asimismo, (60.8) conduce a

$$\frac{h_0(t)}{g(t)} = \frac{|h_0(t)|}{|g(t)|} \geq \frac{\inf_{t \in A} |h_0(t)|}{\|g\|_u} \geq \frac{1}{2}.$$

Así,

$$-\frac{h_0(t)}{g(t)} \leq \frac{1}{2}. \quad (60.9)$$

Considere ahora $M_0 = \sup_{t \in A} |h_0(t)|$, entonces para todo número positivo $\epsilon < \mu/M_0$ y todo $t \in A$, se obtiene

$$\frac{\epsilon h_0(t)}{g(t)} = \frac{\epsilon |h_0(t)|}{|g(t)|} \leq \frac{\epsilon M_0}{\mu} < 1.$$

Es decir,

$$1 - \frac{\epsilon h_0(t)}{g(t)} > 0. \quad (60.10)$$

Ahora bien, dado que $\hat{g} = f - \hat{h} = f - h - \epsilon h_0 = g - \epsilon h_0$, se observa, en virtud de (60.9) y (60.10), que para todo $t \in A$ y $0 < \epsilon < \mu/M_0$, se satisface que

$$\begin{aligned} |\hat{g}(t)| &= |g(t) - \epsilon h_0(t)| \\ &= \left| g(t) \left(1 - \frac{\epsilon h_0(t)}{g(t)} \right) \right| \\ &= |g(t)| \left(1 - \frac{\epsilon h_0(t)}{g(t)} \right) \\ &\leq \|g\|_u \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \right) \\ &< \|g\|_u. \end{aligned} \quad (60.11)$$

Ahora, en el complemento $B = [a, b] - A$, el cual es cerrado, se define

$$M_1 = \max_{t \in B} |h_0(t)|, \quad M_2 = \max_{t \in B} |g(t)|.$$

Dado que A contiene a todos los puntos extremos de g , se tiene $M_2 < \|g\|_u$ y es posible escribir

$$\|g\|_u = M_2 + \eta,$$

donde $\eta > 0$. Si se escoge ahora un número positivo $\epsilon < \eta/M_1$, se tiene que $\epsilon M_1 < \eta$ y de esto se desprende que para todo $t \in B$

$$\begin{aligned} |\hat{g}(t)| &\leq |g(t)| + \epsilon|h_0(t)| \\ &= M_2 + \epsilon M_1 \\ &< \|g\|_u. \end{aligned}$$

Por lo anterior, se observa que $|\hat{g}(t)|$ no excede una cota superior independiente de $t \in B$ y estrictamente menor que $\|g\|_u$. Por otro lado, a partir de (60.11), si $t \in A$ y $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño $|\hat{g}(t)| < \|g\|_u$, $\hat{g} = g + \epsilon h_0$. Si se escoge $\epsilon < \min\{\mu/M_0, \eta/M_1\}$, se tiene que $\|\hat{g}\|_u < \|g\|_u$ para todo $t \in [a, b]$, lo cual, a su vez, implica que $\|\hat{g}\|_u < \|g\|_u$. Esto es justamente (60.7), lo que concluye la demostración del lema de Haar sobre puntos extremos.

60.6 El teorema de Haar sobre la unicidad de la mejor aproximación uniforme

Un resultado relevante sobre el concepto de aproximación uniforme es el teorema de Haar, el cual se enuncia a continuación. Sea Y un subespacio de dimensión n de $\mathfrak{C}[a, b]$, para cada $f \in \mathfrak{C}[a, b]$ existe un único $h \in Y$, tal que

$$\|f - h\|_u = \inf_{y \in Y} \|f - y\|_u = \delta \quad (60.12)$$

si y sólo si Y satisface la condición de Haar. Observe que (60.12) se puede reexpresar de la siguiente forma, para cada $f \in \mathfrak{C}[a, b]$ existe un único $h \in Y$, tal la diferencia $g = f - h$ dista de la función cero lo menos posible en la norma uniforme, es decir,

$$\|g\|_u = \|f - h\|_u = \delta.$$

(i) Suficiencia.

Suponga, primero, que Y satisface la condición de Haar y que $h_1, h_2 \in Y$ son dos mejores aproximaciones para algún $f \in \mathfrak{C}[a, b]$ fijo. Sean

$$g_1 = f - h_1, \quad y \quad g_2 = f - h_2.$$

Se tiene entonces que $\|g_1\|_u = \|g_2\|_u = \delta$, donde δ es la distancia de f a Y , es decir,

$$\delta = \inf_{y \in Y} \|f - y\|_u. \quad (60.13)$$

Claramente, $h = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ es también una mejor aproximación a f , ya que

$$\begin{aligned} \|f - h\|_u &= \|f - \frac{1}{2}h_1 - \frac{1}{2}h_2\|_u \\ &\leq \frac{1}{2}\|f - h_1\|_u + \frac{1}{2}\|f - h_2\|_u \\ &= \delta \end{aligned}$$

y, por otro lado, $h = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ es también un elemento de Y , lo cual conduce a $\|f - h\|_u \geq \delta$. En conclusión, $\|f - h\|_u = \delta$. Ahora bien, por el lema de Haar sobre puntos extremos se tiene que

$$g = f - h = f - \frac{1}{2}(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \quad (60.14)$$

tiene al menos $n + 1$ puntos extremos t_1, t_2, \dots, t_{n+1} . En cada uno de estos puntos se tiene que $|g(t_j)| = \|g\|_u = \delta$. De lo anterior y de (60.14) se obtiene:

$$g_1(t_j) + g_2(t_j) = 2g(t_j) = +2\delta \text{ ó } -2\delta.$$

Ahora bien, $|g_1(t_j)| \leq \|g_1\|_u = \delta$ y similarmente para g_2 . Por lo tanto, ambos sumandos deben tener el mismo signo y el máximo valor absoluto posible, esto es,

$$g_1(t_j) = g_2(t_j) = +\delta \text{ ó } -\delta,$$

así $g_1(t_j) - g_2(t_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, lo cual implica que $h_1 - h_2 = g_2 - g_1$ tiene $n + 1$ ceros en $[a, b]$. Por la condición de Haar, se sigue que $h_1 - h_2 = 0$. Es decir, $h_1 = h_2$, y la unicidad queda demostrada.

(ii) Necesidad.

Se supone que Y no satisface la condición de Haar y se demuestra que no se tiene una única mejor aproximación para cualquier $f \in \mathfrak{C}[a, b]$. Si no se satisface la condición de Haar, entonces el determinante Δ es cero y el sistema homogéneo:

$$\gamma_1 e_k(t_1) + \gamma_2 e_k(t_2) + \dots + \gamma_n e_k(t_n) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

tiene una solución no trivial $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n$. Considere esta solución y cualquier $h_1 = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \in Y$, entonces se cumple que

$$\sum_{j=1}^n \tilde{\gamma}_j h_1(t_j) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \left(\sum_{j=1}^n \tilde{\gamma}_j e_k(t_j) \right) = 0. \quad (60.15)$$

Además, el sistema transpuesto

$$\beta_1 e_1(t_j) + \beta_2 e_2(t_j) + \dots + \beta_n e_n(t_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

también tiene una solución no trivial $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_n$. Con base en esta solución, se define $h_0 = \sum_{k=1}^n \tilde{\beta}_k e_k$. Así, $h_0 \neq 0$ y h_0 es cero excepto en t_1, \dots, t_n . Sea λ , suficientemente pequeña, tal que $\|\lambda h_0\|_u \leq 1$. Considere ahora $\tilde{h} \in \mathfrak{C}[a, b]$ tal que $\|\tilde{h}\|_u = 1$ y

$$\tilde{h}(t_j) = \operatorname{sgn}(\tilde{\gamma}_j) = \begin{cases} -1 & \text{si } \tilde{\gamma}_j < 0, \\ 1 & \text{si } \tilde{\gamma}_j \geq 0. \end{cases}$$

Se define ahora $f \in C[a, b]$ mediante

$$f(t) = \tilde{h}(t)(1 - |\lambda h_0(t)|).$$

Por lo tanto, $f(t_j) = \tilde{h}(t_j) = \operatorname{sgn}(\tilde{\gamma}_j)$ ya que $h_0(t_j) = 0$. Se demuestra, a continuación, que esta función f tiene una infinidad de mejores aproximaciones por elementos de Y . Si se utiliza el hecho de que $|\tilde{h}(t)| \leq \|\tilde{h}\|_u = 1$ y $|\lambda h_0(t)| \leq \|\lambda h_0\|_u \leq 1$ para todo $\varphi \in [-1, 1]$, se obtiene

$$\begin{aligned} |f(t) - \varphi \lambda h_0(t)| &\leq |f(t)| - |\varphi \lambda h_0(t)| \\ &= |\tilde{h}(t)| (1 - |\lambda h_0(t)|) + |\varphi \lambda h_0(t)| \\ &\leq 1 - |\lambda h_0(t)| + |\varphi \lambda h_0(t)| \\ &= 1 - (1 - |\varphi|) |\lambda h_0(t)| \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, cada $\varphi \lambda h_0$, $-1 \leq \varphi \leq 1$, es una mejor aproximación a f si se logra demostrar que

$$\|f - h\|_u \geq 1 \text{ para todo } h \in Y. \quad (60.16)$$

Para verificar que (60.16) se cumple para $h = \sum \alpha_k e_k \in Y$ arbitrario. Se supone, por el contrario, que $\|f - \hat{h}\|_u < 1$ para algún $\hat{h} \in Y$, entonces las condiciones:

$$f(t_j) = \operatorname{sgn}(\tilde{\gamma}_j) = \pm 1$$

y

$$|f(t_j) - \hat{h}(t_j)| \leq \|f - \hat{h}\|_u < 1$$

implican que para toda $\tilde{\gamma}_j \neq 0$

$$\operatorname{sgn}(\hat{h}(t_j)) = \operatorname{sgn}(f(t_j)) = \operatorname{sgn}(\tilde{\gamma}_j),$$

lo cual contradice (60.15) cuando $h = \hat{h}$ y $\hat{h}(t_j) = \operatorname{sgn}(\tilde{\gamma}_j)$ ya que $\tilde{\gamma}_j \neq 0$ para algún j , esto es,

$$\sum_{j=1}^n \tilde{\gamma}_j \hat{h}(t_j) = \sum_{j=1}^n \tilde{\gamma}_j \operatorname{sgn}(\tilde{\gamma}_j) = \sum_{j=1}^n |\tilde{\gamma}_j| \neq 0.$$

Por lo tanto, (60.16) queda demostrada.

Observe que si $Y \subset \mathbb{C}[a, b]$ es el conjunto de todos los polinomios de grado que no exceden a $n - 1$, junto con el polinomio cero, entonces $\dim Y = n$ y Y satisface la condición de Haar. En efecto, un polinomio de grado $n - 1$ tiene a lo más $n - 1$ raíces reales.

60.7 Aproximación uniforme por polinomios a la función cero

Considere $f \in \mathbb{C}[-1, 1]$ definida por el monomio $f(t) = t^n$ y sea

$$\mathfrak{M} = \operatorname{span}(1, t, t^2, \dots, t^{n-1})$$

el subespacio de $\mathbb{C}[-1, 1]$ generado por $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$. Claramente, $\dim(\mathfrak{M}) = n$. El problema central de este capítulo consiste en aproximar el monomio $f(t) = t^n$ por un elemento de $P \in \mathfrak{M}$ de la forma

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

de tal manera que $\|t^n - P\|_u$ sea lo más pequeño posible. Lo deseable es, por supuesto, que

$$\|t^n - P\|_u = \inf_{Q \in \mathfrak{M}} \|t^n - Q\|_u. \quad (60.17)$$

El problema de aproximación puede plantearse en forma equivalente como: se desea determinar

$$g(t) = t^n - P(t),$$

de tal manera que

$$\|g\|_u = \|f - P\|_u \quad (60.18)$$

sea lo más pequeño posible. Observe que g es un polinomio de grado n con coeficiente 1 en la potencia t^n , siendo los demás coeficientes reales. Así, el problema de aproximación planteado en (60.18) consiste entonces en encontrar un polinomio de la forma

$$t^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k, \quad (60.19)$$

cuya distancia a la función cero sea lo menos posible bajo la norma de aproximación uniforme sobre $[-1, 1]$.

60.8 La mejor aproximación uniforme a la función cero por polinomios

Considere el cambio de variable:

$$t = \cos(\theta), \quad \theta \in [0, \pi]. \quad (60.20)$$

Así, cuando θ varía de 0 a π , se tiene que t varía de 1 a -1 . El problema planteado en (60.19) se transforma ahora en encontrar una función de la forma

$$\cos^n(\theta) - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{kn} \cos^k(\theta)$$

cuya distancia a la función cero sea lo más pequeña posible con respecto de la norma uniforme sobre $[0, \pi]$. Se puede demostrar que

$$\frac{\cos(n\theta)}{2^{n-1}} = \cos^n(\theta) - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{nk} \cos^k(\theta). \quad (60.21)$$

y que $\cos(n\theta)/2^{n-1}$ es la única función que minimiza la distancia a la función cero en $[0, \pi]$ con la norma uniforme. En efecto, procediendo por inducción, se sigue que para $n = 1$ con $\beta_{10} = 0$ se cumple (60.21). Ahora bien, observe que

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta) \quad (60.22)$$

y

$$\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta) \cos(\theta) + \sin(n\theta) \sin(\theta). \quad (60.23)$$

Después de sumar ambos lados de (60.22) y (60.23), se sigue que

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2 \cos(n\theta) \cos(\theta).$$

Por lo tanto,

$$\cos((n+1)\theta) = 2 \cos(n\theta) \cos(\theta) - \cos((n-1)\theta). \quad (60.24)$$

Si ahora se aplica la hipótesis de inducción a (60.21), se obtiene

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) &= 2 \cos(\theta) \left(2^{n-1} \cos^n(\theta) - 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{nk} \cos^k(\theta) \right) \\ &\quad - 2^{n-2} \cos^{n-1}(\theta) + 2^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \beta_{n-1,k} \cos^k(\theta) \\ &= 2^n \cos^{n+1}(\theta) - 2^n \sum_{k=0}^n \beta_{n+1,k} \cos^k(\theta), \end{aligned} \quad (60.25)$$

donde los coeficientes $\beta_{n+1,k}$, $k = 1, 2, \dots, n+1$, han sido convenientemente elegidos.

Para verificar que $\cos(n\theta)/2^{n-1}$ produce la mejor, y única, aproximación uniforme a la función cero en $[0, \pi]$, se procede como sigue. Claramente, como puede apreciarse en la Gráfica 60.1, se observa que $\cos(\theta)$, $\cos(2\theta)$ y $\cos(3\theta)$, tienen 1, 2 y 3 raíces, respectivamente, y, en general, $\cos((n-1)\theta)$ tiene $n-1$ raíces. Si se define

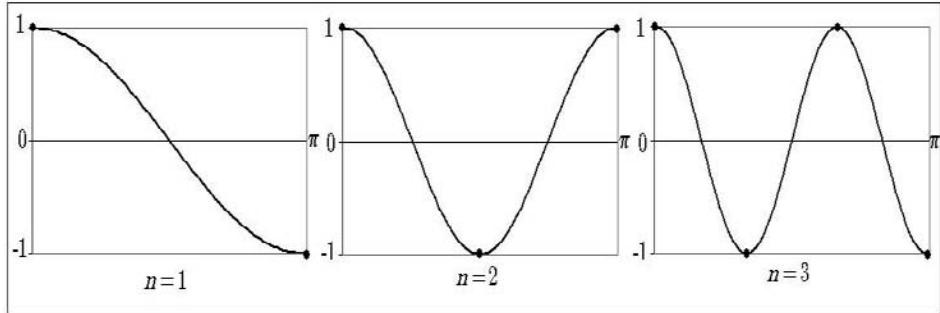
$$\mathfrak{N} = \text{span}(1, \cos(\theta), \cos(2\theta), \dots, \cos((n-1)\theta)),$$

se tiene que $\dim(\mathfrak{N}) = n$, entonces \mathfrak{N} satisface la condición de Haar. Asimismo, un punto t_0 es un punto extremo de $f(t)$ en $\mathfrak{C}[0, \pi]$, si $|f(t_0)| = \|f\|_u$, así un punto extremo satisface $f(t_0) = \|f\|_u$ ó $f(t_0) = -\|f\|_u$. Es evidente, a partir de la Gráfica 60.1, que $\cos(\theta)$, $\cos(2\theta)$ y $\cos(3\theta)$, tienen 2, 3 y 4 puntos extremos, respectivamente, y, en general, $\cos(n\theta)$ tiene $n+1$

puntos extremos. Estos puntos extremos alternan entre 1 y -1 . Por el teorema de Haar, en virtud de (60.19), la mejor, y única, aproximación uniforme a la función cero en $[0, \pi]$ es

$$\cos^n(\theta) - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{nk} \cos^k(\theta). \quad (60.26)$$

Por último, se observa que $\cos(n\theta)/2^{n-1}$ tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$.



Gráfica 60.1 Las funciones $\cos(\theta)$, $\cos(2\theta)$ y $\cos(3\theta)$ en $[0, 2\pi]$.

60.9 Polinomios de Chebyshev

En virtud del cambio de variable (60.20), la ecuación (60.19) se transforma en

$$\frac{\cos(n \operatorname{arc} \cos(t))}{2^{n-1}} = t^n - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{nk} t^k, \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (60.27)$$

De esta manera, el polinomio

$$T_n(t) \equiv \frac{\cos(n \operatorname{arc} \cos(t))}{2^{n-1}} \quad (60.28)$$

con coeficiente 1 en la potencia t^n es la mejor aproximación uniforme a la función cero en $[-1, 1]$. El polinomio

$$C_n(t) \equiv 2^{n-1} T_n(t)$$

es llamado el polinomio de Chebyshev de primera clase y de orden n . Observe que, en este caso,

$$\begin{aligned} C_0(t) &= T_0(t) = \cos(0) = 1, \\ C_1(t) &= T_1(t) = \cos(\operatorname{arc} \cos(t)) = t, \end{aligned}$$

y en virtud de (60.24) se tiene que

$$\cos((n+1)\operatorname{arc} \cos(t)) = 2\cos(n \operatorname{arc} \cos(t)) \cos(\operatorname{arc} \cos(t)) - \cos((n-1)\operatorname{arc} \cos(t)). \quad (60.29)$$

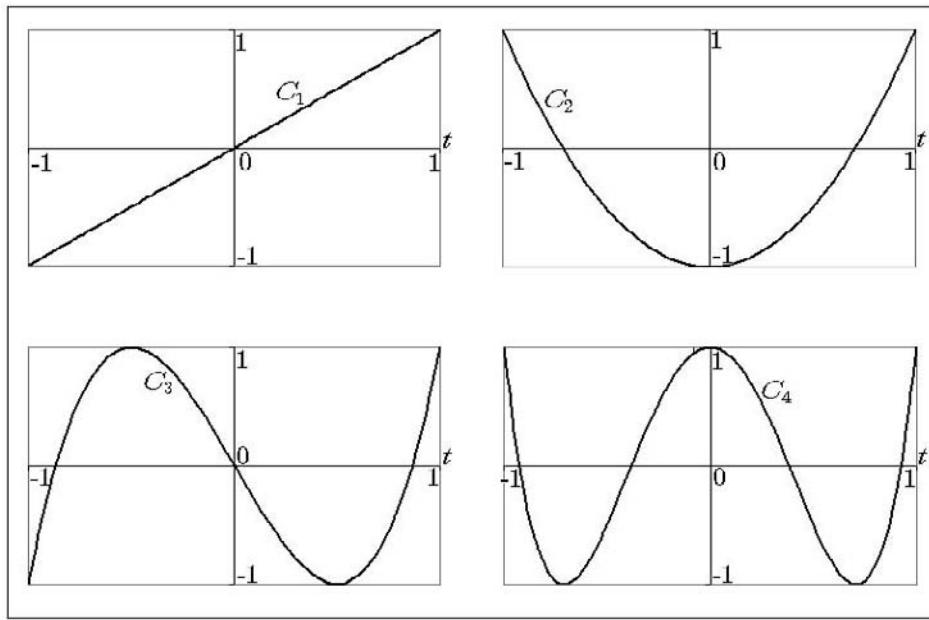
Equivalentemente,

$$C_{n+1}(t) = 2tC_n(t) - C_{n-1}(t), \quad (60.30)$$

de donde se pueden obtener los polinomios de Chebyshev de orden $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} C_2(t) &= 2t^2 - 1, \\ C_3(t) &= 4t^3 - 3t, \\ C_4(t) &= 8t^4 - 8t^2 + 1, \\ C_5(t) &= 16t^5 - 20t^3 + 5t, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (60.31)$$

En la Gráfica 60.2 se muestra el comportamiento de las funciones $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$ y $C_4(t)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Gráfica 60.2 Funciones $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$ y $C_4(t)$ en $[-1, 1]$.

60.10 Estimación de la curva de rendimiento con polinomios de Chebyshev

En esta sección se estima una curva de rendimiento $R(0, T)$ mediante el uso de polinomios de Chebyshev. Observe primero que si $x \in [-1, 1]$, entonces, a partir de (60.31), se tiene que los monomios $1, x, x^2, x^4$, se pueden expresar en términos de los polinomios de Chebyshev como

$$\begin{aligned} 1 &= C_0(x), \\ x &= C_1(x), \\ x^2 &= \frac{C_2(x) + C_0(x)}{2}, \\ x^3 &= \frac{C_3(x) + 3C_1(x)}{4}, \\ x^4 &= \frac{C_4(x) + 4C_3(x) + 3C_0(x)}{8}. \end{aligned}$$

A continuación se introduce un cambio de variable para transformar $\mathfrak{C}[-1, 1]$ en $\mathfrak{C}[0, A]$. Para esto, es suficiente escribir

$$T = (1 + x) \frac{A}{2}.$$

En este caso, si $x = -1$, entonces $T = 0$, y si $x = 1$, entonces $T = A$. Se definen ahora los siguientes polinomios de Chebyshev en $[0, A]$:

$$c_n(T) = C_n \left(\frac{2T}{A} - 1 \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

De esta forma

$$\begin{aligned} 1 &= c_0(T), \\ \frac{2T}{A} - 1 &= c_1(T), \\ \left(\frac{2T}{A} - 1\right)^2 &= \frac{c_2(T) + c_0(T)}{2}, \\ \left(\frac{2T}{A} - 1\right)^3 &= \frac{c_3(T) + 3c_1(T)}{4}, \\ \left(\frac{2T}{A} - 1\right)^4 &= \frac{c_4(T) + 4c_3(T) + 3c_0(T)}{8}. \end{aligned} \quad (60.32)$$

El supuesto fundamental es que la curva de rendimiento tiene la siguiente forma funcional:

$$R(0, T) = \exp \left\{ a_0 + a_1 \left(\frac{2T}{A} - 1 \right) + a_2 \left(\frac{2T}{A} - 1 \right)^2 + \cdots + a_n \left(\frac{2T}{A} - 1 \right)^n \right\}, \quad T \in [0, A], \quad (60.33)$$

donde $A > 0$ es una constante conocida. Observe también que $-1 \leq (2T/A) - 1 \leq 1$. En la práctica es frecuente suponer que el polinomio en el exponente es de grado $n = 3$ ó $n = 4$. En virtud de (60.32), la representación (60.33) en términos de los polinomios de Chebyshev definidos $[0, A]$, se convierte para $n = 4$ en

$$R(0, T) = \exp \{ \beta_0 c_0(T) + \beta_1 c_1(T) + \beta_2 c_2(T) + \beta_3 c_3(T) + \beta_4 c_4(T) \}. \quad (60.34)$$

con nuevos parámetros β_1 , β_2 , β_3 y β_4 . El siguiente paso es estimar dichos parámetros con valores de mercado, $R_i = R(t, T_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, utilizando mínimos cuadrados en el siguiente modelo de regresión lineal múltiple:

$$\ln(R_i) = \beta_0 c_0(T_i) + \beta_1 c_1(T_i) + \beta_2 c_2(T_i) + \beta_3 c_3(T_i) + \beta_4 c_4(T_i) + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (60.35)$$

donde ϵ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, es ruido blanco Gaussiano.

60.11 Un ejemplo de estimación de una curva de rendimiento

En esta sección se presenta un ejemplo ilustrativo para estimar una curva de rendimiento utilizando polinomios de Chebyshev. Se supone que el polinomio, en $(2T/A) - 1$, en el exponente de la ecuación (60.34) es de grado $n = 3$. Asimismo, se supone un horizonte de $T = 2$ años. El Cuadro 60.1 muestra los rendimientos (en el mercado secundario) de bonos cupón cero emitidos por el gobierno mexicano (CETES) a distintos plazos, específicamente los plazos que se operaron el 7 de Mayo de 2004.

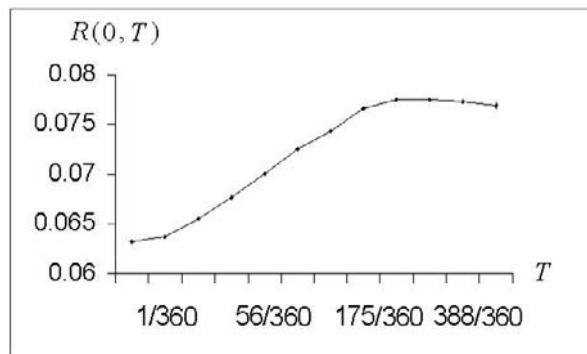
$R_i = R(0, T_i)$	T_i
0.0595	1/360
0.0647	7/360
0.0671	28/360
0.0703	56/360
0.0711	91/360
0.0718	136/360
0.0724	175/360
0.0766	258/360
0.0771	1
0.0773	388/360
0.0775	451/360
0.0777	542/360

Cuadro 60.1 Rendimientos de mercado de bonos cupón cero.

Con base en la ecuación (60.35), los estimadores de mínimos cuadrados (y de máxima verosimilitud) de los parámetros, así como sus propiedades estadísticas, se muestran en el Cuadro 60.2. Como puede observarse dichos estimadores son estadísticamente significativos al 95%; algunos tienen una significancia mayor como $\hat{\beta}_0$. La Gráfica 60.3 muestra el comportamiento de la curva de rendimiento estimada.

	Coeficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad
$\hat{\beta}_0$	-2.60645	0.00903	-288.40575	3.68675E-19
$\hat{\beta}_1$	0.08209	0.01369	5.99335	0.00020
$\hat{\beta}_2$	-0.04916	0.01107	-4.43892	0.00162
$\hat{\beta}_3$	0.02518	0.01070	2.35151	0.04319

Cuadro 60.2 Estimadores de los parámetros.



Gráfica 60.3 Comportamiento de la curva de rendimiento estimada.

60.12 Bibliografía sugerida

- Haar, A. (1916). "Über einige Eigenschaften der orthogonalen Funktionensysteme". *American Journal of Mathematics*, Vol. 38, pp. 1-5.
- Kreyszig, E. (1978). Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons, New York.
- Yosida, K. (1978). Functional Analysis. Sixth Edition. A series of Comprehensive Studies in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

60.13 Ejercicios

60.1 Pruebe que la función

$$f(t) = \tilde{h}(t)(1 - |\lambda h_0(t)|).$$

definida en la demostración del teorema de Haar satisface $\|f\|_u = 1$.

60.2 Sea $B_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de un subespacio Y , de dimensión n , de $\mathfrak{C}[a, b]$. Muestre que Y satisface la condición de Haar si y sólo si para todo subconjunto $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ de puntos distintos de $[a, b]$, los vectores $h_j = (e_1(t_j), e_2(t_j), \dots, e_n(t_j))^T \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \dots, n$, son linealmente independientes.

60.3 Sean $f \in \mathfrak{C}[a, b]$ y $h \in Y$, donde Y es un subespacio de dimensión n de $\mathfrak{C}[a, b]$. Un subconjunto $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ de puntos distintos de $[a, b]$, $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, es llamado un conjunto alternante de $f - h$ si las cantidades $f(t_j) - h(t_j)$ toman alternativamente los valores $+||f - h||$ y $-||f - h||$ en los puntos consecutivos t_j . Pruebe que si para $f - h$ existe un conjunto alternante de $n + 1$ puntos, entonces h es la mejor aproximación uniforme de f .

60.4 Pruebe que los polinomios de Chebyshev pueden escribirse como

$$C_n(t) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2t)^{n-2k} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $[n/2] = n/2$ si n es par y $[n/2] = (n-1)/2$ si n es impar.

60.5 Muestre el polinomio de Chebyshev $C_n(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$(1-t^2)C_n''(t) - tC_n'(t) + n^2 C_n(t) = 0$$

60.6 Considere $\mathfrak{C}[-1, 1]$. Si se define el producto interior entre f y g en $\mathfrak{C}[-1, 1]$ como:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt,$$

entonces

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

es una norma. Sin embargo este espacio normado es incompleto. Este espacio puede hacerse completo si se incluyen todos sus puntos límite. Una vez que el espacio está completo, se dice que es un espacio de Hilbert con respecto al producto interior, o bien de Banach con respecto a la norma, y se denota mediante $\mathfrak{L}^2[-1, 1]$. A partir de los polinomios de Chebyshev $C_n(t)$ defina los polinomios

$$\tilde{C}_n(t) = (1-t)^{-\frac{1}{4}} C_n(t),$$

muestre que

$$\int_{-1}^1 \tilde{C}_n(t) \tilde{C}_m(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ \pi & \text{si } n = m = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Defina ahora

$$\hat{C}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tilde{C}_0(t)$$

y

$$\hat{C}_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{C}_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

pruebe que

$$\|\hat{C}_0\| = \|\hat{C}_n\| = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

es decir, los polinomios $\hat{C}_n(t)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ son ortonormales.

60.7 El método de ortonormalización de Gramm-Schmidt se establece como sigue. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión infinita de vectores linealmente independientes en un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, entonces se puede construir una sucesión de elementos ortonormales, $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de la misma cardinalidad de la sucesión original. Es decir $\|h_n\| = 1$, $n = 1, 2, \dots, n$ y $\langle h_n, h_m \rangle = 0$ si $n \neq m$. En efecto, sean

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1, & h_1 &= g_1 / \|g_1\|, \\ g_2 &= f_2 - \langle f_2, h_1 \rangle h_1, & h_2 &= g_2 / \|g_2\|, \\ g_3 &= f_3 - \langle f_3, h_2 \rangle h_2 - \langle f_3, h_1 \rangle h_1, & h_3 &= g_3 / \|g_3\|, \\ &\vdots & &\vdots \\ g_n &= f_n - \sum_{k=1}^n \langle f_n, h_k \rangle h_k, & h_n &= g_n / \|g_n\|, \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Verifique la propiedad de ortonormalidad. Considere ahora el espacio $\mathcal{L}^2[-1, 1]$ y la sucesión de monomios

$$1, t, t^2, t^3, \dots, t^n, \dots$$

ortonormalice estos monomios con el método de Gramm-Schmidt. Denote mediante $G_1(t)$, $G_2(t), \dots$ la sucesión de elementos ortonormales. Si se ponderan estos polinomios por $e^{-t^2/2}$, muestre que

$$\int_{-1}^1 e^{-t^2} G_n(t) G_m(t) dt = \delta_{nm},$$

donde

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

Compare $(G_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ con la sucesión de polinomios de Chebyshev $(C_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$.

CAPÍTULO 61

ESTIMACIÓN NO PARAMÉTRICA DE CURVAS DE RENDIMIENTO: NÚCLEOS DE SUAVIZACIÓN

Conceptos básicos de este capítulo:

- Curvas de rendimiento
- Suavización con núcleos o “kernels”
- Criterios local y global de estimación

61.1 Introducción

Para construir una curva de rendimiento de bonos cupón cero existen muchas y muy variadas metodologías. Un primer intento de clasificación de dichas metodologías podría ser la distinción entre el uso de modelos paramétricos y no paramétricos. En el primer caso, se incluyen los modelos con una especificación exógena de la ecuación diferencial estocástica que conduce la dinámica de la tasa corta o forward. En el segundo, se consideran los métodos de estimación con “kernels”, o núcleos de suavización, en donde el estimador de la curva de rendimiento se obtiene mediante la minimización ponderada de los errores de ajuste.

El método de estimación con “kernels” de suavización presenta algunas limitaciones, entre las que se encuentran: 1) la curva de rendimiento estimada puede producir puntos de inflexión múltiples, 2) la curva de rendimiento puede producir tasas forward negativas en el largo plazo y, la más importante, 3) no hay una teoría del comportamiento del mercado de dinero detrás del procedimiento de estimación. El método propuesto consiste en la simple aplicación de una técnica del análisis numérico para ajustar una curva a un número dado de puntos.

61.2 Precios y rendimientos observados

El precio, observado en t , de un bono cupón cero con fecha de vencimiento T_j se denotará mediante B_{tj} . Considere N precios observados de bonos con vencimientos $T_1 < T_2 < \dots < T_j < \dots < T_N$. El plazo al vencimiento $T_j - t$ es expresado como proporción de un año. Por simplicidad, al bono con vencimiento en T_j , se le llamará bono j . Sea $R_{tj}^{(i)}$ la tasa de rendimiento observada en la operación i , con el bono j , $i = 1, 2, \dots, i_j$.

61.3 Ponderación por volumen de los rendimientos observados

Si $V_{tj}^{(i)}$ es el volumen de operación i , entonces una tasa de rendimiento representativa para cada plazo operado, ponderada por volumen, se calcula mediante

$$R_{tj} = \frac{\sum_i R_{tj}^{(i)} V_{tj}^{(i)}}{\sum_i V_{tj}^{(i)}}. \quad (61.1)$$

61.4 Criterio local de estimación

Se desea determinar un estimador $R(t, T)$ de la curva de rendimiento tal que

$$R(t, T_j) = R_{tj} + \varepsilon_{tj}, \quad E[\varepsilon_{tj}] = 0. \quad (61.2)$$

Considere el siguiente criterio local para obtener un estimador $R(t, T)$ para todos los plazos T , consistente con (61.2):

$$\text{Minimizar } Q_N(R(t, T)) = \sum_{j=1}^N \omega_j(T)(R(t, T) - R_{tj})^2. \quad (61.3)$$

Las ponderaciones $\omega_j(T)$ se toman de tal manera que éstas sean pequeñas cuando T se encuentra lejos de T_j . La solución $\tilde{R}(t, T)$ que satisface la condición de primer orden está dada por:

$$\tilde{R}(t, T) = \frac{\sum_{j=1}^N \omega_j(T) R_{tj}}{\sum_{j=1}^N \omega_j(T)}. \quad (61.4)$$

61.5 Suavización con “kernels”

En esta sección se presenta el método de estimación no paramétrica de curvas de rendimiento con núcleos de suavización. Un núcleo o “kernel” de suavización es cualquier función de densidad simétrica $K(w)$, es decir, $K(w) \geq 0$, $K(w) = K(-w)$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(w) dw = 1.$$

Las ponderaciones se determinan de acuerdo con

$$\omega_j(T) = \frac{K[(T - T_j)/h_j]}{h_j}. \quad (61.5)$$

El Cuadro 61.1 presenta algunas funciones “kernel” útiles en la práctica.

Uniforme	$\frac{1}{2}, \quad w \in [-1, 1].$
Epanechnikov	$\frac{3}{4}(1 - w^2), \quad w \in [-1, 1].$
A la cuarta	$\frac{15}{16}(1 - w^2)^2, \quad w \in [-1, 1].$
Momento nulo	$\frac{1}{4}(9 - 15w^2), \quad w \in [-1, 1].$
Gaussiana	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2}, \quad w \in [-\infty, \infty].$

Cuadro 61.1 Funciones típicas de “kernel”.

61.6 Suavización con “kernel” normal

Frecuentemente, en la práctica, se elige el “kernel” normal

$$K(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2}.$$

En este caso, las ponderaciones están dadas por

$$\omega_j(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} h_j} e^{-(T-T_j)^2/2h_j^2}. \quad (61.6)$$

Es decir, $\omega_j(T)$ es una densidad normal con media T_j y varianza h_j^2 . Valores pequeños de h_j mejoran el ajuste, pero reducen la suavización, y valores grandes de h_j empeoran el ajuste, pero incrementan la suavización. De esta manera, el ancho de banda h_j determina el grado de suavización de la estimación. En este caso, la regla empírica que se sigue para establecer el ancho de banda es

$$h_j = A(1 - e^{-CT_j}),$$

donde A y C son constantes positivas, usualmente se utilizan

$$A \geq 10 \quad \text{y} \quad C = A^{-2}.$$

Por lo tanto, el estimador de la tasa de rendimiento para cada plazo de operación, T , está dado, de acuerdo con (61.6), por la siguiente fórmula:

$$\tilde{R}(t, T) = \frac{\sum_{j=1}^N R_{tj} K [(T - T_j)/h_j] h_j^{-1}}{\sum_{j=1}^N K [(T - T_j)/h_j] h_j^{-1}}. \quad (61.7)$$

Una vez estimadas las tasas de rendimiento para cada bono cupón cero que al vencimiento paga una unidad monetaria, se calculan los precios correspondientes utilizando la siguiente relación:

$$\tilde{B}(t, T) = e^{-\tilde{R}(t, T)(T-t)}. \quad (61.8)$$

61.7 Homologación de plazos para operaciones concertadas en la fecha base, pero con liquidación posterior

Usualmente, se concerta una operación de compra de bonos para liquidarse días después. Para hacer comparables las tasas de rendimiento de las operaciones con diferentes fechas de liquidación con respecto a la fecha base t , se utiliza un procedimiento de homologación que se describe a continuación. Sea $T_j - \tau$ el plazo entre las fechas de vencimiento del título y de concertación de la operación y $\tau - t$ el plazo entre las fechas de concertación de la operación y de liquidación. Sea r_t la tasa de interés de plazo más pequeño disponible en el mercado. La tasa de rendimiento homologada, $\hat{R}_{tj}^{(i)}$, se obtiene mediante la siguiente relación

$$\hat{R}_{tj}^{(i)} = \frac{r_t(\tau - t) + R_{tj}^{(i)}(T_j - \tau)}{T_j - t}. \quad (61.9)$$

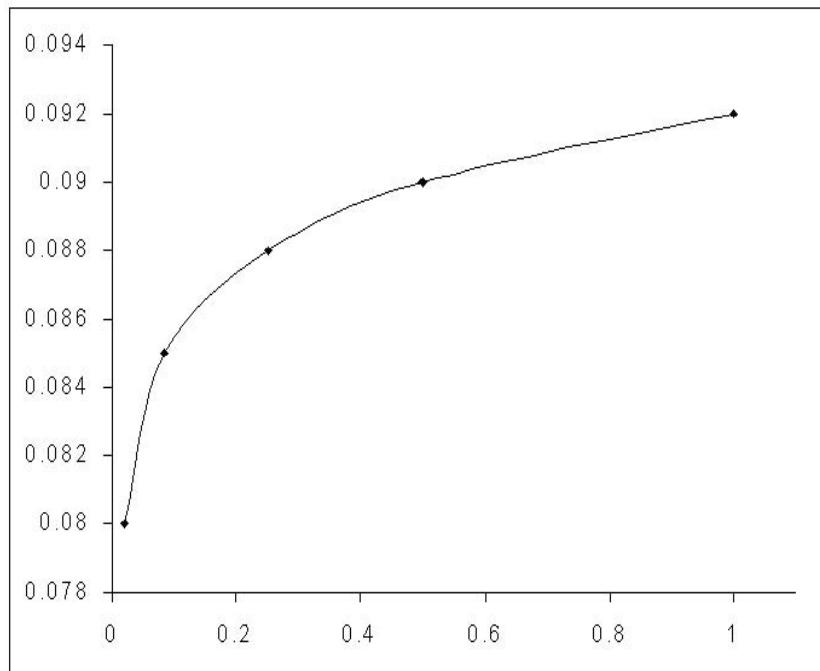
Una vez homologadas las tasas de rendimiento, se obtienen las tasas de rendimiento ponderadas por volumen para cada uno de los distintos plazos operados mediante (61.1) y, posteriormente, se utiliza (61.7) para calcular el estimador de la curva de rendimiento.

61.8 Aplicación del método de suavización con “kernel” normal

En esta sección se utiliza el método de estimación no paramétrica de curvas de ceros con suavización de “kernels”. Los datos de mercado se presentan en el Cuadro 61.2. La Gráfica muestra la curva de rendimiento estimada con $A = 10$ y $C = 0.01$.

Observaciones de mercado		
Plazo	T	$R(0, T)$
una semana	1/52	0.08
un mes	1/12	0.085
un trimestre	3/12	0.088
un semestre	1/2	0.090
un año	1	0.092

Cuadro 61.2 Observaciones de rendimientos.



Gráfica 61.1 Curva de rendimiento estimada con “kernel” normal.

61.9 Criterio global de estimación

Considere el siguiente criterio global para obtener un estimador $R(t, T)$ para todos los plazos T :

$$\text{Minimizar } Q_N(R) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \omega_j(s)(R(t, s) - R_{tj})^2 ds. \quad (61.10)$$

En particular, si las ponderaciones, $\omega_j(s)$, se eligen como

$$\omega_j(s) = \delta_T(s) \frac{K[(s - T_j)/h_j]}{h_j}, \quad (61.11)$$

donde $\delta_T(s)$ es la función generalizada Delta de Dirac, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(s) K[(s - T_j)/h_j] h_j^{-1} ds = K[(T - T_j)/h_j] h_j^{-1}.$$

Así, la solución $\tilde{R}(t, T)$ que se obtiene de la condición de primer orden en (61.10), coincide con la solución del criterio local en (61.4).

61.10 Bibliografía sugerida

- Adams, K. and D. Van Deventer (1994). “Fitting Yield Curves and Smooth Forward Rate Curves with Maximum Smoothness”. *Journal of Fixed Income*, Vol. 4, No. 1, pp. 52-62.
 Wand, M. P. and M. C. Jones (1995). Kernel Smoothing. Chapman & Hall/CRC, Florida.

61.11 Ejercicios

- 61.1** Con base en los datos de mercado que se presentan en el siguiente cuadro y con $A = 100$ y $C = 0.001$, estime la curva de rendimiento mediante el núcleo normal.

Observaciones de mercado		
Plazo	T	$R(0, T)$
una semana	1/52	0.07
un mes	1/12	0.085
un trimestre	3/12	0.073
un semestre	1/2	0.076
un año	1	0.08
dos años	2	0.082

- 61.2** Repita el ejercicio anterior con el núcleo uniforme

$$K(w) = \frac{1}{2}, \quad w \in [-1, 1].$$

Discuta los resultados.

CAPÍTULO 62

ESTIMACIÓN DE UNA CURVA DE RENDIMIENTO CON “SPLINES” CÚBICOS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Estimación polinomial
- Suavización con “splines” cúbicos
- Curva de rendimiento

62.1 Introducción

En el presente capítulo, se utiliza la técnica de “splines” cúbicos para estimar una estructura de plazos con base en la información de un conjunto de rendimientos a distintos plazos. Posteriormente, la estructura estimada se emplea para calcular factores de descuento y tasas forward a diferentes vencimientos. Es importante destacar que Adams y Van Deventer en 1994 en su artículo “Fitting Yield Curves and Smooth Forward Rate Curves with Maximum Smoothness” publicado en el “Journal of Fixed Income”, mostraron que la estimación polinomial de una curva de rendimiento sujeto a la condición de que las tasas forward sean lo más suaves posible, consistente con los datos observados, corresponde al método de “splines” cúbicos.

62.2 Estimación polinomial

Como se mencionó anteriormente, los métodos de estimación polinomial de una estructura de plazos utilizan polinomios de tercer grado, ya que el método de “splines” cúbicos satisface un criterio general de suavización propuesto por Adams y Van Deventer (1994). En consecuencia, suponga que la curva de rendimiento asociada a un bono cupón cero de precio $B(t, T)$ es de la siguiente forma:

$$R(\tau) = a + b\tau + c\tau^2 + d\tau^3, \quad \tau = T - t. \quad (62.1)$$

De esta manera, el precio de un bono cupón cero se calcula mediante la expresión

$$B(\tau) = e^{-R(\tau)\tau}.$$

Asimismo, la tasa forward (instantánea) continua satisface la relación

$$f(\tau) = -\frac{\partial \ln B(\tau)}{\partial \tau}.$$

En vista de la ecuación anterior, se sigue que el precio, $B(\tau)$, de un bono cupón cero de plazo τ está dado por

$$B(\tau) = \exp \left\{ - \int_{\tau_0}^{\tau} f(s) ds \right\}.$$

Así, el precio del bono cupón cero se puede reescribir como:

$$B(\tau) = e^{-a\tau - b\tau^2 - c\tau^3 - d\tau^4}.$$

En este caso, la tasa forward satisface

$$\begin{aligned} f(\tau) &= R(\tau) + \tau R'(\tau) \\ &= a + b\tau + c\tau^2 + d\tau^3 + \tau(b + 2c\tau + 3d\tau^2) \\ &= a + 2b\tau + 3c\tau^2 + 4d\tau^3. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f'(\tau) = 2R'(\tau) + \tau R''(\tau)$$

y

$$f''(\tau) = 3R''(\tau) + \tau R'''(\tau).$$

Estas condiciones determinan la diferenciabilidad de la tasa forward en términos de las derivadas de la curva de rendimientos. Observe que el orden de las derivadas de $f(\tau)$ es menor en uno que las de $R(\tau)$.

62.3 Suavización con “splines” de la curva de rendimiento

Se supone que, al tiempo t , se conocen los rendimientos, $R_{t0}, R_{t1}, \dots, R_{tN}$, de un bono cupón cero a diferentes plazos, T_0, T_1, \dots, T_N . Sea $\tau_i = T_i - t$, $i = 0, 1, \dots, N$. Se desea ajustar una función

$$R_i(\tau) = a_i + b_i\tau + c_i\tau^2 + d_i\tau^3, \quad i = 1, \dots, N, \quad (62.2)$$

en cada intervalo $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, de tal manera que en los puntos extremos se cumpla que $R_i(\tau_{i-1}) = R_{t,i-1}$ y $R_i(\tau_i) = R_{ti}$. Así, se tienen N funciones $R_i(\tau)$, $i = 1, \dots, N$, con un total de $4N$ incógnitas por determinar. En otras palabras, se requiere determinar a_i, b_i, c_i y d_i para cada uno de los N intervalos, $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, \dots, N$, definidos mediante los $N + 1$ puntos de mercado. Estas ecuaciones se valúan en los puntos extremos de cada intervalo, con lo cual se tiene que

$$R_{t,i-1} = a_i + b_i\tau_{i-1} + c_i\tau_{i-1}^2 + d_i\tau_{i-1}^3, \quad i = 1, \dots, N, \quad (62.3)$$

y

$$R_{ti} = a_i + b_i\tau_i + c_i\tau_i^2 + d_i\tau_i^3, \quad i = 1, \dots, N, \quad (62.4)$$

lo cual produce $2N$ ecuaciones. Observe que, hasta el momento, se tienen sólo $2N$ ecuaciones con $4N$ incógnitas. Por lo tanto, es necesario incorporar ecuaciones adicionales a fin de tener $4N$ ecuaciones con $4N$ incógnitas. Para completar el sistema de ecuaciones a partir de la información de observaciones de mercado, se procede como sigue. Primero, se fijan los puntos extremos de la aproximación con $R_1(\tau_0) \equiv R_{t0}$ y $R_N(\tau_N) \equiv R_{tN}$. Posteriormente, la primera derivada de $R_i(\tau)$ se iguala a la de $R_{i+1}(\tau)$ en los $N - 1$ puntos de mercado correspondientes a $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$, es decir,

$$b_i + 2c_i\tau_i + 3d_i\tau_i^2 - b_{i+1} - 2c_{i+1}\tau_i - 3d_{i+1}\tau_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (62.5)$$

De la misma manera, la segunda derivada de $R_i(\tau)$ se iguala a la de $R_{i+1}(\tau)$ en los $N - 1$ puntos de mercado correspondientes a $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$, así

$$2c_i + 6d_i\tau_i - 2c_{i+1} - 6d_{i+1}\tau_i = 0, \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (62.6)$$

Esto nos da ahora $4N - 2$ ecuaciones con $4N$ incógnitas. Por lo tanto, se necesitan dos ecuaciones más para completar el sistema. La primera ecuación, por lo general, siempre será escogida de tal forma que la curva de rendimiento sea instantáneamente recta $R''_0(\tau_0) = 0$ en el lado izquierdo de la curva de rendimiento, es decir,

$$2c_1 + 6d_1\tau_0 = 0. \quad (62.7)$$

Mientras que el lado derecho de la curva de rendimiento ofrece la oportunidad de imponer otra restricción. Existen dos opciones muy comunes, una puede ser que la curva de rendimiento sea plana $R'_N(\tau_N) = 0$ (frontera sujeta), o que la curva de rendimiento sea instantáneamente recta

$R''_N(\tau_N) = 0$ (frontera libre o natural) para los vencimientos a futuro. Por lo que se puede seleccionar una de las siguientes ecuaciones para completar el sistema:

$$b_N + 2c_N\tau_N + 3d_N\tau_N^2 = 0 \quad (62.8)$$

ó

$$2c_N + 6d_N\tau_N = 0. \quad (62.9)$$

Lo anterior hace que se tengan $4N$ ecuaciones con $4N$ incógnitas. Una característica importante de este sistema es que todas las ecuaciones son lineales en (a_i, b_i, c_i, d_i) .

62.4 Limitaciones del uso de “splines” para la tasa forward

El método desarrollado, aunque es muy popular, tiene algunas limitaciones, las cuales se resumen a continuación. Observe, primero, que cada punto de mercado está asociado con un rendimiento y que las dos primeras derivadas con respecto al plazo son iguales para cada polinomio que comienza y termina en cada punto de mercado, es decir,

$$R_i(\tau_i) = R_{i+1}(\tau_i),$$

$$R'_i(\tau_i) = R'_{i+1}(\tau_i)$$

y

$$R''_i(\tau_i) = R''_{i+1}(\tau_i).$$

En tiempo continuo, la tasa forward instantánea $f(\tau)$ puede ser escrita como

$$f(\tau) = R(\tau) + \tau R'(\tau).$$

Por lo tanto, las dos primeras derivadas de $f(\tau)$ en términos de las derivadas de $R(\tau)$ satisfacen

$$f'(\tau) = 2R'(\tau) + \tau R''(\tau)$$

$$f''(\tau) = 3R''(\tau) + \tau R'''(\tau).$$

Así, en cada punto de mercado se tiene que

$$f_i(\tau_i) = f_{i+1}(\tau_i)$$

y

$$f'_i(\tau_i) = f'_{i+1}(\tau_i).$$

Sin embargo, en general,

$$f''_i(\tau_i) \neq f''_{i+1}(\tau_i).$$

Es decir, la segunda derivada de la curva de tasas forward no es igual en los puntos de mercado ya que no hemos restringido $R'''(\tau)$ en los puntos de mercado. Esto nos lleva a los dos principales problemas asociados con el uso de “splines” cúbicos para rendimientos: (i) la curva de tasas forward no es dos veces diferenciable en los puntos de mercado, por lo que no es suave. La primera derivada de la curva de tasas forward puede tener picos en sus puntos de mercado y (ii) las curvas de tasas forward asociadas con los “splines” cúbicos basados en la curva de rendimiento puede producir curvas de tasas forward que no son plausibles.

62.5 Una aplicación con “splines” cúbicos para la estimación de una curva de rendimientos

Suponga que se cuenta con la información de mercado descrita en Cuadro 62.1

Plazo	T	$R(0, T)$
1 semana	1/52	0.08
1 mes	1/12	0.082
3 meses	3/12	0.085
6 meses	6/12	0.088

Cuadro 62.1 Información sobre rendimientos de mercado.

En este caso, el método de “splines” conduce al siguiente sistema de 12 ecuaciones con doce incógnitas:

$$\begin{aligned}
 a_1 + 0.0192b_1 + 0.0004c_1 + 0.00001d_1 &= 0.08, \\
 a_1 + 0.0833b_1 + 0.0069c_1 + 0.0006d_1 &= 0.082, \\
 a_2 + 0.0833b_2 + 0.0069c_2 + 0.0006d_2 &= 0.082, \\
 a_2 + 0.25b_2 + 0.0625c_2 + 0.0156d_2 &= 0.085, \\
 a_3 + 0.25b_3 + 0.0625c_3 + 0.0156d_3 &= 0.085, \\
 a_3 + 0.5b_3 + 0.25c_3 + 0.125d_3 &= 0.088, \\
 b_1 + 0.1667c_1 + 0.0208d_1 - b_2 - 0.1667c_2 - 0.0208d_2 &= 0, \\
 b_2 + 0.5c_2 + 0.1875d_2 - b_3 - 0.5c_3 - 0.1875d_3 &= 0, \\
 2c_1 + 0.5d_1 - 2c_2 - 0.5d_2 &= 0, \\
 2c_2 + 1.3d_2 - 2c_3 - 1.5d_3 &= 0, \\
 2c_1 + 0.115d_1 &= 0, \\
 2c_3 + 3d_3 &= 0.
 \end{aligned}$$

Si se denota

$$\mathbf{x} = (a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3)^T$$

y

$$\mathbf{b} = (0.08, 0.082, 0.082, 0.085, 0.085, 0.088, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T,$$

y se definen las siguientes matrices:

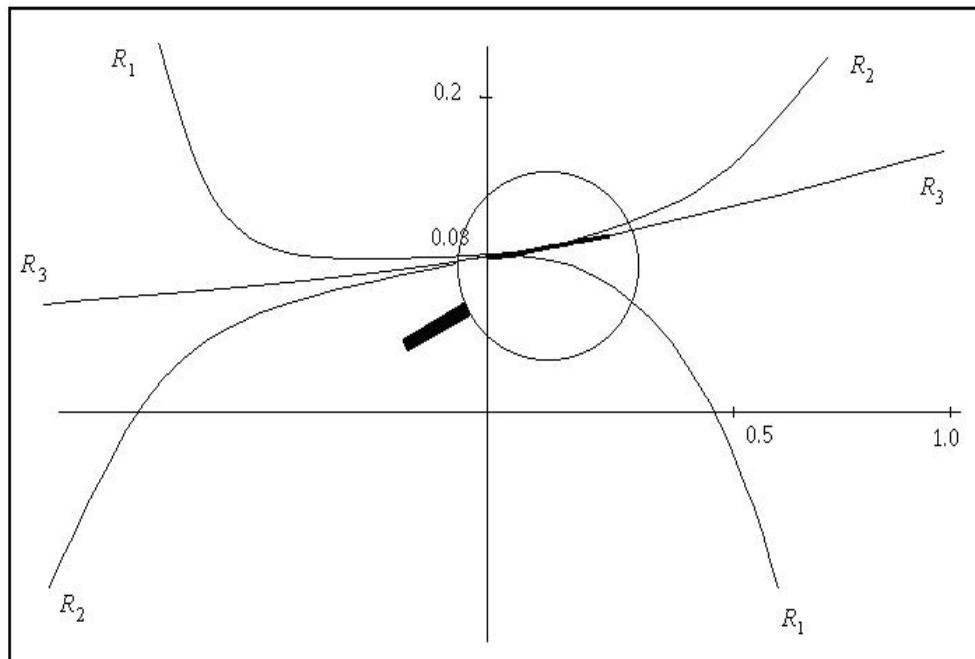
$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0.0192 & 0.0004 & 0.00001 \\ 1 & 0.0833 & 0.0069 & 0.0006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{F}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.0833 & 0.0069 & 0.0006 \\ 1 & 0.2500 & 0.0625 & 0.0156 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{F}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0.0625 & 0.0156 \\ 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 \end{pmatrix} & \mathbf{F}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.1667 & 0.0208 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0.115 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{F}_5 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -0.1667 & -0.0208 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0.1875 \\ 0 & 0 & -2 & -0.5 \\ 0 & 0 & 2 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{F}_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -0.5000 & 0.1875 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 & \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 & \mathbf{F}_5 & \mathbf{F}_6 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

entonces el sistema se puede reescribir como $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. La solución de este sistema se presenta en el Cuadro 62.2.

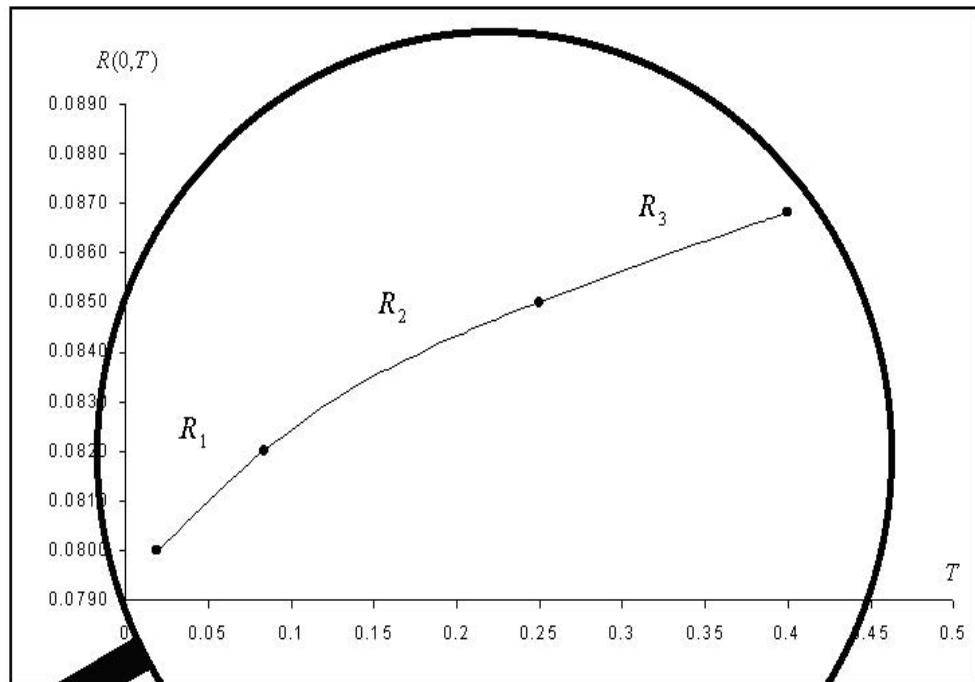
i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0.0794	0.0325	0.0252	-0.4372
2	0.0790	0.0449	-1237	0.1586
3	0.0814	0.0164	-0.0096	0.0064

Cuadro 62.2 Vector de soluciones.

La Gráfica 62.1 muestra los polinomios $R_i(\tau)$, $i = 1, 2, 3$, que se ajustan a los precios de mercado. Los tres segmentos de los polinomios que se aprecian en la línea más oscura de la gráfica representan la curva estimada de rendimientos. La Gráfica 62.2 muestra una magnificación de los tres segmentos de polinomios a fin de resaltar la curva estimada de rendimientos.



Gráfica 62.1 Curva estimada de rendimientos.



Gráfica 62.2 Magnificación de la curva estimada de rendimientos.

62.6 Bibliografía sugerida

- Adams, K. and D. Van Deventer (1994). “Fitting Yield Curves and Smooth Forward Rate Curves with Maximum Smoothness”. *Journal of Fixed Income*, Vol. 4, No. 1, pp. 52-62.
- De Boor, C. (2001). A Practical Guide to Splines. Springer-Verlag, New York, Berlin.
- Knott, G. D. (1999). Interpolating Cubic Splines (Progress in Computer Science and Applied Logic). Birkhäuser/Springer.

62.7 Ejercicios

62.1 Suponga que se cuenta con la información de mercado descrita en el siguiente cuadro:

Plazo	T	$R(0, T)$
1 semana	1/52	0.09
1 mes	1/12	0.092
3 meses	4/12	0.096
6 meses	6/12	0.098
un año	1	0.01

Utilice el método de “splines” cúbicos para estimar la curva de rendimiento.

62.2 Aplique el mismo procedimiento que se utiliza para la estimación polinomial de una curva de rendimientos para el precio de un bono. Suponga que se conocen los precios de los bonos con cupón cero $B_{t0}, B_{t1}, \dots, B_{tN}$ de vencimientos $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_N$. Se desea ajustar una función de la forma:

$$P_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3$$

en el intervalo entre τ_i y τ_{i-1} .

CAPÍTULO 63

ESTIMACIÓN POLINOMIAL DE UNA CURVA DE RENDIMIENTO: MÍNIMOS CUADRADOS CON RESTRICCIONES

Conceptos básicos de este capítulo:

- Expansión polinomial del precio de un bono
- Mínimos cuadrados con restricciones
- Estimación polinomial de una curva de descuento

63.1 Introducción

En este capítulo se presenta un procedimiento de estimación polinomial de una curva de rendimiento. El procedimiento utiliza precios de mercado y el método de mínimos cuadrados con restricciones. De esta manera, los parámetros por estimar son coeficientes de un polinomio. Entre mayor sea el grado del polinomio mejor será el ajuste de la curva de rendimiento a los puntos del mercado. En este caso, sin embargo, la estimación puede presentar múltiples puntos de inflexión y curvas forward negativas. Mientras que si el grado de polinomio es pequeño, la curva de rendimiento ajustada es suave, pero puede no pasar por ninguno de los puntos de mercado. Otra limitación importante del método propuesto es que no cuenta con un marco teórico del comportamiento del mercado de instrumentos de renta fija que sustente una aproximación del tipo polinomial.

63.2 Motivación

El precio de un bono cupón cero, $B(t, T)$, que se coloca en t y que paga una unidad monetaria en la fecha de vencimiento, T , se puede expresar en términos de la curva de rendimiento, $R(t, T)$, como:

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-R(t, T))^k (T-t)^k}{k!}. \quad (63.1)$$

Si ahora se escribe $\tau = T - t$, $B(\tau) \equiv B(t, T)$ y $R(\tau) \equiv R(t, T)$, se tiene que (63.1) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$B(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(\tau) \tau^k, \quad (63.2)$$

donde

$$\beta_k(\tau) = \frac{(-R(\tau))^k}{k!}.$$

Una pregunta importante es si es posible aproximar (63.2) con un polinomio. Es decir, si es posible aproximar (63.2) con una expresión en donde las $\beta_k(\tau)$ puedan sustituirse por parámetros independientes de τ , β_k , y, al mismo tiempo, detener la suma en alguna potencia finita, de tal manera que

$$B(\tau) \approx \tilde{B}(\tau) \equiv \sum_{k=0}^m \tilde{\beta}_k \tau^k, \quad (63.3)$$

donde $m < \infty$. La respuesta es sí, y la justificación teórica la proporciona el teorema de aproximación de Weierstrass. Toda función continua definida en un intervalo cerrado y que toma valores en \mathbb{R} puede ser aproximada, tanto como se quiera, por un polinomio definido en el mismo dominio. En forma más precisa, si $B(\tau)$ está definida en $[a, b]$, $a < b$, y $\varepsilon > 0$ es dado, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$, tales que

$$|B(\tau) - \tilde{B}(\tau)| = \left| B(\tau) - \sum_{k=0}^m \tilde{\beta}_k \tau^k \right| < \varepsilon.$$

En lo que sigue se determinará un polinomio que aproxima el precio del bono cupón cero utilizando los precios del mercado.

63.3 Precios y rendimientos observados

En lo que sigue B_{tj} denotará el precio observado, en t , de un bono cupón cero con vencimiento T_j . Consideré N precios observados de bonos con vencimientos $T_1 < T_2 < \dots < T_j < \dots < T_N$. No se requiere que los tiempos T_j estén igualmente espaciados. El plazo al vencimiento $T_j - t$ es expresado como proporción de un año. Por simplicidad, al bono con vencimiento en T_j , se le llamará bono j . Asimismo, R_{tj} denotará la tasa de rendimiento observada, en t , del bono j , $j = 1, 2, \dots, N$.

63.4 Transformación de tasas de rendimiento a tasas de descuento de un bono cupón cero

Con el propósito de estimar la curva de rendimiento asociada a un bono cupón cero que al vencimiento paga una unidad monetaria, en primer lugar, las tasas de rendimiento observadas a diferentes plazos se convierten en tasas de descuento. Si t es la fecha de referencia, hoy, y d_{tj} es la tasa de descuento anualizada de un bono cupón cero j , se tiene la siguiente relación entre B_{tj} , R_{tj} y d_{tj} :

$$B_{tj} = e^{-R_{tj}(T_j - t)} = 1 - d_{tj}(T_j - t). \quad (63.4)$$

Por lo tanto, la relación que permite transformar un rendimiento en tasa de descuento está dada por:

$$d_{tj} = \frac{1}{T_j - t} \left(1 - e^{-R_{tj}(T_j - t)} \right). \quad (63.5)$$

63.5 Ponderación por volumen de las tasas de descuento

En el mercado, al tiempo t , se llevan a cabo diferentes operaciones para comprar o vender un bono de un plazo dado. Si $d_{tj}^{(i)}$ y $V_{tj}^{(i)}$ son, respectivamente, la tasa de descuento y el volumen de la operación i del bono j , $i = 1, 2, \dots, i_j$, donde $d_{tj}^{(i)}$ se calcula a partir de (63.5) para cada i , entonces una tasa de descuento representativa de cada plazo operado, ponderada por volumen, se calcula mediante

$$d_{tj} = \frac{\sum_i d_{tj}^{(i)} V_{tj}^{(i)}}{\sum_i V_{tj}^{(i)}}. \quad (63.6)$$

63.6 Aproximación polinomial a la tasa de descuento

Si la tasa de descuento anualizada, $d(t, T)$, se expresa en términos de un polinomio de grado n en la variable plazo, $\tau = T - t$, es decir, si

$$d(t, T) \equiv d(\tau) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k, \quad (63.7)$$

entonces el precio de un bono cupón cero en la variable plazo, $\tau = T - t$, está dado por

$$\begin{aligned} B(t, T) \equiv B(\tau) &= 1 - \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k \right) \tau \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \beta_k \tau^k, \end{aligned} \quad (63.8)$$

donde $\beta_0 = 1$ y

$$\beta_k = -\alpha_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Es decir, si $d(\tau)$ es un polinomio de grado n , entonces $B(\tau)$ es un polinomio de grado $n + 1$. Es importante comparar el resultado (63.8) con (63.3).

63.7 Criterio de selección del estimador

Se desea estimar un polinomio de grado n para el precio de un bono cupón cero $B(\tau)$ de tal manera que

$$B(\tau_j) = B_{tj} + \varepsilon_{tj}, \quad E[\varepsilon_{tj}] = 0. \quad (63.9)$$

El criterio de selección del estimador está dado por

$$\underset{\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n}{\text{Minimizar}} \ (1 - \theta_1 - \theta_2) \sum_{j=1}^N \omega_j (B(\tau_j) - B_{tj})^2 + \theta_1 d'(\tau_N)^2 + \theta_2 d''(\tau_N)^2. \quad (63.10)$$

Aquí, θ_1 , θ_2 y $1 - \theta_1 - \theta_2$ son las ponderaciones de los sumandos de la funcional criterio, $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. Así, por ejemplo, si $1 - \theta_1 - \theta_2$ se toma próxima a 1, entonces se estará dando más importancia a la minimización de la suma de los cuadrados de los errores; en caso contrario, si $1 - \theta_1 - \theta_2$ está próxima a cero, se estará dando más importancia a la estimación de la pendiente y curvatura de la tasa de descuento en el plazo observado más largo. Usualmente, se toma $1 - \theta_1 - \theta_2 > 0.6$, es decir, la minimización de los cuadrados de los errores tiene mayor importancia en la estimación de los parámetros. Por otro lado, los pesos ω_j se eligen usualmente como

$$\omega_j = \varphi(V_{tj}), \quad V_{tj} = \sum_i V_{tj}^{(i)}, \quad (63.11)$$

donde $\varphi \geq 0$, $\varphi' > 0$ y $\varphi'' < 0$. En este problema de mínimos cuadrados se establecen dos restricciones: la tasa de descuento correspondiente al plazo más reciente se ancla en

$$\beta_1 = \frac{\sum_j^M \omega_j d_{tj}}{\sum_j^M \omega_j}, \quad 1 \leq M << N.$$

En particular si $M = 1$, se tiene que

$$\beta_1 = d_{t1}.$$

Asimismo, la pendiente de la tasa de descuento correspondiente de plazo más largo se elige de tal manera que $d'(\tau_N)^2$ sea lo más pequeña posible, donde

$$d'(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k = \sum_{k=0}^n k \alpha_k \tau^{k-1} = - \sum_{k=1}^n k \beta_{k+1} \tau^{k-1}. \quad (63.12)$$

Una vez que se tienen los estimadores de los parámetros, $\tilde{\beta}_0 \equiv 1, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n$, se genera el polinomio que estima los precios en términos de $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n$,

$$\tilde{B}(\tau) = 1 - \left(\sum_{k=0}^n \tilde{\alpha}_k \tau^k \right) \tau.$$

De esta manera, la curva de rendimiento estimada está dada por

$$\tilde{R}(t, T) = -\frac{\ln \tilde{B}(t, T)}{T - t}, \quad (63.13)$$

donde $\tilde{R}(t, T) \equiv \tilde{R}(\tau)$, $\tilde{B}(t, T) \equiv \tilde{B}(\tau)$ y $\tau = T - t$.

63.8 Homologación de plazos para operaciones concertadas en la fecha base, pero con liquidación posterior

Usualmente, se concierta una operación de compra de bonos para liquidarse días después. Para hacer comparables las tasas de descuento de las operaciones con diferentes fechas de liquidación con respecto de la fecha base t , se utiliza un procedimiento de homologación que se describe a continuación. Sea $T_j - t$ el plazo entre las fechas de vencimiento del título y de concertación de la operación y $\tau - t$ el plazo entre las fechas de concertación de la operación y de liquidación. Sea d_t la tasa de descuento de plazo más pequeño disponible en el mercado. La tasa de descuento homologada, $\hat{d}_{tj}^{(i)}$, se obtiene mediante la siguiente relación

$$\hat{d}_{tj}^{(i)} = \frac{1}{T_j - t} \left(1 - [1 - d_t(\tau - t)] [1 - d_{tj}^{(i)}(T_j - \tau)] \right). \quad (63.14)$$

Una vez homologadas las tasas de descuento, se obtienen las tasas de descuento ponderadas por volumen para cada uno de los distintos valores de $d_{tj}^{(i)}$ definidos mediante (63.6).

63.9 Bibliografía sugerida

- Delbaen, F. and S. Lorimier (1992). "Estimation of the Yield Curve and the Forward Rate Curve Starting from a Finite Number of Observations". *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 11, No. 4, pp. 259-269.
 James, J. and N. Webber (2000). Interest Rate Modelling: Financial Engineering. John Wiley & Sons, 1st edition, England.

63.10 Ejercicios

- 63.1** Con base en el criterio de selección de la sección 63.7 estime la tasa de descuento mediante un polinomio de tercer grado. Suponga que $\theta_2 = 0$.

Solución: Considere el caso para $n = 3$. Los pesos serán tomados como

$$\omega_j = \sqrt{V_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

donde por simplicidad $V_j \equiv V_{tj}$. Asimismo, se toma $\theta_2 = 0$ y se definen

$$\varphi = \frac{\theta_1}{1 - \theta_1}$$

y

$$\beta_1 = d_{t1}.$$

La función objetivo, $J \equiv J(\beta_2, \beta_3, \beta_4)$, del procedimiento de estimación, de acuerdo con (63.10), está dada por

$$\begin{aligned} J = & \sum_{j=1}^N \sqrt{V_{tj}} \left(1 + d_{t1}\tau_j + \beta_2\tau_j^2 + \beta_3\tau_j^3 + \beta_4\tau_j^4 - B_{tj} \right)^2 \\ & + \varphi (\beta_2 + 2\beta_3\tau_N + 3\beta_4\tau_N^2)^2. \end{aligned}$$

Las condiciones necesarias son:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_2 : & \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{j=1}^N \left(\tau_j^2 + d_{t1}\tau_j^3 + \tilde{\beta}_2\tau_j^4 + \tilde{\beta}_3\tau_j^5 + \tilde{\beta}_4\tau_j^6 - B_{tj}\tau_j^2 \right) \sqrt{V_j} \\ \quad + \varphi (\beta_2 + 2\beta_3\tau_N + 3\beta_4\tau_N^2), \end{array} \right. \\ \tilde{\beta}_3 : & \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{j=1}^N \left(\tau_j^3 + d_{t1}\tau_j^4 + \tilde{\beta}_2\tau_j^5 + \tilde{\beta}_3\tau_j^6 + \tilde{\beta}_4\tau_j^7 - B_{tj}\tau_j^3 \right) \sqrt{V_j} \\ \quad + 2\varphi\tau_N (\beta_2 + 2\beta_3\tau_N + 3\beta_4\tau_N^2), \end{array} \right. \\ \tilde{\beta}_4 : & \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{j=1}^N \left(\tau_j^4 + d_{t1}\tau_j^5 + \tilde{\beta}_2\tau_j^6 + \tilde{\beta}_3\tau_j^7 + \tilde{\beta}_4\tau_j^8 - B_{tj}\tau_j^4 \right) \sqrt{V_j} \\ \quad + 3\varphi\tau_N^2 (\beta_2 + 2\beta_3\tau_N + 3\beta_4\tau_N^2). \end{array} \right. \end{aligned}$$

Estas tres ecuaciones pueden expresarse en términos matriciales como:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N \tau_j^4 \sqrt{V_j} + \varphi & \sum_{j=1}^N \tau_j^5 \sqrt{V_j} + 2\varphi\tau_N & \sum_{j=1}^N \tau_j^6 \sqrt{V_j} + 3\varphi\tau_N^2 \\ \sum_{j=1}^N \tau_j^5 \sqrt{V_j} + 2\varphi\tau_N & \sum_{j=1}^N \tau_j^6 \sqrt{V_j} + 4\varphi\tau_N^2 & \sum_{j=1}^N \tau_j^7 \sqrt{V_j} + 6\varphi\tau_N^3 \\ \sum_{j=1}^N \tau_j^6 \sqrt{V_j} + 3\varphi\tau_N^2 & \sum_{j=1}^N \tau_j^7 \sqrt{V_j} + 6\varphi\tau_N^3 & \sum_{j=1}^N \tau_j^8 \sqrt{V_j} + 9\varphi\tau_N^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_2 \\ \tilde{\beta}_3 \\ \tilde{\beta}_4 \end{pmatrix} \\ & = - \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N (d_{t1}\tau_j + (1 - B_{tj}))\tau_j^2 \sqrt{V_j} \\ \sum_{j=1}^N (d_{t1}\tau_j + (1 - B_{tj}))\tau_j^3 \sqrt{V_j} \\ \sum_{j=1}^N (d_{t1}\tau_j + (1 - B_{tj}))\tau_j^4 \sqrt{V_j} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones proporciona los estimadores $\tilde{\beta}_2$, $\tilde{\beta}_3$ y $\tilde{\beta}_4$ de los parámetros β_2 , β_3 y β_4 . Encuentre dicha solución.

63.2 Repita el ejercicio anterior para $n = 4$.

63.3 Repita el ejercicio anterior con $\theta_1 = 0$, $\theta_2 \neq 0$ y $n = 3$.

XI. MEDIDAS DE RIESGO

- 64. Valor en riesgo
 - 65. Medidas coherentes de riesgo: axiomática de Artzner-Delbaen-Eber-Heath

CAPÍTULO 64

VALOR EN RIESGO

Conceptos básicos de este capítulo:

- Valor en riesgo (VaR)
- Mapeo de flujos
- VaR paramétrico
- VaR y Función de cuantiles
- VaR y el teorema de Euler
- Descomposición de Cholesky
- Componentes principales
- VaR incremental
- Índice de Herfindahl-Hirschman
- VaR-Promedio, C-VaR o Esperanza condicional de la cola del VaR
- VaR y CAPM (Modelo Diagonal)
- VaR Delta-Gama para derivados
- Aproximación cuadrática y VaR
- Aproximación de Cornish-Fisher al VaR (ajuste por sesgo)
- VaR de un bono cupón cero
- VaR de un swap de tasa de interés
- VaR de un contrato forward de tipo de cambio

64.1 Introducción

El desarrollo de métodos para cuantificar el riesgo de mercado con base en modelos analíticos no es un asunto nuevo, su inicio se sitúa en la década de los treintas con el trabajo de Macaulay (1939). Desde entonces, el concepto de duración ha desempeñado un papel central en la construcción de dichos modelos. No fue sino hasta 1995, cuando se publicó un documento técnico de J. P. Morgan donde se proponía un método novedoso para cuantificar el riesgo de mercado asociado a todas las posiciones de su banco a través del cálculo de un solo número, lo que se conoce como valor en riesgo (o VaR por las iniciales en inglés del término Value at Risk). A partir de entonces, el valor en riesgo es una de las medidas que se utilizan con mayor frecuencia, por los intermediarios financieros, en la estimación de pérdidas potenciales, en el rendimiento de un portafolio, en un periodo de tiempo y con un nivel de confianza dados.

En este capítulo se presenta un análisis completo del concepto de valor en riesgo, así como su extensión en varias direcciones: VaR de un portafolio de acciones, VaR incremental (o marginal), VaR-Promedio, VaR Delta-Gama, VaR de portafolios de bonos, etc. Uno de los objetivos de este capítulo consiste en proporcionar fórmulas analíticas para el cálculo del VaR. Es importante mencionar, al respecto, que bajo el supuesto de normalidad en el rendimiento de un portafolio de activos es posible encontrar expresiones sencillas del VaR asociado a dicho portafolio; siendo éste el supuesto principal a lo largo del presente capítulo. De hecho, este supuesto ha contribuido a que el mismo VaR sea tan popular.

64.2 Mapeo de flujos para simplificar el cálculo y la actualización del VaR

Usualmente, la estimación y actualización del VaR de un portafolio de activos requiere de un número considerable de cálculos, sobre todo cuando el portafolio contiene productos derivados como forwards, opciones o swaps. En este sentido, cuando los cambios (absolutos o porcentuales) del portafolio, y de los derivados que en él participan, se pueden expresar en función de cambios (absolutos o porcentuales) de activos financieros “simples” (acciones, divisas, bonos cupón cero, etc.), entonces se obtiene una reducción importante en el número de cálculos. De preferencia, es deseable que dicha dependencia sea lineal, en cuyo caso los activos financieros “simples” son

llamados vértices. Es importante destacar que cuando no se tiene dicha linealidad, se puede siempre recurrir al teorema de Taylor para linealizar alrededor de un punto. Afortunadamente, si se considera el supuesto de normalidad con una transformación adecuada de la matriz de varianzas-covarianzas y se utiliza la propiedad de linealidad (la combinación lineal de variables aleatorias normales es normal), se disminuye significativamente el número de cálculos.

64.3 El concepto de valor en riesgo (paramétrico)

En esta sección se presenta la definición formal del valor en riesgo paramétrico del cambio en el valor de un portafolio. Por simplicidad, se considera un portafolio que combina dos activos con riesgo. Considere un intervalo de tiempo $[t, T]$. El valor inicial, en t , de un portafolio que consiste de w_1 unidades del activo S_{1t} y w_2 unidades del activo S_{2t} está dado por

$$\Pi_t = w_1 S_{1t} + w_2 S_{2t}.$$

El cambio en el valor del portafolio, entre las fechas t y T , manteniendo las cantidades w_1 y w_2 constantes, se puede escribir de la siguiente manera:

$$X := \Pi_T - \Pi_t = w_1(S_{1T} - S_{1t}) + w_2(S_{2T} - S_{2t}).$$

Si $S_{1T} : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $S_{2T} : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ son variables aleatorias definidas sobre dos espacios muestrales, Ω_1 y Ω_2 , entonces $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, es una variable aleatoria asociada al cambio en el valor del portafolio. Asimismo, se supone que X está definida sobre un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\theta)$, donde θ es un vector de parámetros asociados con la distribución de X . Si se desea que X represente el cambio en valor de un solo activo, entonces se toman, simplemente, $w_1 = 1$ y $w_2 = 0$. Evidentemente, el esquema anterior puede generalizarse, sin dificultad, a un portafolio con más de dos activos.

El valor en riesgo de X al nivel (de confianza) $1 - q$ denotado por $-\text{VaR}_{1-q}^X$, se define como el peor valor del portafolio, en un periodo de tiempo dado, $[t, T]$, para un intervalo de confianza del $(1 - q)100\%$. En forma más precisa,

$$\mathbb{P}_\theta \{ -\text{VaR}_{1-q}^X \leq X \} = 1 - q.$$

Claramente, la cantidad $-\text{VaR}_{1-q}^X$ también satisface

$$\mathbb{P}_\theta \{ X \leq -\text{VaR}_{1-q}^X \} = q.$$

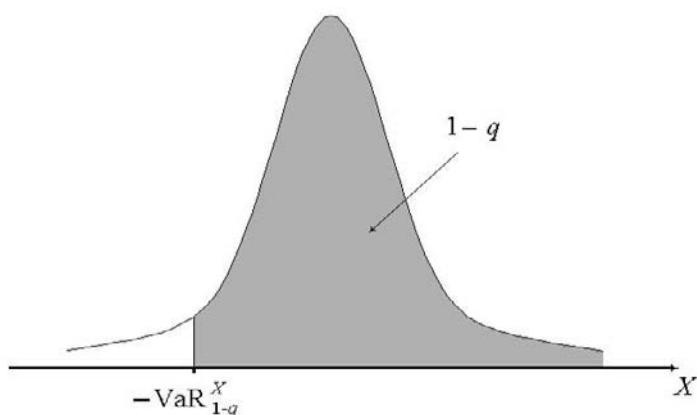
Es decir,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^X &= -\inf \{ x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_\theta \{ X \leq x \} \geq q \} \\ &= -\sup \{ x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_\theta \{ X \leq x \} \leq q \}. \end{aligned}$$

Esta definición es aplicable tanto a variables aleatorias continuas como discretas. De lo anterior se desprende, inmediatamente, que

$$\text{VaR}_{1-q}^X = -\inf \{ x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_\theta \{ X > x \} \leq 1 - q \}.$$

Como puede observarse, el número VaR_{1-q}^X es una estimación estadística del peor valor de X con cierto grado de confianza en un intervalo de tiempo dado. La Gráfica 64.1 ilustra el concepto del valor en riesgo.



Gráfica 64.1 Valor en riesgo de X al nivel $1 - q$.

64.4 Valor en riesgo y la función de cuantiles

Si X es una variable aleatoria definida en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\theta)$, la función

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_X(q) &= \inf \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_\theta \{X \leq x\} \geq q\} \\ &= \sup \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_\theta \{X \leq x\} \leq q\}\end{aligned}$$

es llamada la función de cuantiles de X . La función $\mathcal{Q}_X(q)$ es creciente y continua por la derecha. Claramente, si la variable aleatoria es continua, entonces $\mathcal{Q}_X(q) = F_X^{-1}(q)$. Observe que si X es una variable aleatoria continua, entonces

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_0^1 g(\mathcal{Q}_X(q)) dq.$$

En efecto, por definición

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_X(x).$$

Defina el siguiente cambio de variable $x = \mathcal{Q}_X(q) = F_X^{-1}(q)$, entonces $\mathcal{Q}_X(-\infty) = 0$, $\mathcal{Q}_X(\infty) = 1$ y

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X)] &= \int_0^1 g(\mathcal{Q}_X(q)) dF_X(F_X^{-1}(q)) \\ &= \int_0^1 g(\mathcal{Q}_X(q)) dq.\end{aligned}$$

Evidentemente, el VaR y la función de cuantiles están relacionados mediante

$$\text{VaR}_{1-q}^X = -\mathcal{Q}_X(q).$$

64.5 Valor en riesgo del rendimiento de un portafolio y el teorema de Euler

En esta sección se demuestra que el valor en riesgo tiene la propiedad de homogeneidad positiva. Asimismo, se discute sobre la relación que existe entre el VaR y el teorema de Euler sobre funciones homogéneas de grado uno.

Considere una variable aleatoria, X , definida sobre un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) y sea $\lambda > 0$. Si se define $Y = \lambda X$, entonces

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\{Y \leq y\} = \mathbb{P}\{\lambda X \leq y\} = \mathbb{P}\left\{X \leq \frac{y}{\lambda}\right\} = F_X\left(\frac{y}{\lambda}\right),$$

de aquí se obtiene

$$\begin{aligned}\text{VaR}_{1-q}^Y &= -\inf \{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \\ &= -\inf \{\lambda x \in \mathbb{R} \mid F_Y(\lambda x) \geq q\} \\ &= -\inf \left\{\lambda x \in \mathbb{R} \mid F_X\left(\frac{\lambda x}{\lambda}\right) \geq q\right\} \\ &= -\inf \{\lambda x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} \\ &= -\lambda \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} \\ &= \lambda \text{VaR}_{1-q}^X.\end{aligned}$$

Observe que al multiplicar X por λ , cada w_i , $i = 1, 2$, es multiplicada por λ . Por lo tanto, si se escribe $\text{VaR}_{1-q}^X := \text{VaR}_{1-q}(w_1, w_2)$, se tiene que

$$\text{VaR}_{1-q}(\lambda w_1, \lambda w_2) = \lambda \text{VaR}_{1-q}(w_1, w_2).$$

Es decir, si VaR_{1-q}^X se ve como función de w_1 y w_2 , se tiene que $\text{Var}_{1-q}(w_1, w_2)$ es homogénea de grado uno. En consecuencia, el teorema de Euler produce

$$\text{VaR}_{1-q}(w_1, w_2) = w_1 \frac{\partial \text{VaR}_{1-q}}{\partial w_1}(w_1, w_2) + w_2 \frac{\partial \text{VaR}_{1-q}}{\partial w_2}(w_1, w_2). \quad (64.1)$$

Si $\lambda < 0$, en general, la propiedad de homogeneidad no se cumple. En particular si, $\lambda = -1$ se tiene que

$$\text{VaR}_{1-q}^{-X} = -\text{VaR}_q^X$$

En efecto, sea $Y = -X$, observe primero que

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}_\theta\{Y \leq y\} = \mathbb{P}_\theta\{-X \leq y\} = \mathbb{P}_\theta\{X \geq -y\} \\ &= 1 - \mathbb{P}_\theta\{X \leq -y\} = 1 - F_X(-y). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^Y &= -\inf \{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \\ &= -\inf \{-x \in \mathbb{R} \mid F_{-X}(-x) \geq q\} \\ &= -\inf \{-x \in \mathbb{R} \mid 1 - F_X(x) \geq q\} \\ &= -\inf \{-x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \leq 1 - q\} \\ &= -\sup \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \leq 1 - q\}. \end{aligned}$$

Por supuesto, si X es una variable aleatoria continua, $\text{VaR}_{1-q}^{-X} = -\text{VaR}_{1-(1-q)}^X = -\text{VaR}_q^X$.

64.6 Valor en riesgo bajo el supuesto de normalidad

Possiblemente, el supuesto de normalidad en el rendimiento de un portafolio ha contribuido de manera muy importante a que el mismo VaR sea tan popular. Bajo este supuesto, el cálculo del VaR se convierte en una expresión muy sencilla y fácil de recordar.

Si el cambio de valor en un portafolio durante $[t, T]$, X , es visto como una variable aleatoria continua y F es su función de distribución, entonces $-\text{VaR}_{1-q}^X = F^{-1}(q)$, es decir, VaR_{1-q}^X es el cuantil q de F . Por ejemplo, si el cambio en el valor de Π_t satisface

$$d\Pi_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$, entonces

$$X = \Pi_T - \Pi_t \sim \mathcal{N}(\mu(T-t), \sigma^2(T-t)).$$

En este caso, se tiene que

$$\mathbb{P}\left\{\frac{X - \mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \leq -z_q \mid \mathcal{F}_t\right\} = q,$$

lo cual implica que

$$\mathbb{P}\left\{X \leq \mu(T-t) - z_q\sigma\sqrt{T-t} \mid \mathcal{F}_t\right\} = q.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^X &= z_q\sigma\sqrt{T-t} + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[-X \mid \mathcal{F}_t] \\ &= z_q\sigma\sqrt{T-t} - \mu(T-t). \end{aligned}$$

A partir de las tablas de cuantiles de la función de distribución acumulada de una variable normal estándar, se tiene que si $1 - q = 0.95$, $z_q = 1.65$, y si $1 - q = 0.99$, $z_q = 2.33$. Si el rendimiento medio y la volatilidad son anualizados, valores típicos de $T - t$ son¹ 5/360 (5 días) y 10/360 (10

¹ Si se excluyen fines de semana y días festivos se puede dividir sobre 252 ó 264, dependiendo de si los meses se toman con 21 ó 22 días.

días). Si se definen $\mu_d = \mu/360$ y $\sigma_d = \sigma/\sqrt{360}$ como el rendimiento y la volatilidad diarios, se tiene que

$$\text{VaR}_{1-q}^x = z_q \sigma_d \sqrt{T-t} - \mu_d(T-t),$$

y, en este caso, $T-t$ toma los valores de 5 (días) y 10 (días).

64.7 Valor en riesgo del cambio en valor de la suma de dos portafolios bajo el supuesto de normalidad

Como se ha visto, en la sección anterior, el supuesto de normalidad simplifica, considerablemente, el cálculo del VaR del cambio en valor de un portafolio. Este supuesto también facilita los cálculos del valor en riesgo del cambio en valor de la suma (combinación) de dos portafolios. En efecto, si $X \sim \mathcal{N}(\mu_x(T-t), \sigma_x^2(T-t))$ y $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y(T-t), \sigma_y^2(T-t))$ con $\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{XY}(T-t)$, entonces

$$\begin{aligned}\text{VaR}_{1-q}^{x+y} &= z_q \sigma_{x+y} \sqrt{T-t} - \mu_{x+y}(T-t) \\ &= z_q \sqrt{\sigma_x^2 + 2\sigma_{xy} + \sigma_y^2} \sqrt{T-t} - (\mu_x + \mu_y)(T-t).\end{aligned}$$

64.8 Valor en riesgo del rendimiento de un portafolio

En las dos secciones anteriores se ha calculado el VaR del cambio en valor de un portafolio. El siguiente ejemplo muestra que cuando los rendimientos de los activos son normales, el cálculo del valor en riesgo de un portafolio también es muy sencillo. Por simplicidad, se considera un portafolio con dos activos cuyos rendimientos están correlacionados entre sí.

Considere dos movimientos Brownianos $(W_t)_{t \in [0, T]}$ y $(U_t)_{t \in [0, T]}$ correlacionados entre sí, de tal forma que

$$\text{Cov}(dW_t, dU_t) = \rho dt$$

Se supone que los precios, S_{1t} y S_{2t} , de dos activos son conducidos, respectivamente, por

$$dS_{1t} = \mu_1 S_{1t} dt + \sigma_1 S_{1t} dW_t$$

y

$$dS_{2t} = \mu_2 S_{2t} dt + \sigma_2 S_{2t} dU_t,$$

donde $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ y $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. El cambio porcentual en el valor del portafolio satisface

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = \alpha_1 \frac{dS_{1t}}{S_{1t}} + \alpha_2 \frac{dS_{2t}}{S_{2t}},$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{w_1 S_{1t}}{\Pi_t}, \quad \alpha_2 = \frac{w_2 S_{2t}}{\Pi_t} \quad \text{y} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

En este caso,

$$E \left[\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} \right] = (\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) dt.$$

$$\text{Var} \left[\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} \right] = (\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho) dt.$$

Por lo tanto,

$$\text{VaR}_{1-q}^{d\Pi/\Pi} = z_q \sqrt{\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho} \sqrt{dt} - (\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) dt.$$

Por otro lado, si se considera el cambio de valor en el portafolio, se tiene que

$$d\Pi_t = w_1 S_{1t} \frac{dS_{1t}}{S_{1t}} + w_2 S_{2t} \frac{dS_{2t}}{S_{2t}}.$$

Ahora,

$$\mathbb{E} [d\Pi_t] = (w_1 S_{1t} \mu_1 + w_2 S_{2t} \mu_2) dt$$

y

$$\text{Var} [d\Pi_t] = (w_1^2 S_{1t}^2 \sigma_1^2 + w_2^2 S_{2t}^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 S_{1t} S_{2t} \sigma_1 \sigma_2 \rho) dt.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^{\text{dII}} &= z_q \sqrt{w_1^2 S_{1t}^2 \sigma_1^2 + w_2^2 S_{2t}^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 S_{1t} S_{2t} \sigma_1 \sigma_2 \rho} \sqrt{dt} \\ &\quad - (w_1 S_{1t} \mu_1 + w_2 S_{2t} \mu_2) dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la propiedad

$$\text{VaR}_{1-q}^{\text{dII}/\text{II}} = \frac{1}{\Pi_t} \text{VaR}_{1-q}^{\text{dII}}.$$

La cantidad $\text{VaR}_{1-q}^{\text{dII}/\text{II}}$ es también conocida como VaR diversificado.

64.9 VaR del rendimiento de un portafolio y factorización de Cholesky

En esta sección se presenta el método de factorización de Cholesky y su aplicación en el cálculo del VaR del rendimiento de un portafolio. Suponga que un portafolio consiste de n activos, entonces el rendimiento del portafolio es la media de los rendimientos ponderada por la participación de cada activo en el valor del portafolio. Si los rendimientos de los activos siguen distribuciones normales y son no correlacionadas, la factorización de Cholesky permite transformar los rendimientos originales en variables aleatorias con cierta estructura de correlación.

Para llevar a cabo una exposición sencilla de las ideas centrales, se considera un portafolio con sólo dos activos. Suponga que los precios, S_{1t} y S_{2t} , de dos activos financieros son conducidos, respectivamente, por

$$dS_{1t} = \mu_1 S_{1t} dt + \sigma_1 S_{1t} \sqrt{dt} \varepsilon_1$$

y

$$dS_{2t} = \mu_2 S_{2t} dt + \sigma_2 S_{2t} \sqrt{dt} \varepsilon_2,$$

donde $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $\text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$. La información sobre ε_1 y ε_2 se puede resumir como

$$\underline{\varepsilon} := \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Considere la transformación:

$$\begin{cases} \eta_1 = \varepsilon_1, \\ \eta_2 = \rho \varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_2, \end{cases} \tag{64.2}$$

entonces se tiene que

$$\text{Var} [\eta_1] = \text{Var} [\varepsilon_1] = 1,$$

$$\text{Var} [\eta_2] = \rho^2 \text{Var} [\varepsilon_1] + (1 - \rho^2) \text{Var} [\varepsilon_2] = 1$$

y

$$\begin{aligned} \text{Cov} (\eta_1, \eta_2) &= \text{Cov} (\varepsilon_1, \rho \varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_2) \\ &= \rho \text{Var} [\varepsilon_1] + \sqrt{1 - \rho^2} \text{Cov} (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ &= \rho. \end{aligned}$$

¿Cómo se eligió la transformación (64.2)? La respuesta está en la factorización (descomposición) de Cholesky. Si se denota

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Claramente, la matriz \mathbf{C} es simétrica y definida positiva, entonces existe una matriz \mathbf{A} , también llamada la raíz cuadrada de \mathbf{C} , tal que

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T,$$

donde \mathbf{A} es triangular inferior. Equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} \\ a_{11}a_{12} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix},$$

lo cual implica que

$$1 = a_{11}^2,$$

$$\rho = a_{11}a_{12},$$

$$1 = a_{12}^2 + a_{22}^2,$$

ó

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, la transformación (64.2) se puede reescribir como

$$\underline{\eta} = \mathbf{A}\underline{\varepsilon}.$$

En este caso

$$\mathbb{E} [\underline{\eta} \underline{\eta}^T] = \mathbb{E} [\mathbf{A}\underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}^T \mathbf{A}^T] = \mathbf{A}\mathbb{E} [\underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}^T] \mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{C}.$$

En conclusión, $\eta_1, \eta_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $\text{Cov}(\eta_1, \eta_2) = \rho$. La información sobre η_1 y η_2 se puede resumir como:

$$\underline{\eta} := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Así pues, con base en la transformación (64.2), se puede escribir

$$dS_{1t} = \mu_1 S_{1t} dt + \sigma_1 S_{1t} \sqrt{dt} \varepsilon_1$$

y

$$dS_{2t} = \mu_2 S_{2t} dt + \sigma_2 S_{2t} \sqrt{dt} \eta_2,$$

donde

$$\eta_2 = \rho \varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

y

$$\text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0.$$

Equivalentemente,

$$dS_{1t} = \mu_1 S_{1t} dt + \sigma_1 S_{1t} dW_{1t}$$

y

$$dS_{2t} = \mu_2 S_{2t} dt + \sigma_2 S_{2t} dW_{2t},$$

donde

$$dW_{2t} = \rho dW_{1t} + \sqrt{1 - \rho^2} dU_t$$

y

$$\text{Cov}(dW_{1t}, dU_t) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\text{Cov}(dW_{1t}, dW_{2t}) = \rho \text{Var}[dW_{1t}] + \sqrt{1 - \rho^2} \text{Cov}(dW_{1t}, dU_t) = \rho dt.$$

Si $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, se sigue que

$$\text{Var} \left[\frac{dS_{1t}}{S_{1t}} \right] = \text{Var} \left[\frac{dS_{2t}}{S_{2t}} \right] = dt$$

y

$$\text{Cov} \left(\frac{dS_{1t}}{S_{1t}}, \frac{dS_{2t}}{S_{2t}} \right) = \rho dt.$$

Además, si $\mu_1 = \mu_2 = 0$, entonces

$$\text{VaR}_{1-q}^{\text{dII}/\text{II}} = z_q \sqrt{1 + 2\alpha_1\alpha_2(\rho - 1)} \sqrt{dt},$$

donde se ha utilizado la identidad $1 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2$.

64.10 VaR de un portafolio y componentes principales

En esta sección se presenta el método de componentes principales y su aplicación en el cálculo del VaR de un portafolio. Suponga que un portafolio consiste de n activos. Como se sabe, el rendimiento del portafolio se calcula en términos de los rendimientos de los n activos. Concretamente, el rendimiento del portafolio es la media de los rendimientos ponderada por la participación de cada activo en el valor total del portafolio. En el método de componentes principales dichos rendimientos se transforman en n nuevas variables llamadas componentes principales. La transformación involucra el cálculo de valores y vectores propios de la matriz de varianzas-covarianzas de los rendimientos. Dichas componentes principales son combinaciones lineales de los rendimientos originales y cada una de ellas explica una parte de la varianza total de la transformación. Después de ordenar las componentes por su peso explicativo en la varianza total, aquellas que tengan una contribución insigificante a la varianza total pueden eliminarse. De esta manera la dimensión del problema inicial se reduce en el problema transformado. Por ejemplo, si las últimas k componentes principales se eliminan, el problema transformado consiste de $n - k$ variables. Por último, observe que dado que las componentes principales son combinaciones lineales de los rendimientos originales, cualquier información que éstos pudieran aportar en la explicación de la varianza total de la transformación es tomada en cuenta.

Por simplicidad en la exposición, se considera un portafolio con dos activos. Los precios, S_{1t} y S_{2t} , de dos activos financieros son conducidos por las siguientes ecuaciones diferenciales parciales:

$$dS_{1t} = \mu_1 S_{1t} dt + \sigma_1 S_{1t} \sqrt{dt} \eta_1$$

y

$$dS_{2t} = \mu_2 S_{2t} dt + \sigma_2 S_{2t} \sqrt{dt} \eta_2,$$

donde

$$\eta_2 = \rho \eta_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon$$

$$\eta_1, \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{y} \quad \text{Cov}(\eta_1, \varepsilon) = 0.$$

En este caso,

$$\underline{\eta} := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right),$$

con $\rho > 0$. En lo que sigue se denota

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

En primer lugar se determinan los eigenvalores (valores propios), λ_1 y λ_2 , y los eigenvectores (vectores propios), \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 , de \mathbf{C} , es decir, se determinan λ_i y $\mathbf{v}_i \neq (0, 0)^T$, $i = 1, 2$, tales que

$$\mathbf{C}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2. \tag{64.3}$$

Observe que \mathbf{C} es una matriz simétrica definida positiva. En efecto, dado que $\rho > -1$, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \neq (0, 0)^T$,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = x_1^2 + 2x_1 x_2 \rho + x_2^2 > x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Ahora bien, si se premultiplica (64.3) por \mathbf{v}_i^T , se sigue que $\lambda_i \|\mathbf{v}_i\|^2 = \mathbf{v}_i^T \mathbf{C} \mathbf{v}_i > 0$, es decir, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$. En este caso, (64.3) se puede reescribir como

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = 0.$$

Para que el sistema anterior tenga una solución no trivial, \mathbf{v}_i , se debe cumplir que

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (64.4)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de 2×2 . Es decir,

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & \rho \\ \rho & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ó

$$(1 - \lambda)^2 = \rho^2,$$

lo cual produce dos soluciones $\lambda_1 = 1 + \rho$ y $\lambda_2 = 1 - \rho$. Dado el supuesto $\rho > 0$, se sigue que $\lambda_1 > \lambda_2$. La ecuación (64.4) es conocida como el polinomio característico de \mathbf{C} . Claramente,

$$\det(\mathbf{C}) = \lambda_1 \lambda_2 = (1 + \rho)(1 - \rho) = 1 - \rho^2$$

y

$$\text{traza}(\mathbf{C}) = \lambda_1 + \lambda_2 = 2.$$

Los vectores propios se determinan a través de los sistemas:

$$\begin{pmatrix} -\rho & \rho \\ \rho & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \rho & \rho \\ \rho & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Claramente, eigenvectores correspondientes a distintos eigenvalores son linealmente independientes. Si esto no fuera así, entonces $\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_2$ para algún $\alpha \neq 0$, así $\mathbf{C} \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$ implica $\mathbf{C} \alpha \mathbf{v}_2 = \lambda_1 \alpha \mathbf{v}_2$, en consecuencia, $\lambda_1 = \lambda_2$. Observe que, en este caso, $\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = 0$, es decir, \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 son ortogonales. Si se normalizan estos vectores, es decir,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

entonces \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 son eigenvectores ortonormales. De hecho, el teorema espectral dice que los eigenvectores de toda matriz simétrica con entradas reales son ortogonales. Sean

$$\Omega = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \rho & 0 \\ 0 & 1 - \rho \end{pmatrix}$$

las matrices de eigenvectores y eigenvalores, respectivamente de \mathbf{C} . La matriz $\Omega = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ es simétrica, $\Omega = \Omega^T$, e invertible, $\Omega = \Omega^T = \Omega^{-1}$. Es decir Ω es una matriz ortogonal. Así, $\Omega^T \Omega = \Omega \Omega^T = \Omega^2 = \mathbf{I}$. Observe también que

$$\mathbf{C} \Omega = \Omega \Lambda,$$

lo cual, evidentemente, equivale a

$$\mathbf{C} \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{C} \mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2.$$

Por lo tanto, se puede escribir

$$\mathbf{C} = \Omega \Lambda \Omega^{-1} = \Omega \Lambda \Omega^T.$$

A esta factorización se le llama eigen-descomposición y en ocasiones eigen-diagonalización. Defina ahora la transformación

$$\underline{\gamma} = \Omega^T \underline{\eta}. \quad (64.5)$$

Claramente, $E[\underline{\gamma}] = (0, 0)^T$ y

$$\begin{aligned} \text{Var} [\underline{\gamma}] &= \Omega^T \text{Var} [\underline{\eta}] (\Omega^T)^T \\ &= \Omega^T \text{Var} [\underline{\eta}] \Omega \\ &= \Omega^T \mathbf{C} \Omega \\ &= \Omega^T \Omega \Lambda \Omega^T \Omega \\ &= \Lambda. \end{aligned}$$

Es decir la transformación (64.5) preserva la media, pero modifica la matriz de varianzas-covarianzas, de \mathbf{C} a Λ . De acuerdo con (64.5), se tiene que

$$\begin{cases} \gamma_1 = u_{11}\eta_1 + u_{12}\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 + \eta_2) \\ \gamma_2 = u_{21}\eta_1 + u_{22}\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 - \eta_2). \end{cases} \quad (64.6)$$

A la primera ecuación se le conoce como primera componente principal y a la segunda como segunda componente principal. En ocasiones, el vector propio asociado con el valor propio más grande, λ_1 , es llamado la primer componente principal, etc. Observe que

$$\text{Var} [\gamma_1] = \frac{1}{2}(2 + 2\rho) = 1 + \rho = \lambda_1,$$

$$\text{Var} [\gamma_2] = \frac{1}{2}(2 - 2\rho) = 1 - \rho = \lambda_2$$

y

$$\text{Cov} (\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4} \text{Cov} (\eta_1 + \eta_2, \eta_1 - \eta_2) = \frac{1}{4}(1 - \rho + \rho - 1) = 0.$$

Por lo anterior,

$$\det(\mathbf{C}) = \text{Var} [\gamma_1] \times \text{Var} [\gamma_2] \quad \text{y} \quad \text{traza}(\mathbf{C}) = \text{Var} [\gamma_1] + \text{Var} [\gamma_2].$$

Asimismo, se tiene que

$$\mathbf{u}_1 = \arg \max \left\{ \max_{\{\mathbf{x}: \|\mathbf{x}\|=1\}} \text{Var} [\mathbf{x}^T \underline{\eta}] \right\}.$$

Si ahora se escribe, con base en las transformaciones (64.2) y (64.6), se tiene que

$$dS_{1t} = \mu_1 S_{1t} dt + \sigma_1 S_{1t} \sqrt{dt} \gamma_1$$

y

$$dS_{2t} = \mu_2 S_{2t} dt + \sigma_2 S_{2t} \sqrt{dt} \gamma_2,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1 + \eta_2), \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1 - \eta_2),$$

$$\eta_2 = \rho \varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{Cov} (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0,$$

$$\text{Var} [\varepsilon_1] = \text{Var} [\varepsilon_2] = 1, \quad \text{Cov} (\varepsilon_1, \eta_2) = \rho.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{Var} [\gamma_1] &= \frac{1}{2} \text{Var} [\varepsilon_1 + \eta_2] \\ &= \frac{1}{2} \text{Var} [(1 + \rho)\varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2}\varepsilon_2]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} ((1 + \rho)^2 + 1 - \rho^2) \\ &= 1 + \rho,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var} [\gamma_2] &= \frac{1}{2} \text{Var} [\varepsilon_1 - \eta_2] \\ &= \frac{1}{2} \text{Var} [(1 - \rho)\varepsilon_1 - \sqrt{1 - \rho^2}\varepsilon_2] \\ &= \frac{1}{2} ((1 - \rho)^2 + 1 - \rho^2) \\ &= 1 - \rho,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cov} (\gamma_1, \gamma_2) &= \frac{1}{2} \text{Cov} ((1 + \rho)\varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2}\varepsilon_2, (1 - \rho)\varepsilon_1 - \sqrt{1 - \rho^2}\varepsilon_2) \\ &= \frac{1}{2} ((1 + \rho)(1 - \rho) - (1 - \rho^2)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Así pues, con base en lo anterior, se puede escribir

$$dS_{1t} = \mu_1 S_{1t} dt + \sigma_1 S_{1t} dW_{1t}$$

y

$$dS_{2t} = \mu_2 S_{2t} dt + \sigma_2 S_{2t} dW_{2t},$$

donde

$$dW_{1t} = \frac{1}{\sqrt{2}} (dU_{1t} + dU_{2t}), \quad dW_{2t} = \frac{1}{\sqrt{2}} (dU_{1t} - dU_{2t})$$

$$dU_{2t} = \rho dU_{1t} + \sqrt{1 - \rho^2} dV_t,$$

$$\text{Cov} (dU_{1t}, dV_t) = 0.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}\text{Var} [dW_{1t}] &= \frac{1}{2} \text{Var} [dU_{1t} + dU_{2t}] \\ &= \frac{1}{2} \text{Var} [(1 + \rho)dU_{1t} + \sqrt{1 - \rho^2}dV_t] \\ &= (1 + \rho)dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var} [dW_{2t}] &= \frac{1}{2} \text{Var} [dU_{1t} - dU_{2t}] \\ &= \frac{1}{2} \text{Var} [(1 - \rho)dU_{1t} - \sqrt{1 - \rho^2}dV_t] \\ &= (1 - \rho)dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cov} (dW_{1t}, dW_{2t}) &= \frac{1}{2} \text{Cov} ((1 + \rho)dU_{1t} + \sqrt{1 - \rho^2}dV_t, (1 - \rho)dU_{1t} - \sqrt{1 - \rho^2}dV_t) \\ &= \frac{1}{2} ((1 + \rho)(1 - \rho) - (1 - \rho^2)) dt \\ &= 0.\end{aligned}$$

Si se supone que $\mu_1 = \mu_2 = 0$, se cumple que

$$\begin{aligned}\text{VaR}_{1-q}^{\text{dII}/\text{II}} &= \sqrt{\left(\alpha_1 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_1/S_1}\right)^2 + \left(\alpha_2 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_2/S_2}\right)^2} \\ &= z_q \sqrt{\left(\alpha_1 \sigma_1 \sqrt{\lambda_1}\right)^2 + \left(\alpha_2 \sigma_2 \sqrt{\lambda_2}\right)^2} \sqrt{dt} \\ &= z_q \sqrt{\alpha_1^2 \sigma_1^2 \lambda_1 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 \lambda_2} \sqrt{dt} \\ &= z_q \sqrt{2\alpha_1^2 \sigma_1^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) + 2\alpha_2^2 \sigma_2^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)} \sqrt{dt}.\end{aligned}$$

¿Cuál es la utilidad del método de componentes principales en el cálculo del VaR? La respuesta a esta pregunta es simple. Suponga que $\rho = 0.95$, entonces

$$\text{Var}[dW_{1t}] = (1 + \rho)dt = 1.95dt.$$

Así, la varianza de $dW_{1,t}$ con respecto de la varianza total es $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2) = 1.95/2 = 0.975$, mientras que la de dW_{2t} sólo explica el 0.025 ($= \lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$) de la varianza total. Si $\alpha_2 = 1/\sqrt{2}$, $\alpha_1 = 1 - (1/\sqrt{2})$, $\sigma_1 = 1/\sqrt{10}$ y $\sigma_2 = 0.05$, entonces

$$2\alpha_2^2 \sigma_2^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) = (0.0025)(0.025) = 0.0000625.$$

Por lo tanto, la segunda componente principal puede eliminarse ya que su contribución a la varianza total es insignificante. De esta manera, un problema de dimensión 2, de dos activos, puede reducirse a un problema de dimensión 1, de la combinación lineal de los dos activos y

$$\text{VaR}_{1-q}^{\text{dII}/\text{II}} \approx z_q \sqrt{2\alpha_1^2 \sigma_1^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)} \sqrt{dt} = z_q(0.1293)\sqrt{dt}.$$

64.11 Valor en riesgo incremental del rendimiento de un portafolio

En el cálculo del VaR del rendimiento de un portafolio, es natural preguntar cuál de los activos contribuye más al riesgo total. El cálculo aislado del VaR para cada uno de los activos no es la aproximación correcta debido a que se omiten los efectos de correlación con los otros activos. En esta sección se determina la contribución de cada uno de los activos en el VaR del rendimiento de un portafolio. Para ello se utiliza la propiedad de homogeneidad positiva y el teorema de Euler en (64.1).

Suponga que las dinámicas de los precios, S_{1t} y S_{2t} , de dos activos son conducidas, respectivamente, por

$$dS_{1t} = \mu_1 S_{1t} dt + \sigma_1 S_{1t} dW_t$$

y

$$dS_{2t} = \mu_2 S_{2t} dt + \sigma_2 S_{2t} dU_t,$$

de tal forma que

$$\text{Cov}(dW_t, dU_t) = \rho dt,$$

donde $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ y $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. El valor en riesgo del rendimiento de portafolio, calculado con anterioridad en la sección 64.8, satisface

$$\text{VaR}_{1-q}^{\text{dII}/\text{II}} = z_q \sqrt{\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho} \sqrt{dt} - (\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) dt.$$

El VaR incremental de un activo se define como la razón de cambio entre el VaR y la proporción del valor del portafolio que se invierte en el activo. Por supuesto, para esto hay que ver el VaR

como función de los porcentajes en que participan los activos en el portafolio. De esta manera, el VaR incremental con respecto de α_1 , denotado por $\text{VaRI}_{1-q}^{\alpha_1}$, está dado por:

$$\begin{aligned}\text{VaRI}_{1-q}^{\alpha_1} &= \frac{\partial \text{VaR}_{1-q}}{\partial \alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2) \\ &= \frac{z_q}{2} \left(\frac{2\alpha_1\sigma_1 + 2\alpha_2\sigma_{12}}{\sqrt{(\text{d}t)^{-1}\text{Var}[\text{d}\Pi_t/\Pi_t]}} \right) \sqrt{\text{d}t} - \mu_1 \text{d}t \\ &= z_q \frac{\text{Cov}\left(\frac{\text{d}S_{1t}}{S_{1t}}, \alpha_1 \frac{\text{d}S_{1t}}{S_{1t}} + \alpha_2 \frac{\text{d}S_{2t}}{S_{2t}}\right)}{\sqrt{\text{d}t} \sqrt{\text{Var}[\text{d}\Pi_t/\Pi_t]}} \sqrt{\text{d}t} - \mu_1 \text{d}t \\ &= z_q \sigma_1 \frac{\text{Cov}\left(\frac{\text{d}S_{1t}}{S_{1t}}, \frac{\text{d}\Pi_t}{\Pi_t}\right)}{\sqrt{\text{Var}\left[\frac{\text{d}S_{1t}}{S_{1t}}\right]} \sqrt{\text{Var}[\text{d}\Pi_t/\Pi_t]}} \sqrt{\text{d}t} - \mu_1 \text{d}t \\ &= z_q \sigma_1 \beta_1 \sqrt{\text{d}t} - \mu_1 \text{d}t,\end{aligned}$$

donde

$$\beta_1 = \frac{\text{Cov}\left(\frac{\text{d}S_{1t}}{S_{1t}}, \frac{\text{d}\Pi_t}{\Pi_t}\right)}{\sqrt{\text{Var}\left[\frac{\text{d}S_{1t}}{S_{1t}}\right]} \sqrt{\text{Var}[\text{d}\Pi_t/\Pi_t]}}.$$

Por lo tanto, en virtud del teorema de Euler, se puede escribir

$$\text{VaR}_{1-q}(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \text{VaRI}_{1-q}^{\alpha_1} + \alpha_2 \text{VaRI}_{1-q}^{\alpha_2}.$$

Es decir, el VaR del rendimiento de un portafolio es una combinación lineal convexa de los valores en riesgo incrementales. De esta manera, las posiciones se pueden cambiar para modificar el VaR. Este procedimiento es más eficiente comparado con el uso de valores en riesgo en forma individual. Si se denota $\sigma_\beta = \alpha_1\sigma_1\beta_1 + \alpha_2\sigma_2\beta_2$ y $\mu_\beta = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$, la expresión anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\text{VaR}_{1-q}(\alpha_1, \alpha_2) &= \alpha_1 \text{VaRI}_{1-q}^{\alpha_1} + \alpha_2 \text{VaRI}_{1-q}^{\alpha_2} \\ &= z_q (\alpha_1 \sigma_1 \beta_1 + \alpha_2 \sigma_2 \beta_2) \sigma_\beta \sqrt{\text{d}t} - (\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) \text{d}t \\ &= z_q \sigma_\beta \sqrt{\text{d}t} - \mu_\beta \text{d}t.\end{aligned}$$

Es decir el VaR incremental (o marginal) de un portafolio está asociado con las betas de dicho portafolio.

64.12 Índice de Herfindahl-Hirschman

El índice de Herfindahl-Hirschman proporciona una medida de concentración del valor en riesgo de los activos del portafolio. De acuerdo con la sección anterior, se puede escribir

$$\text{VaR}_{1-q}^{\text{d}\Pi/\Pi} = \sum_{k=1}^n x_k,$$

donde

$$x_k = \alpha_k \text{VaRI}_{1-q}^{\alpha_k}.$$

El índice de Herfindahl-Hirschman se define como

$$\text{IHH} = \sum_{k=1}^n y_k^2$$

donde

$$y_k = \frac{x_k}{\text{VaR}_{1-q}^{\text{d}\Pi/\Pi}}$$

Para ilustrar la utilidad de este índice suponga, por ejemplo, que un portafolio contiene 4 activos para los cuales $y_1 = 0.45$, $y_2 = y_3 = 0.25$ y $y_4 = 0.05$. En este caso,

$$\text{IHH} = 0.33$$

La interpretación de este índice es que su inverso $1/\text{IHH} = 3$ significa que el portafolio bajo consideración, de 4 activos, es equivalente a uno con tres activos que contribuyen igualmente al VaR original.

64.13 VaR-promedio, AVaR (Average VaR), y esperanza condicional del VaR

Un concepto muy útil en administración de riesgos es el VaR-promedio, el cual consiste en tomar el promedio de pérdidas potenciales con respecto al cuantil q . Así pues el VaR-promedio se define como

$$\text{AVaR}_{1-q}^X = \frac{1}{q} \int_0^q \text{VaR}_{1-s}^X ds.$$

Si, por ejemplo,

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

es decir, X es una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda > 0$, se puede demostrar que

$$\text{VaR}_{1-q}^X = \frac{\ln(1-q)}{\lambda}.$$

Por lo tanto, se sigue que

$$\begin{aligned} \text{AVaR}_{1-q}^X &= \frac{1}{q} \int_0^q \text{VaR}_{1-s}^X ds \\ &= \frac{1}{q} \int_0^q \frac{\ln(1-s)}{\lambda} ds \\ &= \frac{1}{q\lambda} \int_0^q \ln(1-s) ds. \end{aligned}$$

Considere ahora el cambio de variable $u = 1 - s$. En este caso, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} \text{AVaR}_{1-q}^X &= -\frac{1}{q\lambda} \int_1^{1-q} \ln(u) du \\ &= -\frac{1}{q\lambda} \left[(u \ln(u) - u) \Big|_1^{1-q} \right] \\ &= -\frac{1}{q\lambda} [(1-q) \ln(1-q) - (1-q) + 1] \\ &= -\frac{1}{\lambda} \left[\left(\frac{1-q}{q} \right) \ln(1-q) + 1 \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado, la metodología de valor en riesgo no proporciona información alguna cuando el tamaño esperado del cambio de valor en el portafolio excede el umbral $-\text{VaR}_{1-q}^X$. Por esta razón es conveniente introducir la siguiente medida de riesgo si se define esperanza condicional de la cola del VaR como

$$\mathcal{E}_{1-q}^X = -\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X],$$

se puede reescribir

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{1-q}^X &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [-X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X] \\ &= \mathbb{E} [-X - \text{VaR}_{1-q}^X + \text{VaR}_{1-q}^X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X] \\ &= \text{VaR}_{1-q}^X + \mathbb{E} [-X - \text{VaR}_{1-q}^X | -\text{VaR}_q^X - X > 0] \\ &= \text{VaR}_{1-q}^X - \mathbb{E} [X + \text{VaR}_{1-q}^X | \text{VaR}_q^X + X < 0]. \end{aligned}$$

Observe que si se denota $\text{VaR}_{1-q}^X = -u$, y se define $e(u) = \mathbb{E}[X - u | X < u]$, entonces $\mathcal{E}_{1-q}^X = -u - e(u)$. En este caso,

$$\begin{aligned} e(u) &= \frac{\int_{-\infty}^u (x - u) dF_X(x)}{F_X(u)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^u x dF_X(x) - u F_X(u)}{F_X(u)} \\ &= \frac{1}{F_X(u)} \int_{-\infty}^u x dF_X(x) - u \\ &= \frac{1}{F_X(u)} \left(u F_X(u) - \int_{-\infty}^u F_X(x) dx \right) - u \\ &= -\frac{1}{F_X(u)} \int_{-\infty}^u F_X(x) dx. \end{aligned}$$

Si se toma en cuenta que $-u = \text{VaR}_{1-q}^X$, se tiene que

$$\begin{aligned} e(-\text{VaR}_{1-q}^X) &= \frac{1}{\lambda} + \frac{\ln(1-q)}{\lambda} \left(\frac{1}{1 - \exp\{\ln(1-q)\}} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{\ln(1-q)}{q\lambda}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{1-q}^X &= \text{VaR}_{1-q}^X - e(-\text{VaR}_{1-q}^X) \\ &= \frac{\ln(1-q)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln(1-q)}{q\lambda} \\ &= -\frac{1}{\lambda} \left[\left(\frac{1-q}{q} \right) \ln(1-q) + 1 \right]. \end{aligned}$$

Es decir, $\text{AVaR}_{1-q}^X = \mathcal{E}_{1-q}^X$.

64.14 Valor en riesgo del rendimiento de un portafolio y el peor caso de VaR (Pc-VaR)

En esta sección se determina el peor valor del VaR del rendimiento de un portafolio con dos activos en función del coeficiente de correlación de dichos activos. Si, en particular, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, entonces

$$\text{VaR}_{1-q}^{\text{dII/II}} = \sqrt{\mathbf{Z}^T \mathbf{C} \mathbf{Z}},$$

donde

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_1/S_1} \\ \alpha_2 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_2/S_2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\rho \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^{\text{dII/II}} &= \sqrt{\mathbf{Z}^T \mathbf{C} \mathbf{Z}} \\ &= \sqrt{\left(\alpha_1 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_1/S_1} \right)^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_1/S_1} \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_2/S_2} \rho + \left(\alpha_2 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_2/S_2} \right)^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\alpha_1 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_1/S_1} \right)^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_1/S_1} \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_2/S_2} + \left(\alpha_2 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_2/S_2} \right)^2} \\ &= \alpha_1 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_1/S_1} + \alpha_2 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_2/S_2}. \end{aligned}$$

Esta cota superior es llamada el peor caso de VaR (Pc-VaR). Obviamente, si $\rho = 1$, entonces \mathbf{C} es la matriz unidad (todas las entradas de la matriz son iguales a 1) y

$$\begin{aligned}\text{VaR}_{1-q}^{\text{d}\Pi/\Pi} &= \sqrt{\mathbf{Z}^T \mathbf{C} \mathbf{Z}} \\ &= \sqrt{\left(\alpha_1 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_1/S_1}\right)^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_1/S_1} \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_2/S_2} + \left(\alpha_2 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_2/S_2}\right)^2} \\ &= \alpha_1 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_1/S_1} + \alpha_2 \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S_2/S_2}.\end{aligned}$$

Es decir, la cota superior es alcanzada cuando $\rho = 1$.

64.15 Valor en riesgo de un portafolio y el modelo CAPM (Modelo diagonal)

A continuación se examina, bajo un conjunto de supuestos, la relación que existe entre el valor en riesgo del rendimiento de un portafolio y el modelo CAPM (por las iniciales en inglés de Capital Asset Pricing Model). Una de las formas del modelo CAPM establece que:

$$E[dR_{it}] - rdt = \beta_i (E[dR_{mt}] - rdt), \quad (64.7)$$

donde

$$dR_{it} = \frac{dS_{it}}{S_{it}} = \mu_i dt + \sigma_i dW_{it}, \quad i = 1, 2, \quad (64.8)$$

y

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(dR_{it}, dR_{mt})}{\text{Var}[dR_{mt}]}.$$

El subíndice m hace referencia al mercado. Se supone que

$$\text{Cov}(dW_{1t}, dW_{2t}) = \rho_{12} dt.$$

Observe que en este caso, el rendimiento del portafolio satisface

$$dR_\Pi := \frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = \alpha_1 \frac{dS_{1t}}{S_{1t}} + \alpha_2 \frac{dS_{2t}}{S_{2t}},$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{w_1 S_{1t}}{\Pi_t}, \quad \alpha_2 = \frac{w_2 S_{2t}}{\Pi_t} \quad \text{y} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Por lo tanto,

$$\text{Var}[dR_\Pi] = (\alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \sigma_{12}) dt \quad (64.9)$$

y

$$E[dR_\Pi] = (\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2) dt. \quad (64.10)$$

Suponga ahora que

$$dR_{it} = \phi_i dt + \beta_i dR_{mt} + dU_{it}, \quad i = 1, 2, \quad (64.11)$$

donde U_{it} es normal con $E[dU_{it}] = 0$ y $\text{Var}[dU_{it}] = \sigma_{iu}^2 dt$, y dR_{mt} es normal con $E[dR_{mt}] = \mu_m dt$ y $\text{Var}[dR_{mt}] = \sigma_m^2 dt$. Se supone además que $\text{Cov}(dU_{it}, dR_{mt}) = 0$ y $\text{Cov}(dU_{1t}, dU_{2t}) = 0$. Observe que si en la ecuación anterior se escribe $\phi_i = r(1 - \beta_i)$ y se toman esperanzas, se obtiene de nuevo la expresión (64.7). Se puede verificar, a partir de (64.11), que

$$\sigma_{12} dt = \beta_1 \beta_2 \sigma_m^2 dt \quad (64.12)$$

y

$$\sigma_i^2 dt = (\beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{iu}^2) dt, \quad i = 1, 2. \quad (64.13)$$

Observe además que de acuerdo con (64.8) y (64.11)

$$\sigma_i dW_{it} = \beta_i dR_{mt} + dU_{it},$$

lo cual produce de nuevo (64.13),

$$\sigma_i^2 dt = (\beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{iu}^2) dt, \quad i = 1, 2,$$

como era de esperarse. Las cantidades (64.12) y (64.13) se pueden reexpresar matricialmente como

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} (\beta_1 \ \beta_2) \sigma_m^2 + \begin{pmatrix} \sigma_{1u}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{2u}^2 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, si se sustituyen (64.12) y (64.13) en (64.9), se sigue que

$$\text{Var}[dR_\Pi] = (\alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2) \sigma_m^2 dt + (\alpha_1^2 \sigma_{1u}^2 + \alpha_2^2 \sigma_{2u}^2) dt.$$

Asimismo, de (64.8) y (64.11) se tiene que

$$\mu_i = \phi_i + \beta_i \mu_m,$$

con lo cual

$$\text{E}[dR_\Pi] = (\alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2) dt + (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) \mu_m dt.$$

Esta expresión se puede simplificar aún más si se denotan $\phi_\Pi = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2$, $\beta_\Pi = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2$ y $\sigma_{\Pi,u}^2 = \alpha_1^2 \sigma_{1u}^2 + \alpha_2^2 \sigma_{2u}^2$, de tal suerte que

$$\text{Var}[dR_\Pi] = (\beta_\Pi^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\Pi,u}^2) dt$$

$$\text{E}[dR_\Pi] = (\phi_\Pi + \beta_\Pi \mu_m) dt.$$

En consecuencia,

$$\text{VaR}_{1-q}^{dR_\Pi} = z_q \sqrt{\beta_\Pi^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\Pi,u}^2} \sqrt{dt} - (\phi_\Pi + \beta_\Pi \mu_m) dt.$$

Si la cantidad $\sigma_{\Pi,u}^2$ es despreciable (usualmente lo es), se tiene que

$$\text{VaR}_{1-q}^{dR_\Pi} = z_q \beta_\Pi \sigma_m \sqrt{dt} - (\phi_\Pi + \beta_\Pi \mu_m) dt.$$

Si, en particular, $\phi_1 = \phi_2 = \mu_m = 0$, entonces

$$\text{VaR}_{1-q}^{dR_\Pi} = \alpha_1 \beta_1 z_q \sigma_m \sqrt{dt} + \alpha_2 \beta_2 z_q \sigma_m \sqrt{dt}.$$

Esta expresión, bajo los supuestos establecidos, permite calcular el valor en riesgo del rendimiento de un portafolio mediante las betas de los activos y la volatilidad del mercado. Compare este resultado con el VaR incremental estudiado en la sección 64.9.

64.16 Valor en riesgo del valor de un portafolio con un activo libre de riesgo

En esta sección se calcula el valor en riesgo del valor de un portafolio con un activo libre de riesgo. El portafolio consiste de una acción y un depósito bancario.

Considere un movimiento Browniano $(W_t)_{t \in [0, T]}$. Se supone que el precio, S_t , de una acción es conducido por la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Considere un portafolio

$$\Pi_t = w S_t + M,$$

donde M es una cantidad que se deposita en un banco y que paga una tasa de interés constante y libre de riesgo r . El cambio en el valor del portafolio satisface

$$d\Pi_t = w dS_t + M r dt.$$

En este caso,

$$\mathbb{E} [d\Pi_t] = (w\mu S_t + Mr)dt$$

y

$$\text{Var} [d\Pi_t] = w^2 \sigma^2 S_t^2 dt.$$

De esta manera,

$$\text{VaR}_{1-q}^{d\Pi} = z_q w \sigma S_t \sqrt{dt} - (w\mu S_t + Mr)dt.$$

En consecuencia,

$$\text{VaR}_{1-q}^{wdS+Mrdt} = w \text{VaR}_{1-q}^{dS} - Mr dt.$$

64.17 Valor en riesgo del valor de un portafolio con un activo con riesgo crédito

A continuación se calcula el valor en riesgo del valor de un portafolio con un activo con riesgo crédito. En particular, el portafolio consiste de una acción y un bono, en este último existe una probabilidad positiva de que los intereses se recuperen parcialmente en T .

Se supone que el precio, S_t , de una acción es conducido por una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano. Considere un portafolio

$$\Pi_t = wS_t + M,$$

donde M es una cantidad que se destina a comprar un bono. Existe una probabilidad Q de que los intereses se recuperen parcialmente en T , es decir, si δ es la tasa de recuperación de los intereses, entonces

$$\mathbb{P}_\delta \{\delta = \delta_0\} = Q, \quad 0 < \delta_0 < 1,$$

y

$$\mathbb{P}_\delta \{\delta = 1\} = 1 - Q.$$

El cambio en valor del portafolio satisface

$$d\Pi_t = wdS_t + Mr\delta dt.$$

Sea $X = \Pi_T - \Pi_t$, entonces

$$\mathbb{E}_W [X \mid \delta, \mathcal{F}_t] = (w\mu S_t + Mr\delta)(T - t)$$

y

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_\delta [\mathbb{E}_W [X \mid \delta, \mathcal{F}_t]] = (w\mu S_t + Mr(1 - Q(1 - \delta_0)))(T - t).$$

Por otro lado,

$$\text{Var}_W [X \mid \delta, \mathcal{F}_t] = w^2 \sigma^2 S_t^2 (T - t).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Var}[X \mid \mathcal{F}_t] &= \text{Var}_\delta [\mathbb{E}_W [X \mid \delta, \mathcal{F}_t]] + \mathbb{E}_\delta [\text{Var}_W [X \mid \delta, \mathcal{F}_t]] \\ &= w^2 \sigma^2 S_t^2 (T - t). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\text{VaR}_{1-q}^X = z_q w \sigma S_t \sqrt{T - t} - (w\mu S_t + Mr(1 - Q(1 - \delta_0)))(T - t).$$

La expresión anterior puede ser reescrita como

$$\text{VaR}_{1-q}^X = w \text{VaR}_{1-q}^{dS_t} \sigma S_t \sqrt{T - t} - \mu_M (T - t),$$

donde μ_M = pago esperado de los de intereses del bono. Si $-\text{VaR}_{1-q}^{S_t}$ es el peor valor del cambio en el valor del activo, al $(1 - q)100\%$ de confianza en $[t, T]$, entonces la cantidad $-w\text{VaR}_{1-q}^{S_t}$ se reduce en el pago esperado de los de intereses del bono, μ_M .

64.18 Valor en riesgo de productos derivados, aproximación Delta-Gamma

En esta sección se calcula el valor en riesgo de un portafolio que contiene productos derivados. En lo que sigue, por simplicidad, se considera el caso de un portafolio con un activo y una opción europea de compra sobre dicho activo.

Considere un movimiento Browniano $(W_t)_{t \in [0, T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Se supone que el precio, S_t , de un activo subyacente, *v.g.*, una acción, es conducido por

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. Si $c = c(S_t, t)$ es el valor de la opción europea de compra, entonces el cambio marginal en el precio de la opción, durante $[t, t + dt]$, satisface (vía el lema de Itô)

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t.$$

Considere ahora un portafolio con ω_1 unidades del activo subyacente y ω_2 unidades de una opción de compra sobre el subyacente, entonces el valor del portafolio está dado por

$$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 c(S_t, t).$$

El cambio en el valor del portafolio, durante el instante dt , se calcula mediante

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt \\ &\quad + \omega_2 \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) + \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t \\ &= [(\omega_1 + \omega_2 \Delta) \mu S_t + \omega_2 (\theta + \frac{1}{2} \Gamma \sigma^2 S_t^2)] dt + (\omega_1 + \omega_2 \Delta) \sigma S_t dW_t, \end{aligned}$$

donde

$$\theta = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad \Delta = \frac{\partial c}{\partial S_t} \quad \text{y} \quad \Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}\Pi} &= z_q (\omega_1 + \omega_2 \Delta) \sigma S_t \sqrt{dt} \\ &\quad - [\omega_1 \mu S_t + \omega_2 (\theta + \Delta \mu S_t + \frac{1}{2} \Gamma \sigma^2 S_t^2)] dt. \end{aligned}$$

En particular, si $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = 0$,

$$\text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S} = z_q \sigma S_t \sqrt{dt} - \mu S_t dt.$$

De la misma forma, si $\omega_1 = 0$ y $\omega_2 = 1$,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}c} &= z_q \sigma \Delta S_t \sqrt{dt} - (\theta + \Delta \mu S_t + \frac{1}{2} \Gamma \sigma^2 S_t^2) dt \\ &= \Delta \text{VaR}_{1-q}^{\text{d}S} - (\theta + \frac{1}{2} \Gamma \sigma^2 S_t^2) dt. \end{aligned}$$

64.19 Valor en riesgo de un derivado con base en una aproximación cuadrática del precio del derivado

Cuando un portafolio incluye productos derivados es conveniente considerar el sesgo de la distribución del cambio de valor del derivado para calcular el VaR. En este sentido, cuando la Gamma es positiva el sesgo de la distribución del cambio de valor del derivado es positivo, mientras que cuando la Gamma es negativa el sesgo de la distribución es negativo.

Sea $c = c(S_t)$ el precio de una opción europea de compra. Considera la aproximación cuadrática del cambio en precio del derivado,

$$dc \approx \frac{\partial c}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} (dS_t)^2.$$

Por lo tanto,

$$\text{Var}[dc] \approx \Delta^2 \text{Var}[dS_t] + \frac{1}{4} \Gamma^2 \text{Var}[(dS_t)^2] + \Delta \Gamma \text{Cov}(dS_t, (dS_t)^2).$$

Si los momentos impares de dS_t se anulan, entonces

$$\text{Cov}(dS_t, (dS_t)^2) = E[(dS_t)^3] - E[dS_t] E[(dS_t)^2] = 0.$$

En consecuencia,

$$\text{Var}[dc] \approx \Delta^2 \text{Var}[dS_t] + \frac{1}{4} \Gamma^2 \text{Var}[(dS_t)^2]$$

y

$$\text{VaR}_{1-q}^{dc} \approx z_q \sqrt{\Delta^2 \text{Var}[dS_t] + \frac{1}{4} \Gamma^2 \text{Var}[(dS_t)^2]}.$$

En particular, si S_t sigue un proceso de la forma

$$dS_t = \sigma S_t dZ, \quad dZ \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Var}[dc] &\approx \Delta^2 \text{Var}[dS_t] + \frac{1}{4} \Gamma^2 \text{Var}[(dS_t)^2] \\ &= \Delta^2 S_t^2 \sigma^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2 \text{Var}[(dS_t)^2] \\ &= \Delta^2 S_t^2 \sigma^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2 \left(E[(dS_t)^4] - E[(dS_t)^2]^2 \right) \\ &= \Delta^2 S_t^2 \sigma^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2 (3S_t^4 \sigma^4 - S_t^4 \sigma^4) \\ &= \Delta^2 S_t^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^4 \sigma^4. \end{aligned}$$

Observe que en este caso $\text{Var}[(dS_t)^2] = 2(\text{Var}[dS_t])^2$. Claramente,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^{dc} &\approx z_q \sqrt{\Delta^2 S_t^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^4 \sigma^4} \\ &= z_q S_t \sigma \sqrt{\Delta^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^2 \sigma^2}. \end{aligned}$$

64.20 Valor en riesgo y expansión de Cornish y Fisher

Usualmente en el cálculo del valor en riesgo de un portafolio con productos derivados, el tercer momento de la distribución del precio del derivado se ignora. Sin embargo, dicho momento proporciona información relevante sobre el sesgo de la distribución.

En lo que sigue, se supone que la dinámica del activo subyacente carece de tendencia. En particular, se supone que

$$dS_t = \sigma S_t dZ, \quad dZ \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

es decir dS_t/S_t tiene distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. En este caso, $(dS_t/\sigma S_t)^2$ tiene distribución χ_1^2 . Por lo tanto,

$$E\left[\left(\frac{dS_t}{\sigma S_t}\right)^2\right] = 1 \quad \text{y} \quad \text{Var}\left[\left(\frac{dS_t}{\sigma S_t}\right)^2\right] = 2.$$

Si $c = c(S_t)$ el precio de una opción europea de compra, la aproximación cuadrática del cambio en el precio del derivado, dc , satisface

$$dc \approx \Delta S_t \frac{dS_t}{S_t} + \frac{1}{2} \Gamma S_t^2 \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2.$$

Por lo tanto,

$$\mu_{dc} := E[dc] \approx \frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^2 \sigma^2. \quad (64.14)$$

También, dado que

$$\sigma_{dc}^2 := \text{Var}[dc] \approx \Delta^2 S_t^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^4 \sigma^4,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} E[(dc)^2] &\approx \Delta^2 S_t^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^2 \sigma^2 + (E[dc])^2 \\ &= \Delta^2 S_t^2 \sigma^2 + \frac{3}{4} \Gamma^2 S_t^2 \sigma^2. \end{aligned} \quad (64.15)$$

Por otro lado,

$$(dc)^3 \approx \Delta^3 S_t^3 \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^3 + \frac{3}{2} \Delta^2 \Gamma S_t^4 \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^4 + \frac{3}{4} \Delta \Gamma^2 S_t^5 \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^5 + \frac{1}{8} \Gamma^3 S_t^6 \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^6.$$

Consecuentemente,

$$E[(dc)^3] \approx \frac{3}{2} \Delta^2 \Gamma S_t^4 E \left[\left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^4 \right] + \frac{1}{8} \Gamma^3 S_t^6 E \left[\left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^6 \right],$$

ya que los momentos impares de la distribución normal con media cero se anulan. Asimismo, por propiedades de la distribución normal

$$E \left[\left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^4 \right] = 3\sigma^4 \quad \text{y} \quad E \left[\left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^6 \right] = 15\sigma^6.$$

En consecuencia,

$$E[(dc)^3] \approx \frac{9}{2} \Delta^2 \Gamma S_t^4 \sigma^4 + \frac{15}{8} \Gamma^3 S_t^6 \sigma^6. \quad (64.16)$$

El valor en riesgo corregido por sesgo utilizando la expansión de Cornish y Fisher, VaR-CF_{1-q}^{dc} , se define en forma similar al valor en riesgo:

$$\begin{aligned} \text{VaR-CF}_{1-q}^{dc} &= \tilde{z}_q \sigma_{dc} - \mu_{dc} \\ &= \tilde{z}_q \sqrt{\Delta^2 S_t^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^4 \sigma^4} - \frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^2 \sigma^2 \\ &= \tilde{z}_q S_t \sigma \sqrt{\Delta^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^2 \sigma^2} - \frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^2 \sigma^2, \end{aligned}$$

donde \tilde{z}_q es el percentil q corregido por sesgo de la expansión de Cornish y Fisher,

$$\tilde{z}_q = z_q + \frac{1}{6}(z_q^2 - 1)\kappa_3^{dc} \quad (64.17)$$

y

$$\begin{aligned} \kappa_3^{dc} &= \frac{1}{\sigma_{dc}^3} E \left[(dc - E[dc])^3 \right] \\ &= \frac{E[(dc)^3] - 3E[(dc)^2]\mu_{dc} + 2\mu_{dc}^3}{\sigma_{dc}^3} \\ &= \frac{\frac{9}{2} \Delta^2 \Gamma S_t^4 \sigma^4 + \frac{15}{8} \Gamma^3 S_t^6 \sigma^6 - 3(\Delta S_t^2 \sigma^2 + \frac{3}{4} \Gamma^2 S_t^2 \sigma^2) \frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^2 \sigma^2 + 2(\frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^2 \sigma^2)^3}{(\Delta S_t^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^4 \sigma^4)^{3/2}} \\ &= \frac{\frac{9}{2} \Delta^2 \Gamma S_t^4 \sigma^4 + \frac{15}{8} \Gamma^3 S_t^6 \sigma^6 - \frac{3}{2} \Delta \Gamma^2 S_t^4 \sigma^4 - \frac{9}{8} \Gamma^4 S_t^4 \sigma^4 + \frac{1}{4} \Gamma^6 S_t^6 \sigma^6}{(\Delta S_t^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^4 \sigma^4)^{3/2}} \\ &= \frac{(\frac{9}{2} \Delta^2 - \frac{3}{2} \Delta \Gamma - \frac{9}{8} \Gamma^3) \Gamma S_t^4 \sigma^4 + (\Gamma^3 + \frac{15}{2}) \frac{1}{4} \Gamma^3 S_t^6 \sigma^6}{(\Delta S_t^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^4 \sigma^4)^{3/2}} \\ &= \frac{(\frac{9}{2} \Delta^2 - \frac{3}{2} \Delta \Gamma - \frac{9}{8} \Gamma^3) \Gamma S_t^4 \sigma^4 + (\Gamma^3 + \frac{15}{2}) \frac{1}{4} \Gamma^3 S_t^6 \sigma^6}{(\Delta + \frac{1}{2} \Gamma^2 S_t^2 \sigma^2)^{3/2} S_t^3 \sigma^3}, \end{aligned}$$

en donde se han utilizado las fórmulas (64.14)-(64.16). Por último, es importante justificar la procedencia de la expresión (64.17). Cornish y Fisher en 1937 desarrollaron una expansión para el cuantil, \tilde{z}_q , de una distribución $\tilde{F}(x)$ en términos los cuantiles de la distribución normal estándar $\Phi(x)$ y de los cumulantes de $\tilde{F}(x)$. Se supone que dichos cumulantes son conocidos. Concretamente, si

$$\int_{-\infty}^{\tilde{z}_q} d\tilde{F}(x) = q = \int_{-\infty}^{z_q} d\Phi(x),$$

entonces

$$\begin{aligned}\tilde{z}_q = & z_q + \frac{1}{6} (z_q^2 - 1) \kappa_3 + \frac{1}{24} (z_q^3 - 3z_q) \kappa_4 - \frac{1}{36} (2z_q^3 - 5z_q) \kappa_3^2 \\ & + \frac{1}{120} (z_q^4 - 6z_q^2 + 3) \kappa_5 - \frac{1}{24} (z_q^4 - 5z_q^2 + 2) \kappa_3 \kappa_4 \\ & + \frac{1}{324} (12z_q^4 - 53z_q^2 + 17) \kappa_3^3 + \dots,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \kappa_2, \\ \mu_3 &= \kappa_3, \\ \mu_4 &= \kappa_4 + 3\kappa_2^2, \\ \mu_5 &= \kappa_5 + 10\kappa_2\kappa_3 \\ &\vdots\end{aligned}$$

La cantidad μ_i representa el i -ésimo momento, de la distribución de $\tilde{F}(x)$, respecto a la media. Por último, es importante mencionar que los polinomios asociados a la expansión de \tilde{z}_q especificados mediante:

$$\begin{aligned}x, \\ x^2 - 1, \\ x^3 - 3x, \\ x^4 - 6x^2 + 3 \\ &\vdots\end{aligned}$$

son conocidos como polinomios Hermitianos.

64.21 Valor en riesgo de un bono cupón cero

En esta sección se calcula el VaR de un bono cupón cero. Es importante destacar que si la tasa cupón de un bono cuponado es constante, entonces el bono con cupones puede verse como la suma de bonos cupón cero.

Si $B(t, T)$ denota el precio de un bono que se coloca en t y que al vencimiento, T , paga una unidad monetaria y $R = R(t, T)$ es la curva de rendimiento asociada al bono, entonces en el contexto determinista y de tasa de interés continuamente capitalizable se tiene que

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}. \quad (64.18)$$

La sensibilidad del bono con respecto al rendimiento está dada por

$$\frac{dB}{dR} = -(T-t)B \quad (64.19)$$

y la duración (de Macaulay) por

$$\gamma := -\frac{dB}{dR} \frac{1}{B} = T-t. \quad (64.20)$$

Las cantidades en (64.19) y (64.20) se miden en “unidades monetarias×tiempo” y “tiempo”, respectivamente. A partir de (64.20), se tiene que el cambio porcentual en el precio del bono satisface

$$\frac{dB}{B} = -\gamma dR.$$

De esta manera,

$$\mathbb{E} \left[\frac{dB}{B} \right] = -\gamma \mathbb{E} [dR]$$

y

$$\text{Var} \left[\frac{dB}{B} \right] = \gamma^2 \text{Var} [dR].$$

Si se supone que $dR \sim \mathcal{N}(\mu_{dR}, \sigma_{dR}^2)$, entonces

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^{dB/B} &= z_q \gamma \sigma_{dR} + \gamma \mu_{dR} \\ &= z_q (T-t) \sigma_{dR} + (T-t) \mu_{dR}. \end{aligned} \quad (64.21)$$

En caso de que $R = R(t, T)$ sea una cantidad aleatoria, en lugar de (64.18), se tiene que

$$B(t, T) = \mathbb{E} \left\{ e^{-R(T-t)} \mid \mathcal{F}_t \right\}.$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dR} &= \frac{d}{dR} \mathbb{E} \left\{ e^{-R(T-t)} \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \frac{d}{dR} e^{-R(T-t)} \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ -(T-t) e^{-R(T-t)} \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= -(T-t) B. \end{aligned}$$

Si $dR \sim \mathcal{N}(\mu_{dR}, \sigma_{dR}^2)$, se sigue de nuevo la ecuación (64.21).

64.22 Valor en riesgo de un bono cupón cero con tasa corta conducida por el modelo de Vasicek

En el modelo de Vasicek la tasa corta, r_t , tiene la siguiente dinámica estocástica

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (64.22)$$

ó

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s, \quad (64.23)$$

donde a, b y σ son constantes positivas y conocidas, y W_t es un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad fijo equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Claramente, si r_0 es constante, r_t se distribuye Normal con media

$$\mathbb{E}[r_t] = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) \quad (64.24)$$

y varianza

$$\text{Var}[r_t] = \sigma^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}). \quad (64.25)$$

Observe que para calcular la ecuación anterior se ha utilizado la propiedad estándar de la integral del movimiento Browniano

$$\text{Var} \left(\int_0^t g(s) dW_s \right) = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t g(s) dW_s \right)^2 \right] = \int_0^t [g(s)]^2 ds. \quad (64.26)$$

Por otra parte, el precio de un bono cupón cero se obtiene descontando el nominal, en este caso una unidad monetaria, con el promedio de los valores futuros de la tasa corta, es decir,

$$B(r_t, t) = \mathbb{E} \left\{ \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right\}.$$

Defina ahora

$$I(t, T) = \int_t^T r_s ds.$$

A continuación se verá que $I(t, T)$ es normal. Por un lado, en virtud del modelo de Vasicek en (64.22), se sigue que

$$\int_t^T dr_s = ab(T-t) - a \int_t^T r_s ds + \sigma \int_t^T dW_s. \quad (64.27)$$

Equivalentemente

$$r_T - r_t = ab(T-t) - aI(t, T) + \sigma \int_t^T dW_s.$$

En consecuencia,

$$I(t, T) = -\frac{1}{a} (r_T - r_t) + b(T-t) + \frac{\sigma}{a} \int_t^T dW_s. \quad (64.28)$$

Por otro lado, del mismo modelo de Vasicek se tiene que si en (64.23) se sustituye 0 por t y t por T , es decir, se cambia de solución con otro valor final, entonces

$$r_T = r_t e^{-a(T-t)} + b \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} r_T - r_t &= r_t \left(e^{-a(T-t)} - 1 \right) + b \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s \\ &= (b - r_t) \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s. \end{aligned} \quad (64.29)$$

A partir de (64.28) y (64.29), se encuentra que

$$\begin{aligned} I(t, T) &= -\frac{1}{a} \left[(b - r_t) \left(1 - e^{-a(T-t)} \right) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s \right] \\ &\quad + b(T-t) + \frac{\sigma}{a} \int_t^T dW_s \\ &= b(T-t) + (r_t - b) \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) + \sigma \int_t^T \left(\frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a} \right) dW_s. \end{aligned} \quad (64.30)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dr_t} &= E \left\{ -\frac{dI}{dr_t} e^{-I} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\ &= - \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) E \left\{ e^{-I} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\ &= - \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) B. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{dB}{B} = - \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) dr_t.$$

Es decir, dB/B sigue una distribución normal con

$$\begin{aligned} E \left[\frac{dB}{B} \right] &= - \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) E [dr_t] \\ &= - \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) a(b - r_t) dt \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\text{Var} \left[\frac{dB}{B} \right] &= \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)^2 \text{Var}[dr_t] \\ &= \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)^2 \sigma^2 dt.\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\text{VaR}_{1-q}^{dB/B} = z_q D(t, T) \sigma \sqrt{dt} + D(t, T) a(b - r_t) dt \quad (64.31)$$

donde

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.$$

Si desea utilizar la ecuación (64.21), como alternativa para calcular el VaR de un bono cupón cero, observe que la curva de rendimiento está dada por

$$\begin{aligned}R(t, T) &= r_t \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} - \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} - 1 \right) \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2 (1 - e^{-a(T-t)})^2}{4a^3(T-t)}.\end{aligned}$$

Evidentemente,

$$dR = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} dr_t.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mu_{dR} &= E[dR] = \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) E[dr_t] \\ &= \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right) a(b - r_t) dt.\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\sigma_{dR}^2 &= \text{Var}[dR] = \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right)^2 \text{Var}[dr_t] \\ &= \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right)^2 \sigma^2 dt.\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}\text{VaR}_{1-q}^{dB/B} &= z_q \gamma \sigma_{dR} + \gamma \mu_{dR} \\ &= z_q D(t, T) \sigma \sqrt{dt} + D(t, T) a(b - r_t) dt,\end{aligned}$$

y como era de esperarse se tiene plena coincidencia con (64.31).

64.23 Valor en riesgo de un bono cupón cero, duración y convexidad

Hasta ahora se ha calculado el valor en riesgo de un bono cupón cero tomando en cuenta la duración. Sin embargo, el empleo de la duración está asociada a pequeños desplazamientos paralelos de la curva de rendimiento, dR . Es decir, la duración sólo es útil para cuantificar el riesgo de mercado de un bono cupón cero debido a pequeños desplazamientos de $R = R(t, T)$. Por lo tanto, se requiere incorporar otra cantidad que mida el cambio en la duración misma para modelar en forma más realista el valor en riesgo del bono cupón cero. Esta cantidad se conoce como convexidad y se define como

$$\zeta = \frac{1}{B} \frac{d\gamma}{dR} = \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{dR^2}.$$

Considere la siguiente aproximación de serie de Taylor en términos de segundo orden

$$\begin{aligned} \frac{dB}{B} &= \frac{1}{B} \frac{dB}{dR} dR + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B} \frac{d^2 B}{dR^2} \right) (dR)^2 \\ &\approx -\gamma dR + \frac{1}{2} \zeta (dR)^2 \end{aligned}$$

donde γ y ζ son la duración y convexidad del bono. En particular, si

$$dR = \sigma dZ, \quad dZ \sim \mathcal{N}(0, dt),$$

se tiene que

$$E \left[\frac{dB}{B} \right] \approx \frac{1}{2} \zeta E[(dR)^2] = \frac{1}{2} \zeta \sigma^2 E[Z^2] = \frac{1}{2} \zeta \sigma^2 dt$$

y

$$\text{Var} \left[\frac{dB}{B} \right] \approx \gamma^2 \text{Var}[dR] + \frac{1}{4} \zeta^2 \text{Var}[(dR)^2] - \gamma \zeta \text{Cov}(dR, (dR)^2).$$

Observe que en este caso

$$\text{Cov}(dR, (dR)^2) = E[(dR)^3] - E[dR] E[(dR)^2] = 0,$$

ya que los momentos impares de dR se anulan. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\frac{dB}{B} \right] &\approx \gamma^2 \sigma^2 + \frac{1}{4} \zeta^2 \text{Var}[(dR)^2] \\ &= \gamma^2 \sigma^2 + \frac{1}{4} \zeta^2 \left(E[(dR)^4] - E[(dR)^2]^2 \right) \\ &= [\gamma^2 \sigma^2 + \frac{1}{4} \zeta^2 (3\sigma^4 - \sigma^4)] dt \\ &= (\gamma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \zeta^2 \sigma^4) dt. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^{dB/B} &\approx z_q \sqrt{\gamma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \zeta^2 \sigma^4} \sqrt{dt} - \frac{1}{2} \zeta \sigma^2 dt \\ &= z_q \sigma \sqrt{\gamma^2 + \frac{1}{2} \zeta^2 \sigma^2} \sqrt{dt} - \frac{1}{2} \zeta \sigma^2 dt. \end{aligned}$$

64.24 Valor en riesgo de un contrato forward de tipo de cambio

Los contratos forward de tipo de cambio son muy populares en los mercados sobre mostrador. A continuación se calcula el VaR para este tipo de contrato.

Sea V el valor de un contrato forward sobre tipo de cambio, en condiciones de equilibrio, entonces

$$V = (F_{t,T} - K) e^{-R_d(t,T)(T-t)},$$

donde $F_{t,T}$ es el tipo de cambio forward, K es el tipo de cambio pactado y $R_d(t, T)$ es la tasa de interés doméstica de plazo $T - t$. En este caso, el tipo de cambio forward satisface

$$F_{t,T} = S_t e^{(R_d(t,T) - R_f(t,T))(T-t)},$$

donde S_t es el tipo de cambio nominal (moneda doméstica/moneda extranjera) y $R_f(t, T)$ es la tasa extranjera de plazo $T - t$. De esta forma, el valor del contrato puede reescribirse como

$$V = S_t e^{-R_f(t,T)(T-t)} - K e^{-R_d(t,T)(T-t)}.$$

Evidentemente, $V = V(S_t, R_d, R_f)$. Por lo tanto, la diferencial de V satisface

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial V}{\partial R_d} dR_d + \frac{\partial V}{\partial R_f} dR_f,$$

es decir,

$$dV = e^{-R_f(t,T)(T-t)} dS_t + (T-t) K e^{-R_d(t,T)(T-t)} dR_d - (T-t) S_t e^{-R_f(t,T)(T-t)} dR_f.$$

Dado que

$$\frac{dB_d}{B_d} = -(T-t) dR_d \quad \text{y} \quad \frac{dB_f}{B_f} = -(T-t) dR_f.$$

se tiene

$$dV = S_t e^{-R_f(t,T)(T-t)} \frac{dS_t}{S_t} - K e^{-R_d(t,T)(T-t)} \frac{dB_d}{B_d} + S_t e^{-R_f(t,T)(T-t)} \frac{dB_f}{B_f}$$

ó, en forma más breve,

$$\frac{dV}{V} = \Lambda_1 \frac{dS_t}{S_t} + \Lambda_2 \frac{dB_d}{B_d} + \Lambda_3 \frac{dB_f}{B_f},$$

donde

$$\Lambda_1 = S_t e^{-R_f(t,T)(T-t)} / V, \quad \Lambda_2 = -K e^{-R_d(t,T)(T-t)} / V \quad \text{y} \quad \Lambda_3 = S_t e^{-R_f(t,T)(T-t)} / V.$$

Suponga que las tasas cortas doméstica y extranjera satisfacen, respectivamente,

$$dr_t^{(d)} = \alpha(r_t^{(d)}, t) dt + \beta(r_t^{(d)}, t) dW_{2t} \tag{64.32}$$

y

$$dr_t^{(f)} = \delta(r_t^{(f)}, t) dt + \eta(r_t^{(f)}, t) dW_{3t}. \tag{64.33}$$

Asimismo, suponga que existen $M = M(t, T)$ y $N = N(t, T)$ tales que

$$dR_d = \frac{M(t, T)}{T-t} dr_t^{(d)} \quad \text{y} \quad dR_f = \frac{N(t, T)}{T-t} dr_t^{(f)}. \tag{64.34}$$

Muchos de los modelos más usuales de valuación de bonos cupón cero que se basan en la dinámica de la tasa corta permiten que la curva de rendimiento se pueda escribir como en (64.34). De esta manera,

$$\frac{dB_d}{B_d} = -M(t, T) \alpha(r_t^{(d)}, t) dt - M(t, T) \beta(r_t^{(d)}, t) dW_{2t}$$

y

$$\frac{dB_f}{B_f} = -N(t, T) \delta(r_t^{(f)}, t) dt - N(t, T) \eta(r_t^{(f)}, t) dW_{3t},$$

o en forma más compacta

$$\frac{dB_d}{B_d} = \mu_2 dt + \sigma_2 dW_{2t} \tag{64.35}$$

y

$$\frac{dB_f}{B_f} = \mu_3 dt + \sigma_3 dW_{3t}, \quad (64.36)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_2 &= -M(t, T)\alpha(r_t^{(d)}, t), & \sigma_2 &= M(t, T)\beta(r_t^{(d)}, t), \\ \mu_3 &= -N(t, T)\delta(r_t^{(f)}, t) & \text{y} & \sigma_3 = N(t, T)\eta(r_t^{(f)}, t). \end{aligned}$$

Observe que se ha utilizado el hecho de que si dW_{it} es movimiento Browniano, $-dW_{2t}$ también lo es. Suponga además que la dinámica estocástica del tipo de cambio es conducida por

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_{1t}$$

y que $\text{Cov}(dW_{it}, dW_{jt}) = \rho_{ij}dt$, $j = 1, 2, 3$. Por lo tanto,

$$\text{VaR}_{1-q}^{\text{d}V/V} = z_q \sqrt{\sum_{i=1}^3 \Lambda_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \Lambda_i \Lambda_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}} \sqrt{dt} - \left(\sum_{i=1}^3 \Lambda_i \mu_i \right) dt$$

ó

$$\text{VaR}_{1-q}^{\text{d}V/V} = z_q \sqrt{\sum_{i=1}^3 \Lambda_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \Lambda_i \Lambda_j \sigma_{ij}} \sqrt{dt} - \left(\sum_{i=1}^3 \Lambda_i \mu_i \right) dt.$$

64.25 Valor en riesgo de un swap de tasa de interés

En ausencia de riesgo crédito, un swap de tasa de interés puede verse como la diferencia de dos bonos cuponados, uno de tasa cupón fija y otro de tasa cupón flotante. Es usual llamar al bono cuponado de tasa cupón fija como “pata fija” y al bono cuponado de tasa cupón flotante como “pata flotante”. En la fecha en que pacta un swap, su precio es cero. Un día después ya no es cero, a menos que sea por pura casualidad. Observe que con respecto de la pata flotante, inmediatamente después de cualquier pago, el precio del bono con tasa cupón flotante es igual al principal. Para fijar ideas, suponga que el swap se pacta en $t = 0$, que las fechas de pago son T_1 , T_2 y T_3 , las cuales son igualmente espaciadas, y que el principal es N . Inmediatamente después del primer pago, en $t = T_1 + dT_1$ con $dT_1 > 0$,

$$V_t = N - \tilde{R}_K N \left(\frac{1}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{1}{1 + \tilde{R}_2} \right) \quad (64.37)$$

donde $\tilde{R}_K = R_K \Delta T_i$, $i = 1, 2, 3$, $\tilde{R}_i = R(t, T_{i+1})(T_{i+1} - t)$, $i = 1, 2$. En este caso $R(t, T)$ es la curva de ceros asociada al bono cuponado de tasa constante. Ahora bien, inmediatamente antes de T_1 se espera el pago del principal N más el primer pago de tasa flotante $\tilde{R}_1 N$. Para valuar el swap, es necesario traer $N + \tilde{R}_1 N$ a valor presente y deducir los pagos a tasa fija, es decir,

$$V_t = (N + \tilde{R}_1 N) \left(\frac{1}{1 + \tilde{R}_1} \right) - \tilde{R}_K N \left(\frac{1}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{1}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{1}{1 + \tilde{R}_3} \right),$$

donde $t = T_1 - dT_1$ con $dT_1 > 0$, y $\tilde{R}_i = R(t, T_i)(T_i - t)$, $i = 1, 2, 3$. En consecuencia,

$$\frac{dV_t}{V_t} = A_1 \frac{dB_1}{B_1} + A_2 \frac{dB_2}{B_2} + A_3 \frac{dB_3}{B_3}, \quad (64.38)$$

donde

$$A_1 = B_1 (1 + \tilde{R}_1 - \tilde{R}_K) N V_t^{-1}, \quad A_2 = -\tilde{R}_K N B_2 V_t^{-1} \quad \text{y} \quad A_3 = -\tilde{R}_K N B_3 V_t^{-1}.$$

Si se supone que

$$\frac{dB_i}{B_i} \sim \mathcal{N}(\mu_i(T_i - t), \sigma_i^2(T_i - t)), \quad i = 1, 2, 3, \quad (64.39)$$

con

$$\text{Cov}\left(\frac{dB_i}{B_i}, \frac{dB_j}{B_j}\right) = \sigma_{ij} \min(T_i - t, T_j - t), \quad j = 1, 2, 3,$$

donde $\mu_i, \sigma_{ij} \in \mathbb{R}$, $\sigma_i > 0$, $i, j = 1, 2, 3$, son constantes conocidas, entonces

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^{dV_t/V_t} = z_q \sqrt{ & \sum_{i=1}^3 A_i^2 (T_i - t) \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} A_i A_j \sigma_{ij} [\min(T_i, T_j) - t] \\ & - \left(\sum_{i=1}^3 A_i \mu_i (T_i - t) \right) }. \end{aligned}$$

64.26 Bibliografía sugerida

- Ahn, D., J. Boudoukh, M. Richardson, and R. F. Whitelaw (1999). "Optimal Risk Management Using Options". *The Journal of Finance*, Vol. 54, No. 1, pp. 359-375.
- Duffie, D. and J. Pan. (1997). "An Overview of Value at Risk". *Journal of Derivatives*, Vol. 4, No. 3, pp. 7-49.
- Jorion, P. (2001). Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk. Second Edition. McGraw-Hill.
- Macaulay, F. R. (1938). Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yield, and Stock Prices in the United States since 1856. Columbia University Press. New York.
- J. P. Morgan Bank (1995). RiskMetrics Technical Manual. New York.

64.27 Ejercicios

64.1 Suponga que $X \sim \mathcal{N}(\mu_x(T-t), \sigma_x^2(T-t))$, demuestre que

$$\exp\{\mu_x(T-t) + \frac{1}{2}\sigma_x^2(T-t)\} = \int_0^1 \exp\{-\text{VaR}_{1-q}^X\} dq.$$

Solución: Es suficiente utilizar la función generatriz de momentos de una variable aleatoria normal.

64.2 Sea X es una variable aleatoria continua definida en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\theta)$, encuentre el valor de q para el que se cumple

$$\text{VaR}_{1-q}^{-X} = -\text{VaR}_{1-q}^X.$$

Solución: Utilice el hecho de que $\text{VaR}_{1-q}^{-X} = -\text{VaR}_q^X$.

64.3 Suponga que $X \sim \mathcal{N}(\mu_x(T-t), \sigma_x^2(T-t))$ y $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y(T-t), \sigma_y^2(T-t))$ con $\text{Cov}(X, Y) = \rho_{XY}(T-t)$, demuestre que si $1-q = 0.5$

$$\text{VaR}_{0.5}^{X+Y} = -(\mu_X + \mu_Y)(T-t) = \text{VaR}_{0.5}^X + \text{VaR}_{0.5}^Y$$

independientemente del valor y signo de σ_{XY} . En otras palabras, si $q = 0.5$, entonces el VaR es una función lineal.

Solución: Es suficiente notar que $1-q = 0.5$ implica $z_q = 0$.

64.4 Para el caso del VaR del cambio en valor de un portafolio,

$$\text{VaR}_{1-q}^{\text{dII}} = z_q \sqrt{w_1^2 S_{1t}^2 \sigma_1^2 + w_2^2 S_{2t}^2 \sigma_2^2 + w_1 w_2 S_{1t} S_{2t} \sigma_1 \sigma_2 \rho} \sqrt{dt}$$

$$- (w_1 S_{1t} \mu_1 + w_2 S_{2t} \mu_2) dt,$$

determine su descomposición en valores en riesgo incrementales.

64.5 Sea Σ una matriz de varianza-covarianza. Suponga que Σ es una matriz de varianza-covarianza de 3×3 , la cual se puede representar como

$$\Sigma = \mathbf{A} \mathbf{A}^T.$$

Asimismo, suponga que

$$\underline{\varepsilon} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

y considere la transformación dada por $\underline{\eta} = A \underline{\varepsilon}$, entonces

$$\underline{\eta} := \sim (\mathbf{0}, \Sigma).$$

En efecto, obviamente, $E[\underline{\eta}] = \mathbf{0}$ y

$$E[\underline{\eta} \underline{\eta}^T] = E[\mathbf{A} \underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}^T \mathbf{A}^T] = \mathbf{A} E[\underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon}^T] \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \Sigma.$$

Aplique la factorización de Cholesky para obtener \mathbf{A} a través de Σ . Generalice a matrices de $n \times n$.

Solución: Denote

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{pmatrix},$$

donde $\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$ con $i \neq j$. Sea \mathbf{A} una matriz triangular inferior de 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

De esta manera,

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{21} & a_{11}a_{31} \\ a_{11}a_{21} & a_{21}^2 + a_{22}^2 & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} \\ a_{11}a_{31} & a_{31}a_{21} + a_{22}a_{32} & a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, se tiene la siguiente solución recursiva

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 = a_{11}^2 &\Rightarrow a_{11} = \sigma_1 \\ \sigma_{21} = a_{11}a_{21} &\Rightarrow a_{21} = \frac{\sigma_{21}}{a_{11}} \\ \sigma_2^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 &\Rightarrow a_{22} = \sqrt{\sigma_2^2 - a_{21}^2} \\ \sigma_{31} = a_{11}a_{31} &\Rightarrow a_{31} = \frac{\sigma_{31}}{a_{11}} \\ \sigma_{32} = a_{21}a_{31} + a_{32}a_{22} &\Rightarrow a_{32} = \frac{1}{a_{22}}(\sigma_{32} - a_{21}a_{31}) \\ \sigma_3^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 &\Rightarrow a_{33} = \sqrt{\sigma_3^2 - a_{11}^2 - a_{22}^2}, \end{aligned}$$

Para el caso general de matrices de $n \times n$ se tiene que

$$a_{ii} = \left(\sigma_i^2 - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2 \right)^{1/2}$$

y

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}} \left(\sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} a_{jk} \right)^{1/2},$$

con $j = i + 1, i + 2, \dots, n$.

64.6 Calcule el VaR de un bono cupón cero cuando la tasa corta, r_t , es conducida por el modelo de Merton

$$dr_t = bdt + \sigma dW_t,$$

donde b y σ son cantidades constantes, positivas y conocidas, y $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad con una filtración, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Aquí, \mathcal{F}_t es toda la información relevante disponible en el tiempo t .

Solución: Basta proceder como en el modelo de Vasicek de la sección 64.22 tomando en cuenta

$$r_s = r_t + b(s - t) + \sigma \int_t^s dW_u,$$

$$\mathbb{E}[r_s | \mathcal{F}_t] = r_t + b(s - t)$$

y

$$\text{Var}[r_s | \mathcal{F}_t] = \sigma^2(s - t).$$

CAPÍTULO 65

MEDIDAS COHERENTES DE RIESGO: AXIOMÁTICA DE ARTZNER, DELBAEN, EBER Y HEATH

Conceptos básicos de este capítulo:

- Medidas coherentes de riesgo
- Varianza
- Valor en riesgo (VaR)
- Esperanza condicional de la cola del VaR
- Teorema de representación de medidas coherentes de riesgo

65.1 Introducción

En las últimas décadas, el desarrollo de medidas de riesgo ha mostrado una tendencia creciente. Sin embargo, la mayoría de medidas no cumplen con propiedades básicas ni deseables. Por ejemplo, algunas de ellas no reflejan la reducción del riesgo de mercado cuando se diversifica y otras más subestiman pérdidas potenciales.

El trabajo seminal de Artzner *et al* (1999), sobre medidas coherentes de riesgo, ha conducido a cambios y transformaciones profundas en la forma de cuantificar los riesgos. En este trabajo las propiedades básicas y/o deseables de una medida coherente de riesgo se expresan a través de un conjunto de axiomas; cuatro para ser precisos. Uno de los objetivos que persigue este capítulo es derivar un conjunto de propiedades adicionales de las medidas coherentes de riesgo que se desprenden de los axiomas. Asimismo, se examinan varias medidas de riesgo de uso frecuente para indagar si son coherentes o no. Cuando no hay coherencia se proporcionan en detalle varios contraejemplos.

El presente capítulo va más allá de verificar si una medida de riesgo es coherente o no. En este sentido, con base en el concepto de cópula de distribuciones y las propiedades de las colas de combinaciones convexas de distribuciones Gaussianas, se muestra que el uso de la varianza como una medida de riesgo conlleva a limitaciones más serias que el satisfacer o no un conjunto de axiomas de coherencia. Específicamente, la varianza es incapaz de distinguir diferencias entre las colas de distribuciones.

Se muestra que el valor en riesgo (VaR) no es una medida subaditiva y, por lo tanto, no satisface las propiedades requeridas de coherencia, como se verá más adelante. Esta metodología de uso común subestima pérdidas potenciales pues no proporciona información cuando el tamaño de la pérdida excede el umbral determinado por el VaR. Afortunadamente, se puede construir una medida de riesgo que sí toma en cuenta dicha información, la llamada esperanza condicional de la cola del valor en riesgo. Al respecto, se muestra que la esperanza condicional de la cola del VaR, o simplemente VaR condicional, es una medida coherente de riesgo.

No sólo la propiedad de subaditividad es la que con menos frecuencia es satisfecha. En este sentido, se proporciona un ejemplo de una medida de riesgo, en términos del precio de una opción europea de venta, que no es invariante bajo traslaciones. En este caso, el valor de mercado de los títulos (de capital y/o deuda) de una empresa sigue un movimiento geométrico Browniano y existe en el mercado una opción europea de venta que paga dicho valor de mercado si la empresa se declara en bancarrota en una fecha futura predeterminada, y cero en otro caso, bajo una medida de probabilidad neutral al riesgo.

Asimismo, se propone una demostración sencilla del teorema de representación de medidas coherentes de riesgo en términos de una familia de probabilidades condicionales. Por último, se establecen varias reglas sencillas para construir medidas coherentes a partir de otras medidas coherentes.

El presente capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera. En la próxima sección se define, en términos generales, una medida de riesgo. En las secciones 3 y 4 se enlistan y justifican los axiomas que definen una medida coherente de riesgo. En el transcurso de la sección 5 se muestra que la varianza no es una medida coherente de riesgo. En la sección 6 se exhibe que el uso de la varianza como una medida de riesgo conlleva a limitaciones más serias que satisfacer o no un conjunto de axiomas de coherencia. En la sección 7 se muestra que el valor en riesgo (VaR) no es una medida coherente de riesgo, en particular, el VaR no refleja la reducción de riesgo cuando se diversifica. A través de la sección 8, se proporciona un ejemplo de una medida de riesgo, en términos del precio de una opción europea de venta, que no es invariante bajo traslaciones. En la sección 9 se muestra que la esperanza condicional de la cola del VaR es una medida coherente de riesgo. En la sección 10 se demuestra el teorema de representación de medidas coherentes de riesgo en términos de una familia de probabilidades condicionales. En la sección 11 se establecen varias reglas para construir medidas coherentes a partir de otras medidas coherentes. Por último, en la sección 12, se presentan las conclusiones del capítulo.

65.2 Medidas de riesgo

El posible cambio en el valor de un portafolio, en una fecha futura, será visto, de ahora en adelante, como una variable aleatoria. Una medida de riesgo se define como una función de dicha variable aleatoria. En forma más precisa, considere un intervalo de tiempo $[t, T]$. El valor inicial, en t , de un portafolio que consiste de w_1 unidades del activo S_{1t} y w_2 unidades del activo S_{2t} está dado por

$$\Pi_t = w_1 S_{1t} + w_2 S_{2t}.$$

El cambio en el valor del portafolio, entre las fechas t y T , manteniendo las cantidades w_1 y w_2 constantes, es decir, sin rebalancear el portafolio, satisface

$$X := \Pi_T - \Pi_t = w_1 D_{1T} + w_2 D_{2T} \quad (65.1)$$

donde

$$D_{1T} = S_{1T} - S_{1t}, \quad D_{2T} = S_{2T} - S_{2t}.$$

Si $S_{1T} : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y $S_{2T} : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ son variables aleatorias definidas sobre dos espacios muestrales, entonces $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, es una variable aleatoria asociada al cambio en el valor del portafolio. Asimismo, se supone que X está definida sobre un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se define la familia

$$\mathcal{A} = \{X \mid X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

De ahora en adelante, la variable aleatoria X será llamada cambio en el valor del portafolio y \mathcal{A} denotará el conjunto de todos los posibles cambios en el valor del portafolio. Evidentemente, el esquema anterior puede generalizarse, sin dificultad, a un portafolio con más de dos activos. Una medida de riesgo será vista como una función $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$. En términos generales, una medida de riesgo será definida con base en una medida de probabilidad \mathbb{P} .

Por otro lado, si en lugar del cambio en el valor del portafolio, $\Pi_T - \Pi_t$, se considera el rendimiento del portafolio,

$$\frac{\Pi_T - \Pi_t}{\Pi_t} = \alpha_1 \frac{S_{1T} - S_{1t}}{S_{1t}} + \alpha_2 \frac{S_{2T} - S_{2t}}{S_{2t}}, \quad (65.2)$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{w_1 S_{1t}}{\Pi_t}, \quad \alpha_2 = \frac{w_2 S_{2t}}{\Pi_t} \quad \text{y} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

se tiene que los rendimientos (cambios porcentuales en los precios) de los activos están acotados inferiormente por -1 , mientras que los cambios en valor de los activos D_{1T} y D_{2T} pueden tomar cualquier valor en \mathbb{R} .

En ocasiones, la variable aleatoria X asociada al cambio en el valor de un portafolio entre dos fechas, recibe el nombre de riesgo, lo cual parece apropiado y en cuyo caso $\rho(X)$ debería leerse como “medida de riesgo del riesgo X ,” lo cual genera repetición de términos. Compare esta

situación con el caso de una medida de probabilidad, la cual es llamada simplemente probabilidad, si a la medida de riesgo se le llama simplemente riesgo, entonces $\rho(X)$ debería leerse como “riesgo del riesgo.” Para evitar estos problemas de terminología se insiste en hacer referencia a X como el cambio en valor de un portafolio, o incluso de manera simple como un elemento de \mathcal{A} y en el peor de los casos como la posición X .

65.3 Propiedades deseables de una medida coherente de riesgo

Las propiedades deseables de una medida coherente de riesgo ρ se enlistan y justifican a continuación:

- (i) Monotonía no creciente. Si $X, Y \in \mathcal{A}$ son tales que $X \leq Y$, entonces

$$\rho(X) \geq \rho(Y).$$

Es decir, si partiendo de un mismo portafolio, el cambio en el valor del portafolio X es menor que el de Y , entonces, por la pérdida de valor de X , el riesgo de X deberá ser mayor que el de Y .

- (ii) Subaditividad. Si $X, Y \in \mathcal{A}$, entonces

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Esta propiedad expresa que una fusión de portafolios no crea riesgo adicional. En el contexto de portafolios de inversión esta propiedad dice que la diversificación reduce el riesgo. El cumplimiento de la subaditividad permite prácticas de administración de riesgos más eficientes. Por ejemplo, si dos áreas de análisis de una misma institución financiera calculan, de manera independiente, las medidas $\rho(X)$ y $\rho(Y)$ de los riesgos que tomarán y la medida de riesgo que utilizan es subaditiva, el director general puede estar seguro de que $\rho(X) + \rho(Y)$ es una garantía aceptable relativa al riesgo de $X + Y$.

- (iii) Homogeneidad positiva (homogeneidad de grado uno con constantes positivas). Si $\alpha \geq 0$ y $X \in \mathcal{A}$, se tiene que

$$\rho(\alpha X) = \alpha \rho(X).$$

Esta propiedad establece que el tamaño del portafolio influye directamente en el riesgo. No es lo mismo invertir una unidad monetaria en activos financieros que invertir un millón en los mismos activos. En el segundo caso es un millón de veces más riesgoso. En este contexto, también se dice que $\rho(\cdot)$ es una función homogénea de grado uno. Observe, por último, que la subaditividad implica que $\rho(nX) \leq n\rho(X)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

- (iv) Invarianza bajo traslaciones. Si $X \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que $\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$. Si existe un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés libre de riesgo, r , y si se escribe

$$\rho(X + \alpha) = \rho\left(X + \frac{\alpha}{r}r\right),$$

se puede interpretar a α como el interés, libre de riesgo, que paga un depósito bancario sobre una inversión inicial α/r . De esta manera, la propiedad de invarianza bajo traslaciones dice que el riesgo disminuye en dichos intereses. Si α es negativa, ésta se interpreta como un adeudo al banco, lo que incrementa el riesgo en el portafolio. Además, si se escribe $\alpha = \rho(X)$, entonces $\rho(X + \rho(X)) = 0$, ya que $\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$. De esta manera, $\alpha = \rho(X)$ se puede interpretar como la cantidad monetaria que se requiere para eliminar el riesgo de X . Es decir, $\rho(X)$ funciona como cobertura de X . Por último, observe que en términos estrictos, $\rho(X)$ no es invariante bajo traslaciones por el cambio de signo en α dentro y fuera de ρ . Sin embargo, en la literatura especializada esta propiedad ha adoptado dicho nombre y lo mismo se hará en el transcurso del presente capítulo. Un buen nombre para esta propiedad podría ser “invarianza monetaria”.

65.4 Tratamiento axiomático de una medida coherente de riesgo

A continuación se formaliza el concepto de medida coherente de riesgo con base en las propiedades anteriores.

Se dice que una medida de riesgo ρ es coherente, en el sentido de Artzner *et al* (1999), si para $X, Y \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple lo siguiente:

- (i) $Y \geq X \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$,
- (ii) $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$,
- (iii) $\rho(\alpha X) = \alpha \rho(X)$, $\alpha \geq 0$,
- (iv) $\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

65.4.1 Propiedades adicionales de una medida coherente de riesgo

Algunas proposiciones sobre la función ρ que se desprenden de los axiomas son:

- (a) La función ρ es convexa en \mathcal{A} . Es decir, si $X, Y \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in [0, 1]$, entonces

$$\rho(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \leq \alpha \rho(X) + (1 - \alpha)\rho(Y).$$

Esto se sigue de los axiomas de subaditividad y homogeneidad positiva. La propiedad de convexidad de la función objetivo en los problemas de optimización de portafolios es esencial ya que ésta, junto con otras condiciones, garantiza la existencia de soluciones.

- (b) La función ρ es continua en \mathcal{A} . Este resultado se sigue de la convexidad de ρ . De esta manera, cambios pequeños en X conducen a cambios pequeños en $\rho(X)$.
- (c) El conjunto $\mathcal{B} = \{X \mid \rho(X) \leq 0\}$ es cerrado y convexo. Esto se debe a la continuidad y convexidad de ρ en \mathcal{A} . Por lo tanto, el conjunto \mathcal{B} contiene todos sus puntos límite.
- (d) $\rho(\alpha) = -\alpha$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$. En efecto, las propiedades de homogeneidad positiva e invarianza bajo traslaciones conducen a que $0 = \rho(0) = \rho(\alpha - \alpha) = \rho(\alpha) + \alpha$, lo cual implica que $\rho(\alpha) = -\alpha$. El mismo resultado se obtiene a partir de la propiedad de invarianza bajo traslaciones con $X = 0$. De lo anterior, se concluye que en una inversión libre de riesgo, el riesgo es reducido justamente en el rendimiento de la inversión, lo cual hace que el rendimiento de la inversión y el riesgo se eliminen entre sí. Por supuesto, se supone, como antes, la existencia de un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar o pedir prestado a una tasa de interés constante y libre de riesgo.
- (e) $\rho(X + \rho(X + \rho(X))) = \rho(X)$. En efecto, $\rho(X + \rho(X + \rho(X))) = \rho(X) - \rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) + \rho(X) = \rho(X)$. De esta manera, si se toman al mismo tiempo una cobertura $\rho(X)$ de X y la posición contraria a dicha cobertura, el efecto total se anula.
- (f) $\rho(\alpha)$ es continua para toda $\alpha \in \mathbb{R}$. Sea $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\alpha_n \downarrow \alpha$. Debido a la propiedad (d), se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\alpha_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = -\alpha = \rho(\alpha) = \rho\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n\right).$$

En consecuencia, la continuidad de $\rho(\cdot)$ se mantiene para inversiones libres de riesgo.

- (g) Si $\alpha > 0$, entonces $\rho(X + \alpha) \leq \rho(X) + \alpha$, mientras que si $\alpha < 0$, entonces $\rho(X + \alpha) \geq \rho(X) + \alpha$. De lo anterior, se tiene una cota superior para el riesgo de un portafolio que incluye un depósito y una cota inferior cuando se incluye un adeudo.
- (h) Si $\alpha > 0$, entonces $\rho(X + \alpha) \leq \rho(X) \leq \rho(X - \alpha)$. Por lo tanto, un depósito en un banco reduce el riesgo y un adeudo lo incrementa.
- (i) Si $X \leq 0$, entonces $\rho(X) \geq 0$. Basta aplicar la propiedad de monotonía no creciente. Lo anterior implica que una reducción en el cambio de valor en el portafolio siempre conlleva riesgo.
- (j) Si $a \leq X \leq b$, entonces $a \leq -\rho(X) \leq b$. En efecto, observe que $X - b \leq 0$ y que $X - a \geq 0$, entonces $\rho(X) + b = \rho(X - b) \geq \rho(0) = 0$ y $\rho(X) + a = \rho(X - a) \leq \rho(0) = 0$. Así, $\rho(X) \geq -b$ y $\rho(X) \leq -a$. Por lo tanto, $-b \leq \rho(X) \leq -a$.

(k) Sea $\|X - Y\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega) - Y(\omega)|$, entonces

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty.$$

En efecto, evidentemente, $\|X - Y\|_\infty \geq X - Y$ ó $Y + \|X - Y\|_\infty \geq X$. Por lo tanto,

$$\rho(X) \geq \rho(Y + \|X - Y\|_\infty) = \rho(Y) - \|X - Y\|_\infty,$$

lo cual implica que

$$\|X - Y\|_\infty \geq \rho(Y) - \rho(X).$$

Si se procede de la misma forma partiendo de $\|X - Y\|_\infty \geq X - Y$, se puede ver que $\|X - Y\|_\infty \geq -(\rho(Y) - \rho(X))$, con lo cual se obtiene el resultado previamente planteado.

(l) Si se reescribe $\rho(X) := \rho(w_1, w_2)$, donde w_1 y w_2 son las cantidades de activos que conforman el portafolio, entonces el teorema de Euler conduce a

$$\rho(w_1, w_2) = w_1 \frac{\partial \rho}{\partial w_1}(w_1, w_2) + w_2 \frac{\partial \rho}{\partial w_2}(w_1, w_2).$$

De esta manera, si w_1 y w_2 cambian simultáneamente en la misma proporción, entonces $\rho(w_1, w_2)$ cambia exactamente en dicha proporción.

(m) $\partial \rho / \partial w_1$ y $\partial \rho / \partial w_2$ son funciones homogéneas de grado cero. Este resultado también se sigue del teorema de Euler.

65.5 Medidas de riesgo más usuales

En esta sección se enlistan algunas de las medidas de riesgo más populares que se definen en términos de una medida de probabilidad. Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Se define la varianza de X como:

$$\rho^{(1)}(X) := \text{Var}^{\mathbb{P}}[X] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[(X - \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X])^2 \right].$$

La volatilidad $\sigma^{\mathbb{P}}(X)$ se define como la raíz cuadrada de la varianza.

(b) Se define el valor en riesgo (VaR), al nivel $1 - q$, $0 < q < 1$, como:

$$\rho^{(2)}(X) := \text{VaR}_{1-q}^X = -\inf \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\{X \leq x\} \geq q\}.$$

(c) Se define la esperanza condicional de la cola del VaR, para $0 < q < 1$, como:

$$\rho^{(3)}(X) := \mathcal{E}_{1-q}^X = -\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[X \mid X < -\text{VaR}_{1-q}^X \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[-X \mid -X > \text{VaR}_{1-q}^X \right].$$

65.6 La varianza no es una medida de riesgo coherente

Aun cuando la varianza representa una de las formas más utilizadas para medir riesgos, posiblemente por la gran difusión de la teoría de portafolios desarrollada por Markowitz, la varianza no satisface ninguno de los axiomas de coherencia.

La varianza no satisface la propiedad de homogeneidad positiva ya que en ésta las constantes salen al cuadrado, ni es invariante bajo traslaciones pues la varianza de una variable más una

constante es igual a la varianza de la variable. Observe también que si X y Y son variables aleatorias definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

$$\begin{aligned}\rho^{(1)}(X + Y) &= \text{Var}^{\mathbb{P}}[X + Y] \\ &= \text{Var}^{\mathbb{P}}[X] + \text{Var}^{\mathbb{P}}[Y] + 2\text{Cov}^{\mathbb{P}}(X, Y) \\ &= \rho^{(1)}(X) + \rho^{(1)}(Y) + 2\text{Cov}^{\mathbb{P}}(X, Y).\end{aligned}$$

Por lo tanto, el cumplimiento o no de la subaditividad depende del signo de $\text{Cov}^{\mathbb{P}}(X, Y)$. La única ventaja que presenta la desviación estándar (o volatilidad),

$$\sigma^{\mathbb{P}}(X) = \sqrt{\text{Var}^{\mathbb{P}}[X]},$$

es que satisface la propiedad de homogeneidad positiva, $\sigma^{\mathbb{P}}(\alpha X) = \alpha \sigma^{\mathbb{P}}(X)$.

65.7 Otras limitaciones más serias de la varianza como medida de riesgo

Insistir en utilizar a la varianza como una medida de riesgo conlleva a limitaciones más serias que el satisfacer o no un conjunto de axiomas de coherencia. Los siguientes ejemplos muestran que la varianza es incapaz de detectar diferencias entre las colas de dos distribuciones y, por lo tanto, no distingue diferencias entre las probabilidades de ocurrencia de valores extremos de dichas distribuciones.

65.7.1 La varianza no detecta efectos de colas pesadas

Considere la distribución normal bivariada

$$\begin{pmatrix} D_{1T} \\ D_{2T} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right),$$

entonces su función de distribución conjunta está dada por

$$F_{D_{1T}, D_{2T}}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-(u^2 - 2\rho uv + v^2)/2(1-\rho^2)} du dv.$$

Si $\rho = 0$, es decir, si D_{1T} y D_{2T} son variables aleatorias no correlacionadas, entonces

$$\begin{aligned}F_{D_{1T}, D_{2T}}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} du dv \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \\ &= \Phi(x)\Phi(y),\end{aligned}$$

en cuyo caso D_{1T} y D_{2T} son variables aleatorias independientes. Claramente, el recíproco siempre se cumple, es decir, variables aleatorias independientes son no correlacionadas. A continuación, se examina un caso, fuera del mundo Gaussiano, en donde variables aleatorias no correlacionadas, no necesariamente son independientes. Con este propósito, se define, primero, la función $C(x, y)$ como

$$\begin{aligned}C(x, y) &= \int_0^x \int_0^y [1 + f(u)g(v)] du dv \\ &= xy + \left(\int_0^x f(u) du \right) \left(\int_0^y g(v) dv \right), \quad \text{para } 0 \leq x, y \leq 1,\end{aligned}$$

donde

$$f(u) = 1_{[\alpha, 1-\alpha]}(u) - \frac{1-2\alpha}{2\alpha} 1_{[0, \alpha) \cup (1-\alpha, 1]}(u),$$

$$g(v) = -1_{[\alpha, 1-\alpha]}(v) + \frac{1-2\alpha}{2\alpha} 1_{[0,\alpha) \cup (1-\alpha, 1]}(v)$$

y

$$\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

Así, $f(v) = -g(v)$. De lo anterior, se tiene que $1 + f(u)g(v) = 1 + (1)(-1) = 0$ para toda $(u, v) \in [\alpha, 1-\alpha] \times [\alpha, 1-\alpha]$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(u)du &= - \int_0^\alpha \frac{1-2\alpha}{2\alpha} du + \int_\alpha^{1-\alpha} du - \int_{1-\alpha}^1 \frac{1-2\alpha}{2\alpha} du \\ &= -\frac{1-2\alpha}{2} + 1 - 2\alpha - \frac{1-2\alpha}{2} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 g(v)dv = - \int_0^1 f(v)dv = 0.$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned} \int_0^1 uf(u)du &= -\frac{1-2\alpha}{2\alpha} \int_0^\alpha u du + \int_\alpha^{1-\alpha} u du - \frac{1-2\alpha}{2\alpha} \int_{1-\alpha}^1 u du \\ &= -\frac{1-2\alpha}{2\alpha} \left(\frac{\alpha^2}{2} \right) + \frac{(1-\alpha)^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1-2\alpha}{2\alpha} \left(\frac{1}{2} - \frac{(1-\alpha)^2}{2} \right) \\ &= -\frac{(1-2\alpha)\alpha}{4} + \frac{1-2\alpha}{2} - \frac{1-2\alpha}{4} (2-\alpha) = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\int_0^1 vg(v)dv = - \int_0^1 vf(v)dv = 0.$$

Observe también que $C(1, 1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$, $C(0, 0) = 0$. Por otro lado, el producto $f(u)g(v)$ sólo puede tomar los siguientes valores:

$$-1, \quad -\frac{1-2\alpha}{2\alpha}, \quad \frac{1-2\alpha}{2\alpha} \quad \text{y} \quad \left(\frac{1-2\alpha}{2\alpha} \right)^2.$$

En virtud de que

$$0 \leq \frac{1-2\alpha}{2\alpha} \leq 1,$$

se tiene $1 + f(u)g(v) \geq 0$. Dado que $C(x, y)$ representa el volumen acumulado por $1 + f(u)g(v)$ hasta (x, y) , la función $C(x, y)$ es creciente en ambos argumentos. Se puede concluir entonces que $C(x, y)$, $0 \leq x, y \leq 1$, es una función de distribución con marginales uniformes en $[0, 1]$. Concretamente,

$$C_u(x) = C(x, 1) = x \cdot 1 + \left(\int_0^x f(u)du \right) \left(\int_0^1 g(v)dv \right) = x$$

y

$$C_v(y) = C(1, y) = 1 \cdot y + \left(\int_0^1 f(u)du \right) \left(\int_0^y g(v)dv \right) = y.$$

La función de distribución bivariada $F_{U,V}(x,y) = C(x,y)$ se llama cópula uniforme. En este caso, la covarianza entre U y V satisface

$$\begin{aligned}
 & \text{Cov}(U, V) \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 (u - \frac{1}{2})(v - \frac{1}{2})(1 + f(u)g(v))dudv \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 (uv - \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{4})(1 + f(u)g(v))dudv \\
 &= \left(\int_0^1 u du \right) \left(\int_0^1 v dv \right) + \left(\int_0^1 u f(u) du \right) \left(\int_0^1 v g(v) dv \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left[\int_0^1 u du + \int_0^1 v dv + \left(\int_0^1 u f(u) du \right) \left(\int_0^1 v g(v) dv \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_0^1 v g(v) dv \right) \left(\int_0^1 f(u) du \right) \right] + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\int_0^1 f(u) du \right) \left(\int_0^1 g(v) dv \right) \\
 &= \left(\int_0^1 u du \right) \left(\int_0^1 v dv \right) - \frac{1}{2} \left[\int_0^1 u du + \int_0^1 v dv \right] + \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.
 \end{aligned}$$

Es decir, U y V son variables aleatorias no correlacionadas. Evidentemente, U y V no son independientes, ya que para $(x,y) \in [\alpha, 1-\alpha] \times [\alpha, 1-\alpha]$, se tiene que $c(x,y) = 0$; la independencia estocástica exigiría que $C(x,y) \equiv 1$ en $[0,1] \times [0,1]$.

Ahora suponga que se tienen dos variables aleatorias \tilde{D}_{1T} y \tilde{D}_{2T} con función de distribución conjunta

$$F_{\tilde{D}_{1T}, \tilde{D}_{2T}}(x, y) = C(\Phi(x), \Phi(y)),$$

donde

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv.$$

Observe que $F_{\tilde{D}_{1T}, \tilde{D}_{2T}}(x, y)$ no es normal bivariada, ya que si

$$(\Phi(x), \Phi(y)) \in [\alpha, 1-\alpha] \times [\alpha, 1-\alpha],$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
 F_{\tilde{D}_{1T}, \tilde{D}_{2T}}(x, y) &= \int_{\alpha}^{\Phi(x)} \int_{\alpha}^{\Phi(y)} [1 + f(u)g(v)] dv du \\
 &= \int_{\alpha}^{\Phi(x)} \int_{\alpha}^{\Phi(y)} 0 dv du = 0.
 \end{aligned}$$

Claramente, $F_{\tilde{D}_{1T}, \tilde{D}_{2T}}(x, y) = C(\Phi(x), \Phi(y))$ tiene marginales Gaussianas estándar ya que

$$F_{\tilde{D}_{1T}}(x) = F_{\tilde{D}_{1T}, \tilde{D}_{2T}}(x, \infty) = C(\Phi(x), \Phi(\infty)) = C(\Phi(x), 1) = \Phi(x)$$

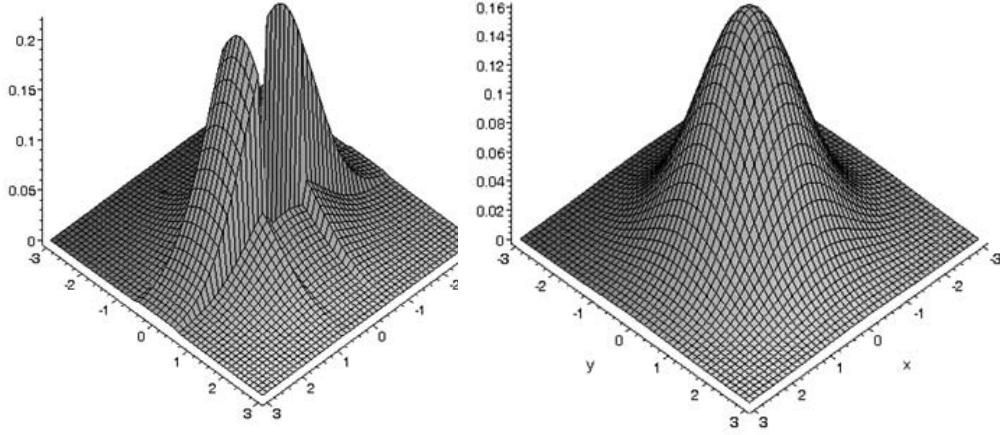
y

$$F_{\tilde{D}_{2T}}(y) = F_{\tilde{D}_{1T}, \tilde{D}_{2T}}(\infty, y) = C(\Phi(\infty), \Phi(y)) = C(1, \Phi(y)) = \Phi(y),$$

con $\text{Cov}(\tilde{D}_{1T}, \tilde{D}_{2T}) = 0$. Es fácil verificar que \tilde{D}_{1T} y \tilde{D}_{2T} no son variables aleatorias independientes ya que $C(\Phi(x), \Phi(y)) \neq \Phi(x)\Phi(y)$. En conclusión, el ejemplo desarrollado proporciona dos variables aleatorias \tilde{D}_{1T} y \tilde{D}_{2T} normales estándar con covarianza cero que no son independientes. Con el fin de determinar la función de densidad conjunta de \tilde{D}_{1T} y \tilde{D}_{2T} , considere

$$\begin{aligned}
 C(\Phi(x), \Phi(y)) &= \int_0^{\Phi(x)} \int_0^{\Phi(y)} [1 + f(u)g(v)] dudv \\
 &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y [1 + f(\Phi^{-1}(u))g(\Phi^{-1}(v))] (\Phi^{-1}(u))' (\Phi^{-1}(v))' dudv.
 \end{aligned}$$

De esta manera, el integrando constituye la densidad de \tilde{D}_{1T} y \tilde{D}_{2T} . Dicha densidad se anula en puntos $(x, y) \in [\Phi_X^{-1}(\alpha), \Phi_X^{-1}(1 - \alpha)] \times [\Phi_Y^{-1}(\alpha), \Phi_Y^{-1}(1 - \alpha)]$. En la Gráfica 65.1 se compara la densidad de $C(\Phi(x), \Phi(y))$ con la densidad normal bivariada. Dado que el volumen bajo ambas densidades tiene que ser igual a la unidad y la densidad $1 + fg$ se anula en el conjunto $[\Phi_X^{-1}(\alpha), \Phi_X^{-1}(1 - \alpha)] \times [\Phi_Y^{-1}(\alpha), \Phi_Y^{-1}(1 - \alpha)]$, entonces su volumen tiene que compensar en las colas, haciéndolas más pesadas. Por lo tanto, la densidad de $C(\Phi(x), \Phi(y))$ tiene colas más pesadas que la densidad normal bivariada. Así, la probabilidad de que ocurran valores extremos, tanto positivos como negativos, es mayor en $C(\Phi(x), \Phi(y))$ que en la distribución normal bivariada.

a) Densidad de $C(x, y)$

b) Densidad normal bivariada

Gráfica 65.1 Densidades de la Cúpula Gaussiana y la normal bivariada.

Considere ahora dos portafolios

$$X = w_1 D_{1T} + w_2 D_{2T},$$

donde D_{1T} y D_{2T} provienen de la normal bivariada de la sección 65.7.1, y

$$Y = w_1 \tilde{D}_{1T} + w_2 \tilde{D}_{2T}$$

donde \tilde{D}_{1T} y \tilde{D}_{2T} provienen de la cúpula Gaussiana. Observe

$$\rho^{(1)}(X) = \text{Var}[X] = w_1^2 + w_2^2 = \text{Var}[Y] = \rho^{(1)}(Y).$$

Sin embargo, la cúpula Gaussiana tiene colas más pesadas que la normal bivariada y por lo tanto el riesgo de Y debe ser mayor que el de X .

65.7.2 Otro ejemplo en donde la varianza no detecta efectos de colas pesadas

Considere ahora la distribución normal bivariada

$$\begin{pmatrix} D_{1T} \\ D_{2T} \end{pmatrix} = \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho_0 \\ \rho_0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

para un ρ_0 dado, y considere la distribución conjunta

$$F_{D_{1T}, D_{2T}}^{\rho_0}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_0^2}} \exp \left\{ -\frac{u^2 - 2\rho_0 uv + v^2}{2(1-\rho_0^2)} \right\} du dv.$$

Defina ahora la distribución

$$G_{\tilde{D}_{1T}, \tilde{D}_{2T}}(x, y) = \lambda F_{\tilde{D}_{1T}, \tilde{D}_{2T}}^{\rho_1}(x, y) + (1 - \lambda) F_{\tilde{D}_{1T}, \tilde{D}_{2T}}^{\rho_2}(x, y)$$

con $\rho_1 < \rho_2$, $0 < \lambda < 1$, $-\infty < x, y < \infty$. Claramente, G tiene marginales

$$G_{\tilde{D}_{1T}}(x) = \lambda F_{\tilde{D}_{1T}, \tilde{D}_{2T}}^{\rho_1}(x, \infty) + (1 - \lambda) F_{\tilde{D}_{1T}, \tilde{D}_{2T}}^{\rho_2}(x, \infty) = \Phi(x),$$

$$G_{\tilde{D}_{2T}}(y) = \lambda F_{\tilde{D}_{1T}, \tilde{D}_{2T}}^{\rho_1}(\infty, y) + (1 - \lambda) F_{\tilde{D}_{1T}, \tilde{D}_{2T}}^{\rho_2}(\infty, y) = \Phi(y)$$

y covarianza $\lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2$. Sin pérdida de generalidad, dados ρ_1, ρ_2 tales que $\rho_1 < \rho_2$, existe λ tal que $\rho_0 = \lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2$. Ahora bien, como

$$D_{1T} + D_{2T} \stackrel{F^{\rho_0}}{\sim} \mathcal{N}(0, 2(1 + \rho_0))$$

y

$$\tilde{D}_{1T} + \tilde{D}_{2T} \stackrel{F^{\rho_i}}{\sim} \mathcal{N}(0, 2(1 + \rho_i)),$$

esto implica que la cola de $D_{1T} + D_{2T}$ bajo F^{ρ_0} satisface

$$\mathbb{P}^{F^{\rho_0}}\{D_{1T} + D_{2T} > z\} = 1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1 + \rho_0)}}\right)$$

y la cola de $\tilde{D}_{1T} + \tilde{D}_{2T}$ bajo G cumple con

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^G\{\tilde{D}_{1T} + \tilde{D}_{2T} > z\} \\ &= \lambda\left(1 - \mathbb{P}^{F^{\rho_1}}\{\tilde{D}_{1T} + \tilde{D}_{2T} > z\}\right) + (1 - \lambda)\left(1 - \mathbb{P}^{F^{\rho_2}}\{\tilde{D}_{1T} + \tilde{D}_{2T} > z\}\right) \\ &= \lambda\left(1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1 - \rho_1)}}\right)\right) + (1 - \lambda)\left(1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1 - \rho_2)}}\right)\right). \end{aligned}$$

Si se utiliza la siguiente propiedad de la cola de la distribución normal estándar:

$$1 - \Phi(x) = \phi(x) \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right),$$

la cual se demuestra como sigue

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \Phi(x)}{\frac{\phi(x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\phi(x)}{x\phi(x)(-x) - \phi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

donde $\Phi'(x) = \phi(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1 - \rho_i)}}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1 - \rho_0)}}\right)} &= \frac{\phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1 - \rho_i)}}\right)\left(\frac{\sqrt{2(1 + \rho_i)}}{z} + o(\cdot)\right)}{\phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1 + \rho_0)}}\right)\left(\frac{\sqrt{2(1 + \rho_0)}}{z} + o(\cdot)\right)} \\ &\approx \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{4(1 + \rho_i)}\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{4(1 + \rho_0)}\right\}} \sqrt{\frac{1 + \rho_i}{1 + \rho_0}} \\ &= \exp\left\{-\frac{z^2}{4}\left(\frac{1}{1 + \rho_i} - \frac{1}{1 + \rho_0}\right)\right\} \sqrt{\frac{1 + \rho_i}{1 + \rho_0}}. \end{aligned}$$

Sin embargo, ρ_0 , ρ_1 y ρ_2 satisfacen

$$\frac{1}{1+\rho_2} - \frac{1}{1+\rho_0} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{1+\rho_1} - \frac{1}{1+\rho_0} > 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1-\rho_2)}}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1-\rho_0)}}\right)} = \infty$$

y

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1-\rho_1)}}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1-\rho_0)}}\right)} = 0.$$

Así,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}^G \{ \tilde{D}_{1T} + \tilde{D}_{2T} > z \}}{\mathbb{P}^{F^{\rho_0}} \{ D_{1T} + D_{2T} > z \}} &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ \lambda \left[\frac{1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1+\rho_1)}}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1+\rho_0)}}\right)} \right] \right. \\ &\quad \left. + (1-\lambda) \left[\frac{1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1+\rho_2)}}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2(1+\rho_0)}}\right)} \right] \right\} \\ &= 0 + \infty = \infty. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que los cuantiles altos de G son mucho mayores que los cuantiles altos de F^{ρ_0} . Por lo tanto, valores extremos bajo G tienen mayor probabilidad de ocurrir que bajo F^{ρ_0} . Así, si se escribe $X = \tilde{D}_{1T} + \tilde{D}_{2T}$ y $Y = D_{1T} + D_{2T}$, el riesgo asociado a X es mayor que el de Y . Sin embargo,

$$\rho^{(1)}(X) = \text{Var}[X] = 2(1+\rho_0) = \text{Var}[Y] = \rho^{(1)}(Y).$$

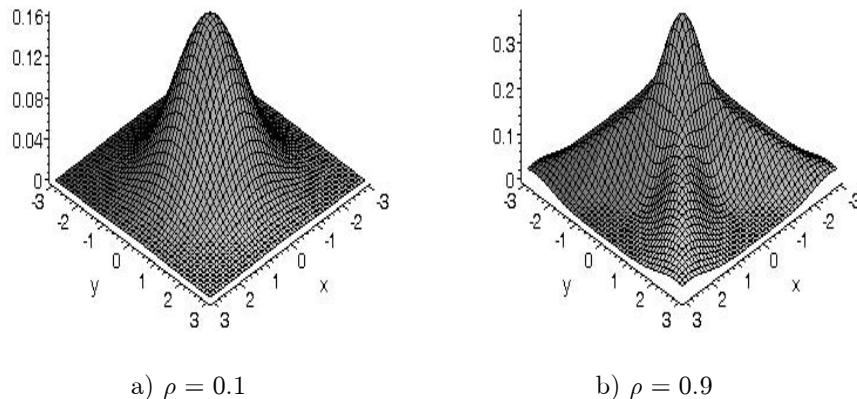
Observe también que bajo ambas distribuciones G y F^{ρ_0} , $\text{Cov}(X, Y) = \rho_0 \neq 0$. En consecuencia, la covarianza, $\rho_Y(X) := \text{Cov}(X, Y)$ con Y fija, tampoco es una medida coherente de riesgo, lo cual implica que la beta obtenida a través del CAPM (Capital Asset Pricing Model) tampoco es una medida coherente de riesgo.

65.7.3 Un ejemplo más de que la varianza no es una medida coherente de riesgo

Considere la función de densidad conjunta

$$f_{D_{1T}, D_{2T}}(u, v) = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left[e^{-(u^2-2\rho uv+v^2)/2(1-\rho^2)} + e^{-(u^2+2\rho uv+v^2)/2(1-\rho^2)} \right].$$

Se puede verificar que, para cualquier valor $\rho \in [-1, 1]$, $D_{1T} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $D_{2T} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\text{Cov}(D_{1T}, D_{2T}) = 0$, y D_{1T} y D_{2T} no son independientes. Sea $X^{(\rho)} = w_1 D_{1T} + w_2 D_{2T}$. Claramente, $\text{Var}[X^{(\rho)}] = w_1^2 + w_2^2$ para cualquier valor de $\rho \in [0, 1]$. La Gráfica 65.2 muestra las funciones de densidades conjuntas para los valores $\rho = 0.1$ y $\rho = 0.9$. Se puede observar el comportamiento diferente de las colas de las densidades para estos valores, lo cual es ignorado por la varianza.



Gráfica 65.2 Densidades conjuntas con diferentes valores de ρ .

65.8 El valor en riesgo no es una medida coherente de riesgo

El valor en riesgo es una las medidas que se utilizan con mayor frecuencia en la estimación de pérdidas potenciales de un portafolio, por fluctuaciones adversas del mercado, en un periodo de tiempo y con un nivel de confianza dado.

65.8.1 El concepto de valor en riesgo (paramétrico)

Considere un intervalo de tiempo $[t, T]$. El valor inicial, en t , de un portafolio que consiste de w_1 unidades del activo S_{1t} y w_2 unidades del activo S_{2t} está dado por

$$\Pi_t = w_1 S_{1t} + w_2 S_{2t}.$$

El cambio en el valor del portafolio, entre las fechas t y T , con las cantidades w_1 y w_2 constantes, satisface

$$X := \Pi_T - \Pi_t = w_1(S_{1T} - S_{1t}) + w_2(S_{2T} - S_{2t}).$$

Si $S_{1T} : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $S_{2T} : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ son variables aleatorias definidas sobre dos espacios muestrales, entonces $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, es una variable aleatoria asociada al cambio en el valor del portafolio. Asimismo, se supone que X está definida sobre un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\theta)$, donde θ es un vector de parámetros asociados con la distribución de X . El valor en riesgo de X a nivel $1 - q$ denotado por $-\text{VaR}_{1-q}^X$, se define como el peor valor del portafolio, en un periodo de tiempo dado, $[t, T]$, en un intervalo de confianza del $(1 - q)100\%$. En forma más precisa,

$$\mathbb{P}_\theta \left\{ -\text{VaR}_{1-q}^X \leq X \right\} = 1 - q.$$

Claramente, la cantidad $-\text{VaR}_{1-a}^X$ también satisface

$$\mathbb{P}_\theta \left\{ X \leq -\text{VaR}_{1-a}^X \right\} = q.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}\text{VaR}_{1-q}^x &= -\inf \{ x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_\theta \{ X \leq x \} \geq q \} \\ &= -\sup \{ x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_\theta \{ X < x \} \leq q \}.\end{aligned}$$

Asimismo, de lo anterior se desprende que

$$\text{VaR}_{1-q}^X = -\inf \{ x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_\theta \{ X > x \} \leq 1 - q \}.$$

De esta manera, VaR_{1-q}^X es el quantil q de $\mathbb{P}_\theta\{X > x\}$. Así pues, el número VaR_{1-q}^X es una estimación estadística del peor valor de X con cierto grado de confianza en un intervalo de tiempo dado. La figura 65.3 ilustra el concepto del valor en riesgo.

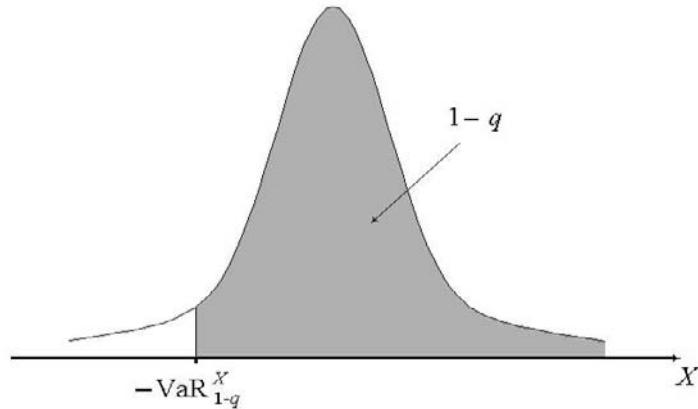


Figura 65.3 Valor en riesgo de X al nivel $1 - q$.

No es difícil construir casos en los que el VaR conduce a resultados contradictorios. Por ejemplo, es sencillo verificar que si c es una constante, entonces $\text{VaR}_{1-q}^c = -c$. En particular, $\text{VaR}_{1-q}^1 = -1$. Suponga ahora que el cambio en el valor del portafolio satisface

$$X = \begin{cases} -1, & \text{con probabilidad } p, \\ a, & \text{con probabilidad } 1 - p, \end{cases}$$

donde $a \ll 1$. Si $p < q$, entonces $\text{VaR}_{1-q}^X = -a$. Por lo tanto, $-\text{VaR}_{1-q}^X = a \ll 1 = -\text{VaR}_{1-q}^1$. En otras palabras, es menos riesgoso el portafolio con un cambio en valor representado por X que una inversión libre de riesgo de una unidad, aun cuando bajo X se puede perder una unidad con probabilidad p y ganar a , mucho menor que 1, con probabilidad $1 - p$.

65.8.2 El valor en riesgo satisface la propiedad de monotonía no creciente

En esta sección se comprueba que el valor en riesgo satisface la propiedad de monotonía no creciente. Si X y Y son variables aleatorias con $Y \geq X$, se tiene que

$$F_Y(z) = \mathbb{P}\{Y \leq z\} \leq \mathbb{P}\{X \leq z\} = F_X(z)$$

para toda $z \in \mathbb{R}$, ya que si $\omega \in \Omega$ es tal que $Y(\omega) \leq z$, entonces $X(\omega) \leq Y(\omega) \leq z$, es decir, $X(\omega) \leq z$. Por lo tanto, si z es tal que $q \leq F_Y(z)$, como $q \leq F_Y(z) \leq F_X(z)$, se sigue que $q \leq F_X(z)$. Consecuentemente,

$$\{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\}.$$

Así,

$$\inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \geq \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\}.$$

Es decir,

$$\text{VaR}_{1-q}^Y = -\inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \leq -\inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} = \text{VaR}_{1-q}^X$$

ó

$$\rho^{(2)}(Y) \leq \rho^{(2)}(X).$$

65.8.3 El valor en riesgo satisface la propiedad de homogeneidad positiva

En esta sección se demuestra que el valor en riesgo es homogéneo positivo. Sean $\alpha > 0$ y $Y = \alpha X$, entonces

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\alpha X \leq y) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y}{\alpha}\right) = F_X\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

de aquí se obtiene

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^Y &= -\inf \{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \\ &= -\inf \{\alpha x \in \mathbb{R} \mid F_Y(\alpha x) \geq q\} \\ &= -\inf \left\{\alpha x \in \mathbb{R} \mid F_X\left(\frac{\alpha x}{\alpha}\right) \geq q\right\} \\ &= -\inf \{\alpha x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} \\ &= -\alpha \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} \\ &= \alpha \text{VaR}_{1-q}^X \end{aligned}$$

6

$$\rho^{(2)}(\alpha X) = \alpha \rho^{(2)}(X).$$

65.8.4 El valor en riesgo satisface la propiedad de invarianza bajo traslaciones

A continuación se prueba que el valor en riesgo es invariante bajo traslaciones. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $Y = X + \alpha$, entonces

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\{Y \leq y\} = \mathbb{P}\{X + \alpha \leq y\} = \mathbb{P}\{X \leq y - \alpha\} = F_X(y - \alpha).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^Y &= -\inf \{y \in \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq q\} \\ &= -\inf \{x + \alpha \in \mathbb{R} \mid F_Y(x + \alpha) \geq q\} \\ &= -\inf \{x + \alpha \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} \\ &= -(\inf \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} + \alpha) \\ &= -\inf \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} - \alpha \\ &= \text{VaR}_{1-q}^X - \alpha \end{aligned}$$

6

$$\rho^{(2)}(X + \alpha) = \rho^{(2)}(X) - \alpha.$$

65.8.5 El valor en riesgo no satisface la propiedad de subaditividad

En esta sección se construye un ejemplo que muestra que el valor en riesgo no satisface la propiedad de subaditividad. Esta propiedad es esencial en la optimización de portafolios pues de ella se desprende la convexidad en una superficie de riesgo, lo cual asegura un único portafolio óptimo. Considere dos variables aleatorias, X y Y , independientes e idénticamente distribuidas con densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.9 & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0.05 & \text{si } x \in [-2, 0], \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Observe que la función de distribución, evaluada en 0, satisface

$$F_X(0) = P\{X \leq 0\} = \int_{-2}^0 0.05 dx = 0.1.$$

Por lo tanto, los valores en riesgo de X y Y , con un nivel de confianza del 90%, satisfacen, respectivamente,

$$\text{VaR}_{0.9}^X = \text{VaR}_{0.9}^Y = 0.$$

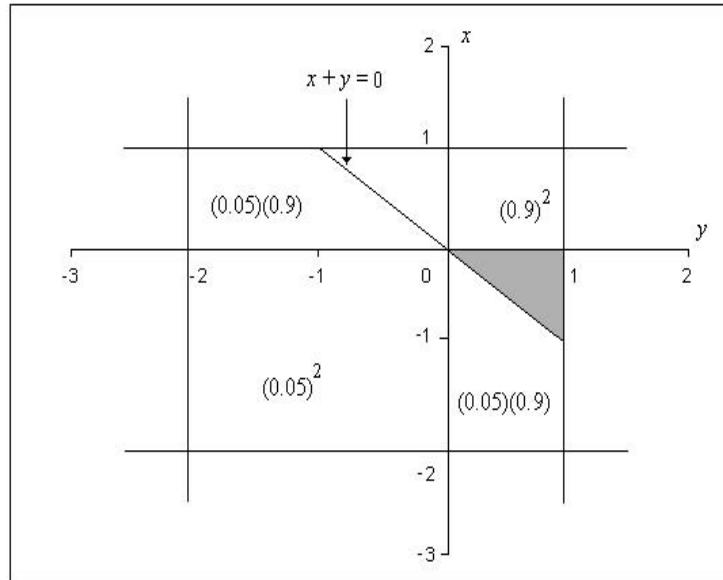
Por otro lado, observe que

$$\mathbb{P}\{X + Y \geq 0\} = \int_{X+Y \geq 0} \int f_{XY}(x, y) dx dy.$$

Para calcular esta integral observe primero que debido a la independencia estocástica de X y Y , se sigue que la función de densidad conjunta está dada por el producto de las densidades marginales, así

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} (0.05)^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \text{ y } -2 \leq y \leq 0, \\ (0.05)(0.9), & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \text{ y } 0 < y \leq 1, \\ (0.9)(0.05), & \text{si } 0 < x \leq 1 \text{ y } -2 \leq y \leq 0, \\ (0.9)^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \text{ y } 0 < y \leq 1, \end{cases}$$

la cual se muestra en la Gráfica 65.4.



Gráfica 65.4 Función de densidad conjunta de las variables aleatorias X y Y .

Se observa en la Gráfica 65.4 que la región $x + y \geq 0$ se encuentra a la derecha de la línea recta $x + y = 0$. Por lo tanto, con base en el área del triángulo sombreado, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X + Y \geq 0\} &= 2 \int_0^1 \int_{-y}^0 (0.9)(0.05) dx dy + (0.9)^2 \\ &= 2(0.9)(0.05) \left(\frac{1}{2}\right) + (0.9)^2 \\ &= 0.855. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathbb{P}\{X + Y \leq 0\} = 0.145$$

De aquí, se tiene que

$$0 > \inf\{z | F_{X+Y}(z) \geq 0.1\} = -\text{VaR}_{0.9}^{X+Y}$$

se sigue entonces que

$$\text{VaR}_{0.9}^{X+Y} > 0 = \text{VaR}_{0.9}^X + \text{VaR}_{0.9}^Y,$$

es decir, en este ejemplo, el valor en riesgo no cumple con la propiedad de subaditividad.

65.9 Un ejemplo de una medida de riesgo, en términos de una opción de venta, que no es invariante bajo traslaciones

Sea X el valor de mercado de los títulos (de capital y/o deuda) de una empresa. Suponga que existe en el mercado un contrato que paga X si la empresa se declara en bancarrota en una fecha futura predeterminada, y 0 en otro caso. Este contrato puede verse como una opción europea de venta sobre X , con precio de ejercicio $K = 0$, y su valor, en t , bajo una medida de probabilidad neutral al riesgo \mathbb{P} , está dado por:

$$\begin{aligned} p &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\max(-X, 0) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\max(-X, 0) \mid X \leq 0] \mathbb{P}\{X \leq 0\} \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\max(-X, 0) \mid X > 0] \mathbb{P}\{X > 0\} \right] \\ &= e^{-r(T-t)} (-\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [X \mid X \leq 0]) \mathbb{P}\{X \leq 0\} \\ &= e^{-r(T-t)} \rho_p(X), \end{aligned}$$

donde

$$\rho_p(X) = -\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [X 1_{\{X \leq 0\}}].$$

A continuación se muestra que la cantidad $\rho_p(X)$ no es una medida coherente de riesgo pues no es invariante bajo traslaciones. En efecto, claramente

$$(X + Y) 1_{\{X+Y \leq 0\}} \geq X 1_{\{X \leq 0\}} + Y 1_{\{Y \leq 0\}}$$

6

$$-(X + Y) 1_{\{X+Y \leq 0\}} \leq -X 1_{\{X \leq 0\}} - Y 1_{\{Y \leq 0\}},$$

lo cual implica que

$$\rho_p(X + Y) \geq \rho_p(X) + \rho_p(Y).$$

Asimismo, si $X \geq Y$, entonces

$$X 1_{\{X \leq 0\}} \geq Y 1_{\{Y \leq 0\}}$$

6

$$-X 1_{\{X \leq 0\}} \leq -Y 1_{\{Y \leq 0\}}.$$

Por lo tanto,

$$\rho_p(X) \leq \rho_p(Y).$$

Observe también que si $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \rho_p(\alpha X) &= -\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\alpha X 1_{\{\alpha X \leq 0\}}] \\ &= -\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\alpha X 1_{\{X \leq 0\}}] \\ &= \alpha (-\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [X 1_{\{X \leq 0\}}]) \\ &= \alpha \rho_p(X). \end{aligned}$$

Por último, suponga que $X \sim \mathcal{U}[-1, 0]$, es decir, X se distribuye uniformemente en $[-1, 0]$, y $\alpha = 1$, entonces

$$\rho_p(X) = -\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [X 1_{\{X \leq 0\}}] = -\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [X] = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado

$$\rho_p(X + 1) = -\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [(X + 1) 1_{\{X \leq -1\}}] = 0.$$

Así,

$$\rho_p(X + 1) = 0 > \rho_p(X) - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Es decir, ρ_p no es invariante bajo traslaciones.

65.10 La esperanza condicional de la cola del VaR es una medida coherente de riesgo

La metodología de valor en riesgo no proporciona información alguna cuando el tamaño esperado del cambio de valor en el portafolio excede el umbral $-\text{VaR}_{1-q}^X$. Por esta razón es conveniente introducir la siguiente medida de riesgo:

$$\mathcal{E}_{1-q}^X = -\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X].$$

Esta cantidad recibe también el nombre de esperanza condicional de la cola del VaR. Considere la siguiente forma alternativa de escribir \mathcal{E}_{1-q}^X ,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{1-q}^X &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [-X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X] \\ &= \mathbb{E} [-X - \text{VaR}_{1-q}^X + \text{VaR}_{1-q}^X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X] \\ &= \text{VaR}_{1-q}^X + \mathbb{E} [-X - \text{VaR}_{1-q}^X | -\text{VaR}_{1-q}^X - X > 0] \\ &= \text{VaR}_{1-q}^X - \mathbb{E} [X + \text{VaR}_{1-q}^X | \text{VaR}_{1-q}^X + X < 0].\end{aligned}$$

Observe que si se denota $\text{VaR}_{1-q}^X = -u$, y se define

$$e(u) = \mathbb{E} [X - u | X < u],$$

entonces

$$\mathcal{E}_{1-q}^X = -u - e(u).$$

Observe ahora que por definición

$$\begin{aligned}e(u) &= \frac{\int_{-\infty}^u (x - u) dF_X(x)}{F_X(u)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^u x dF_X(x) - u F_X(u)}{F_X(u)} \\ &= \frac{1}{F_X(u)} \int_{-\infty}^u x dF_X(x) - u \\ &= \frac{1}{F_X(u)} \left(u F_X(u) - \int_{-\infty}^u F_X(x) dx \right) - u \\ &= -\frac{1}{F_X(u)} \int_{-\infty}^u F_X(x) dx.\end{aligned}$$

65.10.1 Un ejemplo ilustrativo sobre la esperanza condicional de la cola de VaR

En esta sección se desarrolla un ejemplo ilustrativo sobre la esperanza condicional de la cola de VaR. En particular, si

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_0^u F_X(x) dx &= \int_0^u (1 - e^{-\lambda x}) dx \\ &= u - \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda u}).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$e(u) = \frac{1}{\lambda} - \frac{u}{1 - e^{-\lambda u}}. \quad (65.3)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1-q}^X &= -\inf \{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq q\} \\ &= -\inf \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - e^{-\lambda x} \geq q\} \\ &= -\inf \{x \in \mathbb{R} \mid \lambda x \geq -\ln(1 - q)\} \\ &= -\inf \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{\ln(1 - q)}{\lambda}\right\} \\ &= \frac{\ln(1 - q)}{\lambda} \end{aligned} \quad (65.4)$$

y tomando en cuenta que $-u = \text{VaR}_{1-q}^X$, se tiene que

$$\begin{aligned} e(-\text{VaR}_{1-q}^X) &= \frac{1}{\lambda} + \frac{\ln(1 - q)}{\lambda} \left(\frac{1}{1 - \exp\{\ln(1 - q)\}} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{\ln(1 - q)}{q\lambda}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{1-q}^X &= \text{VaR}_{1-q}^X - e(-\text{VaR}_{1-q}^X) \\ &= \frac{\ln(1 - q)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln(1 - q)}{q\lambda} \\ &= -\frac{1}{\lambda} \left[\left(\frac{1 - q}{q} \right) \ln(1 - q) + 1 \right]. \end{aligned} \quad (65.5)$$

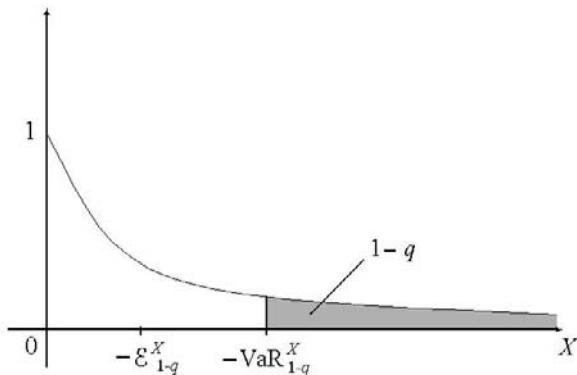
Si, por ejemplo, $\lambda = 1$ y $q = 0.05$, entonces $\text{VaR}_{0.95}^X = -0.05$, y de acuerdo con (65.3) y $-u = \text{VaR}_{0.95}^X$, se tiene que

$$\begin{aligned} e(-\text{VaR}_{0.95}^X) &= 1 + \frac{\text{VaR}_{0.95}^X}{1 - \exp\{\text{VaR}_{0.95}^X\}} \\ &= 1 - \frac{0.05}{1 - \exp\{-0.05\}} \\ &= 1 - 1.02 = -0.02. \end{aligned}$$

En este caso,

$$\mathcal{E}_{1-q}^X = \text{VaR}_{1-q}^X - e(-\text{VaR}_{1-q}^X) = -0.05 + 0.02 = -0.03$$

Por último observe que si $q = 0$, se tiene que $\mathcal{E}_{1-q}^X = 0 = \text{VaR}_{1-q}^X$. En la Gráfica 65.5 se ilustran los resultados cuando X tiene una distribución exponencial.



Gráfica 65.5 VaR y esperanza condicional de la cola VaR de una distribución exponencial.

65.10.2 VaR-promedio, AVaR (Average VaR)

Una forma equivalente de definir la esperanza condicional del VaR es a través del VaR-promedio, el cual se define como

$$\text{AVaR}_{1-q}^X = \frac{1}{q} \int_0^q \text{VaR}_{1-s}^X ds. \quad (65.6)$$

Si por ejemplo,

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

es decir, X es una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda > 0$, se ha visto en (65.4) que

$$\text{VaR}_{1-q}^X = \frac{\ln(1-q)}{\lambda}.$$

Por lo tanto, con base en (65.6), se sigue que

$$\begin{aligned} \text{AVaR}_{1-q}^X &= \frac{1}{q} \int_0^q \text{VaR}_{1-s}^X ds \\ &= \frac{1}{q} \int_0^q \frac{\ln(1-s)}{\lambda} ds \\ &= \frac{1}{q\lambda} \int_0^q \ln(1-s) ds. \end{aligned}$$

Consideré ahora el cambio de variable $u = 1 - s$. En este caso, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} \text{AVaR}_{1-q}^X &= -\frac{1}{q\lambda} \int_1^{1-q} \ln(u) du \\ &= -\frac{1}{q\lambda} \left[(u \ln(u) - u) \Big|_1^{1-q} \right] \\ &= -\frac{1}{q\lambda} [(1-q) \ln(1-q) - (1-q) + 1] \\ &= -\frac{1}{\lambda} \left[\left(\frac{1-q}{q} \right) \ln(1-q) + 1 \right]. \end{aligned}$$

Este resultado coincide con (65.5). En otras palabras,

$$\text{AVaR}_{1-q}^X = \mathcal{E}_{1-q}^X = -\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X].$$

65.10.3 La esperanza condicional de la cola de VaR es homogénea positiva

A continuación se demuestra que la esperanza condicional de la cola de VaR satisface la propiedad de homogeneidad positiva. En efecto, sean $\alpha > 0$ y $X \in \mathcal{A}$, se define $Y = \alpha X$, entonces se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{1-q}^Y &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [-Y | Y < -\text{VaR}_{1-q}^Y] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [-\alpha X | \alpha X < -\text{VaR}_{1-q}^{\alpha X}] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [-\alpha X | \alpha X < -\alpha \text{VaR}_{1-q}^X] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [-\alpha X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X] \\ &= \alpha \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [-X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X] \\ &= \alpha \mathcal{E}_{1-q}^X. \end{aligned}$$

Es decir, $\rho^{(3)}(\alpha X) = \alpha \rho^{(3)}(X)$.

65.10.4 La esperanza condicional de la cola de VaR es invariante bajo traslaciones

Ahora se demuestra que la esperanza condicional de la cola de VaR es invariante bajo traslaciones. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $X \in \mathcal{A}$, se define $Y = X + \alpha$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{1-q}^Y &= E^P[-Y | Y < -\text{VaR}_{1-q}^Y] \\ &= E^P[-X - \alpha | X + \alpha < -\text{VaR}_{1-q}^{X+\alpha}] \\ &= E^P[-X - \alpha | X + \alpha < -(\text{VaR}_{1-q}^X - \alpha)] \\ &= E^P[-X - \alpha | X < -\text{VaR}_{1-q}^X] \\ &= E^P[-X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X] - E^P[-\alpha | X < -\text{VaR}_{1-q}^X] \\ &= E^P[-X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X] - \alpha \\ &= \mathcal{E}_{1-q}^X - \alpha.\end{aligned}$$

En otras palabras, $\rho^{(3)}(X + \alpha) = \rho^{(3)}(X) - \alpha$.

65.10.5 La esperanza condicional de la cola de VaR satisface la propiedad de monotonía no creciente

En esta sección se muestra que la esperanza condicional de la cola de VaR satisface la propiedad de monotonía no creciente. Con este propósito, suponga que $X \geq Y$, entonces

$$\begin{aligned}&E^P[Y | Y < -\text{VaR}_{1-q}^Y] \\ &= -\text{VaR}_{1-q}^Y + E^P[Y + \text{VaR}_{1-q}^Y | Y < -\text{VaR}_{1-q}^Y] \\ &= -\text{VaR}_{1-q}^Y + \frac{E^P[(Y + \text{VaR}_{1-q}^Y) 1_{\{Y < -\text{VaR}_{1-q}^Y\}}]}{P\{Y < -\text{VaR}_{1-q}^Y\}} \\ &= -\text{VaR}_{1-q}^Y + \frac{E^P[(Y + \text{VaR}_{1-q}^Y) 1_{\{Y < -\text{VaR}_{1-q}^Y\}} 1_{\{X < -\text{VaR}_{1-q}^X\}}]}{q} \\ &\quad + \frac{E^P[(Y + \text{VaR}_{1-q}^Y) 1_{\{Y + \text{VaR}_{1-q}^Y < 0\}} 1_{\{X \geq -\text{VaR}_{1-q}^X\}}]}{q} \\ &\leq -\text{VaR}_{1-q}^Y + \frac{E^P[(Y + \text{VaR}_{1-q}^Y) 1_{\{Y < -\text{VaR}_{1-q}^Y\}} 1_{\{X < -\text{VaR}_{1-q}^X\}}]}{q} \\ &\leq -\text{VaR}_{1-q}^Y + \frac{E^P[(Y + \text{VaR}_{1-q}^Y) 1_{\{X < -\text{VaR}_{1-q}^X\}}]}{P\{X < -\text{VaR}_{1-q}^X\}} \\ &= -\text{VaR}_{1-q}^Y + E^P[Y + \text{VaR}_{1-q}^Y | X < -\text{VaR}_{1-q}^X] \\ &= E^P[Y | X < -\text{VaR}_{1-q}^X] \leq E^P[X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X].\end{aligned}$$

La primera desigualdad se debe al hecho de que la segunda esperanza de la tercera igualdad es negativa. La segunda desigualdad se sigue de que la intersección de dos eventos está contenida en cada uno de los eventos. Por lo tanto,

$$-E^P[X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X] \leq -E^P[Y | -Y > \text{VaR}_{1-q}^Y].$$

Equivalentemente, $\mathcal{E}_{1-q}^X \leq \mathcal{E}_{1-q}^Y$ ó $\rho^{(3)}(X) \leq \rho^{(3)}(Y)$.

65.10.6 La esperanza condicional de la cola de VaR es subaditiva

En esta sección se verifica que la esperanza condicional de la cola de VaR es subaditiva. Observe primero que si $X, Y \in \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned}
& E^{\mathbb{P}}[X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X] \\
&= -\text{VaR}_{1-q}^X + E^{\mathbb{P}}[X + \text{VaR}_{1-q}^X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X] \\
&= -\text{VaR}_{1-q}^X + \frac{E^{\mathbb{P}}[(X + \text{VaR}_{1-q}^X) 1_{\{X < -\text{VaR}_{1-q}^X\}}]}{\mathbb{P}\{X < -\text{VaR}_{1-q}^X\}} \\
&= -\text{VaR}_{1-q}^X + \frac{E^{\mathbb{P}}[(X + \text{VaR}_{1-q}^X) 1_{\{X < -\text{VaR}_{1-q}^X\}} 1_{\{X+Y < -\text{VaR}_{1-q}^{X+Y}\}}]}{\mathbb{P}\{X < -\text{VaR}_{1-q}^X\}} \\
&\quad + \frac{E^{\mathbb{P}}[(X + \text{VaR}_{1-q}^X) 1_{\{X+\text{VaR}_{1-q}^X < 0\}} 1_{\{X+Y \geq -\text{VaR}_{1-q}^{X+Y}\}}]}{\mathbb{P}\{X < -\text{VaR}_{1-q}^X\}} \\
&\leq -\text{VaR}_{1-q}^X + \frac{E^{\mathbb{P}}[(X + \text{VaR}_{1-q}^X) 1_{\{X < -\text{VaR}_{1-q}^X\}} 1_{\{X+Y < -\text{VaR}_{1-q}^{X+Y}\}}]}{q} \\
&\leq -\text{VaR}_{1-q}^X + \frac{E^{\mathbb{P}}[(X + \text{VaR}_{1-q}^X) 1_{\{X+Y < -\text{VaR}_{1-q}^{X+Y}\}}]}{\mathbb{P}\{X+Y < -\text{VaR}_{1-q}^{X+Y}\}} \\
&= -\text{VaR}_{1-q}^X + E^{\mathbb{P}}[X + \text{VaR}_{1-q}^X | X + Y < -\text{VaR}_{1-q}^{X+Y}] \\
&= E^{\mathbb{P}}[X | X + Y < -\text{VaR}_{1-q}^{X+Y}].
\end{aligned}$$

Por simetría en los cálculos, también se tiene que

$$E^{\mathbb{P}}[Y | Y < -\text{VaR}_{1-q}^Y] \leq E^{\mathbb{P}}[Y | X + Y < -\text{VaR}_{1-q}^{X+Y}].$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{1-q}^{X+Y} &= -E^{\mathbb{P}}(X + Y | X + Y < -\text{VaR}_{1-q}^{X+Y}) \\
&= -E^{\mathbb{P}}(X | X + Y < -\text{VaR}_{1-q}^{X+Y}) - E^{\mathbb{P}}(Y | X + Y < -\text{VaR}_{1-q}^{X+Y}) \\
&\leq -E^{\mathbb{P}}(Y | Y < -\text{VaR}_{1-q}^Y) - E^{\mathbb{P}}(X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X) \\
&= \mathcal{E}_{1-q}^X + \mathcal{E}_{1-q}^Y.
\end{aligned}$$

Así, $\rho^{(3)}(X + Y) \leq \rho^{(3)}(X) + \rho^{(3)}(Y)$.

65.11 Teorema de representación de medidas coherentes de riesgo

Considere un variable aleatoria X definida sobre dos espacios de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_1)$ y $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_2)$. Es decir, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tiene asociadas dos distribuciones. Se define

$$\rho_m(X) := -\max(E^{\mathbb{P}_1}[X], E^{\mathbb{P}_2}[X]),$$

entonces $\rho_m(X)$ es una medida coherente de riesgo. Observe que esta medida de riesgo se define en términos de dos medidas de probabilidad \mathbb{P}_1 y \mathbb{P}_2 . Si $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}
\rho_m(\alpha X) &= -\max(E^{\mathbb{P}_1}[\alpha X], E^{\mathbb{P}_2}[\alpha X]) \\
&= \alpha(-\max(E^{\mathbb{P}_1}[X], E^{\mathbb{P}_2}[X])) \\
&= \alpha \rho_m(X).
\end{aligned}$$

Asimismo, si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\rho_m(X + \alpha) &= -\max(E^{\mathbb{P}_1}[X + \alpha], E^{\mathbb{P}_2}[X + \alpha]) \\ &= (-\max(E^{\mathbb{P}_1}[X], E^{\mathbb{P}_2}[X])) - \alpha \\ &= \rho_m(X) - \alpha.\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\rho_m(X + Y) &= -\max(E^{\mathbb{P}_1}[X + Y], E^{\mathbb{P}_2}[X + Y]) \\ &\leq (-\max(E^{\mathbb{P}_1}[X] + E^{\mathbb{P}_1}[Y], E^{\mathbb{P}_2}[Y] + E^{\mathbb{P}_2}[Y])) \\ &= -\max(E^{\mathbb{P}_1}[X], E^{\mathbb{P}_2}[X]) - \max(E^{\mathbb{P}_1}[Y], E^{\mathbb{P}_2}[Y]) \\ &= \rho_m(X) + \rho_m(Y).\end{aligned}$$

Por último, Si $X \leq Y$, entonces

$$\begin{aligned}\rho_m(Y) &= -\max(E^{\mathbb{P}_1}[Y], E^{\mathbb{P}_2}[Y]) \\ &\leq (-\max(E^{\mathbb{P}_1}[X], E^{\mathbb{P}_2}[X])) \\ &= \rho_m(X).\end{aligned}$$

A continuación se discute sobre el teorema de representación de una medida coherente de riesgo, el cual se puede enunciar como sigue: Una medida de riesgo, ρ , es coherente si y sólo si existe una familia, \mathcal{P} , de probabilidades definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que:

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} E^{\mathbb{P}}[-X].$$

Esta definición se puede motivar de la siguiente manera. Sea Ω un espacio muestral con n posibles resultados igualmente probables. Considera una familia $\mathcal{C} = \{A_i\}_{i=1}^m$ de subconjuntos de Ω , con la propiedad de que cada A_i tiene ν elementos y

$$\bigcup_{i=1}^m A_i = \Omega.$$

Se define la medida de probabilidad \mathbb{P}_i como la probabilidad condicional de que $\omega \in A_i$, y 0 de otra manera. Esto es,

$$\mathbb{P}_i(\{\omega\}) := \mathbb{P}_i(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & \text{si } \omega \in A_i, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A_i. \end{cases}$$

Sea X una variable aleatoria definida en (Ω, \mathcal{F}) . Denote los posibles valores que X puede tomar, en orden creciente, como $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Sea k un número entero, $0 \leq k < n$, y $\alpha \in [k/n, (k+1)/n)$. Dado que

$$\mathbb{P}\{X \leq x_{k+1}\} = \frac{k+1}{n} > \alpha$$

y

$$\mathbb{P}\{X \leq x_{k+1}\} \leq \frac{k}{n} \leq \alpha,$$

se tiene que $-\text{VaR}_{1-\alpha}^X = x_{k+1}$. Suponga ahora que cada A_i tiene exactamente $\nu = n - k$ elementos. En este caso, $\mathbb{P}_i(\omega) = 1/(n - k)$. Defina la familia de medidas $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}_i\}_{1 \leq i \leq m}$. Sea A_ℓ el miembro de \mathcal{C} con elementos más pequeños, es decir, $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-k}\}$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{1-q}^X &= E^{\mathbb{P}_\ell}[-X | X \leq -\text{VaR}_{1-\alpha}^X] \\ &= -\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-k}}{n - k}, \\ &= E^{\mathbb{P}_\ell}[-X]\end{aligned}$$

donde \mathbb{P}_ℓ es la medida de probabilidad asociada a A_ℓ . Para cualquier otra $\mathbb{P}_i \in \mathcal{P}$, se tiene que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_i}[-X] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{P}_\ell}[-X].$$

En consecuencia,

$$\mathcal{E}_{1-q}^X = \sup_{\mathbb{P}_i \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_i}[-X].$$

65.12 Construcción de medidas coherentes de riesgo

En esta sección se establecen algunas reglas para construir medidas coherentes a partir de otras medidas coherentes. Sean $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, medidas coherentes de riesgo, entonces, cualquier combinación convexa $\rho := \sum_{i=1}^n \beta_i \rho_i$, con $\beta_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$, es una medida coherente de riesgo. Similarmente, si $\rho_\delta, \delta \in [a, b]$ es una familia paramétrica de medidas coherentes de riesgo, entonces para cualquier medida $d\mu(\delta)$ en $[a, b]$ con $\int_a^b d\mu(\delta) = 1$, se tiene que $\rho := \int_a^b \rho_\delta d\mu(\delta)$ es una medida coherente de riesgo.

65.13 Conclusiones

En un mundo globalizado con incertidumbre y riesgo, las autoridades y reguladores exigen a los intermediarios financieros, cada vez, más requisitos en materia de administración de riesgos, tales como: sistemas integrales de medición y control de riesgo, fondos contingentes, comités técnicos de riesgos, unidades especializadas, reportes periódicos, evaluaciones frecuentes de políticas, modelos, técnicas, herramientas, procedimientos y metodologías. Es deseable entonces que el cumplimiento de todos estos requisitos tome como base una medida coherente del riesgo. Este capítulo es un intento modesto de fomentar la cultura de la esperanza condicional del VaR. Para ello, no sólo es necesario transformar la forma de hacer las cosas, sino también modificar la forma de pensar, pensar coherentemente.

65.14 Bibliografía sugerida

- Acerbi, C. (2001). Risk Aversion and Coherent Risk Measures: A Spectral Representation Theorem. Manuscript, Abaxbank, Italy.
- Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath (1999). “Coherent measures of risk”. *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, pp. 203-228.
- Delbaen, F. (2000). Coherent Risk Measures on General Probability Spaces. Manuscript, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.
- Jarrow, R. (2002). “Put Option Premiums and Coherent Risk Measures”. *Mathematical Finance*, Vol. 12, No. 2, pp. 135-142.
- Yang, H. and T. K. Siu (2001). “Coherent Risk Measures for Derivatives under the Black-Scholes Economy”. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 4, No. 5, pp. 819-835.

65.15 Ejercicios

65.1 Suponga que ρ es una medida coherente de riesgo, en el sentido de Artzner *et al.* Proporcione los detalles de todas las demostraciones (a)-(m) de la sección 65.4.1.

65.2 Calcule

$$\text{AVaR}_{1-q}^X = \frac{1}{q} \int_0^q \text{VaR}_{1-s}^X ds$$

para una variable aleatoria Gamma con parámetros α y β .

65.3 Calcule

$$\mathcal{E}_{1-q}^X = -\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [X | X < -\text{VaR}_{1-q}^X]$$

para una variable aleatoria Gamma con parámetros α y β . Compare el resultado con el del ejercicio anterior.

65.4 Sean X y Y los rendimientos de dos portafolios muestre que

$$(X + Y)1_{\{X+Y \leq 0\}} \geq X1_{\{X \leq 0\}} + Y1_{\{Y \leq 0\}}.$$

XII. RIESGO CRÉDITO Y DERIVADOS DE CRÉDITO

- 66. Riesgo Crédito (I): probabilidad de incumplimiento y derivados de crédito
- 67. Riesgo Crédito (II): enfoque de ecuaciones diferenciales parciales
- 68. Riesgo Crédito (III): modelos de migración de crédito

CAPÍTULO 66

RIESGO CRÉDITO (I): PROBABILIDAD DE INCUMPLIMIENTO, MODELOS DE HULL Y WHITE, Y MERTON

Conceptos básicos de este capítulo:

- Calificación o calidad crediticia
- Riesgo de incumplimiento de bonos corporativos
- Tasa de recuperación
- Tasa instantánea de riesgo de incumplimiento
- Probabilidad de incumplimiento con una distribución exponencial
- Probabilidad de incumplimiento con una distribución exponencial bivariada
- Modelo de Hull y White de probabilidades de incumplimiento
- Modelo de Merton de probabilidades de incumplimiento
- Modelo de Hull y White para valuar derivados de crédito

66.1 Introducción

La administración del riesgo crédito en la banca comercial es un asunto de gran importancia. Las autoridades financieras reguladoras y supervisoras que controlan las actividades de la banca comercial exigen medidas precautorias y la especificación de fondos contingentes mínimos para mantener en niveles aceptables los diferentes tipos de riesgos a fin de evitar grandes pérdidas e incluso el colapso. La labor de regulación y supervisión está a cargo del banco central, de la autoridad fiscal, de las comisiones o superintendencias de vigilancia de los procesos y operaciones y de las entidades que protegen a clientes y ahorradores y, por consiguiente, a la economía nacional.

Cuando se valía teóricamente un producto derivado (forward, opción, swap, bono, etc.), se da por hecho que cada una de las partes del contrato cumplirá, cabal y puntualmente, con las obligaciones adquiridas. De tal suerte, que los flujos de efectivo que se generan en los contratos tienen la más alta calidad crediticia. Desafortunadamente, en la realidad esto no es necesariamente cierto, principalmente en los mercados sobre mostrador (over-the-counter). En los últimos años, estos mercados han crecido considerablemente y, por ello, la cuantificación y administración del riesgo crédito, de los que participan en dichos mercados, son tareas esenciales que se llevan a cabo todos los días. Este capítulo se concentra fundamentalmente en la estimación de la probabilidad de que se presente el evento de incumplimiento.

En los mercados de derivados listados, la existencia de una cámara de compensación y liquidación reduce considerablemente el riesgo crédito debido a los depósitos de garantía (márgenes) que se exigen a las partes y/o contrapartes de los contratos negociados. Hasta ahora, ninguna cámara de compensación en el mundo ha quebrado. No obstante, es importante destacar que la probabilidad de quiebra, aunque ésta sea muy pequeña, está siempre latente. Este evento lejos de ser fatalista es muy realista y merece especial atención.

Muchos de los bonos que se encuentran en el mercado son emitidos por empresas medianas con planes de expansión. Sin embargo, en muchos casos la ejecución de dichos planes depende de la evolución del entorno económico y de negocios en un país o en el ámbito mundial. En condiciones adversas algunas empresas pueden tener dificultades de solvencia e incluso declararse en quiebra antes de cumplir con los compromisos financieros adquiridos con sus acreedores. Cuando los recursos de la empresa son insuficientes para el cumplimiento de sus obligaciones, los

acreedores preferentes o privilegiados tienen derechos sobre cualquier otro acreedor. Por ejemplo, los trabajadores de la empresa tienen preferencia sobre el pago de sus salarios y liquidaciones y la autoridad fiscal sobre el pago de impuestos y cuotas patronales. Los acreedores con garantía real, ya sea hipotecaria o prendaria, les siguen en orden a los preferentes. Por último, se encuentran los acreedores comunes, los cuales carecen de cualquier privilegio en la recuperación de sus créditos. En todos los casos, los procesos legales de recuperación, parcial o total, son siempre largos y costosos. En este capítulo se revisan diversas metodologías útiles en la estimación de la probabilidad de incumplimiento de un bono corporativo, con y sin cupones. En particular, se estudia el trabajo de Hull y White (2000), “Valuing Credit Default Swaps I: No Counterparty Default Risk” publicado en el “Journal of Derivatives”, así como el de Merton (1974) “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates” publicado en el “Journal of Finance”.

66.2 Calificaciones crediticias y riesgo de incumplimiento de bonos corporativos cupón cero

Agencias independientes como Standard & Poor's, Moody's y Fitch Ratings, entre otras, proporcionan calificaciones crediticias a bonos corporativos, de mediano y largo plazo, a través de una opinión imparcial. El Cuadro 66.1 muestra una descripción de las calificaciones crediticias que otorga Standard & Poor's a bonos corporativos en un país determinado.

Calificación	Descripción
AAA	La más alta calidad crediticia
AA	Muy alta calidad crediticia
A	Alta calidad crediticia
BBB	Buena calidad crediticia
BB	Calidad especulativa
B	Calidad altamente especulativa
CCC	Alto riesgo de incumplimiento

Cuadro 66.1 Descripción de las calificaciones crediticias.

Una explicación detallada de cada una de las calificaciones se da a continuación:

- AAA: Asigna la mejor calidad crediticia con respecto de otros emisores y, por lo regular, corresponde a títulos de deuda emitidos o garantizados por el gobierno.
- AA: Otorga una calidad crediticia muy sólida con respecto de otras emisiones. El riesgo crediticio inherente a estas obligaciones financieras difiere levemente de otros emisores mejor calificados.
- A: Corresponde a una calidad crediticia sólida con respecto de otros emisores. Sin embargo, cambios en las condiciones económicas podrían afectar el cumplimiento de las obligaciones adquiridas, en un grado mayor que aquellas obligaciones financieras que fueron calificadas con categorías superiores.
- BBB: Establece una calidad crediticia buena. Sin embargo, cambios en las circunstancias económicas podrían afectar la capacidad de pago oportuno con respecto de otras emisiones calificadas con categorías superiores.
- BB: Asigna calidad especulativa. Representa una calidad crediticia relativamente vulnerable con respecto de otros emisores. El pago de estas obligaciones financieras implica cierto grado de incertidumbre. La capacidad de pago oportuno es vulnerable a fluctuaciones adversas en el entorno económico.
- B: Otorga una calidad altamente especulativa. Esta calidad crediticia es significativamente más vulnerable con respecto de otros emisores. Los compromisos financieros actuales se cumplen, pero existe un margen limitado de seguridad. La capacidad de continuar con el pago oportuno depende del desarrollo favorable de la economía.

CCC: Asigna alto riesgo de incumplimiento. Esta categoría agrupa riesgos crediticios muy vulnerables respecto de otros emisores. Su capacidad de cumplir con las obligaciones financieras depende exclusivamente del desarrollo favorable y sostenible del entorno económico y de negocios.

La adición de un “+” ó “–”, al final de la calificación crediticia, se utiliza para denotar un estatus de inversión. El sufijo “+” denota un status agresivo, mientras que el sufijo “–” significa que el estatus de inversión es conservador. En otras palabras, un estatus agresivo promete un mayor retorno que el conservador, pero con mayor riesgo. Así, por ejemplo, AA+ asigna una muy alta calidad crediticia con un estatus de inversión agresivo. Dichos sufijos no se incluyen en la categoría AAA o en categorías estrictamente inferiores a CCC.

Otro sufijo adicional que se utiliza para señalar la posibilidad de un cambio en calificación es la perspectiva: “positiva”, la cual indica una posible mejora en la calidad; “negativa”, la cual señala una posible disminución en la calificación; y “estable”, en cuyo caso existe una probabilidad significativa de que la calidad crediticia se mantenga. Por ejemplo, “A+/estable/” asigna una calidad crediticia alta con un estatus de inversión agresivo y perspectiva “estable”.

Por último, en ocasiones, a la calificación crediticia se añade entre paréntesis el país de referencia de la emisora. Por ejemplo, “AA+(mex)/negativa/” se refiere a una calidad crediticia muy alta de un emisor en México con un estatus de inversión agresivo y perspectiva negativa.

Otras agencias calificadoras, por ejemplo, Moody's utiliza la siguiente nomenclatura Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B, Caa. Dada esta distinción, un inversionista siempre sabrá cuál es la agencia que califica a la emisora en cuestión; el lector puede consultar los detalles de las distintas nomenclaturas en las páginas “web” de las correspondientes agencias calificadoras.

66.3 Diferencial de precios entre bonos gubernamentales y corporativos

En esta sección se examina el diferencial de precios entre bonos gubernamentales y corporativos. Para ello, se utilizan los conceptos de curvas de rendimiento y precios. Sean:

t : Fecha de referencia (o de valuación).

$R_c(t, T)$: Rendimiento de un bono cupón cero emitido por un corporativo colocado en t y con vencimiento en T . Se supone que $R_c(t, T)$ tiene derivada parcial continua con respecto del argumento T .

$R_g(t, T)$: Rendimiento de un bono cupón cero gubernamental colocado en t y con vencimiento en T , el cual se supone libre de riesgo crédito. Se supone que $R_g(t, T)$ tiene derivada continua con respecto de T .

$B_c(t, T)$: Precio de un bono corporativo cupón cero, con riesgo crédito, colocado en t y con vencimiento en T .

$B_g(t, T)$: Precio de un bono gubernamental cupón cero, libre de riesgo crédito, colocado en t y con vencimiento en T .

N : Nominal de los bonos.

Se supone que $R_c(t, T) - R_g(t, T) > 0$. Esta diferencia recibe el nombre de sobretasa por riesgo crédito, y será denotada por $H(t, T)$. Se supone que

$$\frac{\partial H}{\partial T} \geq 0, \quad (66.1)$$

es decir, $H(t, T)$ es una función no decreciente en el argumento T . Observe que dado que $R_c(t, T)$ y $R_g(t, T)$ tienen derivadas parciales continuas en T , entonces $H(t, T)$ también tiene derivada parcial continua en T . El diferencial de precios entre bonos gubernamentales y corporativos, en t , está dado por

$$V(t, T) := N(e^{-R_g(t, T)(T-t)} - e^{-R_c(t, T)(T-t)}) = B_g(t, T) - B_c(t, T). \quad (66.2)$$

De esta manera, la proporción de $V(t, T)$ con respecto del precio del bono gubernamental satisface

$$\nu(t, T) := \frac{V(t, T)}{B_g(t, T)} = \frac{B_g(t, T) - B_c(t, T)}{B_g(t, T)}. \quad (66.3)$$

Observe también que (66.3) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \nu(t, T) &= \frac{e^{-R_g(t, T)(T-t)} - e^{-R_c(t, T)(T-t)}}{e^{-R_g(t, T)(T-t)}} \\ &= 1 - e^{-H(t, T)(T-t)}. \end{aligned} \quad (66.4)$$

66.3.1 Probabilidad de incumplimiento con tasa de recuperación nula

Los conceptos básicos para abordar la problemática de riesgo de incumplimiento de un bono son su curva de rendimiento y su precio. En lo sucesivo, las frases riesgo crédito y riesgo incumplimiento serán utilizadas indistintamente. Evidentemente, el contar con una estimación de la probabilidad de que se presente el evento de incumplimiento de una obligación financiera, es el primer paso en la cuantificación del riesgo crédito. En esta sección se calcula la probabilidad de incumplimiento asociada a un bono corporativo en un mundo neutral al riesgo. Se denota la probabilidad de incumplimiento en T del bono corporativo calculada en t , mediante $Q(t, T)$. Si se supone que no hay recuperación del nominal, ni siquiera parcial, se puede escribir $N = 0$ (véase la Gráfica 66.1). La realidad es, por supuesto, más complicada que esto. En la práctica, no siempre es todo o nada, algunos acreedores tienen derecho sólo a un pago parcial.

Bajo el supuesto de que el valor esperado del nominal de un bono corporativo sea igual al valor futuro de su precio, calculado con la tasa de rendimiento libre de riesgo crédito, la probabilidad de incumplimiento, $Q(t, T)$, satisface

$$B_c(t, T)e^{R_g(t, T)(T-t)} = (1 - Q(t, T))N + Q(t, T)0, \quad (66.5)$$

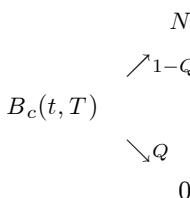
lo cual implica

$$B_c(t, T) = (1 - Q(t, T))B_g(t, T). \quad (66.6)$$

Es decir,

$$Q(t, T) = \frac{B_g(t, T) - B_c(t, T)}{B_g(t, T)}. \quad (66.7)$$

De esta manera, ν y Q son exactamente la misma función. La importancia de este resultado radica en que para calcular $Q(t, T)$ sólo se requiere conocer los precios actuales de los bonos o, en forma equivalente, sus curvas de rendimiento.



Gráfica 66.1 Árbol de probabilidad de incumplimiento.

66.3.2 La tasa de recuperación y el tiempo de incumplimiento vistos como variables aleatorias

La variable aleatoria asociada con la probabilidad de incumplimiento es la tasa de recuperación. Así, a los posibles valores que la tasa de recuperación puede tomar se les asignan probabilidades. Específicamente, si se define la variable aleatoria $X_{t,T}$, del tipo Bernoulli, mediante

$$\text{IP}\{X_{t,T} = 1 | \mathcal{F}_t\} = 1 - Q(t, T)$$

y

$$\text{IP}\{X_{t,T} = 0 | \mathcal{F}_t\} = Q(t, T),$$

entonces la ecuación (66.5) puede reescribirse

$$B_c(t, T) e^{R_g(t, T)(T-t)} = \text{E}[N X_{t,T}] = N \text{E}[X_{t,T}] = N[(1 - Q(t, T)) + Q(t, T)0].$$

Si se define la variable aleatoria continua \mathcal{T} como el momento en que ocurre el evento de incumplimiento, entonces se verifica la relación

$$X_{t,T} = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad t \leq \mathcal{T} \leq T.$$

Por lo tanto, otra forma de escribir la probabilidad de incumplimiento es

$$Q(t, T) = \text{IP}\{t \leq \mathcal{T} \leq T\} = F_{\mathcal{T}}(T) = 1 - e^{-H(t, T)(T-t)}.$$

Claramente,

$$F_{\mathcal{T}}(t) = 0 \quad \text{y} \quad F_{\mathcal{T}}(\infty) = 1,$$

y $F_{\mathcal{T}}(T)$ es continua en T , $T \geq t$. Por lo tanto, $Q(t, T)$ es la distribución de probabilidad acumulada de la variable aleatoria \mathcal{T} . La probabilidad de que no se haya presentado el evento de incumplimiento hasta el tiempo T , en virtud de (66.4), está dada por

$$\text{IP}\{\mathcal{T} > T\} = 1 - F_{\mathcal{T}}(T) = e^{-H(t, T)(T-t)}.$$

De igual manera, la función de densidad de \mathcal{T} satisface

$$f_{\mathcal{T}}(T) = \left(H(t, T) + \frac{\partial H}{\partial T}(T-t) \right) e^{-H(t, T)(T-t)}, \quad T > t.$$

66.3.3 Cálculo de la probabilidad de incumplimiento en un intervalo de tiempo en el futuro

Considere N bonos emitidos por uno o varios corporativos de la misma calidad crediticia con vencimientos en $T_1 < T_2 < \dots < T_N$. Si la curva de rendimiento para dichos bonos se denota mediante $R_c(t, T)$ y la curva de rendimiento para un bono gubernamental, libre de riesgo crédito, es $R_g(t, T)$, entonces

$$Q(t, T_i) = \text{IP}\{t \leq \mathcal{T} \leq T_i\} = 1 - e^{-H(t, T_i)(T_i-t)}$$

En este caso, la probabilidad de incumplimiento durante el intervalo $[T_j, T_k]$, $1 \leq j < k \leq N$ está dada por:

$$Q(t, T_j, T_k) = Q(t, T_k) - Q(t, T_j). \quad (66.8)$$

Esta expresión puede reescribirse, de manera más peculiar, como

$$\begin{aligned} \text{IP}\{T_j \leq \mathcal{T} \leq T_k\} &= \text{IP}\{t \leq \mathcal{T} \leq T_k\} - \text{IP}\{t \leq \mathcal{T} \leq T_j\} \\ &= F_{\mathcal{T}}(T_k) - F_{\mathcal{T}}(T_j). \end{aligned}$$

66.3.4 El caso exponencial

Si en particular $H(t, T)$ se mantiene constante, por ejemplo $H(t, T) = \lambda$, entonces la función de densidad de \mathcal{T} satisface

$$f_{\mathcal{T}}(T) = \lambda e^{-\lambda(T-t)}, \quad T > t,$$

la cual corresponde a la función de densidad exponencial truncada. En este caso, se cumple que

$$Q(t, T) = \text{IP}\{t \leq \mathcal{T} \leq T\} = 1 - e^{-\lambda(T-t)}, \quad T > t$$

y

$$Q(t, T_1, T_2) = Q(t, T_2) - Q(t, T_1) = e^{-\lambda(T_1-t)} - e^{-\lambda(T_2-t)} = e^{\lambda t} (e^{-\lambda T_1} - e^{-\lambda T_2}).$$

66.3.5 Proceso homogéneo de Poisson, probabilidad de incumplimiento

En esta sección el evento de incumplimiento se asocia con la primera ocurrencia de un evento de Poisson. Se dice que N_t es un proceso homogéneo de (saltos) Poisson, con parámetro de intensidad λ , si satisface las siguientes condiciones:

- (i) $N_0 = 0$.
- (ii) Si $s < t$, entonces $N_s \leq N_t$.
- (iii)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{N_{t+dt} = 1 + n \mid N_t = n\} &= \lambda dt + o(dt), \quad n \in \mathbb{N}, \\ \mathbb{P}\{N_{t+dt} = n \mid N_t = n\} &= 1 - \lambda dt + o(dt), \quad n \in \mathbb{N}, \\ \mathbb{P}\{N_{t+dt} = m + n \mid N_t = n\} &= o(dt), \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad m > 1,\end{aligned}$$

donde $o(dt)/dt \rightarrow 0$ cuando $dt \rightarrow 0$.

- (iv) Si $0 < s < t$, entonces los incrementos $N_t - N_s$ y $N_s - N_0$ son estocásticamente independientes.

Las probabilidades anteriores pueden escribirse de manera equivalente como

$$\mathbb{P}\{N_{t+dt} - N_t = 1\} = \lambda dt + o(dt)$$

y

$$\mathbb{P}\{N_{t+dt} - N_t = 0\} = 1 - \lambda dt + o(dt),$$

o simplemente

$$\mathbb{P}\{dN_t = 1\} = \lambda dt + o(dt)$$

y

$$\mathbb{P}\{dN_t = 0\} = 1 - \lambda dt + o(dt).$$

A continuación se calcula la probabilidad $\mathbb{P}\{N_{t+dt} = 0\}$ asociada con el evento de incumplimiento. Si se denota $p_0(t + dt) = \mathbb{P}\{N_{t+dt} = 0\}$, entonces

$$\begin{aligned}p_0(t + dt) &= \mathbb{P}\{N_{t+dt} = 0 \mid N_t = 0\}p_0(t) \\ &= (1 - \lambda dt)p_0(t) + o(dt),\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\frac{p_0(t + dt) - p_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(dt)}{dt}.$$

Si en la expresión anterior se toma el límite cuando $dt \rightarrow 0$, se sigue que

$$\frac{d}{dt}p_0(t) = -\lambda p_0(t).$$

La solución de esta ecuación diferencial ordinaria está dada por $p_0(t) = e^{-\lambda t}$. De la misma manera, si $p_1(t + dt) = \mathbb{P}\{N_{t+dt} = 1\}$, entonces

$$\begin{aligned}p_1(t + dt) &= \mathbb{P}\{N_{t+dt} = 1 \mid N_t = 0\}p_0(t) + \mathbb{P}\{N_{t+dt} = 1 \mid N_t = 1\}p_1(t) \\ &= \lambda dt p_0(t) + (1 - \lambda dt)p_1(t) + o(dt),\end{aligned}$$

lo cual conduce a

$$\frac{p_1(t + dt) - p_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + \lambda p_0(t) + \frac{o(dt)}{dt}.$$

Así,

$$\frac{d}{dt}p_1(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}.$$

La solución de la ecuación diferencial anterior es $p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$. Se define ahora la variable aleatoria

$$\mathcal{T} = \inf\{T \mid N_T = 1\}, \quad \mathcal{T} > t.$$

Claramente,

$$\mathbb{P}\{\mathcal{T} > T\} = p_0(T - t) = e^{-\lambda(T-t)}.$$

En consecuencia, la función de distribución acumulada de \mathcal{T} está dada por

$$F_{\mathcal{T}}(T) = \mathbb{P}\{t \leq \mathcal{T} \leq T\} = 1 - e^{-\lambda(T-t)}, \quad \mathcal{T} \geq t.$$

Es decir, la variable aleatoria \mathcal{T} sigue una distribución exponencial truncada con parámetro λ .

66.3.6 Tasa instantánea de riesgo de incumplimiento

La tasa instantánea de riesgo de incumplimiento $\nu(t, T)$ asociada a una variable aleatoria continua $T > t$ con función de densidad $f_{\mathcal{T}}(T)$ y distribución $F_{\mathcal{T}}(T)$ se define mediante el cociente

$$\nu(t, T) = \frac{f_{\mathcal{T}}(T)}{1 - F_{\mathcal{T}}(T)}. \quad (66.9)$$

El denominador recibe el nombre de función de sobrevivencia, por razones obvias. Una interpretación de (66.9) es como sigue. Observe, primero, que

$$\begin{aligned} \nu(t, T) dT &= \frac{f_{\mathcal{T}}(T) dT}{1 - F_{\mathcal{T}}(T)} \\ &= \frac{dF_{\mathcal{T}}(T)}{1 - F_{\mathcal{T}}(T)} \\ &\approx \frac{\mathbb{P}\{t \leq \mathcal{T} \leq T + dT\}}{\mathbb{P}\{\mathcal{T} > T\}} \\ &= \mathbb{P}\{t \leq \mathcal{T} \leq T + dT \mid \mathcal{T} > T\}. \end{aligned}$$

Así, $\nu(t, T) dT$ representa la probabilidad de que ocurra el evento de incumplimiento en el intervalo $[T, T + dT]$ dado que hasta T todavía no se ha presentado. Por último, en virtud de (66.9), observe que

$$\begin{aligned} \Lambda(t, T) &:= \int_t^T \nu(t, s) ds \\ &= \int_t^T \frac{dF_{\mathcal{T}}(s)}{1 - F_{\mathcal{T}}(s)} \\ &= -\ln(1 - F_{\mathcal{T}}(T)), \end{aligned} \quad (66.10)$$

lo cual implica que

$$F_{\mathcal{T}}(T) = 1 - e^{-\Lambda(t, T)}.$$

En el caso particular del proceso de Poisson, con parámetro de intensidad λ , se tiene que

$$\Lambda(t, T) = \int_t^T \lambda ds = \lambda(T - t).$$

Por último, observe que en el caso de un proceso de Poisson, con parámetro de intensidad constante, la probabilidad de cumplimiento satisface

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}\{\mathcal{T} > T\} = \lambda \mathbb{P}\{\mathcal{T} > T\}.$$

Es decir, el cambio porcentual de la probabilidad de cumplimiento, por unidad de tiempo, es constante e igual a λ .

66.3.7 Probabilidad de incumplimiento con tasa de recuperación positiva

En esta sección se supone que, en caso de incumplimiento, existe la posibilidad de recuperar parcialmente el nominal del bono corporativo, $N\delta$, con $0 < \delta < 1$ (véase la Gráfica 66.2), entonces la probabilidad de incumplimiento, neutral al riesgo, $Q(t, T)$, satisface

$$B_c(t, T)e^{R_g(t, T)(T-t)} = (1 - Q(t, T))N + Q(t, T)N\delta,$$

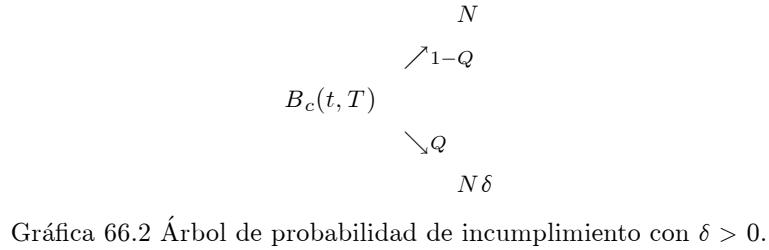
así

$$Q(t, T) = \left(\frac{1}{1 - \delta} \right) \frac{B_g(t, T) - B_c(t, T)}{B_g(t, T)}$$

ó

$$Q(t, T) = \frac{1 - e^{-H(t, T)(T-t)}}{1 - \delta}. \quad (66.11)$$

En particular, cuando $\delta = 0$, (66.11) coincide con (66.7).



Gráfica 66.2 Árbol de probabilidad de incumplimiento con $\delta > 0$.

Asimismo, la ecuación (66.11) puede obtenerse en términos de una variable aleatoria Bernoulli, $X_{t,T}$, definida mediante

$$\mathbb{P}\{X_{t,T} = 1\} = 1 - Q(t, T)$$

y

$$\mathbb{P}\{X_{t,T} = \delta\} = Q(t, T),$$

con lo cual la probabilidad de incumplimiento está determinada por

$$B_c(t, T)e^{R_g(t, T)(T-t)} = \mathbb{E}[N X_{t,T}] = (1 - Q(t, T))N + Q(t, T)N\delta.$$

66.3.8 Probabilidad de incumplimiento con una distribución exponencial bivariada

En el transcurso de las secciones anteriores se han estudiado distribuciones de probabilidad del tiempo de incumplimiento en términos de una sola variable aleatoria. En esta sección se amplía el análisis a una perspectiva multivariada. En particular, se estudia la probabilidad de incumplimiento para el caso de una distribución exponencial bivariada.

Existen situaciones en donde la probabilidad de incumplimiento de una empresa (controladora) depende de la probabilidad de incumplimiento de otras empresas (subsidiarias). De lo anterior, surge la necesidad de considerar una distribución conjunta bivariada $F_{T_1, T_2}(T_1, T_2)$ de un vector (T_1, T_2) . De esta manera, si $F_{T_1}(T_1)$ y $F_{T_2}(T_2)$ son, respectivamente, las distribuciones marginales de T_1 y T_2 , se tiene que:

$$\begin{aligned} F_{T_1, T_2}(T_1, \infty) &= F_{T_1}(T_1), \\ F_{T_1, T_2}(\infty, T_2) &= F_{T_2}(T_2), \\ F_{T_1, T_2}(T_1, -\infty) &= F_{T_1, T_2}(-\infty, T_2) = F_{T_1, T_2}(-\infty, -\infty) = 0, \\ F_{T_1, T_2}(\infty, \infty) &= 1. \end{aligned}$$

En este caso, la probabilidad de incumplimiento dentro del dominio definido por el rectángulo de tiempos $[t_1, t_2] \times [T_1, T_2]$ está dada por

$$\mathbb{P}\{t_1 \leq T_1 \leq T_1, t_2 \leq T_2 \leq T_2\} = F_{T_1, T_2}(T_1, T_2) - F_{T_1, T_2}(T_1, t_2) - F_{T_1, T_2}(t_1, T_2) + F_{T_1, T_2}(t_1, t_2).$$

Asimismo, si las segundas derivadas parciales de $F_{T_1, T_2}(T_1, T_2)$ están definidas en todo punto $(T_1, T_2) \in \mathbb{R}_+^2$, entonces la función de densidad conjunta de (T_1, T_2) satisface

$$f_{T_1, T_2}(T_1, T_2) = \frac{\partial^2 F_{T_1, T_2}(T_1, T_2)}{\partial T_1 \partial T_2}.$$

Las variables aleatorias $(T_1$ y $T_2)$ son independientes si y sólo si

$$F_{T_1, T_2}(T_1, T_2) = F_{T_1}(T_1)F_{T_2}(T_2).$$

Por otro lado, la probabilidad de no incumplimiento, o de sobrevivencia, está dada por:

$$\bar{F}_{T_1, T_2}(T_1, T_2) \equiv \mathbb{P}\{T_1 > T_1, T_2 > T_2\} = 1 - F_{T_1}(T_1) - F_{T_2}(T_2) + F_{T_1, T_2}(T_1, T_2).$$

A continuación se listan algunas propiedades de la distribución exponencial bivariada. Considere una distribución exponencial bivariada. Suponga tres eventos de incumplimiento independientes. El primer evento conduce a que la empresa 1 incumpla en un tiempo aleatorio U_1 , donde $\mathbb{P}\{U_1 < T\} = 1 - e^{-\lambda_1 T}$. El segundo evento conduce a que la empresa 2 incumpla en un tiempo aleatorio U_2 donde $\mathbb{P}\{U_2 < T\} = 1 - e^{-\lambda_2 T}$ y, por último, el tercer evento conduce a que ambas empresas incumplan en un tiempo U_{12} , donde $\mathbb{P}\{U_{12} < T\} = 1 - e^{-\lambda_{12} T}$, entonces los tiempos de incumplimiento T_1 y T_2 de las empresas 1 y 2 satisfacen, respectivamente, que

$$T_1 = \min(U_1, U_{12})$$

y

$$T_2 = \min(U_2, U_{12}).$$

En este caso, la probabilidad conjunta de sobrevivencia o probabilidad de no incumplimiento está dada por

$$\bar{F}_{T_1, T_2}(T_1, T_2) = \mathbb{P}\{T_1 > T_1, T_2 > T_2\} = e^{-\lambda_1 T_1 - \lambda_2 T_2 - \lambda_{12} \max(T_1, T_2)}$$

para todo $T_1 \geq 0$ y $T_2 \geq 0$. Las distribuciones marginales de sobrevivencia o de no incumplimiento están dadas por:

$$\bar{F}_{T_1}(T_1) = \mathbb{P}\{T_1 > T_1\} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})T_1}, \quad T_1 \geq 0,$$

y

$$\bar{F}_{T_2}(T_2) = \mathbb{P}\{T_2 > T_2\} = e^{-(\lambda_2 + \lambda_{12})T_2}, \quad T_2 \geq 0.$$

Es importante recordar que en el caso de una sola variable, T , con distribución exponencial univariada, ésta es caracterizada por la propiedad

$$\mathbb{P}\{\mathcal{T} > S + T | \mathcal{T} > S\} = \mathbb{P}\{\mathcal{T} > T\}$$

para todo $S \geq 0$ y $T \geq 0$. La distribución exponencial bivariada cumple también una propiedad similar

$$\mathbb{P}\{\mathcal{T}_1 > S + T_1, \mathcal{T}_2 > S + T_2 | \mathcal{T}_1 > S, \mathcal{T}_2 > S\} = \mathbb{P}\{\mathcal{T}_1 > T_1, \mathcal{T}_2 > T_2\}$$

para todo $T_1 \geq 0$, $T_2 \geq 0$ y $S \geq 0$. Por último, en términos de la probabilidad de sobrevivencia conjunta \bar{F} se puede escribir

$$\bar{F}_{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2}(T_1 + S, T_2 + S) = \bar{F}_{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2}(T_1, T_2)\bar{F}_{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2}(S, S)$$

para todo $T_1 \geq 0$, $T_2 \geq 0$ y $S \geq 0$.

Otras propiedades relevantes de la variable aleatoria $\min(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$, cuando el vector $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ tiene una distribución exponencial bivariada, son las siguientes:

- (i) La variable aleatoria $\min(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ satisface

$$\mathbb{P}\{\min(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \leq T\} = 1 - e^{-\lambda T}, \quad T \geq 0,$$

donde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$.

- (ii) La variable aleatoria $\min(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ es independiente de cada uno de los eventos $\{\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2\}$, $\{\mathcal{T}_1 > \mathcal{T}_2\}$ y $\{\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2\}$.
- (iii) La variable aleatoria $\min(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ es independiente de $|\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2| \equiv \max(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) - \min(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$.

Por último, observe que la probabilidad de sobrevivencia o de no incumplimiento de la empresa 2 dado el incumplimiento de la empresa 1 en el tiempo T_1 está dada por

$$\mathbb{P}\{\mathcal{T}_2 > T_2 | \mathcal{T}_1 = T_1\} = \begin{cases} e^{-\lambda_2 T_2} & T_1 > T_2, \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_{12}} e^{-\lambda_{12}(T_2 - T_1) - \lambda_2 T_2}, & T_1 \leq T_2. \end{cases}$$

Observe que esta probabilidad de sobrevivencia condicional aumenta con T_1 , en cuyo caso se puede decir que T_2 se incrementa estocásticamente junto con T_1 . Asimismo, es posible calcular la esperanza condicional de T_2 dado que $\mathcal{T}_1 = T_1$ de la siguiente forma:

$$\mathbb{E}[T_2 | \mathcal{T}_1 = T_1] = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 T_1}}{\lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_2 + \lambda_{12})}.$$

66.4 Modelo de Hull y White para el cálculo de probabilidades de incumplimiento de bonos cupón cero en tiempos discretos

La siguiente metodología considera N bonos emitidos por uno o varios corporativos y con el mismo riesgo de incumplimiento. Estos bonos vencen en tiempos discretos $T_1 < T_2 < \dots < T_N$. Se supone que el evento de incumplimiento puede ocurrir en cualquiera de las fechas T_i . Observe que las fechas de incumplimiento son exógenamente determinadas. Se definen ahora las siguientes variables:

t : Fecha de referencia, hoy.

$B_{ci} := B_{ci}(t, T_i)$: Precio, hoy, del bono corporativo con vencimiento en T_i .

$B_{gi} := B_{gi}(t, T_i)$: Precio, hoy, de un bono gubernamental cupón cero, libre de riesgo crédito, con vencimiento en T_i .

$F_{gji} := F_{gji}(t, T_j)$: Precio futuro del i -ésimo bono gubernamental con vencimiento en T_j . $T_j \leq T_i$.

$v_j := v(t, T_j)$: Valor presente, en t , de una unidad monetaria segura en T_j , $T_j \leq T_i$.

$C_{ji} := C_i(t, T_j)$: Cantidad que el tenedor del i -ésimo bono corporativo tiene derecho a reclamar en caso de que se presente incumplimiento en T_j , $T_j \leq T_i$, es decir, si $j < i$ se trata de un cupón, y si $j = i$ se trata del último cupón más el nominal.

$\delta_{ji} := \delta_i(t, T_j) \in [0, 1]$: Tasa de recuperación que el tenedor del i -ésimo bono corporativo recibe en el evento de incumplimiento en T_j , $T_j \leq T_i$.

$V_{ji} := V_i(t, T_j)$: Valor presente, en t , de la pérdida por incumplimiento del i -ésimo bono corporativo en la fecha T_j , $T_j \leq T_i$.

$Q_j := Q_j(t, T_j)$: Probabilidad de incumplimiento del j -ésimo bono corporativo en T_j , por determinar.

Observe primero que

$$V_{ji} = v_j [F_{gji} - \delta_{ji} C_{ji}]. \quad (66.12)$$

Si $R_{gi}(t, T_i)$ es la curva de rendimiento del i -ésimo bono, entonces

$$v_i = e^{-R_{gi}(t, T_i)(T_i - t)}$$

y

$$F_{gji} = B_{gi} e^{R_{gj}(t, T_j)(T_j - t)}.$$

Asimismo, la probabilidad de que se presente la pérdida V_{ji} es, por supuesto, Q_j . Por lo tanto, el valor presente de la pérdida en el i -ésimo bono corporativo satisface

$$B_{gi} - B_{ci} = \sum_{j=1}^i Q_j V_{ji}, \quad (66.13)$$

o en términos matriciales

$$\begin{pmatrix} B_{g1} - B_{c1} \\ B_{g2} - B_{c2} \\ \vdots \\ B_{gN} - B_{cN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ V_{12} & V_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{1N} & V_{2N} & V_{3N} & \cdots & V_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$$

La expresión anterior permite calcular los valores Q_j , $j = 1, 2, \dots, N$ en forma inductiva. En efecto,

$$\hat{Q}_1 = \frac{B_{g1} - B_{c1}}{V_{11}},$$

$$\hat{Q}_2 = \frac{B_{g2} - B_{c2} - \hat{Q}_1 V_{12}}{V_{22}},$$

$$\hat{Q}_3 = \frac{B_{g3} - B_{c3} - \hat{Q}_1 V_{13} - \hat{Q}_2 V_{23}}{V_{33}},$$

⋮

$$\hat{Q}_N = \frac{B_{gN} - B_{cN} - \sum_{j=1}^{N-1} \hat{Q}_j V_{jN}}{V_{NN}}.$$

66.4.1 La tasa de recuperación vista como variable aleatoria en el modelo de Hull y White

Por último, observe que si se escribe $V_{ji} = V_{ji}(\delta_{ji})$ con $V_{ji} = V_{ji}(1) = 0$, es decir, el valor presente de la pérdida esperada es cero si la tasa de recuperación es total, y se definen las variables aleatorias X_{t,T_i} en términos de tasas de recuperación,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_{t,T_1} = \delta_{11}\} &= Q_1, \quad \mathbb{P}\{X_{t,T_1} = 1\} = 1 - Q_1, \\ \mathbb{P}\{X_{t,T_2} = \delta_{12}\} &= Q_1, \quad \mathbb{P}\{X_{t,T_2} = \delta_{22}\} = Q_2, \quad \mathbb{P}\{X_{t,T_2} = 1\} = 1 - Q_1 - Q_2, \\ &\vdots \\ \mathbb{P}\{X_{t,T_N} = \delta_{1N}\} &= Q_1, \quad \mathbb{P}\{X_{t,T_N} = \delta_{2N}\} = Q_2, \dots, \mathbb{P}\{X_{t,T_N} = \delta_{NN}\} = Q_N, \\ \mathbb{P}\{X_{t,T_N} = 1\} &= 1 - \sum_{j=1}^N Q_j.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede reescribir (66.13) como

$$B_{gi} - B_{ci} = \mathbb{E}[V_{ji}(X_{t,T_i})].$$

Es importante destacar que Q_1, Q_2, \dots, Q_N , no necesariamente suman la unidad, sino que

$$\sum_{j=1}^N Q_j < 1.$$

Observe también que las probabilidades de ocurrencia de $\delta_{jj}, \delta_{j,j+1}, \delta_{j,j+2}, \dots, \delta_{jN}$, $j = 1, 2, \dots, N$, son todas iguales a Q_j .

66.4.2 Fórmula de valuación y probabilidad de incumplimiento

Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}^W)$. Suponga que un bono corporativo tiene asociado una tasa corta, r_{ct} , tal que

$$dr_{ct} = \mu(r_{ct}, t)dt + \sigma(r_{ct}, t)dW_t, \quad (66.14)$$

con $\mu(r_{ct}, t)$ y $\sigma(r_{ct}, t)$ funciones conocidas. Asimismo, suponga que $\{U_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega^U, \mathcal{F}^U, \{\mathcal{F}_t^U\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}^U)$ y un bono gubernamental tiene asociada una tasa corta, r_{gt} , tal que

$$dr_{gt} = \alpha(r_{gt}, t)dt + \beta(r_{gt}, t)dU_t, \quad (66.15)$$

con $\text{Cov}(dW_t, dU_t) = \rho dt$. Considere ahora un depósito bancario de M_t unidades monetarias que paga una tasa instantánea de interés r_{gt} . De esta manera, la cuenta bancaria paga un rendimiento, durante dt , igual a

$$dM_t = r_{gt}M_t dt. \quad (66.16)$$

Observe que aunque r_{gt} es estocástica, al tiempo t es conocida y libre de riesgo de mercado. Si se hace un depósito inicial $M_0 = 1$, la cuenta bancaria tiene un saldo, en t , igual a

$$M_t = \exp \left\{ \int_0^t r_{gs} ds \right\}, \quad (66.17)$$

y, en este caso, se satisface la siguiente fórmula de valuación, neutral al riesgo,

$$B_c(t, T) = \mathbb{E} \left[\frac{M_t}{M_T} B_c(T, T) \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[e^{-R_g(t, T)(T-t)} B_c(T, T) \mid \mathcal{F}_t \right], \quad (66.18)$$

donde

$$R_g(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r_{gs} ds.$$

Si el bono corporativo promete un pago de N unidades monetarias al vencimiento y $X_{t,T}$ es la variable aleatoria asociada a la tasa de recuperación, la cual satisface

$$\mathbb{P}\{X_{t,T} = 1\} = 1 - Q(t, T)$$

y

$$\mathbb{P}\{X_{t,T} = \delta\} = Q(t, T),$$

entonces la fórmula (66.18) conduce a

$$\begin{aligned} B_c(t, T) &= \mathbb{E} \left[Ne^{-R_g(t, T)(T-t)} \mid \mathcal{F}_t, X_{t,T} \right] \\ &= \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[Ne^{-R_g(t, T)(T-t)} \mid \mathcal{F}_t \right] \mid X_{t,T} \right\} \\ &= Q(t, T) \mathbb{E} \left[N \delta e^{-R_g(t, T)(T-t)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad + (1 - Q(t, T)) \mathbb{E} \left[Ne^{-R_g(t, T)(T-t)} \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$B_g(t, T) - B_c(t, T) = Q(t, T) \mathbb{E} \left[e^{-R_g(t, T)(T-t)} N(1 - \delta) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Este resultado es consistente, en el caso determinista, con (66.11) y con el modelo de Hull y White para el cálculo de probabilidades de incumplimiento.

66.5 Modelo de Merton para el cálculo de probabilidades de incumplimiento de bonos corporativos y determinación de la curva de rendimiento de un bono con riesgo

En este modelo se utiliza la fórmula de valuación de Black y Scholes para calcular la probabilidad de incumplimiento de un bono corporativo cupón cero. Se supone entonces que una empresa emite bonos cupón cero que vencen en T , y se definen las siguientes variables:

t : Fecha de referencia, hoy.

S_t : Valor de mercado de las acciones de la empresa, hoy.

S_T : Valor de mercado de las acciones de la empresa en T .

$B_c(t, T)$: Valor de mercado de los bonos de la empresa, hoy.

V_t : Valor de mercado de los títulos, de capital y deuda, de la empresa, hoy.

V_T : Valor de mercado de los títulos, de capital y deuda, de la empresa en T .

D : Principal e interés que la empresa debe pagar en T .

σ_s : Volatilidad de las acciones de la empresa.

σ_v : Volatilidad del valor de la empresa en el mercado.

De esta manera,

$$V_t = S_t + B_c(t, T).$$

Se supone que

$$dV_t = \mu_v V_t dt + \sigma_v V_t dW_t \tag{66.19}$$

y

$$dS_t = \mu_s S_t dt + \sigma_s S_t dW_t, \tag{66.20}$$

donde el proceso $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada, $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \mathbb{F}^W, \mathbb{P}^W)$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$. Observe que existe correlación perfecta entre los procesos (66.19) y (66.20). Una limitación de (66.19) es que los parámetros $\mu_V V_t$ y $\sigma_V V_t$, y por ende V_t , no son cantidades observables.

Si $V_T < D$, entonces la empresa incumple, por lo menos parcialmente, con el pago de su deuda, y en este caso $S_T = 0$. Si, por el contrario, $V_T \geq D$, la empresa paga su deuda en T y $S_T = V_T - D$. El razonamiento anterior se puede resumir en

$$S_T = \max(V_T - D, 0). \quad (66.21)$$

Esto muestra que el valor de mercado de las acciones puede verse como una opción europea de compra sobre el valor de mercado de la empresa con precio de ejercicio igual al pago de su deuda. La fórmula de Black-Scholes proporciona el valor inicial de las acciones de la empresa en t , en un mundo neutral al riesgo, el cual está dado por

$$S_t = V_t \Phi(d_1) - D e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad (66.22)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma_V^2)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}} \quad (66.23)$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T-t}.$$

El valor de la deuda hoy es $B_c(t, T) = V_t - S_t$. Observe que

$$\begin{aligned} S_t &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \max(v - D, 0) f_{V_T|V_t}(v|V_t) dv \\ &= e^{-r(T-t)} \int_D^{\infty} (v - D) f_{V_T|V_t}(v|V_t) dv \\ &= e^{-r(T-t)} \int_D^{\infty} v f_{V_T|V_t}(v|V_t) dv - D e^{-r(T-t)} \int_{\{v>D\}} f_{V_T|V_t}(v|V_t) dv \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} [V_T \mathbf{1}_{\{V_T>D\}} \mid V_t] - D e^{-r(T-t)} \mathbb{P} \{ V_T > D \mid V_t \}, \end{aligned} \quad (66.24)$$

donde $f_{V_T|V_t}(v|V_t)$ es la función de densidad de V_T , condicional al valor inicial v_t . En virtud de (66.24), la probabilidad, neutral al riesgo, de que la empresa cumpla con el pago de su deuda es

$$\mathbb{P} \{ V_T > D \mid V_t \} = \Phi(d_2).$$

Por lo tanto, la probabilidad, neutral al riesgo, de que la empresa incumpla con el pago de su deuda es

$$\mathbb{P} \{ V_T < D \mid V_t \} = 1 - \Phi(d_2) = \Phi(-d_2) = \int_{-\infty}^{-d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Para calcular esta probabilidad se requiere conocer tanto a σ_V como V_t . Sin embargo, ninguna de estas dos cantidades es directamente observable. No obstante, si la empresa emite acciones que son colocadas públicamente, entonces S_t puede estimarse como el número de acciones por su precio en el mercado. Esto significa que la ecuación (66.22) proporciona una condición que σ_V y V_t deben satisfacer. Por otro lado, a partir de (66.22) se tiene que $S_t = S_t(V_t, t)$, entonces el lema de Itô conduce a

$$\mu_S S_t dt + \sigma_S S_t dW_t = \left(\frac{\partial S_t}{\partial t} + \mu_V V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2} \sigma_V^2 V_t^2 \frac{\partial^2 S_t}{\partial V_t^2} \right) dt + \sigma_V V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t} dW_t. \quad (66.25)$$

Dado que las componentes estocásticas deben ser iguales se sigue que

$$\sigma_S S_t = \sigma_V V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t}$$

ó

$$\sigma_S S_t = \sigma_V V_t \Phi(d_1). \quad (66.26)$$

Si se cuenta con un estimador de σ_S , la desviación estándar de los rendimientos, entonces (66.26) es otra ecuación que σ_V y V_t deben satisfacer. Por lo tanto, (66.22) y (66.26) proporcionan un sistema de ecuaciones simultáneas en las variables σ_V y V_t . Observe también que las partes deterministas de (66.25) implican

$$\mu_S S_t = D e^{-r(T-t)} \left(-r\Phi(d_2) + \frac{\sigma_V \Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right) + \mu_V \sigma_V \Phi(d_1) + \frac{\sigma_V V_t \Phi'(d_1)}{2\sqrt{T-t}}. \quad (66.27)$$

Una vez que σ_V y V_t se han determinado del sistema (66.22) y (66.25), estos valores se sustituyen en (66.27) para obtener el valor de μ_V .

66.5.1 Precio de un bono con riesgo

En virtud de (66.22), el precio del título de deuda es

$$\begin{aligned} B_c(t, T) &= V_t - S_t \\ &= V_t - \left(V_t \Phi(d_1) - D e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \right) \\ &= V_t (1 - \Phi(d_1)) + D e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\ &= V_t \Phi(-d_1) + D e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\ &= D e^{-r(T-t)} (\Phi(d_2) + m \Phi(-d_1)), \end{aligned}$$

donde

$$m = \frac{V_t}{D} e^{r(T-t)}.$$

Así pues, el precio del bono corporativo es el valor presente del principal y los intereses, D , multiplicado por la probabilidad de cumplimiento, $\Phi(d_2)$, más el valor futuro del inverso del nivel de apalancamiento o cobertura de la deuda, m .

66.5.2 Estructura de plazos de un bono con riesgo

Por último, la estructura de plazos del bono corporativo condicional a que no se presente el evento de incumplimiento, está dada por

$$\begin{aligned} R_c(t, T) &= - \frac{\ln(B_c(t, T)/D)}{T-t} \\ &= - \frac{1}{T-t} \ln \left[e^{-r(T-t)} (\Phi(d_2) + m \Phi(-d_1)) \right] \\ &= r - \frac{1}{T-t} \ln [(\Phi(d_2) + m \Phi(-d_1))]. \end{aligned}$$

66.6 Derivados de Crédito

Los derivados de crédito representan un grupo importante de instrumentos financieros que tienen como objetivo principal cubrir el riesgo de incumplimiento de un pago esperado. En particular, los “swaps” de incumplimiento de crédito (credit default swap, CDS) proporcionan un seguro contra el posible incumplimiento de una empresa emisora de bonos.

Considere una empresa \mathcal{E} que para financiarse emite bonos cuponados y que tiene, por ejemplo, calidad crediticia “BB”. Suponga que el comprador \mathcal{C} del bono también compra un seguro, un CDS, a otro agente, el agente \mathcal{A} , contra el posible incumplimiento de \mathcal{E} . Para ello, \mathcal{C} realiza pagos periódicos a \mathcal{A} hasta que el incumplimiento ocurra o hasta que el CDS expire; lo que ocurra primero. A cambio \mathcal{C} adquiere el derecho de venderle a \mathcal{A} el bono emitido por

\mathcal{E} a la par de su valor nominal en caso de incumplimiento. Cuando se presenta el evento de incumplimiento, generalmente, se requiere que \mathcal{C} haga un último pago a \mathcal{A} . A continuación se presenta el modelo de Hull y White (2000) para valuar un CDS en un mundo neutral al riesgo.

Por simplicidad se supone que el nominal del bono es una unidad monetaria. Se supone que los eventos de incumplimiento, la tasas de interés y la tasa de recuperación son estocásticamente independientes entre sí. Se supone también que en caso de incumplimiento, \mathcal{C} exige el pago del nominal más el interés acumulado. Asimismo, se supone que el incumplimiento sólo puede ocurrir en las fechas T_1, T_2, \dots, T_N . Sean:

- (i) T : vida del CDS,
- (ii) Q_i : probabilidad de incumplimiento en T_i ,
- (iii) \tilde{R} : tasa de recuperación,
- (iv) u_t : valor presente de los pagos del CDS a razón de una unidad monetaria por año entre $t = 0$ y t (condicional a un evento de incumplimiento),
- (v) e_t : valor presente del pago del CDS considerando sólo el tiempo transcurrido entre el pago inmediato anterior a t y t (condicional a un evento de incumplimiento),
- (vi) v_t : valor presente de una unidad monetaria disponible al tiempo t (factor de descuento),
- (vii) w : pago anual realizado por \mathcal{C} ,
- (viii) w^* : valor de w que hace que el CDS tenga valor cero,
- (ix) π : probabilidad de no incumplimiento durante la vida del CDS,
- (x) g_t : interés acumulado (devengado) sobre el bono al tiempo t .

De acuerdo con la notación previamente introducida, evidentemente, $\pi = 1 - \sum_{i=1}^N Q_i$. Los pagos anuales, w , se realizan hasta que un evento de crédito ocurre o hasta el tiempo T . De esta manera, el valor presente de los pagos está dado por

$$\text{VPP} = w \sum_{i=1}^N (u_{t_i} + e_{t_i}) Q_i + w\pi u_T. \quad (66.28)$$

Si un evento de incumplimiento ocurre al tiempo t_i , el valor esperado del bono es $\text{VEB}_i = (1 + g_{t_i})\tilde{R}$. Asimismo, si un evento de incumplimiento ocurre al tiempo t_i , el pago esperado satisface

$$\begin{aligned} \text{PEI}_i &= 1 - \text{VEB}_i \\ &= 1 - (1 + g_{t_i})\tilde{R} \\ &= 1 - \tilde{R} - g_{t_i}\tilde{R}. \end{aligned} \quad (66.29)$$

Por lo tanto, el valor presente del pago esperado del CDS es

$$\text{VPC} = \sum_{i=1}^N \text{PEI}_i Q_i v_{t_i} = \sum_{i=1}^N (1 - \tilde{R} - g_{t_i}\tilde{R}) Q_i v_{t_i}. \quad (66.30)$$

Por otro lado, el valor del CDS para \mathcal{C} es el valor presente del pago esperado del CDS, denotado por VPC , menos el valor presente de los pagos hechos por el comprador del seguro, VPP , esto es,

$$\text{V}_{\text{CDS}} = \sum_{i=1}^n (1 - \tilde{R} - g_{t_i}\tilde{R}) Q_i v_{t_i} - w \sum_{i=1}^N (u_{t_i} + e_{t_i}) Q_i - w\pi u_T. \quad (66.31)$$

El valor de $w = w^*$ que hace que $\text{V}_{\text{CDS}} = 0$ se determina mediante

$$w^* = \frac{\sum_{i=1}^N (1 - \tilde{R} - g_{t_i}\tilde{R}) Q_i v_{t_i}}{\sum_{i=1}^N (u_{t_i} + e_{t_i}) Q_i + \pi u_T}.$$

De esta manera, w^* proporciona, en equilibrio, el pago anualizado para un CDS. La cantidad w^* es también llamada el “spread” del CDS.

66.7 Bibliografía sugerida

- Merton, R. C. (1974). “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates”. *The Journal of Finance*, Vol. 29, No. 2, pp. 449-470.
- Hull, J. C. and A. White (2000). “Valuing Credit Default Swaps I: No Counterparty Default Risk”. *Journal of Derivatives*, Vol. 8, No. 1, pp. 2940.

66.8 Ejercicios

- 66.1** Suponga que $H(t, T) = \lambda$, es decir, la función de densidad, $f_T(T)$, del tiempo de incumplimiento, T , es exponencial, entonces

$$f_T(T) = \lambda e^{-\lambda(T-t)}, \quad T > t.$$

Obtenga la media y la desviación estándar de T y proporcione una interpretación de las mismas en términos de riesgo crédito.

Solución: Observe que

$$\mathbb{E}[T] = \int_t^\infty T \lambda e^{-\lambda(T-t)} dT = \lambda e^{\lambda t} \int_t^\infty T e^{-\lambda T} dT.$$

Si se resuelve la integral anterior por partes con $u = T$ y $dv = e^{-\lambda T}$, se obtiene que

$$\mathbb{E}[T] = \lambda e^{\lambda t} \left[e^{-\lambda t} \left(\frac{t}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right] = t + \frac{1}{\lambda}.$$

Si se escribe $x = 1/\lambda$, se tiene ahora que

$$\mathbb{E}[T] = t + x.$$

Es decir, el tiempo medio de que se presente el evento de incumplimiento después de t es $x = 1/\lambda$. Con el propósito de determinar la varianza se calcula primero

$$\mathbb{E}[T^2] = \lambda e^{\lambda t} \int_t^\infty T^2 e^{-\lambda T} dT.$$

Si se resuelve esta integral por partes con $u = T^2$ y $dv = e^{-\lambda T}$, se obtiene que

$$\mathbb{E}[T^2] = \lambda e^{\lambda t} \left[-T^2 \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda T} \Big|_t^\infty + \frac{2}{\lambda} \int_t^\infty T e^{-\lambda T} dT \right]$$

ó

$$\mathbb{E}[T^2] = t^2 + \frac{2t}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}.$$

De esta manera, la varianza de T , $\text{Var}(T)$ satisface que

$$\begin{aligned} \text{Var}[T] &= \mathbb{E}[T^2] - \mathbb{E}^2[T] \\ &= t^2 + \frac{2t}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} - \left[t + \frac{1}{\lambda} \right]^2 \\ &= \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sqrt{\text{Var}[T]} = x$, es decir, la desviación estándar de T es también el tiempo medio de que ocurra el evento de incumplimiento después de $t = 0$. Observe que este resultado es independiente de $t > 0$.

66.2 Demuestre que si $H(t, T) \ll 1$ y no hay recuperación, entonces $Q(0, 1) = H(0, 1)$. Es decir, la probabilidad de incumplimiento coincide con el “spread” entre las curvas corporativa y gubernamental.

Solución: Observe que $Q(t, T) = 1 - e^{-H(t, T)(T-t)}$. Si $H(t, T) \ll 1$ el desarrollo en serie de Taylor de primer orden es $e^{-H(t, T)(T-t)} = 1 - H(t, T)(T-t) + \dots$, entonces $Q(t, T) = 1 - (1 - H(t, T)(T-t)) = H(t, T)$. En particular, en $(t, T) = (0, 1)$, se tiene que $Q(0, 1) = H(0, 1)$.

66.3 Considera dos bonos cupón cero cuyo valor nominal es \$100. Uno de los bonos es corporativo y otro gubernamental y presentan los siguientes precios a diferentes plazos:

Plazo= T	Precio del bono corp.= B_c	Precio del bono gub.= B_g
1	89	92
2	80	85
3	68	76

Determine el “spread” o sobretasa, $H(t, T)$.

Solución: Con el propósito de obtener el “spread”, considere primero las siguientes curvas de rendimiento:

$$R_c(0, T) = -\frac{1}{T} \ln \left(\frac{B_c(0, T)}{100} \right)$$

y

$$R_g(0, T) = -\frac{1}{T} \ln \left(\frac{B_g(0, T)}{100} \right).$$

El “spread” está dado por $H(0, T) = R_c(0, T) - R_g(0, T)$. Los resultados se muestran en el siguiente cuadro:

T	Rend. bono corp.= $R_c(0, T)$	Rend. bono gub.= $R_g(0, T)$	Spread= $H(0, T)$
1	11.7%	8.3%	3.3%
2	11.2%	8.1%	3.0%
3	12.9%	9.2%	3.7%

66.4 Con base en el ejercicio anterior, obtenga la probabilidad de incumplimiento entre $T = 1$ y $T = 2$ si la tasa de recuperación es del 20%.

Solución: Considere el “spread” $H(0, T)$ del ejercicio anterior y una tasa de recuperación δ . En este caso, se utiliza la fórmula

$$Q(0, T) = \frac{1 - e^{-H(0, T)T}}{1 - \delta}.$$

En consecuencia,

$$Q(0, 1) = \frac{1 - e^{-H(0, 1)1}}{1 - 0.2} = \frac{1 - e^{-(0.117 - 0.083)1}}{0.8} = 4.2\%$$

y

$$Q(0, 2) = \frac{1 - e^{-H(0, 2)2}}{1 - 0.2} = \frac{1 - e^{-(0.112 - 0.081)2}}{0.8} = 7.5\%$$

Así, la probabilidad requerida es

$$Q(0, 2) - Q(0, 1) = 7.5\% - 4.2\% = 3.3\%.$$

66.5 El siguiente ejercicio tiene que ver con la función de distribución de una exponencial bivariada. Suponga que el grupo controlador 1 tiene como subsidiaria a la empresa 2. Suponga que la distribución de probabilidad conjunta de incumplimiento de 1 y 2 es una exponencial bivariada, (T_1, T_2) , con parámetros $\lambda_1 = 0.3$, $\lambda_2 = 0.15$ y $\lambda_{12} = 0.10$, es decir,

$$1 - F(T_1, T_2) = \bar{F}(T_1, T_2) = e^{-\lambda_1 T_1 - \lambda_2 T_2 - \lambda_{12} \max(T_1, T_2)}.$$

en este caso, se puede demostrar que

$$\mathbb{P}\{T_1 > T_1 | T_2 = T_2\} = e^{-\lambda_1 T_1 - \lambda_{12} \max(T_1 - T_2, 0)},$$

es decir,

$$\mathbb{P}\{T_1 > T_1 | T_2 = T_2\} = e^{-\lambda_1 T_1}$$

si $T_2 > T_1$, mientras que

$$\mathbb{P}\{T_1 > T_1 | T_2 = T_2\} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_{12}} e^{-\lambda_{12}(T_1 - T_2) - \lambda_1 T_1}$$

si $T_1 > T_2$. Determine la probabilidad de que el grupo no incumpla después del primer año dado que la subsidiaria incumplió justo en el primer año.

Solución: La probabilidad de que 1 no presente incumplimiento dado que 2 lo presentó es

$$\mathbb{P}\{T_1 > T_1 | T_2 = T_2\} = e^{-0.3} = 0.74.$$

66.6 Con base en los resultados de la sección 66.4, estime la tasa de recuperación de un bono corporativo con vencimiento en un año que incumpla precisamente en el primer año. Suponga que la diferencia de precio de bonos es 0.1, la probabilidad de incumplimiento es 0.75, el valor presente de un año es 0.95 y el valor futuro del bono en la fecha de incumplimiento es 1.1 y, por último, la cantidad a reclamar es el precio futuro.

Solución: A partir de las fórmulas (66.12) y (66.13), se sigue que

$$\delta_1 = 1 - \frac{B_{g1} - B_{c1}}{Q_1 v_1 F_{g11}} = 1 - \frac{0.1}{(0.75)(0.95)(1.1)} = 0.87.$$

66.7 Utilice la paridad put-call para demostrar que en el tiempo T se cumple

$$D = \min(V_T, D).$$

Es decir, $D \leq V_T$.

Solución: Si se parte de $S_t = V_t - B_c(t, T)$ donde S_t es una opción europea de compra sobre el valor de mercado de la empresa con precio de ejercicio igual al pago de la deuda, entonces $S_T = \max(V_T - D, 0)$. A partir de la paridad put-call, se tiene la siguiente relación entre el valor de mercado y la deuda adquirida por la empresa al tiempo t dada por

$$S_t = V_t + p_t - D e^{-r(T-t)}.$$

En virtud de que $p_T = \max(D - V_T, 0)$, se obtiene

$$D = D - \max(V_T - D, 0) = \min(V_T, D).$$

66.8 Obtenga la probabilidad de que una empresa cumpla con el pago de su deuda en 4 años, dado que su deuda adquirida es de 3 millones de pesos (D), $r = 0.10$, $\sigma = 0.21$ y el valor de la empresa es 5 millones de pesos (V_t).

Solución: A partir de la fórmula de Black-Scholes para valuar una opción de compra, se tiene que

$$d_1 = \frac{\ln(5/3) + (0.10 + 0.5(0.21)^2)4}{(0.21)\sqrt{4}} = 2.38$$

y

$$d_2 = 2.38 - (0.21)\sqrt{4} = 1.96.$$

Si se utilizan las tablas de la distribución normal estándar acumulada, se obtiene que $\mathbb{P}\{V_T > D \mid V_t\} = \Phi(1.96) = 0.975$. Por lo tanto, la probabilidad de que la empresa cumpla con el pago de su deuda es del 97.5%.

66.9 Calcule el precio actual ($t = 0$) de un bono corporativo riesgoso con vencimiento en 2 años que tiene una deuda de 2.5 millones (D) y el valor de mercado de la empresa es de 3 millones (V_0). Suponga que $r = 0.12$ y $\sigma = 0.30$.

Solución: Observe que

$$d_1 = \frac{\ln(3/2.5) + (0.12 + 0.5(0.30)^2)2}{0.30\sqrt{2}} = 1.21$$

y

$$d_2 = 1.21 - (0.30)\sqrt{2} = 0.78.$$

En este caso, $\Phi(-1.21) = 0.1131$, $\Phi(0.78) = 0.7823$ y $m = (3/2.5)e^{0.12(2)} = 1.5255$. Por lo tanto, el precio del bono riesgoso es

$$B_c(0, 2) = (2.5)e^{0.12(2)}(0.7823 + (1.5255)(0.1131)) = 1.88.$$

66.10 Con base en la información del ejercicio anterior, determine $R_c(0, 1)$ y $R_c(0, 2)$.

Solución: $R_c(0, 2) = -0.5 \ln(0.75) = 0.14$. Para el caso $R(0, 1)$, tiene que

$$d_1 = \frac{\ln(3/2.5) + (0.12 + 0.5(0.30)^2)1}{0.30\sqrt{1}} = 1.16$$

y

$$d_2 = 1.16 - 0.30\sqrt{1} = 0.86.$$

De esta manera, $\Phi(-1.16) = 0.123$, $\Phi(0.86) = 0.8051$ y $m = (3/2.5)e^{0.12(1)} = 1.3530$. En consecuencia,

$$R_c(0, 1) = 0.12 - (1) \ln((0.8051) + 0.54(0.123)) = 0.15.$$

CAPÍTULO 67

RIESGO CRÉDITO (II): ENFOQUE DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES, MODELO DE LONGSTAFF Y SCHWARTZ

Conceptos básicos de este capítulo:

- Riesgo de incumplimiento de bonos corporativos
- Tasa instantánea de riesgo de incumplimiento
- Proceso de Poisson y tasa instantánea de riesgo de incumplimiento
- Modelo de valuación de Longstaff y Schwartz

67.1 Introducción

En este capítulo se valúan bonos corporativos con riesgo de incumplimiento. En particular, se estudia el modelo Longstaff y Schwartz y varias de sus extensiones. Este modelo caracteriza el precio de un bono corporativo como solución de una ecuación diferencial parcial de segundo orden.

67.2 El modelo Longstaff y Schwartz para un bono cupón cero con riesgo

En el modelo Longstaff y Schwartz (1995), el valor de mercado de los títulos, de capital y deuda, de la empresa, o simplemente el valor de mercado de la empresa, y los precios de los bonos que emite se suponen de comportamiento estocástico. El objetivo es determinar una ecuación diferencial parcial de un bono corporativo con riesgo de incumplimiento. La idea central detrás del modelo se fundamenta en la valuación de opciones con barreras.

Se supone que el valor de mercado, V_t , de una empresa que emite deuda es aleatorio y sigue la ecuación diferencial estocástica:

$$dV_t = \mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dW_t, \quad (67.1)$$

donde el proceso $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \mathbb{F}^W, \mathbb{P}^W)$, $\mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$. Se supone que la empresa se declara en quiebra, o incumplimiento, si su valor cae por debajo de un nivel crítico V_c . Una limitación importante de (67.1) es cómo se miden los parámetros μ_V , σ_V y V_c . Otra deficiencia es cómo se calcula el valor de V_t , hoy.

Se supone que la empresa tiene una deuda de tamaño D que se debe pagar en la fecha T . La deuda no se paga si la empresa se declara en bancarrota. Para mantener las cosas tan simples como sea posible, se supone una tasa de interés libre de riesgo constante e igual a r . Asimismo, es razonable suponer que el valor de la deuda, es decir, el precio de un bono cupón cero emitido por la empresa, es función del valor de mercado de ésta, es decir, $B_c = B_c(V_t, t)$. Una simple aplicación del lema de Itô conduce a que el cambio del precio del bono, dB_c , debido a un cambio en el valor de la empresa, dV_t , durante el intervalo $[t, t + dt]$, está dado por

$$dB_c = \left(\frac{\partial B_c}{\partial t} + \mu_V V_t \frac{\partial B_c}{\partial V_t} + \frac{1}{2} \sigma_V^2 V_t^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial V_t^2} \right) dt + \sigma_V V_t \frac{\partial B_c}{\partial V_t} dW_t. \quad (67.2)$$

A continuación se toma la esperanza de ambos lados de (67.2) y se iguala con el rendimiento instantáneo esperado del bono, $dB_c = rB_c dt$, para obtener

$$\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 V_t^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial V_t^2} + \mu_v V_t \frac{\partial B_c}{\partial V_t} - rB_c = 0. \quad (67.3)$$

Si la empresa cumple sus obligaciones en la fecha de vencimiento T , la condición final para esta ecuación es:

$$B_c(V_t, T) = D. \quad (67.4)$$

Sin embargo, en caso de incumplimiento la emisora ha alcanzado V_c y se tiene, en este caso, que

$$B_c(V_c, t) = 0, \quad t \leq T. \quad (67.5)$$

Como puede observarse, esta condición de frontera es típica de las opciones con barreras. Es importante destacar que se ha tomado la esperanza de (67.2) para llegar a (67.3). Por esta razón, no se tiene un riesgo asociado con V_t . No obstante, la consideración del riesgo de mercado de V_t , no es tarea difícil.

67.3 El modelo Longstaff y Schwartz con tasa de interés estocástica

Se puede desarrollar un modelo más realista al introducir una ecuación para la dinámica estocástica de la tasa corta de interés. Sea $(U_t)_{t \in [0, T]}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada, $(\Omega^U, \mathcal{F}^U, \mathbb{F}^U, \mathbb{P}^U)$, $\mathbb{F}^U = (\mathcal{F}_t^U)_{t \in [0, T]}$. Se supone, además de (67.1), que la tasa corta r_t es conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dr_t = \alpha(r_t, t)dt + \beta(r_t, t)dU_t. \quad (67.6)$$

Los procesos dW_t y dU_t están correlacionados entre sí de acuerdo con

$$\text{Cov}(dW_t, dU_t) = \rho dt.$$

Ahora, el precio del bono satisface $B_c(V_t, r_t, t)$, donde se enfatiza su emisión por un corporativo mediante el subíndice “c”. Para obtener una ecuación diferencial ordinaria que caracterice a B_c , se diseña una estrategia de cobertura del bono con riesgo con un bono cupón cero, libre de riesgo, con precio $B_g(r_t, t)$. Así, el valor de un portafolio, en el tiempo t , en el que se combinan dichos bonos está dado por

$$\Pi_t = w_1 B_c(V_t, r_t, t) + w_2 B_g(r_t, t). \quad (67.7)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & w_1 \left(\frac{\partial B_c}{\partial t} + \mu_v V_t \frac{\partial B_c}{\partial V_t} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 V_t^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial V_t^2} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} + \rho\sigma_v \beta V_t \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t \partial V_t} \right) dt \\ & + w_1 \sigma_v V_t \frac{\partial B_c}{\partial V_t} dW_t + \left(w_1 \frac{\partial B_c}{\partial r_t} + w_2 \frac{\partial B_g}{\partial r_t} \right) \alpha dt + \left(w_1 \frac{\partial B_c}{\partial r_t} + w_2 \frac{\partial B_g}{\partial r_t} \right) \beta dU_t \\ & + w_2 \left(\frac{\partial B_g}{\partial t} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (67.8)$$

Si se selecciona $w_1 = 1$ y

$$w_2 = -\frac{\frac{\partial B_c}{\partial r_t}}{\frac{\partial B_g}{\partial r_t}} \equiv \Psi$$

a fin de eliminar los términos estocásticos en dW_t y dU_t , entonces la esperanza de (67.8) se transforma en

$$\begin{aligned} E[d\Pi_t] = & \left(\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 V_t^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial V_t^2} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} + \rho\sigma_v \beta V_t \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t \partial V_t} + \frac{\partial B_c}{\partial V_t} \mu_v V_t \right) dt \\ & + \Psi \left(\frac{\partial B_g}{\partial t} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (67.9)$$

Ahora bien, dado que B_g satisface

$$\frac{\partial B_g}{\partial t} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2} + \alpha \frac{\partial B_g}{\partial r_t} - r_t B_g = 0,$$

se sigue que (67.9) se transforma en

$$\begin{aligned} E[d\Pi_t] &= \left(\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 V_t^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial V_t^2} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} + \rho\sigma_v\beta V_t \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t \partial V_t} + \frac{\partial B_c}{\partial V_t} \mu_v V_t \right) dt \\ &\quad - \Psi \left(\alpha \frac{\partial B_g}{\partial r_t} - r_t B_g \right) dt. \end{aligned} \quad (67.10)$$

Si (67.10) se iguala al rendimiento instantáneo

$$r_t \Pi_t dt = r_t (B_c + \Psi B_g(r_t, t)) dt,$$

se tiene que

$$\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 V_t^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial V_t^2} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} + \rho\sigma_v\beta V_t \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t \partial V_t} + \mu_v V_t \frac{\partial B_c}{\partial V_t} + \alpha \frac{\partial B_c}{\partial r_t} - r_t B_c = 0. \quad (67.11)$$

La condición final para esta ecuación es:

$$B_c(V_t, r_t, T) = D,$$

que representa el pago de la deuda en la fecha de vencimiento. En caso de que el valor de la empresa alcance un nivel crítico V_c y se presente el evento de incumplimiento, entonces

$$B_c(V_c, r_t, t) = 0.$$

En caso de que el valor de la deuda se pueda escribir en forma separable como

$$B_c(V_t, r_t, t) = G(V_t, t)B_g(r_t; T)$$

para alguna función G , se puede mostrar que $G(V_t, t)$ satisface:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 V_t^2 \frac{\partial^2 G}{\partial V_t^2} + \mu_v V_t \frac{\partial G}{\partial V_t} - r_t G = 0,$$

con

$$G(V_c, t) = 0 \quad \text{y} \quad G(V_t, T) = 1, \quad V_t > V_c.$$

67.4 El modelo Longstaff y Schwartz de riesgo de incumplimiento de un bono cupón cero con parámetros observables en estados financieros

En esta sección se describirá un modelo que toma en cuenta información financiera contable de la empresa emisora de deuda. Es importante destacar que este tipo de información describe el desempeño de la empresa sólo en un periodo dado de tiempo, lo cual es una limitación en el modelado en tiempo continuo. La deuda se valuará con base en el beneficio neto de la empresa, el cual se calcula sustrayendo de las ventas totales los costos de producción, fijos y variables. Se supone que las ventas totales por unidad de tiempo, y_t , de la empresa son conducidas por un movimiento geométrico Browniano:

$$dy_t = \mu y_t dt + \sigma y_t dW_t,$$

donde el proceso $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada, $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \mathbb{F}^W, \mathbb{P}^W)$, $\mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$. Asimismo, se supone que la empresa tiene un costo fijo, \bar{c} , y un costo variable lineal

$$c = \alpha y_t, \quad 0 < \alpha < 1,$$

por unidad de tiempo. Por lo tanto, el beneficio neto, π_t , está dado por

$$\pi_t = (1 - \alpha)y_t - \bar{c}.$$

Si se supone un sistema bancario que paga una tasa de interés libre de riesgo, r , y se deposita π_t en una cuenta, el rendimiento de esta inversión, f_t , satisface

$$df_t = (rf_t + \pi_t)dt.$$

Se supone que la empresa emite deuda por un monto D para ser pagada en la fecha T . Si, en el tiempo T , la empresa tiene al menos D en caja, es decir, $f_T \geq D$, entonces pagará su deuda; si tiene menos de D , $f_T < D$, entonces pagará todo lo que pueda, f_T , incumpliendo parcialmente. Si el saldo es negativo en caja, es decir, $f_T < 0$, entonces la empresa tiene un adeudo mayor y no pagará a los proveedores. Todas estas situaciones se pueden resumir con un pago de

$$\max(\min(f_T, D), 0). \quad (67.12)$$

Observe también que el valor de la deuda, B_c , es función de y_t , f_t y t , y se calcula como el valor presente del monto esperado en (67.12).

$$B_c(t, T) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\max(\min(f_T, D), 0) \mid \mathcal{F}_t].$$

Esta función satisface a la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_c}{\partial y_t^2} \sigma^2 y_t^2 + \frac{\partial B_c}{\partial y_t} \mu y_t + [(1 - \alpha)y_t - \bar{c} + rf_t] \frac{\partial B_c}{\partial f_t} - r B_c = 0,$$

con condición final

$$B_c(y_t, f_t, T) = \max(\min(f_t, D), 0).$$

En caso de que la empresa esté cerca de tener números rojos, esto se podría modelar con la condición de frontera.

$$B_c(y_t, f_t, T) = 0.$$

Si la empresa es de responsabilidad limitada, es decir, no tiene responsabilidad cuando tiene un monto negativo en el banco al tiempo T_0 , entonces

$$B_c(y_t, f_t, T_0) = \max(f_t, 0).$$

Si los dueños de la empresa son responsables de las deudas de la empresa, entonces

$$B_c(y_t, f_t, T_0) = f_t.$$

En este caso, si la empresa, en T_0 , se encuentra en números rojos entonces los directores de la empresa se declaran en quiebra y estarán exentos de la deuda, suponiendo que no han actuado con negligencia.

No solamente se puede usar este modelo para analizar el derecho legal de la empresa, sino también para estudiar los efectos de varios procedimientos de operación sobre su valor. Si $B_c(t, T) >> f_t$, entonces los problemas de incumplimiento están a la vuelta de la esquina, en cuyo caso sería mejor cerrar la empresa. La decisión para cerrar la empresa se puede optimizar con una restricción de la forma

$$B_c(y_t, f_t, t) \geq f_t.$$

Este problema es similar al que se plantea con una opción americana.

67.5 Proceso de Poisson con parámetro de intensidad constante y tasa instantánea de riesgo de incumplimiento

En esta sección se estudia un modelo de riesgo crédito de un bono cupón cero que utiliza el concepto de riesgo instantáneo de incumplimiento $\bar{\lambda}$. Si $B_g(t, T)$ es el precio de un bono gubernamental, libre de riesgo incumplimiento, se define el precio de un bono corporativo con riesgo de incumplimiento como

$$B_c(t, T, \bar{\lambda}) = e^{-\bar{\lambda}(T-t)} B_g(t, T), \quad (67.13)$$

donde ambos bonos tienen el mismo vencimiento. La curva de rendimiento del bono corporativo está dada por

$$\begin{aligned} R_c(t, T, \bar{\lambda}) &= -\frac{\ln(e^{-\bar{\lambda}(T-t)} B_g(t, T))}{T-t} \\ &= -\frac{\ln B_g(t, T)}{T-t} + \bar{\lambda} \\ &= R_g(t, T) + \bar{\lambda}. \end{aligned}$$

De esta forma, el efecto del riesgo de incumplimiento en el rendimiento es un “spread” de tamaño $\bar{\lambda}$. En este modelo simple, el “spread” es constante para todos los vencimientos.

Considere ahora el valor de un portafolio con w_1 unidades del bono corporativo y w_2 unidades del bono gubernamental

$$\Pi_t = w_1 B_c(r_t, t, \bar{\lambda}) + w_2 B_g(r_t, t),$$

donde

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t$$

y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}^W)$. Existe una probabilidad $(1 - \bar{\lambda}dt)$ de que el bono cumpla. En este caso, el cambio en el valor del portafolio durante el intervalo $[t, t + dt]$ es:

$$\begin{aligned} d\Pi_t^{(1)} &= w_1 \left[\left(\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} \right) dt + \frac{\partial B_c}{\partial r_t} dr_t \right] \\ &\quad + w_2 \left[\left(\frac{\partial B_g}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2} \right) dt + \frac{\partial B_g}{\partial r_t} dr_t \right] \\ &= \left[w_1 \left(\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} \right) + w_2 \left(\frac{\partial B_g}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2} \right) \right] dt \\ &\quad + \left(w_1 \frac{\partial B_c}{\partial r_t} + w_2 \frac{\partial B_g}{\partial r_t} \right) \mu dt + \left(w_1 \frac{\partial B_c}{\partial r_t} + w_2 \frac{\partial B_g}{\partial r_t} \right) \sigma dW_t. \end{aligned} \quad (67.14)$$

Se se eligen $w_1 = 1$ y

$$w_2 = -\frac{\frac{\partial B_c}{\partial r_t}}{\frac{\partial B_g}{\partial r_t}} \equiv \Psi$$

con el fin de eliminar el término de riesgo W_t . Por otra parte, la probabilidad de que se presente el evento de incumplimiento es $\bar{\lambda}dt$. En este caso, el cambio en el valor del portafolio es igual a la pérdida esperada, es decir,

$$d\Pi_t^{(2)} = -B_c. \quad (67.15)$$

Si se toma la esperanza de los posibles valores en el cambio del portafolio, (67.14) y (67.15), y se iguala al rendimiento libre de riesgo del portafolio,

$$E[d\Pi_t] = (1 - \bar{\lambda}dt)d\Pi_t^{(1)} + \bar{\lambda}dt d\Pi_t^{(2)},$$

entonces se obtiene que el precio del bono con riesgo satisface:

$$\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} - (r_t + \bar{\lambda})B_c + \Psi \left(\frac{\partial B_g}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2} - r_t B_g \right) = 0, \quad (67.16)$$

donde se ha utilizado el hecho de que $(dt)^2 = 0$. Dado que B_g satisface la ecuación diferencial para un bono libre de riesgo crédito

$$\frac{\partial B_g}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2} + \mu \frac{\partial B_g}{\partial r_t} - r_t B_g = 0,$$

se sigue que

$$\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} - \Psi \mu \frac{\partial B_g}{\partial r_t} - (r_t + \bar{\lambda}) B_c = 0,$$

equivalentemente

$$\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} + \mu \frac{\partial B_c}{\partial r_t} - (r_t + \bar{\lambda}) B_c = 0. \quad (67.17)$$

67.6 Proceso de Poisson no homogéneo con parámetro de intensidad dependiente del tiempo y cálculo de la tasa instantánea de riesgo de incumplimiento con precios del mercado

Suponga que una empresa emite bonos cupón cero con riesgo crédito a diferentes vencimientos. Si la tasa instantánea de riesgo de incumplimiento depende del tiempo, $\nu(t, T)$, y no está correlacionada con la tasa corta de interés, entonces el valor de un bono con riesgo que paga una unidad monetaria en el tiempo T está dado por

$$B_c(t, T; \nu(t, T)) = B_g(t, T) e^{-\int_t^T \nu(s, T) ds} = B_g(t, T) e^{-\Lambda(t, T)}, \quad (67.18)$$

lo cual implica que

$$\Lambda(t, T) = \ln \left(\frac{B_g(t, T)}{B_c(t, T; \nu(t, T))} \right).$$

Por lo tanto,

$$\nu(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(\frac{B_g(t, T)}{B_c(t, T; \nu(t, T))} \right).$$

lo cual proporciona una expresión de la tasa instantánea de riesgo de incumplimiento en función de precios actuales de $B_g(t, T)$ y $B_c(t, T; \nu(t, T))$.

67.7 Tasa instantánea de riesgo de incumplimiento estocástica

Ahora se considera un modelo en donde la tasa instantánea de riesgo de incumplimiento, ν_t , es estocástica y sigue el proceso

$$d\nu_t = \alpha(r_t, \nu_t, t) dt + \beta(r_t, \nu_t, t) dW_t,$$

donde la tasa corta, r_t , es conducida por la ecuación diferencial estocástica de la forma

$$dr_t = \mu(r_t, t) dt + \sigma(r_t, t) dU_t$$

con

$$\text{Cov}(dW_t, dU_t) = \rho dt.$$

Es razonable esperar que la tasa instantánea de riesgo de incumplimiento dependa de la tasa de interés y no al revés. Para valuar el bono cupón cero con riesgo con valor $B_c(r_t, \nu_t, t)$ considere el portafolio

$$\Pi_t = w_1 B_c(r_t, \nu_t, t) + w_2 B_g(r_t, t).$$

Primero, se supone que no hay incumplimiento, con probabilidad $(1 - \nu_t dt)$. En este caso, el cambio en el valor del portafolio durante el instante dt es

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & w_1 \left[\left(\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} + \rho\sigma\beta \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t \partial \nu_t} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial \nu_t^2} \right) dt + \frac{\partial B_c}{\partial r_t} dr_t + \frac{\partial B_c}{\partial \nu_t} d\nu_t \right] \\ & + w_2 \left[\left(\frac{\partial B_g}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2} \right) dt + \frac{\partial B_g}{\partial r_t} dr_t \right]. \end{aligned}$$

Se seleccionan $w_1 = 1$ y $w_2 = -\Psi$ para eliminar el término dr_t . Por otra parte, si se incumple, con una probabilidad $\nu_t dt$, entonces el cambio en el valor del portafolio es

$$d\Pi_t = -B_c.$$

Después de tomar esperanzas y utilizar la ecuación de valuación asociada al bono libre de riesgo, se obtiene que el valor del bono con riesgo satisface

$$\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} + \rho\sigma\beta \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t \partial \nu_t} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial \nu_t^2} + \mu \frac{\partial B_c}{\partial r_t} + \alpha \frac{\partial B_c}{\partial \nu_t} - (r_t + \nu_t)B_c = 0, \quad (67.19)$$

junto con la condición final

$$B_c(r_t, \nu_t, T) = 1.$$

La ecuación (67.19) es simétrica en las variables r_t y ν_t . En el caso particular, $\nu_t \equiv \bar{\lambda}$, es decir, $\alpha = \beta = 0$. La solución de (67.19) es

$$B_c(r_t, t; \bar{\lambda}) = e^{-\bar{\lambda}(T-t)} B_g(r_t, t).$$

Si α y β son independientes de r_t y el coeficiente de correlación ρ es igual a cero se puede escribir la siguiente solución en forma separable

$$B_c(r_t, \nu_t, t) = B_g(r_t, t)G(\nu_t, t),$$

donde G satisface

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \nu_t^2} + \alpha \frac{\partial G}{\partial \nu_t} - \nu_t G = 0$$

con

$$G(\nu_t, T) = 1.$$

En este caso particular, pero importante, el riesgo de incumplimiento se separa de los precios de los bonos.

67.8 Bibliografía sugerida

Longstaff, F. A. and E. S. Schwartz (1995). "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt". *The Journal of Finance*, Vol. 50, No. 3, pp. 789-819.

Venegas-Martínez, F. (2001). "Una guía completa para economistas en la valuación de opciones". *Gaceta de Economía*, Año 6, No. 12, pp. 155-212.

Venegas-Martínez, F. (2002). "La administración financiera y sus herramientas". *Ejecutivos de Finanzas*, Vol. 31, No. 10, pp. 50-54.

67.9 Ejercicios

67.1 Desarrolle el modelo de Longstaff-Schwartz de riesgo crédito con tasa corta caracterizada por

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dU_t.$$

Solución: En el modelo de Longstaff-Schwartz de riesgo crédito se supone que el valor de mercado de una empresa que emite deuda es V_t y sigue la ecuación diferencial estocástica

$$dV_t = \mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dW_t.$$

Suponga, por simplicidad, que $\text{Cov}(dW, dU) = \rho dt$. Así, la estrategia de cobertura del bono corporativo B_c se realiza creando un portafolio con w_1 unidades de éste y w_2 unidades del bono libre de riesgo B_g . Por lo tanto, el valor del portafolio en el tiempo t está dado por:

$$\Pi_t = w_1 B_c(V_t, r_t, t) + w_2 B_g(r_t, t),$$

entonces el cambio en el valor de este portafolio está dado por

$$d\Pi_t = w_1 dB_c(V_t, r_t, t) + w_2 dB_g(r_t, t),$$

es decir,

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & w_1 \left[\frac{\partial B_c}{\partial t} dt + \frac{\partial B_c}{\partial r_t} dr_t + \frac{\partial B_c}{\partial V_t} dV_t \right. \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} (dr_t)^2 + \frac{\partial^2 B_c}{\partial V_t^2} (dV_t)^2 + 2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t \partial V_t} dr_t dV_t \right) \Big] \\ & + w_2 \left(\frac{\partial B_g}{\partial t} dt + \frac{\partial B_g}{\partial r_t} dr_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2} (dr_t)^2 \right). \end{aligned}$$

Si se sustituyen las dinámicas estocásticas de r_t y V_t en la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & w_1 \frac{\partial B_c}{\partial t} dt + w_1 \frac{\partial B_c}{\partial r_t} (a(b - r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dU_t) \\ & + w_1 \frac{\partial B_c}{\partial V_t} (\mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dW_t) \\ & + \frac{1}{2} w_1 \left(\frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} \sigma_r^2 r_t dt + \frac{\partial^2 B_c}{\partial V_t^2} \sigma_V^2 V_t^2 dt + \frac{2\partial^2 B_c}{\partial r_t \partial V_t} \sigma_V \sigma_r V_t \sqrt{r_t} \rho dt \right) \\ & + w_2 \left(\frac{\partial B_g}{\partial t} dt + \frac{\partial B_g}{\partial r_t} (a(b - r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dU_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2} \sigma_r^2 r_t dt \right). \end{aligned}$$

Al reordenar términos, se sigue que

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \left(w_1 \frac{\partial B_c}{\partial r_t} + w_2 \frac{\partial B_g}{\partial r_t} \right) [a(b - r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dU_t] + w_1 \frac{\partial B_c}{\partial V_t} \sigma_V V_t dW_t \\ & + w_1 \left(\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{\partial B_c}{\partial V_t} \mu V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} \sigma_r^2 r_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_c}{\partial V_t^2} \sigma_V^2 V_t^2 + \frac{\partial^2 B_c}{\partial r \partial V} \sigma_V \sigma_r V \sqrt{r_t} \rho dt \right) dt \\ & + w_2 \left(\frac{\partial B_g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2} \sigma_r^2 r_t \right) dt. \end{aligned}$$

Para inmunizar el portafolio se eligen $w_1 = 1$ y

$$w_2 = -\frac{\frac{\partial B_c}{\partial r_t}}{\frac{\partial B_g}{\partial r_t}}.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} E[d\Pi_t] = & w_1 \left(\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{\partial B_c}{\partial V_t} \mu V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} \sigma_r^2 r_t \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_c}{\partial V_t^2} \sigma_V^2 V_t^2 + \frac{\partial^2 B_c}{\partial r \partial V} \sigma_V \sigma_r V \sqrt{r_t} \rho dt \Big) dt \\ & + w_2 \left(\frac{\partial B_g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2} \sigma_r^2 r_t \right) dt. \end{aligned}$$

Se observa que el último sumando de esta ecuación cumple con la ecuación diferencial parcial de un bono cupón cero, a saber,

$$\frac{\partial B_g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2} \sigma_r^2 r_t + a(b - r_t) \frac{\partial B_g}{\partial r_t} - r_t B_g = 0$$

ó

$$\frac{\partial B_g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2} \sigma_r^2 r_t = r_t B_g - a(b - r_t) \frac{\partial B_g}{\partial r_t}.$$

Si se sustituye la última ecuación en la expresión para $E[d\Pi_t]$, se tiene:

$$\begin{aligned} E[d\Pi_t] &= \frac{\partial B_c}{\partial t} dt + \frac{\partial B_c}{\partial V_t} \mu_v V_t dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} \sigma_r^2 r_t dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_c}{\partial V_t^2} \sigma_v^2 V_t^2 dt + \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t \partial V_t} \sigma_v \sigma_r V_t \sqrt{r_t} \rho dt \\ &\quad + w_2 \left(r_t B_g - a(b - r_t) \frac{\partial B_g}{\partial r_t} \right) dt. \end{aligned}$$

Suponga que existe una cuenta bancaria que, al tiempo t , ofrece a su vez la tasa libre de riesgo r_t , por lo que si se invierte el valor del portafolio, el rendimiento generado es

$$d\Pi_t = r_t \Pi_t dt$$

ó

$$d\Pi_t = r_t (B_c + w_2 B_g) dt.$$

Si el mercado está en equilibrio, entonces cualesquiera dos alternativas de inversión ofrecen exactamente el mismo rendimiento. En consecuencia, al igualar ambos rendimientos, se obtiene la ecuación diferencial parcial del bono corporativo, la cual incluye en la condición final la existencia de la posibilidad del riesgo crédito. En conclusión, si la deuda tiene un comportamiento geométrico Browniano de la forma $dV_t = \mu_v V_t dt + \sigma_v V_t dW_t$ y la tasa corta tiene el comportamiento $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_r \sqrt{r_t} dU_t$, se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{\partial B_c}{\partial V_t} \mu_v V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} \sigma_r^2 r_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_c}{\partial V_t^2} \sigma_v^2 V_t^2 + \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t \partial V_t} \sigma_v \sigma_r V_t \sqrt{r_t} \rho \\ + a(b - r_t) \frac{\partial B_c}{\partial r_t} - r_t B_c = 0. \end{aligned}$$

La condición de frontera es $B_c(V_t, r_t, T) = D$ si la empresa es solvente, ó $B_c(V_t, r_t, T) = 0$ si la empresa no es solvente y alcanza el valor crítico V_c .

67.2 Deduzca la ecuación diferencial parcial del modelo de Longstaff y Schwartz con tasa de interés estocástica bajo el supuesto de que la deuda puede escribirse en forma separable como $B_c(V_t, r_t, t) = G(V_t, t)B_g(r_t; T)$.

Solución: Las derivadas parciales de $B_c(V_t, t) = G(V_t, t)B_g(r_t; T)$ son:

$$\frac{\partial B_c}{\partial t} = B_g \frac{\partial G}{\partial t},$$

$$\frac{\partial B_c}{\partial r_t} = G \frac{\partial B_g}{\partial r_t},$$

$$\frac{\partial B_c}{\partial V_t} = B_g \frac{\partial G}{\partial V_t},$$

$$\frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} = G \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2},$$

$$\frac{\partial^2 B_c}{\partial V_t^2} = B_g \frac{\partial^2 G}{\partial V_t^2}$$

y

$$\frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t \partial V_t} = \frac{\partial G}{\partial V_t} \frac{\partial B_g}{\partial r_t}.$$

Si se sustituyen en la ecuación (67.11) y sus condiciones de frontera, se sigue que

$$\begin{aligned} B_g \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 V_t^2 B_g \frac{\partial^2 G}{\partial V_t^2} + \frac{1}{2} \beta^2 G \frac{\partial^2 B_g}{\partial r_t^2} + \rho \sigma_v \beta V_t \frac{\partial G}{\partial V_t} \frac{\partial B_g}{\partial r_t} + \mu V_t B_g \frac{\partial G}{\partial V_t} \\ + \alpha G \frac{\partial B_g}{\partial r_t} - r_t G B_g = 0. \end{aligned}$$

Después de derivar parcialmente la ecuación anterior respecto de B_g , se llega a

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 V_t^2 \frac{\partial^2 G}{\partial V_t^2} + \mu V_t \frac{\partial G}{\partial V_t} - r_t G = 0.$$

67.3 Obtenga la ecuación diferencial parcial del modelo de Longstaff y Schwartz de riesgo de incumplimiento de un bono cupón cero con parámetros observables en estados financieros, de la sección 67.4, dada por

$$\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_c}{\partial y_t^2} \sigma^2 y_t^2 + \frac{\partial B_c}{\partial y_t} \mu y_t + [(1 - \alpha)y_t - \bar{c} + r f_t] \frac{\partial B_c}{\partial f_t} - r B_c = 0,$$

donde

$$dy_t = \mu y_t dt + \sigma y_t dW_t$$

y

$$df_t = (r f_t + \pi_t) dt$$

con

$$\pi_t = (1 - \alpha)y_t - \bar{c}.$$

Solución: Sea $B_c = B_c(y_t, f_t, t)$. Una aplicación del lema de Itô a B_c conduce a

$$dB_c = \left[\frac{\partial B_c}{\partial t} + \mu y_t \frac{\partial B_c}{\partial y_t} + (r f_t + \pi_t) \frac{\partial B_c}{\partial f_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 y_t^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial y_t^2} \right] dt + \sigma y_t \frac{\partial B_c}{\partial y_t} dW_t.$$

Si se sustituye la ecuación para f_t , se sigue que

$$\begin{aligned} dB_c = & \left[\frac{\partial B_c}{\partial t} + \mu y_t \frac{\partial B_c}{\partial y_t} + [r f_t + (1 - \alpha)y_t - \bar{c}] \frac{\partial B_c}{\partial f_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 y_t^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial y_t^2} \right] dt \\ & + \sigma y_t \frac{\partial B_c}{\partial y_t} dW_t. \end{aligned}$$

Si se toma la esperanza, de la ecuación anterior y se iguala al rendimiento del bono corporativo $dB_c = r B_c dt$, se tiene que

$$\frac{\partial B_c}{\partial t} + \mu y_t \frac{\partial B_c}{\partial y_t} + [r f_t + (1 - \alpha)y_t - \bar{c}] \frac{\partial B_c}{\partial f_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 y_t^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial y_t^2} - r B_c = 0.$$

67.4 Considere las siguientes relaciones

$$(i) \quad \frac{B_g(t, T)}{B_c(t, T, \lambda)} = e^{\lambda(T-t)},$$

$$(ii) \quad \frac{B_g(t, T)}{B_c(t, T, \lambda)} = e^{\lambda(T^2-t^2)},$$

$$(iii) \quad \frac{B_g(t, T)}{B_c(t, T, \lambda)} = \lambda(T-t),$$

donde $\lambda > 0$ es una constante positiva, encuentre en cada caso la tasa instantánea de riesgo de incumplimiento, $\nu(t, T)$.

Solución: Si

$$\frac{B_g(t, T)}{B_c(t, T, \lambda)} = e^{\lambda(T-t)},$$

entonces

$$\nu(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} \ln(e^{\lambda(T-t)}) = \lambda.$$

En este caso, la tasa instantánea de riesgo de incumplimiento es constante. Ahora bien, si

$$\frac{B_g(t, T)}{B_c(t, T, \lambda)} = e^{\lambda(T^2-t^2)},$$

entonces la tasa instantánea de riesgo de incumplimiento está dada por

$$\nu(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} \ln(e^{\lambda(T^2-t^2)}) = 2\lambda T.$$

Por último, si

$$\frac{B_g(t, T)}{B_c(t, T, \lambda)} = \lambda(T-t),$$

se sigue que

$$\nu(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} \ln[\lambda(T-t)] = \frac{1}{T-t}.$$

67.5 Obtenga la tasa instantánea de riesgo, $\nu(t, T)$ de incumplimiento en función de las estructuras de plazos corporativa y gubernamental.

Solución: Considere las siguientes relaciones entre tasas y precios de bonos

$$B_g(t, T) = e^{-R_g(t, T)(T-t)}$$

y

$$B_c(t, T) = e^{-R_c(t, T, \nu(t, T))(T-t)},$$

entonces

$$\begin{aligned} \Lambda(t, T) &= \ln \left(\frac{e^{-R_g(t, T)(T-t)}}{e^{-R_c(t, T, \nu(t, T))(T-t)}} \right) \\ &= -(R_g(t, T) - R_c(t, T, \nu(t, T)))(T-t). \end{aligned}$$

De lo anterior, se concluye que

$$\begin{aligned} \nu(t, T) &= -\frac{\partial}{\partial T} (R_g(t, T) - R_c(t, T, \nu(t, T)))(T-t) \\ &= (R_c(t, T, \nu(t, T)) - R_g(t, T)) + (T-t) \frac{\partial}{\partial T} (R_c(t, T, \nu(t, T)) - R_g(t, T)). \end{aligned}$$

67.6 Suponga que la tasa corta, r_t , sigue un proceso de tipo CIR (Cox-Ingersoll-Ross):

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t,$$

donde a , b y σ son cantidades conocidas. Suponga también que la tasa instantánea de incumplimiento de un bono corporativo con riesgo crédito es conducida por el siguiente proceso estocástico:

$$d\nu_t = \alpha dt + \beta dU_t,$$

con $(dW_t, dU_t) = 0$. Asimismo, suponga que la tasa de recuperación en caso de incumplimiento es igual a δ . Demuestre que el precio del bono corporativo cumple con la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial B_c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 B_c}{\partial r_t^2} + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{\partial^2 B_c}{\partial \nu_t^2} + a(b - r_t) \frac{\partial B_c}{\partial r_t} + \alpha \frac{\partial B_c}{\partial \nu_t} - [r_t + (\nu_0 + \alpha t)(1 - \delta)]B_c = 0,$$

con condición de frontera

$$B_c(r_T, \nu_t, T) = 1.$$

Solución: El proceso prescrito para ν_t satisface $\nu_t = \nu_0 + \alpha t + \beta U_t$. Por lo tanto,

$$E[\nu_t] = \nu_0 + \alpha t.$$

Basta sustituir la expresión anterior en (67.19), tomando en cuenta un valor de δ distinto de 1, y después tomar valores esperados de la ecuación resultante para obtener la expresión requerida.

CAPÍTULO 68

RIESGO CRÉDITO (III): MODELOS DE MIGRACIÓN DE CRÉDITO

Conceptos básicos de este capítulo:

- Criterio de Altman
- Matrices de transición
- Matrices de probabilidades acumuladas de incumplimiento
- Matrices de transición en un intervalo finito de tiempo
- Cadenas de Markov
- Cadenas de Markov homogéneas

68.1 Introducción

Existen varias agencias calificadoras del riesgo de incumplimiento que a través de una recopilación de información, financiera y económica, de empresas o países estiman la probabilidad de incumplimiento. Entre las agencias calificadoras más conocidas se encuentran Standard & Poor's, Moody's y Fitch. Estas agencias asignan una calificación del crédito o grado a las empresas como un indicador de su solvencia. Standard & Poor's evalúa a las empresas mediante calificaciones AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, D=I (Incumplimiento), mientras que Moody's utiliza Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B, Caa, Ca, C. Ambas agencias también tienen subclasificaciones más refinadas dentro de estas clasificaciones básicas.

Las agencias calificadoras de crédito, en forma independiente, reúnen información sobre empresas individuales y las califican o recalifican de acuerdo con criterios específicos. Un cambio de calificación en una empresa se conoce como una migración de crédito y tiene, por supuesto, un efecto importante en los precios de los bonos colocados por la empresa. Una migración hacia una calificación más alta aumentará el valor del bono, mientras que una migración hacia una calificación más baja disminuirá el precio y, por lo tanto, su rendimiento. Así pues, la migración de una empresa hacia una categoría crediticia distinta, tiene efectos sobre los precios de sus bonos.

68.2 La función Z de Altman

El "score" Z de Altman (1968) es una función lineal de razones financieras que se utiliza para asentar la calificación crediticia de una emisora. La función Z , que se describe en el Cuadro 68.1, proporciona un pronóstico sobre la vulnerabilidad de una emisora. La descripción de las razones financieras que utiliza la Z de Altman aparecen en Cuadro 68.2.

Pronóstico de vulnerabilidad de la emisora con análisis discriminante
$Z = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n$ $Z = \text{Calificación discriminante}$ $(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{Coeficientes discriminantes (ponderaciones)}$ $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{Variables discriminantes (razones financieras)}$

Cuadro 68.1 Definición de la función Z .

Definiciones de las variables y ponderadores de Z	
Definición	Factor de ponderación
$x_1 = \frac{\text{Capital de trabajo}}{\text{Total activos}}$	1.2
$x_2 = \frac{\text{Utilidades retenidas}}{\text{Total activos}}$	1.4
$x_3 = \frac{\text{Utilidades antes de intereses e impuestos}}{\text{Total activos}}$	3.3
$x_4 = \frac{\text{Valor de mercado del capital}}{\text{Valor en libros de total pasivos}}$	0.6
$x_5 = \frac{\text{Ventas}}{\text{Total activos}}$	0.999

Cuadro 68.2 Variables y ponderadores de la función Z .

Con base en el cuadro anterior la función Z se puede escribir como:

$$Z = 1.2x_1 + 1.4x_2 + 3.3x_3 + 0.6x_4 + 0.999x_5.$$

Las zonas e intervalos de discriminación para la calificación crediticia de una emisora, con un vector de valores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, se establecen en el siguiente cuadro:

Zonas de discriminación:	
$Z > 2.99 \Rightarrow$	Zona Segura
$1.80 < Z \leq 2.99 \Rightarrow$	Zona Gris
$Z \leq 1.80 \Rightarrow$	Zona de Peligro
Intervalos de la calificación Z S&P 500: 1992-2001	
Calificación	Score Z (promedio)
AAA	≥ 6.20
AA	[4.73, 6.20)
A	[3.74, 4.73)
BBB	[2.81, 3.74)
BB	[2.38, 2.81)
B	[1.80, 2.38)
CCC+CC	[0.33, 1.80)

Cuadro 68.3 Zonas e intervalos de discriminación de calificaciones crediticias.

68.3 Matriz de transición o de migración de crédito y matriz de probabilidades de incumplimiento

Cierta empresa actualmente, al tiempo $t = 0$, es calificada en A por Moody's. Varias preguntas relevantes para los inversionistas son: ¿Cuál es la probabilidad, p_{AA} , que en T , $T > 0$, todavía tenga calificación A? ¿Cuál es la probabilidad, p_{AB} , de que en T se califique en B, o incluso I, es decir, p_{AI} ? Evidentemente, estas probabilidades pueden ser tratadas mediante matrices de transición en un periodo $[0, T]$. Un ejemplo de matriz de transición de una empresa B para un año ($T = 1$) se muestra a continuación:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & I \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ I \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.90 & 0.06 & 0.04 \\ 0.04 & 0.95 & 0.01 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (68.1)$$

Observe que

$$p_{iA} + p_{iB} + p_{iI} = 1, \quad i = A, B, I. \quad (68.2)$$

Algunos cuestionamientos sobre dicha matriz de transición surgen de manera natural: ¿Cómo se calcula esta matriz de transición? Esta pregunta aunque parece difícil tiene una respuesta más o menos simple. Si se cuenta con la matriz de probabilidades de incumplimiento de la empresa en cada estado i en el año T , $Q_i(0, T)$, $i = A, B, I$, $T = 1, 2, 3, 4$:

$$\mathbf{Q} = \begin{matrix} & \begin{matrix} T=1 & T=2 & T=3 & T=4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ I \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.0051 & 0.0450 & 0.0815 & 0.115 \\ 0.0066 & 0.0165 & 0.0275 & 0.0394 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (68.3)$$

entonces se puede obtener la matriz de probabilidad de transición a un año. En efecto, sea \mathbf{q}_T , $T = 1, 2, 3, 4$, el vector de probabilidad de incumplimiento para el año T , es decir,

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0.0051 \\ 0.0066 \\ 1.00 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0.0450 \\ 0.0165 \\ 1.00 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} 0.0815 \\ 0.0275 \\ 1.00 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_4 = \begin{pmatrix} 0.115 \\ 0.0394 \\ 1.00 \end{pmatrix}. \quad (68.4)$$

En este caso, se debe cumplir que

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{P}\mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}_3 = \mathbf{P}\mathbf{q}_2, \quad \mathbf{q}_4 = \mathbf{P}\mathbf{q}_3. \quad (68.5)$$

La relación entre \mathbf{P} y las \mathbf{q}_T , en (68.5), se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \end{pmatrix} \quad (68.6)$$

donde $\mathbf{0}$ es una matriz de ceros de 3×3 . Asimismo, la matriz (68.6) se puede reescribir como un sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas, las cuales después de agrupar variables comunes se pueden escribir como tres sistemas de ecuaciones con tres incógnitas. Es decir,

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} p_{AA} \\ p_{AB} \\ p_{AI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{A2} \\ q_{A3} \\ q_{A4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0450 \\ 0.0815 \\ 0.115 \end{pmatrix}, \quad (68.7)$$

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} p_{BA} \\ p_{BB} \\ p_{BI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{B2} \\ q_{B3} \\ q_{B4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0165 \\ 0.0275 \\ 0.0394 \end{pmatrix}, \quad (68.8)$$

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} p_{IA} \\ p_{IB} \\ p_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{I2} \\ q_{I3} \\ q_{I4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{pmatrix}, \quad (68.9)$$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}'_1 \\ \mathbf{q}'_2 \\ \mathbf{q}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0051 & 0.0066 & 1.00 \\ 0.0450 & 0.0165 & 1.00 \\ 0.0815 & 0.0275 & 1.00 \end{pmatrix}.$$

En este caso, \mathbf{q}'_T denota el vector transpuesto de \mathbf{q}_T . Evidentemente, la única solución de (68.9) es $p_{IA} = p_{IB} = 0$ y $p_{II} = 1$. Las soluciones de los sistemas (68.7)-(68.9) conducen a la siguiente matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \text{A} & \text{B} & \text{I} \\ \text{A} & 0.90 & 0.06 & 0.04 \\ \text{B} & 0.04 & 0.95 & 0.01 \\ \text{I} & 0 & 0 & 1 \end{matrix},$$

la cual coincide con (68.1). Suponga ahora que se desea obtener \mathbf{Q} a partir de \mathbf{P} . En este caso, se requiere también el vector \mathbf{d}_1 . Si se parte \mathbf{P} como en (68.1), entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2 &= \mathbf{P}\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.06 & 0.04 \\ 0.04 & 0.95 & 0.01 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0051 \\ 0.0066 \\ 1.00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0450 \\ 0.0165 \\ 1.00 \end{pmatrix} \\ \mathbf{d}_3 &= \mathbf{P}\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.06 & 0.04 \\ 0.04 & 0.95 & 0.01 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0450 \\ 0.0165 \\ 1.00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0815 \\ 0.0275 \\ 1.00 \end{pmatrix} \\ \mathbf{d}_4 &= \mathbf{P}\mathbf{d}_3 = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.06 & 0.04 \\ 0.04 & 0.95 & 0.01 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0815 \\ 0.0275 \\ 1.00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.115 \\ 0.0394 \\ 1.00 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

lo cual conduce a (68.3). Obviamente, si no se proporciona la \mathbf{d}_1 adecuada, entonces no se recupera \mathbf{Q} .

68.4 Cadenas de Markov

Considere la siguiente matriz de transición asociada a las probabilidades de migración crediticia en un intervalo $[t, T]$ de la empresa \mathcal{B} :

$$\mathbf{P}_{[t,T]} = \begin{matrix} & \text{A} & \text{B} & \text{I} \\ \text{A} & p_{AA}(t, T) & p_{AB}(t, T) & p_{AI}(t, T) \\ \text{B} & p_{BA}(t, T) & p_{BB}(t, T) & p_{BI}(t, T) \\ \text{I} & p_{IA}(t, T) & p_{IB}(t, T) & p_{II}(t, T) \end{matrix}, \quad (68.10)$$

donde $p_{iA}(t, T) + p_{iB}(t, T) + p_{ii}(t, T) = 1$, $i = \text{A}, \text{B}, \text{I}$. En particular, $p_{IA}(t, T) = p_{IB}(t, T) = 0$ y $p_{II}(t, T) = 1$. Evidentemente, $\mathbf{P}_{[t,t]} = \mathbf{I}$, donde \mathbf{I} es la matriz identidad de 3×3 . De ahora en adelante, el conjunto de calificaciones $\mathcal{E} = \{\text{A}, \text{B}, \text{I}\}$ será llamado el espacio de estados. El proceso estocástico X_t que toma valores en \mathcal{E} , tal que

$$p_{AB}(t, T) = \mathbb{P}\{X_T = B \mid X_t = A\}$$

será llamado proceso de calificación crediticia de \mathcal{B} . Dado que ninguna empresa (hasta la fecha) se recupera del evento de incumplimiento, se dice que el estado I es un estado absorbente. Si se supone ahora que X_t tiene la propiedad Markoviana,

$$\mathbb{P}\{X_T = j_T \mid X_t = i_t\} = \mathbb{P}\{X_T = j_T \mid X_s = i_s, s \geq t\},$$

es decir, la probabilidad de transición hacia algún estado depende sólo del estado actual y si además se cumple que

$$p_{ij}(t, T) = p_{ij}(T - t), \quad i, j = \text{A}, \text{B}, \text{I},$$

entonces el proceso X_t es conocido como una cadena de Markov homogénea (en el tiempo) con un número finito de estados. Obviamente, en la realidad difícilmente se encuentran procesos de

calificación crediticia que mantengan la propiedad Markoviana y todavía más difícil que dichos procesos sean homogéneos.

Una propiedad relevante de una cadena de Markov homogénea es que la matriz de transición de n períodos, $[0, T]$, $[T, 2T], \dots, [(n-1)T, nT]$, cada uno de longitud T , se obtiene como

$$\mathbf{P}_{[0, nT]} = \mathbf{P}_{[0, T]}^n.$$

En general, se cumple que

$$\mathbf{P}_{[iT, jT]} = \mathbf{P}_{[0, T]}^{j-i}.$$

En efecto, observe que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{X_{nT} = j_{nT}, X_{(n-1)T} = j_{(n-1)T}, \dots, X_T = j_T \mid X_t = i_t\} \\ &= \mathbb{P}\{X_T = j_T \mid X_t = i_t\} \mathbb{P}\{X_{2T} = j_{2T} \mid X_T = j_T, X_t = i_t\} \times \\ & \quad \mathbb{P}\{X_{3T} = j_{3T} \mid X_{2T} = j_{2T}, X_T = j_T, X_t = i_t\} \times \dots \times \\ & \quad \mathbb{P}\{X_{nT} = j_{nT} \mid X_{(n-1)T} = j_{(n-1)T}, \dots, X_T = j_T, X_t = i_t\} \\ &= \mathbb{P}\{X_T = j_T \mid X_t = i_t\} \mathbb{P}\{X_{2T} = j_{2T} \mid X_T = j_T\} \cdots \mathbb{P}\{X_{nT} = j_{nT} \mid X_{(n-1)T} = j_{(n-1)T}\} \\ &= p_{i_t j_T}(T) p_{i_T j_{2T}}(T) \cdots p_{i_{(n-1)T} j_{nT}}(T). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p_{i_t j_{nT}}(T) = \mathbb{P}\{X_{nT} = j_{nT} \mid X_t = i_t\} = \sum_{\mathcal{G}} p_{i_t j_T}(T) p_{i_T j_{2T}}(T) \cdots p_{i_{(n-1)T} j_{nT}}(T),$$

donde \mathcal{G} es el conjunto de índices asociados a una trayectoria factible que va del estado $X_t = i_t$ al estado $X_{nT} = j_{nT}$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} p_{A,A}(3T) &= p_{A,A}(T)p_{A,A}(T)p_{A,A}(T) + p_{A,B}(T)p_{B,A}(T)p_{A,A}(T) \\ &\quad + p_{A,A}(T)p_{A,B}(T)p_{B,A}(T) + p_{A,B}(T)p_{B,B}(T)p_{B,A}(T). \end{aligned}$$

Suponga que $t = 0$ y que $\mathbf{P}_{[0, T]}$ es la matriz de transición en un periodo de longitud T . Así pues, para una cadena de Markov homogénea, la matriz de transición del estado i al j satisface

$$\mathbf{P}_{[iT, jT]} = \mathbf{P}_{[0, T]}^{j-i}.$$

Por supuesto, el análisis anterior puede extenderse, sin dificultad, para el caso de cualquier número finito de estados.

Por último, se determina la distribución no condicional de una cadena de Markov. Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup 0}$ una cadena homogénea de Markov definida sobre un número finito de posibles estados \mathcal{E} . Hasta ahora, todas las probabilidades que se han considerado, sobre X_n , son condicionales. Si se desea la distribución no condicional de X_n , es necesario especificar la distribución de probabilidad del estado inicial. Esto es,

$$p_i \equiv \mathbb{P}\{X_1 = i\}, \quad i \in \mathcal{E}, \quad \sum_{i=1}^2 p_i = 1.$$

De esta manera, todas las probabilidades no condicionales pueden ser calculadas mediante

$$\mathbb{P}\{X_n = j\} = \sum_{i \in \mathcal{E}} \mathbb{P}\{X_n = j \mid X_1 = i\} \mathbb{P}\{X_1 = i\}.$$

68.4.1 Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Otra propiedad que satisface el producto

$$\mathbf{P}_{[0,nT]} = \mathbf{P}_{[0,T]}^n,$$

es que también puede expresarse como

$$\mathbf{P}_{[0,nT]} = \mathbf{P}_{[0,T]}^{n-m} \mathbf{P}_{[0,T]}^m, \quad m \leq n,$$

es decir,

$$p_{ij}^n(T) = \sum_k p_{ik}^{(n-m)}(T) p_{kj}^m(T), \quad m \leq n.$$

68.5 Propiedad Markoviana y Matriz de transición en cualquier intervalo finito de tiempo

En la sección anterior la matriz de transición tenía una base anual. En esta sección se determina la matriz de transición en un intervalo finito de tiempo. Para ello, se comienza por modelar, primero, la migración sobre un periodo de tiempo corto de $[T, T + dT]$. Ya que este periodo de tiempo es muy corto, la posibilidad de cualquier migración es muy pequeña. El evento más probable es que no exista migración. A continuación se calcula la probabilidad de cambio de una calificación crediticia a otra en un intervalo de tiempo de longitud dT . Si la matriz de transición sobre el intervalo de tiempo $[T, T + dT]$ se denota mediante $\mathbf{P}_{[T,T+dT]}$, entonces se puede escribir:

$$\mathbf{P}_{[T,T+dT]} = \mathbf{I} + \Lambda dT \quad (68.11)$$

para alguna matriz Λ , donde \mathbf{I} es la matriz identidad. La suma de las entradas en cada renglón de Λ debe sumar cero y el último renglón solamente debe contener ceros ya que el incumplimiento es un estado absorbente. La matriz Λ se justifica fácilmente en términos de procesos de Poisson. En efecto, si $p_{ij}(t, T)$ es cualquier entrada de $\mathbf{P}_{[T,T+dT]}$ y si λ_{ij} es visto como un parámetro de intensidad, entonces

$$p_{ij}(t, T) = \lambda_{ij} dT.$$

Evidentemente, las entradas fuera de la diagonal de Λ deben satisfacer

$$p_{ii}(t, T) = 1 - \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} dT.$$

Si se define $\lambda_{ii} = -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij} dT$, se tiene que $\mathbf{P}_{[T,T+dT]} = \mathbf{I} + \Lambda dT$. Ahora bien, se utilizará $\mathbf{P}_{[t,T]}$ para denotar la matriz de transición sobre un intervalo finito de tiempo $[t, T]$. Las probabilidades de transición entre $\mathbf{P}_{[t,T]}$ $\mathbf{P}_{[T,T+dT]}$ y $\mathbf{P}_{[t,T]}$ están relacionadas mediante

$$\mathbf{P}_{[t,T+dT]} = \mathbf{P}_{[t,T]} \mathbf{P}_{[T,T+dT]}. \quad (68.12)$$

Si se sustituye la ecuación (68.11) en la ecuación anterior, se sigue que

$$\mathbf{P}_{[t,T+dT]} = \mathbf{P}_{[t,T]} (\mathbf{I} + \Lambda dT). \quad (68.13)$$

Si se resta $\mathbf{P}_{[t,T]}$ de ambos lados de la ecuación anterior y se divide por dT , se obtiene

$$\frac{\mathbf{P}_{[t,T+dT]} - \mathbf{P}_{[t,T]}}{dT} = \mathbf{P}_{[t,T]} \Lambda. \quad (68.14)$$

El lado derecho de la ecuación anterior es independiente de dT . En particular, al tomar el límite cuando $dT \rightarrow 0$ en (68.14), se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial T} \mathbf{P}_{[t,T]} = \mathbf{P}_{[t,T]} \Lambda. \quad (68.15)$$

Si se impone la condición inicial $\mathbf{P}_{[t,t]} = \mathbf{I}$, entonces la solución de la ecuación diferencial matricial (68.15) está dada por

$$\mathbf{P}_{[t,T]} = e^{(T-t)\Lambda}. \quad (68.16)$$

La exponencial de una matriz se define por la siguiente serie infinita

$$e^{(T-t)\Lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T-t)^k}{k!} \Lambda^k.$$

En particular,

$$\mathbf{P}_{[0,T]} = e^{T\Lambda}. \quad (68.17)$$

Suponga, por ejemplo, que $\mathbf{P}_{[0,T+\Delta T]}$ es la matriz de transición para un horizonte de tiempo de un año. Si se desea determinar lo que podría pasar en un periodo más corto de tiempo, por ejemplo, un semestre, se lleva a cabo el siguiente procedimiento. Si se denota mediante $\mathbf{P}_{[0,T]}$ la matriz de transición de un semestre, para lo cual se requiere conocer la matriz Λ . Si ahora se supone que la matriz Λ se puede diagonalizar de tal forma que existen matrices \mathbf{A} y \mathbf{D} , \mathbf{D} una matriz diagonal, tales que

$$\Lambda = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}. \quad (68.18)$$

Si lo anterior se puede hacer, entonces las entradas de la matriz \mathbf{D} son los valores propios de Λ . En consecuencia, se puede escribir

$$\mathbf{P}_{[0,T]} = \mathbf{A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[T\mathbf{D}]^k}{k!} \mathbf{A}^{-1}. \quad (68.19)$$

Puesto que \mathbf{D} es diagonal, al elevarla a la k -ésima potencia, el resultado es otra matriz diagonal con las entradas diagonales de la matriz original elevadas a la k -ésima potencia. Por lo tanto,

$$\mathbf{P}_{[0,T]} = \mathbf{A} e^{T\mathbf{D}} \mathbf{A}^{-1}, \quad (68.20)$$

donde $e^{T\mathbf{D}}$ es la matriz con entradas diagonales $e^{T d_k}$ y d_k son las entradas diagonales de \mathbf{D} . Los vectores propios de las dos matrices $\mathbf{P}_{[0,T]}$ y Λ se encuentran relacionados. La estrategia para encontrar Λ es, primero, diagonalizar $\mathbf{P}_{[0,T]}$, en (68.18), para encontrar \mathbf{A} y $e^{T\mathbf{D}}$, a partir de lo cual se determinan \mathbf{A} y \mathbf{D} . Si se utiliza (68.18), con \mathbf{A} y \mathbf{D} conocidas, se obtiene inmediatamente la matriz Λ .

68.6 Clasificación de estados

Hasta ahora sólo se ha especificado cuándo un estado es absorbente. A continuación se clasifican los estados en función de sus características.

68.6.1 Estados accesibles y comunicados

Se dice que un estado j es accesible desde el estado i si $p_{ij}^{(n)} > 0$ para alguna $n \in \mathbb{N} \cup 0$. Observe que el estado j es accesible desde estado i si y sólo si, iniciando en i , es posible que el proceso alguna vez visite el estado j . En efecto, ya que si j no es accesible desde i , entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\text{alguna vez se visita } j \mid \text{se inicia en } i\} &= \mathbb{P}\left\{\bigcup_{n=0}^{\infty} \{X_n = j\} \mid X_1 = i\right\} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X_n = j \mid X_1 = i\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Asimismo, se dice que dos estados, i y j , se comunican, lo cual se denota mediante $i \leftrightarrow j$, si son accesibles entre sí. Observe que cualquier estado se comunica consigo mismo, ya que por definición

$$p_{ii}^{(0)} = \mathbb{P}\{X_0 = i | X_0 = i\} = 1.$$

La relación de comunicación satisface las siguientes tres propiedades:

- (i) El estado i se comunica consigo mismo.
- (ii) Si el estado i se comunica con el estado j , entonces el estado j se comunica con el estado i .
- (iii) Si el estado i se comunica con el estado j , y el estado j se comunica con el estado k , entonces el estado i se comunica con el estado k .

Las propiedades (i) y (ii) se siguen inmediatamente de la definición de comunicación. Para probar (iii) suponga que i se comunica con j , y que j se comunica con k , entonces, existen n y m tales que $p_{ij}^{(n)} > 0$ y $p_{jk}^{(m)} > 0$. Ahora, de las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, se tiene que

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{ir}^{(n)} p_{rk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0.$$

Se dice que dos estados que se comunican están en una misma clase. Una consecuencia de (i), (ii) y (iii) es que dos clases de estados son idénticas o disjuntas. En otras palabras, el concepto de comunicación divide a \mathcal{E} en clases ajenas. Se dice que una cadena de Markov es irreducible si hay sólo una clase, esto es, si todos los estados se comunican entre sí. Considere una cadena de Markov que consiste de cuatro estados A↔1, B↔2, C↔3 y I↔4 y la siguiente matriz de transición

$$\mathbf{P}_{[0,T]} = \mathbf{P} = \begin{matrix} & \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{I} \\ \text{A} & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ \text{B} & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ \text{C} & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ \text{I} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

Las clases de esta cadena de Markov son {1, 2}, {3} y {4}. Observe que mientras los estados 1 y 2 son accesibles desde el estado 3, el regreso no es posible. Asimismo, debido a que el estado 4 es un estado absorbente, esto es $p_{33} = 1$, ningún otro estado es accesible desde éste.

68.6.2 Estados recurrentes y transitorios

Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup 0}$ una cadena homogénea de Markov que toma valores sobre un número finito de posibles estados \mathcal{E} . Para cualquier estado $i \in \mathcal{E}$, f_i denotará la probabilidad de que, iniciando en el estado i , el proceso alguna vez regrese a él. En este caso, se dice que el estado i es recurrente si $f_i = 1$ y transitorio si $f_i < 1$. Suponga que el proceso inicia en el estado i e i es recurrente, entonces, con probabilidad 1, el proceso eventualmente regresará al estado i . Asimismo, por la definición de una cadena de Markov, se sigue que el proceso estará iniciando otra vez cuando entre al estado i . La repetición continua de este argumento conduce a la conclusión de que si el estado i es recurrente y el proceso inicia en el estado i , entonces el estado i sera visitado un número infinito de veces.

Por otro lado, si el estado i es transitorio, entonces existe una probabilidad positiva $1 - f_i$ de que el proceso nunca regrese al estado i . De esta manera, si se inicia en el estado i , la probabilidad de que el proceso visite el estado i dentro de exactamente n periodos es $f_i^{n-1}(1 - f_i)$, $n \geq 1$. En otras palabras, si el estado i es transitorio y el proceso inicia en el estado i , el número de periodos que el proceso está en el estado i tiene una distribución geométrica con media igual a $1/(1 - f_i)$.

A partir de lo anterior, se sigue que el estado i es recurrente si y sólo si, iniciando en el estado i , el número esperado de periodos de tiempo que el proceso está en el estado i es infinito. En efecto, sea

$$D_n = \begin{cases} 1, & \text{si } X_n = i \\ 0, & \text{si } X_n \neq i. \end{cases}$$

En este caso, $\sum_{n=0}^{\infty} D_n$ representa el número de periodos que el proceso está en el estado i . Además, observe que

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{\infty} D_n | X_0 = i \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[D_n | X_0 = i] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X_n = i | X_0 = i\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}.\end{aligned}$$

De lo anterior, se concluye que el estado i es recurrente si

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

y transitorio si

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty.$$

Este resultado es muy importante, ya que un estado transitorio sólo será visitado un número finito de veces; de aquí el nombre de transitorio. Esto lleva a la conclusión de que en una cadena de Markov con espacio de estados finito no todos los estados pueden ser transitorios. Para ver esto, suponga que los estados son $0, 1, \dots, M$ y que todos son transitorios. Entonces después de un tiempo finito (es decir, después del tiempo T_1) el estado 1 nunca más será visitado, y después de un tiempo T_2 , el estado 2 nunca más será visitado, etc. De esta manera, después de un tiempo finito $T = \max\{T_0, T_1, \dots, T_M\}$ ningún estado será visitado. Pero como el proceso debe estar en algún estado después de un tiempo T se llega a una contradicción, lo cual demuestra que al menos un estado tiene que ser recurrente.

Otro resultado importante es que si el estado i es recurrente y el estado i comunica con el estado j , entonces el estado j es recurrente. En efecto, para ver esto, note que si el estado i se comunica con el estado j , entonces existen enteros k y m tales que $p_{ij}^k > 0$, $p_{ji}^m > 0$. Ahora bien, para cualquier $n \in \mathbb{N} \cup 0$

$$p_{jj}^{(m+n+k)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^n p_{ij}^k.$$

Note que el lado izquierdo de la desigualdad anterior es la probabilidad de ir de j a j en $m+n+k$ periodos, mientras que el lado derecho es la probabilidad de ir de j a j en $m+n+k$ periodos vía una trayectoria que va primero de j a i en m periodos, después va de i a i en otros n periodos y, finalmente, de i a j en k periodos más. Si en la desigualdad anterior se suma sobre n , se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+n+k)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty,$$

donde $p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ es infinito ya que el estado i es recurrente. Por lo tanto, se llega a que el estado j es también recurrente.

El resultado anterior también implica que la transitoriedad es una propiedad de clase. En efecto, si el estado i es transitorio y se comunica con el estado j , entonces el estado j debe ser también transitorio. De esta forma, si el estado j fuera recurrente, entonces i también sería recurrente y no podría ser transitorio. Asimismo, del resultado previo se tiene que no todo estado en una cadena de Markov, con \mathcal{E} finito, puede ser transitorio, lo cual conduce a que todos los estados de la cadena de Markov irreducible son recurrentes. Considere la cadena de Markov que tiene los estados AAA=1, AA=2, BBB=3, A=4, BB=5 y la matriz de transición dada por

$$\begin{array}{ccccc} & \text{AAA} & \text{AA} & \text{A} & \text{BBB} & \text{BB} \\ \text{AAA} & \left(\begin{array}{ccccc} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0.5 \end{array} \right) \end{array}$$

En este caso la cadena tiene tres clases $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$ y $\{5\}$. Las dos primeras clases son recurrentes y la tercera transitoria.

68.7 Estados ergódicos y probabilidades estacionarias

Considere la siguiente matriz de transición de un periodo $[0, T]$

$$\mathbf{P}_{[0, T]} = \mathbf{P} = \begin{matrix} & \text{AAA} & \text{AA} \\ \text{AAA} & 0.7 & 0.3 \\ \text{AA} & 0.4 & 0.6 \end{matrix}. \quad (68.21)$$

Por simplicidad, en lo que sigue, se hará referencia al estado AAA como el estado 1 ($\text{AAA} \mapsto 1$) y al estado AA como 2 ($\text{AA} \mapsto 2$). Observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^2 &= \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{P}^4 &= (\mathbf{P}^2)^2 = \begin{pmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5668 & 0.4332 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{P}^8 = (\mathbf{P}^4)^2 = \begin{pmatrix} 0.572 & 0.428 \\ 0.570 & 0.430 \end{pmatrix}.$$

Observe, primero, que la matriz \mathbf{P}^8 es casi idéntica a la matriz \mathbf{P}^4 y, segundo, cada uno de los renglones de \mathbf{P}^8 son casi idénticos. De hecho, parece que cuando $n \rightarrow \infty$, p_{ij}^n converge a algún valor, el cual además es el mismo para toda i . Es decir, parece que existe un límite de las probabilidades de transición en el que el proceso estará en el estado j después de un gran número de transiciones y dicho límite es independiente del estado inicial.

Para hacer lo anterior más preciso hay dos propiedades adicionales de los estados de una cadena de Markov que deben ser consideradas. El estado i se dice que tiene periodo d si $p_{ii}^n = 0$ si n no es divisible por d y es el mayor entero con esta propiedad. Por ejemplo, iniciando en i puede ser posible que el proceso visite al estado i sólo en los tiempos $2, 4, 6, \dots$, en cuyo caso el estado i tiene periodo de dos. Un estado con periodo 1 se dice ser aperiódico. Se puede mostrar que la periodicidad es una propiedad de clase. Esto es, si el estado i tiene periodo d , y los estados i y j se comunican, entonces el estado j también tiene periodo d .

Por otro lado, si i es recurrente se dice que es recurrente positivo si, iniciando en i , el tiempo esperado hasta que el proceso regresa al estado i es finito. Puede ser mostrado que en una cadena homogénea de Markov, con un espacio de estados, los estados recurrentes son recurrentes positivos. Los estados recurrentes positivos y aperiódicos son llamados ergódicos. El siguiente resultado proporciona las condiciones para que exista la distribución estacionaria de los estados. En una cadena de Markov ergódica e irreducible el $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^n$ existe y es independiente de i . Además, si se denota

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^n, \quad j \geq 0,$$

entonces π_j es la única solución no negativa de

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \mathbb{P}_{ij}, \quad j \geq 0,$$

donde

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1.$$

Observe, informalmente, que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_{n+1} = j\} &= \sum_{i \in \mathcal{E}} \mathbb{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\} \mathbb{P}\{X_n = i\} \\ &= \sum_{i \in \mathcal{E}} \mathbb{P}_{ij} \mathbb{P}\{X_n = i\}. \end{aligned}$$

Si cuando $n \rightarrow \infty$ se supone que se puede tomar el límite dentro de la suma, entonces

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{E}} p_{ij}^{(n)} \pi_i.$$

Por último, en el caso de una cadena de Markov irreducible con estados recurrentes positivos y periódicos, aún se tiene que π_j , $j \geq 0$, son la solución única no negativa de

$$\pi_j = \sum_i \pi_i \mathbb{P}_{ij},$$

donde $\sum_i \pi_i = 1$. Pero, ahora π_j es interpretado como la proporción de tiempo que la cadena de Markov estará en el estado j .

Considere la matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \text{AAA} & \text{AA} \\ \text{AAA} & \alpha & 1 - \alpha \\ \text{AA} & \beta & 1 - \beta \end{matrix}.$$

Las probabilidades estacionarias π_1 y π_2 tienen que satisfacer

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \alpha\pi_1 + \beta\pi_2 \\ \pi_2 &= (1 - \alpha)\pi_1 + (1 - \beta)\pi_2 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2. \end{aligned}$$

Por ejemplo si $\alpha = 0.7$ y $\beta = 0.4$, entonces las probabilidades estacionarias son $\pi_1 = 4/7$ y $\pi_2 = 3/7$. Considere, por último, la matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \text{AAA} & \text{AA} & \text{A} \\ \text{AAA} & 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ \text{AA} & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ \text{A} & 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{matrix}.$$

La proporción del tiempo que el proceso estará en promedio en cada uno de los tres estados se obtiene al resolver el sistema

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0.5\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3 \\ \pi_2 &= 0.4\pi_1 + 0.4\pi_2 + 0.3\pi_3 \\ \pi_3 &= 0.1\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.5\pi_3, \end{aligned}$$

con $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. En este caso, las soluciones son

$$\pi_1 = 21/62, \quad \pi_2 = 23/62, \quad \pi_3 = 18/62.$$

68.8 Bibliografía sugerida

Altman, E. I. (1968). "Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy". *Journal of Finance*, Vol. 23, No. 4, pp. 589-609.

Ross, S. M. (1985). Introduction to Probability Models. Academic Press, Inc., Third Edition, Orlando, Florida, USA.

68.9 Ejercicios

68.1 Cuando se parte de \mathbf{Q} para obtener \mathbf{P} , en términos generales, no hay garantía de que $\mathbf{P} \geq \mathbf{0}$. En efecto, considere

$$\mathbf{Q} = \begin{matrix} & T = 1 & T = 2 & T = 3 & T = 4 \\ \text{A} & 0.0051 & 0.011 & 0.0182 & 0.0213 \\ \text{B} & 0.00066 & 0.0138 & 0.0311 & 0.07 \\ \text{I} & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{matrix}.$$

Obtenga \mathbf{P} y discuta los resultados.

Solución: Utilice que $\mathbf{d}_2 = \mathbf{P}\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_3 = \mathbf{P}\mathbf{d}_2$ y $\mathbf{d}_4 = \mathbf{P}\mathbf{d}_3$. En este caso,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \end{pmatrix},$$

en donde las entradas de la matriz \mathbf{P} son:

$$\begin{pmatrix} p_{AA} & p_{AB} & p_{AI} \\ p_{BA} & p_{BB} & p_{BI} \\ p_{IA} & p_{IB} & p_{II} \end{pmatrix}.$$

La ecuación matricial anterior conduce a tres sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, a saber,

$$\begin{pmatrix} 0.0051 & 0.00066 & 1.00 \\ 0.011 & 0.0138 & 1.00 \\ 0.0182 & 0.0311 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{AA} \\ p_{AB} \\ p_{AI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.011 \\ 0.0182 \\ 0.0213 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0.0051 & 0.00066 & 1.00 \\ 0.011 & 0.0138 & 1.00 \\ 0.0182 & 0.0311 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{BA} \\ p_{BB} \\ p_{BI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0138 \\ 0.0311 \\ 0.067 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0.0051 & 0.00066 & 1.00 \\ 0.011 & 0.0138 & 1.00 \\ 0.0182 & 0.0311 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{IA} \\ p_{IB} \\ p_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones de los sistemas anteriores son:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \text{A} & \text{B} & \text{D} \\ \text{A} & 11.23372 & -4.496114 & -0.043325 \\ \text{B} & -28.39132 & 14.06459 & 0.149313 \\ \text{D} & 0 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

Observe también que si

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{P}\mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}_3 = \mathbf{P}\mathbf{q}_2, \quad \mathbf{q}_4 = \mathbf{P}\mathbf{q}_3,$$

entonces se puede escribir $\mathbf{P}\mathbf{Q}_{1,2,3} = \mathbf{Q}_{2,3,4}$, donde $\mathbf{Q}_{1,2,3}$ es la matriz formada por las tres primeras columnas de \mathbf{Q} ; de manera similar se define $\mathbf{Q}_{2,3,4}$. En consecuencia, $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{2,3,4}\mathbf{Q}_{1,2,3}^{-1}$, siempre y cuando $\mathbf{Q}_{1,2,3}$ tenga inversa. De manera alternativa, dado que $\mathbf{M} = \mathbf{Q}_{1,2,3}'$ donde la comilla denota la operación de transponer (o trasponer) una matriz, entonces

$$\mathbf{P} = ((\mathbf{Q}_{1,2,3}')^{-1}\mathbf{Q}_{2,3,4}')' = \mathbf{Q}_{2,3,4}\mathbf{Q}_{1,2,3}^{-1}.$$

68.2 Considere la siguiente matriz de probabilidades acumuladas de incumplimiento

$$\mathbf{Q} = \begin{matrix} & T=1 & T=2 & T=3 & T=4 \\ \text{A} & 0.0051 & 0.035087 & 0.06216499 & 0.086763 \\ \text{B} & 0.0065 & 0.016393 & 0.02678989 & 0.037583 \\ \text{I} & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{matrix}.$$

Encuentre \mathbf{P} . Verifique que, en este caso, todas las entradas de la matriz son positivas y la suma de cada renglón es igual a la unidad.

Solución:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \text{A} & \text{B} & \text{D} \\ \text{A} & 0.87 & 0.1 & 0.03 \\ \text{B} & 0.03 & 0.96 & 0.01 \\ \text{D} & 0 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

68.3 Considere un proceso estocástico de calificación crediticia, X_t , tal que

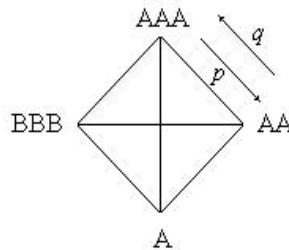
$$p_{ij}(t, T) = p_{ij}(T - t) = \mathbb{P}\{X_T = j \mid X_t = i\}, \quad i, j = A, B, I.$$

Es decir, X_t es una cadena de Markov homogénea. Suponga que

$$\mathbf{P}_{[0,1]} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & I \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ I \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.90 & 0.06 & 0.04 \\ 0.04 & 0.95 & 0.01 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Encuentre $\mathbf{P}_{[0,2]}$ y $\mathbf{P}_{[0,3]}$.

68.4 Considere el siguiente diagrama de calificaciones crediticias de un solo paso.



Sólo es posible ir, en un paso (año), de un vértice al vértice contiguo. Por ejemplo, es posible pasar de AAA a AA y viceversa, pero nunca de AAA a A. Las probabilidades de transición que aparecen en el diagrama p y q satisfacen $p + q = 1$. En este caso, se supone que cuando la empresa en cuestión (una subsidiaria) tiene calificación BBB existe un programa de rescate (de la controladora) que con cierta probabilidad puede ponerla en el estado AAA. Encuentre la matriz de transición. Diga cuántos pasos n se requieren para que $p_{ii}^{(n)} = 0$.

Solución: La matriz de transición está dada por

$$\mathbf{P}_{[0,1]} = \begin{matrix} & \begin{matrix} AAA & AA & A & BBB \end{matrix} \\ \begin{matrix} AAA \\ AA \\ A \\ BBB \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Evidentemente, $p_{ii}^{(n)} = 0$ para n impar y todo $i = AAA, AA, A, BBB$.

68.5 Muestre que en una cadena homogénea de Markov con un número finito de estados la periodicidad es una propiedad de clase.

68.6 Considere la matriz de probabilidades de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.45 & 0.48 & 0.07 \\ 0.5 & 0.70 & 0.25 \\ 0.01 & 0.50 & 0.49 \end{pmatrix}.$$

Encuentre la distribución estacionaria π_j , $J = 1, 2, 3$.

Solución: Las probabilidades estacionarias satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\pi_1 = 0.45\pi_1 + 0.05\pi_2 + 0.01\pi_3$$

$$\pi_2 = 0.48\pi_1 + 0.70\pi_2 + 0.50\pi_3$$

$$\pi_3 = 0.07\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.49\pi_3,$$

con $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. La solución de este sistema de ecuaciones es

$$\pi_1 = 0.07, \quad \pi_2 = 0.62, \quad \pi_3 = 0.31.$$

XIII. OPCIONES REALES

- 69. Opciones reales, Valuación financiera de proyectos de inversión y estrategias de negocios

CAPÍTULO 69

OPCIONES REALES, VALUACIÓN FINANCIERA DE PROYECTOS DE INVERSIÓN Y ESTRATEGIAS DE NEGOCIOS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Opcionalidad (o flexibilidad) en las decisiones de inversión de empresas
- Metodología del valor presente neto (VPN)
- Modificación del criterio del VPN con opciones reales
- Similitud entre opciones financieras y reales
- Diferentes tipos de opciones reales
- Dificultades prácticas en la valuación de las opciones reales
- Métodos numéricos para la valuación de las opciones reales
- Opción americana de abandono

69.1 Introducción

En este capítulo, la metodología de opciones reales se presenta como una herramienta indispensable para que los consejos de administración de las empresas tomen decisiones sobre proyectos de inversión o estrategias de negocios cuando existe la flexibilidad (opcionalidad) de tomar en el futuro nuevas decisiones relacionadas con dichos proyectos o estrategias como pueden ser: extender, contraer, posponer, enmendar o abandonar un proyecto.

La metodología de opciones reales, en términos generales, es la aplicación de las técnicas de valuación de opciones financieras a la valuación de proyectos de inversión y estrategias de negocios cuando existe la flexibilidad de tomar, en el futuro, nuevas decisiones relacionadas con dichos proyectos y estrategias. Así pues, la metodología de opciones reales valúa la flexibilidad, u opcionalidad, de extender, posponer, enmendar e incluso abandonar un proyecto de inversión o estrategia de negocios, nuevo o ya existente, en una fecha futura.

Avinash K. Dixit y Robert S. Pindyck, después de publicar, en forma individual, varios artículos sobre decisiones de inversión bajo incertidumbre a finales de los ochenta y principios de los noventa, deciden escribir el libro intitulado “Investment under Uncertainty” editado por Princeton University Press en 1994. El libro recopila los resultados encontrados en sus investigaciones y los presenta de manera excepcionalmente didáctica. La lectura de esta obra es obligada para contar con un panorama general sobre la teoría de opciones asociadas con diversas estrategias de inversión bajo incertidumbre. Vale la pena mencionar otro texto de referencia editado por Eduardo S. Schwartz y Lenos Trigeorgis intitulado “Real Options and Investment under Uncertainty”, publicado por MIT Press.

Por último, es importante destacar que, en los últimos años, las aplicaciones de la metodología de opciones reales en diversas áreas de las finanzas ha sido explosiva, basta revisar las revistas especializadas relacionadas, por ejemplo, con finanzas corporativas y teoría económica.

69.2 Valor presente neto y sus limitaciones

Con el criterio del valor presente neto (VPN), un nuevo proyecto o estrategia se acepta o se rechaza hoy, si $VPN > 0$ ó $VPN < 0$, respectivamente, y no existe otra posibilidad. Una vez que un proyecto es aceptado con este criterio, rígido y pasivo, los planes de inversión no se modifican, es decir, la inversión es irreversible.

Por otro lado, bajo el criterio del VPN, no se puede valuar, hoy, la posibilidad de que si el entorno de negocios y el ambiente económico son favorables dentro de cinco años un proyecto o estrategia se expanda. Simplemente, porque hoy no se sabe si en el futuro se tendrán o no condiciones favorables para tomar esta nueva decisión. Sin embargo, se puede plantear una “opción” de expansión del proyecto o estrategia, la cual se ejercerá sólo si se presentan dichas condiciones favorables. Esta opción, o flexibilidad, tiene un valor hoy que debería integrarse al valor estático que proporciona el VPN convencional a fin de valuar, en forma adecuada, un proyecto o estrategia que contempla la flexibilidad de tomar nuevas decisiones en el futuro.

Por lo anterior, en la metodología de opciones reales un proyecto o estrategia con $VPN < 0$ podría incluso ser aceptado si existe la flexibilidad de extenderlo, posponerlo, enmendarlo, etc. En tal caso, dicha flexibilidad, u opcionalidad, de tomar en el futuro una nueva decisión tiene un valor en el presente, c . Aunque $VPN < 0$, si $VPN + c > 0$, entonces es viable extender o posponer el proyecto o la estrategia. De esta manera, la metodología de opciones reales permite tomar decisiones intermedias entre aceptar o rechazar un proyecto de inversión o estrategia de negocios, como puede ser la decisión de posponer, sobre todo cuando existe incertidumbre en los resultados esperados. Diversos ejemplos de opciones reales, que surgen en la práctica, se listan a continuación:

- (i) ¿Se invierte en publicidad o no?
- (ii) ¿Se invierte en investigación y/o desarrollo?
- (iii) ¿Se expande o no la producción actual?
- (iv) ¿Se pospone un proyecto de inversión?
- (v) ¿Se abandona un proyecto de inversión existente?

Vale la pena, hacer la aclaración ingenua de que no existen mercados de opciones reales. El valor presente de los flujos esperados de un proyecto de inversión no es un activo que se compre o se venda en el mercado. Simplemente, la metodología de opciones reales es útil para valuar la flexibilidad de extender, contraer, posponer, enmendar o abandonar un proyecto subyacente de inversión.

69.2.1 Modificación del valor presente por una opción real

En esta sección, se ilustra el concepto de opción real y se discute cómo la flexibilidad en las decisiones de inversión modifica el criterio tradicional de VPN. Asimismo, se introduce el VPN modificado asociado a una opción real. De ahora en adelante, por simplicidad, se hará referencia de manera indistinta a proyectos y estrategias.

Antes de entrar de lleno en la discusión de la teoría de opciones reales, el planteamiento de algunas ideas intuitivas puede ayudar al mejor entendimiento del concepto central de opción real. Un ejemplo sencillo es siempre un buen comienzo. Suponga que la empresa P-MECS planea invertir en el desarrollo de un nuevo campo petrolero en el mar a baja profundidad, con múltiples pozos, llamado “Campo Chico” (CC). Si se utiliza el criterio convencional del VPN para evaluar la factibilidad financiera del proyecto, la empresa tiene que estimar los precios futuros del hidrocarburo. Posteriormente, con una tasa de descuento adecuada, ajustada por riesgo, la empresa debe calcular el valor presente de los flujos de efectivo esperados, ventas menos costos de producción e inversión, que se generen durante la vida del proyecto, por ejemplo, N años. Suponga que $VPN = -M$ (M millones de dólares). Desde el punto de vista rígido del criterio del VPN, el proyecto tiene que desecharse. Algunas preguntas, sin embargo, surgen al respecto ¿No se omitieron algunos aspectos relevantes sobre la posible expansión del proyecto en el futuro? Por ejemplo, que tal si estudios exploratorios recientes muestran que a mayor profundidad de CC se pueden desarrollar otros campos petroleros. No obstante, el desarrollo de otros campos de mayor profundidad sólo puede llevarse a cabo si la infraestructura pero sobre todo el “know how” de CC ya existen, para lo cual se requieren por lo menos $N/2$ años, entonces el proyecto

de CC tiene una opción asociada, a saber, la posible expansión a otros campos dentro de $N/2$ años. Esta situación proporciona un valioso elemento de opcionalidad futura.

Esta opción de expansión, o mejor dicho, esta flexibilidad que considera la posible expansión, tiene un valor hoy, c , que debe ser integrado al VPN del proyecto de CC, para obtener un valor presente neto modificado, $\overline{\text{VPN}}$, dado por

$$\overline{\text{VPN}} = \text{VPN} + c. \quad (69.1)$$

Por supuesto, no se puede saber hoy, en $t = 0$, si esta opción de expansión se va a ejercer o no. Todo dependerá del precio futuro del petróleo y, por lo tanto, del valor presente de los flujos de efectivo esperados. Si el valor de la opción de expansión en el presente, c , es mayor de M , entonces se debe aceptar el proyecto subyacente CC, aunque $\text{VPN} < 0$. Evidentemente, hay un factor de incertidumbre asociado a la volatilidad de los precios del mercado de crudo. De esta manera, la opción de expansión se puede ver como una opción europea de compra, con volatilidad constante o estocástica.

69.3 Similitud entre opciones financieras y reales

Al igual que en las opciones financieras, el valor de una opción real aumenta con el tiempo de maduración y con la volatilidad del subyacente. Esto implica que la flexibilidad de tomar nuevas decisiones, en el futuro, tiene un valor mayor cuando el horizonte de planeación aumenta y/o cuando hay “mayor” incertidumbre sobre los resultados esperados. En el cuadro 69.1 se establece la correspondencia entre los parámetros de una opción financiera y los de una opción real. De esta manera, una empresa que, a partir de t , tiene la oportunidad de invertir en un proyecto subyacente hasta el tiempo T , posee una opción europea de compra para adquirir el valor presente de los flujos de efectivo esperados, S_T , a cambio del costo de inversión, K . En la fecha de vencimiento, S_T tiene asociado un factor de incertidumbre, a saber, la volatilidad de los flujos de efectivo del proyecto. Por supuesto, la opción sólo será ejercida cuando $S_T > K$, en cuyo caso el inversionista permanece en el proyecto subyacente, en caso contrario sería conveniente abandonarlo.

Con las ideas hasta ahora expuestas y con cierto abuso del lenguaje, se podría decir que mientras las opciones financieras tratan con activos financieros, las opciones reales tratan con activos reales (unidades de negocio, obras de infraestructura, etc.) generados a través de proyectos de inversión.

Parámetro	Opción real
S_t	Valor presente de los flujos de efectivo esperados en t
K	Costo de inversión en T
r	Tasa de interés libre de riesgo
σ	Volatilidad de los flujos de efectivo del proyecto
$T - t$	Tiempo en que la oportunidad de invertir desaparece

Cuadro 69.1 Similitud entre las opciones financieras y reales.

69.4 Opción real para posponer un proyecto

Suponga que una empresa tiene que decidir entre invertir una cantidad $I_0 = M$ en un proyecto hoy, $t = 0$, o posponerlo hasta el próximo año, $t = 1$. Suponga también que una vez hecha la decisión de inversión, ésta es irreversible, lo que significa que su valor de recuperación es cero. El costo de producción del bien es N , $N > 1$. Suponga ahora que el precio del bien en el mercado puede tomar, en cualquier tiempo $t = 0, 1, 2, \dots$, los valores $N + 1$ y $N - 1$ con probabilidades q y $1 - q$, respectivamente. De esta manera, el precio esperado está dado por:

$$f = q(N + 1) + (1 - q)(N - 1) = 2q + N - 1. \quad (69.2)$$

Suponga ahora que la primera unidad del producto es vendida en $t = 0$ y que el costo del capital (WACC) es δ . Como primer paso se calcula el VPN del proyecto, para ello, por simplicidad, los

flujos de efectivo esperados f , se descuentan con el costo del capital y se resta la inversión inicial, $I_0 = M$, esto es,

$$\begin{aligned} \text{VPN} &= -I_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{2q + N - 1}{(1 + \delta)^t} \\ &= -M + (2q + N - 1) \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \delta)^t} \\ &= -M + (2q + N - 1) \left(\frac{\delta + 1}{\delta} \right). \end{aligned} \quad (69.3)$$

Considere ahora la opción de posponer la inversión hasta $t = 1$. En este caso el valor presente neto de esta alternativa es

$$\begin{aligned} \overline{\text{VPN}} &= q \max \left(\frac{-M}{1 + \delta} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{N + 1}{(1 + \delta)^t}, 0 \right) + (1 - q) \max \left(\frac{-M}{1 + \delta} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{N - 1}{(1 + \delta)^t}, 0 \right) \\ &= q \max \left(\frac{-M + (N + 1) \left(\frac{\delta + 1}{\delta} \right)}{1 + \delta}, 0 \right) \\ &\quad + (1 - q) \max \left(\frac{-M + (N - 1) \left(\frac{\delta + 1}{\delta} \right)}{1 + \delta}, 0 \right) \\ &= q \max \left(\frac{-M}{1 + \delta} + \frac{N + 1}{\delta}, 0 \right) + (1 - q) \max \left(\frac{-M}{1 + \delta} + \frac{N - 1}{\delta}, 0 \right). \end{aligned} \quad (69.4)$$

Observe que las sumatorias en $\overline{\text{VPN}}$ comienzan en $t = 1$ ya que la inversión se pospone hasta esa fecha. Si se supone que

$$N - 1 < M \left(\frac{\delta}{1 + \delta} \right) < N + 1, \quad (69.5)$$

se sigue que

$$\overline{\text{VPN}} = q \left(\frac{N + 1}{\delta} - \frac{M}{1 + \delta} \right).$$

Si, en $t = 1$, el precio aumenta a $N + 1$, el valor presente de los flujos de efectivo es $(N + 1)(\delta + 1)/\delta$, lo cual supera la inversión inicial M , mientras que el valor presente de los flujos de efectivo cuando el precio disminuye a $N - 1$ es $(N - 1)(\delta + 1)/\delta$, esta cantidad es menor que la inversión. Si se selecciona el valor obvio de N que es consistente con (69.5),

$$N = M \left(\frac{\delta}{1 + \delta} \right),$$

se tiene que

$$\overline{\text{VPN}} = q \left(\frac{N + 1}{\delta} - \frac{M}{1 + \delta} \right) = \frac{q}{\delta}.$$

Por otro lado, de (69.3), se obtiene

$$\text{VPN} = (2q - 1) \left(\frac{\delta + 1}{\delta} \right).$$

Cuando $0 < q < \frac{1}{2}$, se tiene que

$$\overline{\text{VPN}} = \frac{q}{\delta} > 0$$

y

$$\text{VPN} < 0.$$

Bajo el criterio tradicional del VPN, el proyecto tiene que ser rechazado. Sin embargo, la opción de posponer la inversión hasta $t = 1$ tiene un valor positivo. Observe también que cuando $q = \frac{1}{2}$, se tiene que $\overline{\text{VPN}} = 0$ y

$$\overline{\text{VPN}} = \text{VPN} + c$$

donde $c = 1/2\delta$ es el valor actual, de la opción real de posponer la inversión hasta $t = 1$, lo cual está de acuerdo con (69.1).

69.5 Diferentes tipos de opciones reales

Considere un movimiento Browniano $(W_t)_{t \in [0, T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Se supone que el valor presente de los flujos de efectivo esperados en t , S_t , es conducido por

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t, \quad (69.6)$$

donde $\mu(S_t, t)$ y $\sigma(S_t, t) > 0$ son funciones conocidas que se especificarán posteriormente.

69.5.1 Opción real de expansión

Una empresa podría expandir el valor presente de los flujos de efectivo esperados de un proyecto en una proporción α . Por ejemplo, mediante el incremento en el nivel de ventas futuras, precios, capacidad de la producción o base de clientes, para lo cual requiere invertir la cantidad K' en el tiempo T . Esta posibilidad estratégica tiene una opción asociada con el proyecto subyacente existente. Si $(1 + \alpha)S_T - K'$ es el valor presente neto aumentado en la proporción α menos el costo de la inversión adicional K' al tiempo T , el valor intrínseco de esta opción está dado por

$$\begin{aligned} c_e(S_T, T; \alpha, K') &= \max((1 + \alpha)S_T - K', S_T) \\ &= S_T + \max(\alpha S_T - K', 0) \\ &= S_T + \alpha \max(S_T - K, 0) \\ &= S_T + \alpha c(S_T, T; K) \end{aligned} \quad (69.7)$$

donde $K = K'/\alpha$ y $c(S_T, T; K)$ es el valor intrínseco de una opción europea de compra. En particular, si el valor presente de los flujos de efectivo esperados es conducido por un movimiento geométrico Browniano “neutral al riesgo”,

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (69.8)$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo y $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea, se tiene que el valor de la opción real de expansión, en t , está dado por

$$\begin{aligned} c_e(S_t, t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[S_T + \alpha \max(S_T - K, 0) | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} (S_T + \alpha \max(S_T - K, 0)) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[S_T | S_t] + \alpha e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (s - K) f_{S_T|S_t}(s|S_t) ds \\ &= S_t + \alpha c_{BS}(S_t, t), \end{aligned} \quad (69.9)$$

donde

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\}, \quad (69.10)$$

$$c_{BS}(S_t, t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \quad (69.11)$$

$$\Phi(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon,$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (69.12)$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}. \quad (69.13)$$

Es decir, $c_{BS}(S_t, t)$ es la fórmula de Black-Scholes para valuar una opción europea de compra.

Es importante destacar que los flujos de efectivo esperados no son un activo que se compre o venda en el mercado, lo que genera una situación de mercados incompletos. Por lo tanto, los resultados que arroja la fórmula de Black-Scholes hay que tomarlos con cierta reserva.

69.5.2 Opción real de contracción

Cuando una empresa introduce al mercado un nuevo producto (bien o servicio), usualmente tiene un plan de inversión en dos etapas. En la primera etapa, la empresa invierte una cantidad inicial, generalmente pequeña, para conducir estudios de mercado. La inversión subsecuente depende de los resultados de dichos estudios. Si, en la segunda etapa, el producto no presenta la aceptación esperada, la empresa puede ejercer la opción real de contraer la producción con el recorte de inversiones futuras.

Sea M el costo de la inversión inicial en t . Si el producto no tiene la aceptación esperada, la empresa puede invertir en la segunda etapa una cantidad más pequeña N , $N < M$, lo que traerá como consecuencia una contracción, en una proporción β , del valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto subyacente. El valor intrínseco de esta opción de contracción satisface

$$\begin{aligned} c_c(S_T, T; \beta, K, N) &= \max((1 - \beta)S_T - N, S_T - K) \\ &= S_T + \max(-(\beta S_T + N), -K) \\ &= S_T - \min(\beta S_T + N, K), \end{aligned} \quad (69.14)$$

donde $K = e^{r(T-t)}M$. Es decir, se invierte K o se invierte N ; esto último trae como consecuencia una contracción de los flujos esperados.

69.5.3 Opción real de cierre temporal

Suponga que el mercado para cierto producto depende del clima, por ejemplo, un ventilador o una chamarra. El costo variable anual, X_T , de la empresa puede ser pensado como el precio de ejercicio de una opción real de cierre temporal en T . Se supone que el costo de "cierre" es C , el cual es una proporción fija, δ , del valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto subyacente, S_T , es decir $C = \delta S_T$. Asimismo, suponga que esta opción expira en T . Si los flujos de efectivo previstos son menores que los costos variables, entonces, las operaciones se suspenden, lo cual genera un ahorro en los costos variables. En este caso, el valor intrínseco de la opción es

$$\begin{aligned} c_x(S_T, T; \delta, K) &= \max(S_T - X_T - a, S_T - C - a) \\ &= \max(S_T - X_T - a, (1 - \delta)S_T - a) \\ &= S_T + \max(-X_T, -\delta S_T) - a \\ &= S_T - \min(X_T, \delta S_T) - a, \end{aligned} \quad (69.15)$$

donde a representa los costos fijos.

69.5.4 Opción real de permanencia

En proyectos de inversión de etapas múltiples, se pasa de una etapa a la siguiente si el beneficio esperado es positivo. En caso contrario, no se invierte en la siguiente etapa ni, probablemente, en todas las demás. De esta manera, en cada etapa en que se invierte también se adquiere una opción para permanecer en el proyecto en la próxima etapa. Ésta es una opción europea (de compra) para permanecer en el proyecto si el valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto subyacente, S_T , es mayor que el costo de inversión, K . El valor intrínseco es

$$c_p(S_T, T; K) = \max(S_T - K, 0). \quad (69.16)$$

Si la dinámica del valor presente de los flujos de efectivo esperados es conducida por la ecuación diferencial estocástica (69.8), se tiene que $c_p(S_t, t) = c_{\text{BS}}(S_t, t)$.

69.5.5 Opción real de abandono

El valor de mercado de los títulos (de capital y deuda), V_T , de una empresa puede, en algunos casos, exceder el valor presente de los flujos de efectivo esperados en T , S_T . En este caso, surge la opción de vender la empresa ya que su valor de mercado excede el valor presente de los flujos de efectivo esperados. Como segundo ejemplo suponga que una empresa se encuentra operando, con pérdidas, en un ambiente de recesión económica profunda y que podría tomar la decisión de cierre total, en T , si el valor presente de los flujos de efectivo esperados en S_T es menor que cierto valor de recuperación V_T . En consecuencia, el valor intrínseco de esta opción real es

$$c_a(S_T, T) = \max(S_T, V_T). \quad (69.17)$$

Si $V_T > S_T$ la opción se ejerce. Si V_T es constante, por ejemplo, $V_t = K$, y la opción sólo puede ser ejercida en T , entonces

$$c_a(S_T, T) = \max(S_T, K) = \max(S_T - K, 0) + K.$$

En este caso,

$$c_a(S_t, t) = \int_0^\infty [\max(s - K, 0) + K] f_{S_T|S_t}(s|S_t) = c_{\text{BS}}(S_t, t) + K,$$

donde $c_{\text{BS}}(S_t, t)$ es la fórmula de Black-Scholes para valuar una opción europea de compra, dada en (69.11). El caso realmente interesante es cuando la opción real de abandono es del tipo americana. Sin embargo, esta situación será discutida en detalle hasta la sección 69.8.

69.5.6 Opción real de cambio tecnológico

Las opciones de cambio surgen cuando una empresa puede producir un mismo bien o servicio con diferentes conjuntos de insumos. Se supone que el tiempo y costo de cambiar de un conjunto de insumos a otro no representan obstáculos para la empresa. Por ejemplo, si una empresa produce electricidad puede cambiar del uso de carbón a combustóleo. Es importante destacar que estas opciones de cambio son reversibles, es decir, se puede regresar del combustóleo al carbón. El valor intrínseco de esta opción real de cambio es

$$c_s(S_T, T) = \max(S_{2T} - S_{1T} - K, 0), \quad (69.18)$$

donde S_{1T} es el valor presente de los flujos de efectivo esperados en T en la forma de producir actual, S_{2T} es el valor presente de los flujos de efectivo esperados en T en el modo alternativo de producir, y K es el costo del cambio. Si $S_{2T} > S_{1T} + K$, se ejerce la opción de cambio.

69.5.7 Opciones reales compuestas (Opciones reales sobre opciones reales)

Una opción compuesta se refiere a una opción cuyo subyacente es otra opción. La composición de opciones reales puede hacerse sobre un mismo proyecto o sobre otros proyectos relacionados. En el primer caso, suponga, por ejemplo, que se realiza una inversión inicial para un proyecto de investigación y desarrollo (R&D). Esta inversión permite comenzar el proceso de investigación. Si el proyecto tiene éxito en el futuro, entonces se extiende la inversión en investigación con la compra de equipo adicional, la contratación de más investigadores, la adquisición de más y mejores bases electrónicas de datos, etc. Ésta es una opción compuesta donde la decisión para extender la investigación en el futuro depende de los resultados de la investigación inicial. Por otra parte, con respecto al caso de opciones reales sobre otros proyectos relacionados, considere, por ejemplo, un proyecto en el que se hace una inversión inicial en investigación y desarrollo de fármacos, si el proyecto tiene éxito, se toma entonces la decisión para iniciar un proyecto de publicidad a fin de introducir el producto en el mercado. Ésta es otra opción compuesta donde la decisión futura de iniciar un proyecto publicitario para introducir un fármaco en el mercado depende de los resultados de la investigación inicial.

Como se ha mencionado anteriormente, una opción compuesta es simplemente una opción sobre una opción. El pago por ejercer una opción compuesta involucra el valor de otra opción. Una opción compuesta tiene, en consecuencia, dos fechas de vencimiento y dos precios de ejercicio. Considere, por ejemplo, el caso de una opción europea de compra sobre una opción europea de compra. En la primera fecha de vencimiento, T_1 , el tenedor de la opción tiene el derecho de comprar una nueva opción de compra a un precio de ejercicio K_1 . Asimismo, suponga que esta nueva opción de compra tiene fecha de vencimiento T_2 y precio de ejercicio K_2 . Sea $c(S_\tau, \tau; K_2)$ el valor de una opción de compra con tiempo para el vencimiento τ y precio de ejercicio K_2 y S_τ el valor presente de los flujos de efectivo esperados. Denote mediante $c_{\text{call}}(S_0)$ el valor de la opción compuesta en el momento actual, $t = 0$. En la primera fecha de vencimiento, T_1 , el valor intrínseco de la opción real compuesta está dado por:

$$c_{\text{call}}(S_{T_1}) = \max(K_1, c(S_{T_1}, T_2 - T_1; K_2)). \quad (69.19)$$

Sea S^* el precio crítico del activo tal que $c_{BS}(S^*, T_2; K_2) = K_1$. Es decir, S^* es tal que

$$K_1 = S^* \Phi(\delta) - K_2 \Phi\left(\delta - \sigma \sqrt{T_2}\right), \quad (69.20)$$

donde

$$\delta = \frac{\ln\left(\frac{S^*}{K_2}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T_2}{\sigma \sqrt{T_2}}.$$

De esta manera, cuando $S_\tau > S^*$, se tiene que $c(S_\tau, T_2 - T_1; K_2) > K_1$ y, consecuentemente, el tenedor ejercerá la opción de compra en T_1 . El valor de la opción compuesta en el momento actual depende de la probabilidad conjunta de que el precio del activo sea mayor que S^* en T_1 y mayor que K_2 en T_2 . Bajo el supuesto de que el valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto subyacente es log-normal, la fórmula de valuación para esta opción real compuesta satisface

$$\begin{aligned} c_{\text{call}}(S_0) = & S_0 \Phi_2(d, b; \rho) - K_2 e^{-rT_2} \Phi_2\left(d - \sigma \sqrt{T_1}, b - \sigma \sqrt{T_2}; \rho\right) \\ & - K_1 e^{-rT_1} \Phi\left(d - \sigma \sqrt{T_1}\right), \end{aligned}$$

donde

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{S^*}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T_1}{\sigma \sqrt{T_1}},$$

$$b = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K_2}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T_2}{\sigma \sqrt{T_2}}$$

y

$$\rho = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

En las fórmulas anteriores, r es la tasa de interés libre de riesgo, σ es la volatilidad instantánea, $\Phi(x)$ es la función de distribución acumulada normal estándar univariada, y $\Phi_2(x, y; \rho)$ es la función de distribución acumulada normal estándar bivariada con coeficiente de correlación ρ . El primer término de la fórmula de valuación del c_{call} proporciona el valor, neutral al riesgo, del activo subyacente condicionado a que $S_T > S^*$ en T_1 y $S > K_2$ en T_2 , el segundo término, de c_{call} , proporciona el pago esperado de ejercer la opción en T_2 y el último término es el pago esperado de ejercerla en T_1 . Conviene recordar que la función de distribución acumulada normal estándar bivariada se define como

$$\Phi_2(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{u^2 - 2\rho uv + v^2}{2(1-\rho^2)}\right) du dv,$$

la cual puede ser aproximada mediante el siguiente procedimiento con una precisión de hasta seis decimales. Para la distribución acumulada de una variable normal estándar se utiliza la fórmula de aproximación

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\} [a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + a_4 k^4 + a_5 k^5], & x \geq 0, \\ 1 - \Phi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

junto con

$$\begin{aligned} k &= 1/(1 + 0.2316419x), & a_1 &= 0.319381530, & a_2 &= -0.356563782, \\ a_3 &= 1.781477937, & a_4 &= -1.821255978, & a_5 &= 1.330274429. \end{aligned}$$

Para el caso de la distribución acumulada normal bivariada estándar una fórmula de aproximación de Drezner (1978) se obtiene como sigue. Se define primero

$$H(y, z; \rho) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \nu_i \nu_j G(w_i, w_j),$$

donde

$$G(w_i, w_j) = \exp\{y_1(2w_i - y_1) + z_1(2w_j - z_1) + 2\rho(w_i - y_1)(w_j - z_1)\},$$

junto con

$$\begin{aligned} y_1 &= y/\sqrt{2(1-\rho^2)}, & z_1 &= z/\sqrt{2(1-\rho^2)}, \\ \nu_1 &= 0.24840615, & w_1 &= 0.10024215, & \nu_2 &= 0.39233107, & w_2 &= 0.48281397, \\ \nu_3 &= 0.21141819, & w_3 &= 1.0609498, & \nu_4 &= 0.033246660, & w_4 &= 1.7797294, \\ \nu_5 &= 0.00082485334, & w_5 &= 2.6697604. \end{aligned}$$

Si el producto de y, z y ρ no es positivo, entonces se approxima $\Phi_2(y, z; \rho)$ utilizando las siguientes reglas:

- a) Si $y \leq 0, z \leq 0$ y $\rho \leq 0$, entonces $\Phi_2(y, z; \rho) = H(y, z; \rho)$,
- b) Si $y \leq 0, z \geq 0$ y $\rho \geq 0$, entonces $\Phi_2(y, z; \rho) = \Phi(y) - H(y, -z; -\rho)$,
- c) Si $y \geq 0, z \leq 0$ y $\rho \geq 0$, entonces $\Phi_2(y, z; \rho) = \Phi(z) - H(-y, z; -\rho)$,
- d) Si $y \geq 0, z \geq 0$ y $\rho \leq 0$, entonces $\Phi_2(y, z; \rho) = \Phi(y) + \Phi(z) - 1 + H(-y, -z; \rho)$.

En los casos en que el producto de y, z y ρ es positivo, entonces se utiliza

$$\Phi_2(y, z; \rho) = \bar{\Phi}_2(y, 0; \rho_1) + \bar{\Phi}_2(z, 0; \rho_2) - L,$$

donde $\bar{\Phi}_2(y, 0; \rho_1)$ y $\bar{\Phi}_2(z, 0; \rho_2)$ se calculan con las reglas establecidas cuando el producto de y, z y ρ no es positivo, y

$$\rho_1 = \frac{(\rho y - z)\text{sgn}(y)}{\sqrt{y^2 - 2yz\rho + z^2}}, \quad \rho_2 = \frac{(\rho z - y)\text{sgn}(z)}{\sqrt{y^2 - 2yz\rho + z^2}}, \quad L = \frac{1 - \text{sgn}(y)\text{sgn}(z)}{4}.$$

69.6 Valuación de opciones reales bajo el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales

Sea $(W_t)_{t \in [0, T]}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Sea $c = c(S_t, t)$ el valor de la opción real. Si el valor presente de los flujos de efectivo esperados en t , S_t , es conducido por el proceso

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t, \quad (69.21)$$

donde $\mu(S_t, t)$, $\sigma(S_t, t) > 0$ son funciones conocidas, entonces, bajo condiciones de equilibrio (*i.e.*, no existen oportunidades de arbitraje), c satisface la siguiente ecuación diferencial parcial determinista de segundo orden:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma(S_t, t)^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r - r c = 0, \quad (69.22)$$

sujeto a

$$c(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad c(S_t, T) = h(S_t),$$

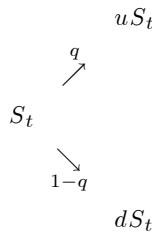
donde r es la tasa de interés libre de riesgo y $h(S_t)$ es el valor intrínseco de la opción real, el cual puede ser cualquiera de los casos examinados en la sección 69.5. Es importante destacar, que (69.22) sólo cuenta con soluciones analíticas para ciertas funciones $\mu(S_t, t)$, $\sigma(S_t, t)$ y $h(S_t)$. En general, se requiere de métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas de la ecuación diferencial parcial (69.22).

69.7 Valuación de opciones reales con el modelo binomial

Los árboles binomiales son muy útiles en la valuación de opciones reales. La mayoría de las opciones reales son de tipo americano, siendo la alternativa de árboles binomiales muy conveniente para su valuación. El método binomial es muy popular porque en cada periodo tanto el valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto subyacente, como los correspondientes valores de la opción real pueden calcularse, lo que permite tener alguna idea sobre las decisiones que se deben tomar en el futuro. Asimismo, los árboles binomiales permiten la inclusión de costos de transacción (impuestos y comisiones) de manera más sencilla que el supuesto de log-normalidad del subyacente. En el modelo binomial, los posibles valores del valor presente de los flujos de efectivo esperados son calculados en forma recursiva “hacia adelante” comenzando con el valor presente de los flujos de efectivo esperados de la primera etapa. Los posibles valores de la opción real son calculados en forma recursiva “hacia atrás” comenzando con los posibles valores de la opción en la última etapa.

69.7.1 El modelo binomial de un periodo y valuación de opciones reales

Sea S_t el valor presente de los flujos de efectivo esperados en t . Suponga que S_t puede tomar dos posibles valores uS_t y dS_t ($0 < d < 1 < u$) con probabilidades, neutrales al riesgo, q y $(1 - q)$, respectivamente. Se supone que las cantidades u y d no se modifican al transcurrir el tiempo. Con base en los parámetros anteriores, la Gráfica 69.1 muestra la posible dinámica de S_t .

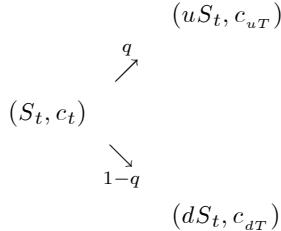


Gráfica 69.1 Expansión del árbol binomial de una etapa para S_t .

Las cantidades u y d se pueden relacionar con un parámetro de volatilidad σ y la longitud del periodo en cuestión, $T - t$, de la siguiente forma

$$u = e^{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d = \frac{1}{u}.$$

Asimismo, si c_t es el valor de la opción real en t , y los valores que ésta puede tomar en T cuando S_t aumenta o disminuye son c_{uT} y c_{dT} , respectivamente, la posible dinámica del par (S_t, c_t) se ilustra en la Gráfica 69.2.



Gráfica 69.2 Expansión del árbol binomial de una etapa para (S_t, c_t) .

En un mundo neutral al riesgo, se tiene que

$$c_t = e^{-r(T-t)} (-\Delta u S_t + c_{uT}) \quad (69.23)$$

y

$$c_t = e^{-r(T-t)} (-\Delta d S_t + c_{dT}), \quad (69.24)$$

entonces al igualar (69.23) con (69.24), se cumple que:

$$-\Delta u S_t + c_{uT} = -\Delta d S_t + c_{dT},$$

lo cual implica

$$\Delta = \frac{c_{uT} - c_{dT}}{S_t(u - d)}. \quad (69.25)$$

Si se sustituye (69.25) en (69.23), se sigue que

$$c_t = \left(c_{uT} \left(\frac{e^{r(T-t)} - d}{u - d} \right) + c_{dT} \left(\frac{u - e^{r(T-t)}}{u - d} \right) \right) e^{-r(T-t)}. \quad (69.26)$$

Si ahora se denota

$$q = \frac{e^{r(T-t)} - d}{u - d}, \quad (69.27)$$

se obtiene que

$$1 - q = \frac{u - e^{r(T-t)}}{u - d}. \quad (69.28)$$

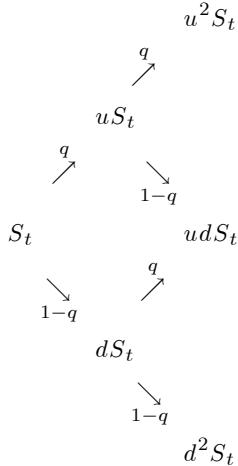
En este caso, la ecuación (69.26) se transforma en

$$c_t = (qc_{uT} + (1 - q)c_{dT}) e^{-r(T-t)}. \quad (69.29)$$

Claramente, $q > 0$. Sin embargo, puede darse el caso de que $q > 1$, dependiendo de los valores de u , d , r y $T - t$, en cuyo caso $1 - q < 0$. Las cantidades q y $1 - q$ reciben el nombre probabilidades neutrales al riesgo, pero en realidad son precios de estado.

69.7.2 El modelo binomial de dos períodos y valuación de opciones reales

El modelo binomial se puede extender a dos períodos, cada uno de longitud $(T - t)/2$. Se supone que se desea encontrar el valor de la opción real en t . En este caso las posibles trayectorias de S_t se ilustran en la Gráfica 69.3.



Gráfica 69.3 Expansión del árbol binomial de dos períodos para S_t .

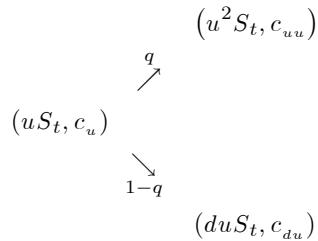
Después de repetir el procedimiento hecho en la sección 69.7.1 del presente capítulo para cada una de las ramas del segundo periodo, se obtienen dos ecuaciones similares a (69.29) dadas por

$$c_u = (qc_{uu} + (1 - q)c_{du}) e^{-r(T-t)/2} \quad (69.30)$$

y

$$c_d = (qc_{du} + (1 - q)c_{dd}) e^{-r(T-t)/2}. \quad (69.31)$$

En la gráfica 69.4 se ilustra una de las ramas del segundo árbol. Esta rama es una replica de la primera, excepto que aparece una u de más en todos los nodos, ya sea como subíndice o como variable. En tal caso, se aplica completamente la metodología aplicada al primer árbol, justo como se hizo en las ecuaciones (69.30) y (69.31).



Gráfica 69.4 Rama superior del segundo periodo del árbol binomial.

Al sustituir las ecuaciones (69.30) y (69.31) en el valor de la opción real en t , dado en (69.27), se obtiene la siguiente expresión

$$c_t = (q^2 c_{uu} + 2q(1 - q)c_{du} + (1 - q)^2 c_{dd}) e^{-r(T-t)/2}. \quad (69.32)$$

Por último, observe que el modelo se puede extender a n períodos de tal forma que

$$c_t = e^{-r(T-t)/n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k} c_{u^k d^{n-k}}.$$

69.8 Aplicación del modelo binomial en la valuación de una opción real americana de abandono

Suponga que una empresa se encuentra operando, con pérdidas, en un ambiente de recesión económica profunda y que podría tomar la decisión de cierre total si el ambiente de negocios se sigue deteriorando. Considere la opción de cerrar la empresa en cualquier momento durante los próximos $T = 3$ años a cambio de un valor de recuperación fijo, V . En este caso, la opción será ejercida si $S_t < V$. La inversión total, en $t = 0$ es $I_0 = M$ (millones de pesos) y el valor de recuperación es $V = \frac{2}{3}M$. Si $S_0 = 90$, $u = 2$, $d = u^{-1} = \frac{1}{2}$, $r = \ln(\frac{3}{2}) \approx 0.17$ y $T = 3$ años, entonces

$$q = \frac{e^{rT/3} - d}{u - d} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad 1 - q = \frac{1}{3}.$$

Los posibles valores que S_t puede tomar en el futuro se muestran en la Gráfica 69.5. Para calcular los posibles valores de la opción en el futuro, suponga, por ejemplo, que $M = 90$, entonces $V = 60$ y en la última etapa se tiene que

$$c_{u^k d^{3-k}} = \max(u^k d^{3-k} S_0, \frac{2}{3}M), \quad k = 1, 2, 3.$$

Así,

$$c_{uuu} = \max(720, 60) = 720, \quad c_{uud} = \max(180, 60) = 180,$$

$$c_{udd} = \max(45, 60) = 60 \quad \text{y} \quad c_{ddd} = \max(11.5, 60) = 60.$$

Para la segunda etapa se tiene que

$$\begin{aligned} c_{uu} &= \max\left(e^{-rT/3} [qc_{uuu} + (1-q)c_{uud}], 60\right) \\ &= \max\left(\frac{4}{9}c_{uuu} + \frac{2}{9}c_{uud}, 60\right) = 360 \end{aligned}$$

y

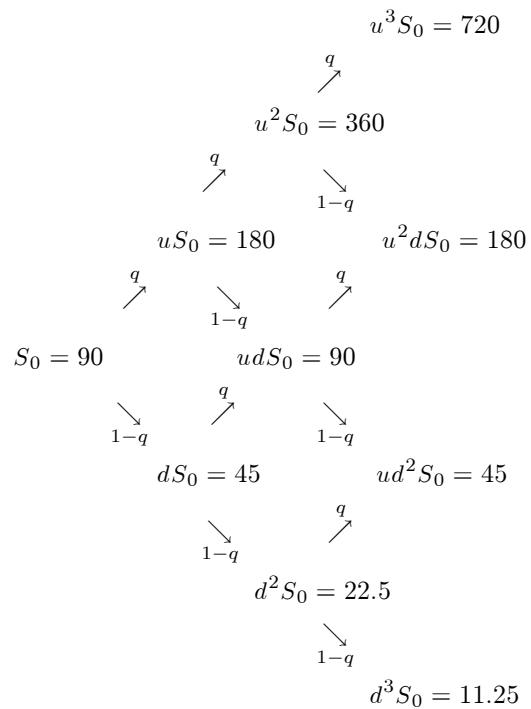
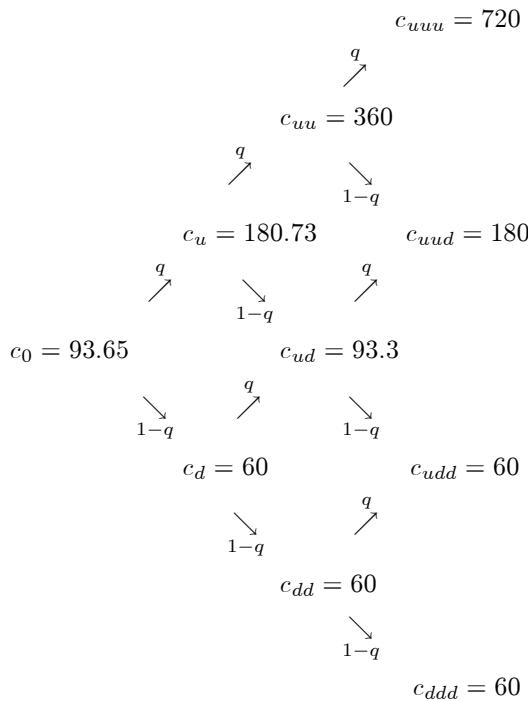
$$\begin{aligned} c_u &= \max\left(e^{-rT/3} [qc_{uu} + (1-q)c_{ud}], 60\right) \\ &= \max\left(\frac{4}{9}c_{uu} + \frac{2}{9}c_{ud}, 60\right) = 93.3. \end{aligned}$$

Los posibles valores de la opción de abandono en el futuro, calculados en forma recursiva “hacia atrás” comenzando con la última etapa, se muestran en la Gráfica 69.6. Como consecuencia de los resultados obtenidos, el proyecto tiene que ser abandonado en los eventos

$$\{d\}, \quad \{d, d\}, \quad \{u, d, d\} \quad \text{y} \quad \{d, d, d\}.$$

Observe que siempre que el valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto subyacente desciende dos veces consecutivas, la opción de abandono debe ejercerse. Asimismo, el valor presente modificado de la opción real de abandono está dado por la diferencia entre la opción real en $t = 0$ y la inversión inicial. Es decir,

$$\overline{\text{VPN}} = c_0 - I_0 = 93.65 - 90 = 3.65.$$

Gráfica 69.5 Expansión del árbol binomial de tres periodos para S_t .Gráfica 69.6 Expansión del árbol binomial de tres periodos para c .

69.9 Valuación con opciones reales de un proyecto carretero de inversión

En el esquema tradicional del VPN, la valuación de un proyecto carretero de inversión requiere de estimar el aforo vehicular en diferentes fechas futuras y calcular los ingresos. Posteriormente, los costos de mantenimiento y operación se restan de dichos ingresos para generar los flujos de efectivo futuros. Por último, dichos flujos se descuentan a una tasa adecuada y se establece un monto de inversión inicial para la obra en cuestión.

A continuación se utiliza la metodología de opciones reales para determinar cuánto tiempo se debe permanecer en un proyecto carretero de inversión, de tal manera que el valor presente neto modificado del proyecto sea positivo, $\overline{\text{VPN}} > 0$, cuando la inversión inicial de la obra es I_0 . Suponga que el valor presente de los flujos de efectivo anuales esperados (valor presente de los ingresos esperados anuales por peaje del aforo vehicular) es $S_0 = \$25,129,565.22$ dólares y la volatilidad del aforo pronosticado es de 8.7685%. En $t = 0$, el valor presente de los costos totales de mantenimiento y operación tienen una estimación de $K_0 = \$27,767,571.00$ dólares. En la primera columna se calcula el valor futuro de dichos costos con la estructura de plazos de la segunda columna, para los años subsecuentes. La cuarta columna muestra los valores de las opciones reales de permanencia con la metodología de Black-Scholes (*i.e.*, S_T se supone log-normal) para vencimientos anuales consecutivos $T = 1, 2, 3, \dots$, con los parámetros $S_0 = \$25,129,565.22$, $\sigma = 0.087685$, K_T (precio de ejercicio) y $R(0, T)$ (tasa libre de riesgo). Si se supone una inversión inicial de la obra de $I_0 = \$16,300,000.00$ dólares, se requiere permanecer en el proyecto, por lo menos, 30 años, ya que en $T = 30$ es la primera vez que se obtiene que $\text{VPN} = c(0, 30) - I_0 > 0$.

K_T	$R(0, T)$ (%)	T	$c(0, T)$
27,864,458.93	4.1798	1	323,679.52
27,961,676.04	4.1796	2	983,986.36
28,059,223.41	4.1794	3	1,705,596.91
28,157,102.14	4.1792	4	2,442,246.08
28,255,313.32	4.1790	5	3,178,450.67
28,353,858.07	4.1789	6	3,906,814.08
28,452,737.47	4.1787	7	4,623,135.65
28,551,952.65	4.1785	8	5,324,805.56
28,651,504.71	4.1783	9	6,010,135.87
28,751,394.77	4.1781	10	6,678,028.95
28,851,623.95	4.1779	11	7,327,791.19
28,952,193.36	4.1777	12	7,959,018.23
29,053,104.15	4.1775	13	8,571,519.24
29,154,357.42	4.1773	14	9,165,264.24
29,255,954.33	4.1771	15	9,740,345.99
29,357,896.01	4.1770	16	10,296,951.65
29,460,183.59	4.1768	17	10,835,341.06
29,562,818.22	4.1766	18	11,355,829.93
29,665,801.06	4.1764	19	11,858,776.62
29,769,133.25	4.1762	20	12,344,571.56
29,872,815.94	4.1760	21	12,813,628.80
29,976,850.31	4.1758	22	13,266,379.19
30,081,237.50	4.1756	23	13,703,264.82
30,185,978.70	4.1754	24	14,124,734.53
30,291,075.06	4.1752	25	14,531,240.25
30,396,527.77	4.1751	26	14,923,233.98
30,502,337.99	4.1749	27	15,301,165.44
30,608,506.93	4.1747	28	15,665,480.03
30,715,035.75	4.1745	29	16,016,617.30
30,821,925.65	4.1743	30	16,355,009.66

Cuadro 69.2 Parámetros y valor de la opción real de permanencia.

69.10 Comentarios y conclusiones

El resumen anterior de opciones reales de ninguna manera pretende ser exhaustivo. Ejemplos de opciones reales también pueden surgir en fusiones y compras de empresas. Asimismo, cuando se llevan a cabo acuerdos entre empresas, ambas partes poseen una opción de abandono del acuerdo o de extensión del mismo. Las grandes corporaciones (multinacionales) poseen las opciones para autorizar franquicias o patentes. Las empresas que emiten deuda con baja calidad crediticia tienen la opción de incumplir, parcial o totalmente, con sus obligaciones de pago. Como puede observarse, para poder valuar en forma adecuada opciones reales es necesario tener un buen dominio de tema de opciones financieras, ya sea simples (“vanilla”) o exóticas, así como de finanzas corporativas.

69.11 Bibliografía recomendada

- Amram, M. and N. Kulatilaka (1999). *Real Options Managing Strategic Investment in an Uncertain World*, Harvard Business School Press, Boston Massachusetts.
- Boer, F. P. (2002). *The Real Options, Solution. Finding Total Value in a High-Risk World*. John Wiley & Sons, Inc.
- Copeland, T. and V. Antikarov (2003). *Real Options, A Practitioner’s Guide*. Thomson Texere.
- Cuthbertson, and D. Nitzsche (2001). *Financial Engineering, Derivatives and Risk Management*. John Wiley & Sons, Inc.
- Dixit, A. K, and R. S. Pindyck. (1994). *Investment under Uncertainty*. Princeton University Press, Princeton NJ.
- Drezner, Z. (1978). “Computations of the Bivariate Normal Integral”. *Mathematics of Computation*, Vol. 32. pp. 277-279.
- Mun, J. (2002). *Real Options Analysis, Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions*. John Wiley & Sons, Inc.
- Schwartz, E. S. and L. Trigeorgis (2001). *Real Options and Investment under Uncertainty*. The Mit Press Cambridge, Massachusetts London, England.
- Trigeorgis, L. (1998). *Real Options, Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*. Cambridge, The MIT Press, Massachusetts Institute of Technology.
- Venegas-Martínez, F. and A. Fundia Aizenstat (2006). “Opciones reales, valuación financiera de proyectos y estrategias de negocios: aplicaciones al caso mexicano”. *El Trimestre Económico*, Vol. 73(2), No. 290, pp. 363-450.

69.12 Ejercicios

69.1 Considere el valor intrínseco de la opción real de contracción

$$c_c(S_T, T; \beta, K, N) = S_T - \min(\beta S_T + N, K),$$

donde $K = e^{r(T-t)}M$ y $N < M$. Demuestre que no es posible que

$$\min(\beta S_T + N, K) = K.$$

Solución: Es suficiente observar que $K = e^{r(T-t)}M > M > N$.

69.2 Si el valor presente de los flujos de efectivo esperados de un proyecto es log-normal, demuestre que el valor de una opción real compuesta $c_{\text{call}}(S_0)$, sobre dicho proyecto subyacente, está dado por

$$\begin{aligned} c_{\text{call}}(S_0) = & S_0 \Phi_2(d, b; \rho) - K_2 e^{-rT_2} \Phi_2 \left(d - \sigma \sqrt{T_1}, b - \sigma \sqrt{T_2}; \rho \right) \\ & - K_1 e^{-rT_1} \Phi \left(d - \sigma \sqrt{T_1} \right), \end{aligned}$$

donde

$$d = \frac{\ln \left(\frac{S_t}{S^*} \right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T_1}{\sigma \sqrt{T_1}},$$

$$b = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K_2}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}},$$

$$\rho = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}},$$

r es la tasa de interés libre de riesgo, σ es la volatilidad, $\Phi(x)$ es la función de distribución normal estándar univariada y $\Phi_2(x, y; \rho)$ es la función de distribución acumulada de normal estándar bivariada con coeficiente de correlación ρ .

69.3 Calcule $\Phi_2(1, 1, \sqrt{1/2})$ y $\Phi_2(1, -1, \sqrt{1/2})$ con las fórmulas de aproximación de la subsección 69.5.7.

69.4 Valúe una opción real americana de abandono de una empresa cuando $I_0 = M = 80$, $V = \frac{1}{2}M$, $S_0 = 80$, $u = 2$, $d = u^{-1} = \frac{1}{2}$, $r = \ln(3/2) \approx 0.17$ y $T = 4$ años (tiempo inicial $t = 0$). Discuta los resultados.

Solución: Es suficiente seguir el procedimiento de la sección 69.8.

69.5 Considere la opción de contracción introducida en la subsección 69.5.2. Suponga que los flujos de efectivo esperados son conducidos por un proceso de la forma:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Muestre que

$$c_c(S_t, t) = S_t e^{r(T-t)} - \alpha E [S_T 1_{\{0 \leq S_T \leq L\}} | S_t] - \alpha \Phi(d) - N,$$

donde

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{L}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$L = \frac{K - N}{\alpha}.$$

69.6 Considere la opción real de cierre temporal estudiada en la subsección 69.5.3. Suponga que los flujos de efectivo esperados son conducidos por un movimiento geométrico Browniano neutral al riesgo:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Demuestre que

$$c_x(S_t, t) = S_t e^{r(T-t)} - \delta [E [S_T 1_{\{0 \leq S_T \leq Y_T\}} | S_t] - \Phi(D_T)] - N,$$

donde

$$D_T = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{Y_T}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$Y_T = \frac{X_T}{\delta}.$$

XIV. DERIVADOS DE TASAS Y NOTAS ESTRUCTURADAS

- 70. derivados de tasas de interés y notas estructuradas

CAPÍTULO 70

DERIVADOS DE TASAS DE INTERÉS Y NOTAS ESTRUCTURADAS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Derivados de tasas de interés
- Modelo de Black
- Techos (caps), pisos (floors) y collares
- Swaptions, captions y floortions
- Bonos llamables
- Modelo de Jamshidian para valuar opciones sobre bonos
- Modelo de Ho y Lee para valuar opciones sobre bonos
- Modelo de Hull y White para valuar opciones sobre bonos
- Notas estructuradas
- Bonos cuponados flotantes con derivados inmersos
- Notas step-up
- Notas ligadas a tipos de cambio
- Notas con índices de amortización
- Notas sobre rangos en la tasa de interés
- Notas llamables (recomprables) step-up
- Notas con índices de amortización
- Notas de índices duales
- Notas flotantes apalancadas y contra-apalancadas
- Notas de flotación inversa

70.1 Introducción

Un producto derivado de tasas de interés es un instrumento financiero cuyos pagos y, por ende, su precio depende del nivel de una tasa de interés. A partir de la década de los ochenta, los productos derivados de tasas de interés han tenido un crecimiento impresionante tanto en mercados organizados como sobre mostrador. En este capítulo se estudian los derivados de tasas de interés más comunes en el mercado y se desarrollan sus fórmulas de valuación.

A diferencia de los productos derivados, cuyo valor depende exclusivamente de un subyacente, las notas estructuradas son combinaciones, o híbridos, de instrumentos de deuda y productos derivados. Por lo regular, el instrumento de deuda en cuestión es un bono cuponado flotante. Cada año aparecen en el mercado decenas de notas estructuradas que atienden necesidades específicas tanto de emisores como de inversionistas. Un ejemplo sencillo de una nota estructurada es la emisión de un bono cuponado flotante acompañado de la opción de recomprarla en una fecha futura. La opción puede ser un techo (“cap”), un piso (“floor”) o un collar (“collar”). Las opciones inmersas en las notas estructuradas determinan el vencimiento del instrumento. Es también posible que los pagos de las notas estructuradas estén ligados a un índice o a un tipo de cambio.

Desde principios de los noventa, el mercado de notas estructuradas ha mostrado un importante crecimiento debido a varias de sus características. Por ejemplo, cuando las tasas de interés se mantienen bajas, o a la baja, durante períodos prolongados de tiempo, las notas estructuradas cuyos pagos están ligados a algún índice bursátil o un tipo de cambio constituyen alternativas de inversión con rendimientos potencialmente superiores a los que prevalecen en el mercado de dinero. Muchas de las notas estructuradas en el mercado son emitidas por empresas patrocinadas por gobiernos (con líneas de crédito abiertas por parte de alguna institución

gubernamental), tienen calidad crediticia alta, en consecuencia el riesgo crédito es mínimo. De esta manera, los mercados de notas estructuradas son atractivos para los inversionistas por sus potenciales rendimientos y su alta calidad crediticia.

Algunos ejemplos de emisores estadounidenses, calificados AAA, de notas estructuradas son: Federal Home Loan Bank of Dallas, Federal National Mortgage Association, Student Loan Marketing Association. En particular, el Federal Home Loan Bank of Dallas, uno de los principales emisores de notas estructuradas del mercado estadounidense, tiene más de 175 índices o combinaciones de índices sobre los cuales se calculan los pagos. Vale también la pena mencionar que The World Bank (The International Bank for Reconstruction and Development) es un importante emisor de notas estructuradas, entre las que destacan:

- (i) Bonos cuponados flotantes llamables o con opción de recompra por el emisor (callable bonds);
- (ii) Bonos cuponados flotantes colocables o con opción de reventa por el emisor (putable bonds);
- (iii) Bonos cuponados flotantes con pisos, techos o collares;
- (iv) Bonos cuponados flotantes step-up y step-down;
- (v) Bonos cuponados flotantes ligados a índices;
- (vi) Bonos cuponados flotantes duales de tipo de cambio;
- (vii) Bonos cuponados flotantes con opciónalidad de tipo de cambio.

Es también relevante subrayar que las notas estructuradas ofrecen al emisor y a los inversionistas un medio para aislar y redistribuir riesgos. De hecho, una de las causas de su creciente demanda es su capacidad para generar justamente las exposiciones al riesgo que el cliente esté dispuesto a tolerar y que, al mismo tiempo, se mantengan sus objetivos de inversión.

Como era de esperarse, las características de estos instrumentos introducen varias complicaciones técnicas para su valuación. A diferencia de la valuación de derivados (forwards, opciones o swaps) en donde se requiere algún supuesto sobre el comportamiento futuro del subyacente, la valuación de notas estructuradas requiere de supuestos sobre el comportamiento combinado del bono, el derivado inmerso y, en ocasiones, del índice o tipo de cambio ligado a los pagos. Así pues, la valuación de una nota estructurada tiene un nivel de complejidad que requiere no sólo del entendimiento del mercado, sino también del conocimiento de herramientas y técnicas especializadas de análisis.

70.2 Aspectos regulatorios de las notas estructuradas

Las notas estructuradas recibieron particular atención por parte de los reguladores financieros a partir del primer semestre de 1994. Como resultado de los aumentos en las tasas de interés de la Reserva Federal, las notas estructuradas vinculadas a las tasas de interés experimentaron cambios radicales afectando su calendario de pagos y originando grandes e imprevistas pérdidas para los tenedores de estas notas. Los valores de mercado de estos instrumentos cayeron bajo par y sus cupones se redujeron comparados con los de otros instrumentos de deuda disponibles en el mercado. Estas pérdidas se realizaron aun cuando las notas estructuradas estaban calificadas AAA. Así, aunque el riesgo de crédito es mínimo, el riesgo de mercado y el de liquidez prevalece.

Durante el primer semestre de 1994, muchos fondos de inversión obtuvieron grandes pérdidas en notas estructuradas. Los reguladores entonces empezaron a normar el funcionamiento del mercado. La SEC (Securities and Exchange Commission) advirtió a los administradores (específicamente bancos) sobre la adecuada cuantificación y administración de los riesgos de algunos tipos de notas estructuradas. En particular, notas con flotación inversa, flotación COFI (Cost of Funds Index), flotación CMT (Constant Maturity Treasury), flotación dual de índices y flotación de rango.

Por otro lado, en el segundo semestre de 1994, la Reserva Federal emitió una circular en la cual se destaca el papel que desempeñan las notas estructuradas en la administración de riesgos y enfatiza sobre el cuidado que deben tener los bancos para la adecuada valuación de sus portafolios cuando contienen notas estructuradas.

Por esas mismas fechas, la OTS (Office of Thrift Supervision) emitió un boletín donde reconoce que las notas estructuradas pueden ser un magnífico vehículo de inversión y puntualizó sobre la importancia de llevar a cabo su valuación con distintos escenarios en la tasa de interés, recomendando que las pruebas de stress se efectuaran cada trimestre tomando en cuenta movimientos en las tasas de interés hasta de ± 400 puntos base.

70.3 Un breve repaso sobre bonos cuponados con tasa cupón flotante

Antes de entrar de lleno en el estudio de notas estructuradas vale la pena hacer un breve repaso sobre la valuación de un bono cuponado con tasa cupón flotante o bono cuponado flotante (también llamado FRN por sus iniciales en inglés “Forward Rate Note”).

Considere un bono que se coloca en $t = 0$ y paga tres cupones en las fechas futuras, T_1 , T_2 y T_3 . Suponga que el principal es $N > 0$. Si los cupones se calculan como

$$C_1 = \tilde{R}_1 N, \quad C_2 = \tilde{f}_{12} N, \quad C_3 = \tilde{f}_{13} N, \quad (70.1)$$

donde

$$\tilde{f}_{12} = f(0, T_1, T_2)(T_2 - T_1) \quad (70.2)$$

y

$$\tilde{f}_{23} = f(0, T_2, T_3)(T_3 - T_2) \quad (70.3)$$

son, respectivamente, las tasas forward en $[T_1, T_2]$ y $[T_2, T_3]$ aplicadas a sus correspondientes períodos, entonces el precio del bono satisface

$$B_{\text{flot}}^{(0)} = \frac{\tilde{R}_1 N}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{\tilde{f}_{12} N}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{(\tilde{f}_{23} + 1) N}{1 + \tilde{R}_3}, \quad (70.4)$$

donde $R(0, T_i) = \tilde{R}_i / T_i, i = 1, 2, 3$. En equilibrio, es decir, en ausencia de oportunidades de arbitraje, las tasas forward implícitas se obtienen mediante las siguientes relaciones:

$$(1 + \tilde{R}_1)(1 + \tilde{f}_{12}) = 1 + \tilde{R}_2$$

y

$$(1 + \tilde{R}_2)(1 + \tilde{f}_{23}) = 1 + \tilde{R}_3.$$

Por lo tanto,

$$\tilde{f}_{12} = \frac{1 + \tilde{R}_2}{1 + \tilde{R}_1} - 1 \quad (70.5)$$

y

$$\tilde{f}_{23} = \frac{1 + \tilde{R}_3}{1 + \tilde{R}_2} - 1. \quad (70.6)$$

Si se sustituyen (70.5) y (70.6) en (70.4) se sigue que

$$\begin{aligned} B_{\text{flot}}^{(0)} &= \frac{\tilde{R}_1 N}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{N}{1 + \tilde{R}_2} \left(\frac{1 + \tilde{R}_2}{1 + \tilde{R}_1} - 1 \right) + \frac{N}{1 + \tilde{R}_3} \left(\frac{1 + \tilde{R}_3}{1 + \tilde{R}_2} - 1 \right) + \frac{N}{1 + \tilde{R}_3} \\ &= \frac{\tilde{R}_1 N}{1 + \tilde{R}_1} + \left(\frac{N}{1 + \tilde{R}_1} - \frac{N}{1 + \tilde{R}_2} \right) + \left(\frac{N}{1 + \tilde{R}_2} - \frac{N}{1 + \tilde{R}_3} \right) + \frac{N}{1 + \tilde{R}_3} \\ &= \frac{\tilde{R}_1 N}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{N}{1 + \tilde{R}_1} \\ &= N. \end{aligned} \quad (70.7)$$

Es decir, un bono cuponado con tasa cupón flotante se negocia a la par. Observe que aunque el ejercicio anterior toma en cuenta tres períodos, el mismo resultado se obtiene para cualquier número de períodos. Evidentemente, si se valúa el bono inmediatamente después del primer pago y se conoce la curva de rendimiento $R(T_1, T)$, entonces el precio del bono es $B_{\text{flot}}^{(1)} = N$. Observe además que si se escribe $B_i = B(0, T_i) = 1/(1 + \tilde{R}_i)$, $i = 1, 2, 3$, y $N = 1$, entonces, a partir de (70.7), se tiene que

$$1 = \tilde{R}_1 B_1 + \tilde{f}_{12} B_2 + \tilde{f}_{23} B_3 + B_3. \quad (70.8)$$

Así, $R(0, T)$ puede verse como una curva de ceros, B_i , asociada al bono cuponado de tasa flotante.

70.3.1 Tasa interna de retorno asociada a un bono cuponado flotante con pagos anuales

En esta sección se establece la relación que existe entre el concepto de tasa interna de retorno (rendimiento) y el precio de un bono cuponado flotante. Observe primero que a partir de la ecuación (70.4), se tiene que

$$N = \frac{\tilde{R}_1 N}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{\tilde{f}_{12} N}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{(\tilde{f}_{23} + 1) N}{1 + \tilde{R}_3}$$

ó

$$0 = -\frac{1}{1 + \tilde{R}_1} + \frac{\tilde{f}_{12}}{1 + \tilde{R}_2} + \frac{\tilde{f}_{23} + 1}{1 + \tilde{R}_3}.$$

Si se supone que los pagos son anuales y \tilde{f}_{12} y \tilde{f}_{23} son valores de mercado y $y = \tilde{R}_1$, $(1 + y)^2 = 1 + \tilde{R}_2$ y $(1 + y)^3 = 1 + \tilde{R}_3$, entonces

$$0 = -\frac{1}{1 + y} + \frac{\tilde{f}_{12}}{(1 + y)^2} + \frac{\tilde{f}_{23} + 1}{(1 + y)^3}. \quad (70.9)$$

Es decir, y es la tasa interna de retorno asociada a un bono cuponado flotante con pagos anuales.

70.4 Opciones sobre tasas de interés

En esta sección se revisan algunos de los modelos más comunes para valuar una opción sobre un bono cupón cero. Una característica que comparten estos modelos es su similitud con la fórmula de valuación de opciones sobre acciones de Black-Scholes.

70.4.1 Modelo de Black para valuar opciones sobre tasas forward

El modelo de Black (1976) es uno de los más utilizados en la valuación de opciones europeas sobre bonos cupón cero. El supuesto principal del modelo es que el subyacente, *i.e.*, la tasa de interés, sigue una distribución lognormal, lo cual no es muy realista sobre todo cerca de la fecha de vencimiento. El modelo de Black es muy común para valuar caps y floors. Este tipo de derivados de tasas de interés son muy populares en los mercados sobre mostrador y usualmente la tasa de flotante de referencia es la tasa LIBOR.

Originalmente, el modelo de Black es formulado para valuar una opción sobre el precio futuro de una acción. Si el precio, S_t , de la acción es conducido por el movimiento geométrico Browniano

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (70.10)$$

donde $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$, $\mu \in \mathbb{R}$ es el rendimiento medio esperado de la acción y $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea de la acción, entonces el precio de una opción sobre dicha acción, con precio de ejercicio K que se inicia en t y vence en T , está dado por:

$$c(S_t, t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad (70.11)$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (70.12)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (70.13)$$

y

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

Observe que el precio futuro de la acción, $F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}$ también sigue un movimiento geométrico Browniano de la forma

$$dF_{t,T} = (\mu - r)F_{t,T}dt + \sigma F_{t,T}dW_t. \quad (70.14)$$

Si el precio futuro de la acción, $F_{t,T}$, se sustituye en (70.11), se tiene que

$$c(F_{t,T}, t) = B(t, T) [F_{t,T}\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)], \quad (70.15)$$

donde $B(t, T) = e^{-r(T-t)}$,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_{t,T}}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (70.16)$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (70.17)$$

Considere ahora $f(t, T, S)$ una tasa forward aplicable en $[T, S]$, $S > T$, con referencia en t tal que

$$df(t, T, S) = \sigma_f f(t, T, S)dW_t. \quad (70.18)$$

Suponga que un agente contratará un crédito, de monto N , durante las fechas futuras, T y S , $S > T$, a la tasa forward $f(t, T, S)$. En el presente, t , el agente desea comprar un contrato de opción europea para cubrirse contra pérdidas cuando la tasa forward de mercado $f(t, T, S)$ exceda una cota superior f_K . El pago de esta opción, en el tiempo T , está dado por

$$N(S-T)\mathbb{E}[\max(f(t, T, S) - f_K, 0) \mid \mathcal{F}_t].$$

Observe que el pago $N(S-T)\max(f(t, T, S) - f_K, 0)$ se determina en T , pero se entrega hasta S . En este caso, el precio de una opción sobre la tasa forward es

$$c(t, T, S) = B(t, S)N(S-T)[f(t, T, S)\Phi(d_1) - f_K\Phi(d_2)], \quad (70.19)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{f(t, T, S)}{f_K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_f^2(T-t)}{\sigma_f\sqrt{T-t}} \quad (70.20)$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma_f\sqrt{T-t}. \quad (70.21)$$

El factor de descuento $B(t, S)$ para traer a valor presente el pago de la opción se supone conocido. Por último, observe que la tasa forward spot se calcula mediante

$$f(t, T, S) = \frac{\ln[B(t, T)] - \ln[B(t, S)]}{S-T}. \quad (70.22)$$

70.4.2 Caps y caplets

Suponga, como antes, que un agente recibirá un crédito, de monto N , en una fecha futura, t_1 , a una tasa flotante. Suponga también que el crédito se liquida en t_2 . En el presente, t_0 , el agente podría comprar un contrato de opción, europea, para cubrirse contra pérdidas cuando la tasa forward de mercado $f(t_0, t_1, t_2)$ exceda una cota superior, o techo, especificada de antemano, f_c . El pago de esta opción, en el vencimiento t_2 , está dado por

$$N(t_2 - t_1)\mathbb{E}[\max(f(t_0, t_1, t_2) - f_c, 0)]$$

y el precio que tendría que pagar por la opción, en condiciones de equilibrio, es

$$\text{Cap}_0 = B(t_0, t_2)N(t_2 - t_1)\mathbb{E}[\max(f(t_0, t_1, t_2) - f_c, 0)].$$

Este tipo de contrato de opción recibe el nombre de cap de tasa de interés. Suponga ahora que en lugar de comparar el valor de la tasa forward de mercado con la tasa cap en un solo periodo, se compara en dos periodos, t_2 y t_3 . En este caso, el agente podría comprar dos opciones de valor total

$$\begin{aligned} \text{Cap}_0 = & B(t_0, t_2)N(t_2 - t_1)\mathbb{E}[\max(f(t_0, t_1, t_2) - f_c, 0)] \\ & + B(t_0, t_3)N(t_3 - t_2)\mathbb{E}[\max(f(t_0, t_2, t_3) - f_c, 0)]. \end{aligned}$$

Es frecuente llamar a cada opción “caplet” y la suma de ellas “cap”. En equilibrio, las tasas forward, $f(t_0, t_1, t_2)$ y $f(t_0, t_2, t_3)$, satisfacen

$$(1 + R(t_0, t_1)(t_1 - t_0))(1 + f(t_0, t_1, t_2)(t_2 - t_1)) = 1 + R(t_0, t_2)(t_2 - t_0)$$

y

$$(1 + R(t_0, t_2)(t_2 - t_0))(1 + f(t_0, t_2, t_3)(t_3 - t_2)) = 1 + R(t_0, t_3)(t_3 - t_0),$$

en donde $R(t_0, t_1)$ y $R(t_0, t_2)$ son cantidades conocidas. Dado que $R(t_0, t_i) = -\ln[B(t_0, t_i)]/(t_i - t_0)$, también se cumple que

$$f(t_0, t_1, t_2) = \frac{\ln[B(t_0, t_1)] - \ln[B(t_0, t_2)]}{t_2 - t_1} \quad (70.23)$$

y

$$f(t_0, t_2, t_3) = \frac{\ln[B(t_0, t_2)] - \ln[B(t_0, t_3)]}{t_3 - t_2}. \quad (70.24)$$

70.4.3 Valuación de caps bajo el supuesto de tasa forward lognormal

Cada caplet puede valuarse, en t , utilizando el modelo de Black (1976) en donde la variable subyacente es la tasa forward implícita, la cual se supone que tiene distribución lognormal. A continuación se introduce la siguiente notación para el precio de este tipo de opciones de tasas de interés:

$$\text{Caplet}_{t, t_{i-1}} = B(t, t_i)N(t_i - t_{i-1})\mathbb{E}[\max(f(t_0, t_{i-1}, t_i) - f_c, 0) | \mathcal{F}_t], \quad i = 2, 3.$$

En general, si t es la fecha en que se pacta un cap con n caplets, el precio del cap es la suma de los precios de los caplets, es decir,

$$\text{Cap}_t = \sum_{i=2}^{n+1} \text{Caplet}_{t, t_{i-1}}. \quad (70.25)$$

Bajo el supuesto de que la tasa forward tiene una distribución lognormal, se sigue que

$$\text{Caplet}_{t, t_{i-1}} = B(t, t_i)N(t_i - t_{i-1}) \left[f(t, t_{i-1}, t_i)\Phi(d_i) - f_c\Phi(d_i - \sigma_f\sqrt{t_i - t_{i-1}}) \right], \quad (70.26)$$

donde

$$d_i = \frac{\ln(f(t, t_{i-1}, t_i)/f_c) - (\sigma_f^2/2)(t_i - t_{i-1})}{\sigma_f\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \quad (70.27)$$

y σ_f = volatilidad de la tasa forward. En este caso, la tasa forward spot se calcula como

$$f(t, t_{i-1}, t_i) = \frac{\ln[B(t, t_{i-1})] - \ln[B(t, t_i)]}{t_i - t_{i-1}}. \quad (70.28)$$

Observe también que

$$\begin{aligned}
 \text{Caplet}_{t,t_{i-1}} &= \mathbb{E}[B(t, t_i)N(t_i - t_{i-1}) \max(f(t_0, t_{i-1}, t_i) - f_c, 0) | \mathcal{F}_t] \\
 &= \mathbb{E}[B(t, t_{i-1})B(t_{i-1}, t_i)N(t_i - t_{i-1}) \max(f(t, t_{i-1}, t_i) - f_c, 0) | \mathcal{F}_t] \\
 &= \mathbb{E}\left[B(t, t_{i-1})B(t_{i-1}, t_i)N(t_i - t_{i-1}) \max\left(\left(\frac{1}{B(t_{i-1}, t_i)} - 1\right)\frac{1}{t_i - t_{i-1}} - f_c, 0\right) | \mathcal{F}_t\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[B(t, t_{i-1})B(t_{i-1}, t_i)N \max\left(\left(\frac{1}{B(t_{i-1}, t_i)} - 1\right) - f_c(t_i - t_{i-1}), 0\right) | \mathcal{F}_t\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[B(t, t_{i-1})N \max(1 - B(t_{i-1}, t_i) - f_c B(t_{i-1}, t_i)(t_i - t_{i-1}), 0) | \mathcal{F}_t\right].
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\text{Caplet}_{t,t_{i-1}} = NB(t, t_{i-1})\mathbb{E}[\max(1 - B(t_{i-1}, t_i)(1 + f_c(t_i - t_{i-1}), 0) | \mathcal{F}_t].$$

Si se denota $\hat{f}_c = 1 + f_c(t_i - t_{i-1})$, se tiene que

$$\text{Caplet}_{t,t_{i-1}} = NB(t, t_{i-1})\mathbb{E}[\max(1 - B(t_{i-1}, t_i)\hat{f}_c, 0) | \mathcal{F}_t].$$

De esta manera un caplet puede verse también como un put sobre $B(t_{i-1}, t_i)\hat{f}_c$ con precio de ejercicio 1.

70.4.4 Floors y floorlets

De manera similar a un cap, un floor es una opción de venta que cubre al propietario de pérdidas cuando la tasa de interés es menor que un cierto piso, f_p . En el caso de un floor, si se utiliza el modelo de Black (1976), se tiene la siguiente fórmula de valuación

$$\text{Floor}_t = \sum_{i=2}^{n+1} \text{Floorlet}_{t,t_{i-1}}, \quad (70.29)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \text{Floorlet}_{t,t_{i-1}} &= B(t, t_i)N(t_{i-1} - t_i) \left[-f(t, t_{i-1}, t_i)\Phi(-d_i) \right. \\
 &\quad \left. + f_p\Phi(-d_i + \sigma_f \sqrt{t_{i-1} - t_i}) \right], \quad (70.30)
 \end{aligned}$$

donde

$$d_i = \frac{\ln(f(t, t_{i-1}, t_i)/f_p) - (\sigma_f^2/2)(t_i - t_{i-1})}{\sigma_f \sqrt{t_i - t_{i-1}}}. \quad (70.31)$$

70.4.5 Paridad cap-floor

En esta sección se establece la relación que existe entre caps, floors y swaps, la paridad cap-floor. Considere un portafolio consistente de una posición larga de un cap con tasa cap f_c y una posición corta de un floor con tasa floor f_p . Suponga que $f_c = f_p = f_K$, dado que

$$\text{Caplet}_{t,t_{i-1}} = B(t, t_i)N(t_i - t_{i-1})\mathbb{E}[\max(f(t, t_{i-1}, t_i) - f_K, 0)]$$

y

$$\text{Floorlet}_{t,t_{i-1}} = B(t, t_i)N(t_i - t_{i-1})\mathbb{E}[\max(f_K - f(t, t_{i-1}, t_i), 0)],$$

lo cual implica que

$$\text{Caplet}_{t,t_{i-1}} - \text{Floorlet}_{t,t_{i-1}} = B(t, t_i)N(t_i - t_{i-1})[f(t, t_{i-1}, t_i) - f_K].$$

Al sumar sobre i , se tiene que

$$\sum_{i=2}^{n+1} \text{Caplet}_{t,t_{i-1}} - \sum_{i=2}^{n+1} \text{Floorlet}_{t,t_{i-1}} = \sum_{i=2}^{n+1} B(t, t_i) N(t_i - t_{i-1}) [f(t, t_{i-1}, t_i) - f_K]$$

ó

$$\text{Cap}_t - \text{Floor}_t = V_t,$$

donde V_t es el precio de un swap con tasa swap f_K .

70.4.6 Collares

En un contrato de collar se establece una cota inferior, f_p , y una cota superior, f_c , sobre la tasa forward, es decir, un contrato de collar es un portafolio con una posición larga en un cap con tasa cap f_c y una posición corta en un floor con tasa floor f_p . De esta manera, un contrato de collar efectúa pagos en el vencimiento si la tasa forward excede a f_c o es menor que f_p .

70.4.7 Swaptions, captions y floortions

En un call swaption el propietario tiene el derecho de cambiar pagos de tasa flotante por pagos de tasa fija. Mientras que en un put swaption el propietario adquiere el derecho de cambiar pagos de tasa fija a pagos de tasa flotante. Captions y floortions son opciones sobre caps y floors, respectivamente.

70.5 Valuación de opciones sobre bonos: enfoque de ecuaciones diferenciales parciales

Suponga que la tasa corta o tasa instantánea, r_t , sigue una dinámica conducida por

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t, \quad (70.32)$$

donde $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ y $\mu(r_t, t)$ y $\sigma(r_t, t)$ son funciones conocidas. Si $B = B(r_t, t; T)$, es el precio de un bono cupón cero, entonces B satisface

$$\frac{\partial B}{\partial t} + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)) \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - r_t B_t = 0, \quad (70.33)$$

junto con la condición final $B(r_t, T; T) = 1$. Las condiciones de frontera dependen de la forma funcional de $\mu(r_t, t)$ y $\sigma(r_t, t)$. Si el bono paga cupones $\phi(r_t, t)$ durante cada instante dt , entonces (70.33) se modifica de la siguiente forma

$$\frac{\partial B}{\partial t} + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)) \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - r_t B_t - \phi(r_t, t) = 0.$$

Si el bono paga cupones de manera discreta $\phi(r_t, t_i)$ en los tiempos $t = t_1, t_2, \dots, t_n$, entonces (70.33) se mantiene y se incluyen las condiciones

$$B(r_t, t_i^-; T) = B(r_t, t_i^+; T) + \phi(r_t, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Observe que la ecuación (70.33) y el lema de Itô producen al siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)) \frac{\partial B}{\partial r_t} + r_t B &= 0, \\ dB &= \left[\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} + \frac{\partial B}{\partial r_t} \mu(r_t, t) \right] dt + \frac{\partial B}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) dW_t, \end{aligned}$$

lo que conduce a

$$\begin{aligned} dB - r_t B dt &= \sigma(r_t, t) \lambda(r_t, t) \frac{\partial B}{\partial r_t} dt + \frac{\partial B}{\partial r_t} \sigma(r_t, t) dW_t \\ &= \sigma(r_t, t) \frac{\partial B}{\partial r_t} (\lambda(r_t, t) dt + dW_t). \end{aligned} \quad (70.34)$$

En conclusión, si se denota

$$d\tilde{W}_t = \lambda(r_t, t) dt + dW_t,$$

entonces la tasa corta, r_t y el precio del bono, $B(r_t, t)$ satisfacen

$$dr_t = (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)) dt + \sigma(r_t, t)d\tilde{W}_t \quad (70.35)$$

y

$$dB = r_t B dt + \sigma(r_t, t) \frac{\partial B}{\partial r_t} d\tilde{W}_t. \quad (70.36)$$

De esta manera, las componentes estocásticas de (70.35) y (70.36) son idénticas. En este caso, el teorema de Girsanov es una herramienta útil que garantiza que $d\tilde{W}_t$ es también un movimiento Browniano, aunque definido en otro espacio de probabilidad, $\tilde{\mathbb{P}}$, equivalente al original \mathbb{P} en el sentido de que están definidos sobre el mismo espacio muestral Ω y comparten los mismos conjuntos de probabilidad cero. A continuación, dado que $\lambda(r_t, t)$ no es una variable observable directamente, se supone, por simplicidad, que $\lambda(r_t, t) \equiv 0$. Ahora bien, si $c = c(r_t, t; T, S)$ es el precio de una opción europea de compra sobre un bono cupón cero que se coloca en T , con precio de ejercicio K y vencimiento en S , $S > T$, entonces c satisface

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mu(r_t, t) \frac{\partial c}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 c}{\partial r_t^2} - r_t c_t = 0, \quad (70.37)$$

sujeto a

$$c(r_t, T; T, S) = \max(B(r_t, T; S) - K)$$

donde B es solución de

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \mu(r_t, t) \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - r_t B_t = 0, \quad (70.38)$$

con

$$B(r_t, T; T) = 1.$$

De esta manera el precio de la opción sobre el bono c se determina en dos etapas. En la primera etapa se resuelve una ecuación diferencial para B y, en la segunda etapa, se resuelve otra ecuación diferencial para c .

70.5.1 La ecuación diferencial parcial de un bono llamable

Si la tasa corta tiene una dinámica conducida por

$$dr_t = \mu(r_t, t) dt + \sigma(r_t, t) dW_t, \quad (70.39)$$

donde $\mu(r_t, t)$ y $\sigma(r_t, t)$ son funciones conocidas y $B_a = B_a(r_t, t; T)$, es el precio de un bono llamable que paga cupones $\phi(r_t, t_i)$ en t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, y se puede recomprar al precio $a = a(t)$ en fechas τ_j , $j = 1, 2, \dots, m$, entonces B_a

$$\frac{\partial B_a}{\partial t} + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t)\sigma(r_t, t)) \frac{\partial B_a}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B_a}{\partial r_t^2} - r_t B_a = 0 \quad (70.40)$$

junto con las condiciones

$$B_a(r_t, T; T) = 1,$$

$$B_a(r_t, t_i^-; T) = B_a(r_t, t_i^+; T) + \phi(r_t, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

y

$$B_a(r_t, t; T) \leq a(t) \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Esta última condición reduce el precio del bono. Observe que si la estructura de plazos $R(t, t_j)$, asociada al bono cuponado B_a cuando r_t sigue (70.40), es baja, entonces el precio $B_a(r_t, t_j; T)$ es alto por lo que el emisor recomprará el bono.

70.6 Modelo de Jamshidian para valuar opciones sobre bonos

En esta sección se revisa, brevemente, el modelo de Vasicek (1977) de tasa corta para valuar un bono cupón cero y el modelo de Jamshidian (1989) para valuar una opción sobre dicho bono cupón cero.

Suponga que la dinámica estocástica de la tasa corta sigue un proceso con reversión a la media dado por

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad (70.41)$$

donde $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ y a, b y σ son cantidades positivas, constantes y conocidas. La expresión (70.41) es conocida en la literatura como el modelo de Vasicek. En este caso, el precio de un bono cupón cero que se emite en t y que paga una unidad monetaria en el tiempo T está dado por:

$$B(t, T) = \mathbb{E} \left\{ \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\}. \quad (70.42)$$

En este caso para valuar bonos cupón cero se puede verificar, fácilmente, que

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s. \quad (70.43)$$

De esta manera, r_t tiene distribución normal con media (condicional)

$$\mathbb{E}[r_t | \mathcal{F}_0] = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) \quad (70.44)$$

y varianza (condicional)

$$\text{Var}[r_t | \mathcal{F}_0] = \sigma^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}). \quad (70.45)$$

Debido a la propiedad de normalidad de la tasa corta en el modelo de Vasicek se cumple que

$$B(r_t, t; T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}, \quad (70.46)$$

donde

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

y

$$A(t, T) = \frac{1}{a^2} (D(t, T) - T + t) (a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2) - \frac{\sigma^2 D(t, T)^2}{4a}.$$

Por último, la curva de rendimiento, $R(t, T)$, se calcula, mediante (70.46), como

$$R(t, T) = \frac{r_t D(t, T) - A(t, T)}{T - t}.$$

En este caso, el precio de una opción que vence en T con precio de ejercicio K sobre un bono cupón cero que se coloca en T y vence en S está dado por:

$$c = N[B(t, S)\Phi(h) - K B(t, T)\Phi(h - \sigma_P)], \quad (70.47)$$

donde

$$h = \frac{\ln\left(\frac{B(t, S)}{KB(t, T)}\right) - \frac{1}{2}\sigma_p^2}{\sigma_P} = \frac{1}{\sigma_P} \ln\left(\frac{B(t, S)}{KB(t, T)}\right) - \frac{\sigma_P}{2}. \quad (70.48)$$

El parámetro de volatilidad, σ_P se calcula mediante

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \text{Var}[\ln(B(T, S)) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \text{Var}[r_T D(T, S) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{\sigma^2}{2a} \left(1 - e^{-2a(T-t)}\right) D(T, S)^2. \end{aligned}$$

70.7 Valuación de opciones sobre bonos cuando la tasa corta sigue el modelo de Ho y Lee

En el modelo propuesto por Ho y Lee (1986) la tendencia de la tasa corta se calibra con base en los precios de mercado actuales de tal manera que los precios del mercado coincidan con los precios teóricos. Es importante destacar que, al igual que en el modelo de Vasicek, el modelo de Ho y Lee puede producir valores negativos de r_t con probabilidad positiva. En este caso, el comportamiento de la tasa corta es conducido por el siguiente proceso:

$$dr_t = h_t dt + \sigma dW_t, \quad (70.49)$$

donde $\sigma > 0$ es una cantidad constante, h_t es una función del tiempo y $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$. Es decir, la dinámica estocástica de la tasa corta sigue una distribución normal y

$$r_t = r_0 + \int_0^t h_s ds + \sigma \int_0^t dW_s.$$

En este caso, la media y varianza de la tasa corta satisfacen, respectivamente,

$$\mathbb{E}[r_t | \mathcal{F}_0] = r_0 + \int_0^t h_s ds$$

y

$$\text{Var}[r_t | \mathcal{F}_0] = \sigma^2 t,$$

donde \mathcal{F}_0 es la información relevante disponible en $t = 0$. La función h_t determina, en promedio, hacia dónde se moverá r_t en el futuro. Observe también que aunque h_t es dependiente del tiempo, es independiente del nivel de r_t . La función h_t se elegirá de tal manera que la estructura de plazos de la tasa de interés sea consistente con los precios actuales. El modelo no presenta reversión a la media y la volatilidad es constante, es decir, es independiente del nivel de la tasa corta y del tiempo. En este caso, se puede demostrar que

$$h_t = \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + \sigma^2 t \quad (70.50)$$

y el precio de un bono cupón cero está dado por

$$B(t, T) = e^{A(t, T) - r_t(T-t)}, \quad (70.51)$$

donde

$$A(t, T) = \ln\left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)}\right) - (T-t)\frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2. \quad (70.52)$$

En la práctica, se utiliza la aproximación

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) = -f(0, t) \approx \frac{\ln B(0, t + \Delta t) - \ln B(0, t)}{\Delta t}$$

con Δt pequeña. Bajo esta aproximación es frecuente cambiar el término de segundo orden $\sigma^2 t(T-t)^2/2$ por el término modificado $\sigma^2 t(T-t)[(T-t) - \Delta t]/2$.

El precio de una opción que vence en T con precio de ejercicio K sobre un bono cupón cero que se coloca en T y vence en S está dado por:

$$c = N [B(t, S)\Phi(h) - KB(t, T)\Phi(h - \sigma_P)], \quad (70.53)$$

donde

$$h = \frac{\ln\left(\frac{B(t, S)}{KB(t, T)}\right) - \frac{1}{2}\sigma_P^2}{\sigma_P} = \frac{1}{\sigma_P} \ln\left(\frac{B(t, S)}{KB(t, T)}\right) - \frac{\sigma_P}{2}. \quad (70.54)$$

El parámetro de volatilidad, σ_P se calcula mediante

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \text{Var}[\ln(B(T, S)) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \text{Var}[r_T(S-T) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= (S-T)^2 \sigma^2 (T-t). \end{aligned}$$

Así, $\sigma_P = (S-T)\sigma\sqrt{T-t}$.

70.8 Valuación de opciones sobre bonos cuando la tasa corta sigue el modelo de Hull y White

El modelo de Hull y White (1990) extiende el modelo de Vasicek (1977) para incluir un parámetro dependiente del tiempo, específicamente se supone que b es dependiente del tiempo, lo cual se denotará mediante b_t , de esta manera

$$dr_t = a(b_t - r_t)dt + \sigma dW_t. \quad (70.55)$$

Si se supone que a y σ han sido estimadas por algún método estadístico, se desea ahora seleccionar b_t de tal manera que los precios de mercado y los teóricos coincidan. En este caso, se puede demostrar que

$$b_t = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2at}), \quad (70.56)$$

equivalentemente

$$b_t = -\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln B(0, t) - \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-2at}).$$

Si $B = B(r_t, T)$ es el precio de un bono cupón cero cuya tasa corta es guiada por (70.55), entonces

$$B(r_t, t; T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)}, \quad (70.57)$$

donde

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

y

$$A(t, T) = \ln\left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)}\right) - D(t, T) \frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} D^2(t, T) (1 - e^{-2at}). \quad (70.58)$$

En la práctica, se utiliza en (70.58) la siguiente aproximación

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln B(0, t) \approx \frac{\ln B(0, t + \Delta t) - \ln B(0, t)}{\Delta t}$$

con Δt pequeña. De tal forma que

$$A(t, T) = \ln\left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)}\right) - \frac{D(t, T)}{\Delta t} \ln\left(\frac{B(0, t + \Delta t)}{B(0, t)}\right) - \frac{\sigma^2}{4a} D^2(t, T) (1 - e^{-2at}). \quad (70.59)$$

Observe también que

$$D(t, t + \Delta t) = \frac{1 - e^{-a\Delta t}}{a} \approx \Delta t,$$

ya que $e^{-a\Delta t} \approx 1 - a\Delta t$ si ΔT es suficientemente pequeña. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \frac{D(t, T)}{D(t, t + \Delta t)} \ln \left(\frac{B(0, t + \Delta t)}{B(0, t)} \right) \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{4a} D^2(t, T) (1 - e^{-2at}). \end{aligned} \quad (70.60)$$

Es frecuente utilizar en esta aproximación un término cuadrático en $D(t, T)$ modificado de tal forma que

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) - \frac{D(t, T)}{D(t, t + \Delta t)} \ln \left(\frac{B(0, t + \Delta t)}{B(0, t)} \right) \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2at}) D(t, T) [D(t, T) - D(t, t + \Delta t)]. \end{aligned} \quad (70.61)$$

El precio de una opción que vence en T con precio de ejercicio K sobre un bono cupón cero que se coloca en T y vence en S está dado por:

$$c = N [B(t, S)\Phi(h) - KB(t, T)\Phi(h - \sigma_P)], \quad (70.62)$$

donde

$$h = \frac{\ln \left(\frac{B(t, S)}{KB(t, T)} \right) - \frac{1}{2}\sigma_p^2}{\sigma_P} = \frac{1}{\sigma_P} \ln \left(\frac{B(t, S)}{KB(t, T)} \right) - \frac{\sigma_P}{2}. \quad (70.63)$$

El parámetro de volatilidad, σ_P se calcula mediante

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \text{Var}[\ln(B(T, S)) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \text{Var}[r_T D(T, S) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(T-t)}) D(T, S)^2. \end{aligned}$$

70.9 Swaps de tasas de interés con un índice de amortización, swaps step-up y step-down

Un swap de tasas de interés es un acuerdo entre dos partes para intercambiar intereses sobre un nominal N en varias fechas futuras con base en una fórmula predeterminada. Una de las partes, la posición larga, paga a la contraparte intereses a tasa fija a cambio de intereses a tasa flotante. Un swap de tasas de interés con un índice de amortización es un acuerdo entre dos partes para intercambiar intereses sobre un nominal que decrece o se amortiza de acuerdo con $\mathcal{I}(r_t)N$, donde $\mathcal{I}(\cdot)$ es una función decreciente.

Los swaps de tasas de interés con un índice de amortización son también llamados swaps del tipo step-down. Los swaps del tipo step-up son aquellos en que $\mathcal{I}(\cdot)$ es una función creciente.

70.10 Notas sobre un rango en la tasa de interés (range notes)

Las notas sobre un rango en la tasa de interés pagan al propietario intereses sobre un nominal, N , cada día que la tasa de interés, r_t , permanezca entre dos cotas preestablecidas $r_l < r_t < r_u$, hasta el vencimiento T . Suponga que la tasa corta sigue un dinámica conducida por

$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t, \quad (70.64)$$

donde $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ y $\mu(r_t, t)$ y $\sigma(r_t, t)$ son funciones conocidas. Si $V = V(r_t, T)$

es el precio de una nota sobre un rango en la tasa de interés, entonces satisface la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial r_t^2} \sigma(t, T)^2 r_t^2 + \frac{\partial V}{\partial r_t} \mu(r_t, t) r_t - r_t V + N 1_{\{r_l < r_t < r_u\}} = 0, \quad (70.65)$$

con

$$V(r_t, T) = 0.$$

70.11 Notas estructuradas formadas por bonos cupón cero con pagos ligados a un tipo de cambio

A continuación se estudia una de las notas estructuradas más comunes. Muchas de las notas estructuradas tienen opciones inmersas y su valuación es todo un reto. Asimismo, se discute de manera intuitiva por qué para inversionistas con determinadas expectativas sobre el mercado, ciertos tipos de notas estructuradas podrían ser atractivas.

Una de las notas estructuradas más simples en el mercado consiste en un bono cupón cero con pagos ligados al tipo de cambio. Suponga que una empresa local \mathcal{A} está larga en dólares (posee dólares) que compró a $\bar{S} = 11.00$ unidades de moneda doméstica (MN) por dólar. Existe el riesgo de que cuando quiera cambiar sus dólares por moneda doméstica obtenga menos de 11.00 unidades. Es decir, existe el riesgo de que sus dólares se deprecien. Suponga que una contraparte, \mathcal{B} , emite una nota estructurada a un año que paga una tasa de interés del 7% sobre un nominal predeterminado si la razón $MN/USD < 11.00$, en caso contrario paga 0%. Muchas de las notas estructuradas que se encuentran en el mercado responden a la necesidad que tienen los inversionistas de cubrir riesgos específicos. Desde luego, la empresa \mathcal{A} puede adquirir la nota para especular; si la razón $MN/USD < 11.00$, \mathcal{A} recibirá un premio, si se equivoca, estará atado a una inversión que no le generará intereses durante todo un año.

Suponga que el tipo de cambio S_t es conducido por el movimiento geométrico Browniano

$$dS_t = \alpha S_t dt + \beta S_t dV_t, \quad (70.66)$$

donde $(V_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^V)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P}^V)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ es el tipo de cambio promedio y $\beta > 0$ es la volatilidad instantánea del tipo de cambio. Suponga que la tasa corta tiene una dinámica estocástica conducida por

$$dr_t = \mu(r_t, t) dt + \sigma(r_t, t) dW_t, \quad (70.67)$$

donde $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P}^W)$ y $\mu(r_t, t)$ y $\sigma(r_t, t)$ son funciones conocidas. Por simplicidad, suponga que

$$\text{Cov}(dV_t, dW_t) = 0.$$

Sea $B = B(r_t, S_t, t; T)$ el precio de un bono cupón cero cuyo pago depende del comportamiento de S_t , específicamente si $S_t < \bar{S}$, entonces $B(r_t, S_t, T; T) = 1$, mientras que si $S_t > \bar{S}$, entonces $B(r_t, S_t, \tau; T) = 0$, donde $\tau = \min\{t | S_t > \bar{S}\}$. En este caso B satisface

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \alpha S_t \frac{\partial B}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \beta^2 \frac{\partial^2 B}{\partial S_t^2} + (\mu(r_t, t) - \lambda(r_t, t) \sigma(r_t, t)) \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - r_t B_t = 0, \quad (70.68)$$

junto con las condiciones

$$B(r_t, S_t, T; T) = 1 \quad \text{si} \quad S_t < \bar{S}$$

y

$$B(r_t, S_t, \tau; T) = 0 \quad \text{si} \quad S_t > \bar{S}, \quad \tau = \min\{t | S_t > \bar{S}\}.$$

La cantidad $\lambda(r_t, t)$ representa el premio al riesgo de mercado. Por supuesto, el planteamiento anterior puede extenderse al pago de cupones.

70.12 Notas estructuradas formadas por un bono cuponado llamable y una esquema step-up de tasas cupón

Estas notas estructuradas son bonos cuponados llamables (recomprables) por el emisor que usualmente pagan cupones mayores que un bono gubernamental cuponado que tiene los mismos tiempos de pago y maduración. Los cupones de esta nota estructurada se incrementan en puntos predeterminados en el tiempo si el emisor no recompra. Como ejemplo, considere una nota a 5 años emitida por el Federal Home Loan Bank of Dallas (FHLB) en mayo de 1994 con un nominal de 10,000.00 de dólares. La emisión es llamable en 2 años y los cupones se incrementan con base en el siguiente esquema:

6.25%	para el año 1	(1 de mayo de 1994),
6.50%	para el año 2	(1 de mayo de 1995),
7.00%	para el año 3	(1 de mayo de 1996),
8.20%	para el año 4	(1 de mayo de 1997),
9.25%	para el año 5	(1 de mayo de 1998).

La primera fecha de llamada es mayo de 1996. Por lo tanto, únicamente los dos primeros cupones están garantizados para el inversionista. Esta nota tiene una opción call europea adquirida por el emisor para recomprar el bono el 1 de mayo de 1996, 1997 ó 1998. Debido a que esta nota tiene tres fechas de llamada, tiene tres opciones de compra inmersas. De esta manera, el emisor ha comprado tres opciones que le permitirán beneficiarse cuando las tasas de interés sean bajas al recomprar, a la par, la deuda antes del vencimiento y refinanciarse con tasas menores disponibles en el mercado. De la misma manera, si las tasas se mantienen estables, es muy probable que la nota sea llamada puesto que está pagando por arriba del mercado. Por lo anterior, en lugar de ver esta nota con vencimiento dentro de 5 años, tiene más sentido verla como una inversión a 2 años, la cual puede extenderse otros 3 años. Por último observe que esta nota estructurada puede verse como un instrumento en el que el inversionista ha comprado una serie de pisos (floors) y vendido una serie de techos (caps) periódicos.

70.13 Notas estructuradas formadas por opciones para modificar el índice de amortización cuando las tasas de interés cambian

Una nota estructurada ligada a un índice de amortización (Index-Amortization Notes o IAN por sus iniciales en inglés) es un acuerdo mediante el cual el principal se amortiza de acuerdo a un programa determinado. Este programa de amortización está ligado al nivel de un índice predeterminado (usualmente LIBOR). En este tipo de notas, el emisor tiene la opción de modificar el esquema de amortización del principal a través de un cap.

En este tipo de notas si el índice predeterminado (LIBOR) se eleva por arriba de un cierto nivel R_c , entonces la vida promedio de la nota se extiende. Si, por el contrario, el índice predeeterminado se mantiene en R_c o por abajo de R_c , el principal de la nota será rápidamente amortizado, lo que hace que la vida promedio se contraiga. El resto del principal se establece de acuerdo a un esquema predeterminado.

Como ilustración, considere una nota estructurada ligada a un índice de amortización emitida por el FHLB el 15 de septiembre de 1994 y con fecha de vencimiento el 15 de septiembre de 1999. La tasa cupón se calcula trimestralmente (LIBOR a 3 meses + 42 pb) aunque el pago de cupones es anual. Sin embargo, esta nota tiene una restricción, la diferencia entre dos cupones consecutivos trimestrales no puede ser mayor de 50 pb. De tal forma que la diferencia entre cupones anuales no puede ser mayor de 200 pb. Asimismo, se establece una tasa máxima (cap) de 9.5% durante la vida del instrumento. En el primer año el principal permanece sin cambio y, en consecuencia, el esquema de amortizaciones es irrelevante. El 15 de septiembre de 1994 la tasa LIBOR a 3 meses fue de 5.0625%. Así, el cupón inicial fue de 5.4825% ($5.0625 + 0.42$). Observe también que en un ambiente sin cambios en la tasa de interés (LIBOR abajo del 6%), el 100% del principal estará intacto el primer año. El programa de amortización trimestral de la nota se muestra a continuación:

LIBOR 3 Meses	Principal Remanente
9.00 % o más	100.00%
8.75%	96.25%
8.50%	92.50%
8.00%	85.00%
7.75%	80.00%
7.50%	75.00%
7.00%	65.00%
6.50%	32.50%
6.25%	16.25%
6.00% o menos	0.00%

Cuadro 70.1 Programa de amortización trimestral de la nota.

Suponga que el inversionista compra esta nota por \$1,000,000.00 de dólares. Si el 15 de septiembre de 1995 la tasa LIBOR está en 7.50%, en virtud del Cuadro 70.1 se observa que se devuelve el 25% del principal (\$250,000), dejando un saldo en el principal de \$750,000. De acuerdo con la fórmula, se espera que el cupón del principal remanente sea de 7.92% ($7.50\% + 42$ pb), sin embargo, debido a la restricción (cap) que tenemos en el tamaño del cupón, la cantidad a pagar será de 7.4825%. Esto se obtiene de lo siguiente. El 15 de septiembre de 1994, la tasa inicial del cupón fue de 5.4825%, pero el siguiente cupón no puede ser mayor en 50 pb que el cupón precedente, así que lo más que puede valer es 50 pb cada trimestre, lo que conduce a que en un año se tiene un total de 200 pb. Por lo tanto, si las tasas se elevan rápidamente, el inversionista podría verse atado a un instrumento a 5 años con rendimientos no deseables.

Después de esta amortización parcial del principal, éste se ajusta para el siguiente periodo. Si la tasa LIBOR se eleva al 8.0% para el siguiente trimestre, entonces en virtud del Cuadro 70.1, se observa que se devuelve el 15% del principal, dejando un principal remanente de \$637,500 ($\$750,000 \times 85\%$). El pago del cupón sería de 8.42%, pero la restricción nos indica que el cupón es 7.9825%, en cuyo caso el inversionista estará obteniendo una ganancia un poco menor que la tasa LIBOR a 3 meses. Observe que al bajar la tasa LIBOR, la nota se amortiza rápidamente. Si la tasa LIBOR permanece igual, el inversionista recibe el 100% del principal y habrá obtenido una tasa inferior a la del mercado.

70.14 Notas estructuradas de índices duales

Una nota de índice dual, o nota de spread de índices, es un instrumento cuyo cupón está ligado a la diferencia (spread) entre dos índices de mercado. Los índices más comunes en este tipo de notas son:

- (i) Constant Maturity Treasury (CMT),
- (i) Treasury Bill (T-Bill),
- (i) 12-Month Treasury Average (MTA),
- (ii) Cost of Deposits Index (CODI),
- (iii) 11th District Cost of Funds Index (COFI),
- (iv) Cost of Savings Index (COSI),
- (v) London Inter Bank Offering Rates (LIBOR),
- (vi) Certificates of Deposit Indexes (CD),
- (vii) Prime Rate,
- (viii) Fannie Mae's Required Net Yield (RNY).

De la lista anterior los índices que se utilizan con mayor frecuencia son CMT, COFI y LIBOR. Este tipo de notas estructuradas se utilizan para recompensar a los inversionistas que anticipan movimientos a la alza o a la baja de las curvas de rendimiento asociadas a índices. Estas notas pueden también estar ligadas a otro tipo de índices como tipos de cambio, índices bursátiles o precios de bienes.

Como ejemplo de una nota atractiva para un inversionista con expectativas de una curva plana de rendimiento, asociada a CMT, sería una nota con tasa cupón que flota de la siguiente manera:

$$\text{Tasa cupón} = \text{CMT a 5 años} - \text{CMT a 10 años} + \text{Sobretasa}.$$

Con base en la fórmula anterior, el cupón se incrementa, junto con la sobretasa, si la curva de rendimiento entre 5 y 10 años es plana. Alternativamente, si el inversionista tiene expectativas de una curva de rendimiento creciente, una nota atractiva para él sería una que paga una tasa cupón de la siguiente forma:

$$\text{Tasa cupón} = \text{CMT a 10 años} - \text{CMT a 5 años} + \text{Sobretasa}.$$

Consideré, como ejemplo, una nota emitida en agosto de 1993 con un periodo de maduración de 5 años. Esta emisión paga una tasa cupón inicial del 5.00% para el primer año y para los cuatro años restantes la tasa cupón flota de acuerdo a:

$$\text{Tasa cupón} = \text{CMT a 5 años} - \text{CMT a 10 años} + 432 \text{ pb}.$$

Un año después de la emisión, el rendimiento de CMT a 5 años estaba en 4.70% y el rendimiento CMT a 10 años estaba en 5.34%, lo que produjo una diferencia de -64 pb. La tasa cupón de la nota para los restantes 4 años está dada por $3.68\% = 4.70\% - 5.34\% + 4.32\%$. Por supuesto, los compradores de este instrumento tenían expectativas de una curva de rendimiento todavía más plana.

70.15 Notas estructuradas con tasas flotantes apalancadas y contra-apalancadas

Las notas estructuradas con tasa flotante apalancada ofrecen al inversionista la oportunidad de recibir un rendimiento inicial por arriba del mercado y la tasa cupón se ajusta en una cantidad preestablecida $M > 1$ sobre la tasa de interés relevante (*v.g.* LIBOR). Por ejemplo, si $M = 1.5$, entonces la tasa cupón, se calcula como:

$$\text{Tasa cupón} = 1.5 \times \text{LIBOR} + 100 \text{ pb}.$$

De la misma manera, en una nota estructurada con tasa flotante contra-apalancada, la tasa cupón se ajusta en una fracción preestablecida $m < 1$ sobre la tasa de interés relevante (*v.g.* LIBOR). Si $m = 0.5$, entonces

$$\text{Tasa cupón} = 0.5 \times \text{LIBOR} + 100 \text{ pb}.$$

Los inversionistas de este tipo de notas anticipan estabilidad en la dinámica de las tasas de interés. Por supuesto, con base en estas notas simples se pueden construir otras más complicadas, por ejemplo, una nota que calcule la tasa cupón como

$$\max(4.125\%, 50\% \times \text{Tasa de bonos del Departamento del Tesoro a 10 años} + 125 \text{ pb}).$$

Es relevante destacar que este tipo de notas se desempeña mal ante volatilidades en la tasa de interés, sin importar la dirección de la volatilidad. Por lo tanto, los inversionistas que adquieren este tipo de productos pronostican que las tasas de interés serán estables en el horizonte de inversión.

70.16 Notas estructuradas de flotación inversa

Este tipo de notas estructuradas tienen una tasa cupón que varía inversamente a un índice preestablecido. Por ejemplo, si el índice preestablecido es LIBOR o COFI y éste baja, la tasa cupón aumenta y viceversa. Existen en el mercado notas de flotación inversa sobre los índices listados en la sección 70.14.

El ejemplo siguiente ilustra una nota de flotación inversa emitida por el “Federal National Mortgage Association” (FNMA) en 1992, en la cual la tasa cupón estaba ligada al nivel del COFI. La tasa cupón flotaba de la siguiente manera:

$$\text{Tasa cupón} = 11.95\% - \text{COFI}.$$

Esta tasa cupón se recalculaba mensualmente, pero los pagos eran semestrales. Esta nota vencía el 16 de noviembre de 1995. De acuerdo con la fórmula anterior, el cupón del instrumento aumentaba si el índice COFI caía y viceversa. El nivel del cupón el 16 de septiembre de 1994 fue de 8.09%, momento en que el COFI estaba en 3.86%.

70.17 Bibliografía sugerida

- Black, F. (1976). “The pricing of commodity contracts”. *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1-2, pp. 167-179
- Das, S. (1996). Structured Notes and Derivative Embedded Securities, Euromoney Publications.
- Ho, T. and S. Lee. (1986). “Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims”. *Journal of Finance*, Vol. 41, No. 5. pp. 1129-1142.
- Hull, J. C. and A. White (1990). “Pricing Interest-Rate-Derivative Securities”. *The Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, pp. 573-592.
- Jamshidian, F. (1989). “An Exact Bond Option Formula”. *The Journal of Finance*, Vol. 44, No. 1, pp. 205-209.
- McCann, K. and J. Cilia (1994). Structured Notes. Federal Reserve Bank of Chicago, Financial Markets Unit (Supervision and Regulation), manuscript.
- Vasicek, O. (1977). “An Equilibrium Characterization of the Term Structure.” *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No. 2, pp. 177-188.
- Venegas-Martínez, F. (2006). “Mercados de notas estructuradas: un análisis descriptivo y métodos de valuación.” *El Trimestre Económico*, por aparecer.

70.18 Ejercicios

70.1 Considere un bono que se coloca en $t = 0$ y paga cuatro cupones en las fechas futuras, T_1 , T_2 , T_3 y T_4 . Suponga que el principal es $N > 0$. Si los cupones se calculan a tasa flotante, muestre que en equilibrio $B_{\text{flot}}^{(0)} = N$.

70.2 Suponga que la dinámica estocástica de la tasa corta sigue un proceso de la forma

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t,$$

donde a , b y σ son cantidades positivas y W_t un movimiento Browniano. Muestre que

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s,$$

$$E[r_t | \mathcal{F}_0] = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at})$$

y

$$\text{Var}[r_t | \mathcal{F}_0] = \sigma^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}).$$

70.3 Con base en el ejercicio anterior, si $r_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2a)$ y $\text{Cov}(r_t, W_t) = 0$, obtenga $E[r_t]$ y $\text{Var}[r_t]$. Asimismo, si

$$B(t, T) = E \left\{ \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\},$$

calcule el precio de una opción que vence en T con precio de ejercicio K sobre un bono cupón cero que se coloca en T y vence en S .

70.4 Conteste la misma pregunta del ejercicio anterior cuando $r_0 \sim \mathcal{N}(b, \sigma^2/2a)$.

70.5 Si la dinámica estocástica de la tasa corta sigue un proceso de la forma

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t,$$

donde a , b y σ son cantidades positivas y W_t un movimiento Browniano, se sigue que

$$B(r_t, t; T) = e^{A(t, T) - r_t D(t, T)},$$

donde

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

y

$$A(t, T) = \frac{1}{a^2} (D(t, T) - T + t) \left(a^2 b - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) - \frac{\sigma^2 D(t, T)^2}{4a}.$$

Asimismo, el precio de una opción que vence en T con precio de ejercicio K sobre un bono cupón cero que se coloca en T y vence en S está dado por:

$$c = N [B(t, S)\Phi(h) - K B(t, T)\Phi(h - \sigma_P)],$$

donde

$$h = \frac{1}{\sigma_P} \ln \left(\frac{B(t, S)}{K B(t, T)} \right) - \frac{\sigma_P}{2}$$

y

$$\sigma_P^2 = \frac{\sigma^2}{2a} \left(1 - e^{-2a(T-t)} \right) D(T, S)^2.$$

Muestre que c y B satisfacen, respectivamente,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mu(r_t, t) \frac{\partial c}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 c}{\partial r_t^2} - r_t c_t = 0, \quad c(r_t, T; T, S) = \max(B(r_t, T; S) - K)$$

y

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \mu(r_t, t) \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(r_t, t) \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - r_t B_t = 0, \quad B(r_t, T; T) = 1.$$

XV. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA VALUAR DERIVADOS

- 71. Métodos de diferencias finitas
 - 72. Simulación Monte Carlo

CAPÍTULO 71

MÉTODOS DE DIFERENCIAS FINITAS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Valuación numérica de productos derivados
- Método explícito de diferencias finitas
- Método implícito de diferencias finitas
- Método de diferencias finitas con dos factores

71.1 Introducción

En la valuación de productos derivados, muy frecuentemente, las ecuaciones diferenciales parciales que determinan los precios de dichos instrumentos no tienen una solución analítica. Una alternativa para encontrar soluciones aproximadas consiste en utilizar métodos numéricos, en particular los llamados métodos de diferencias finitas. Es importante destacar que estos métodos pueden verse como una generalización del método binomial; siendo este el punto de vista adoptado en este capítulo. En la literatura sobre análisis numérico existen muchos métodos de diferencias finitas para encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. En este capítulo se presentan varios de estos métodos destacando sus ventajas y limitaciones.

71.2 Construcción de la malla

En lo sucesivo se estudiarán métodos de solución numérica hacia atrás (“backward”) en el tiempo. La diferencia con los métodos hacia adelante (“forward”) es simplemente un cambio de signo en la variable tiempo. La razón para considerar el tiempo hacia atrás es que las ecuaciones diferenciales parciales que caracterizan los precios de muchos productos derivados tienen asociada una condición final. En los métodos de diferencias finitas es muy frecuente utilizar una malla regular en donde los nodos están igualmente espaciados en intervalos de tiempo y/o en intervalos del precio del subyacente.

Considere una partición del intervalo $[t, T]$ en K subintervalos del mismo tamaño Δt . Es decir, $(T - t)/K = \Delta t$. Defina ahora la siguiente partición:

$$t_k = T - k\Delta t, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (71.1)$$

Observe que el primer valor de esta partición corresponde a $t_0 = T$ y el último a $t_K = t$. La partición definida en (71.1) se ilustra en la Gráfica 71.1.



Gráfica 71.1 Partición del intervalo de tiempo $[t, T]$.

Denote ahora el valor del activo mediante S_t y suponga que éste toma valores entre S_0 y S_T . Defina, en este caso,

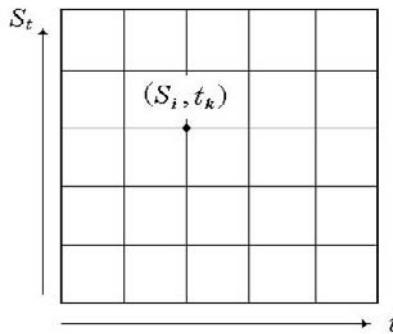
$$S_i = S_0 + i\Delta S, \quad 0 \leq i \leq I, \quad (71.2)$$

donde $\Delta S = (S_T - S_0)/I$. Observe que el valor del activo va de S_0 a S_T . Esta partición de los precios del activo se puede apreciar en la Gráfica 71.2. Si se conoce r , entonces S_T se puede calcular como $S_T = S_0 e^{rT}$.



Gráfica 71.2. Valores del activo con incrementos constantes ΔS .

Con base en las particiones $\{t_k\}_{0 \leq k \leq K}$ y $\{S_i\}_{0 \leq i \leq I}$ definidas anteriormente, cada nodo de la malla está dado por $(S_i, t_k) = (S_0 + i\Delta S, T - k\Delta t)$ donde $0 \leq i \leq I$ y $0 \leq k \leq K$. La Gráfica 71.3 muestra una malla regular $\{t_k, S_i\}_{0 \leq k \leq K, 0 \leq i \leq I}$.



Gráfica 71.3 Malla regular del método de diferencias finitas.

71.3 Cambio del precio de un derivado con respecto del tiempo

A continuación se aproxima el cambio relativo del precio del derivado con respecto del tiempo. En lo sucesivo se denotará el valor del producto derivado, en cada uno de los nodos de la malla, mediante $v_i^k = v(S_i, t_k) = v(S_0 + i\Delta S, T - k\Delta t)$. De esta manera, el superíndice se refiere a la variable tiempo y el subíndice al precio del activo. Ahora bien, por definición se tiene que

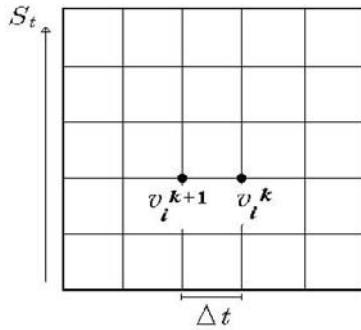
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(S_t, t+h) - v(S_t, t)}{h}.$$

Esta derivada se puede aproximar con nodos horizontales de la malla, suficientemente cercanos. Si se supone que v_i^k y v_i^{k+1} son conocidos (véase la Gráfica 71.4), la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(S_i, t_k) \approx \frac{v_i^k - v_i^{k+1}}{\Delta t}. \quad (71.3)$$

En este caso, el error¹ tiene magnitud $O(\Delta t)$.

¹ Por definición, $O((\Delta t)^n)$ satisface que $O((\Delta t)^n)/(\Delta t)^n$ tiende a una constante cuando $(\Delta t) \rightarrow 0$.

Gráfica 71.4 Aproximación de $\partial v(S_i, t_k)/\partial t$ con v_i^k y v_i^{k+1} conocidos.

La ecuación (71.3) se puede justificar como sigue. Considere una expansión en serie de Taylor de $v(S_t, t - \Delta t)$ hasta términos de segundo orden, es decir,

$$\begin{aligned} v(S_t, t - \Delta t) &= v(S_t, t) + (t - \Delta t - t) \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial t} + \frac{(t - \Delta t - t)^2}{2!} \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial t^2} \\ &= v(S_t, t) - \Delta t \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial t^2} \\ &= v(S_t, t) - \Delta t \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial t} + O((\Delta t)^2). \end{aligned} \quad (71.4)$$

La segunda derivada parcial de la expresión anterior se evalúa en $(S_t, t - \theta \Delta t)$ para algún $\theta \in [0, 1]$. Observe que por definición $O((\Delta t)^2)$ satisface que $O((\Delta t)^2)/(\Delta t)^2$ tiende a una constante cuando $(\Delta t)^2 \rightarrow 0$. Por supuesto, se supone que $v = v(S_t, t)$ tiene derivadas parciales continuas del orden requerido. Si se omite el término de error y se despeja $v(S_t, t - \Delta t)$ de la ecuación (71.4), se tiene

$$v(S_t, t - \Delta t) \approx v(S_t, t) - \Delta t \frac{\partial v}{\partial t}(S_t, t). \quad (71.5)$$

Ahora bien, en términos de los puntos de la malla, si $t = t_k$ y $S_t = S_0 + i\Delta S$, se sigue que $t_k - \Delta t = T - k\Delta t - \Delta t = T - (k + 1)\Delta t$ y

$$\begin{cases} v(S_0 + i\Delta S, t_k) = v(S_0 + i\Delta S, T - k\Delta t) = v_i^k \\ v(S_0 + i\Delta S, t_k - \Delta t) = v(S_0 + i\Delta S, T - (k + 1)\Delta t) = v_i^{k+1}, \end{cases} \quad (71.6)$$

Después de sustituir las ecuaciones anteriores en (71.5), se obtiene

$$v_i^k \approx v_i^{k+1} + \Delta t \frac{\partial v}{\partial t}(S_i, t_k). \quad (71.7)$$

En otras palabras,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(S_i, t_k) \approx \frac{v_i^k - v_i^{k+1}}{\Delta t}. \quad (71.8)$$

Esta aproximación tiene un error $O(\Delta t)$, ya que $O((\Delta t)^2)/\Delta t = O(\Delta t)$. Este resultado coincide con (71.3).

71.4 Cambio del precio de un derivado con respecto del precio del subyacente

A continuación se aproxima la razón de cambio del precio de un derivado, v , con respecto del precio del subyacente, S_t . En este caso se tienen, fundamentalmente, tres formas distintas para calcular dicha aproximación. Para ello, se examina una sección vertical de la malla fijando el tiempo, como se muestra en la Gráfica 71.5. Se destacan los siguientes tres casos. La diferencia “forward”, la cual está dada por

$$\frac{\partial v}{\partial S_t}(S_i, t_k) \approx \frac{v_{i+1}^k - v_i^k}{\Delta S}, \quad (71.9)$$

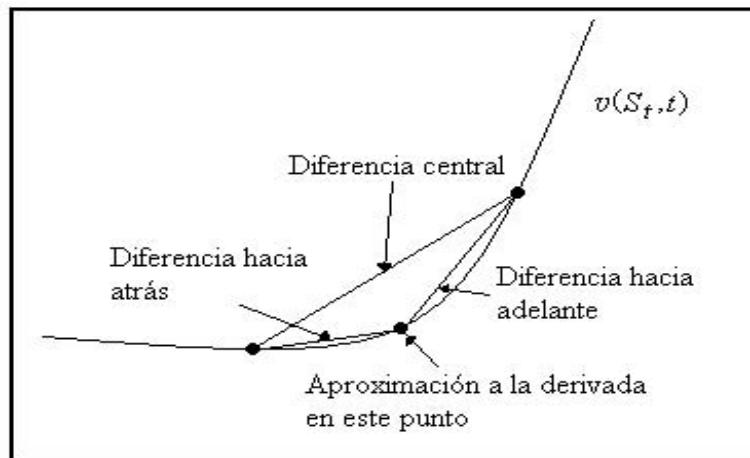
donde $v_{i+1}^k = v(S_0 + (i+1)\Delta S, t_k)$ y $v_i^k = v(S_0 + i\Delta S, t_k)$. La diferencia “backward”

$$\frac{\partial v}{\partial S_t}(S_i, t_k) \approx \frac{v_i^k - v_{i-1}^k}{\Delta S}, \quad (71.10)$$

donde $v_{i-1}^k = v(S_0 + (i-1)\Delta S, t_k)$. Por último, la diferencia central

$$\frac{\partial v}{\partial S_t}(S_i, t_k) \approx \frac{v_{i+1}^k - v_{i-1}^k}{2\Delta S}. \quad (71.11)$$

Es importante destacar que las diferencias “forward” y “backward” tiene un error $O(\Delta S)$, mientras que la diferencia central lo tiene de $O(\Delta S)^2$. A continuación se justifican las aproximaciones (71.9), (71.10) y (71.11). Todas ellas utilizan una expansión en serie de Taylor.



Gráfica 71.5 Tres diferentes formas de aproximar $\partial v(S_i, t_k)/\partial S_t$ en (S_i, t_k) .

71.4.1 Diferencia “forward”

Considere una expansión en serie de Taylor del valor del derivado $v(S_t, t)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v(S_t + \Delta S, t) &= v(S_t, t) + (S_t + \Delta S - S_t) \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S} + \frac{(S_t + \Delta S - S_t)^2}{2!} \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S^2} \\ &= v(S_t, t) + \Delta S \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{(\Delta S)^2}{2!} \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S_t^2} \\ &= v(S_t, t) + \Delta S \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} + O((\Delta S)^2). \end{aligned} \quad (71.12)$$

La segunda derivada parcial de la expresión anterior se evalúa en $(S_t + \theta\Delta S, t)$ para algún $\theta \in [0, 1]$. Si se omite el término de error en la expresión anterior, se sigue que

$$v(S_t + \Delta S, t) \approx v(S_t, t) + \Delta S \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t}. \quad (71.13)$$

En términos de valores en los nodos de la malla, se tiene que:

$$v_i^k = v(S_i, t_k) \quad \text{y} \quad v_{i+1}^k = v(S_0 + (i+1)\Delta S, t_k). \quad (71.14)$$

Por lo tanto, la aproximación (71.13) en el nodo (S_i, t_k) puede reescribirse como

$$\frac{\partial v}{\partial S_t}(S_i, t_k) \approx \frac{v_{i+1}^k - v_i^k}{\Delta S}. \quad (71.15)$$

Evidentemente, la expresión anterior tiene un error de magnitud $O(\Delta S)$.

71.4.2 Diferencia “backward”

Considere una expansión en serie de Taylor del valor del derivado $v(S_t, t)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v(S_t - \Delta S, t) &= v(S_t, t) + (S_t - \Delta S - S_t) \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{(S_t - \Delta S - S_t)^2}{2!} \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S_t^2} \\ &= v(S_t, t) - \Delta S \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} + O((\Delta S)^2). \end{aligned} \quad (71.16)$$

La segunda derivada parcial de la expresión anterior se evalúa en $(S_t - \theta\Delta S, t)$ para algún $\theta \in [0, 1]$. Si se omite el término de error y se despeja $v(S_t - \Delta S, t)$ de la ecuación anterior, se obtiene

$$v(S_t - \Delta S, t) \approx v(S_t, t) - \Delta S \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t}. \quad (71.17)$$

Ahora bien, en términos de valores en los nodos de la malla, si $S_t = S_0 + i\Delta S$, se tiene que

$$v(S_0 + (i-1)\Delta S, t_k) = v_{i-1}^k. \quad (71.18)$$

Por lo tanto, la ecuación (71.17) conduce a la siguiente aproximación:

$$\frac{\partial v}{\partial S_t}(S_i, t_k) \approx \frac{v_i^k - v_{i-1}^k}{\Delta S}, \quad (71.19)$$

la cual tiene un error de magnitud $O(\Delta S)$.

71.4.3 Diferencia central

La diferencia central utiliza las diferencias “forward” y “backward”. Por un lado, en virtud de (71.12), se obtiene que

$$v(S_t + \Delta S, t) = v(S_t, t) + \Delta S \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{(S_t + \Delta S - S_t)^2}{2!} \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S_t^2} + O((\Delta S)^3). \quad (71.20)$$

Por otro lado, con base en (71.16), se tiene que

$$v(S_t - \Delta S, t) = v(S_t, t) - \Delta S \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{(S_t - \Delta S - S_t)^2}{2!} \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S_t^2} + O((\Delta S)^3). \quad (71.21)$$

En consecuencia, si se toma la diferencia entre las ecuaciones (71.20) y (71.21), se sigue que

$$\frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} = \frac{v(S_t + \Delta S, t) - v(S_t - \Delta S, t)}{2\Delta S} + O((\Delta S)^2). \quad (71.22)$$

En términos de nodos de la malla, se obtiene la siguiente aproximación:

$$\frac{\partial v}{\partial S_t}(S_i, t_k) \approx \frac{v_{i+1}^k - v_{i-1}^k}{2\Delta S}. \quad (71.23)$$

La diferencia central tiene un error de magnitud $O((\Delta S)^2)$, el cual es menor que el de las diferencias “forward” o “backward”, como puede notarse, esto se debe a la cancelación de varios términos de las expansiones (71.20) y (71.21). Es importante destacar que en el cálculo de la diferencia central se requiere conocer los valores de v en $S_t + \Delta S$ y $S_t - \Delta S$. De esta manera, si se está en la frontera de la región, es decir, en $i = 0$ ó $i = I$, entonces no es posible calcular dicha aproximación y se tendrán que utilizar las diferencias “forward” o “backward”.

Suponga ahora que se desean utilizar los puntos S_t , $S_t + \Delta S$ y $S_t + 2\Delta S$ para aproximar la derivada de v con respecto de S_t . En este caso, se tiene que

$$v(S_t + \Delta S, t) = v(S_t, t) + \Delta S \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{(\Delta S)^2}{2!} \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S_t^2} + O((\Delta S)^3). \quad (71.24)$$

Por otro lado, si se expande v de la siguiente manera

$$\begin{aligned} v(S_t + 2\Delta S, t) &= v(S_t, t) + (S_t + 2\Delta S - S_t) \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} \\ &\quad + \frac{(S_t + 2\Delta S - S_t)^2}{2!} \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S_t^2} + O((\Delta S)^3) \\ &= v(S_t, t) + 2\Delta S \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} + 2(\Delta S)^2 \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S_t^2} + O((\Delta S)^3) \end{aligned} \quad (71.25)$$

y se omite el término de error, se tiene

$$v(S_t + 2\Delta S, t) \approx v(S_t, t) + 2\Delta S \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} - 2(\Delta S)^2 \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S_t^2}. \quad (71.26)$$

Si se considera ahora la siguiente combinación de las ecuaciones (71.25) y (71.26):

$$\begin{aligned} v(S_t + 2\Delta S, t) - 4v(S_t + \Delta S, t) &\approx v(S_t, t) + 2\Delta S \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} + 2(\Delta S)^2 \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S_t^2} \\ &\quad - 4 \left(v(S_t, t) + \Delta S \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{(\Delta S)^2}{2!} \frac{\partial^2 v(S_t, t)}{\partial S_t^2} \right) \\ &\quad - 3v(S_t, t) - 2\Delta S \frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} \end{aligned} \quad (71.27)$$

y se despeja $\partial v(S_t, t)/\partial S_t$, se obtiene

$$\frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} \approx \frac{4v(S_t + \Delta S, t) - 3v(S_t, t) - v(S_t - 2\Delta S, t)}{2\Delta S}. \quad (71.28)$$

La expresión anterior se puede expresar, en términos de nodos de la malla, como:

$$\frac{\partial v}{\partial S_t}(S_i, t_k) \approx \frac{4v_{i+1}^k - 3v_i^k - v_{i-2}^k}{2\Delta S}, \quad (71.29)$$

la cual tiene un error $O((\Delta S)^2)$. Esta aproximación es del mismo orden de ajuste que la diferencia central. De la misma manera, si lo que se desea es aproximar la derivada de v con respecto de S_t utilizando la diferencia “backward”, es decir, empleando S_t , $S_t - \Delta S$ y $S_t - 2\Delta S$, se tiene que

$$\frac{\partial v(S_t, t)}{\partial S_t} \approx \frac{-4v(S_t - \Delta S, t) + 3v(S_t, t) + v(S_t - 2\Delta S, t)}{2\Delta S} \quad (71.30)$$

o en términos de la malla

$$\frac{\partial v}{\partial S_t}(S_i, t_k) \approx \frac{-4v_{i-1}^k + 3v_i^k + v_{i-2}^k}{2\Delta S}, \quad (71.31)$$

la cual tiene un error $(O(\Delta S)^2)$. Por último, para aproximar la segunda derivada de v con respecto del precio de S_t en (S_i, t_k) , con base en la diferencia central, se puede mostrar fácilmente que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial S_t^2}(S_i, t_k) \approx \frac{v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k}{(\Delta S)^2}, \quad (71.32)$$

con un error de magnitud $(O(\Delta S)^2)$. Es importante destacar que en la práctica, la aproximación anterior se utiliza con mucha frecuencia.

71.5 El método explícito de diferencias finitas

Considere una ecuación diferencial parcial de segundo orden de la forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sigma(S_t, t) \frac{\partial^2 v}{\partial S_t^2} + \mu(S_t, t) \frac{\partial v}{\partial S_t} + \gamma(S_t, t)v = 0, \quad (71.33)$$

donde $\sigma(S_t, t) > 0$. Por supuesto, junto con (71.33) se requiere especificar una condición final $v(S_t, T) = h(S_t)$ para alguna función h . Al sustituir en la expresión anterior las aproximaciones con diferencias centrales de las derivadas parciales, obtenidas en las secciones anteriores, se tiene

$$\frac{v_i^k - v_{i-1}^{k+1}}{\Delta t} + \sigma_i^k \left(\frac{v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k}{(\Delta S)^2} \right) + \mu_i^k \left(\frac{v_{i+1}^k - v_{i-1}^k}{2\Delta S} \right) + \gamma_i^k v_i^k = 0. \quad (71.34)$$

El error en la ecuación es del orden $O(\Delta t, (\Delta S)^2)$. Las funciones μ , σ y γ se valúan en $S_i = S_0 + i\Delta S$ y en $t_k = T - k\Delta t$. Si se resuelve la ecuación anterior en términos de v_i^{k+1} , se sigue inmediatamente que

$$v_i^{k+1} = M_i^k v_{i-1}^k + (1 + N_i^k) v_i^k + P_i^k v_{i+1}^k, \quad (71.35)$$

donde

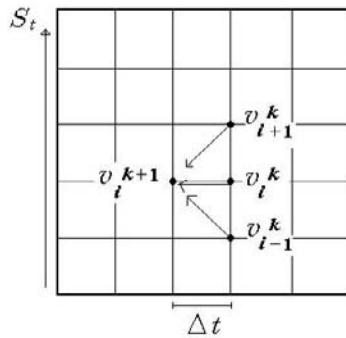
$$M_i^k = q_1 \sigma_i^k - \frac{1}{2} q_2 \mu_i^k,$$

$$N_i^k = -2q_1 \sigma_i^k + (\Delta t) \gamma_i^k,$$

$$P_i^k = q_1 \sigma_i^k + \frac{1}{2} q_2 \mu_i^k,$$

$$q_1 = \frac{\Delta t}{(\Delta S)^2} \quad \text{y} \quad q_2 = \frac{\Delta t}{\Delta S}.$$

La ecuación (71.35) se calcula en $i = 1, 2, \dots, I - 1$, es decir, en puntos interiores, puesto que v_{-1}^k y v_{I+1}^k no están definidos. Así pues, existen $I - 1$ ecuaciones para $I + 1$ variables desconocidas v_i^k . Las condiciones de frontera para $i = 0$ e $i = I$ proporcionan las dos ecuaciones faltantes. Debido a que la relación entre los valores del derivado en el tiempo t_{k+1} es función sólo de los valores del derivado en el tiempo t_k , a este método se le conoce como el método explícito de diferencias finitas (véase la Gráfica 71.6). Aunque el método explícito es fácil de programar, no siempre converge. Por último, es importante destacar que la convergencia depende de la magnitud de los intervalos de tiempo y de precios del activo subyacente, así como de las formas funcionales de μ , σ y γ .



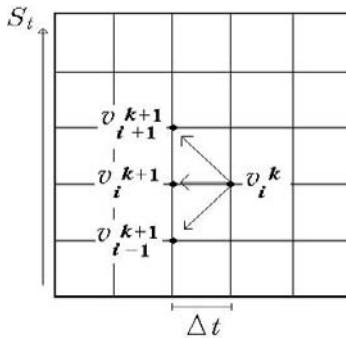
Gráfica 71.6 Método explícito de diferencias finitas.

71.6 Método implícito de diferencias finitas

El método implícito siempre converge y para aproximar v utiliza los nodos de la malla como se muestra en la Gráfica 71.7. En este caso, la relación “backward” entre los valores del derivado sobre la malla se toma de la siguiente manera

$$\frac{v_i^k - v_i^{k+1}}{\Delta t} + \sigma_i^{k+1} \left(\frac{v_{i+1}^{k+1} - 2v_i^{k+1} + v_{i-1}^{k+1}}{\Delta S^2} \right) + \mu_i^{k+1} \left(\frac{v_{i+1}^{k+1} - v_{i-1}^{k+1}}{2\Delta S} \right) + \gamma_i^{k+1} v_i^{k+1} = 0. \quad (71.36)$$

El error de este método es $O(\Delta t, (\Delta S)^2)$.



Gráfica 71.7 Método implícito de diferencias finitas.

La ecuación (71.36) se puede escribir como

$$M_i^{k+1} v_{i-1}^{k+1} + (1 + N_i^{k+1}) v_i^{k+1} + P_i^{k+1} v_{i+1}^{k+1} = v_i^k, \quad (71.37)$$

donde

$$\begin{aligned} M_i^{k+1} &= -q_1 \sigma_i^{k+1} - \frac{1}{2} q_2 \mu_i^{k+1}, \\ N_i^{k+1} &= 2q_1 \sigma_i^{k+1} - (\Delta t) \gamma_i^{k+1}, \\ P_i^{k+1} &= -q_1 \sigma_i^{k+1} + \frac{1}{2} q_2 \mu_i^{k+1}, \\ q_1 &= \frac{\Delta t}{(\Delta S)^2} \quad \text{y} \quad q_2 = \frac{\Delta t}{\Delta S}. \end{aligned}$$

Como antes, esta ecuación no se cumple para $i = 0$ ó $i = I$, las condiciones de frontera proporcionan las ecuaciones faltantes. Las diferencias principales entre este método y el método explícito son la estabilidad del método y el procedimiento de solución. Ahora, para calcular v_i^{k+1} a partir de v_i^k se requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales.

71.7 Métodos de diferencias finitas para modelos de dos factores

Muchos modelos para valuar derivados utilizan dos movimientos Brownianos. Por ejemplo, cuando el activo subyacente tiene volatilidad estocástica o cuando el derivado se descuenta a una tasa corta variable. A continuación, se presenta el método de diferencias finitas para encontrar soluciones numéricas de este tipo de derivados. En dimensiones mayores (tres o más), definitivamente es mejor utilizar el método de simulación Monte Carlo.

Considere la siguiente ecuación de dos factores de riesgo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma(S_t, r_t, t) \frac{\partial^2 v}{\partial S_t^2} + \mu(S_t, r_t, t) \frac{\partial v}{\partial S_t} + \gamma(S_t, r_t, t) v \\ + \beta(S, r, t) \frac{\partial^2 v}{\partial r_t^2} + \alpha(S_t, r_t, t) \frac{\partial^2 v}{\partial S_t \partial r_t} + \phi(S_t, r_t, t) \frac{\partial v}{\partial r_t} = 0. \end{aligned} \quad (71.38)$$

En este caso se utiliza una malla tridimensional

$$S_i = S_0 + i\Delta S, \quad r_j = r_0 + j\Delta r, \quad y, \quad t_k = T - k\Delta t.$$

El precio del derivado se escribe como $v(S_i, r_j, t_k) = v_{ij}^k$. Para resolver esta ecuación mediante diferencias finitas se requiere una condición final $v(S_i, r_j, T) = v_{ij}^0$. La ecuación (71.38) se aproximarán utilizando diferencias centrales. En consecuencia, la segunda derivada $\partial^2 v / \partial S_t \partial r_t$ se approxima mediante la expresión

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial r_t} \right)}{\partial S_t} \approx \frac{\frac{\partial v}{\partial r_t}(S_t + \Delta S, r_t, t) - \frac{\partial v}{\partial r_t}(S_t - \Delta S, r_t, t)}{2\Delta S}. \quad (71.39)$$

Observe que

$$\frac{\partial v}{\partial r_t}(S_i + \Delta S, r_j, t) \approx \frac{v_{i+1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k}{2\Delta r}$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial r_t}(S_i - \Delta S, r_j, t) \approx \frac{v_{i-1,j+1}^k - v_{i-1,j-1}^k}{2\Delta r},$$

lo cual conduce a una discretización de (71.38) de la forma

$$\left(\frac{v_{i+1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k}{2\Delta r} - \frac{v_{i-1,j+1}^k - v_{i-1,j-1}^k}{2\Delta r} \right) \frac{1}{2\Delta S} = \frac{v_{i+1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k - v_{i-1,j+1}^k + v_{i-1,j-1}^k}{4(\Delta S)(\Delta r)}.$$

Esta aproximación preserva la propiedad

$$\frac{\partial^2 v}{\partial S_t \partial r_t} = \frac{\partial^2 v}{\partial r_t \partial S_t}.$$

De esta manera, el método de diferencias explícitas para dos factores conduce a

$$\begin{aligned} \frac{v_{ij}^k - v_{ij}^{k+1}}{\Delta t} + \sigma_{ij}^k \left(\frac{v_{i+1,j}^k - 2v_{ij}^k + v_{i-1,j}^k}{(\Delta S)^2} \right) + \mu_{ij}^k \left(\frac{v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j}^k}{2\Delta S} \right) + \gamma_{ij}^k v_{ij}^k \\ + \beta_{ij}^k \left(\frac{v_{i,j+1}^k - 2v_{ij}^k + v_{i,j-1}^k}{(\Delta r)^2} \right) + \alpha_{ij}^k \left(\frac{v_{i+1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k - v_{i-1,j+1}^k + v_{i-1,j-1}^k}{4(\Delta S \Delta r)} \right) \\ + \phi_{ij}^k \left(\frac{v_{i,j+1}^k - v_{i,j-1}^k}{2\Delta r} \right) = 0 \end{aligned} \quad (71.40)$$

con un error $O(\Delta t, (\Delta S)^2, (\Delta r)^2)$.

71.8 Bibliografía sugerida

- Smith G. D. (1986). Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods (Oxford Applied Mathematics & Computing Science Series). 3rd edition. Oxford University Press.
- Wilmott, P., S. Howison, and J. Dewynne (1995). The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction. Cambridge University Press.

71.9 Ejercicios

71.1 Muestre que la segunda derivada del precio del derivado con respecto del precio del subyacente se puede aproximar, con base en la diferencia central, mediante

$$\frac{\partial^2 v}{\partial S_t^2}(S_i, t_k) \approx \frac{v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k}{(\Delta S)^2}.$$

71.2 De acuerdo con el método explícito de diferencias finitas desarrollado en la sección 71.5, se tiene que

$$v_i^{k+1} = M_i^k v_{i-1}^k + (1 + N_i^k) v_i^k + P_i^k v_{i+1}^k.$$

Determine M_i , N_i y P_i para la ecuación diferencial parcial estándar de Black-Scholes.

71.3 Despeje v_{ij}^{k+1} de la ecuación (71.40). (La solución es casi inmediata).

CAPÍTULO 72

SIMULACIÓN MONTE CARLO

Conceptos básicos de este capítulo:

- Método de Monte Carlo
- Generación de números aleatorios
- Prueba χ^2 de aleatoriedad
- Prueba de Kolmogorov-Smirnov de aleatoriedad
- Valuación de derivados con el método Monte Carlo

72.1 Introducción

El método de Monte Carlo permite encontrar soluciones aproximadas de problemas matemáticos que involucran variables aleatorias dependientes del tiempo. Aunque las bases teóricas del método se conocían desde hace mucho tiempo, no fue sino hasta la aparición de las computadoras que éste empezó a cobrar un mayor interés. No obstante, la primera introducción formal se debe a Metropolis y Ulam en su artículo “The Monte Carlo Method” publicado en 1949 en el “Journal of the American Statistical Association”.

El Método Monte Carlo tiene dos características principales:

- (i) requiere un procedimiento para calcular realizaciones o trayectorias de variables aleatorias, dependientes del tiempo mediante ensayos independientes;
- (ii) usualmente, el error es proporcional a la magnitud; $\sqrt{D/N}$, donde D es una constante y N es el número de ensayos.

Es importante destacar, con respecto a (ii), que para disminuir el error 10 veces es necesario incrementar N a 100. Por supuesto, diferentes valores de D corresponden a diferentes procedimientos de cálculo, por lo que es importante diseñar uno que tenga asociado un valor pequeño de D . Asimismo, la eficiencia del método de simulación Monte Carlo depende, en gran medida, de la calidad de los números aleatorios generados, es decir, se requiere que posean un alto grado de aleatoriedad. A continuación se presentan algunos métodos para generar números aleatorios y seudo-aleatorios.

72.2 Números aleatorios

Una posibilidad para generar números aleatorios provenientes de una distribución uniforme consiste en utilizar un dispositivo que produce pulsos (ruidos) electrónicos. Si durante un intervalo fijo de tiempo el número de pulsos que sobrepasan un umbral determinado es par, se asocia un cero, mientras que si se excede dicho umbral con un número de pulsos impar, se asocia un uno. Si se tienen m dispositivos de este tipo que funcionan paralelamente y producen ceros y unos, entonces la proporción de unos provee un valor de una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $[0,1]$.

72.3 Números seudo-aleatorios

Como se mencionó antes, la eficiencia del método de Monte Carlo depende de un procedimiento para generar números aleatorios de la mejor manera posible, para lo cual se han desarrollado un gran número de investigaciones teóricas. Al respecto, John von Neumann estableció lo que se conoce como el *pecado original* de la generación de números aleatorios, el cual consiste en utilizar

algoritmos aritméticos para su producción. En lo sucesivo, los números aleatorios que se generen con algún algoritmo aritmético serán llamados números seudo-aleatorios.

72.4 Método de congruencias lineales para la generación de números seudo-aleatorios

En esta sección se presenta el método de congruencias, o residuos. Este es uno de los algoritmos más simples y conocidos para generar números aleatorios. A continuación se describe dicho algoritmo. Defina, primero,

$$X_{n+1} \equiv (aX_n + b) \pmod{m}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad X_0 \text{ dado,} \quad (72.1)$$

donde los números enteros a, b y m son constantes. Observe que la operación aritmética que establece la ecuación anterior es

$$\frac{aX_n + b}{m} = z + \frac{\text{residuo}}{m},$$

donde z es un número entero y

$$X_{n+1} = \text{residuo}. \quad (72.2)$$

Considere ahora el siguiente ejemplo de un generador congruencial lineal. Sean $b = 0$, $a = 16807 = 7^5$ y $m = 2^{31} - 1$, entonces (72.1) se transforma en

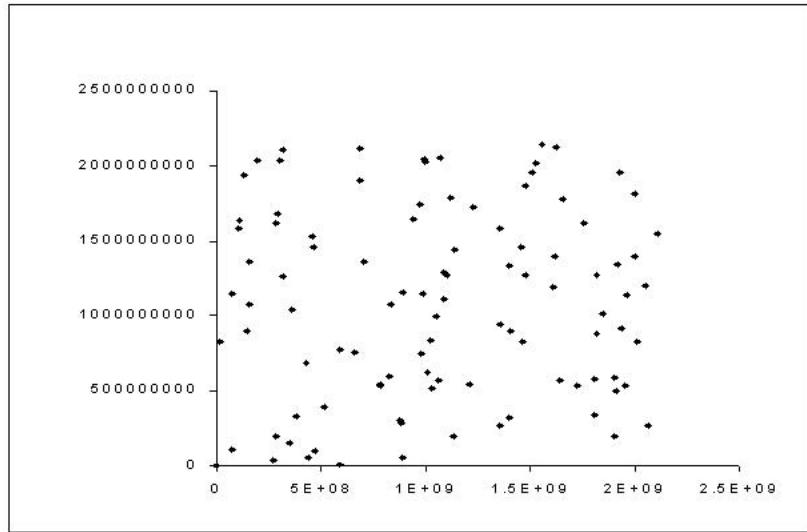
$$X_{n+1} \equiv (16807X_n) \pmod{m}. \quad (72.3)$$

Observe que $m = 2^{31} - 1 = 2147483647$. Al utilizar la ecuación recursiva (72.3) se generan los siguientes 25 números seudo-aleatorios, los cuales aparecen en el Cuadro 72.1.

Números seudo-aleatorios X_n	
X_0	1
X_1	16807
X_2	282475249
X_3	1622650073
X_4	984943658
X_5	1144108930
X_6	470211272
X_7	101027544
X_8	1457850878
X_9	1458777923
X_{10}	2007237709
X_{11}	823564440
X_{12}	1115438165
X_{13}	1784484492
X_{14}	74243042
X_{15}	114807987
X_{16}	1137522503
X_{17}	1441282327
X_{18}	16531729
X_{19}	823378840
X_{20}	143542612
X_{21}	896544303
X_{22}	1474833169
X_{23}	1264817709
X_{24}	1998097157
X_{25}	1817129560

Cuadro 72.1 Generación de 25 números seudo-aleatorios con el método de congruencias.

Con base en el Cuadro 72.1, los valores consecutivos de estos números seudo-aleatorios por pares, (X_n, X_{n+1}) , se grafican a continuación:



Gráfica 72.1 Pares consecutivos de números seudo-aleatorios.

72.5 Pruebas estadísticas de aleatoriedad

A continuación se presentan las pruebas estadísticas ji-cuadrada (χ^2) y Kolmogorov-Smirnov sobre la *calidad* de los números aleatorios producidos por Excel. La prueba de bondad de ajuste χ^2 es posiblemente la más conocida de las pruebas estadísticas. En esta prueba se toman n observaciones independientes y se definen k clases exhaustivas y mutuamente excluyentes en las que cada observación puede caer. En este marco, sea p_s la probabilidad de que una observación caiga en la clase s y Y_s el número de observaciones que caen en la clase s , se define el estadístico

$$V = \sum_{s=1}^k \frac{(Y_s - np_s)^2}{np_s}. \quad (72.4)$$

Ahora bien, si se toman en cuenta las siguientes identidades;

$$(Y_s - np_s)^2 = Y_s^2 - 2np_s Y_s + n^2 p_s^2, \quad (72.5)$$

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k = n \quad (72.6)$$

y

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1,$$

V también puede escribirse como

$$V = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^k \frac{Y_s^2}{p_s} - n. \quad (72.7)$$

Si se utiliza el generador de números aleatorios de Excel de una distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$ para producir una muestra de tamaño $n = 10,000$ y se definen $k = 10$ clases, en cuyo caso el número de grados de libertad está dado por $\nu = k - 1 = 9$, entonces la probabilidad de generar los números aleatorios en cada categoría es la misma, $p_s = 0.10$, y la hipótesis nula es

$$H_0 : p_s = 0.10 \quad s = 1, 2, \dots, 10.$$

Dado que el tamaño de la muestra es $n = 10,000$ y la probabilidad es $p_s = 0.10$, se tiene que la frecuencia esperada es $np_s = 1,000$. Los resultados obtenidos, a un nivel de confianza del 95%, se muestran en el Cuadro 72.2. A partir de tablas de una distribución ji-cuadrada, se tiene que $\chi^2_{0.95,9} = 16.92$ y $\chi^2_{0.99,9} = 21.67$. En consecuencia, no se puede rechazar la hipótesis de que Excel genera números aleatorios.

Clase k	Observaciones, Y_s
1	1030
2	991
3	975
4	1026
5	982
6	969
7	996
8	1053
9	988
10	989
Valor de la estadística V :	6.657

Cuadro 72.2 Resultados de una prueba de aleatoriedad ji-cuadrada aplicada a Excel.

Una prueba de bondad de ajuste más apropiada que la ji-cuadrada cuando la distribución bajo la hipótesis nula, $F_0(x)$, es continua es basada en la estadística de Kolmogorov-Smirnov. La prueba no necesita que los datos se encuentren agrupados en clases y es aplicable a muestras de tamaño pequeño. La prueba consiste en comparar la función de distribución empírica que se observa en la muestra ordenada, $F_n(x)$, con la distribución propuesta bajo la hipótesis nula, $F_0(x)$. Si esta comparación revela una diferencia suficientemente grande, entonces la hipótesis nula se rechaza. A continuación se presenta el procedimiento para llevar a cabo una prueba de Kolmogorov-Smirnov de aleatoriedad.

- (i) Se toman n observaciones independientes de una variable aleatoria X : X_1, X_2, \dots, X_n , y se define la función de distribución empírica mediante

$$F_n(x) = \frac{\text{número de variables } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ que son } \leq x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (ii) Se reordenan las observaciones en forma ascendente, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$; las llamadas estadísticas de orden.
 (iii) Se definen las estadísticas de Kolmogorov-Smirnov, K_n^+ y K_n^- , las cuales están dadas por

$$K_n^+ = \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{j}{n} - F_0(X_{(j)}) \right)$$

y

$$K_n^- = \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} \left(F_0(X_{(j)}) - \frac{j-1}{n} \right),$$

donde K_n^+ mide la máxima desviación cuando F_n es mayor que F_0 , y K_n^- mide la máxima desviación cuando F_n es menor que F_0 .

A continuación se aplica la prueba de Kolmogorov-Smirnov al generador de números aleatorios de Excel. En este caso, se toma una muestra de tamaño $n = 1,000$, se reordena, se propone $F_0(x) = 1 - e^{-2x^2}$ y se calculan $K_{1,000}^+$ y $K_{1,000}^-$ para tres muestras del mismo tamaño. Los resultados obtenidos se presentan en Cuadro 72.3. Para muestras de tamaño entre 1 y 30, se utilizan tablas para determinar el valor crítico de $K_{n,1-\alpha}^+$ para un valor mayor a 30, se puede utilizar la siguiente ecuación:

$$K_{n,1-\alpha}^+ = y_\alpha - \frac{1}{6}n^{-1/2} + o(1/n), \quad (72.8)$$

donde $y_\alpha^2 = \frac{1}{2} \ln(1/\alpha)$ y $1 - \alpha$ es la probabilidad asociada al nivel de confianza.

Valores muestrales de K_n^+ y K_n^- $n = 1000$ para cada muestra		
Muestra	K_n^+	K_n^-
1	4.8647	0.0004985
2	5.1297	3.77×10^{-6}
3	4.6516	2.89×10^{-6}

Cuadro 72.3 Prueba de Kolmogorov Smirnov.

Con base en la ecuación (72.8), para $n = 1,000$ y distintos valores de $1 - \alpha$, se obtienen los siguientes valores críticos de $K_{n,1-\alpha}^+$ y $K_{n,1-\alpha}^-$.

Valores críticos de $K_{n,1-\alpha}^+$			
	$1 - \alpha = 1\%$	$1 - \alpha = 5\%$	$1 - \alpha = 95\%$
	0.0666	0.1559	1.2196
			1.5132

Cuadro 72.4 Estadísticas $K_{n,1-\alpha}^+$ para diferentes valores de $1 - \alpha$.

El proceso de decisión de la prueba es como sigue: dado un nivel de confianza del $(1 - \alpha)\%$, se rechaza la hipótesis nula, H_0 , si $K_n^+ > K_{n,\alpha}^+$. En este caso, en virtud de los Cuadros 72.3 y 72.4 se tienen los siguientes resultados

Muestra	$K_n^+ > K_{n,0.99}^+$
1	$4.8647 > 1.5132$
2	$5.1297 > 1.5132$
3	$4.6516 > 1.5132$

Cuadro 72.5 Comparación entre valores muestrales y críticos en la prueba de Kolmogorov-Smirnov.

Observe que los valores de los estadísticos muestrales exceden a los valores críticos, es decir, caen en la región de rechazo. Por esta razón, la distribución empírica es distinta a la distribución teórica. Es decir, se concluye que el generador de números aleatorios de Excel no pasa la prueba de aleatoriedad.

72.6 Aplicación del método Monte Carlo al cálculo de opciones europeas de compra y venta

Suponga que el activo subyacente se comporta de acuerdo a un movimiento geométrico Browniano en un mundo neutral al riesgo, es decir,

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (72.9)$$

donde r es una tasa de interés constante, σ es la volatilidad instantánea y $dW_t \sim N(0, dt)$. Los precios de opciones europeas de compra y venta, están dados, respectivamente, por

$$c(S_t, T) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\max(S_{T-t} - K, 0) \mid \mathcal{F}_0] \quad (72.10)$$

y

$$p(S_t, T) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\max(K - S_{T-t}, 0) \mid \mathcal{F}_0]. \quad (72.11)$$

Si se utilizan incrementos discretos, el precio del activo subyacente, en la ecuación (72.9), se puede escribir como

$$\Delta S_t = r S_t \Delta t + \sigma S_t \sqrt{\Delta t} \mathcal{E}, \quad (72.12)$$

donde \mathcal{E} es una variable normal estándar. Esta forma discreta de simular la serie de S_t es conocida como el método de Euler. En este caso, a partir del valor inicial S_0 y la generación de un número aleatorio de \mathcal{E} , se calcula un posible valor de ΔS_1 , el cual, posteriormente, se utiliza para calcular $S_1 = S_0 + \Delta S_1$, y así sucesivamente. El método es fácil de aplicar a una ecuación diferencial estocástica y tiene un error del tipo $O(\Delta t)$. Por otro lado, la aplicación del lema de Itô, a (72.9), conduce a la siguiente ecuación:

$$d(\ln S_t) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma dW_t, \quad (72.13)$$

la cual tiene una versión discreta dada por

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp \left\{ (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \mathcal{E} \right\}. \quad (72.14)$$

En este caso, la serie simulada de precios del activo subyacente se genera iniciando con un valor S_0 y la generación de un número aleatorio de \mathcal{E}_1 para obtener un posible valor de S_1 y así sucesivamente.

Con base en las ideas anteriores, se puede proponer el siguiente algoritmo para determinar el valor de la opción:

- (i) Simular el comportamiento del subyacente, partiendo con el valor del subyacente en el presente, S_0 , y continuando hasta la fecha de expiración de la opción T , lo cual proporciona una posible trayectoria (realización) de los precios del subyacente;
- (ii) Calcular para cada realización el valor intrínseco de la opción;
- (iii) Repetir n veces los pasos anteriores;
- (iv) Calcular el promedio de los valores intrínsecos obtenidos;
- (v) Calcular el valor presente del promedio anterior, lo cual finalmente proporciona el valor de la opción.

Observe que entre mayor sea el número de realizaciones, mayor será la precisión del resultado. Si se aumentan en cien veces las simulaciones, entonces la precisión aumenta en una décima. Por supuesto, la precisión también depende de la calidad de los números aleatorios, por lo que es recomendable llevar a cabo una prueba de aleatoriedad.

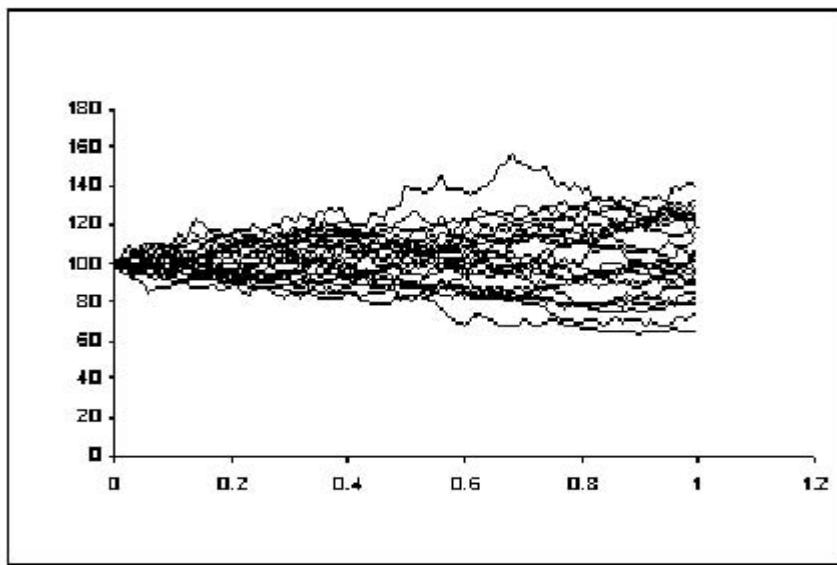
Vale la pena mencionar que en la práctica es muy frecuente emplear variables aleatorias uniformes en $[0,1]$ para generar variables aleatorias normales estándar a través del método de Box-Muller, el cual establece que se pueden utilizar

$$\mathcal{E} = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$$

6

$$\mathcal{E} = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$$

para generar valores de $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ con $U_1, U_2 \sim U[0, 1]$. En la Gráfica 72.2 se presenta la simulación de 25 trayectorias del precio del activo subyacente.



Gráfica 72.2 Simulación Monte Carlo de 25 trayectorias del precio del activo.

Por último, en el siguiente cuadro se presentan los precios de opciones europeas de compra y venta calculados con el método de simulación Monte Carlo con base en 25 realizaciones.

Simulación Monte Carlo	
Precio inicial del activo	$S_0 = 100$
Vencimiento	$T = 1$
Volatilidad	$\sigma = 20\%$
Incremento del tiempo	$\Delta t = 0.01$
Tasa de interés	$r = 4.0\%$
Precio de ejercicio	$K = 105$
Prima de la opción de compra	$c = 5.4240$
Prima de la opción de venta	$p = 8.2853$

Cuadro 72.6 Precios de opciones europeas de compra y venta simulados con el método Monte Carlo.

72.7 Bibliografía sugerida

- Masaki, K. (2003). Stochastic Processes with Applications to Finance, Chapman & Hall/CRC, ACRC Press Company.
- Wolfhard, J. (2002). Pseudo Random Numbers: Generation and Quality Checks, Quantum Simulations of Complex Many-Body Systems. From Theory to Algorithms. Lecture Notes, Vol. 10, pp. 447-458.
- Ross, S. M. (1999). Simulación. Segunda edición, Pearson, Prentice Hall.
- Metropolis, N. and S. Ulam (1949). "The Monte Carlo Method". *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 44, No. 247, pp. 335-341.

72.8 Ejercicios

72.1 Calcule los precios de opciones europeas de compra y venta utilizando el método de simulación Monte Carlo. Genere valores de \mathcal{E} mediante el método de Box-Muller. Suponga que: $S_t = 100$, $T = 1$, $\mu = 3\%$, $\sigma = 16.5\%$, $\Delta t = 0.01$, $r = 5.0\%$ y $K = 106$.

72.2 Calcule los precios de opciones europeas de compra y venta utilizando el método de simulación Monte Carlo. Genere $\mathcal{E} = U_1 + U_2 + \dots + U_{12} - 6$, donde las U_i , $i = 1, 2, \dots, 12$, son variables aleatorias independientes y distribuidas uniformemente en $[0,1]$. Utilice los datos del ejercicio anterior.

72.3 Suponga que el precio del activo subyacente (una acción) sigue una dinámica determinada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_{1t},$$

$$d\sigma_t^2 = \alpha \sigma_t^2 dt + \beta \sigma_t^2 dW_{2t},$$

donde r , α y β son constantes positivas conocidas y dW_{1t} y dW_{2t} son movimientos Brownianos independientes. Establezca un procedimiento para generar posibles valores de S_t mediante el método de simulación Monte Carlo.

Solución: En este caso, se puede escribir

$$S_{t+h} = S_t \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 \right) h + \sigma_t \sqrt{h} \mathcal{E}_1 \right\},$$

$$\sigma_{t+h}^2 = \sigma_t^2 \exp \left\{ \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2 \right) h + \beta \sqrt{h} \mathcal{E}_2 \right\},$$

donde $\text{Cov}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1) = 0$. La serie simulada de precios del activo subyacente se obtiene, iniciando con la segunda ecuación, con un valor σ_{-1}^2 y la generación de un número aleatorio de \mathcal{E}_2 , con lo cual se produce un posible valor de σ_0^2 . Posteriormente, los valores de σ_0^2 y S_0^2 se sustituyen en la primera ecuación junto con un número aleatorio de \mathcal{E}_1 para obtener un valor de S_1 y así sucesivamente. Proponga un algoritmo para el caso $\text{Cov}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1) \neq 0$ (la descomposición de Cholesky puede ser útil).

72.4 Suponga que el precio del activo subyacente (una acción) sigue una dinámica estocástica determinada por las siguientes ecuaciones:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_{1t},$$

$$d\sigma_t^2 = a(b_t - \sigma_t^2)dt + \theta \sigma_t dW_{2t},$$

$$db_t = \alpha(\beta - b_t)dt + \gamma \sqrt{b_t} dW_{3t},$$

donde r , a , θ , α , β y γ son constantes conocidas y dW_{1t} , dW_{2t} y dW_{3t} son movimientos Brownianos independientes entre sí. Proporcione un algoritmo para aproximar S_t mediante el método Monte Carlo.

XVI. RIESGO OPERATIVO

- 73. Riesgo operativo, distribuciones de frecuencia y severidad

CAPÍTULO 73

RIESGO OPERATIVO, DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIA Y SEVERIDAD

Conceptos básicos de este capítulo:

- Riesgo operativo
- Distribución de frecuencia
- Distribución de severidad
- Distribución de severidad extrema
- Inferencia Bayesiana

73.1 Introducción

Aunque no existe una definición universalmente aceptada de riesgo operativo, el presente capítulo intenta circunscribir en una definición aceptable aquellos eventos que pudieran generar pérdidas potenciales por fallas en sistemas y procedimientos. Este capítulo también presenta, bajo ciertos supuestos, un conjunto de distribuciones de probabilidad sobre la frecuencia y severidad de dichas pérdidas.

73.2 Riesgo operativo

El riesgo operativo, también llamado riesgo operacional, se puede definir como el riesgo de que se presenten pérdidas por fallas en los sistemas administrativos y procedimientos internos, así como por errores humanos, intencionales o no. Ejemplos de eventos de riesgo operativo son: fallas en “hardware”, “software” y telecomunicaciones; errores de captura, ejecución y mantenimiento de transacciones; fallas en sistemas de seguridad; pérdida parcial o total de bases de datos sobre operaciones con clientes; fraudes internos (*v.g.* transacciones no reportadas o no autorizadas); fraudes externos (*v.g.* transacciones con documentos falsos); robo; daños a los activos fijos (por vandalismo, terrorismo, desastres naturales, etc.); reembolsos a clientes y pagos de penalización; restricciones legales que pudieran fomentar el incumplimiento de las obligaciones de clientes (riesgo legal); documentación incompleta de clientes; restricciones impuestas por las autoridades financieras para participar en ciertos mercados o segmentos de mercado, etc.

Existen tres aspectos relevantes en la administración de riesgos operativos. El primero consiste en la asignación de capital para hacer frente a eventos relacionados con fallas operativas. El segundo toma en cuenta la supervisión y control para evitar que se presenten dichas fallas. El tercero considera los modelos y métodos utilizados para cuantificar el riesgo operativo. Este capítulo se concentra esencialmente en el tercer aspecto, en particular, en el análisis de la frecuencia y severidad de eventos de riesgo operativo.

73.3 Frecuencia y severidad de eventos de riesgo operativo

Los diferentes eventos de riesgo operacional pueden ser estudiados en términos de su frecuencia (el número de eventos que producen pérdidas en un cierto intervalo de tiempo) y su severidad (el impacto del evento en términos de pérdidas económicas). En términos muy generales, para un banco típico que realiza diversas operaciones y transacciones con clientes, el riesgo de un fraude interno es de baja frecuencia y de alta severidad, el riesgo por fraude externo es de media/alta frecuencia y baja/media severidad, el riesgo por no atender medidas de seguridad en el lugar de trabajo es de baja frecuencia y baja severidad, el riesgo por errores de captura, ejecución y mantenimiento de operaciones con clientes es de baja/media frecuencia y media/alta severidad,

el riesgo por daños a activos fijos es de baja frecuencia y baja severidad y, por último, el riesgo por la falla de sistemas es de baja frecuencia y baja severidad.

Evidentemente, la clasificación de baja, media y alta frecuencia y severidad dependerá de cada banco. Por ejemplo, si un banco realiza operaciones con pocos clientes de montos pequeños, la frecuencia y severidad de un fraude interno podría no ser comparable con la de un banco que realiza operaciones con muchos clientes y transacciones de montos grandes.

73.4 Distribuciones de frecuencia de eventos de riesgo operativo

En la literatura especializada de riesgos operativos existe un número importante de distribuciones de frecuencia de fallas en sistemas y procedimientos. Una distribución de frecuencias, de uso muy común, es la distribución binomial $b(n, p)$, donde n representa el número total de eventos que son susceptibles a una pérdida de tipo operacional durante un periodo de tiempo preestablecido, usualmente un año, y p es la probabilidad de que se presente un evento de pérdida. Si X es la variable aleatoria que representa el número de eventos de riesgo en un año y se supone que los eventos son independientes, entonces la probabilidad de que se presente cierto número de eventos de riesgo operativo está dada por:

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0, 1, \dots, n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe que en esta distribución se requiere especificar, de antemano, el número de eventos, n , en un año, lo que representa una limitación del modelo. Otra desventaja del modelo anterior es que la probabilidad de que se presente un evento de pérdida se mantiene constante e igual a p . No obstante, si p es pequeña y n es grande, la distribución $b(n, p)$ se puede aproximar, con base en la ley de los grandes números, a una distribución Poisson, $\mathcal{P}(\lambda)$. Así, si X es la variable aleatoria que representa el número de eventos de riesgo en un año, se tiene que:

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & x = 0, 1, \dots \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta distribución contempla un solo parámetro λ , llamado parámetro de intensidad, el cual determina el número medio de eventos de pérdida por unidad de tiempo. Cuando el riesgo operacional es de baja frecuencia, ésta puede ser modelada con una distribución Poisson, en cuyo caso el parámetro n desaparece. Existen, por supuesto, muchas otras formas funcionales para la distribución de frecuencia del riesgo operacional que se pueden utilizar bajo ciertas condiciones; por ejemplo, la distribución binomial negativa.

73.5 Distribuciones de severidad de la pérdida de eventos de riesgo operativo

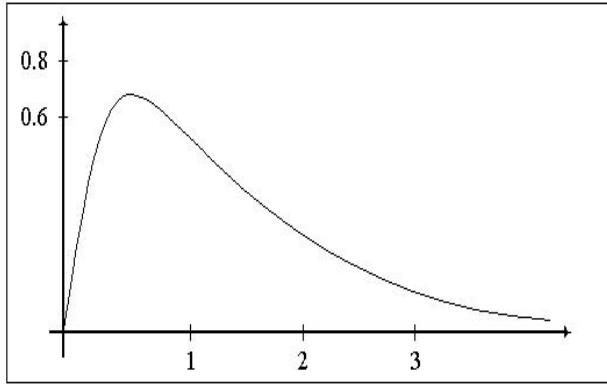
En la literatura de riesgos operativos una distribución, muy popular, sobre la severidad del monto de la pérdida es la distribución lognormal:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad x > 0,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son los parámetros de la distribución. En este caso, se puede verificar que si X es una variable aleatoria lognormal con la densidad anteriormente establecida, entonces

$$\mathbb{E}[X] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} \quad \text{y} \quad \text{Var}[X] = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1).$$

La Gráfica 73.1 ilustra la distribución lognormal para ciertos valores de los parámetros. Es importante destacar que esta distribución presenta sesgo hacia la derecha.

Gráfica 73.1 Función de densidad lognormal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

Algunas distribuciones de severidad presentan leptocurtosis y un sesgo considerable, en cuyo caso se utiliza la distribución Gamma de parámetros α y β , $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$. Esta distribución de severidad tiene función de densidad

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}, \quad x > 0,$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma. En este caso, también es común utilizar la función de densidad hiperbólica dada por

$$f(x) = \frac{\exp\{-\alpha\sqrt{\beta^2 + x^2}\}}{2\beta K(\alpha\beta)}, \quad x > 0,$$

donde $K(\cdot)$ representa la función de Bessel.

73.6 Distribuciones de severidad extrema

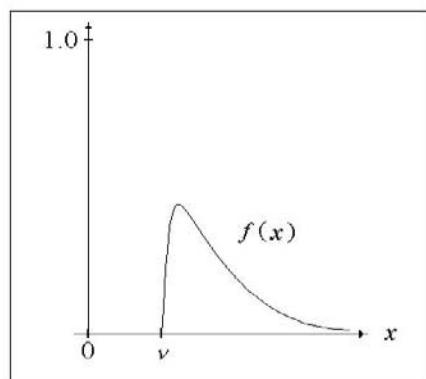
Los eventos de riesgo operativo de severidad extrema no son eventos que se presenten todos los días, más bien se presentan ocasionalmente. No todos los días los sistemas presentan fallas ni todos los días se presentan errores humanos de severidad considerable. En caso de que la severidad sea de magnitud excepcional, se utilizan distribuciones de valores extremos. Una distribución de severidad extrema para riesgos operativos de uso muy común es la distribución de Fréchet con parámetros $\alpha > 0$, $\nu > 0$ y $\kappa > 0$. En este caso, la función de distribución acumulada está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \nu, \\ \exp\left\{-\left(\frac{x-\nu}{\kappa}\right)^{-\alpha}\right\}, & x \geq \nu. \end{cases} \quad (73.1)$$

La función de densidad correspondiente satisface:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\kappa} F(x) \left(\frac{x-\nu}{\kappa}\right)^{-(1+\alpha)}, \quad x \geq \nu. \quad (73.2)$$

La Gráfica 73.2 muestra un caso particular de una función de densidad de Fréchet.

Gráfica 73.2 Función de densidad de Fréchet para $\kappa = \alpha = 1$.

Se puede demostrar fácilmente que si X es una variable aleatoria Fréchet y $\alpha > 2$, entonces

$$\mathbb{E}[X] = \nu + \kappa \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

y

$$\text{Var}[X] = \kappa^2 \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right],$$

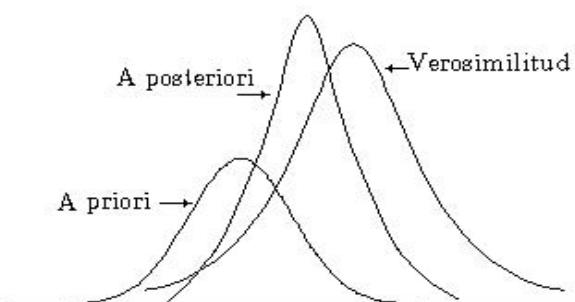
donde $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma. Existen otras distribuciones de valores extremos de uso frecuente como las del tipo Gumbel.

73.7 Estimación Bayesiana de la severidad de la pérdida

La estimación Bayesiana considera fundamentalmente dos fuentes de información, la función de densidad *a priori* del parámetro de interés, $\pi(\theta)$, la cual refleja información inicial sobre dicho parámetro y la función de verosimilitud que proviene de un modelo muestral que considera al parámetro en cuestión, $f(x|\theta)$. El teorema de Bayes combina estas dos fuentes de información para obtener una densidad *a posteriori* sobre el parámetro dada por

$$f(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta). \quad (73.3)$$

La distribución *a posteriori* $f(\theta|x)$ se utiliza para hacer inferencias sobre θ . La Gráfica 73.3 ilustra cómo se combinan la densidad *a priori* y la verosimilitud para obtener la distribución *a posteriori* mediante el teorema de Bayes.

Gráfica 73.3 Densidad *a priori*, verosimilitud y densidad *a posteriori*.

73.7.1 Caso binomial con densidad *a priori* uniforme

Si se supone que la distribución de frecuencias de las pérdidas sigue una distribución binomial, $b(n, p)$, la frecuencia esperada está dada por np , siendo n el número de eventos que son susceptibles a pérdidas de tipo operacional y p la probabilidad de que el evento de pérdida se presente. A continuación se discute cómo se pueden hacer inferencias sobre p utilizando el enfoque Bayesiano. El estimador que se obtiene, \hat{p} , se utiliza para estimar la frecuencia esperada $n\hat{p}$. Suponga que la distribución *a priori* de p es uniforme, *i.e.*, $p \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Observe primero que

$$f(x, p) = f(x|p)\pi(p)$$

y del mismo modo

$$f(x, p) = f(p|x)f(x),$$

entonces

$$f(p|x)f(x) = f(x, p) = f(x|p)\pi(p).$$

Por lo tanto, se sigue que

$$f(p|x) = \frac{f(x|p)\pi(p)}{f(x)}.$$

En este caso, se tiene

$$\begin{aligned} f(x|p) &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \\ \pi(p) &= \begin{cases} 1, & \text{si } p \in [0, 1], \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{aligned}$$

y

$$f(x) = \int_0^1 f(x, p) dp = \int_0^1 f(x|p)\pi(p) dp.$$

Observe que $f(x)$ es la constante de normalización que asegura que la densidad *a posteriori*, $f(p|x)$, sea efectivamente una densidad. De esta manera,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 f(x|p)\pi(p) dp = \int_0^1 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} dp \\ &= \binom{n}{x} \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(x+1+n-x+1)} = \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

ya que

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} dp.$$

Una vez determinada la constante de normalización, se calcula la distribución *a posteriori* con el teorema de Bayes, de tal forma que

$$f(p|x) = \begin{cases} \binom{n+1}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & \text{si } p \in [0, 1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Con la distribución *a posteriori* se estima¹ el valor de p a través de $E[p|x]$. Es decir,

$$\begin{aligned} E[p|x] &= \int_0^1 p f(p|x) dp \\ &= (n+1) \int_0^1 \binom{n+1}{x} p^{x+1} (1-p)^{n-x} dp \\ &= (n+1) \int_0^1 \frac{\Gamma(x+2)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+3)} \\ &= \frac{(n+1)n!(x+1)!(n-x)!}{x!(n-x)!(n+2)!} \\ &= \frac{x+1}{n+2}, \end{aligned}$$

¹ Si se determina \bar{p} de tal manera que se minimice $\int_0^1 (p - \bar{p})^2 f(p|x) dp$, entonces $\bar{p} = E[p|x]$.

donde se ha utilizado el hecho que $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$. Así pues, la frecuencia esperada se estima mediante $n\hat{p}$. Una forma alternativa de obtener el resultado anterior consiste en observar que si $f(x)$ es una constante de normalización, entonces se puede escribir

$$f(p|x) \propto f(x|p)\pi(p).$$

En consecuencia, se puede omitir todo lo que no dependa de p y después incorporarlo a través de la constante de normalización, esto es,

$$f(p|x) \propto \begin{cases} p^x(1-p)^{n-x}, & \text{si } p \in [0, 1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La única posibilidad para que $f(p|x)$ sea una densidad es que

$$f(p|x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)} p^x(1-p)^{n-x}, & \text{si } p \in [0, 1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

73.7.2 Caso binomial con m observaciones y densidad *a priori* uniforme

A continuación se extiende el resultado de la sección anterior a una muestra de observaciones. Considere ahora una muestra aleatoria (variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas) X_1, X_2, \dots, X_m de una distribución $X \sim b(n, p)$. En este caso,

$$f(\mathbf{x}|p) = f(x_1, x_2, \dots, x_m|p) \propto p^{m\bar{x}}(1-p)^{m(n-\bar{x})},$$

donde $\bar{x} = \sum_{i=1}^m x_i/m$. Si

$$\pi(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \in [0, 1], \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

entonces

$$f(p|\mathbf{x}) \propto \begin{cases} p^{m\bar{x}}(1-p)^{m(n-\bar{x})}, & \text{si } p \in [0, 1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$f(p|\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\Gamma(mn+2)}{\Gamma(m\bar{x}+1)\Gamma(m(n-\bar{x})+1)} p^{m\bar{x}}(1-p)^{m(n-\bar{x})}, & \text{si } p \in [0, 1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Recuerde que una variable aleatoria tiene distribución Beta con parámetros α y β , $B(\alpha, \beta)$, si su densidad es de la forma

$$f(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}, \quad y, \alpha, \beta > 0.$$

La media de esta distribución está dada por

$$E[y] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

En consecuencia,

$$\hat{p} = E[p|\mathbf{x}] = \frac{m\bar{x}+1}{mn+2}.$$

73.7.3 Caso binomial con densidad *a priori* Beta

En esta sección se examina otra posibilidad para la distribución *a priori* de p . Considere una variable aleatoria $X \sim b(n, p)$ y suponga que la distribución *a priori* de p es Beta, $B(\alpha, \beta)$, i.e.,

$$\pi(p) = B(\alpha, \beta)^{-1} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1}.$$

La media de esta distribución está dada por

$$E[p] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Ahora bien, por definición

$$f(x) = \int_0^1 f(x, p) dp = \int_0^1 f(x|p) \pi(p) dp.$$

Observe que, en este caso,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 f(x|p) \pi(p) dp = \binom{n}{x} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) + \Gamma(\beta)} \int_0^1 p^{x+\alpha-1} (1-p)^{n-x+\beta-1} dp \\ &= \binom{n}{x} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) + \Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(x + \alpha) \Gamma(n - x + \beta)}{\Gamma(n + \alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Una vez determinada la constante de normalización, se calcula la distribución *a posteriori* mediante la fórmula de Bayes

$$f(p|x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n + \alpha + \beta)}{\Gamma(x + \alpha) \Gamma(n - x + \beta)} p^{x+\alpha-1} (1-p)^{n-x+\beta-1}, & \text{si } p \in [0, 1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Con esta distribución *a posteriori* se estima el valor de p a través de $E[p|x]$. Es decir,

$$\begin{aligned} \hat{p} = E[p|x] &= \frac{\Gamma(n + \alpha + \beta)}{\Gamma(x + \alpha) \Gamma(n - x + \beta)} \int_0^1 p^{x+\alpha-1} (1-p)^{n-x+\beta-1} dp \\ &= \frac{\Gamma(n + \alpha + \beta)}{\Gamma(x + \alpha) \Gamma(n - x + \beta)} \frac{\Gamma(x + \alpha + 1) \Gamma(n - x + \beta)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \\ &= \frac{x + \alpha}{n + \alpha + \beta}. \end{aligned}$$

Otra forma de obtener el mismo resultado consiste en observar que

$$f(p|x) \propto \begin{cases} p^x (1-p)^{n-x} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1}, & \text{si } p \in [0, 1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La única posibilidad para que $f(p|x)$ sea una densidad es

$$f(p|x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n + \alpha + \beta)}{\Gamma(x + \alpha) \Gamma(n - x + \beta)} p^{x+\alpha-1} (1-p)^{n-x+\beta-1}, & \text{si } p \in [0, 1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

73.7.4 Caso binomial con m observaciones y densidad *a priori* Beta

A continuación se generaliza el resultado de la sección anterior a una muestra de observaciones. Considere una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_m de una distribución $X \sim b(n, p)$. En este caso,

$$f(\mathbf{x}|p) = f(x_1, x_2, \dots, x_m|p) \propto p^{m\bar{x}}(1-p)^{m(n-\bar{x})}.$$

Si

$$\pi(p) \propto p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1},$$

entonces

$$f(p|\mathbf{x}) \propto p^{m\bar{x}+\alpha-1}(1-p)^{m(n-\bar{x})+\beta-1}.$$

En consecuencia,

$$f(p|\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(mn + \alpha + \beta)}{\Gamma(m\bar{x} + \alpha)\Gamma(m(n - \bar{x}) + \beta)} p^{m\bar{x}+\alpha-1}(1-p)^{m(n-\bar{x})+\beta-1}, \quad p \in [0, 1].$$

Por lo tanto,

$$\hat{p} = E[p|\mathbf{x}] = \frac{m\bar{x} + \alpha}{mn + \alpha + \beta}.$$

73.7.5 Caso Poisson con *a priori* Gamma

Cuando se utiliza la distribución de Poisson, $\mathcal{P}(\lambda)$, para modelar la probabilidad de que se presenten eventos de riesgo operativo, el enfoque Bayesiano proporciona un estimador de λ . Considere ahora una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n de una distribución Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. En este caso,

$$f(\mathbf{x}|\lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n|\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} \propto e^{-n\lambda}\lambda^{n\bar{x}}.$$

Suponga que la distribución *a priori* sobre λ es $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$, i.e.,

$$f(\lambda|\mathbf{x}) = \frac{\lambda^{\alpha-1}\beta^\alpha e^{-\lambda\beta}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Si se utiliza el teorema de Bayes, se sigue que

$$\begin{aligned} f(\lambda|\mathbf{x}) &\propto e^{-n\lambda}\lambda^{n\bar{x}}\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda\beta} \\ &= e^{-\lambda(n+\beta)}\lambda^{n\bar{x}+\alpha-1}. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$f(\lambda|\mathbf{x}) = \frac{e^{-\lambda(n+\beta)}(n+\beta)^{n\bar{x}+\alpha}\lambda^{n\bar{x}+\alpha-1}}{\Gamma(n\bar{x} + \alpha)}.$$

En consecuencia,

$$\hat{\lambda} = E[\lambda|\mathbf{x}] = \frac{n\bar{x} + \alpha}{n + \beta}.$$

73.8 Bibliografía sugerida

- Cruz, M. G. (2002). Modeling, Measuring and Hedging Operational Risk. John Wiley & Sons.
 Zellner, A. (1971). An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics, New York: Wiley.

73.9 Ejercicios

73.1 Si la verosimilitud es Poisson, $\mathcal{P}(\theta)$, y la densidad *a priori* es Gamma, $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$, muestre que la densidad *a posteriori* es $\mathcal{G}(\alpha + x, \beta + 1)$.

73.2 Suponga que la verosimilitud es Gamma, $\mathcal{G}(\nu, \theta)$, y la densidad *a priori* es Gamma, $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$, verifique que la densidad *a posteriori* es $\mathcal{G}(\alpha + \nu, \beta + x)$.

73.3 Si la verosimilitud es binomial, $b(n, \theta)$, y la densidad *a priori* es Beta, $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$, pruebe que la densidad *a posteriori* es $\mathcal{B}(\alpha + x, \beta + n - x)$.

73.4 Considera una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n de una distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con μ desconocida y σ^2 conocida. En este caso,

$$f(x_i|\mu) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}\right\},$$

de donde

$$f(\mathbf{x}|\mu) = f(x_1, x_2, \dots, x_n|\mu) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(\bar{x} - \mu)^2}{\frac{\sigma^2}{n}}\right\}$$

con $\bar{x} = (\sum_{i=1}^n x_i)/n$. Lo anterior conduce también al resultado

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Suponga que la distribución *a priori* sobre μ se elige como

$$\mu \sim \mathcal{N}(\mu_o, \sigma_o^2),$$

con μ_o y σ_o^2 conocidas. En otras palabras,

$$f(\mu) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(\mu - \mu_o)^2}{\sigma_o^2}\right\}.$$

Utilice el teorema de Bayes para encontrar $E[\mu|\mathbf{x}]$ y $\text{Var}[\mu|\mathbf{x}]$.

Solución: En este caso,

$$\begin{aligned} f(\mu|\mathbf{x}) &\propto f(\mathbf{x}|\mu)f(\mu) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\bar{x} - \mu)^2}{\frac{\sigma^2}{n}} + \frac{(\mu - \mu_o)^2}{\sigma_o^2}\right]\right\} \\ &\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{\sigma_o^2}}\right)\left[\mu - \frac{\frac{\bar{x}}{\sigma^2} + \frac{\mu_o}{\sigma_o^2}}{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_o^2}}\right]^2\right\}. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\mu|\mathbf{x} \sim \mathcal{N}\left(\frac{\frac{\bar{x}}{\sigma^2} + \frac{\mu_o}{\sigma_o^2}}{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_o^2}}, \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_o^2}}\right).$$

Si se denota

$$h = \frac{1}{\sigma^2}, \quad h_o = \frac{1}{\sigma_o^2} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{h}{h + h_o},$$

se tiene que

$$E[\mu|\mathbf{x}] = \omega\bar{x} + (1 - \omega)\mu_o = \left(\frac{h}{h + h_o}\right)\bar{x} + \left(\frac{h_o}{h + h_o}\right)\mu_o$$

y

$$\text{Var}(\mu|\mathbf{x}) = \frac{1}{h + h_o} \quad \text{o} \quad \frac{1}{\text{Var}(\mu|\mathbf{x})} = h + h_o.$$

73.5 Consideré una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n de una distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con μ conocida y σ^2 desconocida. En este caso,

$$f(\mathbf{x}|\sigma^2) \propto \frac{1}{(\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\}.$$

Sea

$$ns^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

En consecuencia,

$$f(\mathbf{x}|\sigma^2) \propto \frac{1}{(\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{ns^2}{\sigma^2}\right\}.$$

Observe ahora que

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2.$$

La función de densidad de una variable aleatoria χ_n^2 está dada por

$$f(\chi_n^2) = \left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n/2}\right]^{-1} (\chi_n^2)^{(n/2)-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\chi_n^2\right\}.$$

Es decir, χ_n^2 sigue una distribución Gamma con parámetros $\alpha = n/2$ y $\beta = 1/2$. Para una variable aleatoria χ_n^2 invertida la función de densidad es

$$f(\chi_n^{-2}) = \left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n/2}\right]^{-1} (\chi_n^{-2})^{-[(n/2)+1]} \exp\left\{-\frac{1}{2\chi_n^{-2}}\right\}.$$

Dado que

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2 \quad \text{implica} \quad \frac{\sigma^2}{ns^2} \sim \chi_n^{-2},$$

se sigue que una elección para la distribución *a priori*, independiente del tamaño de la muestra y de σ^2 , es

$$f(\sigma^2) = \left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right]^{-1} \left(\frac{\nu\kappa^2}{2}\right)^{\nu/2} (\sigma^2)^{-[(\nu/2)+1]} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\nu\kappa^2}{\sigma^2}\right\}.$$

Por lo tanto,

$$f(\sigma^2) \propto \frac{1}{(\sigma^2)^{[(\nu/2)+1]}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\nu\kappa^2}{\sigma^2}\right\}.$$

Mediante el teorema de Bayes encuentre $E[\sigma^2|\mathbf{x}]$.

Solución: En este caso la densidad *a posteriori* se determina mediante

$$\begin{aligned} f(\sigma^2|\mathbf{x}) &\propto \frac{1}{(\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{ns^2}{\sigma^2}\right\} \frac{1}{(\sigma^2)^{[(\nu/2)+1]}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\nu\kappa^2}{\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{(\sigma^2)^{(n+\nu)/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{ns^2 + \nu\kappa^2}{\sigma^2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Se puede verificar que

$$\widehat{\sigma^2} = E[\sigma^2|\mathbf{x}] = \frac{ns^2 + \nu\kappa^2}{\nu - 2}.$$

XVII. VALORES EXTREMOS Y VALOR EN RIESGO

- 74. Valores extremos y valor en riesgo

CAPÍTULO 74

VALORES EXTREMOS Y VALOR EN RIESGO

Conceptos básicos de este capítulo:

- Distribución de Gumbel
- Distribución de Fréchet
- Distribución de Weibull
- Distribuciones generalizadas de Pareto
- Distribución del máximo de un conjunto de variables aleatorias
- Distribución límite del máximo de un conjunto de variables aleatorias
- Distribuciones (máximo) estables
- Condición de von Mises
- Valor en riesgo

74.1 Introducción

Como ya ha sido mencionado con anterioridad, el valor en riesgo es una de las medidas que con mayor frecuencia se utilizan en la estimación de pérdidas potenciales en el rendimiento de un activo o de un portafolio, durante un periodo de tiempo y con un nivel de confianza dados. Sin embargo, cuando los rendimientos son de magnitud descomunal, auges o caídas, un modelado más adecuado del comportamiento de los posibles rendimientos requiere del uso de distribuciones de valores extremos.

Los rendimientos de magnitud extrema no son eventos que se presenten de manera frecuente. No todos los días se reportan rendimientos considerables en los portafolios de inversión, más bien éstos se presentan ocasionalmente. En este capítulo se calcula el valor en riesgo del rendimiento de un activo o portafolio cuando la distribución de rendimientos tiene una distribución de valor extremo, entre las cuales destacan: Gumbel, Fréchet y Weibull. Asimismo, se estudia la relación entre las distribuciones de valores extremos y las distribuciones generalizadas de Pareto, las cuales se utilizan para modelar excesos sobre alguna cantidad fija.

74.2 Distribución Gumbel

En esta sección se presenta una de las distribuciones históricamente más importantes en la teoría de valores extremos. A manera de motivación considere X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con distribución común F , entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\} \leq x\right\} &= \mathbb{P}\{X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x\} \\ &= \mathbb{P}\{X_1 \leq x\} \mathbb{P}\{X_2 \leq x\} \cdots \mathbb{P}\{X_n \leq x\} \\ &= F^n(x)\end{aligned}$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Suponga que X_i , $1 \leq i \leq n$, son variables aleatorias con función de densidad exponencial truncada

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x+\ln n)}, & x \geq -\ln n, \\ 0, & x < -\ln n, \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\} \leq x\right\} &= \left(1 - e^{-(x+\ln n)}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\} \leq x\right\} \rightarrow e^{-e^x}, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

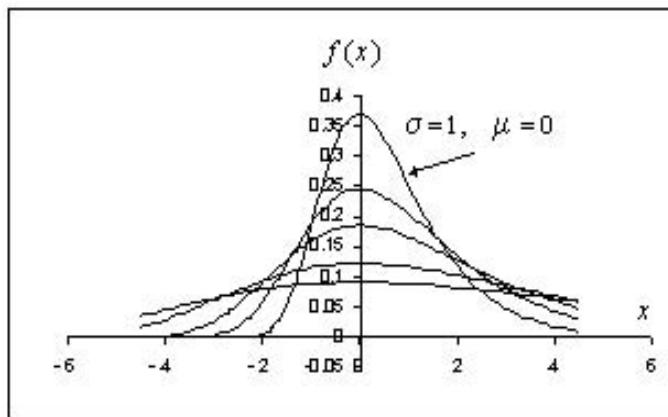
para toda $x \in \mathbb{R}$. Se dice que una variable aleatoria X tiene función de densidad del tipo Gumbel, $g_0(x)$, con parámetros μ y σ , si

$$g_0(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-(x-\mu)/\sigma} \exp\left\{-e^{-(x-\mu)/\sigma}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (74.1)$$

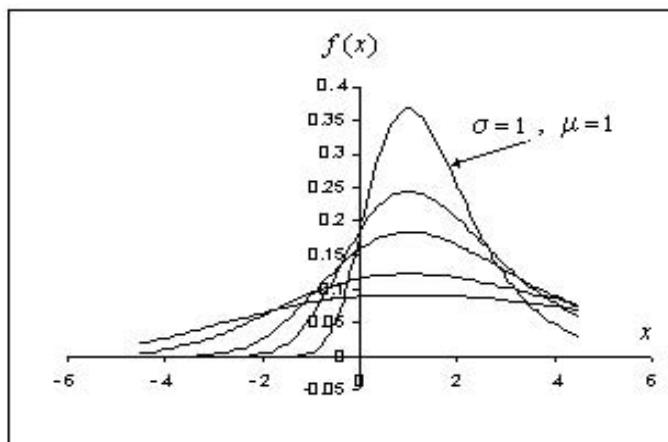
donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. En este caso, la función de distribución acumulada está dada por

$$G_0(x) = \exp\left\{-e^{-(x-\mu)/\sigma}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (74.2)$$

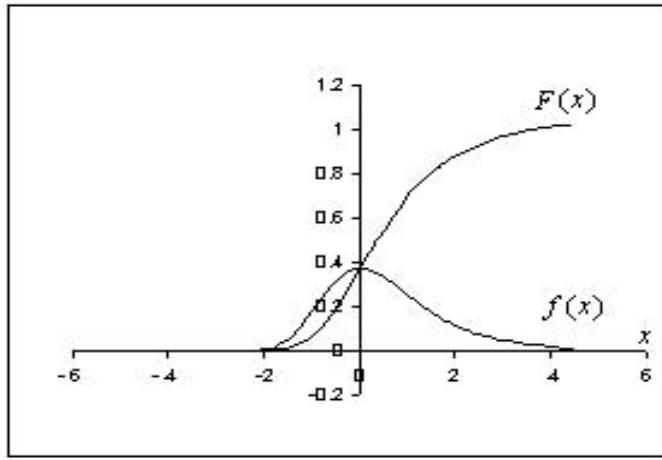
La Gráfica 74.1 muestra la función de densidad Gumbel para distintos valores de los parámetros. Esta gráfica permite apreciar la sensibilidad de la función de densidad ante cambios en su desviación estándar $\sigma = 1, 1.5, 2, 3, 4$, manteniendo $\mu = 0$ fija. La Gráfica 74.2 muestra el comportamiento de la función de densidad Gumbel con $\mu = 1$ y $\sigma = 1, 1.5, 2, 3, 4$. Observe que en este caso, como era de esperarse, sólo se recorre la gráfica. Por último, la Gráfica 74.3 muestra la densidad y función de distribución acumulada de una variable aleatoria Gumbel con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.



Gráfica 74.1 Funciones de densidad de Gumbel con $\mu = 0$ y $\sigma = 1, 1.5, 2, 3, 4$.



Gráfica 74.2 Funciones de densidad de Gumbel para $\mu = 1$ y $\sigma = 1, 1.5, 2, 3, 4$.

Gráfica 74.3 Función de distribución acumulada Gumbel con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

74.3 Distribuciones de Fréchet y Weibull

La función de densidad de una variable aleatoria X del tipo Fréchet, con parámetros $\alpha > 0$, $\mu > 0$ y $\sigma > 0$, se define mediante

$$g_1(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sigma} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{-(1+\alpha)} e^{-((x-\mu)/\sigma)^{-\alpha}}, & x \geq \mu, \\ 0, & x < \mu. \end{cases} \quad (74.3)$$

La función de distribución acumulada está dada por

$$G_1(x) = \begin{cases} e^{-((x-\mu)/\sigma)^{-\alpha}}, & x \geq \mu, \\ 0, & x < \mu. \end{cases} \quad (74.4)$$

Evidentemente,

$$g_1(x) = \frac{\alpha}{\sigma} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{-(1+\alpha)} G_1(x).$$

La densidad y distribución de una variable aleatoria del tipo Weibull se obtiene al sustituir $(x-\mu)/\sigma$ por $-(x-\mu)/\sigma$. En este caso, también se tiene que $\alpha < 0$, $\mu < 0$, $\sigma > 0$, $x \leq \mu$. Para referirse a las funciones de densidad y distribución de una variable aleatoria Weibull se utilizarán las notaciones $g_2(x)$ y $G_2(x)$, respectivamente. Por supuesto, en $g_2(x)$ es necesario sustituir α por $|\alpha|$. Es decir,

$$g_2(x) = \begin{cases} \frac{|\alpha|}{\sigma} \left(-\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{-(1+\alpha)} e^{-(-(x-\mu)/\sigma)^{-\alpha}}, & x \leq \mu, \\ 0, & x > \mu. \end{cases} \quad (74.5)$$

La función de distribución acumulada está dada por

$$G_2(x) = \begin{cases} e^{-(-(x-\mu)/\sigma)^{-\alpha}}, & x \leq \mu, \\ 1, & x > \mu. \end{cases} \quad (74.6)$$

En este caso,

$$g_2(x) = \frac{|\alpha|}{\sigma} \left(-\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^{-(1+\alpha)} G_2(x).$$

74.4 Distribuciones de valores extremos

Cuando $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, las distribuciones Gumbel, Fréchet y Weibull son llamadas distribuciones de valores extremos. Los casos Fréchet y Weibull tienen además un parámetro asociado α .

Ahora bien, en virtud de (74.2), la función de distribución acumulada de una variable aleatoria Gumbel de valor extremo EV0 (por las siglas en inglés de “Extreme Value”) es

$$G_0(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (74.7)$$

La función de distribución acumulada de una variable aleatoria Fréchet, EV1, se obtiene a partir de (74.4), de tal manera que

$$G_1(x) = e^{-x^{-\alpha}}, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0. \quad (74.8)$$

Por último, la función de distribución acumulada de una variable aleatoria Weibull, EV2, satisface

$$G_2(x) = e^{-(x)^{-\alpha}}, \quad x \leq 0, \quad \alpha < 0. \quad (74.9)$$

Observe que $G_1(x) = 0$ si $x < 0$ y $G_2(x) = 1$ si $x > 0$. Las tres distribuciones anteriores se pueden escribir en una sola ecuación paramétrica

$$\mathcal{G}_\xi(x) = \begin{cases} \exp\{-(\xi x)^{-\xi\alpha}\}, & \xi = 1, -1; \quad \xi x \geq 0; \quad \alpha > 0, \\ \exp\{-e^{-x}\}, & \xi = 0; \quad -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

De esta manera, $\mathcal{G}_0 = G_0$, $\mathcal{G}_1 = G_1$ y $\mathcal{G}_{-1} = G_2$. Las correspondientes funciones de densidad de las distribuciones de valores extremos son: Para EV0

$$\begin{aligned} g_0(x) &= \frac{d}{dx} e^{-e^{-x}} \\ &= e^{-e^{-x}} e^{-x} \\ &= G_0(x) e^{-x}, \end{aligned} \quad (74.10)$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. En el caso de EV1, se tiene que

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{d}{dx} e^{-x^{-\alpha}} \\ &= \alpha e^{-x^{-\alpha}} x^{-(1+\alpha)} \\ &= \alpha G_1(x) x^{-(1+\alpha)}, \end{aligned} \quad (74.11)$$

para $x \geq 0$ y $\alpha > 0$. Por último, para EV2, se tiene que

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \frac{d}{dx} e^{-(x)^{-\alpha}} \\ &= -\alpha e^{-(x)^{-\alpha}} (-x)^{-(1+\alpha)} \\ &= -\alpha G_2(x) (-x)^{-(1+\alpha)} \\ &= |\alpha| G_2(x) (-x)^{-(1+\alpha)}, \end{aligned} \quad (74.12)$$

para $x \leq 0$ y $\alpha < 0$. Es importante destacar que las densidades de las variables aleatorias de valor extremo son unimodales. Las densidades de Fréchet y Gumbel tienen sesgo a la derecha. Mientras que la función de densidad de Weibull tiene sesgo a la izquierda si $\alpha > -3.6$ y sesgo a la derecha (como la Fréchet y Gumbel) si $\alpha < -3.6$.

74.5 Propiedad de estabilidad de las distribuciones de valor extremo

Una propiedad importante que satisfacen las distribuciones de valores extremos EV0, EV1 y EV2 es la estabilidad (del máximo). Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con distribución F , entonces $\max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$ tiene distribución F^n . Se dice que una función de distribución F es estable si existen sucesiones de números reales $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tales que:

$$F^n(b_n + a_n x) = F(x). \quad (74.13)$$

Observe que esta propiedad está relacionada con la distribución límite de máximos, de tal forma que

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\} \leq b_n + a_n x\right\} = \mathbb{P}\left\{\frac{\max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\} - b_n}{a_n} \leq x\right\} \rightarrow F(x) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Si las funciones de distribución son de valor extremo, las sucesiones tienen una forma simple. Por ejemplo, en el caso Gumbel, EV0, se tiene que

$$G_0(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (74.14)$$

Si se eligen $b_n = \ln n$ y $a_n = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} G_0^n(b_n + a_n x) &= G_0^n(\ln n + x) \\ &= \left(e^{-e^{-(\ln n+x)}}\right)^n \\ &= \left(e^{-e^{-\ln n} e^{-x}}\right)^n \\ &= \left(e^{-\frac{1}{n} e^{-x}}\right)^n \\ &= e^{-e^{-x}} \\ &= G_0(x), \end{aligned}$$

para toda $x \in \mathbb{R}$. Es fácil verificar que EV1 y EV2 también son estables.

74.6 Momentos de las distribuciones de valores extremos

En esta sección se calculan los momentos de las distribuciones de valores extremos. En particular, en el caso Gumbel la media y la varianza están dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}_{\text{EV0}}[X] = \gamma,$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni ($= 0.577215664901\dots$) y

$$\text{Var}_{\text{EV0}}[X] = \frac{\pi}{6}.$$

El j -ésimo momento de la distribución de Fréchet EV1 es infinito si $\alpha \leq j$. Por otro lado, si $\alpha > j$, se tiene que

$$\mathbb{E}_{\text{EV1}}[X^j] = \Gamma\left(1 - \frac{j}{\alpha}\right).$$

Si $\alpha > 2$, la varianza satisface

$$\text{Var}_{\text{EV1}}[X] = \Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Asimismo, el j -ésimo momento de la función de distribución EV2 es:

$$E_{EV2}[X^j] = (-1)^j \Gamma\left(1 - \frac{j}{\alpha}\right).$$

En particular, la media está dada por

$$E_{EV2}[X] = -\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

y la varianza por

$$\text{Var}_{EV2}[X] = \Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

74.7 Distribuciones generalizadas de Pareto

Las funciones de distribución de probabilidad generalizadas de Pareto (GP), W_i , $i = 0, 1, 2$, se utilizan para modelar excesos sobre alguna cantidad fija. Las respectivas funciones de densidades se denotan por w_i , $i = 0, 1, 2$. Existe una relación analítica entre las distribuciones GP y las EV:

$$W_i(x) = 1 + \ln(G_i(x)) \quad \text{con} \quad \ln(G_i(x)) \geq -1.$$

Las tres funciones de distribución de probabilidad generalizadas de Pareto (GP) y sus correspondientes funciones de densidad de probabilidad, con parámetro α cuando éste sea el caso, son:

- (i) Exponencial (GP0). Las funciones de distribución de probabilidad acumulada y de densidad de GP0 son, respectivamente,

$$W_0(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{y} \quad w_0(x) = e^{-x}, \quad (74.15)$$

para toda $x \geq 0$.

- (ii) Pareto (GP1). Las funciones de distribución de probabilidad acumulada y de densidad de GP1 son, respectivamente,

$$W_1(x) = 1 - x^{-\alpha} \quad \text{y} \quad w_1(x) = \alpha x^{-(1+\alpha)}, \quad (74.16)$$

para $x \geq 1$, $\alpha > 0$.

- (iii) Beta (GP2). Las funciones de distribución de probabilidad acumulada y de densidad de GP2 son, respectivamente,

$$W_2(x) = 1 - (-x)^{-\alpha} \quad \text{y} \quad w_2(x) = -\alpha(-x)^{-(1+\alpha)}, \quad (74.17)$$

para $-1 \leq x \leq 0$, $\alpha < 0$.

74.8 Momentos de las distribuciones generalizadas de Pareto

A continuación se calculan los momentos de las distribuciones generalizadas de Pareto. Los momentos del caso exponencial GP0 son muy simples de obtener y se dejan como ejercicios del presente capítulo. El j -ésimo momento de GP1 se calcula como

$$\begin{aligned} E_{GP1}[X^j] &= \alpha \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{j-(1+\alpha)} dx \\ &= \alpha \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{j-(1+\alpha)+1}}{j - (1 + \alpha) + 1} \right]_1^b \\ &= \alpha \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{b^{j-\alpha}}{j - \alpha} - \frac{1^{j-\alpha}}{j - \alpha} \right] \\ &= \alpha \left[-\frac{1^{j-\alpha}}{j - \alpha} \right] \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - j}. \end{aligned}$$

Observe que la integral converge sólo si $j - \alpha < 0$, es decir, $\alpha > j$. Por lo tanto,

$$E_{GP1}[X^j] = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha - j} & \text{si } \alpha > j, \\ \infty & \text{si } \alpha \leq j. \end{cases}$$

Si $\alpha > 2$, la varianza satisface

$$\begin{aligned} \text{Var}_{GP1}[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - 2} - \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^2 \\ &= \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1) - \alpha^2(\alpha - 2)}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2} \\ &= \frac{\alpha}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2}. \end{aligned}$$

Por último, para el caso GP2, se tiene que

$$\begin{aligned} E_{GP2}[X^j] &= -\alpha(-1)^{-(1+\alpha)} \int_{-1}^0 x^{j-(1+\alpha)} dx \\ &= -\alpha(-1)^{-(1+\alpha)} \left[\frac{x^{j-(1+\alpha)+1}}{j - (1 + \alpha) + 1} \right]_{-1}^0 \\ &= -\alpha(-1)^{-(1+\alpha)} \left[\frac{x^{j-\alpha}}{j - \alpha} \right]_{-1}^0 \\ &= -\alpha(-1)^{-(1+\alpha)} \left[0 - \frac{(-1)^{j-\alpha}}{j - \alpha} \right] \\ &= \frac{\alpha(-1)^{-(1+\alpha)}(-1)^{j-\alpha}}{j - \alpha} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - j} (-1)^{j-2\alpha} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - j} (-1)^j (-1)^{-2\alpha} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha - j} (-1)^j \end{aligned}$$

con $\alpha < 0$ y entero. La varianza satisface, para $\alpha < 0$,

$$\begin{aligned}\text{Var}_{\text{GP2}}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-2} - \left(\frac{|\alpha|}{\alpha-1}\right)^2 \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)^2 - \alpha^2(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1) - \alpha^2(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}.\end{aligned}$$

74.9 Distribución del máximo de un conjunto de variables aleatorias y su relación entre GP y EV

Sean X_1, X_2, \dots, X_N variables aleatorias independientes y no negativas con función de distribución común F , con $F(0) = 0$. Sea N una variable aleatoria Poisson con parámetro $\lambda > 0$, $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, independiente de las X_1, X_2, \dots, X_N . Si se define $F^0(x) = 1$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\max_{0 \leq i \leq N} \{X_i\} \leq x\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\max_{0 \leq i \leq n} \{X_i\} \leq x, N = n\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\max_{0 \leq i \leq n} \{X_i\} \leq x\right\} \mathbb{P}\{N = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X_0 \leq x, X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x\} \mathbb{P}\{N = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X_0 \leq x\} \mathbb{P}\{X_1 \leq x\} \cdots \mathbb{P}\{X_n \leq x\} \mathbb{P}\{N = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbb{P}\{X \leq x\}]^n \mathbb{P}\{N = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F^n(x) \mathbb{P}\{N = n\}.\end{aligned}$$

Dado que $\mathbb{P}\{N = n\} = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$, se sigue que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\max_{0 \leq i \leq N} \{X_i\} \leq x\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} F^n(x) \mathbb{P}\{N = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F^n(x) \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(F(x)\lambda)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda F(x)} \\ &= e^{-\lambda(1-F(x))}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}\left\{\max_{0 \leq i \leq N} \{X_i\} \leq x\right\} = e^{-\lambda(1-F(x))}, \quad x \geq 0.$$

A continuación se establece una relación entre la distribución generalizada de Pareto, GP1, y la distribución de valor extremo EV1. Considere primero la función de distribución de GP1, la cual está dada por

$$W_1(x) = 1 - x^{-\alpha}, \quad x \geq 1, \quad \alpha > 0.$$

Si se escribe $F(x) = W_1(x)$, se sigue que $1 - F(x) = x^{-\alpha}$. En consecuencia,

$$\mathbb{P}\left\{\max_{0 \leq i \leq N} \{X_i\} \leq x\right\} = e^{-\lambda(1-F(x))} = e^{-\lambda x^{-\alpha}}.$$

Si $\lambda = 1$, se tiene $G_1(x) = e^{-x^{-\alpha}}$, la cual es EV1.

Existe también una relación similar entre GP2 y EV2. En efecto, suponga ahora que F es GP2, la distribución Beta, la cual está dada por

$$W_{2,\alpha}(x) = 1 - (-x)^{-\alpha}, \quad -1 \leq x \leq 0, \quad \alpha < 0.$$

Sea $F(x) = W_2(x)$, así $1 - F(x) = (-x)^{-\alpha}$. De esta manera,

$$\mathbb{P}\left\{\max_{0 \leq i \leq N} \{X_i\} \leq x\right\} = e^{-\lambda(1-F(x))} = e^{-\lambda(-x)^{-\alpha}}.$$

Si $\lambda = 1$, se obtiene ahora EV2.

74.10 Condición de von Mises

La condición de von Mises está relacionada con la propiedad de estabilidad. Se dice que una distribución F satisface la condición de von Mises si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} = \alpha > 0,$$

donde $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. Por ejemplo, en el caso Fréchet, EV1, si $F(x) = G_1(x)$, se tiene que

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = 1 - e^{-x^{-\alpha}}$$

y

$$f(x) = \alpha e^{-x^{-\alpha}} x^{-(1+\alpha)}.$$

En este caso,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \alpha e^{-x^{-\alpha}} x^{-(1+\alpha)}}{1 - e^{-x^{-\alpha}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha e^{-x^{-\alpha}} x^{-\alpha}}{1 - e^{-x^{-\alpha}}}. \end{aligned}$$

Para calcular el límite anterior se utiliza la regla de L'Hopital, es decir, se deriva tanto el numerador como el denominador y, posteriormente, se toma el límite, esto es,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha e^{-x^{-\alpha}} x^{-\alpha}}{1 - e^{-x^{-\alpha}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha [e^{-x^{-\alpha}} (-\alpha)x^{-\alpha-1} + x^{-\alpha} e^{-x^{-\alpha}} \alpha x^{-\alpha-1}]}{-\alpha e^{-x^{-\alpha}} x^{-(1+\alpha)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha [(-\alpha)x^{-\alpha-1} + x^{-\alpha} \alpha x^{-\alpha-1}]}{-\alpha x^{-(1+\alpha)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\alpha^2 + x^{-\alpha} \alpha}{-\alpha} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\alpha - x^{-\alpha}] \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

De la misma manera la distribución de Pareto, GP1, satisface la condición de von Mises. Sea $F(x) = W_1(x)$, entonces

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = x^{-\alpha}$$

y

$$f(x) = \alpha x^{-(1+\alpha)}.$$

Por lo tanto,

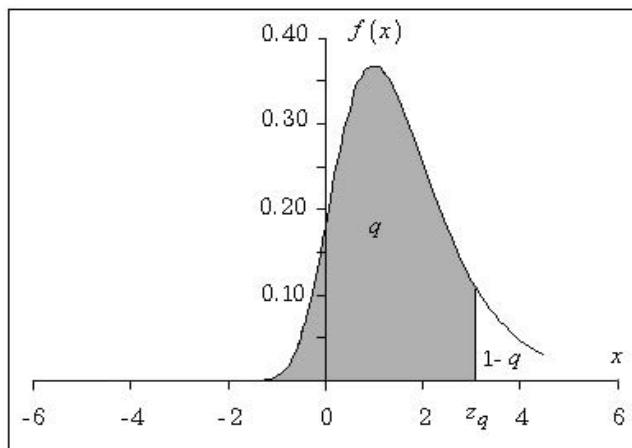
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x f(x)}{\bar{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \alpha x^{-(1+\alpha)}}{x^{-\alpha}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^{-\alpha}}{x^{-\alpha}} \\ &= \alpha > 0. \end{aligned}$$

74.11 Cuantiles de EV y GP y valor en riesgo

En esta sección se determinan los cuantiles de las distribuciones de EV y GP y se discute su relación con el concepto de valor en riesgo. El cuantil q de una distribución de probabilidad F , asociada a una variable aleatoria continua, es el valor de z_q tal que

$$F(z_q) = \mathbb{P}\{X \leq z_q\} = \int_{-\infty}^{z_q} f(x) dx = q.$$

Las Gráficas 74.4 y 74.5 muestran el cuantil q tomando en cuenta la función de densidad, $f = f(x)$, y la función de distribución acumulada, $F = F(x)$.



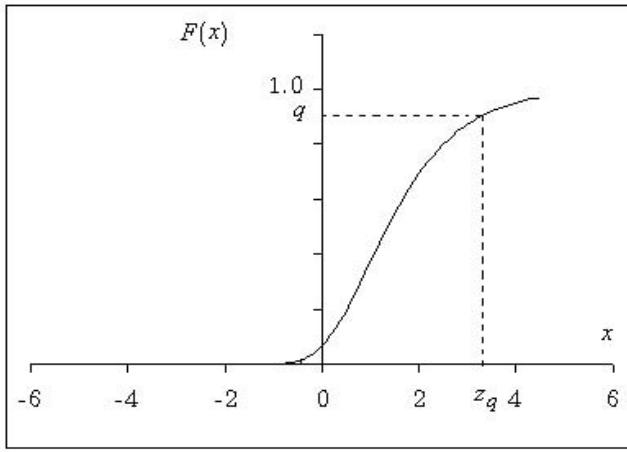
Gráfica 74.4 Cuantil q tomando en cuenta $f(x)$.

Es importante señalar que si la función de distribución no es absolutamente continua, entonces el cuantil q no es único y se toma el ínfimo de tal manera que

$$z_q = \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq q\}.$$

Si X son los rendimientos de un activo o un portafolio, se define el valor en riesgo de X al nivel (de confianza) $1 - q$ denotado por $-\text{VaR}_{1-q}^X$, como el peor valor del rendimiento del portafolio en un intervalo de confianza del $(1 - q)100\%$. Es decir,

$$\text{VaR}_{1-q}^X = -z_q = -\inf\{x \in \mathbb{R} | \mathbb{P}\{X \leq x\} \geq q\}.$$

Gráfica 74.5 Cuantil q tomando en cuenta $F(x)$.

A continuación, se proporcionan fórmulas explícitas de los cuantiles de las distribuciones EV y GP. Para ello, simplemente, se utiliza la inversa de la función de distribución acumulada. En el caso de las distribuciones de valores extremos, EV, se tiene que:

- (i) Gumbel (EV0). En este caso, $G_0(z_q) = \exp\{-e^{-z_q}\} = q$, lo cual implica que $e^{-z_q} = -\ln(q)$ y así

$$z_q = -\ln(-\ln(q)).$$

- (ii) Fréchet (EV1). Observe que $G_1(z_q) = \exp\{-z_q^{-\alpha}\} = q$ implica

$$z_q = (-\ln(q))^{-1/\alpha}.$$

- (iii) Weibull (EV2). Note que $G_2(z_q) = \exp\{-(-z_q)^{-\alpha}\} = q$ conduce a

$$z_q = -(-\ln(q))^{-1/\alpha}.$$

Las fórmulas explícitas de los cuantiles de las distribuciones de probabilidad generalizadas de Pareto, (GP), se obtienen a continuación:

- (iv) Exponencial (GP0). En este caso, $W_0(z_q) = 1 - e^{-z_q} = q$, lo cual conduce a

$$z_q = -\ln(1 - q).$$

- (v) Pareto (GP1). Ahora $W_1(z_q) = 1 - z_q^{-\alpha} = q$, de donde

$$z_q = (1 - q)^{-1/\alpha}.$$

- (vi) Beta (GP2). Observe que $W_2(z_q) = 1 - (-z_q)^{-\alpha} = q$, así

$$z_q = -(1 - q)^{-1/\alpha}.$$

74.12 Bibliografía sugerida

- Embrechts P., C. Klüppelberg, and T. Mikosch (1991). Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Reiss R. D. and M. Thomas (2000). Statistical Analysis of Extreme Values (from Insurance, Finance, Hydrology and other Fields). Second Edition, Birkhäuser-Verlag. Basel, Boston, Berlin.

74.13 Ejercicios

74.1 Sea

$$G_\xi(x) = \exp\left\{-(1 + \xi x)^{-1/\xi}\right\}, \quad 1 + \xi x > 0, \quad \xi \neq 0.$$

Muestre que G_ξ es Fréchet para $\xi > 0$ y Weibull para $\xi < 0$. Pruebe que si $\xi \rightarrow 0$, entonces G_0 es Gumbel.

74.2 En el caso de una distribución de Gumbel, EV0, muestre que la media y la varianza satisfacen, respectivamente,

$$\mathbb{E}_{\text{EV0}}[X] = \gamma$$

y

$$\text{Var}_{\text{EV0}}[X] = \frac{\pi}{6}.$$

74.3 Muestre que la distribución de Fréchet, EV1, dada por

$$G_1(x) = e^{-x^{-\alpha}}, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0,$$

es estable.

Solución: Basta tomar $b_n = 0$ y $a_n = n^{1/\alpha}$.

74.4 Pruebe que la distribución de Weibull, EV2, definida mediante

$$G_2(x) = e^{-(x)^{-\alpha}}, \quad x \leq 0, \quad \alpha < 0,$$

es estable.

Solución: Basta considerar $b_n = 0$ y $a_n = n^{1/\alpha}$.

74.5 Considere la siguiente parametrización de distribuciones:

$$W_\gamma(x) = 1 - (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}.$$

Muestre que si $0 < x$ y $\gamma > 0$, la distribución es Pareto, y si $0 < x < 1/|\gamma|$ y $\gamma < 0$, la distribución es Beta.

74.6 La distribución de Burr se define como:

$$F_{\alpha,\theta,\mu,\sigma}(x) = \left[1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}\right]^{-\theta}, \quad x > \mu, \quad \sigma > 0, \quad 0 < \alpha, \quad \theta \leq 100,$$

donde α y θ son los parámetros de forma, μ es el parámetro de localización y σ el parámetro de escala. Si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, la distribución acumulada de Burr está dada por

$$F_{\alpha,\theta}(x) = (1 + x^{-\alpha})^{-\theta}, \quad x > 0, \quad 0 < \alpha, \quad \theta \leq 100.$$

Muestre que la distribución de Burr satisface la condición de von Mises.

Solución: Sea $F(x) = F_{\alpha,\theta}(x)$, entonces

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = 1 - (1 + x^{-\alpha})^{-\theta}.$$

La función de densidad se obtiene mediante

$$\begin{aligned}\frac{dF(x)}{dx} &= \frac{d(1 + x^{-\alpha})^{-\theta}}{dx} \\ &= -\theta(1 + x^{-\alpha})^{-\theta-1} \frac{dx^{-\alpha}}{dx} \\ &= -\theta(1 + x^{-\alpha})^{-\theta-1} (-\alpha)x^{-\alpha-1} \\ &= \alpha\theta x^{-\alpha-1} (1 + x^{-\alpha})^{-\theta-1}.\end{aligned}$$

Observe ahora que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\alpha\theta x^{-\alpha-1} (1 + x^{-\alpha})^{-\theta-1}}{1 - (1 + x^{-\alpha})^{-\theta}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha\theta x^{-\alpha} (1 + x^{-\alpha})^{-\theta-1}}{1 - (1 + x^{-\alpha})^{-\theta}}.\end{aligned}$$

Para calcular el límite anterior se utiliza la regla de L'Hopital. Esto es,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{\bar{F}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha\theta x^{-\alpha} (1 + x^{-\alpha})^{-\theta-1}}{1 - (1 + x^{-\alpha})^{-\theta}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha\theta [x^{-\alpha}(-\theta-1)(1 + x^{-\alpha})^{-\theta-1-1} + (1 + x^{-\alpha})^{-\theta-1}]}{\theta(1 + x^{-\alpha})^{-\theta-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha [(-\theta-1)x^{-\alpha} (1 + x^{-\alpha})^{-1} + 1] \\ &= \alpha > 0.\end{aligned}$$

XVIII. PREREQUISITOS PARA MODELOS ECONÓMICOS DE RIESGOS

- 75. Optimización determinista en tiempo continuo (I): cálculo de variaciones
- 76. Optimización determinista en tiempo continuo (II): control óptimo
- 77. Optimización determinista en tiempo continuo (III): programación dinámica
- 78. Consumidor intertemporal (I): caso determinista
- 79. Consumidor intertemporal (II): caso determinista y decisiones diversas
- 80. Modelos macroeconómicos deterministas de determinación de tasas de interés
- 81. Programación dinámica estocástica en tiempo continuo

CAPÍTULO 75

OPTIMIZACIÓN DETERMINISTA EN TIEMPO CONTINUO I (CÁLCULO DE VARIACIONES)

Conceptos básicos de este capítulo:

- Cálculo de variaciones
- Diferencial de Fréchet
- Diferencial de Gateaux
- Condiciones necesarias de máximo
- Ecuación de Euler-Lagrange
- Condición de Legendre
- Concavidad y condiciones suficientes de máximo

75.1 Introducción

El problema que resuelve un consumidor-inversionista racional en tiempo continuo consiste en determinar las trayectorias de consumo e inversión que maximizan su satisfacción (felicidad) sujeto a su restricción presupuestal. Este problema que es parte esencial del análisis económico y financiero se resuelve mediante el uso de diversas técnicas de programación matemática dinámica.

Es importante destacar que a diferencia del caso estático en donde el estudio es referido a un solo punto en el tiempo, en el caso dinámico el análisis se efectúa a lo largo de un intervalo de tiempo. Es también imprescindible aclarar que en el caso dinámico no se busca resolver en cada instante un problema estático de maximización de utilidad (en tiempo continuo se tendrían que resolver infinitos problemas!), sino resolver un solo problema de maximización de utilidad, en un tiempo inicial dado, en el que se predeterminen las decisiones futuras de consumo e inversión, es decir, en el que se fije de antemano un plan a seguir sobre el consumo y la inversión.

El presente capítulo se concentra en caracterizar las soluciones del problema de un consumidor-inversionista racional en tiempo continuo en el marco determinista. Ciertamente, en la realidad un consumidor-inversionista toma decisiones en un ambiente de riesgo e incertidumbre. Sin embargo, es deseable revisar el marco determinista porque éste proporciona las bases del modelado estocástico de problemas de decisión, lo cual constituye justamente uno de los objetivos del presente libro.

75.2 Cálculo de variaciones

En la teoría económica y financiera en tiempo continuo se plantean problemas en donde se maximizan funcionales representadas por integrales sujetas a un conjunto de restricciones y cuyas soluciones pertenecen a algún espacio de funciones. Bajo el esquema determinista, una de las técnicas de solución de uso más frecuente es el cálculo de variaciones, el cual constituye una de las ramas principales del análisis funcional no lineal.

75.3 La diferencial de Fréchet

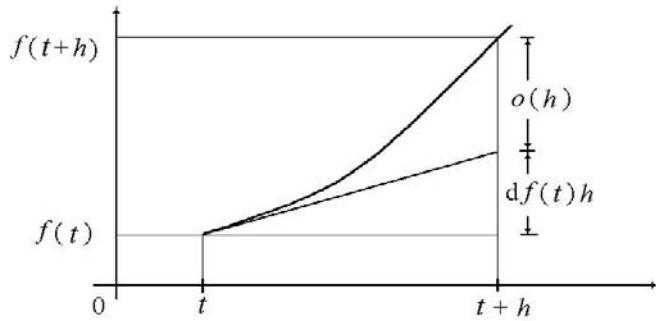
En 1906, el matemático francés Maurice René Fréchet (1878-1973) introdujo la diferencial que lleva su nombre¹. El concepto de diferencial de Fréchet generaliza la diferencial de una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y se ilustra a continuación. Por ejemplo, si $n = 1$ y f es diferenciable en t , la diferencial de f en t valuada en h es la única función lineal en h , $T_1(h) = f'(t)h$, que approxima la diferencia $f(t + h) - f(t)$ con un error $o(h)$, es decir,

$$f(t + h) - f(t) = T(h) + o(h),$$

¹ Fréchet en sus estudios sobre espacios abstractos introdujo el llamado espacio de Fréchet, un espacio localmente convexo, metrizable y completo.

donde $o(h)/h \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$ (véase la gráfica 75.1). La cantidad $o(h)$ es llamada un infinitésimo de orden superior al primero con respecto de h . Por ejemplo, $o(h) = h^{1+\delta}$, $\delta > 0$, es un infinitésimo de orden superior al primero con respecto de h , ya que $o(h)/h = h^\delta \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$. Es usual denotar $T(h)$ por $df(t)(h)$. Observe también que, en este caso,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = f'(t).$$



Gráfica 75.1 Diferencial de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

De la misma manera, si $n = 2$, la diferencial de f en (t_1, t_2) valuada en (h_1, h_2) es la única función lineal en (h_1, h_2) ,

$$T_2(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial t_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2} h_2,$$

que aproxima a $f(t_1 + h_1, t_2 + h_2) - f(t_1, t_2)$ con un error $o(||(h_1, h_2)||)$, es decir,

$$f(t_1 + h_1, t_2 + h_2) - f(t_1, t_2) = \frac{\partial f}{\partial t_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2} h_2 + o(||(h_1, h_2)||),$$

donde $|| \cdot ||$ es la norma Euclídea bidimensional.

A continuación se define la diferencial de Fréchet en un espacio de dimensión infinita equipado con una norma. Sea $(V, || \cdot ||)$ un espacio lineal normado y considere una bola abierta con centro en f y radio $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(f) = \{h \in V : ||h - f|| < \varepsilon\}$. Sea $J : B_\varepsilon(f) \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional, no necesariamente lineal. Se dice que la funcional J es Fréchet-diferenciable en el punto $f \in B_\varepsilon(f)$ si existe una funcional lineal acotada $dJ(f) \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = V^*$ (el espacio dual de V) tal que para $f + h \in B_\varepsilon(f)$ se cumple

$$J(f + h) - J(f) = dJ(f)(h) + o(||h||), \quad (75.1)$$

donde $o(||h||)$ significa que

$$\frac{|o(||h||)|}{||h||} \rightarrow 0, \quad (75.2)$$

cuando $||h|| \rightarrow 0$. Observe que (75.1) puede reescribirse de manera más conveniente como

$$\lim_{||h|| \rightarrow 0} \frac{|J(f + h) - J(f) - dJ(f)(h)|}{||h||} = 0.$$

La funcional lineal $dJ(f)(h)$ es llamada la diferencial de Fréchet de la funcional J en el punto f valuada en h . Obviamente, este concepto es local. Se dice que J es diferenciable en un conjunto $B_\varepsilon(f) \subset V$ si es diferenciable para cada $g \in B_\varepsilon(f)$, esto es, para cada $g \in B_\varepsilon(f)$ existe $dJ(g) \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = V^*$, tal que cumple con la propiedad (75.1).

75.4 La diferencial de Fréchet está definida en todo V

Es importante destacar que aunque J está sólo definida en $B_\varepsilon(f)$, la diferencial $dJ(f)(h)$ está definida en todo V . En efecto, sea $h \in V$, $h \neq 0$, entonces $f + (\varepsilon h / 2\|h\|) \in B_\varepsilon(f)$, ya que

$$\left\| f + \frac{\varepsilon h}{2\|h\|} - f \right\| = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Por lo tanto, si J es diferenciable en f , entonces

$$J\left(f + \frac{\varepsilon h}{2\|h\|}\right) - J(f) = \frac{\varepsilon}{2\|h\|} dJ(f)(h) + o(\frac{1}{2}\varepsilon).$$

75.5 Unicidad de la diferencial de Fréchet

A continuación se muestra que la diferencial de Fréchet es única. En efecto, si $J(f+h) - J(f)$ se puede aproximar por una funcional lineal $\varphi(h) = dJ(f)(h)$ con un error $o(\|h\|)$, entonces $\varphi(h)$ es única. Suponga que existe otra funcional lineal $\psi(h)$ con la misma propiedad, entonces

$$\varphi(h) + o(\|h\|) = J(f+h) - J(f) = \psi(h) + o(\|h\|).$$

Por lo tanto, $\varphi(h) - \psi(h) = o(\|h\|) - o(\|h\|) = o(\|h\|)$. Es decir, $T(h) \equiv \varphi(h) - \psi(h)$ es una funcional lineal y, al mismo tiempo, un infinitésimo de orden superior al primero con respecto de $\|h\|$. Esto quiere decir que $T(h)/\|h\| \rightarrow 0$. Se afirma que $T(h) \equiv 0$. Suponga, lo contrario, es decir, existe $h_0 \neq 0$ tal que $T(h_0) \neq 0$. Defina $h_n = h_0/n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(h_n)}{\|h_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nT(h_0)}{n\|h_0\|} = \frac{T(h_0)}{\|h_0\|} \neq 0.$$

Por lo tanto, $T(h) \equiv 0$, es decir, $\varphi(h) \equiv \psi(h)$.

75.6 Propiedades básicas de la diferencial de Fréchet

En esta sección se establecen, brevemente, algunas de las propiedades básicas de la diferencial de Fréchet. Si $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ es constante, es decir, $J(f) = c$ para toda $f \in V$, entonces $dJ(f) \equiv 0$, ya que $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} |J(f+h) - J(f) - 0|/\|h\| = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} |c - c|/\|h\| = 0$. Si J es lineal, entonces $dJ(f)(h) \equiv J(h)$ para toda f y h , ya que $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} |J(f+h) - J(f) - J(h)|/\|h\| = 0$. Por último, si J_1 y J_2 son dos funcionales de V en \mathbb{R} , entonces es inmediato verificar que $d(J_1 + J_2)(f) \equiv dJ_1(f) + dJ_2(f)$.

75.7 Diferencial de Gateaux

La diferencial de Gateaux extiende el concepto de derivada direccional de una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio lineal normado y $J : B_\varepsilon(f) \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional. Se dice que J es Gateaux-diferenciable en el punto $f \in B_\varepsilon(f)$ si el límite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{J(f + \delta h) - J(f)}{\delta}$$

existe (es finito), en cuyo caso es denotado por

$$\frac{d}{d\delta} J(f + \delta h) \Big|_{\delta=0} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{J(f + \delta h) - J(f)}{\delta}.$$

Si J es diferenciable en el sentido de Fréchet, entonces J es también diferenciable en el sentido de Gateaux y $dJ(f)(h) = (d/d\delta)J(f + \delta h)|_{\delta=0}$. En efecto, suponga que $f + \delta h \in B_\varepsilon(f)$. Si J es diferenciable en el sentido de Fréchet, entonces

$$J(f + \delta h) - J(f) = \delta dJ(f)(h) + o(\delta\|h\|).$$

Por lo tanto,

$$\frac{J(f + \delta h) - J(f)}{\delta} = dJ(f)(h) + \frac{o(\delta ||h||)}{\delta}.$$

Es decir,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{J(f + \delta h) - J(f)}{\delta} = dJ(f)(h).$$

75.8 Diferencial de Fréchet y condición necesaria de un máximo

Una condición necesaria de un máximo de J en el punto f es que $dJ(f)(h) = 0$ para toda $h \in V$. Suponga, por el contrario, que existe un $h_0 \in V$ tal que $dJ(f)(h_0) \neq 0$ y

$$J(f + h_0) - J(f) = dJ(f)(h_0) + o(||h_0||).$$

Si h_0 es suficientemente pequeño (dividiendo el h_0 inicial por n grande), entonces el signo de $J(f + h_0) - J(f)$ coincide con el signo de $dJ(f)(h_0)$. Si f es máximo se tiene que $J(f + h_0) - J(f) \leq 0$. Observe ahora que

$$dJ(f)(-h_0) = -dJ(f)(h_0).$$

De esta manera,

$$J(f - h_0) - J(f) = -dJ(f)(h_0) + o(||h_0||).$$

Por lo tanto, $J(f - h_0) - J(f)$ tiene signo contrario al de $J(f + h_0) - J(f)$, lo cual es imposible pues J alcanza un máximo en f .

75.9 La segunda diferencial de Fréchet

Como en el caso de la primera diferencial de Fréchet, la segunda diferencial de Fréchet generaliza el concepto de segunda diferencial de una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en un punto, la cual se define con base en el término de segundo orden (multiplicado por 2) en la expansión en serie de Taylor. Por ejemplo, en el caso de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable, la segunda diferencial de f en t valuada en h se define como $d^2f(t)(h, h) = f''(t)h^2$. De manera similar, si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable, la segunda diferencial de f en (t_1, t_2) valuada en (h_1, h_2) se define como la forma cuadrática

$$d^2f(t_1, t_2)((h_1, h_2), (h_1, h_2)) = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Por último, como un buen ejercicio mental, la segunda diferencial de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(t_1, t_2) = (\phi(t_1, t_2), \psi(t_1, t_2))$$

está dada por

$$d^2f(t_1, t_2)((h_1, h_2), (h_1, h_2)) = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} (\phi_{11}, \psi_{11}) & (\phi_{12}, \psi_{12}) \\ (\phi_{21}, \psi_{21}) & (\phi_{22}, \psi_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Sea $(V, || \cdot ||)$ un espacio lineal normado y $J : B_\varepsilon(f) \subset V \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que el funcional J es dos veces diferenciable en el sentido de Fréchet en el punto $f \in B_\varepsilon$ si existe una funcional lineal acotada $dJ(f) \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ y una funcional bilineal acotada $d^2J(f) \in \mathcal{B}(V \times V, \mathbb{R})$ tales que si $f + h \in B_\varepsilon(f)$ se cumple que

$$J(f + h) - J(f) = dJ(f)(h) + d^2J(f)(h, h) + o(||h||^2), \quad (75.3)$$

donde $o(||h||^2)$ significa que

$$\frac{|o(||h||^2)|}{||h||^2} \rightarrow 0,$$

cuando $\|h\| \rightarrow 0$. La cantidad $o(\|h\|^2)$ es llamada un infinitésimo de orden superior al segundo con respecto de $\|h\|$. La funcional bilineal acotada $d^2J(f)(h, h)$ es llamada la segunda diferencial de Fréchet.

75.10 Diferencial segunda de Fréchet y condición necesaria de máximo

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio lineal normado y sea $J : B_\varepsilon(f) \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en el sentido de Fréchet. Si J alcanza un máximo en f , entonces $d^2J(f)(h, h) \leq 0$ para toda $h \in V$, es decir, la funcional cuadrática $d^2J(f)(h, h)$ es definida negativa. En efecto, si J alcanza un máximo en f , entonces $dJ(f)(h) = 0$ para toda $h \in V$. Suponga que $f + h \in B_\varepsilon(f)$, entonces

$$J(f + h) - J(f) = d^2J(f)(h, h) + o(\|h\|^2). \quad (75.4)$$

Suponga, por el contrario, que existe un h_0 tal que $d^2J(f)(h_0, h_0) > 0$. Observe que para todo $\delta \neq 0$, se cumple que $d^2J(f)(\delta h_0, \delta h_0) = \delta^2 d^2J(f)(h_0, h_0) > 0$. Sea $h = \delta h_0$, si δ es suficientemente pequeña, entonces existen puntos h en V suficientemente pequeños para los cuales $J(f + h) - J(f)$ y $d^2J(f)(h, h)$ tienen el mismo signo, esto contradice el hecho de que f sea un máximo de J . Observe que la condición $d^2J(f)(h, h) \leq 0$ para toda $h \in V$ es necesaria pero no suficiente para que J tenga un máximo en f , al contrario de como sucede en el caso de dimensión finita.

75.11 Diferencial segunda de Fréchet y condición suficiente de máximo

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio lineal normado y sea $J : B_\varepsilon(f) \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en el sentido de Fréchet. Si $dJ(f)(h) = 0$ para toda $h \in V$ y si existe una constante $c < 0$ tal que $d^2J(f)(h, h) \leq c\|h\|^2$ para toda $h \in V$, es decir, la funcional cuadrática $d^2J(f)(h, h)$ es fuertemente negativa, entonces J alcanza un máximo en f . Suponga que $f + h \in B_\varepsilon(f)$, entonces

$$J(f + h) - J(f) = d^2J(f)(h, h) + o(\|h\|^2). \quad (75.5)$$

Considere $\varepsilon > 0$ tal que para $\|h\| < \varepsilon$ se verifique que $|o(\|h\|^2)| < -c\|h\|^2/2$. Por continuidad de $o(\|h\|^2)$, se sigue que dado $-c/2 > 0$, existe $\varepsilon > 0$, tal que $|o(\|h\|^2)/\|h\|^2 - 0| < -c/2$ para $\|h\| < \varepsilon$. Claramente, $o(\|h\|^2) \leq |o(\|h\|^2)| < -c\|h\|^2/2$. Por lo tanto,

$$J(f + h) - J(f) = d^2J(f)(h, h) + o(\|h\|^2) < c\|h\|^2 - \frac{c\|h\|^2}{2} = \frac{c\|h\|^2}{2} < 0,$$

lo cual implica que $J(f + h) - J(f) < 0$ para $\|h\| < \varepsilon$, es decir, J tiene un máximo (local) en f .

75.12 Un primer ejemplo

Sea $V = C[a, b]$ el espacio de funciones continuas en $[a, b]$ con la norma $\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$. Defina

$$J(f) = \frac{1}{2} \int_a^b g_0(t)f^2(t)dt,$$

donde g_0 es una función fija en V . En este caso,

$$J(f + h) - J(f) = \int_a^b g_0(t)f(t)h(t)dt + \frac{1}{2} \int_a^b g_0(t)h^2(t)dt.$$

En consecuencia,

$$dJ(f)(h) = \int_a^b g_0(t)f(t)h(t)dt$$

y

$$d^2J(f)(h, h) = \frac{1}{2} \int_a^b g_0(t)h^2(t)dt.$$

Se puede verificar, fácilmente, que

$$\|\mathrm{d}J(f)\| = \sup_{h \neq 0} \frac{\|\mathrm{d}J(f)(h)\|}{\|h\|} = \int_a^b |g_0(t)f(t)|dt$$

y

$$\|\mathrm{d}^2J(f)\| = \sup_{h \neq 0} \frac{\|\mathrm{d}J(f)(h, h)\|}{\|h\|^2} = \frac{1}{2} \int_a^b |g_0(t)|dt.$$

75.13 Lemas fundamentales del cálculo de variaciones

Una vez que se ha introducido el concepto de diferencial de una funcional es necesario establecer varios lemas relacionados con problemas de optimización en donde la funcional objetivo está representada por una integral.

75.13.1 Lema I

Sea $g_0 \in C[a, b]$ y suponga que

$$\int_a^b g_0(t)h(t)dt = 0$$

para toda $h \in C_0[a, b]$, es decir, $h \in C[a, b]$ y $h(a) = h(b) = 0$, entonces $g_0 \equiv 0$. En efecto, suponga lo contrario, es decir, existe un t_0 tal que $g_0(t_0) \neq 0$. Por la continuidad de g_0 existe un subintervalo $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ en donde $g_0 \neq 0$. Defina h de tal manera que $h(t) = (t - t_1)(t_2 - t)$ (un segmento de parábola) en $[t_1, t_2]$ y $h(t) = 0$ en $[a, b] \setminus [t_1, t_2]$. Obviamente, $h \in C_0[a, b]$. Sin embargo,

$$0 = \int_a^b g_0(t)h(t)dt = \int_a^b g_0(t)(t - t_1)(t_2 - t)dt > 0.$$

Además, se tiene el siguiente resultado. Sea $g_0 \in C[a, b]$ y suponga que

$$\int_a^b g_0(t)h(t)dt = 0$$

para toda $h \in C_0^n[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ tiene derivadas continuas hasta el orden } n \text{ y } h(a) = h(b) = 0\}$, entonces $g_0 \equiv 0$. La demostración es la misma que la del lema anterior, sólo que $h(t) = [(t - t_1)(t_2 - t)]^{n+1}$ en $[t_1, t_2]$ y $h(t) = 0$ en $[a, b] \setminus [t_1, t_2]$.

75.13.2 Lema II

Sea $g_0 \in C[a, b]$ y suponga que

$$\int_a^b g_0(t)h'(t)dt = 0$$

para toda $h \in C_0^1[a, b]$, entonces $g_0 \equiv c = \text{constante}$. En efecto, sea $A = \int_a^b g_0(t)dt$, reescriba $A = c(b - a)$, entonces $\int_a^b (g_0(t) - c)dt = 0$. Sea

$$h(t) = \int_a^t (g_0(u) - c)du,$$

entonces $h \in C_0^1[a, b]$. Observe ahora que

$$\int_a^b (g_0(t) - c)h'(t)dt = \int_a^b g_0(t)h'(t)dt - c[h(b) - h(a)] = 0,$$

lo cual implica que

$$\int_a^b (g_0(t) - c)^2 dt = 0.$$

Por lo tanto $g_0(t) - c = 0$ para toda $t \in [a, b]$.

75.13.3 Lema III

Sea $g_0 \in C[a, b]$ y suponga que

$$\int_a^b g_0(t)h''(t)dt = 0$$

para toda $h \in C_{0,1}^2[a, b]$, es decir, $h \in C_0^2[a, b]$ y $h'(a) = h'(b) = 0$, entonces $g_0 = c_0 + c_1 t$. En efecto, sean c_0 y c_1 definidas por las condiciones

$$\int_a^b (g_0(t) - c_0 - c_1 t)dt = 0$$

y

$$\int_a^b \left(\int_a^s (g_0(t) - c_0 - c_1 t)dt \right) ds = 0.$$

Sea

$$h(t) = \int_a^t \left(\int_a^s (g_0(u) - c_0 - c_1 u)du \right) ds.$$

Evidentemente, $h \in C_{0,1}^2[a, b]$. Para demostrar la existencia de c_0 y c_1 observe, primero, que

$$h(t) = \int_a^t \int_a^s g_0(u)duds - c_0 \left(\frac{t^2 - a^2}{2} - a(t - a) \right) - \frac{c_1}{2} \left(\frac{t^3 - a^3}{3} - a^2(t - a) \right)$$

y

$$h'(t) = \int_a^t (g_0(u) - c_0 - c_1 u)du = \int_a^t g_0(u)du - c_0(t - a) - c_1 \left(\frac{t^2 - a^2}{2} \right).$$

Ahora bien, en virtud de que $h(b) = h'(b) = 0$, se tiene que

$$\int_a^b \int_a^s g_0(u)duds - c_0 \left(\frac{b^2 - a^2}{2} - a(b - a) \right) - \frac{c_1}{2} \left(\frac{b^3 - a^3}{3} - a^2(b - a) \right) = 0$$

y

$$\int_a^b g_0(u)du - c_0(b - a) - c_1 \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) = 0.$$

Estas dos condiciones se pueden reescribir matricialmente como sigue:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6}(b-a)^2(b+2a) & \frac{1}{2}(b-a)^2 \\ \frac{1}{2}(b^2-a^2) & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b \int_a^s g_0(u)duds \\ \int_a^b g_0(u)du \end{pmatrix}.$$

Es fácil verificar que el determinante del sistema está dado por $\Delta = (b-a)^4/12 \neq 0$. De este lema se desprende el siguiente resultado más general. Si $g_0 \in C[a, b]$ y

$$\int_a^b g_0(t)h^{(n)}(t)dt = 0$$

para toda $h \in C_{0,1,\dots,n-1}^n[a, b]$, entonces $g_0 = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k$.

75.13.4 Lema IV

Sean $g_0, g_1 \in C[a, b]$ y suponga que

$$\int_a^b [g_1(t)h(t) + g_0(t)h'(t)] dt = 0$$

para toda $h \in C_0^1[a, b]$, entonces $g'_0(t) = g_1(t)$ para toda $t \in [a, b]$. En consecuencia, $g'_0 \in C[a, b]$. En efecto, defina $A(t) = \int_a^t g_1(s)ds$. Ahora bien, si se integra por partes $\int_a^b g_1(t)h(t)dt$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_a^b g_1(t)h(t)dt &= A(t)h(t)\Big|_a^b - \int_a^b A(t)h'(t)dt \\ &= - \int_a^b A(t)h'(t)dt. \end{aligned}$$

Por hipótesis $\int_a^b g_1(t)h(t)dt = \int_a^b g_0(t)h'(t)dt$, así $\int_a^b (A(t) - g_0(t))h'(t)dt$. Por el lema II se obtiene que $A(t) = g_0(t)$ y, por lo tanto, $g_1(t) = g'_0(t)$ para toda $t \in [a, b]$. Se enfatiza que la diferenciabilidad de g_0 no se había supuesto de antemano.

75.14 Problemas del tipo I (funcionales con un solo argumento con fronteras fijas)

En esta sección se estudia el problema más simple del cálculo de variaciones y se establecen las condiciones necesarias de un máximo. En este problema de optimización, la funcional objetivo es representada por una integral, cuyo integrando depende de una función perteneciente a algún espacio. Consideré el siguiente problema de optimización:

$$\text{Maximizar } J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))dt,$$

sujeto a

$$f(a) = A, \quad f(b) = B, \quad (75.6)$$

donde $F \in C^2$, es decir, F es una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto de todos sus argumentos. En este caso, $V = C^1[a, b]$ es el espacio de funciones con primera derivada continua en $[a, b]$. Asimismo, suponga que V está equipado con la siguiente norma:

$$\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)| + \max_{t \in [a, b]} |f'(t)|.$$

Una condición necesaria de un máximo de J en f es que f satisfaga la ecuación de Euler,

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) = 0. \quad (75.7)$$

En efecto, considere primero el subespacio de funciones con primera derivada continua en $[a, b]$ que satisfacen $h(a) = h(b) = 0$. Este subespacio será denotado mediante $C_0^1[a, b]$. Evidentemente, $C_0^1[a, b] \subset C^1[a, b]$. Sea $f \in C^1[a, b]$ con $f(a) = A$ y $f(b) = B$. Si se incrementa la función f en h , con $h \in C_0^1[a, b]$, $\|h\| < \varepsilon$, entonces $f + h \in B_\varepsilon(f)$ y satisface las condiciones de frontera dadas en (75.6), $(f + h)(a) = A$ y $(f + h)(b) = B$. En la terminología del cálculo de variaciones dicha h es llamada una función admisible. Si se expresa la diferencia $J(f + h) - J(f)$ en términos de una serie de Taylor, se sigue que

$$\begin{aligned} J(f + h) - J(f) &= \int_a^b \left(\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f} h(t) + \frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f'} h'(t) \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F(t, f + \theta h, f' + \theta h')}{\partial f^2} h^2(t) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 F(t, f + \theta h, f' + \theta h')}{\partial f \partial f'} h(t)h'(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 F(t, f + \theta h, f' + \theta h')}{\partial f'^2} (h'(t))^2 \right) dt, \end{aligned} \quad (75.8)$$

donde $\theta \in [0, 1]$. Además, se sabe que existen M_1, M_2 y M_3 tales que

$$\left| \frac{\partial^2 F(t, f, f')}{\partial f^2} \right| \leq M_1, \quad \left| \frac{\partial^2 F(t, f, f')}{\partial f \partial f'} \right| \leq M_2 \quad \text{y} \quad \left| \frac{\partial^2 F(t, f, f')}{\partial f'^2} \right| \leq M_3$$

para todo (t, f, f') , pues F tiene segundas derivadas continuas con respecto de todos sus argumentos. Se define $M = \max_{1 \leq i \leq 3} \{M_i\}$. Observe ahora que la segunda integral de la ecuación (75.8) satisface

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_a^b (\dots) dt &\leq \frac{1}{2} \int_a^b [M h^2(t) + 2M h(t)h'(t) + M h'^2(t)] dt \\ &\leq \frac{1}{2} M \int_a^b [h^2(t) + 2h(t)h'(t) + h'^2(t)] dt \\ &\leq \frac{1}{2} M \int_a^b \left[\max_{t \in [a, b]} |h(t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\max_{t \in [a, b]} |h(t)| \max_{t \in [a, b]} |h'(t)| \right) \right. \\ &\quad \left. + \max_{t \in [a, b]} |h'(t)|^2 \right] dt \\ &\leq \frac{1}{2} M (b-a) \left[\max_{t \in [a, b]} |h(t)| + \max_{t \in [a, b]} |h'(t)| \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} M (b-a) \|h\|^2. \end{aligned} \tag{75.9}$$

Después de dividir la expresión anterior entre $\|h\|$ y tomar el límite cuando $\|h\| \rightarrow 0$, se sigue que

$$0 \leq \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \left| \int_a^b (\dots) dt \right|}{\|h\|} \leq \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} M (b-a) \|h\|^2}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} = 0.$$

En virtud de (75.8), se puede escribir que

$$J(f+h) - J(f) = \int_a^b \left(\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f} h(t) + \frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f'} h'(t) \right) dt + o(\|h\|).$$

La primera integral en la expresión anterior es una funcional lineal en h . Debido a la unicidad de la diferencial, se sigue que

$$dJ(f)(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f} h(t) + \frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f'} h'(t) \right) dt. \tag{75.10}$$

De lo anterior, se concluye que si f es máximo de J , entonces

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f} h(t) + \frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f'} h'(t) \right) dt = 0 \tag{75.11}$$

para toda h admissible. Observe ahora que si se integra por partes el segundo sumando del integrando en (75.11), se tiene que

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f'} h'(t) dt &= \frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f'} h(t) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f'} \right) h(t) dt \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f'} \right) h(t) dt. \end{aligned}$$

ya que $h(a) = h(b) = 0$. En consecuencia, la ecuación (75.11) se transforma en

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f'} \right) \right] h(t) dt = 0,$$

para toda h admisible. El lema I implica que

$$\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f'} \right) = 0. \quad (75.12)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Euler (desarrollada por L. Euler en 1744) y proporciona una condición necesaria de un máximo de J en f . Por último, observe que la ecuación (75.12) se puede reescribir, utilizando la diferencial total, como

$$F_f - F_{f'ff}f' - F_{f'f'}f'' - F_{f't} = 0,$$

la cual es, en general, una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. La solución general de esta ecuación contiene dos constantes arbitrarias, las cuales se determinan por las condiciones de frontera.

75.14.1 Problemas del tipo I y diferencial de Gateaux

En esta sección se obtiene la ecuación de Euler (75.12) utilizando la diferencial de Gateaux. Bajo los mismos supuestos de la sección anterior, defina $\mathcal{I}(\delta) = J(f + \delta h)$ y $g = f + \delta h$ con $h \in V$ arbitraria y $\delta \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeña, entonces

$$\mathcal{I}(\delta) - \mathcal{I}(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f} \delta h(t) + \frac{\partial F}{\partial f'} \delta h'(t) \right) dt + o(\delta).$$

Por lo tanto,

$$\frac{\mathcal{I}(\delta) - \mathcal{I}(0)}{\delta} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) \right] h(t) dt + \frac{o(\delta)}{\delta}.$$

Si se toma el límite cuando $\delta \rightarrow 0$, se tiene que

$$\mathcal{I}'(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) \right] h(t) dt.$$

Una condición necesaria de un máximo de \mathcal{I} en 0 y, en consecuencia, de un máximo de J en f es que $\mathcal{I}'(0) = 0$, lo cual implica que

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) = 0.$$

Una forma alternativa de utilizar la diferencial de Gateaux para obtener condiciones necesarias de un máximo es como sigue. Considere, con la notación anterior,

$$\mathcal{I}(\delta) = \int_a^b F(t, f(t) + \delta h(t), f'(t) + \delta h'(t)) dt.$$

Si se aplica la regla de Leibnitz a la expresión anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'(\delta) &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial g} h(t) + \frac{\partial F}{\partial g'} h'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial g} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial g'} \right) \right] h(t) dt. \end{aligned}$$

Es suficiente calcular $\mathcal{I}'(0)$ y proceder como antes.

75.14.2 Casos particulares del problema tipo I

A continuación se revisan algunos casos particulares de la ecuación de Euler. Suponga, por ejemplo, que $F = F(t, f')$, entonces la ecuación de Euler se transforma en

$$\frac{d}{dt}F_{f'} = 0,$$

lo cual conduce a $F_{f'} = c$ donde c es una constante. Es decir, f satisface una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Si se supone ahora que $F = F(f, f')$, entonces

$$F_f - F_{f'} f' - F_{f''} f'' = 0.$$

Al multiplicar la expresión anterior por f' , se cumple que

$$F_f f' - F_{f'} f'(f')^2 - F_{f''} f'' f' = \frac{d}{dt}(F - f' F_{f'}) = 0.$$

En consecuencia,

$$F - f' F_{f'} = c,$$

donde c es una constante.

75.15 Condición de Legendre y diferencial segunda de Fréchet

Considere el problema de optimización planteado en la sección 75.14.1 y defina $\mathcal{I}(\delta) = J(f + \delta h)$, $g = f + \delta h$ con $h \in V$ arbitraria y δ suficientemente pequeña, entonces

$$\mathcal{I}'(\delta) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f} h(t) + \frac{\partial F}{\partial f'} h'(t) \right) dt.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{I}''(\delta) = \int_a^b \left(\frac{d}{d\delta} \left(\frac{\partial F}{\partial f} \right) h(t) + \frac{d}{d\delta} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) h'(t) \right) dt.$$

Ahora bien, dado que

$$\frac{d}{d\delta} \left(\frac{\partial F}{\partial f} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial f^2} h(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial f' \partial f} h'(t)$$

y

$$\frac{d}{d\delta} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial f \partial f'} h(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial f'^2} h'(t),$$

se tiene que

$$\mathcal{I}''(\delta) = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F}{\partial f^2} [h(t)]^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial f \partial f'} h(t) h'(t) + \frac{\partial^2 F}{\partial f'^2} [h'(t)]^2 \right) dt. \quad (75.13)$$

Considere el segundo integrando de (75.13) y denote

$$v = \frac{\partial^2 F}{\partial f \partial f'} \quad \text{y} \quad du = 2h(t)h'(t)dt,$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial f \partial f'} 2h(t)h'(t) &= \int_a^b v du \\ &= uv \Big|_a^b - \int_a^b u dv \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial f \partial f'} [h(t)]^2 \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial f \partial f'} \right) [h(t)]^2 dt \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial f \partial f'} \right) [h(t)]^2 dt, \end{aligned}$$

ya que $h(a) = h(b) = 0$. En consecuencia,

$$\mathcal{I}''(\delta) = \int_a^b \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial f^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial f \partial f'} \right) \right) [h(t)]^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial f'^2} [h'(t)]^2 \right] dt. \quad (75.14)$$

En virtud de que el integrando que contiene a $[h'(t)]^2$ es el término que domina a $\mathcal{I}''(\delta)$, ya que aunque $h(t)$ se mantenga suficientemente pequeña su derivada puede tomar, en general, valores absolutos grandes. Por lo tanto, si f maximiza a J , entonces

$$\frac{\partial^2 F}{\partial f'^2} \leq 0.$$

La condición anterior es necesaria pero no suficiente debido al otro término que aparece en el integrando de (75.14). Por último, es importante mencionar que la segunda diferencial de Fréchet satisface

$$d^2 J(f)(h, h) = I''(\delta).$$

75.16 Condiciones suficientes de máximo y concavidad

Antes de establecer las condiciones suficientes para que una función de funciones, J , tenga un máximo en una función, f , vale la pena revisar el caso de una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Si $n = 1$ y f es dos veces diferenciable, entonces una expansión en serie de Taylor de f alrededor de t conduce a

$$f(t+h) = f(t) + f'(t)h + \frac{1}{2}f''(t)h^2 + o(h^2).$$

Si $f'(t) = 0$, entonces

$$f(t+h) - f(t) = \frac{1}{2}f''(t)h^2 + o(h^2).$$

Ahora bien, si además se pide que f sea cóncava, es decir, $f''(t) \leq 0$, entonces para h suficientemente pequeño $f(t+h) - f(t)$ y $\frac{1}{2}f''(t)h^2$ tienen el mismo signo. Por lo tanto, $f(t+h) \leq f(t)$ para h suficientemente pequeño. En otras palabras, f tiene un máximo (relativo o local) en t . Si $n = 2$ y f es dos veces diferenciable, entonces una expansión en serie de Taylor de f alrededor de (t_1, t_2) produce

$$\begin{aligned} f(t_1 + h_1, t_2 + h_2) &= f(t_1, t_2) + \frac{\partial f}{\partial t_1}(t_1, t_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2}(t_1, t_2)h_2 \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}(t_1, t_2)h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1, t_2)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}(t_1, t_2)h_2^2 \right) + o(\|(h_1, h_2)\|^2). \end{aligned}$$

Si

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}(t_1, t_2) = \frac{\partial f}{\partial t_2}(t_1, t_2) = 0,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} f(t_1 + h_1, t_2 + h_2) - f(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} (f_{11}h_1^2 + 2f_{12}h_1h_2 + f_{22}h_2^2) + o(\|(h_1, h_2)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}f_{11} \left[\left(h_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}}h_2 \right)^2 + \left(\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}}{f_{11}^2} \right)^2 \right] \\ &\quad + o(\|(h_1, h_2)\|^2), \end{aligned}$$

donde $f_{ij} = \partial^2 f(t_1, t_2)/\partial t_i \partial t_j$, $i, j = 1, 2$. Si (h_1, h_2) es suficientemente pequeño, entonces $f(t_1 + h_1, t_2 + h_2) - f(t_1, t_2)$ y

$$\frac{1}{2}f_{11} \left[\left(h_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}}h_2 \right)^2 + \left(\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}}{f_{11}^2} \right)^2 \right]$$

tienen el mismo signo. Observe ahora que una función f es cóncava si y sólo si $f_{11} \leq 0$ y

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Si se supone que f es cóncava se tiene que $f(t_1 + h_1, t_2 + h_2) < f(t_1, t_2)$ para todo (h_1, h_2) suficientemente pequeño. Es decir, f tiene un máximo en (t_1, t_2) . Por último, observe que $f_{11} \leq 0$ implica $f_{22} \leq 0$, ya que $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 \geq 0$ implica

$$f_{11}f_{22} \geq f_{12}^2 \geq 0,$$

es decir, f_{11} y f_{22} tienen el mismo signo.

A continuación se establecen las condiciones suficientes de un máximo f de J . En primer lugar, observe que una función J es cóncava en (f, f') para cada $t \in [a, b]$ si y sólo si

$$F(t, f(t) + h(t), f'(t) + h'(t)) - F(t, f(t), f'(t)) \leq \frac{\partial F}{\partial f}h(t) + \frac{\partial F}{\partial f'}h'(t)$$

para cada $t \in [a, b]$. Si se integra la expresión anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} J(f+h) - J(f) &\leq \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f}(t, f, f')h(t) + \frac{\partial F}{\partial f'}(t, f, f')h'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f'} \right) \right] h(t) dt. \end{aligned}$$

Si J es cóncava y f es tal que $dJ(f) \equiv 0$, es decir, si f satisface la ecuación de Euler, entonces $J(f+h) - J(f) \leq 0$ para toda h suficientemente pequeña. En otras palabras, f es un máximo (local) de J .

75.17 Problemas del tipo I con un argumento de frontera variable

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\text{Maximizar } J(f) = \int_a^T F(t, f(t), f'(t)) dt,$$

sujeto a

$$f(a) = A, \quad T \text{ y } f(T) \text{ libres,} \tag{75.15}$$

donde $F \in C^2$. Si f y T son la solución del problema anterior y f y T se incrementan como $f + \delta h$, con $h(a) = 0$, y $T(\delta) = T + \delta\tau$, con h y τ fijos y $\delta \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeña, se tiene que $dT(\delta)/d\delta = \tau$ y, con base en la regla de Leibnitz, se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'(\delta) &= \int_a^{T(\delta)} \frac{\partial F}{\partial \delta} dt + F \Big|_{T(\delta)} \tau \\ &= \int_a^{T(\delta)} \left(\frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \delta} + \frac{\partial F}{\partial f'} \frac{\partial f'}{\partial \delta} \right) dt + F \Big|_{T(\delta)} \tau \\ &= \int_a^{T(\delta)} \left(\frac{\partial F}{\partial f} h(t) + \frac{\partial F}{\partial f'} h'(t) \right) dt + F \Big|_{T(\delta)} \tau \\ &= \int_a^{T(\delta)} \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) \right] h(t) dt + \frac{\partial F}{\partial f'} h(T(\delta)) + F \Big|_{T(\delta)} \tau. \end{aligned}$$

Una condición necesaria de un máximo de \mathcal{I} en cero es que $\mathcal{I}'(0) = 0$, es decir,

$$\mathcal{I}'(0) = \int_a^T \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) \right] h(t) dt + \frac{\partial F}{\partial f'} \Big|_{t=T} h(T) + F \Big|_{t=T} \tau = 0.$$

Observe ahora que

$$\begin{aligned}(f + \delta h)(T + \delta\tau) - f(T) &= f(T + \delta\tau) - f(T) + \delta h(T + \delta\tau) \\ &= \delta f'(T)\tau + \delta h(T + \delta\tau) + o(\delta),\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\frac{(f + \delta h)(T + \delta\tau) - f(T)}{\delta} = f'(T)\tau + h(T + \delta\tau) + \frac{o(\delta)}{\delta}.$$

Si $\delta \rightarrow 0$, entonces

$$\frac{df(T)}{d\delta} = f'(T)\tau + h(T),$$

así

$$h(T) = \frac{df(T)}{d\delta} - f'(T)\tau.$$

Por lo tanto, una condición necesaria de un máximo de J en f es que

$$\begin{aligned}\int_a^T \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) \right] h(t) dt + \frac{\partial F}{\partial f'} \Big|_{t=T} \frac{df(T)}{d\delta} - f' \frac{\partial F}{\partial f'} \Big|_{t=T} \tau + F \Big|_{t=T} \tau &= 0 \\ \text{ó} \\ \int_a^T \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) \right] h(t) dt + \frac{\partial F}{\partial f'} \Big|_{t=T} \frac{df(T)}{d\delta} + \left(F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \Big|_{t=T} \tau &= 0,\end{aligned}$$

lo cual conduce a que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial f'} \Big|_{t=T} \frac{df(T)}{d\delta} + \left(F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \Big|_{t=T} \tau = 0. \quad (75.16)$$

La segunda condición en (75.16) es conocida como condición de transversalidad.

75.17.1 Casos particulares del problema con frontera variable

En esta sección se revisan algunos casos del problema con frontera variable y se establecen las correspondientes condiciones de transversalidad.

Si en el problema de cálculo de variaciones con frontera variable se supone que el horizonte de análisis es fijo, es decir, la restricción final es una línea vertical, entonces $\tau = 0$. Por lo tanto, la condición de transversalidad es

$$\frac{\partial F}{\partial f'} \Big|_{t=T} = 0.$$

Si la restricción final es una línea horizontal, entonces $df(T)/d\delta = 0$ y la condición de transversalidad está dada por

$$\left(F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \Big|_{t=T} = 0.$$

Si la restricción final es una curva $G(T)$, entonces

$$(f + \delta h)(T + \delta\tau) - f(T) = G(T + \delta\tau) - G(T) = G'(T)\delta\tau + o(\delta),$$

lo cual implica que

$$\frac{df(T)}{d\delta} = G'(T)\tau.$$

En este caso, la condición de transversalidad es

$$G' \frac{\partial F}{\partial f'} \Big|_{t=T} \tau + \left(F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \Big|_{t=T} \tau = 0,$$

equivalentemente

$$\left(F + (G' - f') \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \Big|_{t=T} = 0.$$

75.18 Problemas del tipo II (funcionales con un solo argumento y derivadas con fronteras fijas)

Considere un problema de optimización de la siguiente forma:

$$\text{Maximizar } J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)) dt,$$

sujeto a

$$f^{(k)}(a) = A_k, \quad f^{(k)}(b) = B_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (75.17)$$

donde $F \in C^n$. En este caso, $V = C^n[a, b]$ y

$$\|f\| = \sum_{k=0}^n \max_{t \in [a, b]} |f^{(k)}(t)|.$$

Una condición necesaria de un máximo de J en f es que f satisfaga

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial F}{\partial f''} \right) - \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial F}{\partial f'''} \right) + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial F}{\partial f^{(n)}} \right) = 0. \quad (75.18)$$

En efecto, considere el subespacio de funciones, h , con derivadas continuas hasta el orden n y con $h^{(k)}(a) = h^{(k)}(b) = 0$, denotado por $C_{0,1,\dots,n-1}^n[a, b]$. Si se incrementa la función f en h , con $h \in C_{0,1,\dots,n-1}^n[a, b]$, $\|h\| < \varepsilon$, entonces $f + h$ satisface las condiciones de frontera. Si se expresa la diferencia $J(f + h) - J(f)$ en términos del teorema de Taylor, se tiene que

$$J(f + h) - J(f) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f} h + \frac{\partial F}{\partial f'} h' + \frac{\partial F}{\partial f''} h'' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial f^{(n)}} h^n \right) dt + o(\|h\|).$$

Si se integran repetidamente por partes cada uno de los integrandos en la expresión anterior y se utilizan las condiciones $h^{(k)}(a) = h^{(k)}(b) = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} & J(f + h) - J(f) - o(\|h\|) \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial F}{\partial f''} \right) - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial F}{\partial f^{(n)}} \right) \right] h(t) dt. \end{aligned}$$

La integral en la expresión anterior es una funcional lineal en h . Debido a la unicidad de la diferencial y a la condición necesaria de un máximo se sigue inmediatamente la ecuación (75.18).

75.19 Problemas del tipo III (funcionales con dos argumentos con fronteras fijas)

A continuación se estudia una clase de problemas de optimización en donde la funcional objetivo depende de dos funciones y sus derivadas. En este caso, las restricciones son condiciones de frontera. Considere un problema de optimización de la forma

$$\text{Maximizar } J(f, g) = \int_a^b F(t, f(t), g(t), f'(t), g'(t)) dt,$$

sujeto a

$$f(a) = A, \quad f(b) = B,$$

y

$$g(a) = D, \quad g(b) = E,$$

donde $F \in C^2$. En este caso $V = C^1[a, b] \times C^1[a, b]$ y la norma se define mediante

$$\| (f, g) \| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)| + \max_{t \in [a, b]} |f'(t)| + \max_{t \in [a, b]} |g(t)| + \max_{t \in [a, b]} |g'(t)|.$$

Una condición necesaria de un máximo de J en un vector dado (f, g) es que este vector satisfaga el siguiente sistema simultáneo de ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) = 0 \quad (75.19)$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial g} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial g'} \right) = 0. \quad (75.20)$$

En efecto, si el vector (f, g) se incrementa en $(h_1, h_2) \in C_0^1[a, b] \times C_0^1[a, b]$ y la diferencia $J(f + h_1, g + h_2) - J(f, g)$ se expresa en términos de una serie de Taylor, se tiene que

$$\begin{aligned} J(f + h_1, g + h_2) - J(f, g) &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f} h_1(t) - \frac{\partial F}{\partial f'} h'_1(t) \right) dt \\ &\quad + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial g} h_2(t) - \frac{\partial F}{\partial g'} h'_2(t) \right) dt \\ &\quad + o(\|(h_1, h_2)\|). \end{aligned} \quad (75.21)$$

Por lo tanto,

$$dF(f, g)(h_1, h_2) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f} h_1(t) - \frac{\partial F}{\partial f'} h'_1(t) \right) dt + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial g} h_2(t) - \frac{\partial F}{\partial g'} h'_2(t) \right) dt.$$

De esta forma, una condición necesaria de un máximo de J en (f, g) es que (f, g) satisfaga $dJ(f, g)(h_1, h_2) = 0$ para todo $(h_1, h_2) \in V$ admisible, lo cual implica que

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f} h_1(t) - \frac{\partial F}{\partial f'} h'_1(t) \right) dt + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial g} h_2(t) - \frac{\partial F}{\partial g'} h'_2(t) \right) dt = 0.$$

Dado que los incrementos h_1 y h_2 son independientes, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones (diferenciales ordinarias de segundo orden) de Euler:

$$\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial f'} \right) = 0$$

y

$$\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial g} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial g'} \right) = 0.$$

75.20 Problemas del tipo IV (funcionales con un solo argumento que depende de dos variables con frontera fija)

Sea $(V, \|\cdot\|)$ el espacio de Banach constituido por el espacio lineal $V = C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto compacto, con la norma

$$\|f\| = \max_{(t_1, t_2) \in \Omega} |f(t_1, t_2)| + \max_{(t_1, t_2) \in \Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial t_1}(t_1, t_2) \right| + \max_{(t_1, t_2) \in \Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial t_2}(t_1, t_2) \right|.$$

Sea $J : B_\varepsilon(f) \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ y considere el siguiente problema de optimización:

$$\text{Maximizar } J(f) = \int_{\Omega} \int F \left(t_1, t_2, f, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \frac{\partial f}{\partial t_2} \right) dt,$$

sujeto a

$$f(t_1, t_2) = w(t_1, t_2), \quad (t_1, t_2) \in \partial\Omega, \quad w \text{ una función conocida,}$$

donde $F \in C^2$ y $\partial\Omega$ denota la frontera de Ω . Una condición necesaria de un máximo de J en f es que f satisfaga la siguiente ecuación de Euler:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial f_1} \right) - \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial f_2} \right) = 0. \quad (75.22)$$

Considere el incremento $f + h$ con $h \in C_0^1(\Omega)$, es decir, h tiene derivadas parciales continuas y $h|_{\partial\Omega} = 0$. En este caso,

$$\begin{aligned} & J(f + h) - J(f) \\ &= \int_{\Omega} \int \left[\frac{\partial F}{\partial f} h + \left(\frac{\partial F}{\partial f_1} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial t_1} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial t_2} \right) \right] dt_1 dt_2 + o(\|h\|). \end{aligned} \quad (75.23)$$

Si se utiliza el teorema de Green en los dos últimos integrandos de la integral anterior, se sigue que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int \left[\left(\frac{\partial F}{\partial f_1} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial t_1} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial f_2} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial t_2} \right) \right] dt_1 dt_2 \\ &= \int_{\Omega} \int \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial f_1} h \right) - h \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial f_1} \right) + \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial f_2} h \right) - h \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial f_2} \right) \right] dt_1 dt_2 \\ &= \int_{\Omega} \int \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial f_1} h \right) + \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial f_2} h \right) \right] dt_1 dt_2 \\ &\quad - \int_{\Omega} \int \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial f_1} \right) + \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial f_2} \right) \right] h dt_1 dt_2 \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial F}{\partial f_1} h dt_2 - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial F}{\partial f_2} h dt_1 - \int_{\Omega} \int \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial f_1} \right) + \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial f_2} \right) \right] h dt_1 dt_2 \\ &= - \int_{\Omega} \int \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial f_1} \right) + \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial f_2} \right) \right] h dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$dJ(f)(h) = \int_{\Omega} \int \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial f_1} \right) - \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial f_2} \right) \right] h dt_1 dt_2.$$

De lo anterior se obtiene inmediatamente la ecuación (75.22).

75.21 Problemas del tipo V (problema isoperimétrico)

A continuación se estudian problemas de optimización en donde la funcional objetivo depende de una función y su derivada. En este caso, las restricciones son condiciones de frontera y el valor de una integral. Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t)) dt,$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$f(a) = A, \quad f(b) = B$$

y a la siguiente funcional que toma un valor fijo

$$K(f) = \int_a^b G(t, f(t), f'(t)) dt = \ell, \quad (75.24)$$

donde $F, G \in C^2$, es decir, F y G tienen primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto de todos sus argumentos. En este caso, $V = C^1[a, b]$ con la norma

$$\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)| + \max_{t \in [a, b]} |f'(t)|.$$

Si f es un máximo de J pero no de K , entonces existe una constante λ tal que

$$\mathcal{L}(t, f, f', \lambda) = F(t, f, f') + \lambda G(t, f, f')$$

satisface la ecuación de Euler, esto es,

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial f'} + \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial f} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial f'} \right) = 0. \quad (75.25)$$

La función \mathcal{L} es llamada la función Lagrangeana o, simplemente, el Lagrangeano, y λ es conocido como el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción. A continuación se demuestra (75.25). Suponga que la funcional J tiene un máximo en f que satisface $f(a) = A$, $f(b) = B$ y (75.24). Sean t_1 y $t_2 \in [a, b]$ dos puntos arbitrarios. Se incrementa ahora f en $h_1(t) + h_2(t)$, donde $h_1(t) \neq 0$ en una vecindad de t_1 y $h_1(t) = 0$ en el resto del intervalo $[a, b]$, y $h_2(t) \neq 0$ en una vecindad de t_2 y $h_2(t) = 0$ en el resto del intervalo $[a, b]$. De esta manera, $(f + h)(a) = A$ y $(f + h)(b) = B$. Si $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$, se tiene que

$$J(f + h) - J(f) = dJ(f) \Big|_{t=t_1} (h_1) + dJ(f) \Big|_{t=t_2} (h_2) + o(\|h\|).$$

Observe que

$$\begin{aligned} dJ(f) \Big|_{t=t_i} (h_i) &= \int_a^b \left(F_f - \frac{d}{dt} F_{f'} \right) \Big|_{t=t_i} h_i dt \\ &= \left(F_f - \frac{d}{dt} F_{f'} \right) \Big|_{t=t_i} \int_a^b h_i dt. \end{aligned}$$

Si se denotan

$$\frac{dJ}{df} \Big|_{t=t_i} = \left(F_f - \frac{d}{dt} F_{f'} \right) \Big|_{t=t_i} \quad \text{y} \quad \mathcal{M}_i = \int_a^b h_i dt, \quad i = 1, 2,$$

se puede escribir

$$J(f + h) - J(f) = \mathcal{M}_1 \frac{dJ}{df} \Big|_{t=t_1} + \mathcal{M}_2 \frac{dJ}{df} \Big|_{t=t_2} + o(\|h\|). \quad (75.26)$$

Ahora bien, si se supone también que la función h satisface la condición $K(f + h) = \ell$, se obtiene

$$K(f + h) - K(f) = \ell - \ell = 0.$$

Si se procede como en (75.26), se sigue que

$$K(f + h) - K(f) = \mathcal{M}_1 \frac{dK}{df} \Big|_{t=t_1} + \mathcal{M}_2 \frac{dK}{df} \Big|_{t=t_1} + o(\|h\|) = 0.$$

Reconsidere t_2 de tal manera que

$$\frac{dK}{df} \Big|_{t=t_2} \neq 0,$$

este punto existe, puesto que por hipótesis $f = f(t)$ no es máximo de K . Por lo tanto, se sigue que

$$\mathcal{M}_2 = -\frac{\frac{dK}{df} \Big|_{t=t_1}}{\frac{dK}{df} \Big|_{t=t_2}} \mathcal{M}_1 + o(\|h\|).$$

Defina ahora

$$\lambda = -\frac{\frac{dJ}{df} \Big|_{t=t_2}}{\frac{dK}{df} \Big|_{t=t_2}}.$$

Al sustituir λ en la ecuación (75.26), se obtiene

$$J(f + h) - J(f) = \left(\frac{dJ}{df} \Big|_{t=t_1} + \lambda \frac{dK}{df} \Big|_{t=t_1} \right) \mathcal{M}_1 + o(\|h\|).$$

El primer término del lado derecho es lineal en h y se puede reescribir como

$$\left(\frac{dJ}{df} \Big|_{t=t_1} + \lambda \frac{dK}{df} \Big|_{t=t_1} \right) \mathcal{M}_1 = \frac{d}{df}(J + \lambda K) \Big|_{t=t_1} \mathcal{M}_1.$$

Una condición necesaria de un máximo de J en f es que para toda h admisible se cumpla que

$$\frac{d}{df}(J + \lambda K) \Big|_{t=t_1} \mathcal{M}_1 = 0$$

y como \mathcal{M}_1 no es cero, ya que $h_1(t) \neq 0$ en una vecindad de t_1 dentro del intervalo $[a, b]$, se tiene que

$$\frac{d}{df}(J + \lambda K) \Big|_{t=t_1} = 0$$

con t_1 arbitrario. Por lo tanto,

$$\frac{d}{df}(J + \lambda K) = F_f - \frac{d}{dt}F_{f'} + \lambda \left(G_f - \frac{d}{dt}G_{f'} \right) = 0.$$

La extensión a dos o más integrales en el conjunto de restricciones es inmediata.

75.22 Aplicaciones del cálculo de variaciones

En esta sección se ilustran varias aplicaciones del cálculo de variaciones, en particular del problema isoperimétrico, en la solución de problemas de decisión, en tiempo continuo, de un consumidor racional.

75.22.1 Maximización de utilidad logarítmica

Considere un consumidor racional, con vida infinita, que desea maximizar su utilidad (felicidad) por un bien de consumo de carácter perecedero, c_t . En lo que sigue se utiliza la notación $c_t = c(t)$. Se supone que el individuo tiene una dotación de ingreso real, y_t , en cada instante. El problema de decisión que resuelve un consumidor con tasa subjetiva de descuento ρ , está dado por:

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^\infty u(c_t)e^{-\rho t} dt,$$

sujeto a

$$\int_0^\infty y_t e^{-rt} dt = \int_0^\infty c_t e^{-rt} dt, \quad (75.27)$$

donde $u(c_t)$ es la satisfacción que produce c_t y r es la tasa de interés real, la cual se supone constante para todos los plazos. Observe que la tasa subjetiva de descuento especifica qué tan ansioso está el individuo por el consumo presente. Es decir, un valor grande de ρ indica que el consumidor está muy ansioso por consumir. La restricción (75.27) simplemente dice que el valor presente del consumo planeado es igual al valor presente del ingreso (real) del consumidor. El supuesto de vida infinita se puede justificar si se piensa en un consumidor que está interesado en maximizar su utilidad, la de sus hijos, nietos y demás descendientes. Observe ahora que si $y_t = \bar{y}$ constante, entonces la restricción presupuestal del agente satisface

$$\frac{\bar{y}}{r} = \int_0^\infty c_t e^{-rt} dt.$$

En este marco, el problema del consumidor racional puede resolverse utilizando técnicas del cálculo de variaciones. Si se supone que la función de utilidad es logarítmica, es decir, el agente es adverso al riesgo, el Lagrangeano está dado por

$$\mathcal{L}(\lambda, c_t) = \ln(c_t)e^{-\rho t} + \lambda c_t e^{-rt},$$

donde λ es una constante. Observe que la utilidad logarítmica satisface las propiedades deseables $u' > 0$ y $u'' < 0$. Es decir, la utilidad marginal es positiva pero decreciente. En otras palabras, el consumidor siempre obtiene satisfacción adicional por incrementar el consumo, pero al hacerlo su satisfacción es cada vez menor. La condición necesaria, o de primer orden, es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0,$$

equivalentemente

$$\frac{1}{c_t} e^{-\rho t} + \lambda e^{-rt} = 0,$$

lo cual conduce a

$$-\frac{1}{\lambda} e^{(r-\rho)t} = c_t.$$

Por otro lado, si se sustituye la expresión anterior en la restricción presupuestal intertemporal, se observa que

$$\begin{aligned} \frac{\bar{y}}{r} &= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{\lambda} \right) e^{(r-\rho)t} e^{-rt} dt \\ &= -\frac{1}{\lambda \rho} \int_0^\infty \rho e^{-\rho t} dt \\ &= -\frac{1}{\lambda \rho}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{\bar{y}\rho}{r} = -\frac{1}{\lambda}.$$

Si este valor de $\lambda < 0$ se sustituye en la ecuación del consumo, se sigue que

$$c_t = \frac{\bar{y}\rho}{r} e^{(r-\rho)t}.$$

Esta ecuación proporciona la trayectoria de consumo que maximiza la satisfacción del consumidor. Observe que si $r > \rho$, el consumo es creciente en el tiempo. En caso contrario, $r < \rho$, el consumo es decreciente. Asimismo, si el ingreso aumenta, el consumo aumenta, y si la tasa subjetiva de descuento aumenta, entonces el consumo presente se incrementa. Por último, si la tasa de interés aumenta el consumo presente disminuye en $t = 0$. Evidentemente, $c_0 = \bar{y}\rho/r$, y $c_\infty = \infty$ si $r > \rho$ ó $c_\infty = 0$ si $r < \rho$.

75.22.2 Maximización de utilidad con coeficiente constante de aversión al riesgo I

Consideré un consumidor racional con las características de la sección anterior que resuelve el problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^\infty \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} dt, \\ \text{sujeto a} \quad & \frac{\bar{y}}{r} = \int_0^\infty c_t e^{-rt} dt. \end{aligned}$$

En lo que sigue se omiten las condiciones de frontera. En este caso, el Lagrangeano está dado por:

$$\mathcal{L}(\lambda, c_t) = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} + \lambda c_t e^{-rt},$$

donde λ es una constante por determinar. Si $\gamma < 1$, la función de utilidad satisface $u' > 0$ y $u'' < 0$. Una condición necesaria de un máximo es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = c_t^{\gamma-1} e^{-\rho t} + \lambda e^{-rt} = 0.$$

Esta ecuación conduce a

$$c_t = (-\lambda)^{1/(\gamma-1)} e^{(\rho-r)t/(\gamma-1)}.$$

Por otro lado, de la restricción presupuestal, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\bar{y}}{r} &= \int_0^\infty \left((-\lambda)^{1/(\gamma-1)} e^{(\rho-r)t/(\gamma-1)} \right) e^{-rt} dt \\ &= (-\lambda)^{1/(\gamma-1)} \int_0^\infty e^{(\rho-r)t/(\gamma-1)} e^{-rt} dt \\ &= (-\lambda)^{1/(\gamma-1)} \int_0^\infty e^{(\rho-\gamma r)t/(\gamma-1)} dt \\ &= (-\lambda)^{1/(\gamma-1)} \left(\frac{1-\gamma}{\rho-\gamma r} \right) \int_0^\infty \left(\frac{\rho-\gamma r}{1-\gamma} \right) e^{-(\rho-\gamma r)t/(1-\gamma)} dt. \end{aligned}$$

Si se supone que $\rho > \gamma r$, se obtiene

$$\frac{\bar{y}}{r} \left(\frac{\rho-\gamma r}{1-\gamma} \right) = (-\lambda)^{1/(\gamma-1)}.$$

Si el valor de λ se sustituye en la ecuación del consumo, se tiene que

$$c_t = \frac{\bar{y}}{r} \left(\frac{\rho-\gamma r}{1-\gamma} \right) e^{(r-\rho)t/(1-\gamma)}.$$

Observe que, al igual que en la sección anterior, si $r > \rho$, el consumo es creciente en el tiempo. En caso contrario, $r < \rho$, el consumo es decreciente.

75.22.3 Maximización de utilidad con coeficiente constante de aversión al riesgo II

Considere un consumidor, maximizador de utilidad, que resuelve el siguiente problema de decisión intertemporal

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^\infty \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt, \\ \text{sujeto a} \quad & \frac{\bar{y}}{r} = \int_0^\infty c_t e^{-rt} dt, \end{aligned}$$

donde $\theta > 0$, $\theta \neq 1$. De esta manera, $u' > 0$ y $u'' < 0$. El Lagrangeano está dado por:

$$\mathcal{L}(\lambda, c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} + \lambda c_t e^{-rt}.$$

La condición necesaria, o de primer orden, es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = c_t^{-\theta} e^{-\rho t} + \lambda e^{-rt} = 0.$$

Esta ecuación conduce a

$$c_t = (-\lambda)^{-1/\theta} e^{(r-\rho)t/\theta}.$$

Por otro lado, de la restricción presupuestal se observa que

$$\begin{aligned} \frac{\bar{y}}{r} &= \int_0^\infty \left((-\lambda)^{-1/\theta} e^{(r-\rho)t/\theta} \right) e^{-rt} dt \\ &= (-\lambda)^{-1/\theta} \int_0^\infty e^{(r-\rho)t/\theta} e^{-rt} dt \\ &= (-\lambda)^{-1/\theta} \int_0^\infty e^{-(\rho-(1-\theta)r)t/\theta} dt \\ &= (-\lambda)^{-1/\theta} \left(\frac{\theta}{\rho - (1-\theta)r} \right) \int_0^\infty e^{-(\rho-(1-\theta)r)t/\theta} dt. \end{aligned}$$

Si se supone que $\rho > (1-\theta)r$, se tiene que

$$\frac{\bar{y}}{r} \left(\frac{\rho - (1-\theta)r}{\theta} \right) = (-\lambda)^{-1/\theta},$$

lo cual implica que

$$c_t = \frac{\bar{y}}{r} \left(\frac{\rho - (1-\theta)r}{\theta} \right) e^{(r-\rho)t/\theta}.$$

Esta ecuación proporciona la trayectoria de consumo. Note que $\rho > r$ implica $\rho > r > (1-\theta)r$, en cuyo caso c_t es decreciente.

75.22.4 Maximización de utilidad exponencial negativa

Suponga que un consumidor racional con vida infinita desea resolver el siguiente problema de decisión:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^{\infty} -e^{-\theta c_t} e^{-\rho t} dt, \\ \text{sujeto a} \quad & \frac{\bar{y}}{r} = \int_0^{\infty} c_t e^{-rt} dt. \end{aligned}$$

El Lagrangeano está dado por

$$\mathcal{L}(\lambda, c_t) = -e^{-\theta c_t} e^{-\rho t} + \lambda c_t e^{-rt}.$$

Si $\theta > 0$, se cumple que $u' > 0$ y $u'' < 0$. La condición necesaria es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \theta e^{-\theta c_t} e^{-\rho t} + \lambda e^{-rt} = 0,$$

lo cual implica que

$$c_t = \frac{1}{\theta} \left[\ln \left(\frac{\theta}{-\lambda} \right) + (r - \rho)t \right].$$

Obviamente, se supone que $\lambda < 0$. Por otro lado, de la restricción presupuestal se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\bar{y}}{r} &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} \left[\ln \left(-\frac{\theta}{\lambda} \right) - (\rho - r)t \right] e^{-rt} dt \\ &= \frac{1}{\theta} \left[\ln \left(-\frac{\theta}{\lambda} \right) \int_0^{\infty} e^{-rt} dt - \int_0^{\infty} (\rho - r)te^{-rt} dt \right] \\ &= \frac{1}{\theta} \left[\frac{\ln(-\theta/\lambda)}{r} - \int_0^{\infty} (\rho - r)te^{-rt} dt \right] \\ &= \frac{1}{\theta} \left[\frac{\ln(-\theta/\lambda)}{r} - \frac{\rho - r}{r^2} \right]. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\ln \left(-\frac{\theta}{\lambda} \right) = \theta \bar{y} + \frac{(\rho - r)}{r}.$$

Por lo tanto,

$$c_t = \bar{y} - \frac{(r - \rho)}{\theta r} + \frac{(r - \rho)t}{\theta}.$$

Suponga que $r > \rho$ y que $\bar{y} > (r - \rho)/\theta r$ a fin de garantizar que $c_t > 0$.

75.23 Bibliografía sugerida

Gelfand, I. M. and S. V. Fomin (1963). Calculus of Variations. Prentice-Hall, Inc.

Venegas-Martínez, F. (1999). "Crecimiento endógeno, dinero, impuestos y deuda externa". *Investigación Económica*, Vol. 59, No. 229, pp. 15-36.

Wan, F. Y. M. (1995) Introduction To The Calculus of Variations And Its Applications. Second Edition. Chapman & Hall/CRC.

75.24 Ejercicios

75.1 Concluya la demostración del Lema III, es decir, una vez que se ha probado la existencia de c_0 y c_1 , muestre que $g_0(t) = c_0 + c_1 t$.

75.2 Suponga que

$$\frac{\bar{y}}{r} = \int_0^\infty c_t e^{-rt} dt,$$

$\bar{y} = k_0 r$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t e^{-rt} = 0$, muestre que $\dot{k}_t = rk_t - c_t$. Interprete $\bar{y} = k_0 r$.

75.3 Resuelva el problema

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^\infty u(c_t) e^{-\rho t} dt,$$

sujeto a

$$\frac{\bar{y}}{r} = \int_0^\infty c_t e^{-rt} dt$$

cuando

$$u(c_t) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{\phi c_t}{1-\gamma} + \eta \right)^\gamma,$$

donde ϕ , γ y η son constantes.

75.4 Resuelva el problema anterior con $u(c_t) = \alpha + \beta c_t^\delta$, donde α y δ son constantes.

CAPÍTULO 76

OPTIMIZACIÓN DETERMINISTA EN TIEMPO CONTINUO II (CONTROL ÓPTIMO)

Conceptos básicos de este capítulo:

- Control óptimo
- Condiciones necesarias de máximo
- Hamiltoniano
- Ecuación adjunta
- Condiciones suficientes de máximo
- Concavidad
- Condiciones suficientes de Mangasarian
- Condiciones suficientes de Arrow

76.1 Introducción

El conjunto de restricciones en que se especializa el cálculo de variaciones es muy limitado para resolver problemas, más generales, de decisión sobre consumo e inversión. Por ejemplo, si la restricción es una ecuación de transformación de estados, es decir, una ecuación diferencial, entonces el cálculo de variaciones no se puede aplicar. Por tal razón se desarrolló la teoría de control óptimo, introducida por Pontryagin en 1962. Es importante subrayar que algunos problemas del cálculo de variaciones se pueden formular, con algunas modificaciones, como problemas de control óptimo, pero no al revés.

76.2 Lev Pontryagin y el origen del control óptimo

Lev Semenovich Pontryagin, destacado matemático ruso (1908-1988) nacido en Moscú, introdujo el principio del máximo, la base de la teoría de control óptimo. Su padre, Semen Akimovich Pontryagin, trabajaba como funcionario del Imperio Zarista y su madre, Tatyana Andreevna Pontryagina, se dedicaba al hogar y a la costura. Tatyana tenía 29 años cuando Lev Pontryagin nació. Aun cuando el padre de Lev Pontryagin trabajaba como funcionario del Imperio Zarista, su salario no era suficiente para financiar la educación de su hijo en un buen colegio. Tatyana trabajaba en la costura para ayudar a su esposo con los gastos de educación de Lev Pontryagin, a quien llamaremos de ahora en adelante, simplemente, Pontryagin. A pesar de todos los esfuerzos, los recursos sólo alcanzaban para una escuela con un estándar por debajo del resto de las escuelas de Moscú.

Cuando Pontryagin contaba con 14 años, cinco años después de la Revolución Rusa, sufrió un lamentable accidente. Una explosión lo dejó ciego. Esto pudo haber significado el final de su educación, pero su madre tenía otros planes para el futuro de su hijo. A partir de entonces, Tatyana asumió la responsabilidad de educar a su hijo. A pesar de las grandes dificultades económicas y anímicas, ella asistía con Pontryagin a la escuela y al terminar las labores escolares dedicaba el resto del día para leerle a su hijo sobre los temas vistos en la escuela y otros más. Y así fue hasta que Pontryagin terminó la carrera de matemático en 1929. Incluso, años después, ella trabajó como secretaria de Pontryagin, leyéndole artículos científicos en voz alta, escribiendo por él las fórmulas en sus manuscritos y corrigiendo su trabajos. Para hacer esto ella tuvo que aprender a leer en varios idiomas extranjeros.

Sin duda, Tatyana fue una gran mujer que desempeñó un papel crucial en la trayectoria de Pontryagin como matemático. Vale la pena detenerse brevemente y pensar cómo fue que Tatyana sin entrenamiento o conocimiento matemático, por su gran determinación y enorme esfuerzo, logró que Pontryagin fuera un destacado matemático cuando todo estaba en contra de ellos. Otra pregunta interesante es ¿Cómo leía Tatyana un artículo de matemáticas sin saber matemáticas? Un artículo de matemáticas para Tatyana Andreevna estaba lleno de símbolos

misteriosos, no sabía sus significados o nombres, solamente podía describirlos por su aspecto. Por ejemplo, el símbolo de la intersección entre conjuntos lo describía como una herradura hacia abajo, mientras que el símbolo de la unión era una herradura hacia arriba. Si ella leía A herradura derecha B , entonces Pontryagin sabía que A era un subconjunto de B .

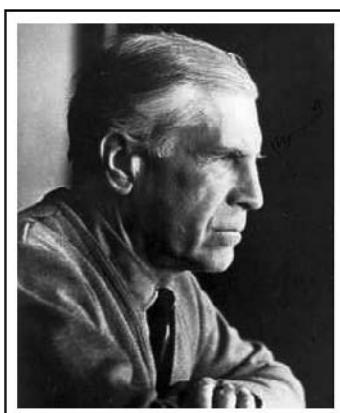
Pontryagin ingresó a la Universidad Estatal de Moscú en 1925 cuando tenía 17 años y llegó a ser un estudiante excepcional. Por supuesto, un estudiante ciego no podía escribir notas (aunque el sistema Braille ya había aparecido en la segunda mitad del siglo XIX, por alguna razón fue desconocido para Pontryagin y su madre). Por tal razón Pontryagin tenía que guardar en su mente todas las manipulaciones de los símbolos por complicadas que éstas fueran. Todavía más notable fue el hecho que Pontryagin llegaba a conclusiones más profundas que las de sus compañeros cuando se discutían los temas vistos en clase. Vale la pena subrayar que Pontryagin tomó cursos con Khinchin y Aleksandrov, quienes se cuentan entre los matemáticos rusos más importantes del siglo XX.

En 1927 Pontryagin influido por Aleksandrov comenzaba a producir resultados importantes sobre el teorema de la dualidad de Alexander. A la fecha la dualidad de Pontryagin es un concepto básico en el estudio de la transformada de Fourier. Se graduó en la Universidad de Moscú en 1929 y fue profesor del Departamento de Mecánica y Matemáticas. En 1934, fue nombrado miembro del Instituto Steklov y en 1935 llega a ser Director del Departamento de Topología y de Análisis Funcional de dicho Instituto.

En 1934, Elie Joseph Cartan, renombrado matemático francés, en una visita a la Universidad de Moscú ofreció varias conferencias en la Facultad de Mecánica y Matemáticas. Pontryagin asistió a la conferencia de Cartan, la cual fue dictada en francés. Pontryagin no sabía francés pero a través de una traducción susurrada de Nina Karlovna Bari quien se sentó junto a él pudo saber del contenido de la conferencia. Nina había sido compañera de Pontryagin en la Universidad de Moscú. Cartan planteó entonces un problema fundamental en la teoría de grupos. Cartan mencionó algunas ideas de cómo resolverlo y las explicó brevemente. Al año siguiente, Pontryagin había resuelto el problema con un enfoque totalmente diferente al sugerido por Cartan y en menos de tres cuartillas.

En 1952, Pontryagin cambia la dirección de sus investigaciones y comienza a estudiar problemas de matemáticas aplicadas, concentrándose en ecuaciones diferenciales y teoría de control. De hecho, este cambio de dirección no fue tan repentino como parece. Durante los años treinta, Pontryagin había intercambiado con A. A. Andronov algunas ideas sobre problemas en la teoría de oscilaciones y la teoría del control automático. Ya en 1932, Pontryagin había publicado un artículo con Andronov sobre sistemas dinámicos. En 1958, Pontryagin publicó la Teoría Matemática de Procesos Óptimos junto con sus estudiantes V. G. Boltyanskii, R. V. Gamrelidze y E. F. Mishchenko. Cuatro años después, una traducción inglesa de su libro apareció. En 1962, Pontryagin recibe el premio Lenin por su libro. Posteriormente, produjo una serie de artículos sobre juegos diferenciales extendiendo su trabajo sobre teoría de control óptimo.

En 1963, aparece un libro más de Pontryagin sobre ecuaciones diferenciales ordinarias y casi inmediatamente la traducción inglesa del texto. Por último, es importante destacar que en 1970 llega a ser vice-presidente de la Unión Matemática Internacional.



Fuente: www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Pontryagin.html
Lev Pontryagin

76.3 Planteamiento del problema de control óptimo determinista

Muchos de los problemas de decisión sobre consumo e inversión se pueden formular en el marco del control óptimo. En términos generales, un problema de control óptimo se formula como:

$$\text{Maximizar } J(f, u) = \psi(f(T)) + \int_0^T F(t, f(t), u(t))dt, \quad (76.1)$$

sujeto a una ecuación diferencial (ecuación de transformación de estados)

$$\dot{f}(t) = G(t, f(t), u(t)), \quad (76.2)$$

una condición inicial

$$f(0) = f_0 \quad (76.3)$$

y un conjunto de controles permitidos

$$u \in \mathcal{U}, \quad (76.4)$$

donde F y G tienen primeras y segundas derivadas parciales continuas con respecto de todos sus argumentos. La función f es llamada variable de estado y la función u es conocida como variable de control. La cantidad $\psi(f(T))$ es la contribución a la función objetivo de la variable de estado al tiempo T . En lo que sigue se supone que $u = u(t)$ es una función continua por pedazos. El conjunto \mathcal{U} , de controles admisibles, puede incluir desigualdades. Es importante tener en cuenta el supuesto implícito de que $f(T)$ es libre con T fija. Por supuesto, el problema anterior puede extenderse para incluir varias variables de estado y varios controles, los cuales pueden combinarse en diferentes ecuaciones de transformación de estados. Por último, observe que se ha utilizado la notación $df(t)/dt = \dot{f}(t)$ para derivadas temporales, misma que se adoptará en el resto del capítulo.

76.4 Transformación de problemas del cálculo de variaciones en problemas de control óptimo

En esta sección varios problemas del cálculo de variaciones son transformados en problemas de control óptimo a través de un cambio de variable. Considere, por ejemplo, el siguiente problema de cálculo de variaciones:

$$\text{Maximizar } J(f) = \int_0^T F(t, f(t), \dot{f}(t))dt, \quad (76.5)$$

sujeto a la condición de frontera

$$f(0) = f_0.$$

Si se define

$$\dot{f}(t) = u(t),$$

entonces el problema (76.5) se puede reescribir como

$$\text{Maximizar } J(f, u) = \int_0^T F(t, f(t), u(t))dt,$$

sujeto a

$$\dot{f}(t) = u(t) \quad \text{y} \quad f(0) = f_0.$$

De la misma manera, el siguiente problema del cálculo de variaciones, relacionado con el problema isoperimétrico,

$$\text{Maximizar } J(f) = \int_0^T F(t, f(t), \dot{f}(t))dt, \quad (76.6)$$

sujeto a

$$f(0) = f_0,$$

$$\int_0^T G(t, f(t), \dot{f}(t)) dt = \ell,$$

se puede transformar en un problema de control óptimo si se define

$$g(t) = \int_0^t G(s, f(s), \dot{f}(s)) ds.$$

Claramente, $g(0) = 0$ y $g(T) = \ell$. En este caso, el problema (76.6) se puede escribir como

$$\text{Maximizar } J(f, u) = \int_0^T F(t, f(t), u(t)) dt, \quad (76.7)$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$\dot{g}(t) = G(t, f(t), u(t)), \quad \dot{f}(t) = u(t), \quad g(0) = 0, \quad g(T) = \ell \quad \text{y} \quad f(0) = f_0.$$

76.5 El principio del máximo de Pontryagin, el Hamiltoniano y la ecuación adjunta

El principio del máximo de Pontryagin constituye un conjunto de condiciones necesarias de máximo. Sea $u \in \mathcal{U}$ un control admisible del problema (76.1) y f la variable de estado asociada con dicho control. Debido a que un cambio en $u(t)$ induce un cambio en $f(t)$, es difícil determinar el efecto de dicho cambio en el valor de la función objetivo. Por esta razón, se aplica un método indirecto. Para ello, se agregan a J términos que suman cero. En particular, se forma la función objetivo modificada

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(f, u) &= J(f, u) - \int_0^T \lambda(t) [\dot{f} - G(t, f, u)] dt \\ &= \psi(f(T)) + \int_0^T F(t, f, u) dt - \int_0^T \lambda(t) [\dot{f} - G(t, f, u)] dt, \end{aligned} \quad (76.8)$$

donde $\lambda(t)$ es una función cuya derivada es continua por pedazos. La última integral es cero para cualquier $\lambda(t)$. Por lo anterior se puede considerar el problema de maximizar \mathcal{J} en lugar de J : La ventaja es que la flexibilidad en la elección de λ permite simplificar el problema. El Hamiltoniano asociado al problema de control óptimo se define de la siguiente forma:

$$H(t, f, u, \lambda) = F(t, f, u) + \lambda G(t, f, u). \quad (76.9)$$

Observe ahora que la función objetivo modificada, \mathcal{J} , puede ser expresada en términos del Hamiltoniano, H , de la siguiente manera:

$$\mathcal{J}(f, u) = \psi(f(T)) + \int_0^T (H(t, f, u, \lambda) - \lambda(t) \dot{f}(t)) dt. \quad (76.10)$$

Considere el control óptimo $u \in \mathcal{U}$ del problema (76.1) y la variable asociada de estado f . Considere una pequeña perturbación en u , $u + v \in \mathcal{U}$. Este control nuevo produce una nueva variable de estado que se escribirá como $f + h$, con $h(0) = 0$. En este caso,

$$\dot{h}(t) = G(t, f(t) + h(t), u(t) + v(t)) - G(t, f(t), u(t)).$$

Esta ecuación describe cómo cambia la variable de estado cuando cambia el control. Considere ahora la diferencia

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(f + h, u + v) - \mathcal{J}(f, u) &= \psi((f + h)(T)) - \psi(f(T)) \\ &\quad + \int_0^T (H(t, f + h, u + v, \lambda) - H(t, f, u, \lambda)) dt \\ &\quad - \int_0^T \lambda(t) \dot{h}(t) dt. \end{aligned} \quad (76.11)$$

Si se integra por partes la segunda integral del lado derecho de la expresión anterior, se tiene que

$$\int_0^T \lambda(t) \dot{h}(t) dt = \lambda(T)h(T) - \int_0^T \dot{\lambda}(t)h(t)dt, \quad (76.12)$$

ya que $h(0) = 0$. Después de sustituir (76.12) en la ecuación (76.11), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(f + h, u + v) - \mathcal{J}(f, u) &= \psi((f + h)(T)) - \psi(f(T)) - \lambda(T)h(T) \\ &\quad + \int_0^T [H(t, f + h, u + v, \lambda) - H(t, f, u, \lambda) + \dot{\lambda}(t)h(t)] dt. \end{aligned} \quad (76.13)$$

En este caso, la aplicación de la versión multidimensional del teorema de Taylor a la expresión anterior conduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(f + h, u + v) - \mathcal{J}(f, u) &= [\psi_f(f(T)) - \lambda(T)] h(T) + \int_0^T \dot{\lambda}(t)h(t)dt \\ &\quad + \int_0^T H_f h(t)dt + \int_0^T H_u v(t)dt + o(\|(h, v)\|), \end{aligned} \quad (76.14)$$

donde

$$\|(h, v)\| = \max_{t \in [a, b]} |h(t)| + \max_{t \in [a, b]} |\dot{h}(t)| + \max_{t \in [a, b]} |v(t)|. \quad (76.15)$$

La función λ se elige de tal manera que los dos primeros términos del lado derecho de (76.14) desaparezcan. Si se escoge λ de tal forma que

$$-\dot{\lambda} = H_f \quad (76.16)$$

y

$$\lambda(T) = \psi_f(f(T)), \quad (76.17)$$

se obtiene

$$\mathcal{J}(f + h, u + v) - \mathcal{J}(f, u) = \int_0^T H_u v(t)dt + o(\|(h, v)\|).$$

Si ahora se fija (h, v) y se define $\mathcal{I}(\delta) = \mathcal{J}(f + h, u + \delta v)$ con $\delta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{I}(\delta) - \mathcal{I}(0) = \delta \int_0^T H_z v(t)dt + o(\delta), \quad (76.18)$$

donde $z = u + \delta v$. Si (f, u) es óptimo de \mathcal{J} y, por lo tanto de J , entonces

$$\mathcal{I}'(0) = \int_0^T H_u v(t)dt = 0 \quad (76.19)$$

para toda v continua por pedazos. Esto implica que $H_u = 0$, lo cual es una condición necesaria para que

$$H(t, f, u + \delta v, \lambda) - H(t, f, u, \lambda) \leq 0 \quad (76.20)$$

se cumpla con δ suficientemente pequeña. En conclusión, si $u(t)$ y $f(t)$ son el control óptimo y su variable de estado asociada, entonces existe una variable de co-estado $\lambda(t)$ tal que $u(t)$, $f(t)$ y $\lambda(t)$ satisfacen conjuntamente las siguientes condiciones:

- (i) $\dot{f}(t) = G(t, f(t), u(t)),$ (ecuación del sistema)
- (ii) $f(0) = f_0,$ (condición inicial)
- (iii) $-\dot{\lambda}(t) = F_f(t, f(t), u(t)) + \lambda(t)G_f(t, f(t), u(t)),$ (ecuación adjunta)
- (iv) $\lambda(T) = \psi_f(f(T)),$ (condición de transversalidad)
- (v) $\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$ (condición del control óptimo)

donde H es el Hamiltoniano

$$H(t, f(t), u(t), \lambda(t)) = F(t, f(t), u(t)) + \lambda(t)G(t, f(t), u(t)).$$

Observe, en particular, que si $\psi(f(T)) = 0$, entonces $\lambda(T) = 0$.

76.6 Valor presente del Hamiltoniano

Al estudiar el comportamiento de un consumidor-inversionista racional con vida infinita, la utilidad total es descontada con una tasa subjetiva, esto hace con el propósito de que la función objetivo permanezca finita. La inclusión de dicho factor produce algunas modificaciones técnicas en el principio del máximo. Con el propósito de mantener tan simple como sea posible el análisis de condiciones necesarias de un máximo, es importante introducir el concepto de valor presente del Hamiltoniano. Consideré el siguiente problema de control óptimo

$$\text{Maximizar} \quad J(f, u) = \int_0^T F(t, f(t), u(t))e^{-\rho t} dt \quad (76.21)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= G(t, f(t), u(t)), \\ f(0) &= f_0, \\ u &\in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

donde $\rho > 0$ es una tasa continua de descuento. En este caso, el Hamiltoniano está dado por

$$H(t, f(t), u(t), \lambda(t)) = F(t, f(t), u(t))e^{-\rho t} + \lambda(t)G(t, f(t), u(t)) \quad (76.22)$$

y el principio del máximo conduce a

$$-\dot{\lambda}(t) = F_f(t, f(t), u(t))e^{-\rho t} + \lambda(t)G_f(t, f(t), u(t)). \quad (76.23)$$

Defina ahora

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, f(t), u(t), \lambda(t)) &= H(t, f(t), u(t), \lambda(t))e^{\rho t} \\ &= F(t, f(t), u(t)) + \mu(t)G(t, f(t), u(t)), \end{aligned} \quad (76.24)$$

donde

$$\mu(t) = \lambda(t)e^{\rho t}. \quad (76.25)$$

Observe ahora que $\lambda(t) = \mu(t)e^{-\rho t}$ y

$$\dot{\lambda}(t) = -\rho\mu(t)e^{-\rho t} + e^{-\rho t}\dot{\mu}(t). \quad (76.26)$$

De esta manera, (76.23) se transforma en

$$\rho\mu(t)e^{-\rho t} - e^{-\rho t}\dot{\mu}(t) = F_f(t, f(t), u(t))e^{-\rho t} + \mu(t)e^{-\rho t}G_f(t, f(t), u(t)),$$

equivalentemente

$$-F_f(t, f(t), u(t)) - \mu(t)G_f(t, f(t), u(t)) = \dot{\mu}(t) - \rho\mu(t)$$

6

$$-\frac{\partial H}{\partial f} = \dot{\mu}(t) - \rho\mu(t). \quad (76.27)$$

Por otro lado, la condición de transversalidad $\lambda(T)$ conduce a $\mu(T)e^{-\rho T}$, lo cual implica que $\mu(T) = 0$. Observe que si el horizonte de planeación es infinito, entonces la condición de transversalidad toma la siguiente forma:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0. \quad (76.28)$$

76.7 Condiciones suficientes de Mangasarian

El principio del máximo de Pontryagin proporciona condiciones necesarias de un máximo. En esta sección se establecen las condiciones suficientes de un máximo partiendo del supuesto de concavidad de las diferentes funciones que intervienen en el problema de control óptimo. Consideremos el siguiente problema de control óptimo

$$\text{Maximizar } J(f, u) = \int_0^T F(t, f(t), u(t)) dt + \psi(f(T)) \quad (76.29)$$

sujeto a

$$\dot{f}(t) = G(t, f(t), u(t)),$$

$$f(0) = f_0.$$

Suponga que $u(t)$, $f(t)$ y $\lambda(t)$, $t \in [0, T]$, satisfacen conjuntamente el principio del máximo. Asimismo, suponga que se cumplen las siguientes condiciones: a) F y G son funciones cóncavas en (f, u) para cada $t \in [0, T]$, b) ψ es cóncava en f , c) $\lambda(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$ y d) G no es lineal en (f, u) , entonces $u(t)$, $f(t)$ y $\lambda(t)$ resuelven el problema (76.29). En efecto, F y G son funciones cóncavas en (f, u) para cada $t \in [0, T]$ si y sólo si

$$F(t, f + h, u + v) - F(t, f, u) \leq \frac{\partial F}{\partial f}(t, f, u)h + \frac{\partial F}{\partial u}(t, f, u)v \quad (76.30)$$

y

$$G(t, f + h, u + v) - G(t, f, u) \leq \frac{\partial G}{\partial f}(t, f, u)h + \frac{\partial G}{\partial u}(t, f, u)v \quad (76.31)$$

para cada $t \in [0, T]$. De la misma forma, la concavidad de ψ con respecto de f produce

$$\psi(f(T) + h(T)) - \psi(f(T)) \leq \psi'(f(T))h(T). \quad (76.32)$$

Sea $u + v \in \mathcal{U}$ cualquier control admisible y sea $f + h$ la variable de estado asociada a dicho control. Observe también que el principio del máximo implica que

$$\frac{\partial F}{\partial f} = -\dot{\lambda} - \lambda \frac{\partial G}{\partial f} \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial u} = -\lambda \frac{\partial G}{\partial u}. \quad (76.33)$$

Si se calcula la diferencia $J(f + h, u + v) - J(f, u)$ utilizando (76.30), (76.32) y (76.33), se tiene que

$$\begin{aligned} J(f + h, u + v) - J(f, u) &= \psi((f + h)(T)) - \psi(f(T)) \\ &\quad + \int_0^T (F(t, f + h, u + v) - F(t, f, u)) dt \\ &\leq \psi'(f(T))h(T) + \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial f}h + \frac{\partial F}{\partial u}v \right) dt \\ &= \psi'(f(T))h(T) + \int_0^T \left[\left(-\dot{\lambda} - \lambda \frac{\partial G}{\partial f} \right) h - \lambda \frac{\partial G}{\partial u}v \right] dt. \end{aligned} \quad (76.34)$$

La ecuación anterior se puede simplificar si se integra por partes el primer término del integrando y tomando en cuenta que $h(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \dot{\lambda}h dt &= \lambda(T)h(T) - \int_0^T \lambda \dot{h} dt \\ &= \lambda(T)h(T) - \int_0^T \lambda (G(t, f + h, u + v) - G(t, f, u)) dt. \end{aligned} \quad (76.35)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} J(f + h, u + v) - J(f, u) &\leq (\psi'(f(T)) - \lambda(T)) h(T) \\ &+ \int_0^T \lambda \left[G(t, f + h, u + v) - G(t, f, u) - \frac{\partial G}{\partial f} h - \frac{\partial G}{\partial u} v \right] dt. \end{aligned} \quad (76.36)$$

Recuerde que por hipótesis $\lambda(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$. Si se utiliza (76.31) y el hecho de que $\psi'(f(T)) = \lambda(T)$, se concluye que

$$J(f + h, u + v) - J(f, u) \leq 0$$

para (h, v) suficientemente pequeño. Es decir, (f, u) es óptimo. Si G es lineal en (f, u) , entonces $G = \alpha f + \beta u + \gamma(t)$, donde α y β son constantes y $\gamma(t)$ es una función arbitraria de t , se tiene que $J(f + h, u + v) - J(f, u) = 0$.

76.8 Condiciones suficientes de Arrow y el Hamiltoniano derivado

En esta sección se establece una condición suficiente de un máximo con base en el supuesto de concavidad del Hamiltoniano derivado, el cual se obtiene al valuar el Hamiltoniano en un control que satisface el principio del máximo. Considere el siguiente problema de control óptimo:

$$\text{Maximizar } J(f, u) = \int_0^T F(t, f(t), u(t)) dt + \psi(f(T)) \quad (76.37)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= G(t, f(t), u(t)), \\ f(0) &= f_0. \end{aligned}$$

Se define

$$H^0(t, f, \lambda) = \max_{u \in \mathcal{U}} H(t, f, u, \lambda). \quad (76.38)$$

Suponga que u^0 satisface

$$H^0(t, f, \lambda) = H(t, f, u^0, \lambda). \quad (76.39)$$

Suponga también que $u^0(t)$, $f(t)$ y $\lambda(t)$, $t \in [0, T]$, satisfacen conjuntamente el principio del máximo de Pontryagin. Asimismo, suponga que H^0 es cóncava en f para cada $t \in [0, T]$ y ψ es cóncava en f , entonces $u^0(t)$, $f(t)$ y $\lambda(t)$ resuelven el problema (76.37). En efecto, H^0 es cóncava en f para cada $t \in [0, T]$ si y sólo si

$$H^0(t, f(t) + h(t), \lambda(t)) - H^0(t, f(t), \lambda(t)) \leq H_f^0(t, f(t), \lambda(t))$$

para cada $t \in [0, T]$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} &H(t, f(t) + h(t), u^0(t) + v(t), \lambda(t)) - H(t, f(t), u^0(t), \lambda(t)) \\ &\leq H_f(t, f(t), u^0(t), \lambda(t))h(t). \end{aligned} \quad (76.40)$$

Si se utiliza el principio del máximo en (76.40), se obtiene

$$\begin{aligned} &F(t, f(t) + h(t), u^0(t) + v(t)) + \lambda(t)G(t, f(t) + h(t), u^0(t)) \\ &- F(t, f(t), u^0(t)) - \lambda(t)G(t, f(t), u^0(t)) \leq -\dot{\lambda}(t)h(t), \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} &F(t, f(t) + h(t), u^0(t)) - F(t, f(t), u^0(t)) \leq -\lambda(t)h(t) + \dot{\lambda}(t)h(t) \\ &= -\frac{d}{dt}(\lambda(t)h(t)) \end{aligned} \quad (76.41)$$

para todo $t \in [0, T]$. Si ahora se integra (76.41) y se toma en cuenta que $h(0) = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} J(f + h, u^0 + v) - J(f, u^0) &\leq \lambda(T)h(T) \\ &= \psi_f(f(T))h(T) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

para todo (h, v) suficientemente pequeño. Por lo tanto, (f, u^0) es óptimo.

76.9 Problemas de control óptimo con fronteras variables, condiciones necesarias

Considere el siguiente problema de control óptimo con fronteras variables

$$\text{Maximizar } J(f, u, T) = \int_0^T F(t, f(t), u(t)) dt + \psi(f(T), T) \quad (76.42)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= G(t, f(t), u(t)), \\ f(0) &= f_0, \quad T \text{ y } f(T) \text{ libres.} \end{aligned}$$

Si f , u y T son la solución del problema anterior y se incrementan como $f + \delta h$, $h(a) = 0$, $u + \delta v$ y $T(\delta, \tau) = T + \delta\tau$, con (h, v, τ) fijo y $\delta \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeña, se tiene que

$$\begin{aligned} J(f, u, T) &= \psi(f(T), T) + \int_0^T [H(t, f, u, \lambda) - \lambda(t)\dot{f}(t)] dt \\ &= \psi(f(T), T) + \int_0^T [H(t, f, u, \lambda) + f(t)\dot{\lambda}(t)] dt - \lambda(T)f(T). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\delta) &\equiv J(f + \delta h, u + \delta v, T + \delta\tau) \\ &= \psi(f(T(\delta)), T(\delta)) + \int_0^{T(\delta)} [H(t, f + \delta h, u + \delta v, \lambda) + (f(t) + \delta h(t))\dot{\lambda}(t)] dt \\ &\quad - \lambda(T(\delta))f(T(\delta)). \end{aligned} \quad (76.43)$$

Observe ahora que

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial f} df + \frac{\partial \psi}{\partial T} dT \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial f} \left(\frac{\partial f}{\partial T} \tau + \frac{\partial f}{\partial \delta} \delta \right) + \frac{\partial \psi}{\partial T} dT. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{d\psi}{d\delta} = \frac{\partial \psi}{\partial f} \left(\frac{\partial f}{\partial T} \tau + \frac{\partial f}{\partial \delta} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial T} \tau. \quad (76.44)$$

En virtud de (76.44) y la regla de Leibnitz, la derivada de \mathcal{I} se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'(\delta) &= \left[\frac{\partial \psi}{\partial f} \left(\frac{\partial f}{\partial T} \tau + \frac{\partial f}{\partial \delta} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial T} \tau \right] \Big|_{T(\delta)} \\ &\quad + \int_0^{T(\delta)} \left[\frac{\partial H}{\partial g} h(t) + \frac{\partial H}{\partial w} v(t) + h(t)\dot{\lambda}(t) \right] dt \\ &\quad + H(T(\delta), f(T(\delta)) + \delta h(T(\delta)), u(T(\delta)) + \delta v(T(\delta)), \lambda(T(\delta)))\tau \\ &\quad + (f + \delta h)(T(\delta))\dot{\lambda}(T(\delta))\tau - f(T(\delta))\dot{\lambda}(T(\delta))\tau - \lambda(T(\delta)) \left(\frac{\partial f}{\partial T} \tau + \frac{\partial f}{\partial \delta} \right) \Big|_{T(\delta)}, \end{aligned} \quad (76.45)$$

donde $g = f + \delta h$ y $w = u + \delta v$. Una condición necesaria de un máximo de \mathcal{I} en 0 es que $\mathcal{I}'(0) = 0$, lo cual implica

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \psi}{\partial f} \Big|_T \left(\frac{\partial f}{\partial T} \tau + \frac{\partial f}{\partial \delta} \right) \Big|_T + \frac{\partial \psi}{\partial T} \Big|_T \tau \\ &\quad + \int_0^T \left[\frac{\partial H}{\partial f} h(t) + \frac{\partial H}{\partial u} v(t) + h(t)\dot{\lambda}(t) \right] dt \\ &\quad + H(T, f(T), u(T), \lambda(T))\tau \\ &\quad + f(T)\dot{\lambda}(T)\tau - f(T)\dot{\lambda}(T)\tau - \lambda(T) \left(\frac{\partial f}{\partial T} \tau + \frac{\partial f}{\partial \delta} \right) \Big|_T. \end{aligned}$$

Si la función λ , continua por pedazos, se escoge de tal manera que

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial f} \quad \text{con} \quad \lambda(T) = \left. \frac{\partial \psi}{\partial f} \right|_T,$$

entonces se cumple que

$$0 = \int_0^T \frac{\partial H}{\partial u} v(t) dt + \left. \frac{\partial \psi}{\partial T} \right|_T \tau + H(T, f(T), u(T), \lambda(T)) \tau. \quad (76.46)$$

Si además se pide que

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial T} \right|_T + H(T, f(T), u(T), \lambda(T)) = 0, \quad (76.47)$$

entonces $\int_0^T (\partial H / \partial u) v(t) dt = 0$ para toda v admisible, lo cual implica que

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (76.48)$$

76.10 Aplicación del principio del máximo a problemas de un consumidor racional intertemporal

A continuación se aplica el principio del máximo de Pontryagin a problemas de decisión de un consumidor-inversionista racional. Las aplicaciones se llevarán a cabo en el marco del crecimiento endógeno.

76.10.1 Función de utilidad logarítmica

Considere una economía que produce y consume un solo bien perecedero. La identidad de la renta nacional, para una economía cerrada, en términos *per capita* está dada por

$$y_t = c_t + i_t + g.$$

Esta condición establece que el producto *per capita*, y_t , se destina a tres fines: al consumo, c_t , a la inversión, i_t , y al gasto de gobierno, g . Por el momento, se supone que $g = 0$. La identidad de la renta nacional asegura el equilibrio en el mercado de bienes. Suponga que el problema de decisión que resuelve un consumidor racional, maximizador de utilidad es el siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && \int_0^\infty u(c_t) e^{-\rho t} dt \\ &\text{sujeto a:} && y_t = c_t + \dot{k}_t, \\ & && k_0 = \text{constante}, \end{aligned}$$

donde $u(c_t)$ es la función de utilidad o satisfacción del individuo y ρ es la tasa subjetiva de descuento. Si se supone que $y_t = Ak_t$, entonces el producto marginal de capital se mantiene constante e igual a A . De esta manera, el problema anterior se transforma en:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && \int_0^\infty u(c_t) e^{-\rho t} dt \\ &\text{sujeto a:} && \dot{k}_t = Ak_t - c_t, \\ & && k_0 = \text{constante conocida}. \end{aligned}$$

Suponga, en particular, que $u(c_t) = \ln(c_t)$. En el contexto de la teoría de control óptimo, k_t es la variable de estado y c_t es la variable de control. El Hamiltoniano asociado a este problema se define como:

$$H(k_t, c_t, \lambda_t, t) = \ln(c_t) + \lambda_t(Ak_t - c_t),$$

donde λ_t es la variable de coestado. En este caso, las condiciones de primer orden están dadas por:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = 0, \quad (76.49)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial k_t} = \dot{\lambda}_t - \rho \lambda_t \quad (76.50)$$

y

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = \dot{k}_t. \quad (76.51)$$

A partir de la condición (76.50) se sigue que

$$\dot{\lambda}_t = \lambda_t(\rho - A).$$

Por lo tanto,

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{(\rho-A)t}. \quad (76.52)$$

Es fácil ver que la condición (76.49) conduce a

$$\frac{1}{c_t} = \lambda_t,$$

es decir,

$$c_t = \frac{1}{\lambda_t}.$$

Al sustituir la ecuación (76.52) en la ecuación anterior, se tiene que

$$c_t = \frac{1}{\lambda_0} e^{(A-\rho)t}. \quad (76.53)$$

Ahora bien, en virtud de (76.51), se tiene que $c_t = Ak_t - \dot{k}_t$. Si esta ecuación se multiplica por e^{-At} y se integra, se tiene como resultado que

$$\int_0^\infty c_t e^{-At} dt = \int_0^\infty Ak_t e^{-At} dt - \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} dt. \quad (76.54)$$

Observe que integración por partes del primer sumando del lado derecho de la ecuación anterior produce

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Ak_t e^{-At} dt &= -k_t e^{-At} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} dt \\ &= k_0 - \lim_{t \rightarrow \infty} k_t e^{-At} + \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} dt. \end{aligned}$$

Si se supone ahora la condición de transversalidad, $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t e^{-At} = 0$, se sigue que

$$\int_0^\infty Ak_t e^{-At} dt - \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} dt = k_0.$$

Por lo tanto, la ecuación (76.54) se transforma en

$$\int_0^\infty c_t e^{-At} dt = k_0.$$

Si se sustituye (76.53) en la ecuación anterior, se obtiene que

$$\begin{aligned} k_0 &= \int_0^\infty c_t e^{-At} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda_0} e^{(A-\rho)t} e^{-At} dt \\ &= \frac{1}{\lambda_0} \int_0^\infty e^{-\rho t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda_0 \rho}. \end{aligned}$$

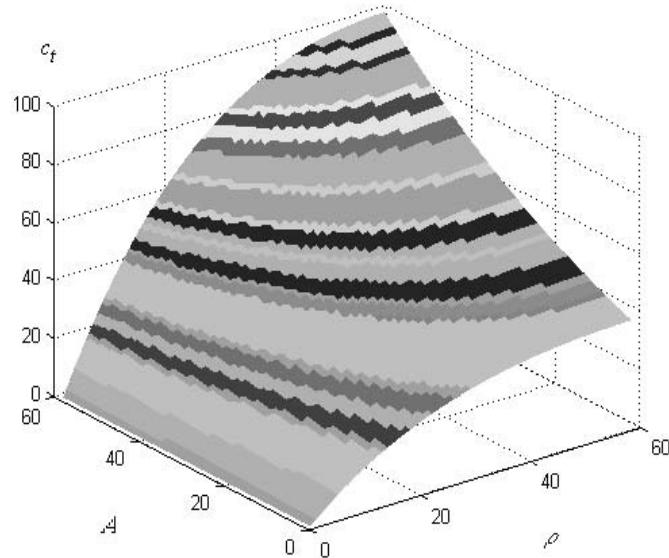
En consecuencia,

$$\frac{1}{\lambda_0} = k_0 \rho.$$

En virtud de (76.53) y del resultado anterior, la trayectoria óptima de consumo satisface

$$c_t = k_0 \rho e^{(A-\rho)t}, \quad (76.55)$$

donde $c_0 = k_0 \rho$. Evidentemente, esta trayectoria es un máximo (global) de la utilidad total descontada ya que $\ln(c_t)$ es una función cóncava. La Gráfica 76.1 muestra el consumo óptimo, calculado en $t = 1$, en función del parámetro asociado a la tecnología, A , y del parámetro de preferencias, ρ .



Gráfica 76.1 Consumo óptimo, en $t = 1$, en función de A y ρ con $k_0 = 100$.

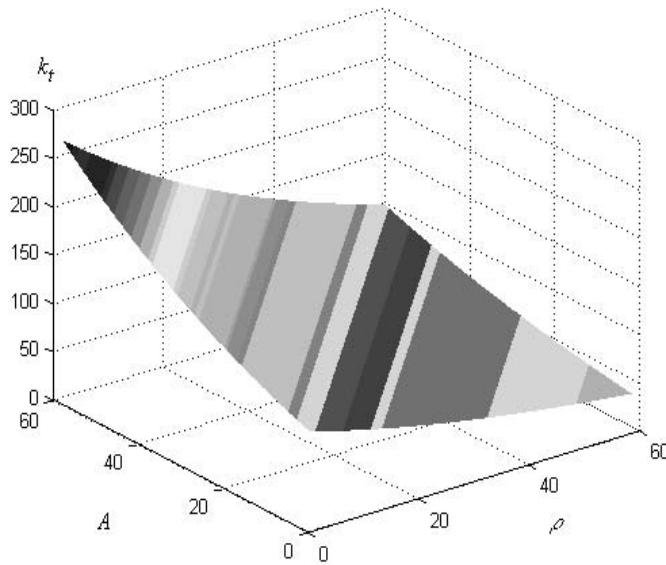
Por otro lado, observe que a partir de la restricción presupuestal, se tiene que

$$\dot{k}_t = Ak_t - c_t = Ak_t - k_0 \rho e^{(A-\rho)t}.$$

Es sencillo verificar que la solución de esta ecuación diferencial ordinaria, no homogénea, está dada por

$$\begin{aligned} k_t &= k_0 e^{At} - e^{At} \int_0^t k_0 \rho e^{(A-\rho)s} e^{-As} ds \\ &= k_0 e^{At} - k_0 e^{At} (1 - e^{-\rho t}) \\ &= k_0 e^{(A-\rho)t}. \end{aligned} \quad (76.56)$$

La Gráfica 76.2 muestra el capital, en $t = 1$, en función de A y ρ para un valor específico del capital inicial, k_0 .



Gráfica 76.2 capital, en $t = 1$, en función de A y ρ con $k_0 = 100$.

Observe ahora que a partir de la trayectoria óptima de consumo, determinada en la ecuación (76.55), se sigue que

$$\dot{c}_t = (A - \rho)c_t,$$

lo cual se puede reescribir como

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = A - \rho.$$

Esta expresión proporciona la tasa de crecimiento del consumo. De la misma manera, a partir de (76.55), se obtiene que

$$\dot{k}_t = (A - \rho)k_t.$$

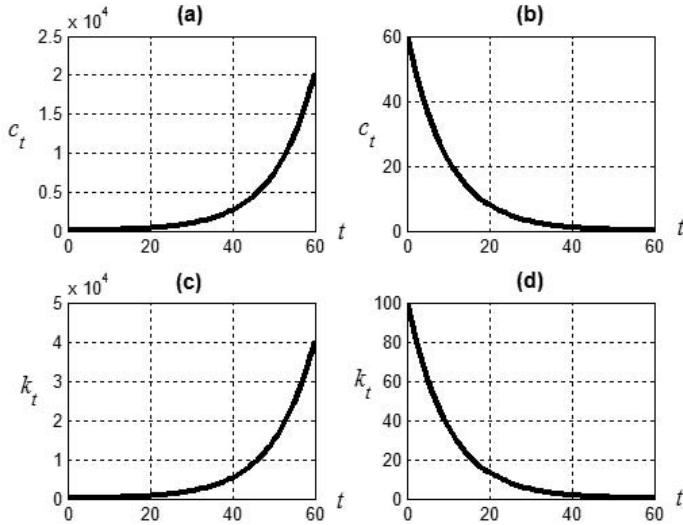
Es decir,

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = A - \rho,$$

lo cual proporciona la tasa de crecimiento del capital. Como $y_t = Ak_t$, se tiene también que $\dot{y}_t = Ak_t$. Se concluye, de lo anterior, que

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = A - \rho.$$

En consecuencia, el consumo, el capital y el producto crecen (o decrecen) exactamente a la misma tasa $A - \rho$. Si $A > \rho$, todos los sectores crecen, mientras que si $A < \rho$ todos los sectores decrecen. Cuando todos los sectores crecen (o decrecen) a la misma tasa se dice que el crecimiento en la economía es balanceado. La Gráfica 76.3 muestra el comportamiento de las trayectorias óptimas del consumo y del capital para ciertos valores de los parámetros.



Gráfica 76.3 (a) y (c) muestran las trayectorias óptimas del consumo y capital, respectivamente, cuando $A = 0.6 > \rho = 0.5$. Asimismo, (b) y (d) muestran las trayectorias óptimas del consumo y capital, respectivamente, cuando $A = 0.5 < \rho = 0.6$.

76.10.2 Función de utilidad con grado constante de aversión al riesgo I

Considere el siguiente problema que resuelve un consumidor racional maximizador de utilidad:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^\infty \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} dt \\ \text{sujeto a:} \quad & k_t = Ak_t - c_t, \\ & k_0 = \text{constante}. \end{aligned}$$

Suponga que $\gamma < 1$ a fin de que la utilidad marginal sea positiva pero decreciente. El Hamiltoniano asociado a este problema de control está dado por

$$H(k_t, c_t, \lambda_t, t) = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} + \lambda_t(Ak_t - c_t).$$

Con base en el principio del máximo, las condiciones de primer orden están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = 0, \quad -\frac{\partial H}{\partial k_t} = \dot{\lambda}_t - \rho \lambda_t \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = \dot{k}_t. \quad (76.57)$$

A partir de la segunda condición en (76.57), se sigue que

$$\dot{\lambda}_t = \lambda_t(\rho - A).$$

Por lo tanto,

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{(\rho - A)t}. \quad (76.58)$$

La primera condición en (76.57) conduce a

$$c_t^{\gamma-1} - \lambda_t = 0,$$

es decir,

$$c_t = \lambda_t^{1/(\gamma-1)}.$$

Al sustituir la ecuación (76.58) en la ecuación anterior, se tiene que

$$c_t = \lambda_0^{1/(\gamma-1)} e^{(\rho-A)t/(\gamma-1)}. \quad (76.59)$$

Ahora bien, en virtud de que

$$\int_0^\infty c_t e^{-At} dt = k_0,$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} k_0 &= \int_0^\infty c_t e^{-At} dt \\ &= \int_0^\infty \lambda_0^{1/(\gamma-1)} e^{(\rho-A)t/(\gamma-1)} e^{-At} dt \\ &= \lambda_0^{1/(\gamma-1)} \int_0^\infty e^{(\rho-\gamma A)t/(\gamma-1)} dt \\ &= \lambda_0^{1/(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma A - \rho} \right). \end{aligned}$$

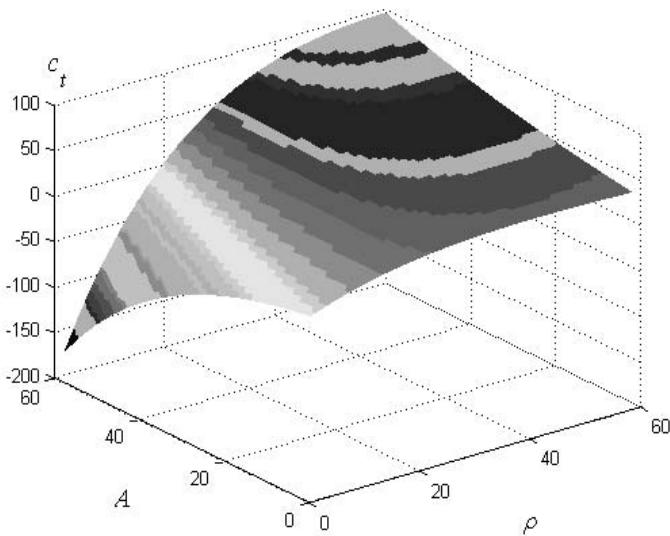
En consecuencia,

$$\lambda_0^{1/(\gamma-1)} = k_0 \left(\frac{\gamma A - \rho}{\gamma - 1} \right).$$

De esta manera, al sustituir la expresión anterior en (76.59), la trayectoria óptima de consumo está dada por

$$c_t = k_0 \left(\frac{\rho - \gamma A}{1 - \gamma} \right) e^{(\rho - A)t/(\gamma - 1)}, \quad (76.60)$$

donde $c_0 = k_0(\rho - \gamma A)/(1 - \gamma)$. En este caso, se tiene que suponer que $\rho > \gamma A$ para garantizar que c_t se mantenga positivo. La Gráfica 76.4 muestra el consumo óptimo, en $t = 1$, en función de A y ρ con $\gamma = 0.3$ y $k_0 = 100$.



Gráfica 76.4 Consumo óptimo, en $t = 1$, en función de A y ρ con $\gamma = 0.3$.

Por otro lado, a partir de la tercera condición de (76.57), se tiene que el capital satisface la siguiente ecuación:

$$\dot{k}_t = Ak_t - c_t = Ak_t - k_0 \left(\frac{\gamma A - \rho}{\gamma - 1} \right) e^{(\rho-A)t/(\gamma-1)}, \quad (76.61)$$

la cual es una ecuación de la forma

$$\dot{x}_t = \alpha x_t + g(t).$$

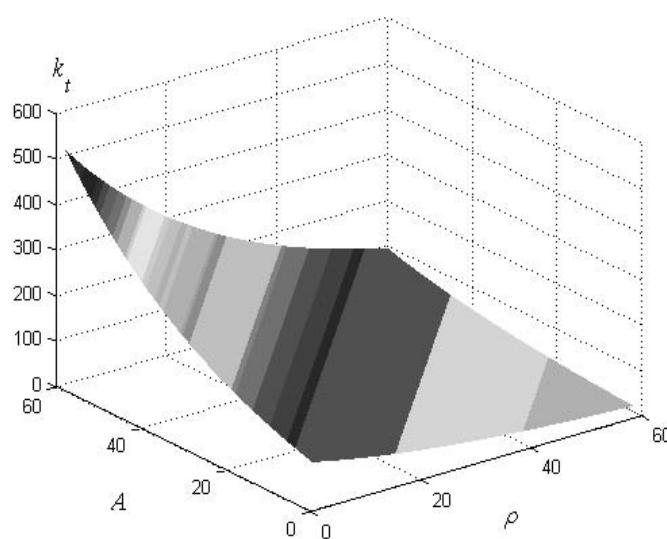
La solución de esta ecuación diferencial ordinaria de primer orden, no homogénea, está dada por

$$x_t = x_0 e^{\alpha t} + e^{\alpha t} \int_0^t g(s) e^{-\alpha s} ds.$$

Por lo tanto, la solución de (76.61) está determinada por

$$\begin{aligned} k_t &= k_0 e^{At} - e^{At} \int_0^t k_0 \left(\frac{\gamma A - \rho}{\gamma - 1} \right) e^{(\rho-A)s/(\gamma-1)} e^{-As} ds \\ &= k_0 e^{At} - k_0 e^{At} \int_0^t \left(\frac{\gamma A - \rho}{\gamma - 1} \right) e^{-(\gamma A - \rho)s/(\gamma-1)} ds \\ &= k_0 e^{At} - k_0 e^{At} \left(1 - e^{-(\gamma A - \rho)t/\gamma-1} \right) \\ &= k_0 e^{(\rho-A)t/(\gamma-1)}. \end{aligned} \quad (76.62)$$

La Gráfica 76.5 muestra el capital, en $t = 1$, en función de A y ρ , con $\gamma = 0.4$ y $k_0 = 100$.



Gráfica 76.5 Capital, en $t = 1$, en función de A y ρ con $\gamma = 0.4$.

Ahora bien, a partir de (76.60), se tiene que

$$\dot{c}_t = \left(\frac{\rho - A}{\gamma - 1} \right) c_t$$

ó

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\rho - A}{\gamma - 1},$$

lo cual proporciona la tasa de crecimiento del consumo. Por otro lado, en virtud de (76.62), se produce que

$$\dot{k}_t = \left(\frac{\rho - A}{\gamma - 1} \right) k_t.$$

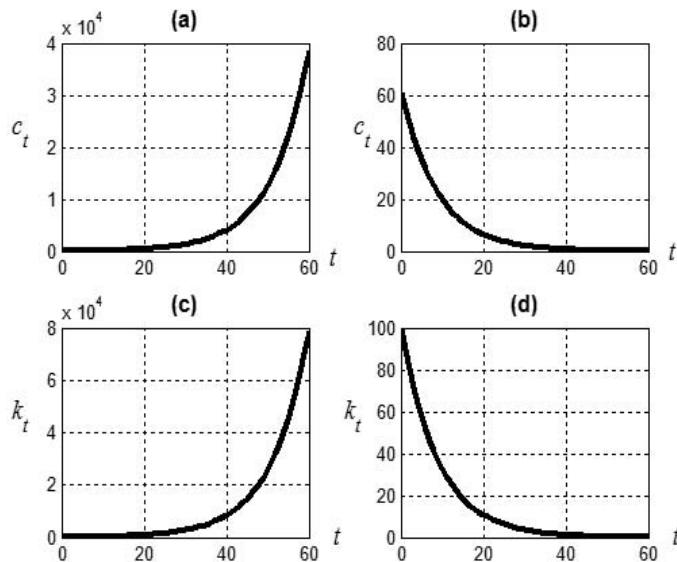
Es decir,

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{\rho - A}{\gamma - 1},$$

lo cual proporciona la tasa de crecimiento del capital. Además $y_t = Ak_t$ implica que $\dot{y}_t = Ak_t$. Se concluye que

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{Ak_t}{Ak_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{\rho - A}{1 - \gamma}.$$

De esta manera, el consumo, el capital y el producto crecen (o decrecen) exactamente a la misma tasa $(A - \rho)/(1 - \gamma)$. Debido a que $0 < \gamma < 1$, si $A > \rho$, la producción crece, mientras que si $A < \rho$ la producción decrece. La Gráfica 76.6 muestra las trayectorias óptimas del consumo y capital para ciertos valores de los parámetros que determinan las características de la economía.



Gráfica 76.6 (a) y (c) muestran las trayectorias óptimas del consumo y del capital, respectivamente, cuando $A = 0.6 > \rho = 0.5$ con $\gamma = 0.1$.

Asimismo, (b) y (d) muestran las trayectorias óptimas del consumo y del capital, respectivamente, cuando $A = 0.5 < \rho = 0.6$ con $\gamma = 0.1$.

76.10.3 Función de utilidad con grado constante de aversión al riesgo II

Considere ahora el siguiente problema de maximización de utilidad que resuelve un consumidor racional:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^{\infty} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt, \quad \theta > 0, \quad \theta \neq 1, \\ \text{sujeto a:} \quad & \dot{k}_t = Ak_t - c_t, \\ & k_0 = \text{constante conocida.} \end{aligned}$$

El Hamiltoniano asociado a este problema es:

$$H(k_t, c_t, \lambda_t, t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda_t(Ak_t - c_t),$$

donde λ_t es la variable de coestado. En este caso, las condiciones de primer orden (o condiciones necesarias) están dadas por las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = 0, \quad -\frac{\partial H}{\partial k_t} = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = \dot{k}_t. \quad (76.63)$$

A partir de la segunda condición (en 76.63), se tiene que

$$\dot{\lambda}_t = \lambda_t(\rho - A),$$

lo cual implica

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{(\rho - A)t}. \quad (76.64)$$

La primera condición (76.63) conduce a la expresión

$$c_t^{-\theta} - \lambda_t = 0,$$

equivalentemente

$$c_t = \frac{1}{\lambda_t^{1/\theta}}.$$

Al sustituir la ecuación (76.64) en la ecuación anterior, se tiene que

$$c_t = \lambda_0^{-1/\theta} e^{(A-\rho)t/\theta}.$$

Ahora bien, como

$$\int_0^\infty c_t e^{-At} dt = k_0,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} k_0 &= \int_0^\infty c_t e^{-At} dt \\ &= \int_0^\infty \lambda_0^{-1/\theta} e^{(A-\rho)t/\theta} e^{-At} dt \\ &= \lambda_0^{-1/\theta} \int_0^\infty e^{[A(1-\theta)-\rho]t/\theta} dt \\ &= \lambda_0^{-1/\theta} \left(\frac{\theta}{\rho - A(1-\theta)} \right). \end{aligned}$$

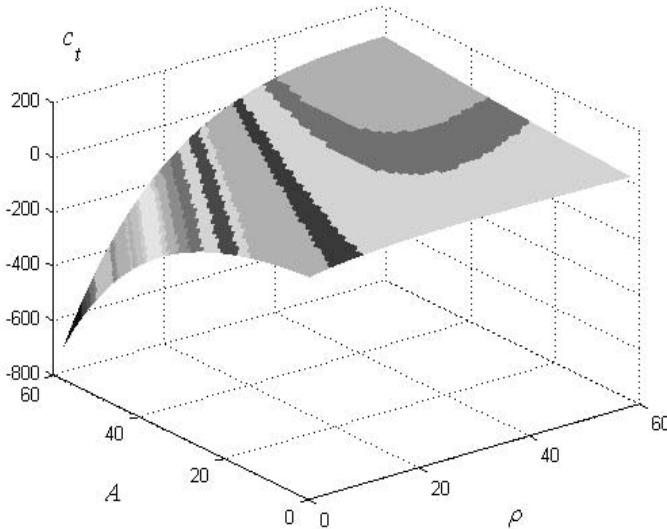
Consecuentemente, el valor inicial λ_0 satisface

$$\lambda_0^{-1/\theta} = k_0 \left(\frac{\rho - A(1-\theta)}{\theta} \right).$$

De esta manera, si $\rho > A(1-\theta)$, la trayectoria óptima de consumo satisface

$$c_t = k_0 \left(\frac{\rho - A(1-\theta)}{\theta} \right) e^{(A-\rho)t/\theta},$$

donde $c_0 = k_0[\rho - A(1-\theta)]/\theta$. La Gráfica 76.7 muestra el consumo óptimo, en $t = 1$, como función de ρ y A , con $\theta = 0.5$ y $k_0 = 100$.

Gráfica 76.7 Consumo óptimo, en $t = 1$, como función de ρ y A .

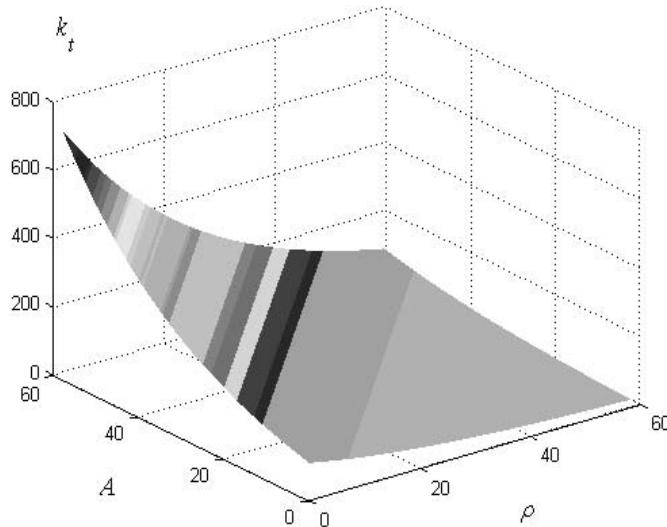
Por otro lado, se tiene que

$$\dot{k}_t = Ak_t - c_t = Ak_t - k_0 \left(\frac{\rho - A(1-\theta)}{\theta} \right) e^{(A-\rho)t/\theta}.$$

La solución de esta ecuación diferencial ordinaria está dada por

$$\begin{aligned} k_t &= k_0 e^{At} - e^{At} \int_0^t k_0 \left(\frac{\rho - A(1-\theta)}{\theta} \right) e^{(A-\rho)s/\theta} e^{-As} ds \\ &= k_0 e^{At} - k_0 e^{At} \int_0^t \left(\frac{\rho - A(1-\theta)}{\theta} \right) e^{-[\rho-A(1-\theta)]s/\theta} ds \\ &= k_0 e^{At} - k_0 e^{At} \left(1 - e^{-[\rho-A(1-\theta)]t/\theta} \right) \\ &= k_0 e^{(A-\rho)t/\theta}. \end{aligned}$$

La Gráfica 76.8 muestra el capital como función de ρ y A , con $\theta = 0.5$ y $k_0 = 100$.

Gráfica 76.8 Capital, en $t = 1$, como función de ρ y A .

Evidentemente,

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{A - \rho}{\theta},$$

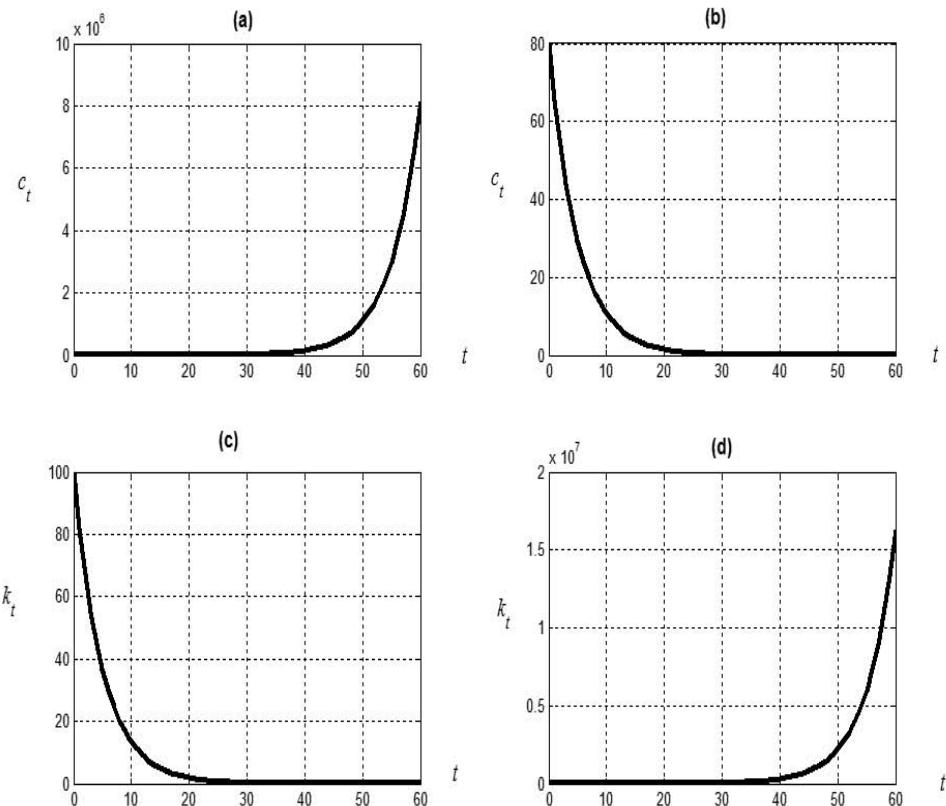
lo cual proporciona la tasa de crecimiento del consumo. Por otro lado,

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{A - \rho}{\theta},$$

lo cual proporciona la tasa de crecimiento del capital. Como $y_t = Ak_t$, se tiene que

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{A\dot{k}_t}{y_t} = \frac{A\dot{k}_t}{Ak_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{A - \rho}{\theta}.$$

En consecuencia, el consumo, el capital y el producto crecen (o decrecen) exactamente a la misma tasa $A - \rho/\theta$. Si $A > \rho$, la producción crece, mientras que si $A < \rho$ la producción disminuye debido a que $\theta > 0$.



Gráfica 76.9 (a) y (c) muestran las trayectorias óptimas del consumo y del capital respectivamente, cuando $A = 0.7 > \rho = 0.6$. Asimismo, (b) y (d) muestran el comportamiento del consumo y del capital respectivamente, cuando $A = 0.6 < \rho = 0.7$. El valor de θ es 0.5.

76.10.4 Función de utilidad exponencial negativa

Considere un consumidor racional que resuelve

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^\infty (-e^{-\theta c_t}) e^{-\rho t} dt, \quad \theta > 0, \\ \text{sujeto a:} \quad & \dot{k}_t = Ak_t - c_t, \\ & k_0 = \text{constante}. \end{aligned}$$

El Hamiltoniano asociado a este problema es:

$$H(k_t, c_t, \lambda_t, t) = -e^{-\theta c_t} + \lambda_t(Ak_t - c_t),$$

donde λ_t es la variable de coestado. Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = 0, \quad -\frac{\partial H}{\partial k_t} = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda_t} = Ak_t - c_t. \quad (76.65)$$

A partir de la segunda condición de (76.65) se sigue que

$$\dot{\lambda}_t = \lambda_t(\rho - A).$$

Por lo tanto,

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{(\rho - A)t}. \quad (76.66)$$

La primera condición de (76.65) conduce a

$$\theta e^{-\theta c_t} - \lambda_t = 0,$$

es decir,

$$c_t = \frac{\ln(\theta) - \ln(\lambda_t)}{\theta}$$

y al sustituir la ecuación (76.66) en la ecuación anterior, se tiene que

$$c_t = \frac{\ln(\theta) - \ln(\lambda_0 e^{(\rho - A)t})}{\theta},$$

es decir

$$c_t = \frac{\ln(\theta) - \ln(\lambda_0) - (\rho - A)t}{\theta}.$$

Ahora bien, como

$$\int_0^\infty c_t e^{-At} dt = k_0.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} k_0 &= \int_0^\infty c_t e^{-At} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\ln(\theta) - \ln(\lambda_0) - (\rho - A)t}{\theta} e^{-At} dt \\ &= \frac{1}{\theta} \left[(\ln(\theta) - \ln(\lambda_0)) \int_0^\infty e^{-At} dt - (\rho - A) \int_0^\infty t e^{-At} dt \right] \\ &= \frac{1}{\theta} \left[\frac{\ln(\theta) - \ln(\lambda_0)}{A} - \frac{(\rho - A)}{A^2} \right]. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\ln(\theta) - \ln(\lambda_0) = A\theta k_0 + \frac{\rho - A}{A}.$$

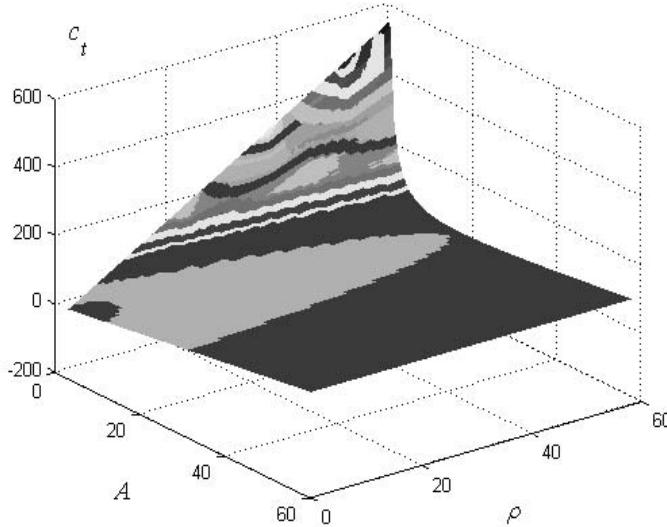
De esta manera, si $A > \rho$ y $A\theta k_0 > (A - \rho)A^{-1}$, la trayectoria óptima de consumo satisface

$$c_t = \frac{A\theta k_0 - (A - \rho)A^{-1} + (A - \rho)t}{\theta},$$

donde

$$c_0 = \frac{A\theta k_0 - (A - \rho)A^{-1}}{\theta}.$$

Las Gráfica 76.10 muestra el consumo óptimo, en $t = 1$, en función de ρ y A .



Gráfica 76.10 Consumo óptimo, en $t = 1$, como función de ρ y A , con $k_0 = 100$ y $\theta = 0.1$.

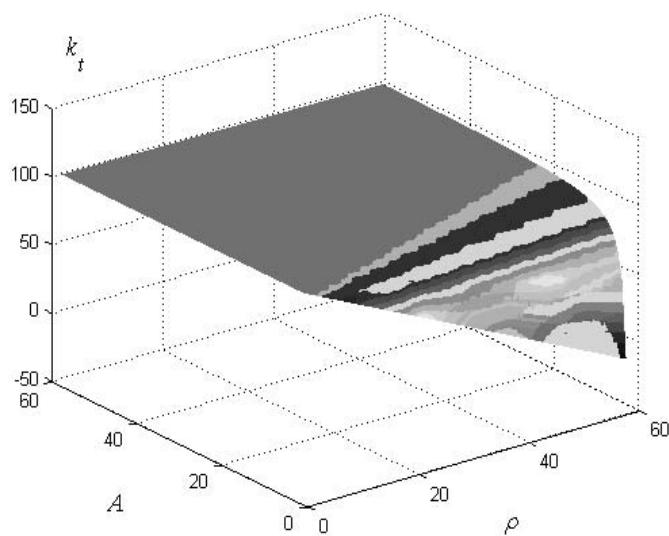
Por otro lado, se tiene que

$$\dot{k}_t = Ak_t - c_t = Ak_t - \left(\frac{A\theta k_0 + (\rho - A)A^{-1} - (\rho - A)t}{\theta} \right).$$

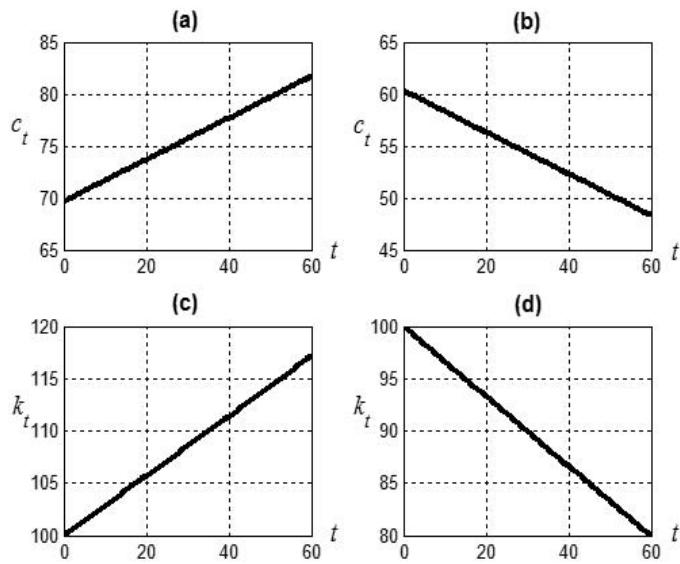
La solución de esta ecuación diferencial ordinaria no homogénea está dada por

$$\begin{aligned} k_t &= k_0 e^{At} - e^{At} \int_0^t \left(\frac{A\theta k_0 + \frac{\rho - A}{A} - (\rho - A)s}{\theta} \right) e^{-As} ds \\ &= k_0 e^{At} - \frac{e^{At}}{\theta} \left[\left(A\theta k_0 + \frac{\rho - A}{A} \right) \int_0^t e^{-As} ds - (\rho - A) \int_0^t s e^{-As} ds \right] \\ &= k_0 + \left(\frac{A - \rho}{A\theta} \right) t. \end{aligned}$$

La Gráfica 76.11 muestra el capital, en $t = 1$, en función de ρ y A . Por último, la Gráfica 76.12 muestra las trayectorias del consumo y del capital.



Gráfica 76.11 Capital, en $t = 1$, como función de ρ y A , con $\theta = 0.5$ y $k_0 = 100$.



Gráfica 76.12 (a) y (c) muestran las trayectorias óptimas del consumo y del capital respectivamente, cuando $A = 0.7 > \rho = 0.5$. Asimismo, (b) y (d) muestran el comportamiento del consumo y del capital respectivamente, cuando $A = 0.6 < \rho = 0.7$. El valor seleccionado de θ es 0.5.

76.11 Bibliografía sugerida

- García-Guerrero, V. M. y Venegas-Martínez, F. (2005). “Control óptimo determinista aplicado al problema económico de crecimiento endógeno”. *Revista Ingeniería, Investigación y Tecnología*, Vol. 6, No. 2, pp. 127-137.
- Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamrelidze, and E. F. Mishchenko (1962). The Mathematical Theory of Optimal Processes (English translation from the Russian, 1960). John Wiley & Sons, New York.

76.12 Ejercicios

76.1 Muestre que

$$x_t = x_0 e^{\alpha t} + e^{\alpha t} \int_0^t g(s) e^{-\alpha s} ds$$

es solución de esta ecuación diferencial ordinaria de primer orden no homogénea

$$\dot{x}_t = \alpha x_t + g(t), \quad x_0 \text{ dada.}$$

76.2 Muestre que si se cumple la condición de transversalidad $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t e^{-At} = 0$, entonces la restricción $\dot{k}_t = rk_t - c_t$ puede ser reescrita como

$$k_0 = \int_0^\infty c_t e^{-rt} dt.$$

Es decir, la dotación inicial de capital *per capita*, k_0 , es igual al valor presente del consumo planeado.

76.3 Considere una economía en donde la población crece a tasa constante n . En este caso, resuelva el siguiente problema de un consumidor racional maximizador de utilidad:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^\infty \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-(\rho-n)t} dt \\ \text{sujeto a:} \quad & \dot{k}_t = Ak_t - c_t - k_t n, \\ & k_0 = \text{constante.} \end{aligned}$$

Justifique el planteamiento del problema anterior.

76.4 Resuelva el siguiente problema de un consumidor racional maximizador de utilidad:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^\infty \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-(\rho-n)t} dt \\ \text{sujeto a:} \quad & \dot{k}_t = y_t - c_t - k_t(n + \delta), \\ & k_0 = \text{constante,} \end{aligned}$$

donde n es la tasa de crecimiento de la población, δ es la tasa de depreciación del capital y la función de producción $y_t = f(k_t)$ satisface $f(0) = 0$, $f'(k_t) > 0$ y $f''(k_t) < 0$.

76.5 Resuelva el problema de un consumidor racional maximizador de utilidad:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^\infty \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt \\ \text{sujeto a:} \quad & \dot{k}_t = y_t - c_t - g, \\ & k_0 = \text{constante,} \end{aligned}$$

donde $y_t = k_t f(g/k_t)$, $f' > 0$ y $f'' < 0$. Discuta los resultados cuando $y_t = f(g/k_t) = A(g/k_t)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

CAPÍTULO 77

OPTIMIZACIÓN DETERMINISTA EN TIEMPO CONTINUO (III): PROGRAMACIÓN DINÁMICA

Conceptos básicos de este capítulo:

- Programación dinámica determinista en tiempo discreto
- Ecuaciones recursivas de Bellman
- Programación dinámica determinista en tiempo continuo
- Ecuación de Euler-Bellman-Lagrange
- Condición de Legendre
- Condición de Weierstrass

77.1 Introducción

En este capítulo se revisan los fundamentos de la programación dinámica determinista. Con el propósito de introducir las ideas básicas de esta técnica de optimización es importante estudiar, aunque sea brevemente, el caso discreto, ya que en este marco es muy sencillo introducir el concepto de ecuaciones recursivas de Bellman. Posteriormente, bajo el supuesto de tiempo continuo, se desarrollan las ecuaciones de Bellman-Euler-Lagrange.

77.2 Programación dinámica determinista en tiempo discreto

La programación dinámica discreta es una técnica de la programación matemática que transforma un problema de $N + 1$ variables en $N + 1$ problemas de una variable cada uno, con la peculiaridad de que estos $N + 1$ problemas se encuentran relacionados entre sí. Una de las características principales que tienen los problemas de maximización de utilidad intertemporal es que la decisión de consumo (o inversión) en un momento dado depende únicamente de la decisión inmediata anterior, la cual acumula toda la información del pasado.

77.2.1 Consumo intertemporal

A continuación se plantea el problema de decisión intertemporal de un consumidor racional como un problema de programación dinámica a través de un conjunto de ecuaciones recursivas. Se supone que un individuo desea determinar la trayectoria de consumo que maximiza su utilidad total descontada (a una tasa subjetiva intertemporal). Así pues, el problema de decisión del consumidor se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar}_{c_0, c_1, \dots, c_N} \quad \sum_{t=0}^N \beta^t u(c_t) \\ & \text{sujeto a: } a_0 = c_0 + \frac{c_1}{1+r} + \frac{c_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{c_N}{(1+r)^N}, \end{aligned} \tag{77.1}$$

con

$$a_0 = y_0 + \frac{y_1}{1+r} + \frac{y_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{y_N}{(1+r)^N},$$

donde:

u es una función estrictamente creciente y cóncava, i.e., $u' > 0$ y $u'' < 0$;

y_0, y_1, \dots, y_N denotan dotaciones exógenas;

c_0, c_1, \dots, c_N representan los consumos de cada periodo;

$\beta = \frac{1}{1 + \rho}$ = factor subjetivo de descuento;

ρ = tasa subjetiva de descuento.

77.2.2 Un primer ejemplo

En esta sección, por simplicidad y para ilustrar las ideas centrales de la programación dinámica, se resolverá el problema del consumidor para el caso particular $r = 0$ y $\rho = 0$. De esta manera, el problema (77.1) se transforma en:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{c_0, c_1, \dots, c_N} \sum_{t=0}^N u(c_t) \\ &\text{sujeto a: } a_0 = c_0 + \dots + c_N, \end{aligned} \tag{77.2}$$

donde a_0 es conocida. Se supone que el bien genérico de consumo es duradero. Considere la función de utilidad indirecta (o función de bienestar económico) al tiempo $t = 0$:

$$J(a_0, 0) = \max_{c_0} \max_{c_1} \dots \max_{c_N} \left\{ \sum_{t=0}^N u(c_t) \mid \sum_{t=0}^N c_t = a_0 \right\}.$$

Es fácil ver que esta definición de $J(a_0, 0)$ genera recursividad. En efecto, observe que

$$\begin{aligned} J(a_0, 0) &= \max_{c_0} \max_{c_1} \dots \max_{c_N} \left\{ \sum_{t=0}^N u(c_t) \mid \sum_{t=0}^N c_t = a_0 \right\} \\ &= u(c_0^*) + \max_{c_1} \max_{c_2} \dots \max_{c_N} \left\{ \sum_{t=1}^N u(c_t) \mid \sum_{t=1}^N c_t = a_0 - c_0^* \right\} \\ &= u(c_0^*) + J(a_0 - c_0^*, 1), \end{aligned}$$

donde c_0^* es la solución óptima en $t = 0$. Por lo tanto, se puede escribir

$$J(a_0, 0) = \max_{c_0} \{u(c_0) + J(a_1, 1)\},$$

donde $a_1 = a_0 - c_0$. En forma similar,

$$\begin{aligned} J(a_1, 1) &= \max_{c_1} \{u(c_1) + J(a_2, 2)\} \\ &= \max_{c_1} \{u(c_1) + J(a_2, 2)\}, \end{aligned}$$

donde $a_2 = a_1 - c_1 = a_0 - c_0 - c_1$. En general, se puede concluir que:

$$\begin{aligned} J(a_t, t) &= \max_{c_t} \{u(c_t) + J(a_{t+1}, t+1)\} \\ \text{con } a_{t+1} &= a_t - c_t, \quad t = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Para resolver estas ecuaciones recursivas se requiere una condición final

$$J(a_{N+1}, N+1) = 0. \tag{77.3}$$

Note también que

$$\begin{aligned} a_{N+1} &= a_N - c_N = a_{N-1} - c_{N-1} - c_N \\ &= a_0 - c_0 - c_1 - c_2 - \cdots - c_N = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica

$$J(a_{N+1}, N+1) = J(0, N+1) = 0.$$

Si se escriben las ecuaciones recursivas “hacia atrás”, *i. e.*, si se invierte el tiempo, se tiene que:

$$\begin{aligned} J(a_{N-k}, N-k) &= \max_{c_{N-k}} \{u(c_{N-k}) + J(a_{N-k+1}, N-k+1)\} \\ a_{N-k+1} &= a_{N-k} - c_{N-k} \\ J(a_{N+1}, N+1) &= J(0, N+1) = 0. \end{aligned} \tag{77.4}$$

A continuación, se resuelven las ecuaciones (77.4) yendo hacia atrás. Si $k = 0$, entonces

$$\begin{aligned} J(a_N, N) &= \max_{c_N} \{u(c_N) + J(a_{N+1}, N+1)\} \\ &= \max_{c_N} \{u(c_N)\} \\ &= u(a_N), \end{aligned}$$

ya que $a_{N+1} = 0$ implica $a_N - c_N = 0$, lo que a su vez conduce a $a_N = c_N$. Si $k = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} J(a_{N-1}, N-1) &= \max_{c_{N-1}} \{u(c_{N-1}) + J(a_N, N)\} \\ &= \max_{c_{N-1}} \{u(c_{N-1}) + u(a_{N-1} - c_{N-1})\}. \end{aligned}$$

En este caso, la condición necesaria de un máximo está dada por:

$$u'(c_{N-1}) - u'(a_{N-1} - c_{N-1}) = 0.$$

Por lo tanto,

$$u'(c_{N-1}) = u'(a_{N-1} - c_{N-1}).$$

En consecuencia,

$$c_{N-1} = a_{N-1} - c_{N-1}$$

ó

$$c_{N-1} = \frac{a_{N-1}}{2}.$$

Al valuar la función objetivo en el óptimo, se tiene que

$$J(a_{N-1}, N-1) = u\left(\frac{a_{N-1}}{2}\right) + u\left(\frac{a_{N-1}}{2}\right) = 2u\left(\frac{a_{N-1}}{2}\right).$$

Ahora bien, si $k = 2$, entonces

$$\begin{aligned} J(a_{N-2}, N-2) &= \max_{c_{N-2}} \{u(c_{N-2}) + J(a_{N-1}, N-1)\} \\ &= \max_{c_{N-2}} \left\{ u(c_{N-2}) + 2u\left(\frac{a_{N-2} - c_{N-2}}{2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

La condición necesaria de un máximo conduce a

$$u'(c_{N-2}) = u'\left(\frac{a_{N-2} - c_{N-2}}{2}\right),$$

lo cual implica que

$$c_{N-2} = \frac{a_{N-2}}{3}.$$

De nuevo, al valuar la función objetivo, se sigue que

$$J(a_{N-2}, N-2) = 3u\left(\frac{a_{N-2}}{3}\right).$$

En general, las ecuaciones recursivas valuadas en los óptimos son:

$$J(a_{N-k}, N-k) = (k+1)u\left(\frac{a_{N-k}}{k+1}\right) \quad (77.5)$$

y

$$c_{N-k} = \frac{a_{N-k}}{k+1}. \quad (77.6)$$

Una vez encontradas estas soluciones de adelante hacia atrás, se resuelve el problema de atrás hacia adelante de la siguiente forma. Si $k = N$, entonces

$$c_0 = \frac{a_0}{N+1}.$$

Si $k = N-1$, se obtiene ahora que

$$c_1 = \frac{a_0}{N+1},$$

ya que

$$c_1 = \frac{a_1}{N} = \frac{a_0 - c_0}{N} = \frac{1}{N} \left(a_0 - \frac{a_0}{N+1} \right) = \frac{a_0}{N+1}.$$

En general,

$$c_t = \frac{a_0}{N+1}, \quad t = 0, 1, \dots, N, \quad (77.7)$$

representa la solución del problema de consumo intertemporal con $r = 0$ y $\rho = 0$, lo cual era de esperarse ya que la función de utilidad es la misma en cada periodo.

77.3 El problema descontado de consumo intertemporal

Ahora se está interesado en resolver el problema más general cuando $r > 0$ y $\rho > 0$. En este caso, el problema de decisión del consumidor racional está dado por:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{c_0, c_1, \dots, c_N} \sum_{t=0}^N \beta^t u(c_t) \\ &\text{sujeto a: } a_0 = c_0 + \frac{c_1}{1+r} + \frac{c_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{c_N}{(1+r)^N} \end{aligned}$$

donde

$$a_0 = y_0 + \frac{y_1}{1+r} + \frac{y_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{y_N}{(1+r)^N},$$

o en forma equivalente

$$a_0 = y_0 + y_1 R + y_2 R^2 + \dots + y_N R^N, \quad \text{con} \quad R = \frac{1}{1+r}. \quad (77.8)$$

La función de utilidad indirecta satisface

$$\begin{aligned} J(a_0, 0) &= \max_{c_0} \max_{c_1} \dots \max_{c_N} \left\{ \sum_{t=0}^N \beta^t u(c_t) \mid \sum_{t=0}^N R^t c_t = a_0 \right\} \\ &= u(c_0^*) + \beta \max_{c_1} \dots \max_{c_N} \left\{ u(c_1) + \beta u(c_2) + \dots + \beta^{N-1} u(c_N) \mid \sum_{t=1}^N R^t c_t = a_0 - c_0^* \right\}, \end{aligned}$$

donde c_0^* es la solución óptima en $t = 0$. En consecuencia,

$$J(a_0, 0) = \max_{c_0} \{u(c_0) + \beta J(a_1, 1)\}.$$

Note ahora que

$$a_0 - c_0^* = y_0 - c_0^* + y_1R + y_2R^2 + \cdots + y_NR^N = s_0 + y_1R + y_2R^2 + \cdots + y_NR^N$$

y los recursos disponibles en el periodo 1 son:

$$a_1 = s_0(1+r) + y_1 + y_2R + y_3R^3 + \cdots + y_NR^{N-1},$$

lo cual implica

$$Ra_1 = s_0 + y_1R + y_2R^2 + \cdots + y_NR^N,$$

donde $s_0(1+r)$ es el valor futuro del ahorro realizado en $t = 0$ y $y_1R + y_2R^2 + \cdots + y_NR^N$ es el valor presente de las dotaciones a partir de $t = 1$. Por lo tanto,

$$a_0 - c_0 = Ra_1,$$

lo cual conduce a

$$a_1 = \frac{a_0 - c_0}{R}.$$

Por lo tanto,

$$J(a_1, 1) = \max_{c_1} \{u(c_1) + \beta J(a_2, 2)\} \quad \text{con} \quad a_2 = \frac{a_1 - c_1}{R}.$$

Si se procede de igual manera, se puede demostrar que las ecuaciones recursivas son:

$$\begin{aligned} J(a_{N-k}, N-k) &= \max_{c_{N-k}} \{u(c_{N-k}) + \beta J(a_{N-k+1}, N-k+1)\} \\ a_{N-k+1} &= \frac{a_{N-k} - c_{N-k}}{R}, \\ J(0, N+1) &= 0. \end{aligned} \tag{77.9}$$

77.4 Problemas estocásticos simples

A continuación tratamos con el problema de decisión intertemporal del consumidor cuando la tasa de interés es estocástica. Considere el siguiente problema de maximización de utilidad:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & E \left\{ \sum_{t=0}^N \beta^t u(c_t) \right\} \\ \text{sujeto a: } & a_{t+1} = (1 + \tilde{r})(a_t - c_t), \end{aligned} \tag{77.10}$$

donde \tilde{r} es una variable aleatoria. Las ecuaciones recursivas son:

$$\begin{aligned} J(a_{N-k}, N-k) &= \max_{c_{N-k}} E \{u(c_{N-k}) + \beta J(a_{N-k+1}, N-k+1)\} \\ J(a_{N+1}, N+1) &= 0 \\ a_{N-k+1} &= (1 + \tilde{r})(a_{N-k} - c_{N-k}). \end{aligned} \tag{77.11}$$

Con el propósito de ilustrar cómo se resuelven las ecuaciones recursivas anteriores, se analizará el problema para dos etapas. En este caso,

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } & E \{u(c_0) + \beta u(c_1)\} \\ \text{sujeto a: } & \tilde{c}_1 = (1 + \tilde{r})(a_0 - c_0). \end{aligned}$$

Se supone, por simplicidad, que \tilde{r} toma dos valores con las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned}\Pr\{\tilde{r} = a\} &= \pi_a, \\ \Pr\{\tilde{r} = b\} &= 1 - \pi_a = \pi_b.\end{aligned}\tag{77.12}$$

La forma funcional para el índice de satisfacción se considera como $u(c_t) = \ln(c_t)$. Si se sustituye \tilde{c}_1 en la función objetivo, se tiene

$$\begin{aligned}\max_{c_0} \mathbb{E} \{ \ln u(c_0) + \beta \ln [(1 + \tilde{r})(a_0 - c_0)] \} \\ \max_{c_0} \{ \ln u(c_0) + \beta \ln(a_0 - c_0) \} + \beta \mathbb{E}(\ln(1 + \tilde{r})).\end{aligned}$$

La condición de primer orden de c_0 está dada por

$$\frac{1}{c_0} = \frac{\beta}{(a_0 - c_0)},$$

lo cual implica que

$$c_0 = \frac{a_0}{(1 + \beta)}.\tag{77.13}$$

El valor esperado del consumo en el periodo 1, \hat{c}_1 , satisface

$$\hat{c}_1 = [1 + a\pi_a + b\pi_b] \frac{a_0\beta}{1 + \beta}.\tag{77.14}$$

77.5 Ecuación de Bellman-Euler-Lagrange

Considere el problema variacional de maximizar una funcional de la forma

$$I(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t)) dt,$$

con $F(t, f(t), f'(t))$ cóncava en todos sus argumentos, sujeto a las condiciones de frontera

$$f(a) = A$$

y

$$f(b) = B,$$

donde $F \in C^2$, es decir, F tiene segundas derivadas parciales continuas con respecto de todos sus argumentos. Suponga que $f = f(f', t)$ y que esta relación tiene inversa $f' = f'(f, t)$. Defina, como antes,

$$J(f(t), t) = \max_{f'|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f(s), f'(s)) ds \mid f(b) = B \right\},\tag{77.15}$$

con $J(f(t), t) \in C^2$. Observe que

$$J(A, a) = \max_f \{ I(f) \mid f(b) = B \},$$

representa el valor $I(f)$ en la función f que resuelve el problema variacional. Una condición necesaria para que la funcional $I(f)$ tenga un máximo en $f(t)$ es que satisfaga la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange, a saber,

$$0 = \max_{f'} \{ F + J_t + J_f f' \}.\tag{77.16}$$

En efecto, de la definición (77.15) se sigue que

$$J(f(t), t) = \max_{f' |_{[t, t+dt]}} \left\{ \int_t^{t+dt} F(s, f(s), f'(s)) ds + J(f(t) + df(t), t + dt) \right\}. \quad (77.17)$$

Ahora bien, si $dt > 0$ es suficientemente pequeño

$$\int_t^{t+dt} F(s, f(s), f'(s)) ds = F(t, f, f') dt + o(dt) \quad (77.18)$$

y

$$J(f(t) + df(t), t + dt) = J(f(t), t) + J_t dt + J_f f' dt + o(dt). \quad (77.19)$$

Al sustituir (77.18) y (77.19) en (77.17), se obtiene

$$J = \max_{f' |_{[t, t+dt]}} \left\{ F dt + J + J_t dt + J_f f' dt + o(dt) \right\},$$

lo cual, a su vez, implica que

$$0 = \max_{f' |_{[t, t+dt]}} \left\{ F + J_t + J_f f' + \frac{o(dt)}{dt} \right\}.$$

Si se toma el límite cuando $dt \rightarrow 0$,

$$0 = \max_{f'} \{F + J_t + J_f f'\}.$$

En otras palabras, si f' es máximo, entonces

$$F + J_t + J_f f' = 0, \quad (77.20)$$

lo que representa una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y ésta requiere de dos condiciones, $f(a) = A$ y $f(b) = B$, a fin de determinar una solución única. Ahora bien, bajo los supuestos anteriormente establecidos, la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange implica la ecuación de Euler-Lagrange, es decir,

$$\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f'} \right) = 0.$$

En efecto, si se deriva (77.20) con respecto de f' , se tiene que

$$\begin{cases} F + J_t + J_f f' = 0, \\ F_{f'} + J_f = 0. \end{cases}$$

Asimismo, la diferencial de $J = J(f, t)$ satisface

$$dJ = J_t dt + J_f df,$$

la expresión anterior se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} J = J_t + J_f f'.$$

Si se sustituye esta ecuación en la primera ecuación del sistema anterior y después se deriva la primera ecuación con respecto de f y la segunda con respecto de t , se obtiene

$$\begin{cases} F_f + \frac{d}{dt} J_f = 0, \\ \frac{d}{dt} F_{f'} + \frac{d}{dt} J_f = 0, \end{cases}$$

restando las dos expresiones anteriores, se tiene, finalmente que

$$F_f - \frac{d}{dt} F_{f'} = 0.$$

77.6 Condición de Legendre

En esta sección se presenta la condición necesaria de Legendre. Considere un problema de la forma

$$\text{Minimizar } I(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t)) dt,$$

sujeto a las siguientes condiciones de frontera

$$f(a) = A$$

y

$$f(b) = B,$$

donde $F \in C^2$. Suponga que $f' = f'(f, t)$ y defina

$$J(f(t), t) = \min_{f'|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f(s), f'(s)) ds \right\},$$

$J \in C^2$. Si f' es solución, entonces

$$\frac{\partial^2 F(t, f, f')}{\partial f' \partial f'} \geq 0.$$

77.7 Condición de Weierstrass

A continuación se estudia la condición necesaria de Weierstrass. Considere una funcional de la forma

$$I(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t)) dt,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f(a) = A$$

y

$$f(b) = B,$$

donde $F \in C^2$. Suponga que $f' = f'(f, t)$ y sea

$$J(f(t), t) = \min_{f'|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f(s), f'(s)) ds \right\},$$

$J \in C^2$. Si f' es solución, entonces

$$F(t, f, f' + h') - F(t, f, f') + \frac{\partial J(f, t)}{\partial f} h' \geq 0.$$

Demostración: Si f' es solución, entonces

$$0 = \min_{f'} \{ F + J_t + J_f f' \},$$

implica

$$F(t, f, f') + \frac{\partial J(f, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(f, t)}{\partial f} f' \leq F(t, f, f' + h') + \frac{\partial J(f, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(f, t)}{\partial f} (f' + h').$$

77.8 Problemas del tipo 1 (integrando del funcional con dos argumentos)

Consideré ahora una funcional de la forma

$$I(f) = \int_a^b F(t, f, g, f', g') dt,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f(a) = A$$

y

$$f(b) = B,$$

donde $F \in C^2[a, b]$, es decir, F tiene segundas derivadas parciales continuas con respecto de todos sus argumentos. Suponga ahora que $f' = f'(f, t)$ y $g' = g'(g, t)$, y sea

$$J(f(t), g(t), t) = \min_{(f', g')|_{[t, b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f, g, f', g') ds \right\}.$$

Suponga que $J \in C^2$. Si (f', g') es solución, entonces

$$0 = \min_{(f', g')} \{F + J_t + J_f f' + J_g g'\}.$$

Esta última expresión es la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange. Bajo los supuestos anteriores se tiene que las ecuaciones de Bellman-Euler-Lagrange implican las Ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir,

$$\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial f} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial f'} \right) = 0$$

y

$$\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial g} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial g'} \right) = 0.$$

En efecto, si (f', g') es solución, entonces de

$$0 = \min_{(f', g')} \{F + J_t + J_f f' + J_g g'\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} F + J_t + J_f f' + J_g g' = 0, \\ F_{f'} + J_f = 0, \\ F_{g'} + J_g = 0. \end{cases}$$

Después de derivar la primera ecuación con respecto de f y g , respectivamente, se obtiene

$$\begin{cases} F_f + J_{ft} + J_{ff} f' + J_{fg} g' = 0, \\ F_g + J_{gt} + J_{gf} f' + J_{gg} g' = 0, \\ F_{f'} + J_f = 0, \\ F_{g'} + J_g = 0. \end{cases}$$

Si $J = J(f, g, t)$, entonces $dJ = J_t dt + J_f df + J_g dg$ ó $dJ/dt = J_t + J_f f' + J_g g'$. Al sustituir esta ecuación en la primera ecuación y derivar la expresión resultante con respecto de f y de g , respectivamente, se tiene que

$$\begin{cases} F_f + \frac{d}{dt} J_f = 0, \\ F_g + \frac{d}{dt} J_g = 0, \\ F_{f'} + J_f = 0, \\ F_{g'} + J_g = 0. \end{cases}$$

Por último, si se sustituyen las dos últimas ecuaciones en las restantes del sistema anterior, se tiene que

$$F_f - \frac{d}{dt} F_{f'} = 0, \quad F_g - \frac{d}{dt} F_{g'} = 0.$$

77.9 Problemas del tipo 2 (problema isoperimétrico)

En esta sección se estudia un problema típico del cálculo de variaciones. Consideré una funcional de la forma

$$I(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t)) dt,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$\int_a^b G(t, f, f') dt = Q,$$

$$f(a) = A$$

y

$$f(b) = B,$$

donde $F \in C^2[a, b]$. Suponga que $f' = f'(f, t)$ y sean

$$g(t) = \int_t^b G(s, f, f') ds$$

y

$$J(f, g, t) = \min_{f' \mid [t, b]} \left\{ \int_t^b F(s, f, f') ds \mid \int_t^b G(s, f, f') ds = g(t) \right\}.$$

Una condición necesaria para que la funcional $I(f)$ tenga un extremo en una función dada $f(t)$ es que satisfaga la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange, es decir

$$0 = \min_{f'} \{F + J_t + J_f f' - J_g G\}.$$

En efecto, para $dt > 0$ y suficientemente pequeño

$$\begin{aligned} J(f, g, t) &= \min_{f' \mid [t, t+dt]} \left\{ \int_t^{t+dt} F(s, f, f') ds + J(f(t) + df(t), g(t) + dg(t), t + dt) \right| \right. \\ &\quad \left. \int_t^{t+dt} G(s, f, f') ds = g(t) - g(t + dt) \right\} \\ &= \min_{f' \mid [t, t+dt]} \left\{ F dt + J + J_t dt + J_f f' dt + J_g g' dt + o(dt) \right| \left. dt G + o(dt) = g(t + dt) - g(t) \right\}. \end{aligned}$$

Tomando el límite, $dt \rightarrow 0$, se tiene

$$0 = \min_{f'} \{F + J_t + J_f f' + J_g g' | -G = g'\}.$$

Asimismo, bajo los supuestos anteriores, la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange implica la ecuación de Euler-Lagrange:

$$0 = \frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f'} + p \left(\frac{\partial G(t, f, f')}{\partial f} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G(t, f, f')}{\partial f'} \right).$$

En efecto, si f' es solución, entonces de la ecuación

$$0 = \min_{f'} \{F + J_t + J_f f' - J_g G\},$$

se tiene que

$$\begin{cases} F + J_t + J_f f' - J_g G = 0, \\ F_{f'} + J_f - J_g G_{f'} = 0. \end{cases}$$

Si se deriva la primera ecuación con respecto de f y la segunda con respecto de t , respectivamente, se obtiene

$$\begin{cases} F_f + J_{ft} J_{ff} f' - (J_g G)_f = 0, \\ \frac{d}{dt} F_{f'} + \frac{d}{dt} J_f - \frac{d}{dt} (J_g G_{f'}) = 0. \end{cases} \quad (77.21)$$

Dado que $J_f = J_f(f, g, t)$ tiene diferencial $dJ_f = J_{ft} dt + J_{ff} df + J_{fg} dg$, la expresión anterior se puede reescribir como

$$\frac{d}{dt} J_f = J_{tf} + J_{ff} f' + J_{gf} g'. \quad (77.22)$$

También, de la ecuación $F + J_t + J_f f' - J_g G = 0$, se sigue que

$$J_{gt} + J_{gf} f' - J_{gg} G = 0 = \frac{d}{dt} J_g,$$

entonces

$$J_g = \text{constante} = -p \quad (77.23)$$

y, al mismo tiempo,

$$J_{gf} = 0. \quad (77.24)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (77.22) y (77.24) en la segunda ecuación del sistema (77.21), se obtiene

$$\begin{cases} F_f + J_{ft} + J_{ff} f' - (J_g G)_f = 0, \\ \frac{d}{dt} F_{f'} + J_{tf} + J_{ff} f' - \frac{d}{dt} (J_g G_{f'}) = 0, \end{cases}$$

lo que implica

$$(F - J_g G)_f - \frac{d}{dt} (F - J_g G)_{f'} = 0.$$

Al aplicar la ecuación (77.23) en la expresión anterior, se produce

$$F_f - \frac{d}{dt} F_{f'} + p \left(G_f - \frac{d}{dt} G_{f'} \right) = 0.$$

77.10 Problemas del tipo 3 (varias variables)

Considere una funcional de la forma

$$I(f) = \int_a^b \int_c^d F(x, y, f, f_x, f_y) dx dy,$$

sujeto a las siguientes condiciones de frontera

$$f|_{\partial([a,b] \times [c,d])} = w|_{\partial([a,b] \times [c,d])},$$

donde $F \in C^2$ y w fija. Suponga que $\text{grad}f = \text{grad}f(f, x, y)$ y sea

$$J(f(x, y), x, y) = \min_{\text{grad}f|_{[x,b] \times [y,d]}} \left\{ \int_x^b \int_y^d F(s, t, f, f_s, f_t) ds dt \right\}.$$

También suponga que $J \in C^2$. Se verá a continuación que si $\text{grad}f$ es solución, entonces se cumple la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange

$$0 = \min_{\text{grad}f} \{F + J_x + J_y + J_f f_x + J_f f_y\}.$$

Asimismo, bajo las hipótesis anteriores se tiene que la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange implica la ecuaciones de Euler-Lagrange, esto es,

$$\frac{\partial F(x, y, f, f_x, f_y)}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(x, y, f, f_x, f_y)}{\partial f_x} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F(x, y, f, f_x, f_y)}{\partial f_y} \right) = 0.$$

En efecto, si el $\text{grad}f$ es mínimo, entonces

$$\begin{cases} F + J_x + J_y + J_f f_x + J_f f_y = 0, \\ F_{f_x} + J_f = 0, \\ F_{f_y} + J_f = 0. \end{cases}$$

En vista de que $J_f = J_f(f, x, y)$ tiene diferencial es $dJ_f = J_{fx}dx + J_{fy}dy + J_{ff}df$, se sigue que

$$\frac{dJ_f}{dx} = J_{fy} \frac{dy}{dx} + J_{fx} + J_{ff} \frac{df}{dx},$$

$$\frac{dJ_f}{dy} = J_{fx} \frac{dx}{dy} + J_{fy} + J_{ff} \frac{df}{dy},$$

pero $dy/dx = 0$ y $dx/dy = 0$, así

$$\begin{cases} F_f + J_{fx} + J_{fy} + J_{ff}f_x + J_{ff}f_y = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} F_{f_x} + J_{xf} + J_{ff}f_x = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} F_{f_y} + J_{yf} + J_{ff}f_y = 0. \end{cases}$$

Si se sustituyen las últimas dos ecuaciones en la primera, se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial f} = 0.$$

77.11 Problemas del tipo 4 (argumentos con derivadas de orden superior)

Considere, en esta ocasión, una funcional de la forma:

$$I(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)) dt,$$

sujeto a las siguientes condiciones de frontera

$$f^{(k)}(a) = A_k,$$

$$f^{(k)}(b) = B_k,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1 ,$$

donde $F \in C^2[a, b]$. Suponga que $f^{(n)} = f^{(n)}(t, f, f', \dots, f^{(n-1)})$ y sea

$$J(f, f', \dots, f^{(n-1)}, t) = \min_{f^{(n)}|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f', f'', \dots, f^{(n)}) ds \right\}.$$

Asimismo, suponga que $J \in C^2$, entonces una condición necesaria para que la funcional $I(f)$ tenga un extremo en una función dada $f(t)$ es que satisfaga la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange, es decir,

$$0 = \min_{f^{(n)}} \{F + J_t + J_f f' + J_{f'} f'' + \dots + J_{f^{(n-1)}} f^{(n)}\}.$$

Esta ecuación también implica la ecuación de Euler-Lagrange

$$0 = F_f - \frac{d}{dt} F_{f'} + \frac{d^2}{dt^2} F_{f''} - \frac{d^3}{dt^3} F_{f'''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} F_{f^{(n)}}.$$

77.12 Problemas del tipo 5 (control óptimo)

Los problemas de control óptimo son los que con más frecuencia aparecen en teoría económica y análisis financiero. Considere una funcional de la forma:

$$I(f) = \int_a^b F(f, u) dt,$$

sujeta a

$$R_{[a,b]} \begin{cases} \dot{f} = G(f, u), & a \leq t \leq b, \\ f(a) = A, \\ u \in U_{[a,b]}, \end{cases}$$

donde $F, G \in C^2[a, b]$. Sea

$$J(f, t) = \max_{u \in U_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(f, u) dt : \text{s.a. } R_{[t,b]} \right\}$$

y suponga que $J \in C^2$, entonces una condición necesaria para que la funcional $I(f)$ tenga un extremo en una función dada $f(t)$ es que satisfaga la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, es decir,

$$0 = \max_{u \in U} \{F + J_f G\} + J_t.$$

Esta ecuación, a su vez, implica el principio del máximo de Pontryagin

$$-\dot{\lambda}(t) = \lambda(t)G_f + F_f.$$

En efecto, si (f, u) es solución, entonces de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$J_{ft} + F_f + J_{ff}G + J_fG_f = 0,$$

ó

$$\frac{d}{dt}J_f + F_f + J_fG_f = 0$$

y

$$J_f = \lambda(t).$$

77.13 Bibliografía sugerida

- Bellman, R. (1957). Dynamic Programming. Princeton University Press.
 Bertsekas, D. P. (2001). Dynamic Programming and Optimal Control, 2nd Edition. Publisher. Athena Scientific.
 Venegas-Martínez, F. (2000). "On Consumption, Investment, and Risk". *Economía Mexicana, Nueva Época*, Vol. 9, No. 2, pp. 227-244.

77.14 Ejercicios

77.1 Resuelva mediante programación dinámica el siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar}_{c_0, c_1, \dots, c_N} \sum_{t=0}^N \beta^t \ln(c_t) \\ & \text{sujeto a: } a_0 = c_0 + \frac{c_1}{1+r} + \frac{c_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{c_N}{(1+r)^N}, \end{aligned}$$

con

$$a_0 = y_0 + \frac{y_1}{1+r} + \frac{y_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{y_N}{(1+r)^N}.$$

77.2 Repita el problema anterior con la función de utilidad $u(c_t) = c_t^\gamma / \gamma$.

77.3 Considere el siguiente problema que resuelve un consumidor racional maximizador de utilidad:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar}_{c_t} \int_0^\infty \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} dt \\ & \text{sujeto a: } \dot{a}_t = r a_t - c_t, \\ & \quad a_0 = \text{constante}. \end{aligned}$$

Suponga que $0 < \gamma < 1$ a fin de que la utilidad marginal sea positiva pero decreciente.
 Resuelva el problema planteado utilizando programación dinámica.

Solución: Defina

$$J(a_t, t) = \max_{c_t} \left\{ \int_0^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\rho s} ds \mid \dot{a}_t = r a_t - c_t \right\},$$

entonces

$$\begin{aligned}
 J(a_t, t) &= \max_{c_t} \left\{ \int_t^{t+dt} \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\rho s} ds + \int_{t+dt}^{\infty} \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\rho s} ds \mid \dot{a}_t = ra_t - c_t \right\} \\
 &= \max_{c_t} \left\{ \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} dt + J(a_t + da_t, t + dt) + o(dt) \mid \dot{a}_t = ra_t - c_t \right\} \\
 &= \max_{c_t} \left\{ \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} dt + J(a_t, t) + J_t dt + J_a da + o(dt) \mid \dot{a}_t = ra_t - c_t \right\} \\
 &= \max_{c_t} \left\{ \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} + J(a_t, t) + J_t + J_a \dot{a} + \frac{o(dt)}{dt} \mid \dot{a}_t = ra_t - c_t \right\} \\
 &= \max_{c_t} \left\{ \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} + J(a_t, t) + J_t + J_a (a_t r - c_t) \right\}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$0 = \max_{c_t} \left\{ \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} + J_t + J_a (a_t r - c_t) \right\}.$$

Si c_t es óptimo, entonces

$$\frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} + J_t + J_a (a_t r - c_t) = 0,$$

la cual es una ecuación diferencial parcial de primer orden en J (la utilidad indirecta). Suponga un candidato de solución en variables separables (multiplicativamente)

$$J(a, t) = V(a) e^{-\rho t}.$$

De esta manera,

$$0 = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\rho t} + \rho V(a) e^{-\rho t} + V'(a) e^{-\rho t} (a_t r - c_t)$$

ó

$$\frac{c_t^\gamma}{\gamma} + \rho V(a) + V'(a) (a_t r - c_t) = 0,$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Suponga como candidato de solución de la ecuación anterior a

$$V(a) = \frac{\beta a_t^\gamma}{\gamma}.$$

En este caso,

$$0 = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} + \rho \frac{\beta a_t^\gamma}{\gamma} + \beta a_t^{\gamma-1} (a_t r - c_t).$$

Si se deriva esta expresión con respecto de c_t , se obtiene

$$c_t = \beta^{1/(\gamma-1)} a_t.$$

Al sustituir este consumo en la ecuación anterior, se sigue que

$$\frac{\beta^{\gamma/(\gamma-1)} a_t^\gamma}{\gamma} - \rho \frac{\beta a_t^\gamma}{\gamma} + \beta r a_t^\gamma - \beta a_t^{\gamma-1} \beta^{1/(\gamma-1)} a_t = 0.$$

Por lo tanto,

$$\beta^{1/(\gamma-1)} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \left(\frac{\rho}{\gamma} - r \right) = \frac{\rho - \gamma r}{1-\gamma},$$

así

$$c_t = \frac{\rho - \gamma r}{1-\gamma} a_t.$$

En virtud de la restricción presupuestal del individuo, se sigue que

$$\dot{a}_t = ra_t - c_t = ra_t - \alpha a_t = (r - \alpha)a_t,$$

donde

$$\alpha = \frac{\rho - \gamma r}{1 - \gamma}.$$

Consecuentemente,

$$a_t = a_0 e^{(r-\alpha)t},$$

con

$$r - \alpha = r - \frac{\rho - \gamma r}{1 - \gamma} = \frac{r - \rho}{1 - \gamma}.$$

De esta manera,

$$a_t = a_0 e^{(r-\rho)t/(1-\gamma)}.$$

Finalmente, la trayectoria óptima de consumo está dada por

$$c_t = a_0 \left(\frac{\rho - \gamma r}{1 - \gamma} \right) e^{(r-\rho)t/(1-\gamma)}.$$

Resuelva el problema anterior con $u(c_t) = -e^{-\theta c_t}$, $\theta > 0$, y $V(a_t) = \beta_1 e^{-\beta_0 \theta a_t}$.

77.4 Pruebe la condición de Legendre. Considere el problema:

$$\text{Minimizar } I(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t)) dt, \quad f(a) = A, \quad f(b) = B,$$

donde $F \in C^2$. Suponga que $f' = f'(f, t)$. Muestre utilizando la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange,

$$0 = \min_{f'} \{F + J_t + J_f f'\},$$

que si f' es solución, entonces

$$\frac{\partial^2 F(t, f, f')}{\partial f' \partial f'} \geq 0.$$

77.5 Considere la funcional:

$$I(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)) dt,$$

sujeta a

$$f^{(k)}(a) = A_k, \quad f^{(k)}(b) = B_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

donde $F \in C^2[a, b]$. Suponga que $f^{(n)} = f^{(n)}(t, f, f', \dots, f^{(n-1)})$ y sea

$$J(f, f', \dots, f^{(n-1)}, t) = \min_{f^{(n)}|_{[t, b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f', f'', \dots, f^{(n)}) ds \right\}.$$

Suponga también que $J \in C^2$. Muestre que una condición necesaria para que la funcional $I(f)$ tenga un extremo en una función dada $f(t)$ es que

$$0 = \min_{f^{(n)}} \{F + J_t + J_f f' + J_{f'} f'' + \dots + J_{f^{(n-1)}} f^{(n)}\},$$

lo cual, a su vez, implica

$$0 = F_f - \frac{d}{dt} F_{f'} + \frac{d^2}{dt^2} F_{f''} - \frac{d^3}{dt^3} F_{f'''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} F_{f^{(n)}}.$$

CAPÍTULO 78

EL CONSUMIDOR INTERTEMPORAL DETERMINISTA (I): TASAS DE INTERÉS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Condiciones de Kuhn y Tucker
- Condiciones de primer orden
- Funciones de demanda
- Condiciones de segundo orden, cuasiconcavidad
- Ecuaciones de Slutsky
- Función de bienestar económico
- Condiciones de agregación de Cournot y de Engel
- Identidad de Roy
- Lema de Shephard
- Reglas de convertibilidad
- Determinación de tasas de interés

78.1 Introducción

En este capítulo se estudia el comportamiento de un individuo que toma decisiones de consumo para dos períodos (el presente y el futuro) en un ambiente determinista. El consumidor determina en el presente sus demandas de consumo actual y futuro a través de la maximización de una función de utilidad sujeto a las posibilidades presupuestales y costos de oportunidad; esta actitud del individuo es conocida como racionalidad económica. El tratamiento básico que se plantea en el presente capítulo sobre las decisiones que un consumidor toma en el tiempo, proporciona los fundamentos necesarios para desarrollar modelos más complejos en tiempo continuo y de naturaleza estocástica.

El presente capítulo trata primero con consumidores racionales tomadores de una tasa de interés, es decir, individuos que ven a la tasa de interés como una variable (dada) exógena. Posteriormente, se examinan las decisiones de un conjunto de agentes que interactúan entre sí (en un mercado de crédito) a fin de determinar una tasa de interés de equilibrio a la que están dispuestos a prestar y pedir prestado.

78.2 Condiciones de Kuhn y Tucker

El teorema de Kuhn-Tucker aparece en 1950 y es la base de la técnica de optimización conocida como programación no lineal (la función objetivo y/o las restricciones son no lineales). Dicho teorema proporciona las condiciones necesarias y suficientes de un óptimo en un problema de programación no lineal. El resultado fue presentado en una conferencia por los matemáticos Albert William Tucker (quien también estableció el famoso dilema del prisionero) y Harold W. Kuhn, ambos, de la Universidad de Princeton. Sin embargo, este teorema ya había sido demostrado con anterioridad, incluso dos veces. Primero, en 1939, en la tesis de maestría de William Karush de la universidad de Chicago, la cual nunca fue publicada. En la segunda ocasión, el teorema fue demostrado por Fritz John en un trabajo de investigación sometido como posible publicación al “Duke Mathematics Journal”, el cual fue rechazado. No obstante, éste fue publicado más tarde en una colección de ensayos para un volumen de aniversario de Richard Courant en 1948. Por lo anterior, el teorema podría ser llamado de Karush-John-Kuhn-Tucker, o en cualquier otro orden.

El modelado del problema de decisión de un consumidor racional en tiempo discreto conduce al planteamiento de un problema de programación no lineal. Específicamente, considere el siguiente problema de optimización con dos restricciones definidas por desigualdades:

$$\begin{aligned} & \underset{c_1, c_2}{\text{Maximizar}} \quad f(c_1, c_2) \\ & \text{sujeto a: } g(c_1, c_2) \geq 0, \\ & \quad h(c_1, c_2) \geq 0. \end{aligned} \tag{78.1}$$

Se supone que las funciones f , g y h tienen derivadas parciales continuas. El Lagrangeano del problema de optimización (78.1) se define como:

$$\mathcal{L}(c_1, c_2, \lambda, \mu) = f(c_1, c_2) + \lambda g(c_1, c_2) + \mu h(c_1, c_2), \tag{78.2}$$

donde λ y μ son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones. Una condición necesaria de un máximo, (c_1, c_2) , de (78.1) es que se satisfagan simultáneamente las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} &\leq 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} \leq 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \geq 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} c_1 &= 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} c_2 = 0, \quad \lambda g = 0, \quad \mu h = 0. \end{aligned} \tag{78.3}$$

Las ecuaciones anteriores son conocidas como condiciones de Kuhn-Tucker; en particular, las últimas cuatro son llamadas condiciones de holguras complementarias. Observe que el Lagrangeano transforma un problema de maximización de dos variables, c_1 y c_2 , con dos restricciones, en un problema de maximización de cuatro variables, c_1 , c_2 , λ y μ , sin restricciones. Por supuesto, resolver problemas de optimización sin restricciones es, en general, una labor más sencilla que tratar con problemas con restricciones.

Por último, es importante destacar que si las funciones g y h son cóncavas en \mathbb{R}^2 , entonces son continuas en \mathbb{R}^2 . De esta manera, el conjunto $\mathcal{C} = \{(c_1, c_2) | g(c_1, c_2) \geq 0, h(c_1, c_2) \geq 0\}$ es un conjunto convexo y cerrado. Si además el conjunto \mathcal{C} es acotado, se tiene que \mathcal{C} es compacto. Si f es una función continua y \mathcal{C} es un conjunto compacto, entonces el teorema de Weierstrass afirma que f tiene un máximo (y un mínimo). Si f es una función estrictamente cóncava entonces el máximo es único, en cuyo caso, las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker son también suficientes.

78.3 Consumidor racional y condiciones de Kuhn-Tucker

El modelo más simple de consumo intertemporal considera dos períodos: por ejemplo, hoy y mañana. Considere un consumidor racional que cuenta con dotaciones en términos de bienes y_1 en el periodo 1 y y_2 en el período 2. Asimismo, el consumidor tiene acceso a un mercado de crédito en el que prevalece una tasa real de interés constante y libre de riesgo (crédito), r . El agente maximiza su utilidad, $u = u(c_1, c_2)$, por el consumo de c_1 , un bien genérico (perecedero) disponible hoy, y c_2 , un bien genérico disponible mañana, sujeto a sus posibilidades presupuestales. El índice de utilidad $u = u(c_1, c_2)$ es también llamado índice de satisfacción, deseos e, incluso, felicidad. Específicamente, el consumidor racional resuelve el siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \underset{c_1, c_2}{\text{Maximizar}} \quad u(c_1, c_2) \\ & \text{sujeto a: } y_1 \geq c_1 + b_1, \\ & \quad y_2 + (1+r)b_1 \geq c_2, \\ & \quad c_1 \geq 0, \\ & \quad c_2 \geq 0, \\ & \quad b_1 \text{ sin restricción en el signo.} \end{aligned} \tag{78.4}$$

Si $b_1 > 0$, el consumidor es acreedor, en caso contrario, $b_1 < 0$, el consumidor es deudor. A las variables de decisión, c_1 , c_2 y b_1 , se les llama frecuentemente variables endógenas y a las variables que se toman como dadas, en este caso r , y_1 y y_2 , se les llama variables exógenas.

Una forma de reducir el número de restricciones en (78.4) consiste en eliminar de las dos primeras desigualdades la variable b_1 , ya que a partir de las dos primeras restricciones de (78.4) se obtiene

$$y_1 - c_1 \geq b_1 \quad \text{y} \quad b_1 \geq \frac{c_2}{1+r} - \frac{y_2}{1+r},$$

las cuales se colapsan como

$$y_1 + \frac{y_2}{1+r} \geq c_1 + \frac{c_2}{1+r}. \quad (78.5)$$

La interpretación de la desigualdad anterior, en términos más simples, es que el valor presente del consumo planeado no puede exceder al valor presente de las dotaciones. Para simplificar la notación de la desigualdad (78.5), se escribirá

$$a_1 \equiv y_1 + Ry_2,$$

donde $R = 1/(1+r)$ es un factor de descuento. De esta manera, el problema de maximización de utilidad se transforma en

$$\begin{aligned} & \underset{c_1, c_2}{\text{Maximizar}} \quad u(c_1, c_2) \\ & \text{sujeto a:} \quad a_1 \geq c_1 + Rc_2, \\ & \quad c_1 \geq 0, \\ & \quad c_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (78.6)$$

En este caso el Lagrangeano asociado al problema de maximización de utilidad (78.1) está dado por:

$$\mathcal{L}(c_1, c_2, \lambda, \mu_1, \mu_2) = u(c_1, c_2) + \lambda(a_1 - c_1 - Rc_2) + \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2.$$

Si además denotamos

$$\frac{\partial u}{\partial c_1} = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial c_2} = u_2,$$

las condiciones de Kuhn-Tucker se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} &= u_1 - \lambda + \mu_1 \leq 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} &= u_2 - R\lambda + \mu_2 \leq 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} c_1 &= (u_1 - \lambda + \mu_1) c_1 = 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} c_2 &= (u_2 - R\lambda + \mu_2) c_2 = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= a_1 - c_1 - Rc_2 \geq 0, & c_1 \geq 0, \quad c_2 \geq 0, \\ \lambda(a_1 - c_1 - Rc_2) &= 0, & \mu_1 c_1 = 0, \quad \mu_2 c_2 = 0, \\ \lambda, \mu_1, \mu_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (78.7)$$

Es importante recordar que la variable b_1 , la cual no aparece en las condiciones anteriores aún debe satisfacer:

$$y_1 - c_1 \geq b_1 \geq \frac{c_2}{1+r} - \frac{y_2}{1+r}.$$

78.4 Solución interior

Un supuesto muy frecuente en este tipo de problemas, que simplifica las condiciones de Kuhn-Tucker asociadas al problema de maximización de utilidad del consumidor racional, es que no es posible la especialización en el consumo de un solo bien. Concretamente, se supone que $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$. En este caso, las condiciones de primer orden expresadas en (78.7) conducen inmediatamente a:

$$\begin{aligned} u_1 - \lambda &= 0, \\ u_2 - R\lambda &= 0, \\ a_1 - c_1 - Rc_2 &\geq 0, \\ \lambda &\geq 0, \\ \lambda(a_1 - c_1 - Rc_2) &= 0. \end{aligned} \quad (78.8)$$

78.5 Solución interior, condición de no saciedad y condiciones de primer orden

La conjunción de los supuestos de solución interior y no saciedad simplifica considerablemente las condiciones de Kuhn-Tucker. Se supone ahora que $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $u_1 > 0$ y $u_2 > 0$. En este caso, $u_1 > 0$ significa que el consumidor prefiere consumir más a menos y esta condición implica en (78.8) que $u_1 = \lambda > 0$. Por lo tanto,

$$a_1 = c_1 + R c_2. \quad (78.9)$$

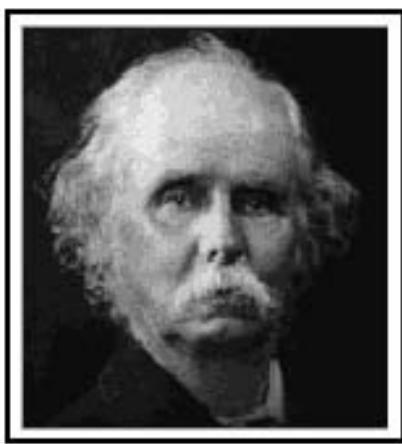
Es decir, la restricción presupuestal se cumple con igualdad. Así, las condiciones de primer orden, en (78.8), se reducen únicamente a tres ecuaciones, a saber:

$$\begin{aligned} u_1 - \lambda &= 0, \\ u_2 - R\lambda &= 0, \\ a_1 &= c_1 + R c_2, \end{aligned} \quad (78.10)$$

junto con $\lambda > 0$. Por último, es importante mencionar que a las condiciones necesarias se les llama también condiciones de primer orden, ya que éstas consideran sólo las primeras derivadas.

78.6 Demandas de consumo presente y futuro

El sistema de ecuaciones (78.10) es, en general, no lineal en c_1 , c_2 y λ . Las soluciones dependen del factor de descuento, R , del valor presente de las dotaciones, a_1 , y de los parámetros de preferencias, es decir, $c_1 = c_1(a_1, R)$ y $c_2 = c_2(a_1, R)$, alternativamente $c_1 = c_1(a_1, r)$ y $c_2 = c_2(a_1, r)$. Dichas soluciones son llamadas demandas ordinarias o demandas Marshallianas en honor de Alfred Marshall (1842-1924), matemático (de Cambridge) y economista de nacionalidad inglesa; uno de los microeconomistas más influyentes de su tiempo. Su libro, "Principles of Political Economy" (1890) integra las teorías de oferta y demanda, utilidad marginal y costos de producción en un marco consistente con la teoría de optimización. Su libro se convirtió en el texto económico más influyente en Inglaterra por un largo período de tiempo. En su libro se introducen los conceptos de: consumidor racional, excedente del consumidor y del productor, y bienestar económico.



Fuente: socserv2.socsci.mcmaster.ca.

Alfred Marshall (1842-1924).

78.7 Condición de equimarginalidad

A continuación se introduce una condición necesaria que relaciona la razón entre utilidades marginales con los precios relativos, la cual es muy intuitiva y simple de recordar. Observe que

si la solución es interior y la utilidad marginal es positiva (es decir, no hay especialización en el consumo y se prefiere más a menos), entonces las condiciones de primer orden conducen a la siguiente ecuación, llamada condición de equimarginalidad:

$$\frac{u_1}{u_2} = R^{-1} = 1 + r. \quad (78.11)$$

En otras palabras, la utilidad marginal del consumo presente, normalizada por la utilidad marginal del consumo futuro, es igual a su costo marginal, expresado en términos de la tasa de interés. Otra forma de expresar la condición de equimarginalidad es

$$\frac{u_1}{1} = \frac{u_2}{R} = \lambda.$$

Es decir, la utilidad marginal del consumo presente sobre su precio es igual a la utilidad marginal del consumo futuro sobre su precio. Asimismo, dichos cocientes de utilidades marginales sobre sus precios son iguales al multiplicador λ .

78.8 Curvas de indiferencia

Una curva de indiferencia se define como el lugar geométrico de los puntos c_1 y c_2 que proporcionan al consumidor exactamente el mismo nivel de utilidad, u_0 . Es decir,

$$u(c_1, c_2) = u_0, \quad (78.12)$$

Como puede observarse, la ecuación anterior representa lo que se conoce como una curva de nivel. Después de diferenciar totalmente la expresión (78.12), se tiene que

$$du = u_1 dc_1 + u_2 dc_2 = 0.$$

En consecuencia,

$$\left. \frac{dc_2}{dc_1} \right|_{u=u_0} = -\frac{u_1}{u_2}. \quad (78.13)$$

Esta cantidad proporciona la pendiente de la recta tangente a la curva de indiferencia en cualquier punto. La razón u_1/u_2 es llamada tasa marginal de sustitución intertemporal y será denotada por TMS_{12} . Esta cantidad se interpreta como la razón de cambio a la que el consumidor está dispuesto a sacrificar consumo presente por consumo futuro sin empeorar o mejorar, es decir, manteniendo su mismo nivel de satisfacción. En otras palabras, si se desea incrementar c_2 , es decir, si $dc_2 > 0$, con $u = u_0$, entonces se tiene que sacrificar consumo de c_1 , de tal forma que $dc_1 = -(u_2/u_1)dc_2 < 0$. Así, $dc_2/dc_1|_{u=u_0} < 0$. Por último, si la función de utilidad es estrictamente cuasi-cóncava, entonces las curvas de indiferencia son convexas con respecto del origen.

78.9 Pendiente de la restricción presupuestal intertemporal

Considere ahora la línea presupuestal intertemporal

$$a_1 = c_1 + R c_2.$$

En este caso, al diferenciar la expresión anterior, en ausencia de cambios en a_1 y R , se tiene que

$$0 = dc_1 + R dc_2,$$

equivalentemente

$$\left. \frac{dc_2}{dc_1} \right|_{a_1=c_1+Rc_2} = -(1+r), \quad (78.14)$$

lo que determina la pendiente de la línea presupuestal. Este resultado será utilizado en la determinación del equilibrio intertemporal del consumidor.

78.10 Equilibrio intertemporal del consumidor

Una forma alternativa de abordar el problema de decisión del consumidor racional consiste en igualar la pendiente de la línea presupuestal con la pendiente de la curva de indiferencia tangente. Es decir, el equilibrio intertemporal se alcanza justo cuando

$$\left. \frac{dc_2}{dc_1} \right|_{a_1=c_1+Rc_2} = \left. \frac{dc_2}{dc_1} \right|_{u_0}.$$

Equivalentemente,

$$1 + r = TMS_{12}. \quad (78.15)$$

Esta última expresión coincide plenamente con (78.11).

78.11 Solución alternativa del problema de decisión del consumidor

Suponga una solución interior y la condición de no saciedad. Considere el problema

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar}_{c_1, c_2} u(c_1, c_2) \\ & \text{sujeto a: } a_1 = c_1 + R c_2. \end{aligned}$$

Ahora, defina

$$U(c_1) = u[c_1, (a_1 - c_1)(1 + r)].$$

En este caso,

$$dU = u_1 dc_1 - u_2(1 + r)dc_1.$$

Por lo tanto,

$$\frac{dU}{dc_1} = u_1 - u_2(1 + r). \quad (78.16)$$

La condición de primer orden de un máximo es $dU/dc_1 = 0$, es decir, $u_1/u_2 = 1 + r$.

78.12 Condiciones de segundo orden

Se supone ahora que la función $u(\cdot, \cdot)$ tiene segundas derivadas parciales continuas, las cuales se denotan, en forma breve, mediante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial c_1^2} = u_{11}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial c_2^2} = u_{22} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial c_1 \partial c_2} = u_{12}.$$

Se supone además que todas las funciones de utilidad que se examinen, de ahora en adelante, satisfacen la siguiente condición sobre las derivadas parciales

$$u_{12} = u_{21}.$$

De hecho, el teorema de Young afirma que si las derivadas parciales cruzadas son continuas entonces coinciden. Ahora bien, con base en la sección anterior, una condición suficiente para un máximo, (c_1, c_2) , del problema de maximización de utilidad es que:

$$\frac{d^2 U}{dc_1^2} < 0. \quad (78.17)$$

En teoría económica, las condiciones suficientes son también llamadas condiciones de segundo orden. Ambas condiciones, de primer y de segundo orden tienen que cumplirse a fin de garantizar que se alcance un máximo global, es decir, un único máximo. Observe que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dc_1^2} &= u_{11} - u_{12}(1 + r) - u_{21}(1 + r) + u_{22}(1 + r)^2 \\ &= u_{11} - 2u_{12}(1 + r) + u_{22}(1 + r)^2 \\ &= -(1 + r)^2 \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & -1 \\ u_{21} & u_{22} & -R \\ -1 & -R & 0 \end{vmatrix} < 0. \end{aligned}$$

En otras palabras, una condición suficiente de un máximo, (c_1, c_2) , es que se cumpla:

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & -1 \\ u_{21} & u_{22} & -R \\ -1 & -R & 0 \end{vmatrix} = -R^2 [u_{11} - 2u_{12}(1 + r) + u_{22}(1 + r)^2] > 0. \quad (78.18)$$

La matriz asociada al determinante (78.18) es llamada la matriz Hessiana orlada, a falta de un mejor nombre.

78.13 Función de utilidad estrictamente cuasi-cóncava

Se dice que una función de utilidad u es estrictamente cuasi-cóncava si el determinante de la matriz Hessiana orlada satisface:

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} = - (u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2) > 0.$$

Note que en virtud de las condiciones de primer orden, se puede escribir

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \lambda \\ u_{21} & u_{22} & \lambda R \\ \lambda & \lambda R & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda)^2 \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & -1 \\ u_{21} & u_{22} & -R \\ -1 & -R & 0 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 \Delta. \end{aligned} \tag{78.19}$$

En particular, si $u_{11} < 0$, $u_{22} < 0$ y $u_{12} \geq 0$ en (78.18), entonces $\Delta > 0$, es decir, u es cuasi-cóncava. Por supuesto existen otras posibilidades. Por ejemplo, si $u_{11} = 0$, $u_{22} < 0$ y $u_{12} = 0$, entonces $\Delta > 0$.

78.14 Estática comparativa

Con el propósito de cuantificar los cambios en las variables de decisión debido a cambios en las variables exógenas, se derivan totalmente las condiciones de primer orden. Es decir,

$$\begin{cases} d(u_1 - \lambda) = 0, \\ d(u_2 - R\lambda) = 0, \\ d(a_1 - c_1 - Rc_2) = 0. \end{cases} \tag{78.20}$$

En virtud de (78.20), se tiene que

$$\begin{cases} u_{11}dc_1 + u_{12}dc_2 - d\lambda = 0, \\ u_{21}dc_1 + u_{22}dc_2 - Rd\lambda - \lambda dR = 0, \\ da_1 - dc_1 - Rdc_2 - c_2dR = 0. \end{cases} \tag{78.21}$$

Si se dejan solamente los cambios en las variables endógenas, c_1 , c_2 y λ , del lado izquierdo, se obtiene

$$\begin{cases} u_{11}dc_1 + u_{12}dc_2 - d\lambda = 0, \\ u_{21}dc_1 + u_{22}dc_2 - Rd\lambda = \lambda dR, \\ -dc_1 - Rdc_2 = -da_1 + c_2dR. \end{cases} \tag{78.22}$$

Las tres ecuaciones anteriores se pueden expresar en forma matricial, en forma más compacta, como

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & -1 \\ u_{21} & u_{22} & -R \\ -1 & -R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dc_1 \\ dc_2 \\ d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda dR \\ -(da_1 - c_2dR) \end{pmatrix}. \tag{78.23}$$

Bajo el supuesto de que $\Delta > 0$, el sistema de tres ecuaciones lineales en (78.23) tiene una única solución y puede resolverse mediante la regla de Cramer. Es decir,

$$\begin{aligned} dc_1 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & u_{12} & -1 \\ \lambda dR & u_{22} & -R \\ -(da_1 - c_2 dR) & -R & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} [[\lambda R + c_2(u_{22} - u_{12}R)] dR - (u_{22} - u_{12}R)da_1] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} dc_2 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} u_{11} & 0 & -1 \\ u_{21} & \lambda dR & -R \\ -1 & -(da_1 - c_2 dR) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} [[-\lambda + c_2(u_{11}R - u_{12})] dR - (u_{11}R - u_{12})da_1]. \end{aligned}$$

Por último, observe que en virtud de que

$$da_1 = dy_1 + \frac{1}{1+r}dy_2 - \frac{y_2}{(1+r)^2}dr,$$

se sigue que los cambios en consumos, dc_1 y dc_2 , en términos de las variables exógenas se pueden expresar como

$$\begin{aligned} dc_1 &= \frac{1}{\Delta} \left\{ - \left[\frac{\lambda}{1+r} + c_2 \left(u_{22} - \frac{u_{12}}{1+r} \right) \right] \frac{1}{(1+r)^2} + \left(u_{22} - \frac{u_{12}}{1+r} \right) \frac{y_2}{(1+r)^2} \right\} dr \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \left(u_{22} - \frac{u_{12}}{1+r} \right) \left(dy_1 + \frac{1}{1+r}dy_2 \right) \end{aligned} \quad (78.24)$$

y

$$\begin{aligned} dc_2 &= \frac{1}{\Delta} \left\{ - \left[-\lambda + c_2 \left(\frac{u_{11}}{1+r} - u_{12} \right) \right] \frac{1}{(1+r)^2} + \left(\frac{u_{11}}{1+r} - u_{12} \right) \frac{y_2}{(1+r)^2} \right\} dr \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \left(\frac{u_{11}}{1+r} - u_{12} \right) \left(dy_1 + \frac{1}{1+r}dy_2 \right). \end{aligned} \quad (78.25)$$

78.15 Ecuaciones de Slutsky

Evgeny (Eugene o Eugen o Yevgeni) Evgenievich Slutsky (1880-1948) destacado matemático, estadístico y probabilista ruso que hizo contribuciones relevantes en teoría económica, estadística matemática y teoría de procesos estocásticos. En un principio Eugene Slutsky estudiaba matemáticas en la Universidad de Kiev, en Ucrania, pero fue expulsado por participar en un mitin estudiantil para reinstalar a compañeros expulsados por sus ideas en contra del régimen Zarista. Como castigo por su participación en dicho mitin, fue enrolado en el ejército en 1901. Sin embargo, el escarmiento sólo duró unos cuantos meses, y pronto estaría de regreso en la Universidad de Kiev. No obstante, poco tiempo después, por su reincidencia en rebeliones similares le fue prohibido estudiar en cualquier universidad rusa.

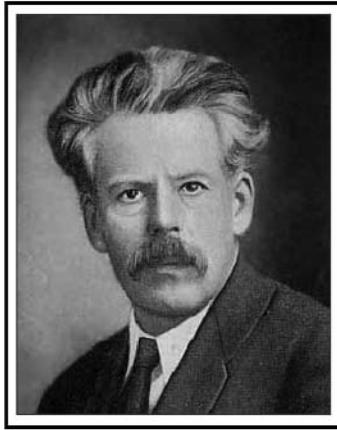
Bajo las circunstancias anteriores, Slutsky tenía pocas opciones para su educación, así que en 1902 decidió irse a estudiar ingeniería al Munich Polytechnikum en Alemania. Allí tuvo la oportunidad de estudiar a Ricardo, Marx y Lenin. Su motivación para aplicar matemáticas a la economía había crecido con gran entusiasmo. En 1905, terminó la carrera de ingeniería en el Munich Polytechnikum y regresó casi inmediatamente a Kiev. La situación en Kiev, en vísperas de una revolución, era entonces muy distinta a la que prevalecía en 1901, ya que habían comenzado grandes huelgas, rebeliones y motines por parte de trabajadores y militares.

La expulsión de Slutsky de las universidades rusas fue desconocida bajo esta nueva situación política, así que pudo reingresar a la Universidad de Kiev. Esta vez Slutsky eligió estudios más acordes con sus intereses políticos, solicitando su ingreso al doctorado en economía política en la facultad de leyes. Se graduó con honores en 1911 recibiendo una medalla de oro por su sobresaliente trabajo sobre la teoría de la utilidad marginal. Posteriormente, Slutsky mostró un gran interés por la estadística matemática, debido a la influencia de Gauss y Pearson, y en 1912 publicó en Kiev un libro sobre la teoría de correlación. A partir de 1913 y hasta 1926 Slutsky fue profesor en el Instituto de Comercio de Kiev. En 1926, se trasladó a las Oficinas de Estadística del Gobierno en Moscú, como investigador fundador del Instituto de Coyuntura. Después, en 1931, Slutsky ingresó al Instituto Central de Meteorología. Posteriormente, ingresa como investigador en el Instituto de Matemáticas y Mecánica de la Universidad de Moscú. Para 1938, se había trasladado al Instituto de Matemáticas de Steklov de la Academia de Ciencias de la URSS. En su estancia en dicho Instituto, sus investigaciones se concentraron en la aplicación de la estadística matemática a la economía y, más adelante en su sobresaliente carrera, a las ciencias naturales.

Durante su estadía en el Instituto de Comercio de Kiev, Slutsky proporcionó la ecuación fundamental de la teoría del comportamiento del consumidor, en su publicación en italiano “Sulla teoria del bilancio del consummatore”, en 1915, en el “Giornale degli Economisti”. En este trabajo, se introduce la “descomposición de Slutsky” de una función de demanda en sus efectos de sustitución e ingreso. Su trabajo permaneció en el anonimato, hasta que la misma descomposición fue resucitada independientemente por John R. Hicks y Roy G. D. Allen en 1934, momento en que Slutsky consiguió todavía un eventual reconocimiento. Sir John Richard Hicks, economista británico, Premio Nobel de Economía en 1972, compartido con K. J. Arrow, por sus contribuciones a la teoría del equilibrio económico general y la teoría del bienestar. Hicks es una de las figuras más destacadas del pensamiento económico del siglo XX. Quizás su aportación más popular fue un artículo de 1937 publicado en la revista Econometrica: “Mr. Keynes and the Classics: A suggested interpretation”. En él realizó un esfuerzo de conciliación del pensamiento de Keynes, cuya obra fundamental “The General Theory of Employment, Interest and Money” (1936) se acababa de publicar, con los modelos clásicos de equilibrio. De ello resultó el modelo de curvas IS-LM.

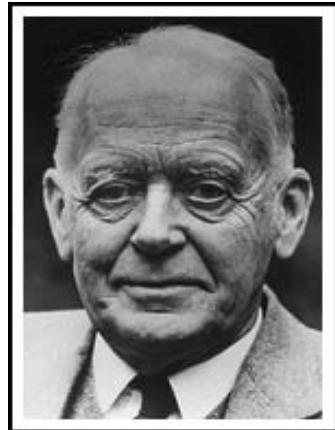
Otra contribución prominente de Slutsky a la economía vino en 1927, en el artículo “The Summation of Random Causes as the Source of Cyclical Processes” (reimpreso en “Econometrica”, 1937). En este artículo, Slutsky presenta el famoso teorema de Slutsky-Yule, en donde muestra que el promedio móvil de una serie de choques aleatorios puede generar movimiento oscilatorio aun cuando no existen oscilaciones en los datos originales. En otras palabras, Slutsky demuestra que una serie de choques aleatorios se puede conjuntar para crear características cíclicas regulares. Esta investigación, es el principio de la hipótesis de ciclos (económicos) de negocios de la nueva teoría clásica.

Entre las contribuciones de Slutsky en estadística matemática y probabilidad destaca los siguientes artículos: “On the Criterion of Goodness of Fit of the Regression Lines and on the Best Method of Fitting them to Data”, publicado en 1914, en el “Journal of Royal Statistical Society” en este trabajo Slutsky discute sobre un criterio de la calidad del ajuste de una recta de regresión. Asimismo en su investigación “Über stochastische Asymptoten und Grenzwerte”, en 1925, publicada en el Matematischen Annalen, se presenta el renombrado “teorema de Slutsky” que establece que si una estadística converge casi seguramente o en probabilidad a alguna constante, entonces cualquier función continua de esa estadística también converge a la función valuada en dicha constante; un teorema de gran uso en estadística y econometría. Otros teoremas límite, de similar importancia, fueron proporcionados en 1928 y 1929 en sus artículos “Sur un criterium de la convergence stochastique des ensembles de valeurs eventuelles”, y “Quelques Propositions sur les Limites Stochastiques Eventuelles”, ambos en el Compte Rendu des Sciences de l’Academie des Sciences. En estos trabajos introduce los conceptos de procesos estocásticos estacionarios y especifica condiciones para que dichos procesos sean medibles. Por último, vale la pena resaltar que además de que Eugene Slutsky era un prominente científico, también fue un excepcional políglota, ya que publicaba en italiano, ruso, inglés, alemán y francés.



Fuente: cepa.newschool.edu

Eugene Slutsky (1880-1948).



Fuente: www.eumed.net.

John R. Hicks (1904-1989).

Así pues, el objetivo principal de esta sección consiste en examinar cómo cambios en precios afectan a las variables de decisión, es decir, cómo cambios en las variables exógenas afectan a las variables endógenas, y cómo las demandas de consumo presente y futuro se descomponen en sus efectos sustitución e ingreso. A partir de (78.24) se puede concluir que

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} = \frac{1}{\Delta} \left\{ - \left[\frac{\lambda}{1+r} + c_2 \left(u_{22} - \frac{u_{12}}{1+r} \right) \right] \frac{1}{(1+r)^2} + \left(u_{22} - \frac{u_{12}}{1+r} \right) \frac{y_2}{(1+r)^2} \right\},$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial y_1} = -\frac{1}{\Delta} \left(u_{22} - \frac{u_{12}}{1+r} \right)$$

y

$$\frac{\partial c_1}{\partial y_2} = \frac{1}{1+r} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} = -\frac{1}{\Delta(1+r)} \left(u_{22} - \frac{u_{12}}{1+r} \right).$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} = -\frac{\lambda}{\Delta(1+r)^3} + \frac{c_2}{(1+r)^2} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} - \frac{y_2}{1+r} \frac{\partial c_1}{\partial y_2}. \quad (78.26)$$

Por otro lado, dado que

$$c_2 = (a_1 - c_1)(1+r), \quad (78.27)$$

la ecuación (78.26) se puede reescribir como

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} = -\frac{\lambda}{\Delta(1+r)^3} + \frac{a_1 - c_1}{(1+r)} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} - \frac{y_2}{1+r} \frac{\partial c_1}{\partial y_2}. \quad (78.28)$$

La ecuación anterior proporciona el cambio en c_1 producido por un cambio en r , *ceteris paribus*, es decir, manteniendo todo lo demás constante. Se dice que el consumo presente es un bien normal si $\partial c_1 / \partial y_1 > 0$. En particular, si $u_{22} < 0$ y $u_{12} > 0$, entonces el consumo presente es un bien normal. Observe también que el signo de (78.28) es indeterminado.

Por otro lado, si $s_1 = y_1 - c_1$ es el ahorro en el primer período, entonces

$$\frac{\partial s_1}{\partial r} = -\frac{\partial c_1}{\partial r}.$$

Por último, se puede verificar que

$$\frac{\partial c_2}{\partial r} = \frac{\lambda}{(1+r)^2 \Delta} + \frac{c_2}{(1+r)^2} \frac{\partial c_2}{\partial y_1} - \frac{y_2}{1+r} \frac{\partial c_2}{\partial y_2},$$

donde

$$\frac{\partial c_2}{\partial y_1} = -\frac{1}{\Delta} \left(\frac{u_{11}}{1+r} - u_{12} \right)$$

y

$$\frac{\partial c_2}{\partial y_2} = R \frac{\partial c_2}{\partial y_1} = -\frac{1}{\Delta(1+r)} \left(\frac{u_{11}}{1+r} - u_{12} \right).$$

Observe que si $y_2 = 0$ y $\partial c_2 / \partial y_1 > 0$, entonces $\partial c_2 / \partial r > 0$, en cuyo caso, un aumento en r conduce a un incremento en c_2 .

78.16 Efecto sustitución

A continuación se estudia el efecto sustitución. En este caso, la utilidad permanece constante, es decir, se cuantifica el efecto de pequeños movimientos del equilibrio sobre una misma curva de indiferencia con nivel u_0 . Si

$$u(c_1, c_2) = u_0, \quad (78.29)$$

donde u_0 es una constante, entonces

$$u_1 dc_1 + u_2 dc_2 = 0. \quad (78.30)$$

Por otro lado, de las condiciones de primer orden se sigue que

$$u_1 = \lambda \quad \text{y} \quad u_2 = R\lambda. \quad (78.31)$$

Al sustituir (78.31) en (78.30), se tiene que

$$dc_1 + Rdc_2 = 0. \quad (78.32)$$

En consecuencia, si u se mantiene constante, se tiene que:

$$\begin{cases} u_{11}dc_1 + u_{12}dc_2 - d\lambda = 0, \\ u_{21}dc_1 + u_{22}dc_2 - Rd\lambda = \lambda dR, \\ -dc_1 - Rdc_2 = 0. \end{cases} \quad (78.33)$$

En términos matriciales lo anterior se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & -1 \\ u_{21} & u_{22} & -R \\ -1 & -R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dc_1 \\ dc_2 \\ d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda dR \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (78.34)$$

Este sistema de ecuaciones se puede resolver de nuevo con la regla de Cramer. En este caso, se tiene que

$$dc_1|_{u=u_0} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & u_{12} & -1 \\ \lambda dR & u_{22} & -R \\ 0 & -R & 0 \end{vmatrix} = \frac{\lambda R dR}{\Delta}. \quad (78.35)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial c_1}{\partial r}|_{u=u_0} = -\frac{\lambda}{(1+r)^3 \Delta}.$$

Esta cantidad determina el efecto sustitución. Note que el efecto sustitución es siempre negativo. Así, se puede escribir

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} = \frac{\partial c_1}{\partial r} \Big|_{u=u_0} + \frac{c_2}{(1+r)^2} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} - \frac{y_2}{1+r} \frac{\partial c_1}{\partial y_2}. \quad (78.36)$$

Asimismo, se tiene que

$$\frac{\partial c_2}{\partial r} \Big|_{u=u_0} = \frac{\lambda}{(1+r)^2 \Delta}. \quad (78.37)$$

Por lo tanto, se puede escribir

$$\frac{\partial c_2}{\partial r} = \frac{\partial c_2}{\partial r} \Big|_{u=u_0} + \frac{c_2}{(1+r)^2} \frac{\partial c_2}{\partial y_1} - \frac{y_2}{1+r} \frac{\partial c_2}{\partial y_2}. \quad (78.38)$$

Por último, observe que

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} \Big|_{u=u_0} + R \frac{\partial c_2}{\partial r} \Big|_{u=u_0} = 0.$$

Es decir, el valor presente de los efectos sustitución del consumo presente y futuro es igual a cero.

78.17 Efecto ingreso

A continuación se estudia el efecto ingreso. En este caso, r permanece constante e igual a r_0 . Se cuantifica, a continuación, el efecto de pequeños desplazamientos de la restricción presupuestal. A partir de (78.22) se tiene que

$$\begin{cases} u_{11}dc_1 + u_{12}dc_2 - d\lambda = 0, \\ u_{21}dc_1 + u_{22}dc_2 - Rdc_2 = 0, \\ da_1 - dc_1 - Rdc_2 = 0, \end{cases}$$

donde

$$da_1 = dy_1 + \frac{1}{1+r}dy_2$$

ya que $dr = 0$ ($dR = 0$). Las tres ecuaciones anteriores se pueden expresar en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & -1 \\ u_{21} & u_{22} & -R \\ -1 & -R & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dc_1 \\ dc_2 \\ d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(dy_1 + Rdy_2) \end{pmatrix}. \quad (78.39)$$

La solución (78.39) se puede obtener a través de la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} dc_1 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & u_{12} & -1 \\ 0 & u_{22} & -R \\ -(dy_1 + Rdy_2) & -R & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{\Delta} (u_{22} - Ru_{12}) (dy_1 + Rdy_2). \end{aligned} \quad (78.40)$$

Es decir,

$$\frac{\partial c_1}{\partial y_1} \Big|_{r=r_0} = -\frac{1}{\Delta} \left(u_{22} - \frac{u_{12}}{1+r} \right)$$

y

$$\frac{\partial c_1}{\partial y_2} \Big|_{r=r_0} = -\frac{1}{\Delta(1+r)} \left(u_{22} - \frac{u_{12}}{1+r} \right).$$

En particular, si $u_{22} < 0$ y $u_{12} > 0$, se tiene que $\partial c_1 / \partial a_1 > 0$. Por lo tanto, con base en (78.36), se puede escribir

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} = \frac{\partial c_1}{\partial r} \Big|_{u=u_0} + \frac{c_2}{(1+r)^2} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} \Big|_{r=r_0} - \frac{y_2}{1+r} \frac{\partial c_1}{\partial y_2} \Big|_{r=r_0}. \quad (78.41)$$

De la misma manera,

$$\frac{\partial c_2}{\partial y_1} \Big|_{r=r_0} = -\frac{1}{\Delta} \left(\frac{u_{11}}{1+r} - u_{12} \right)$$

y

$$\frac{\partial c_2}{\partial y_2} \Big|_{r=r_0} = -\frac{1}{\Delta(1+r)} \left(\frac{u_{11}}{1+r} - u_{12} \right),$$

así

$$\frac{\partial c_2}{\partial r} = \frac{\partial c_2}{\partial r} \Big|_{u=u_0} + \frac{c_2}{(1+r)^2} \frac{\partial c_2}{\partial y_1} \Big|_{r=r_0} - \frac{y_2}{1+r} \frac{\partial c_2}{\partial y_2} \Big|_{r=r_0}. \quad (78.42)$$

Los dos últimos términos de la ecuación anterior reciben el nombre de efectos ingreso presente y futuro, respectivamente.

78.18 Función de utilidad indirecta

La función de utilidad indirecta $V(a_1, r)$ se define como el valor de la función de utilidad en las demandas $c_1(a_1, r)$, $c_2(a_1, r)$, es decir,

$$V(a_1, r) = u(c_1(a_1, r), c_2(a_1, r)). \quad (78.43)$$

La función $V(a_1, r)$ proporciona una medida del bienestar económico del consumidor ya que es el nivel de satisfacción máximo alcanzable. De ahora en adelante, a la función de utilidad original, $u(c_1, c_2)$, se le llamará función de utilidad directa para diferenciarla de V . En este caso, el cambio en la utilidad indirecta debido a cambios simultáneos en las variables exógenas, es decir, la diferencial de $V(a_1, r)$ satisface

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial u}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial u}{\partial c_2} dc_2 \\ &= \frac{\partial u}{\partial c_1} \left(\frac{\partial c_1}{\partial r} dr + \frac{\partial c_1}{\partial a_1} da_1 \right) + \frac{\partial u}{\partial c_2} \left(\frac{\partial c_2}{\partial r} dr + \frac{\partial c_2}{\partial a_1} da_1 \right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial c_1} \frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial c_2} \frac{\partial c_2}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial u}{\partial c_1} \frac{\partial c_1}{\partial a_1} + \frac{\partial u}{\partial c_2} \frac{\partial c_2}{\partial a_1} \right) da_1. \end{aligned}$$

En virtud de que, en el óptimo, $u_1 = \lambda$ y $u_2 = \lambda R$, se obtiene que

$$dV = \lambda \left(\frac{\partial c_1}{\partial r} + R \frac{\partial c_2}{\partial r} \right) dr + \lambda \left(\frac{\partial c_1}{\partial a_1} + R \frac{\partial c_2}{\partial a_1} \right) da_1. \quad (78.44)$$

En consecuencia, los cambios (marginales) en el bienestar económico, V , con respecto de r y a_1 están dados, respectivamente, por

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \lambda \left(\frac{\partial c_1}{\partial r} + R \frac{\partial c_2}{\partial r} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial a_1} = \lambda \left(\frac{\partial c_1}{\partial a_1} + R \frac{\partial c_2}{\partial a_1} \right). \quad (78.45)$$

78.19 Condiciones de agregación de Cournot y de Engel

A continuación se obtienen dos condiciones sobre cambios en el valor presente del consumo planeado cuando cambian las variables exógenas. Si se sustituyen las soluciones óptimas (demandas) en la restricción presupuestal intertemporal del consumidor

$$a_1 = c_1(a_1, r) + R c_2(a_1, r),$$

se sigue que

$$\begin{aligned} da_1 &= dc_1 + Rdc_2 + c_2dR \\ &= \frac{\partial c_1}{\partial r} dr + \frac{\partial c_1}{\partial a_1} da_1 + R \left(\frac{\partial c_2}{\partial r} dr + \frac{\partial c_2}{\partial a_1} da_1 \right) + c_2 dR \\ &= \left(\frac{\partial c_1}{\partial r} + R \frac{\partial c_2}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial c_1}{\partial a_1} + R \frac{\partial c_2}{\partial a_1} \right) da_1 + c_2 dR \\ &= \left(\frac{\partial c_1}{\partial r} + R \frac{\partial c_2}{\partial r} - \frac{c_2}{(1+r)^2} \right) dr + \left(\frac{\partial c_1}{\partial a_1} + R \frac{\partial c_2}{\partial a_1} \right) da_1. \end{aligned} \quad (78.46)$$

Para que (78.46) se cumpla se requiere que:

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} + R \frac{\partial c_2}{\partial r} = \frac{c_2}{(1+r)^2} \quad (78.47)$$

y

$$\frac{\partial c_1}{\partial a_1} + R \frac{\partial c_2}{\partial a_1} = 1. \quad (78.48)$$

Las expresiones (78.47) y (78.48) son conocidas como condiciones de agregación de Cournot y de Engel, respectivamente. Dichas condiciones pueden ser reescritas como

$$\frac{\partial}{\partial r}(c_1 + R c_2) = \frac{c_2}{(1+r)^2}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial a_1}(c_1 + R c_2) = \frac{\partial a_1}{\partial a_1} = 1,$$

las cuales describen como cambia el valor presente del consumo planeado cuando cambian r y a_1 , respectivamente.

78.20 Identidad de Roy

Hasta ahora, se ha visto que la sustitución de las demandas en la función de utilidad produce una medida de bienestar económico y que la sustitución de las demandas en la restricción presupuestal conducen a las condiciones de agregación de Cournot y de Engel. En esta sección se conjuntan los conceptos anteriores para responder a la siguiente pregunta: ¿si se conoce la función de utilidad indirecta es posible determinar las demandas de consumo presente y futuro? La sustitución de (78.47) y (78.48) en (78.44) conduce a:

$$dV = \frac{\lambda c_2}{(1+r)^2} dr + \lambda da_1. \quad (78.49)$$

En virtud de (78.49), se concluye que

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\lambda c_2}{(1+r)^2}$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = \lambda.$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r} \middle/ \frac{\partial V}{\partial a_1} \right) (1+r)^2 = c_2.$$

Es decir, a partir de la función de utilidad indirecta se puede obtener la demanda Marshalliana de c_2 . La demanda Marshalliana de c_1 se obtiene, posteriormente, a partir de $c_1 = a_1 - R c_2$. Así, si se parte del problema de maximización de utilidad, la identidad de Roy cierra un ciclo partiendo de las funciones de demanda y regresando a ellas.

78.21 Utilidad marginal del valor presente de las dotaciones y precios sombra

En virtud de (78.49), se sigue que $\lambda = \partial V / \partial a_1$. En consecuencia, la cantidad λ es la utilidad (indirecta) marginal del valor presente de las dotaciones. En este caso, λ puede interpretarse como la cantidad que estaría dispuesto a pagar un consumidor por incrementar en la restricción, $c_1 = a_1 - R c_2$, el ingreso a_1 en una unidad a fin de mejorar su nivel de utilidad. Por otro lado, observe que a partir de las condiciones de primer orden

$$u_{11}dc_1 + u_{12}dc_2 - d\lambda = 0.$$

Si se supone que $dc_2=0$ y $u_{11} < 0$, se tiene entonces que

$$\frac{\partial c_1}{\partial \lambda} = u_{11}^{-1} < 0.$$

De esta manera, λ actúa como un “precio”, es decir, si λ aumenta, entonces el consumo de c_1 disminuye. Sin embargo, el precio de c_1 es 1, razón por la que a λ se le llama precio sombra.

78.22 Funciones de utilidad específicas

En esta sección se revisan algunas formas funcionales del índice de utilidad. La aplicación de la mayoría de los conceptos anteriormente vistos se ilustran con funciones de utilidad específicas.

78.22.1 Función de utilidad logarítmica

Consideré la siguiente función de utilidad:

$$u(c_1, c_2) = \ln(c_1) + \frac{\ln(c_2)}{1+\rho}. \quad (78.50)$$

El factor de descuento ρ es llamado tasa de descuento subjetiva o tasa intertemporal subjetiva de descuento. Un valor de ρ grande significa que el consumidor aprecia más el consumo presente que el consumo futuro, es decir, el consumidor está ansioso por consumir hoy. Mientras que un valor pequeño de ρ significa que el consumidor valúa de igual forma los consumos presente y futuro, por lo que se puede decir que el consumidor no está ansioso por el consumo presente. De hecho, (78.50) es una de las funciones de utilidad más importantes en teoría económica. Esta función de utilidad satisface las siguientes propiedades:

$$u_1 > 0, \quad u_2 > 0, \quad u_{11} < 0, \quad u_{22} < 0, \quad u_{12} = 0.$$

Es decir, la utilidad marginal es positiva pero decreciente, en otras palabras, el consumidor siempre obtiene satisfacción por el consumo de ambos bienes, pero a medida que aumenta el consumo la satisfacción es cada vez menor. Asimismo, observe que

$$u(0, c_2) = -\infty, \quad u(c_1, 0) = -\infty, \quad u(\infty, c_2) = \infty, \quad u(c_1, \infty) = \infty.$$

Esto significa, que el consumidor está impaciente por iniciar el consumo de ambos bienes y que no existe un nivel de saciedad por el consumo presente o futuro. Por otro lado, la propiedad de quasi-concavidad se cumple trivialmente. Por lo tanto, la condición necesaria de máximo es

también suficiente. A partir de la condición $TM S_{12} = R^{-1}$, se sigue que $(1 + \rho)c_2 = (1 + r)c_1$. Al sustituir esta expresión en la restricción presupuestal intertemporal se tiene que:

$$a_1 = c_1 + Rc_2 = c_1 + \frac{c_1}{1 + \rho} = \frac{2 + \rho}{1 + \rho}c_1.$$

Por lo tanto, las funciones de demanda de consumo presente y futuro están, respectivamente, dadas por:

$$c_1 = \frac{1 + \rho}{2 + \rho}a_1 = \frac{1}{\lambda}$$

y

$$c_2 = \frac{1 + r}{2 + \rho}a_1 = \frac{1}{\lambda R(1 + \rho)}.$$

En este caso,

$$\Delta = \begin{vmatrix} -c_1^{-2} & 0 & -1 \\ 0 & -(1 + \rho)^{-1}c_2^{-2} & -R \\ -1 & -R & 0 \end{vmatrix} = \frac{R^2}{c_1^2} + \frac{1}{(1 + \rho)c_2^2} = \lambda^2 R^2 (2 + \rho).$$

El efecto sustitución es

$$\left. \frac{\partial c_1}{\partial r} \right|_{u=u_0} = -\frac{\lambda R^3}{\Delta} = -\frac{R}{\lambda(2 + \rho)} = -\frac{R(1 + \rho)a_1}{(2 + \rho)^2}.$$

Mientras que el efecto ingreso presente está dado por:

$$c_2 R^2 \left. \frac{\partial c_1}{\partial y_1} \right|_{r=r_0} = \frac{R(1 + \rho)a_1}{(2 + \rho)^2}.$$

Por lo tanto, el efecto sustitución se cancela con el efecto ingreso presente, en otras palabras, los efectos sustitución e ingreso presente son de la misma magnitud pero de sentido contrario. Asimismo, el efecto ingreso futuro satisface

$$-y_2 R \left. \frac{\partial c_1}{\partial y_2} \right|_{r=r_0} = -\frac{R^2(1 + \rho)y_2}{2 + \rho}.$$

En este ejemplo, la función de utilidad indirecta está dada por

$$V(a_1, r) = \ln \left(\frac{1 + \rho}{2 + \rho} a_1 \right) + \frac{1}{1 + \rho} \ln \left(\frac{1 + r}{2 + \rho} a_1 \right). \quad (78.51)$$

Con el propósito de emplear la identidad de Roy para obtener las demandas de c_1 y c_2 a partir de la función de utilidad indirecta, observe primero que

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{(1 + \rho)(1 + r)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial a_1} = \frac{2 + \rho}{(1 + \rho)a_1}.$$

Consecuentemente,

$$c_2 = \left(\frac{\partial V}{\partial r} \Big/ \frac{\partial V}{\partial a_1} \right) (1 + r)^2 = \frac{1 + r}{2 + \rho} a_1.$$

Además,

$$c_1 = a_1 - Rc_2 = a_1 - \frac{1}{2 + \rho}a_1 = \frac{1 + \rho}{2 + \rho}a_1.$$

78.22.2 Utilidad multiplicativa

Una función de utilidad que representa las mismas preferencias que (78.50) con $\rho = 0$, está dada por $u = c_1 c_2$. A partir de la condición $TMS_{12} = R^{-1}$, se sigue que $c_2 = (1+r)c_1$. Al sustituir esta expresión en la restricción presupuestal intertemporal se tiene que: $a_1 = c_1 + Rc_2 = c_1 + c_1 = 2c_1$. Por lo tanto, las funciones de demanda de consumo presente y futuro están dadas, respectivamente, por $c_1 = a_1/2$ y $c_2 = a_1(1+r)/2 = \lambda$. En este caso,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -R \\ -1 & -R & 0 \end{vmatrix} = 2R.$$

El efecto sustitución es

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} \Big|_{u=u_0} = -\frac{\lambda R^3}{\Delta} = -\frac{a_1 R}{4}.$$

En este caso, el efecto ingreso presente es

$$c_2 R^2 \frac{\partial c_1}{\partial y_1} \Big|_{r=r_0} = \frac{a_1 R}{4}.$$

De esta manera, el efecto sustitución se cancela con el efecto ingreso presente, en otras palabras, los efectos sustitución e ingreso presente son de la misma magnitud pero actúan en sentidos inversos. Asimismo, el efecto ingreso futuro satisface

$$-y_2 R \frac{\partial c_1}{\partial y_2} \Big|_{r=r_0} = -\frac{y_2 R}{2}.$$

Por último, la función de utilidad indirecta está dada por

$$V(a_1, r) = \frac{a_1^2(1+r)}{4}.$$

78.22.3 Función de utilidad cuasi-lineal

Considere la función de utilidad $u(c_1, c_2) = c_1 + \ln(c_2)$. En este caso, u es cuasi-cóncava y por lo tanto satisface simultáneamente las condiciones de primer y de segundo orden para un máximo. De la condición de primer orden $TMS_{12} = R^{-1}$, se sigue que

$$c_2 = R^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$c_1 = a_1 - Rc_2 = a_1 - 1,$$

siempre y cuando $a_1 > 1$. En caso contrario, $c_1 = 0$ y $c_2 = a_1 R^{-1}$. Equivalentemente,

$$c_1 = \begin{cases} a_1 - 1, & \text{si } a_1 > 1, \\ 0, & \text{si } a_1 \leq 1, \end{cases} \quad \text{y} \quad c_2 = \begin{cases} R^{-1}, & \text{si } a_1 > 1, \\ a_1 R^{-1}, & \text{si } a_1 \leq 1. \end{cases}$$

En otras palabras, si el valor presente de las dotaciones es suficiente, se compra c_1 (del bien caro) y de lo que sobre se compra c_2 (del bien barato). Si el ingreso no es suficiente se compra sólo del bien barato, es decir se compra sólo c_2 .

78.23 Problema de integración

En esta sección se estudia el problema (inverso) de cómo obtener la función de utilidad directa si se parte de las funciones de demanda. Para ello, se examinan algunos casos particulares de demandas Marshallianas.

78.23.1 Problema de integración para el caso de función de utilidad multiplicativa

Se supone que se conocen las demandas Marshallianas

$$c_1 = \frac{a_1}{2}$$

y

$$c_2 = \frac{a_1(1+r)}{2} = \lambda,$$

entonces de la condición

$$TMS_{12} = -\frac{dc_2}{dc_1} = R^{-1},$$

se sigue que

$$\frac{c_2}{c_1} = R^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$-\frac{dc_2}{dc_1} = R = \frac{c_2}{c_1},$$

equivalentemente,

$$-\frac{dc_2}{c_2} = \frac{dc_1}{c_1}.$$

Así,

$$-\int \frac{dc_2}{c_2} = \int \frac{dc_1}{c_1} - \ln(u),$$

donde u es la constante de integración. En consecuencia,

$$-\ln(c_2) = \ln(c_1) - \ln(u).$$

En conclusión, $u = c_1 c_2$.

78.23.2 Problema de integración para el caso de función de utilidad cuasi-lineal

Considere las funciones de demanda:

$$c_1 = \begin{cases} a_1 - 1, & \text{si } a_1 > 1, \\ 0, & \text{si } a_1 \leq 1, \end{cases} \quad \text{y} \quad c_2 = \begin{cases} R^{-1}, & \text{si } a_1 > 1, \\ a_1 R^{-1}, & \text{si } a_1 \leq 1. \end{cases}$$

Si $a_1 > 1$, entonces

$$TMS_{12} = -\frac{dc_2}{dc_1} = R^{-1} = c_2,$$

lo cual implica

$$-\frac{dc_2}{c_2} = dc_1.$$

En consecuencia,

$$\int \frac{dc_2}{c_2} = - \int dc_1 + u.$$

Por lo tanto, $u = c_1 + \ln(c_2)$.

78.24 Problema dual del consumidor

Consideré el problema dual del consumidor

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & h_1 + Rh_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & u(h_1, h_2) \geq u_0, \\ & h_1 \geq 0, \quad h_2 \geq 0, \end{aligned} \tag{78.52}$$

donde u_0 es un nivel de utilidad fijo. En este problema, el consumidor desea alcanzar un nivel de utilidad dado con el mínimo gasto posible. Note también que ahora los consumos, que proporcionan el gasto mínimo, son denotados por h_1 y h_2 . En este caso, h_1 y h_2 son llamadas las demandas compensadas de consumo o demandas Hicksianas a fin de distinguirlas de las demandas Marshallianas. El problema puede ser reescrito en forma equivalente como:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & -h_1 - Rh_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & u(h_1, h_2) - u_0 \geq 0, \\ & h_1 \geq 0, \quad h_2 \geq 0. \end{aligned}$$

En este caso el Lagrangeano asociado al problema (78.52) está dado por:

$$\mathcal{L} = -h_1 - Rh_2 + \mu[u(h_1, h_2) - u_0] + \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2,$$

donde μ, μ_1 y μ_2 son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones. Las condiciones de Kuhn-Tucker satisfacen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_1} \leq 0; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_2} \leq 0; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} \geq 0; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} \geq 0; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2} \geq 0; \quad \mu, \mu_1, \mu_2 \geq 0; \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_1} h_1 = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_2} h_2 = 0; \quad \mu[u(h_1, h_2) - u_0] = 0; \quad \mu_1 h_1 = 0; \quad \mu_2 h_2 = 0. \end{aligned}$$

Si h_1, h_2, u_1 y u_2 son todos positivos, entonces las condiciones de primer orden están dadas por

$$\mu u_1 - 1 = 0, \quad \mu u_2 - R = 0, \quad u(h_1, h_2) - u_0 = 0, \quad \mu > 0.$$

Si se define $\mu = \phi^{-1}$, las CPO para una solución interior son:

$$u_1 = \phi, \quad u_2 = R\phi, \quad u(h_1, h_2) = u_0, \quad \phi > 0.$$

El multiplicador ϕ puede ser eliminado de las ecuaciones anteriores de tal forma que:

$$\frac{u_1}{u_2} = R^{-1}, \quad u(h_1, h_2) = u_0.$$

Note que si c_1 y c_2 son solución del problema de decisión del consumidor, también satisfacen $u_1/u_2 = R^{-1}$.

78.25 Función intertemporal de gasto mínimo

A continuación se define la función intertemporal de gasto mínimo o simplemente la función de gasto. Si $h_1 = h_1(u_0, r)$ y $h_2 = h_2(u_0, r)$ son las soluciones del problema de gasto mínimo, se define la función de gasto mínimo, $E(u_0, r)$, mediante

$$E(u_0, r) = h_1(u_0, r) + \frac{1}{1+r} h_2(u_0, r). \tag{78.53}$$

Esta función representa el mínimo valor presente de los consumos, h_1 y h_2 , que se requiere para alcanzar un nivel de satisfacción predeterminado, u_0 .

78.26 Lema de Shephard

En esta sección a partir de la función de gasto mínimo se determinan las demandas compensadas. Después de diferenciar totalmente (78.53) se tiene que

$$\begin{aligned} dE &= \frac{\partial h_1}{\partial r} dr + \frac{\partial h_1}{\partial u_0} du_0 + R \left(\frac{\partial h_2}{\partial r} dr + \frac{\partial h_2}{\partial u_0} du_0 \right) - \frac{h_2 dr}{(1+r)^2} \\ &= \left(\frac{\partial h_1}{\partial r} + R \frac{\partial h_2}{\partial r} - \frac{h_2}{(1+r)^2} \right) dr + \left(\frac{\partial h_1}{\partial u_0} + R \frac{\partial h_2}{\partial u_0} \right) du_0. \end{aligned} \quad (78.54)$$

Por otro lado, se satisface además que

$$u(h_1(u_0, r), h_2(u_0, r)) = u_0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} du_0 &= \frac{\partial u}{\partial h_1} \left(\frac{\partial h_1}{\partial r} dr + \frac{\partial h_1}{\partial u_0} du_0 \right) + \frac{\partial u}{\partial h_2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial r} dr + \frac{\partial h_2}{\partial u_0} du_0 \right) \\ &= \phi \left(\frac{\partial h_1}{\partial r} dr + \frac{\partial h_1}{\partial u_0} du_0 \right) + R \phi \left(\frac{\partial h_2}{\partial r} dr + \frac{\partial h_2}{\partial u_0} du_0 \right) \\ &= \phi \left(\frac{\partial h_1}{\partial r} + R \frac{\partial h_2}{\partial r} \right) dr + \phi \left(\frac{\partial h_1}{\partial u_0} + R \frac{\partial h_2}{\partial u_0} \right) du_0. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial h_1}{\partial r} + R \frac{\partial h_2}{\partial r} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial h_1}{\partial u_0} + R \frac{\partial h_2}{\partial u_0} = \mu.$$

Después de sustituir las ecuaciones anteriores en (78.54) se sigue que

$$dE = \mu du_0 - \frac{h_2}{(1+r)^2} dr.$$

En otras palabras,

$$-(1+r)^2 \frac{\partial E}{\partial r} = h_2.$$

El valor de h_2 se determina implícitamente mediante $u(h_1, h_2) = u_0$. Es decir, a partir de la función de gasto mínimo se pueden obtener las soluciones del problema de minimización del gasto.

78.27 Relación entre las ecuaciones de Slutsky y las demandas compensadas

Dado que en el problema de gasto mínimo $u(c_1, c_2) = u_0$, se sigue que

$$\left. \frac{\partial c_1}{\partial r} \right|_{u=u_0} = \frac{\partial h_1}{\partial r}.$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} = \frac{\partial h_1}{\partial r} + \frac{c_2}{(1+r)^2} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} - \frac{y_2}{(1+r)} \frac{\partial c_1}{\partial y_2}. \quad (78.55)$$

78.28 Análisis de algunos casos particulares del problema dual

A continuación, se revisan algunos casos particulares del problema dual con funciones de utilidad específicas en la restricción.

78.28.1 Utilidad logarítmica

Considere el problema

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad h_1 + Rh_2 \\ &\text{sujeto a:} \quad \ln h_1 + \frac{1}{1+\rho} \ln h_2 = u_0, \end{aligned} \tag{78.56}$$

donde u_0 es un nivel de utilidad fijo. En este caso, la condición $u_1/u_2 = R^{-1}$ implica

$$h_2 = \frac{1+r}{1+\rho} h_1.$$

Por lo tanto,

$$\ln h_1 + \frac{1}{1+\rho} \ln \left(\frac{1+r}{1+\rho} h_1 \right) + \frac{1}{1+\rho} \ln h_1 = u_0$$

ó

$$h_1 = \exp \left\{ \frac{1+\rho}{2+\rho} u_0 - \frac{1}{2+\rho} \ln \left(\frac{1+r}{1+\rho} \right) \right\}.$$

Por último, la función de gasto mínimo satisface

$$E(u_0, r) = \frac{2+\rho}{1+\rho} \exp \left\{ \frac{1+\rho}{2+\rho} u_0 - \frac{1}{2+\rho} \ln \left(\frac{1+r}{1+\rho} \right) \right\}.$$

78.28.2 Utilidad multiplicativa

Considere el problema

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad h_1 + Rh_2 \\ &\text{sujeto a:} \quad h_1 h_2 = u_0, \end{aligned} \tag{78.57}$$

donde u_0 es un nivel de utilidad fijo. En este caso, la condición $u_1/u_2 = R^{-1}$ implica

$$h_2/h_1 = 1+r.$$

Por lo tanto,

$$h_1 = \sqrt{\frac{u_0}{1+r}}$$

y

$$h_2 = \sqrt{u_0(1+r)}.$$

En este caso,

$$E(u_0, r) = 2 \sqrt{\frac{u_0}{1+r}}. \tag{78.58}$$

78.29 Convertibilidad entre demandas Marshallianas y Hicksianas

En esta sección se establecen las fórmulas que permiten pasar de las demandas Marshallianas a las demandas Hicksianas y viceversa. A partir de las definiciones de demandas ordinarias, c_1 y c_2 , y compensadas, h_1 y h_2 , es evidente que

$$c_1[E(u_0, r), r] = h_1 \quad \text{y} \quad c_2[E(u_0, r), r] = h_2.$$

Asimismo

$$h_1[V(a_1, r), r] = c_1 \quad \text{y} \quad h_2[V(a_1, r), r] = c_2.$$

Así, por ejemplo, si la utilidad es multiplicativa, se tiene que

$$h_1 = \sqrt{\frac{u_0}{1+r}}.$$

De esta manera, a partir de h_1 se obtiene c_1 si u_0 se sustituye por $V(a_1, r) = a_1^2(1+r)/4$. Es decir,

$$c_1 = \sqrt{\frac{a_1^2(1+r)}{4(1+r)}} = \frac{a_1}{2}.$$

78.30 Convertibilidad entre bienestar y gasto

A continuación se establecen las fórmulas que permiten pasar de la función de utilidad indirecta a la función de gasto mínimo y viceversa. La siguiente relación entre $V(a_1, r)$, $E(u_0, r)$, es evidentemente válida:

$$V[E(r, u_0), r] = u_0 \quad \text{y} \quad E[V(a_1, r), r] = a_1.$$

De esta manera, si $E(u_0, r) = 2\sqrt{u_0/(1+r)}$, entonces

$$a_1 = 2\sqrt{\frac{V}{1+r}},$$

así

$$V(a_1, r) = \frac{a_1^2(1+r)}{4},$$

la cual es la función de bienestar económico asociada a una función de utilidad multiplicativa.

78.31 Determinación de tasas de interés

En la presente sección se determina la tasa de interés de equilibrio, r , a la que dos agentes, A y B, están dispuestos a prestar y pedir prestado (bienes) entre ellos. Bajo este esquema propuesto, el prestatario puede transferir consumo de un periodo a otro. Suponga que el consumidor A sólo cuenta con una dotación positiva en el periodo 1, y_1^A , y el consumidor B sólo cuenta con una dotación positiva en el periodo 2, y_2^B . Las funciones de utilidad se eligen de tal manera que ambos consumidores requieran consumir en ambos períodos. En particular, se supone que ambos individuos tienen preferencias logarítmicas. El problema de optimización intertemporal de A está dado por

$$\begin{aligned} & \underset{c_1^A, c_2^A}{\text{Maximizar}} \quad \gamma \ln c_1^A + (1-\gamma) \ln c_2^A, \quad 0 < \gamma < 1, \\ & \text{sujeto a: } y_1^A = c_1^A + \ell, \\ & \quad (1+r)\ell = c_2^A, \end{aligned}$$

donde ℓ es la cantidad del bien presente que A está dispuesto a sacrificar en el periodo 1, con tal de consumir en el futuro, con lo cual su satisfacción será máxima. Observe también que al encontrar la demanda óptima de consumo presente, la decisión ℓ queda automáticamente determinada. El Lagrangeano está dado por

$$\mathcal{L}^A(\lambda, c_1^A, c_2^A) = \gamma \ln c_1^A + (1-\gamma) \ln c_2^A + \lambda \left(y_1^A - c_1^A - \frac{c_2^A}{1+r} \right).$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}^A}{\partial c_1^A} &= \frac{\gamma}{c_1^A} - \lambda = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}^A}{\partial c_2^A} &= \frac{(1-\gamma)}{c_2^A} - \frac{\lambda}{(1+r)} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}^A}{\partial \lambda} &= y_1^A - c_1^A - \frac{c_2^A}{(1+r)} = 0.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$c_2^A = \frac{(1-\gamma)}{\gamma R} c_1^A \quad (78.59)$$

donde $R = 1/(1+r)$. Si se sustituye (78.59) en la restricción presupuestal, se sigue que

$$y_1^A = c_1^A + \frac{(1-\gamma)}{\gamma} c_1^A$$

ó

$$c_1^A = \gamma y_1^A.$$

Para el consumidor B, considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned}&\text{Maximizar}_{c_1^B, c_2^B} \theta \ln c_1^B + (1-\theta) \ln c_2^B, \quad 0 < \theta < 1, \\ &\text{sujeto a: } c_1^B = b, \\ &\quad y_2^B = (1+r)b + c_2^B,\end{aligned}$$

donde b es la cantidad del bien de consumo presente que el consumidor B pedirá prestado. Por supuesto, el consumidor B tiene que sacrificar consumo en el periodo 2 con tal de consumir en el presente. El Lagrangeano ahora es

$$\mathcal{L}^B(\lambda, c_1^B, c_2^B) = \theta \ln c_1^B + (1-\theta) \ln c_2^B + \mu (y_2^B - (1+r)c_1^B - c_2^B).$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1^B} &= \frac{\theta}{c_1^B} - \mu(1+r) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2^B} &= \frac{1-\theta}{c_2^B} - \mu = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= y_2^B - (1+r)c_1^B - c_2^B = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$c_2^B = \frac{(1-\theta)(1+r)}{\theta} c_1^B. \quad (78.60)$$

Si se sustituye (78.60) en la restricción presupuestal de B, se obtiene

$$c_1^B = \theta R y_2^B$$

y

$$c_2^B = (1-\theta)y_2^B.$$

El equilibrio en el mercado de crédito se obtiene cuando ambos consumidores coinciden en las cantidades que desean prestar y pedir prestado de sus dotaciones, es decir, cuando coinciden en la cantidad de bienes que necesitan pedir prestado para vivir en el periodo 1 (en el caso de B) y en la cantidad de bienes que están dispuestos a prestar para transferir su consumo al periodo 2

(en el caso de A). Es decir, la condición de equilibrio está dada por $b = \ell$. Así, bajo la existencia de un solo mercado, el de crédito, se concluye que

$$r = \frac{y_2^B \theta - y_1^A (1 - \gamma)}{y_1^A (1 - \gamma)}$$

donde, por supuesto, para garantizar que $r > 0$, se tiene que cumplir que

$$y_2^B \theta > y_1^A (1 - \gamma).$$

Este mismo resultado se puede obtener partiendo del equilibrio Walrasiano, determinado por la relación

$$y_1^A + y_1^B = c_1^A + c_1^B.$$

Al respecto, es importante mencionar que Marie-Ésprit-Léon Walras (1834-1910), de nacionalidad francesa, es considerado como uno de los más destacados matemáticos y economistas. Walras introdujo por primera vez, en su trabajo “Elements of Pure Economics” (1874), los conceptos de utilidad marginal y equilibrio general.

Ahora bien, después de sustituir las demandas óptimas c_1^A y c_1^B en la expresión anterior se puede concluir que

$$r = \frac{y_2^B \theta - y_1^A (1 - \gamma)}{y_1^A (1 - \gamma)}.$$

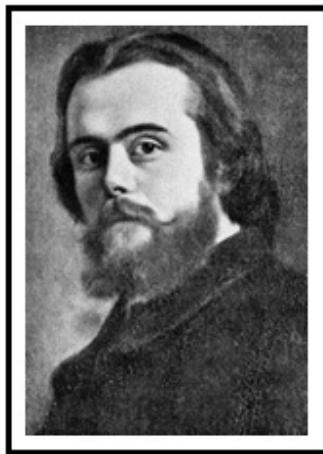
En particular, si $\theta = \gamma = \frac{1}{2}$, la tasa de interés de equilibrio satisface

$$r = \frac{y_2^B - y_1^A}{y_1^A}.$$

Para que $r > 0$, se debe cumplir que

$$y_2^B > y_1^A,$$

lo cual significa que para que pueda existir intercambio entre los consumidores A y B, con las mismas preferencias, la dotación inicial en el periodo 2 de B debe ser mayor que la de A en el periodo 1.



Fuente: www.economyprofessor.com.

Léon Walras (1834-1910).

78.32 Determinación de tasas de interés entre más de dos agentes

En el marco de la sección anterior, suponga ahora que se tienen N_A consumidores del tipo A y N_B consumidores del tipo B. Asimismo, suponga, por simplicidad, que $\theta = \gamma = \frac{1}{2}$, entonces la condición de equilibrio $N_A b = N_B \ell$ conduce a

$$r = \frac{N_B y_2^B - N_A y_1^A}{N_A y_1^A}.$$

Igual que antes, para que $r > 0$, se debe cumplir que

$$N_B y_2^B > N_A y_1^A.$$

Observe que ahora se puede dar intercambio entre los dos grupos de consumidores, tipos A y B, aun cuando la dotación inicial de un agente del tipo B en el periodo 2 sea menor que la dotación de un agente del tipo A en el periodo 1, es decir, $y_2^B < y_1^A$. En efecto, basta que N_B sea lo suficientemente grande para que $N_B y_2^B > N_A y_1^A$.

78.33 Bibliografía sugerida

- Varian H. R. (1992). Microeconomic Analysis. W. W. Norton & Company, New York.
- Mas-Collel, A., M. D. Whinston, and J. R. Green (1995). Microeconomic Theory. Oxford University Press.
- Henderson M. J. and R. E. Quandt (1980). Microeconomic Theory: A Mathematical Approach. McGraw-Hill.
- Venegas-Martínez, F. (2002). "Liberación comercial, distribución del ingreso, capital humano, e imperfecciones del mercado de crédito educativo". *Denarius, Revista de Administración y Economía*, No. 6, pp. 79-102.
- Gutiérrez-Andrade, M., F. Venegas-Martínez y H. M. Bravo-Pérez (2005). "Política Fiscal en el Manejo de los Recursos Hídricos: Un modelo de equilibrio general computable", *Estudios Económicos*, Vol. 20, No. 2, pp. 219-261.

78.34 Ejercicios

78.1 Considere un consumidor intertemporal cuya función de utilidad está dada por $u(c_1, c_2) = \ln(c_1) + \ln(c_2)$. Si la restricción presupuestal de este individuo es $a_1 = c_1 + R c_2$, entonces el Lagrangeano asociado al problema de maximización de utilidad está dado por:

$$\mathcal{L} = \ln(c_1) + \ln(c_2) + \lambda(a_1 - c_1 - R c_2).$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{1}{c_1} - \lambda = 0, \quad \frac{1}{c_2} - \lambda R = 0 \quad \text{y} \quad c_1 + R c_2 = a_1,$$

lo cual implica que $c_1 = R c_2$. Al sustituir la expresión anterior en la restricción presupuestal se tiene

$$c_1 = \frac{a_1}{2}.$$

Por lo tanto,

$$c_2 = \frac{a_1}{2R}.$$

Suponga que las dotaciones del consumidor son de una unidad, es decir, $y_1 = 1$ y $y_2 = 1$, y la tasa de interés es $1/2$, entonces $R = 2/3$ y $a_1 = 5/3$. En consecuencia, $c_1 = 5/6$ y $c_2 = 5/4$. Suponga que la dotación del periodo 1 se duplica, manteniéndose la otra dotación y tasa de interés sin cambios, es decir, $dy_2 = 0$ y $dr = 0$. Encuentre los cambios en los consumos, dc_1 y dc_2 .

Solución: El cambio en el consumo presente se calcula mediante

$$dc_1 = \frac{1}{\Delta} \{ [\lambda R + c_2 (u_{22} - u_{12}R)] dR - (u_{22} - u_{12}R) da_1 \},$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -c_1^{-2} & 0 & -1 \\ 0 & -c_2^{-2} & -R \\ -1 & -R & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_1^2} R^2 \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{6}{5}\right)^2 \\ &= \frac{32}{25}. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} dc_1 &= \frac{25}{32} \left\{ \left[\lambda R + c_2 \left(-\frac{1}{c_2^2} \right) \right] dR - \left(-\frac{1}{c_2^2} \right) da_1 \right\} \\ &= \frac{25}{32} \left[\left(\lambda R - \frac{1}{c_2} \right) dR + \frac{1}{c_2^2} da_1 \right] \\ &= \frac{25}{32} \left[\left(\lambda R - \frac{1}{c_2} \right) dR + \frac{1}{c_2^2} (dy_1 + y_2 dR + R dy_2) \right]. \end{aligned}$$

Recuerde que $\lambda = u_1 = \frac{1}{c_1}$, así

$$dc_1 = \frac{25}{32} \left\{ \left[\frac{1}{c_1} R - \frac{1}{c_2} \right] dR + \frac{1}{c_2^2} (dy_1 + y_2 dR + R dy_2) \right\}.$$

En virtud de que $dy_1 = 1$, $dy_2 = 0$ y $dR = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} dc_1 &= \frac{25}{32} \frac{1}{c_2^2} dy_1 \\ &= \frac{25}{32} \left(\frac{4}{5} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

lo cual significa que el consumidor aumentará en 0.5 unidades su consumo presente si su dotación presente se duplica, manteniéndose sin cambios la dotación en el futuro y la tasa de interés.

78.2 Si $u = c_1^\alpha c_2^\beta$, $\alpha + \beta = 1$. Encuentre las demandas Marshallianas y la función de utilidad indirecta. Con la función de utilidad indirecta encuentre las funciones de demanda utilizando la identidad de Roy. Resuelva el problema de integración, es decir, a partir de las funciones de demanda y la tasa marginal de sustitución encuentre la función de utilidad.

78.3 Considere un consumidor racional que resuelve el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{c_1, c_2} u(c_1, c_2) \\ &\text{sujeto a: } y_1 \geq c_1 + b_1, \\ &\quad y_2 + (1+r)b_1 \geq c_2, \\ &\quad c_1 \geq 0, \\ &\quad c_2 \geq 0, \\ &\quad b_1 \text{ sin restricción en el signo.} \end{aligned}$$

Suponga que en el óptimo $b_1 > 0$ y la primer restricción se alcanza con desigualdad estricta $y_1 > c_1 + b_1$ ¿Qué sucede con los bienes excedentes $y_1 - c_1 - b_1$?

78.4 Resuelva el problema

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{c_1, c_2} \alpha_1 \ln(c_1 - \beta_1) + \alpha_2 \ln(c_2 - \beta_2), \quad c_1 > \beta_1, \quad c_2 > \beta_2, \\ &\text{sujeto a: } a_1 = c_1 + R c_2. \end{aligned}$$

78.5 Considere el problema

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{c_1, c_2} u(c_1, c_2), \quad u_1, u_2 > 0, \\ &\text{sujeto a: } a_1 = c_1 + R c_2, \\ &\quad c_1 > 0, \\ &\quad c_2 > 0. \end{aligned}$$

Demuestre la existencia del multiplicador λ a través del teorema de la función implícita.

Solución: Sea $g(c_1, c_2) = a_1 - c_1 - Rc_2 = 0$, entonces

$$\frac{\partial g}{\partial c_2} = -R < 0.$$

En este caso, el teorema de la función implícita implica que $c_2 = c_2(c_1)$. De hecho,

$$c_2 = c_2(c_1) = \frac{a_1 - c_1}{R}.$$

Observe ahora que $u = u(c_1, c_2(c_1))$ y $g(c_1, c_2(c_1)) = 0$. Si $c_1 = c_1(c_2)$ es óptimo, una condición necesaria es que

$$0 = \frac{du}{dc_1} = u_1 + u_2 \frac{dc_2}{dc_1}.$$

Asimismo,

$$0 = \frac{dg}{dc_1} = g_1 + g_2 \frac{dc_2}{dc_1}$$

ó

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{g_1}{g_2}.$$

Si se sustituye la ecuación anterior en la condición necesaria previamente establecida, se sigue que

$$u_1 + u_2 \left(-\frac{g_1}{g_2} \right).$$

Sea $\lambda = -u_2/g_2$, entonces la expresión anterior se puede reescribir como

$$u_1 + \lambda g_1 = 0.$$

Dado que $g_1 = -1$ y $g_2 = -R$, se concluye que

$$\begin{aligned} u_1 - \lambda &= 0, \\ u_2 - \lambda R &= 0. \end{aligned}$$

78.6 Considere un consumidor racional que resuelve el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar}_{c_1, c_2} u(c_1, c_2), \quad u_1, u_2 > 0, \\ &\text{sujeto a:} \quad a_1 = c_1 + Rc_2, \\ &\quad c_1 > 0, \\ &\quad c_2 > 0. \end{aligned}$$

El Lagrangeano asociado a este problema está dado por:

$$\mathcal{L}(c_1, c_2, \lambda, \mu_1, \mu_2) = u(c_1, c_2) + \lambda (a_1 - c_1 - Rc_2).$$

Muestre que una condición suficiente de un máximo es que

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{1\lambda} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{2\lambda} \\ \mathcal{L}_{1\lambda} & \mathcal{L}_{2\lambda} & 0 \end{vmatrix} > 0.$$

78.7 Sea F tal que $F' > 0$. Considere el problema de programación no lineal

$$\underset{c_1, c_2}{\text{Maximizar}} \quad F(u(c_1, c_2)), \quad u_1, u_2 > 0,$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a: } & a_1 = c_1 + R c_2, \\ & c_1 > 0, \\ & c_2 > 0. \end{aligned}$$

Suponga que u tiene segundas derivadas parciales continuas y es estrictamente cuasicónica. En este caso, $\mathcal{L} = F(u(c_1, c_2)) - \lambda(a_1 - c_1 - R c_2)$. Muestre que

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{1\lambda} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{2\lambda} \\ \mathcal{L}_{1\lambda} & \mathcal{L}_{2\lambda} & \mathcal{L}_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} > 0.$$

Solución: Evidentemente,

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{1\lambda} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{2\lambda} \\ \mathcal{L}_{1\lambda} & \mathcal{L}_{2\lambda} & \mathcal{L}_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} = \frac{(F')^3}{\lambda^2} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

78.8 Calcule los efectos ingreso y sustitución para una función de utilidad cuasilineal.

Solución: Observe que

$$u_1 = 1, \quad u_{11} = 0, \quad u_{12} = 0, \quad u_2 = \frac{1}{c_2}, \quad u_{22} = -\frac{1}{c_2^2} \quad \text{y} \quad u_{21} = 0,$$

de tal manera que $\Delta = 1/c_2^2$. Las condiciones de primer orden conducen a $c_2 = R^{-1}$ y $c_1 = a_1 - 1$. Por lo tanto, $u_1 = 1 = \lambda$. Así, el efecto sustitución satisface

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} \Big|_{u=u_0} = -\frac{\lambda R^3}{\Delta} = -\lambda c_2^2 R^3 = -\lambda R = -R.$$

Asimismo, el efecto ingreso presente es

$$c_2 R^2 \frac{\partial c_1}{\partial y_1} \Big|_{r=r_0} = c_2 R^2 \left(-\frac{1}{\Delta} u_{22} \right) = c_2 R^2 = R.$$

Es importante notar que, en este caso, el efecto ingreso presente compensa el efecto sustitución presente. Por último, el efecto ingreso futuro está dado por:

$$-y_2 R \frac{\partial c_1}{\partial y_2} \Big|_{r=r_0} = -y_2 R(R) = -y_2 R^2.$$

78.9 Obtenga las ecuaciones de Slutsky a través del teorema de la función implícita.

Solución: Sea $F : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned} F(c_1, c_2, \lambda, y_1, y_2, r) &= (f^{(1)}(c_1, c_2, \lambda, y_1, y_2, r), f^{(2)}(c_1, c_2, \lambda, y_1, y_2, r), f^{(3)}(c_1, c_2, \lambda, y_1, y_2, r)) \\ &\equiv (u_1 - \lambda, u_2 - \lambda R, a_1 - c_1 - R c_2), \end{aligned}$$

donde $R = 1/(1+r)$. Suponga que el determinante de la matriz Jacobiana satisface

$$|JF(c_1, c_2, \lambda)| = \left| \frac{\partial(f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)})}{\partial(c_1, c_2, \lambda)} \right| = \begin{vmatrix} f_1^{(1)} & f_1^{(2)} & f_1^{(3)} \\ f_2^{(1)} & f_2^{(2)} & f_2^{(3)} \\ f_\lambda^{(1)} & f_\lambda^{(2)} & f_\lambda^{(3)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

donde

$$f_j^{(i)} = \frac{\partial f^{(i)}}{\partial c_j}, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{y} \quad f_\lambda^{(i)} = \frac{\partial f^{(i)}}{\partial \lambda}, \quad i = 1, 2, 3.$$

El teorema de la función implícita implica que existe $g = (g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)})$ tal que localmente

$$c_1 = g^{(1)}(y_1, y_2, r), \quad c_2 = g^{(2)}(y_1, y_2, r) \quad \text{y} \quad \lambda = g^{(3)}(y_1, y_2, r).$$

Además

$$\begin{pmatrix} g_1^{(1)} & g_1^{(2)} & g_1^{(3)} \\ g_2^{(1)} & g_2^{(2)} & g_2^{(3)} \\ g_\lambda^{(1)} & g_\lambda^{(2)} & g_\lambda^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^{(1)} & f_1^{(2)} & f_1^{(3)} \\ f_2^{(1)} & f_2^{(2)} & f_2^{(3)} \\ f_\lambda^{(1)} & f_\lambda^{(2)} & f_\lambda^{(3)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{y_1}^{(1)} & f_{y_1}^{(2)} & f_{y_1}^{(3)} \\ f_{y_2}^{(1)} & f_{y_2}^{(2)} & f_{y_2}^{(3)} \\ f_r^{(1)} & f_r^{(2)} & f_r^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Si se denotan $c_1 = c_1(y_1, y_2, r)$, $c_2 = c_2(y_1, y_2, r)$, $\lambda = \lambda(y_1, y_2, r)$ y $R = 1/(1+r)$, entonces la expresión anterior se transforma en

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} & \frac{\partial c_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \lambda}{\partial y_1} \\ \frac{\partial c_1}{\partial y_2} & \frac{\partial c_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \lambda}{\partial y_2} \\ \frac{\partial c_1}{\partial r} & \frac{\partial c_1}{\partial r} & \frac{\partial \lambda}{\partial r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & -1 \\ u_{21} & u_{22} & -R \\ -1 & -R & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & R \\ 0 & R^2 \lambda & R^2(c_2 - y_2) \end{pmatrix}.$$

En este caso,

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & -1 \\ u_{21} & u_{22} & -R \\ -1 & -R & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -R^2 & R & u_{22} - Ru_{12} \\ R & -1 & Ru_{11} - u_{21} \\ u_{22} - Ru_{12} & Ru_{11} - u_{21} & u_{11}u_{22} - u_{12}^2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} & \frac{\partial c_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \lambda}{\partial y_1} \\ \frac{\partial c_1}{\partial y_2} & \frac{\partial c_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \lambda}{\partial y_2} \\ \frac{\partial c_1}{\partial r} & \frac{\partial c_1}{\partial r} & \frac{\partial \lambda}{\partial r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Delta}(u_{22} - Ru_{12}) & -\frac{1}{\Delta}(Ru_{11} - u_{12}) & -\frac{1}{\Delta}(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) \\ -\frac{R}{\Delta}(u_{22} - Ru_{12}) & -\frac{R}{\Delta}(Ru_{11} - u_{12}) & -\frac{R}{\Delta}(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) \\ -\frac{\lambda R^3}{\Delta} + R^2 c_2 \frac{\partial c_1}{\partial y_1} - Ry_2 \frac{\partial c_1}{\partial y_2} & \frac{\lambda R^2}{\Delta} + R^2 c_2 \frac{\partial c_1}{\partial y_1} - Ry_2 \frac{\partial c_1}{\partial y_2} & \lambda R^2 \frac{\partial c_1}{\partial y_1} + (c_2 - y_2) R \frac{\partial \lambda}{\partial y_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

78.10 Obtenga las demandas Marshallianas a partir de las Hicksianas cuando la función de utilidad es multiplicativa. Repita el ejercicio para la función de utilidad logarítmica. Recíprocamente, a partir de las demandas Marshallianas obtenga las Hicksianas tanto para la utilidad multiplicativa como para la logarítmica.

78.11 Considere las funciones de utilidad logarítmica y multiplicativa, obtenga las funciones de gasto mínimo a partir de la función de utilidad indirecta y viceversa.

78.12 Resuelva el problema del consumidor racional intertemporal para el caso de tres períodos.

78.13 Considere un consumidor que toma decisiones en un horizonte de planeación $[0, T]$. Subdivide $[0, T]$ en n subintervalos de igual longitud y escriba el problema de un consumidor racional que toma $n+1$ decisiones en los puntos extremos de dichos subintervalos. Tome

el límite cuando el número de subintervalos, n , tiende a ∞ y muestre que el problema se transforma en:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar}_{c_t} \quad & \int_0^T u(c_t) e^{-\rho t} dt \\ \text{sujeto a:} \quad & \int_0^T y_t e^{-rt} dt = \int_0^T c_t e^{-rt} dt. \end{aligned}$$

78.14 Suponga que $y_t = y = \text{constante}$. Sea $a_0 = y/r$. Muestre que si se cumple la condición de transversalidad $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t e^{-At} = 0$, entonces la restricción

$$a_0 = \int_0^\infty c_t e^{-rt} dt,$$

puede ser reescrita como $\dot{a}_t = r a_t - c_t$.

CAPÍTULO 79

EL CONSUMIDOR INTERTEMPORAL DETERMINISTA (II): DECISIONES ECONÓMICAS DIVERSAS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Oferta de trabajo
- Demanda de inversión
- Demanda de saldos monetarios reales
- Decisiones en tiempo continuo

79.1 Introducción

En este capítulo se extiende el modelo del consumidor racional en varias direcciones. Se obtiene la oferta de trabajo y las demandas de inversión y de saldos monetarios reales de un consumidor en el marco de equilibrio intertemporal.

79.2 Oferta de trabajo

En esta sección se estudia el problema de decisión intertemporal entre consumo y ocio. El tratamiento que se dará a este problema es muy simple, pero proporciona los fundamentos microeconómicos necesarios para obtener la oferta de trabajo y las variables que la determinan. La oferta de trabajo se obtiene como el residual del tiempo total disponible y la demanda de ocio (el tiempo que no se dedica al mercado laboral).

Considere un consumidor racional que maximiza su utilidad tanto de un bien de consumo como del ocio (el tiempo que dedica al esparcimiento). En lo que sigue, el índice de satisfacción del consumidor se denotará por, $u(c_1, c_2, \ell_1, \ell_2)$. Por simplicidad, se considera una forma funcional cuasi-lineal:

$$u(c_1, c_2, \ell_1, \ell_2) = c_1 + \frac{1}{1+\rho} \ln(c_2) + \ln(\ell_1) + \frac{1}{1+\phi} \ln(\ell_2),$$

donde ρ y ϕ son las tasas subjetivas de descuento del consumo y del ocio, respectivamente. Así pues, un consumidor racional resuelve el problema:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } c_1 + \frac{1}{1+\rho} \ln(c_2) + \ln(\ell_1) + \frac{1}{1+\phi} \ln(\ell_2) \\ &\text{sujeto a: } N_1 W_1 = P_1 c_1 + B, \\ &\quad N_2 W_2 + B(1+r+\pi) = P_1(1+\pi)c_2, \\ &\quad T_1 = N_1 + \ell_1, \\ &\quad T_2 = N_2 + \ell_2, \end{aligned} \tag{79.1}$$

donde $r + \pi$ es la tasa de interés nominal, B es un título de deuda en términos nominales, T_j es el tiempo total disponible, en el periodo $j = 1, 2$ que se asigna tanto a ocio, ℓ_j , como a trabajo, N_j . Asimismo, p_j y W_j son, respectivamente, el precio del bien y el salario nominal por hora trabajada en el periodo j . Observe que

$$P_2 = P_1(1+\pi),$$

donde π es la tasa de inflación entre los periodos 1 y 2. Las cuatro restricciones del problema de optimización (79.1) se pueden consolidar como:

$$T_1 W_1 + \frac{T_2 W_2}{1+r+\pi} = P_1 c_1 + W_1 \ell_1 + \frac{P_1 c_2}{1+r} + \frac{W_2 \ell_2}{1+r+\pi},$$

donde se ha utilizado

$$(1+r)(1+\pi) \approx 1+r+\pi$$

válida para $r\pi$ suficientemente pequeña. El Lagrangeano asociado al problema de decisión del consumidor se define como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \equiv & c_1 + \frac{1}{1+\rho} \ln(c_2) + \ln(\ell_1) + \frac{1}{1+\phi} \ln(\ell_2) \\ & + \lambda \left(A_1 - P_1 c_1 - W_1 \ell_1 - \frac{P_1 c_2}{1+r} - \frac{W_2 \ell_2}{1+r+\pi} \right), \end{aligned}$$

donde

$$A_1 = T_1 W_2 + \frac{T_1 W_2}{1+r+\pi}$$

y λ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestal-temporal del consumidor. Las condiciones de primer orden para una solución interior están dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell_2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0.$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} 1 - \lambda P_1 = 0, \\ \frac{1}{(1+\rho)c_2} - \lambda P_1 \frac{1}{1+r} = 0, \\ \frac{1}{\ell_1} - W_1 \lambda = 0, \\ \frac{1}{(1+\phi)\ell_2} - \frac{W_2}{1+r+\pi} \lambda = 0, \\ A_1 - P_1 c_1 - W_1 \ell_1 - \frac{P_1 c_2}{1+r} - \frac{W_2 \ell_2}{1+r+\pi} = 0. \end{cases}$$

De las condiciones anteriores se obtienen los siguientes resultados:

$$\ell_1 = \frac{P_1}{W_1}, \quad c_2 = \frac{1+r}{1+\rho}, \quad \ell_2 = \frac{P_1}{W_2} \left(\frac{1+r+\pi}{1+\phi} \right)$$

y

$$c_1 = \frac{A_1}{P_1} - \left(1 + \frac{1}{1+\rho} + \frac{1}{1+\phi} \right).$$

Por supuesto, se supone que

$$\frac{A_1}{P_1} > 1 + \frac{1}{1+\rho} + \frac{1}{1+\phi}.$$

La gran ventaja de utilizar una función de utilidad cuasi-lineal en el consumo es que inmediatamente se determina el valor de equilibrio de λ . Ahora bien, observe que $T_1 = N_1 + \ell_1$, por lo tanto

$$N_1 = T_1 - \left(\frac{W_1}{P_1} \right)^{-1}.$$

Por supuesto, se supone que $T_1 > (W_1/P_1)^{-1}$, se concluye que la oferta de trabajo del consumidor está dada por:

$$N_1 = N_1 \left(\frac{W_1}{P_1} \right) \quad \text{con} \quad N'_1 > 0.$$

79.3 Demanda de inversión

Considere de nuevo el modelo básico de consumo intertemporal de dos períodos en donde se incluye la demanda por inversión. El capital nuevo que se destina a la producción en el primer período se denotará por I_1 . Se supone que $I_0 = 0$, es decir antes del período de análisis el capital es cero. Se supone una tecnología $F(I)$ con $F(0) = 0$, $F'(I) > 0$ y $F''(I) < 0$. En este caso, el problema de decisión del consumidor racional, con posibilidades de inversión, se plantea como:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } c_1 + \frac{1}{1+\rho} \ln(c_2), \\ &\text{sujeto a: } y_1 = c_1 + I_1 + b, \\ &\quad b(1+r) + y_2 + F(I_1) = c_2. \end{aligned}$$

Las dos restricciones del problema anterior se pueden consolidar como:

$$y_1 - I_1 + \frac{y_2 + F(I_1)}{1+r} = c_1 + \frac{c_2}{1+r}.$$

En este caso, el Lagrangeano asociado al problema de maximización de utilidad es

$$\mathcal{L} = c_1 + \frac{1}{1+\rho} \ln(c_2) + \lambda \left(y_1 - I_1 + \frac{y_2 + F(I_1)}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right).$$

La condición de primer orden para una solución interior de la demanda de inversión está dada por:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_1} = -1 + \frac{F'(I_1)}{1+r}.$$

Si, por ejemplo, $F(I_1) = A\sqrt{I_1}$, entonces

$$I_1 = \frac{A^2}{4\lambda^2} \frac{1}{(1+r)^2}.$$

Las condiciones de primer orden para el consumo presente y futuro están dadas por

$$1 = \lambda \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{1+r}{1+\rho}.$$

En consecuencia,

$$I_1 = \left(\frac{A^2}{4} \right) \frac{1}{(1+r)^2}.$$

En vista de que la inversión i , está dada por $i = I_1 - I_0 = I_1$, se obtiene

$$i = i(r), \quad i' < 0.$$

Por otro lado, la demanda del consumo presente satisface

$$c_1 = a_1 + \frac{A^2}{2(1+r)^2} - \frac{1}{1+\rho},$$

donde

$$a_1 = y_1 - I_1 + \frac{y_2}{1+r},$$

para lo cual se supone que

$$a_1 + \frac{A^2}{2(1+r)^2} > \frac{1}{1+\rho}.$$

Observe que el valor presente neto, VPN, del proyecto de inversión es

$$\text{VPN} = \frac{F(I_1)}{1+r} - I_1.$$

La inversión I_1 que maximiza el VPN satisface

$$\frac{F'(I_1)}{1+r} = 1.$$

Es decir, la inversión óptima I_1 cumple con la condición de primer orden. Esta característica del problema de maximización de utilidad es conocida como el teorema de separación de Fischer, el cual establece que para resolver el problema del consumidor-inversionista es posible resolver primero el problema de maximizar el VPN y posteriormente utilizar el nivel de inversión óptimo en un problema de maximización de utilidad que involucra únicamente las decisiones de consumo.

79.4 Demanda de saldos reales monetarios

En esta sección se estudia la demanda de dinero de un consumidor. En este caso, el consumidor obtiene satisfacción del dinero que lleva consigo por sus servicios de liquidez. El traer dinero en la bolsa hace que el individuo se sienta feliz por permitirle comprar bienes cuando quiera.

Es frecuente estudiar la demanda de dinero en términos reales, es decir, en términos de los bienes que el individuo pueda comprar con el efectivo que trae en su cartera. Así, en el marco de un modelo de dos períodos, el consumidor racional además de decidir cuánto consumir en cada periodo, tiene que decidir cuánto dinero demandará en el primer periodo.

Si M_1 es la cantidad nominal de dinero que trae en la bolsa un consumidor, entonces M_1/P_1 representa su poder adquisitivo. Considere un consumidor racional que resuelve el problema:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } \ln(c_1) + \frac{1}{1+\rho} \ln(c_2) + \ln\left(\frac{M_1}{P_1}\right) \\ & \text{sujeto a: } y_1 = c_1 + \frac{M_1}{P_1} + b, \\ & \quad y_2 + b(1+r) + \frac{M_1}{P_2} = c_2. \end{aligned} \tag{79.2}$$

Si ahora se denota $m_1 = M_1/P_1$, las restricciones se conjuntan en

$$a_1 = m_1 + c_1 + \frac{c_2}{1+r} - \frac{m_1}{1+r+\pi} \tag{79.3}$$

con

$$a_1 = y_1 + \frac{1}{1+r}y_2,$$

$$P_2 = P_1(1+\pi) \quad \text{y} \quad (1+r)(1+\pi) \approx 1+r+\pi.$$

El Lagrangeano asociado al problema de decisión del consumidor se define como:

$$\mathcal{L} \equiv \ln(c_1) + \frac{1}{1+\rho} \ln(c_2) + \ln(m_1) + \lambda \left(a_1 - c_1 - \frac{c_2}{1+r} + m_1 \left(1 - \frac{1}{1+r+\pi} \right) \right),$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestal intertemporal. Las condiciones de primer orden para una solución interior están dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_1} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0.$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} \frac{1}{c_1} - \lambda = 0, \\ \frac{1}{(1+\rho)c_2} - \lambda \frac{1}{1+r} = 0, \\ \frac{1}{m_1} - \lambda \left(\frac{r+\pi}{1+r+\pi} \right) = 0, \\ a_1 = c_1 + \frac{c_2}{1+r} + m_1 \left(\frac{r+\pi}{1+r+\pi} \right). \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$c_2 = \frac{1+r}{1+\rho} c_1, \quad m_1 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{r+\pi+1}{r+\pi} \right) = \left(1 + \frac{1}{r+\pi} \right) c_1.$$

Así, a partir de la restricción presupuestal, la cantidad de consumo presente de equilibrio satisface:

$$a_1 = c_1 + \frac{1}{1+\rho} c_1 + c_1 = \left(\frac{3+2\rho}{1+\rho} \right) c_1$$

ó

$$c_1 = a_1 \frac{1+\rho}{3+2\rho}.$$

En consecuencia,

$$m_1 = \left(1 + \frac{1}{r+\pi} \right) \frac{1+\rho}{3+2\rho} \left(y_1 + \frac{y_2}{1+r} \right).$$

En particular, si $y_2 = 0$, entonces

$$m_1 = m_1(y_1, r+\pi) \quad \text{con} \quad \frac{\partial m_1}{\partial y_1} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial m_1}{\partial(r+\pi)} < 0. \quad (79.4)$$

79.5 Dinero en la función de utilidad, tiempo continuo

Una de las formas más simples de obtener la demanda de saldos reales de un consumidor es a través del control óptimo determinista en tiempo continuo. Se supone que el consumidor obtiene utilidad del dinero que mantiene en su bolsillo por sus servicios de liquidez. En este caso, el problema de decisión de un consumidor racional está dado por:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \quad \int_0^{\infty} [\ln(c_t) + \theta \ln(m_t)] e^{-rt} dt \\ &\text{sujeto a: } \dot{m}_t + \dot{b}_t = rb_t - \pi m_t - c_t + y_t, \\ &\quad m_0 \quad \text{y} \quad b_0 \quad \text{conocidos,} \end{aligned} \quad (79.5)$$

donde b_t es un bono que paga una tasa de interés, r , constante y libre de riesgo de incumplimiento, m_t es la tenencia de saldos reales, π es la tasa de inflación, constante, a la cual se deprecian los saldos reales, y_t es el ingreso constante y c_t es el bien genérico de consumo. Si se denota la riqueza real mediante $a_t = m_t + b_t$, la restricción presupuestal se puede escribir como:

$$\dot{a}_t = ra_t - (r+\pi)m_t - c_t + y_t.$$

En este caso, $m_t = M_t/P_t$ donde M_t es la cantidad nominal de dinero en propiedad del consumidor y P_t es el nivel general de precios de la economía. El problema de decisión del consumidor es un problema de control óptimo determinista donde c_t y m_t son las variables de control y a_t es la variable de estado. El Hamiltoniano asociado al problema de control óptimo (79.5) se define mediante

$$\mathcal{H} = \ln(c_t) + \theta \ln(m_t) + \lambda [ra_t - (r+\pi)m_t - c_t + y_t],$$

donde λ (la variable de coestado) es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestal. Las condiciones de primer orden están dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m_t} = 0 \quad \text{y} \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_t} = \dot{\lambda}_t - r\lambda_t.$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} \frac{1}{c_t} - \lambda_t = 0, \\ \frac{\theta}{m_t} - \lambda(r + \pi) = 0, \\ \dot{\lambda}_t = 0. \end{cases}$$

A partir de la segunda y tercera ecuaciones se sigue que

$$\frac{M_t}{P_t} = \frac{\theta}{\lambda} \left(\frac{1}{r + \pi} \right),$$

donde $\lambda_t = \lambda = \text{constante}$. Asimismo, en vista de que el lado derecho de la ecuación anterior sólo contiene parámetros que determinan características de la economía en el modelo, se sigue que la demanda de saldos reales es independiente del tiempo, es decir,

$$\frac{M}{P} = \frac{\theta}{\lambda} \left(\frac{1}{r + \pi} \right).$$

Falta por determinar el multiplicador λ . Note que al sustituir las condiciones de primer orden en la restricción presupuestal se sigue que

$$\dot{a}_t = ra_t - \frac{\theta}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + y_t.$$

Si $y_t = y = \text{constante}$, se tiene que

$$\int_0^\infty (ra_t - \dot{a}_t)e^{-rt} dt = \frac{1 + \theta}{r\lambda} - \frac{y}{r}.$$

Por otro lado, integración por partes del lado izquierdo de la ecuación anterior conduce a:

$$\int_0^\infty (ra_t - \dot{a}_t)e^{-rt} dt = a_0 - \lim_{t \rightarrow \infty} a_t e^{-rt}.$$

Se supone a continuación que la siguiente condición de “no Ponzi game” se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_t e^{-rt} = 0,$$

es decir, el consumidor no puede estar financiando consumo con deuda en forma permanente (no se permiten pirámides). En consecuencia,

$$a_0 + \frac{y}{r} = \frac{1 + \theta}{\lambda},$$

de donde

$$\frac{ra_0 + y}{r(1 + \theta)} = \frac{1}{\lambda},$$

así

$$\frac{M_t}{P_t} = \left(\frac{\theta}{1 + \theta} \right) \frac{a_0 + (y/r)}{(r + \pi)}.$$

Se puede concluir, de la ecuación anterior, que la demanda de saldos reales satisface

$$\frac{M_t}{P_t} = m(y, r + \pi), \quad m_1 > 0, \quad m_2 < 0. \quad (79.6)$$

79.6 Restricción “cash-in advance” y demanda de saldos reales, tiempo continuo

Se supone ahora que se requiere dinero para financiar el consumo. En este caso, el problema de decisión de un consumidor está dado por:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \quad \int_0^\infty \ln(c_t) e^{-rt} dt \\ &\text{sujeto a: } \dot{m}_t + \dot{b}_t = rb_t - \pi m_t - c_t + y_t, \\ &\quad m_t = \alpha c_t \quad (\text{condición “cash-in advance”}), \\ &\quad m_0 \quad \text{y} \quad b_0 \quad \text{conocidos}, \end{aligned} \quad (79.7)$$

donde b_t , r , m_t , π , $y_t = y$ y c_t se definen como en las secciones anteriores. El parámetro α mide el tiempo promedio en el que se llevan a cabo las compras del bien de consumo. Si se define la riqueza real mediante $a_t = m_t + b_t$, la restricción presupuestal se puede escribir como:

$$\dot{a}_t = r a_t - (r + \pi)m_t + c_t + y.$$

El problema de decisión del consumidor es un problema de control óptimo determinista donde c_t y m_t son las variables de control y a_t es la variable de estado. El Hamiltoniano asociado al problema de control óptimo (79.7) se define mediante

$$\mathcal{H} = \ln(c_t) + \lambda [ra_t - (r + \pi)m_t - c_t + y] + \mu(m_t - \alpha c_t).$$

Las condiciones de primer orden satisfacen

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m_t} = 0 \quad \text{y} \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_t} = \dot{\lambda}_t - r\lambda_t.$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} \frac{1}{c_t} - \lambda_t - \mu\alpha = 0, \\ -\lambda_t(r + \pi) + \mu = 0, \\ \dot{\lambda}_t = 0. \end{cases}$$

En consecuencia, $\lambda_t = \lambda = \text{constante}$ y $c_t = c = \text{constante}$, así

$$c = \frac{1}{\lambda[1 + \alpha(r + \pi)]}.$$

Por otro lado, el valor del parámetro λ se determina mediante

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{y}{r} &= \int_0^\infty (ra - \dot{a})e^{-rt} dt \\ &= \int_0^\infty ce^{-rt} dt + \int_0^\infty m(r + \pi)e^{-rt} dt \\ &= \int_0^\infty c[1 + \alpha(r + \pi)]e^{-rt} dt \\ &= \frac{1}{\lambda r}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{M_t}{P_t} = \frac{ra_0 + y}{\alpha^{-1} + r + \pi}.$$

Así,

$$\frac{M_t}{P_t} = m(y, r + \pi), \quad \text{con} \quad m_1 > 0, \quad m_2 < 0.$$

Los efectos de la demanda transaccional (producción) y la demanda especulativa (tasa de interés nominal) coinciden con los encontrados en (79.6).

79.7 Costos de ajuste y demanda de saldos reales en tiempo continuo

A continuación se supone que para financiar el consumo el individuo requiere liquidez. Para ello, el individuo incurre en un costo real de transacción proporcional a la cantidad de bienes, y_t , que compra durante el instante dt , por ejemplo, el costo de los viajes al banco para vender activos. Suponga también que entre mayor sea la cantidad de saldos reales que el individuo mantiene en su bolsillo, el número de viajes al banco es menor, situación que reduce los costos de transacción. Específicamente, se supone que los costos de transacción están dados por

$$C(m_t)dt = \delta \frac{y_t}{m_t} dt, \quad (79.8)$$

donde $\delta > 0$ es una constante. El problema de decisión que resuelve el consumidor es entonces

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \quad \int_0^\infty \ln(c) e^{-rt} dt \\ &\text{sujeto a: } \dot{a}_t = ra_t - (r + \pi)m_t - c_t + y_t - \delta \frac{y_t}{m_t}. \end{aligned}$$

El Hamiltoniano asociado al problema de control óptimo (4.5) se define mediante

$$\mathcal{H} = \ln(c_t) + \lambda \left[ra_t - (r + \pi)m_t - c_t - \delta \frac{y_t}{m_t} \right].$$

La condición de primer orden asociada a m_t es

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m_t} = 0.$$

Equivalentemente,

$$-(r + \pi) + \frac{\delta y_t}{m_t^2} = 0$$

ó

$$m_t = \left(\frac{\delta y_t}{r + \pi} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (79.9)$$

Es decir, $M_t/P_t = m(y, r + \pi)$ con $m_1 > 0$ y $m_2 < 0$.

79.8 Demanda de trabajo en tiempo continuo

La empresa representativa se supone competitiva. La producción, y_t , de la empresa al instante t es determinada por la tecnología:

$$y_t = F(K_t, N_t), \quad (79.10)$$

donde K_t es el stock de capital y N_t es el trabajo. Se supone además que el producto marginal del capital es positivo pero decreciente y que capital y trabajo son complementos en la producción. Esto es,

$$F_K, F_N > 0, \quad F_{KK}, F_{NN} < 0 \quad \text{y} \quad F_{KN} > 0. \quad (79.11)$$

Se supone que la función de producción, F , es homogénea de grado uno en K_t y N_t , es decir,

$$\lambda F(K_t, N_t) = F(\lambda K_t, \lambda N_t), \quad \text{para toda } \lambda > 0. \quad (79.12)$$

En virtud del teorema de Euler sobre funciones homogéneas se sigue que

$$y_t = \frac{\partial F}{\partial K_t} K_t + \frac{\partial F}{\partial N_t} N_t.$$

También, debido a la homogeneidad de grado uno de F ,

$$\frac{\partial}{\partial K} F(K_t, N_t) = \frac{\partial}{\partial \lambda K_t} F(\lambda K_t, \lambda N_t);$$

si se escoge $\lambda = 1/N_t$, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial K_t} F(K_t, N_t) = \frac{\partial}{\partial (K_t/N_t)} F\left(\frac{K_t}{N_t}, 1\right). \quad (79.13)$$

De esta forma, el producto marginal del capital depende solamente de la razón entre capital y trabajo. Similarmente, el producto marginal del trabajo depende sólo de la razón entre capital y trabajo. En esta economía que produce un solo bien multi-propósitos, el capital representa el stock de dicho bien disponible únicamente para la producción.

Si se supone ahora que hay n empresas idénticas en la economía, la producción total, \bar{y}_t , satisface

$$\begin{aligned} \bar{y}_t &= \sum_{i=1}^n y_{it} = \sum_{i=1}^n F(K_{it}, N_{it}) = \sum_{i=1}^n [F_K(K_{it}, N_{it})K_{it} + F_N(K_{it}, N_{it})N_{it}] \\ &= F_K\left(\frac{K_{it}}{N_{it}}, 1\right) \sum_{i=1}^n K_{it} + F_N\left(\frac{K_{it}}{N_{it}}, 1\right) \sum_{i=1}^n N_{it}, \end{aligned} \quad (79.14)$$

ya que el producto marginal depende sólo de la razón K_{it}/N_{it} la cual es igual para todas las empresas. Dicha razón también debe ser igual a $\sum_{i=1}^n K_{it} / \sum_{i=1}^n N_{it}$, por lo tanto,

$$\bar{y} = F_K(K_t/N_t)K_t + F_N(K_t/N_t)N_t, \quad (79.15)$$

donde $K_t = \sum_{i=1}^n K_{it}$ y $N_t = \sum_{i=1}^n N_{it}$. Aplicando de nuevo el teorema de Euler se tiene para la industria que $\bar{y}_t = F(K_t, N_t)$. Note que F_N y F_K son también los productos marginales del trabajo y del capital de cada una de las empresas, razón por la que es suficiente estudiar a la empresa representativa.

79.8.1 Mercado de capital con costos de ajuste

Suponga que existe un mercado de bienes de capital en el que participan las empresas con costos de ajuste en el stock de capital (aumento en el tamaño de planta). En particular, suponga que dichos costos (en bienes por unidad de tiempo) toman la forma

$$C = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{dK_t}{dt} \right)^2, \quad \alpha > 0, \quad (79.16)$$

con esta especificación los costos crecen rápidamente cuando la inversión aumenta. Suponga también que la empresa representativa toma como datos el precio del bien que produce, P_t , y el salario (nominal) del trabajo que contrata, W_t .

El problema de optimización intertemporal que resuelve la empresa representativa consiste en encontrar las demandas de trabajo, N_t , e inversión, i_t , que maximicen el valor presente del flujo de beneficios (nominales) futuros. En otras palabras, la empresa resuelve

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^\infty \left[P_t F(K_t, N_t) - W_t N_t - P_t i_t - P_t \frac{\alpha}{2} i_t^2 \right] e^{-rt} dt, \\ \text{sujeto a:} \quad & \frac{dK_t}{dt} = i_t, \quad K_0 \text{ dado.} \end{aligned} \quad (79.17)$$

Aquí, $P_t F(K_t, N_t)$ es el ingreso por ventas, $W_t N_t$ es el pago de la nómina, $P_t i_t$ representa el costo de adquisición de capital nuevo por unidad de tiempo y r es la tasa real de interés que prevalece en la economía, la cual se supone constante. Si el gobierno emite bonos, que pagan una tasa nominal, y las empresas sólo emiten acciones, entonces bonos y acciones son sustitutos perfectos. Suponga que W_t está indexado a la inflación, $P_t = P_0 e^{\pi t}$, entonces la tasa nominal de interés que pagan los bonos, $r + \pi$, es la apropiada para descontar el flujo de los beneficios futuros. Por lo tanto, el valor presente de dicho flujo es:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[P_0 e^{\pi t} F(K_t, N_t) - W_0 e^{\pi t} N_t - P_0 e^{\pi t} i_t - P_0 e^{\pi t} \frac{\alpha}{2} i_t^2 \right] e^{-(r+\pi)t} dt \\ &= P_0 \int_0^\infty \left[F(K_t, N_t) - w_0 N_t - i_t - \frac{\alpha}{2} i_t^2 \right] e^{-rt} dt, \end{aligned} \quad (79.18)$$

donde $w_0 = W_0/P_0$ es el salario real. Note que (79.18) coincide en esencia con la funcional de (79.17).

El Hamiltoniano en valor presente para el problema (79.17) está dado por

$$\mathcal{H}(N_t, i_t; \lambda) = F(K_t, N_t) - w_0 N_t - i_t - \frac{\alpha}{2} i_t^2 + \lambda_t i_t. \quad (79.19)$$

Las condiciones (necesarias) de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N_t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial i_t} = 0, \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K_t} = \frac{d\lambda_t}{dt} - \lambda r, \quad (79.20)$$

equivalentemente

$$F_N = w, \quad -(1 + \alpha i_t) + \lambda = 0, \quad \frac{d\lambda_t}{dt} = \lambda r - F_K, \quad (79.21)$$

donde $F_K = \partial F / \partial K_t$. La primera ecuación genera la demanda de trabajo, de donde al tiempo $t = 0$,

$$N_0 = N(w_0, K_0), \quad \frac{\partial N_0}{\partial w_0} < 0. \quad (79.22)$$

Al diferenciar la segunda ecuación de (79.21) y sustituir el resultado en la tercera, se tiene

$$\frac{d^2 K_t}{dt^2} - r \frac{dK_t}{dt} + \frac{1}{\alpha} (F_K - r) = 0. \quad (79.23)$$

Para obtener una solución simple de esta ecuación diferencial, se supone que el mercado de trabajo está en equilibrio, es decir, existe w_0 tal que $w_0 = F_N(1, N_t/K_t) = F_N(1, N_t/K_t)$. De lo anterior, se deduce que N_t/K_t es constante y, por lo tanto, F_K es constante. En consecuencia, (79.23) se transforma en una ecuación diferencial con coeficientes constantes y cuya solución está dada por

$$i_t = \frac{dK_t}{dt} = \beta e^{rt} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{F_K - r}{r} \right), \quad (79.24)$$

donde β es una constante por determinar. Si $\beta \neq 0$, entonces los costos de ajuste se tornan no acotados y generaría beneficios negativos. Por lo tanto, $\beta = 0$. Así pues,

$$i = i(r) = \frac{dK_t}{dt} = \frac{1}{\alpha} (q - 1), \quad \frac{\partial i}{\partial r} < 0, \quad (79.25)$$

donde $q = F_K/r$ es la q de Tobin (razón entre los rendimientos de capital y bonos). En la siguiente sección se proporcionará una interpretación a este cociente. Así pues, la demanda de inversión depende en forma inversa de la tasa de interés (costo de oportunidad por invertir en acciones).

79.8.2 Mercado de capitales sin costos de ajuste

En ausencia de costos de ajuste, el objetivo de la empresa representativa es:

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^\infty \left[P_t F(K_t, N_t) - W_t N_t - P_t \frac{dK_t}{dt} \right] e^{-rt} dt. \quad (79.26)$$

Observe que integración por partes del tercer término del integrando de (79.26) conduce a

$$-\int_0^\infty \frac{dK_t}{dt} e^{-rt} dt = K_0 - \lim_{t \rightarrow \infty} K_t e^{-rt} - \int_0^\infty r K_t e^{-rt} dt. \quad (79.27)$$

Si se supone que $\lim_{t \rightarrow \infty} K_t e^{-rt} = 0$ y $P_t = P_0 e^{\pi t}$, $r > \pi$, entonces el problema de optimización se transforma en

$$\text{Maximizar} \quad \frac{P_0 K_0}{r - \pi} + \int_0^\infty [P_t F(K_t, N_t) - W_t N_t - P_t r K_t] e^{-rt} dt. \quad (79.28)$$

El Lagrangeano de este problema de cálculo de variaciones está dado por

$$\mathcal{L}(K_t, N_t) = F(K_t, N_t) - w_t N_t - r K_t, \quad (79.29)$$

donde $w_t = W_t / P_t$. Las condiciones necesarias de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = 0, \quad (79.30)$$

lo cual lleva a

$$F_K = r \quad \text{y} \quad F_N = w_t, \quad (79.31)$$

es decir, el producto marginal de cada factor es igual a su precio (costo marginal). Observe que (79.31) es un sistema simultáneo de dos ecuaciones en K_t y N_t cuando r y w_t se toman como datos. Las soluciones son las demandas óptimas de capital y trabajo.

79.8.3 En ausencia de un mercado de capital

Se supone que a la empresa representativa le pertenece el stock de bienes de capital K y que dicho stock es predeterminado en cada instante. Se puede también pensar que el capital es completamente especializado para cada empresa y, por lo tanto, no existe la oportunidad de vender, comprar o rentar capital entre empresas. En este caso, la empresa resuelve:

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^\infty [P_t F(K_t, N_t) - W_t N_t] e^{-rt} dt. \quad (79.32)$$

El Lagrangeano de este problema es:

$$\mathcal{L}(K_t, N_t) = F(K_t, N_t) - w_t N_t \quad (79.33)$$

y, en este caso, la condición de primer orden está dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = 0, \quad (79.34)$$

equivalentemente

$$F_N = w_t, \quad (79.35)$$

lo cual genera la típica demanda de trabajo.

Si, en ausencia de un mercado de capitales, la empresa representativa emite acciones para financiar la adquisición de capital nuevo y paga dividendos de la utilidad que obtiene, entonces el valor nominal de las acciones es

$$V = \int_0^\infty [P_t F(K_t, N_t) - W_t N_t] e^{-rt} dt. \quad (79.36)$$

Si se supone que los beneficios $P_t F(K_t, N_t) - W_t N_t$ permanecen constantes a través del tiempo, entonces (79.28) se puede escribir como (vía el teorema de Euler)

$$V = \frac{P_t F(K_t, N_t) - W_t N_t}{r} = \frac{P_t F_K K_t}{r} = P_t q K_t. \quad (79.37)$$

Asimismo, observe que si P_a denota el precio de una acción y $P_t \Pi_t$ son los dividendos que paga la empresa, donde $\Pi_t = y_t + w_t N_t$ representa el beneficio real neto al instante t , entonces

$$P_a = \int_0^\infty \frac{P_t \Pi_t}{n} e^{-rt} dt,$$

donde n es el número de acciones. Si, además, se supone que el pago de dividendos $P_t \Pi_t = P \Pi$ se mantiene constante en el tiempo, se encuentra que

$$P_a = \frac{P \Pi}{rn}.$$

Al tomar ahora en cuenta el teorema de Euler, se obtiene $\Pi_t = y_t + w_t N_t = F_K K_t$, de donde el valor nominal de todas las acciones está dado por

$$V = P_a n = \frac{P \Pi}{r} = P \frac{F_K K}{r} = P q K,$$

donde

$$q = \frac{V}{PK} = \frac{F_K}{r}.$$

Observe que q es también la razón entre el valor nominal de las acciones que emite la empresa y el costo de remplazo del capital PK .

79.9 Bibliografía sugerida

- McCafferty, S. (1990). Macroeconomic Theory. Harpercollins College Div.
 Sargent, T. J. (1987). Macroeconomic Theory. Academic Press, San Diego, California.
 Varian, H. R. (1992). Microeconomic Analysis. W. W. Norton & Company, New York.
 Venegas-Martínez, F. (1999). "Crecimiento endógeno, dinero, impuestos y deuda externa." *Investigación Económica*, Vol. 59, No. 229, pp. 15-36.

79.10 Ejercicios

79.1 Obtenga la oferta de trabajo con una función de utilidad de la forma

$$u(c_1, c_2, \ell_1, \ell_2) = \ln(c_1) + \frac{1}{1+\rho} \ln(c_2) + \ln(\ell_1) + \frac{1}{1+\phi} \ln(\ell_2).$$

Discuta los resultados.

79.2 Obtenga los efectos ingreso y sustitución de la demanda de saldos reales $m_1 = m_1(y_1, R)$.

79.3 Considere un individuo con vida infinita o, alternativamente, una familia cuyos padres se preocupan por sus hijos, nietos y demás descendientes. Suponga que el individuo maximiza el valor presente de su utilidad al tiempo $t = 0$ (el presente),

$$\int_0^\infty [u(c_t - v(N_t))] e^{-\delta t} dt,$$

donde u y v son funciones con segundas derivadas continuas ($u', v' > 0$, $u'' < 0$ y $v'' > 0$). También, se supone que u satisface

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = \infty,$$

esto es, no hay cantidad positiva de consumo u ocio que sacie (harte) al individuo y raciones pequeñas de consumo u ocio exacerban el deseo del individuo, esto elimina la posibilidad de soluciones de esquina. El parámetro δ es la tasa subjetiva de sustitución temporal (o de descuento). Un valor pequeño de δ dirá que el individuo pondera más el consumo en el presente que en el futuro, es decir, el individuo está ansioso por consumir. La tasa de interés r permanecerá constante. Ahora bien, puesto que la tenencia de dinero tiene un costo $-\pi$ y no paga interés, el individuo tiene incentivo a mantener el mínimo posible de dinero. Con el propósito de financiar consumo, el individuo requiere liquidez. Suponga que para ello incurre en un costo real de transacción γ (viaje al banco), independientemente del monto de los activos que el individuo vende. Suponga que la frecuencia de transacciones es $1/\phi$, es decir, el individuo vende activos cada ϕ unidades de tiempo. Así pues, las transacciones en el mercado de activos ocurren periódicamente. Suponga que el individuo compra y bienes por unidad de tiempo, en forma continua, y que al principio de cada periodo el individuo posee $y\phi$ unidades monetarias y se le terminan al concluir el periodo. El valor medio de saldos monetarios reales que mantiene el individuo está dado por

$$\frac{M_t}{P_t} = \frac{1}{2}y_t\phi,$$

donde M_t es la cantidad nominal de dinero. El costo total de transacciones por unidad de tiempo es entonces

$$C = \frac{\gamma}{\phi}.$$

En consecuencia,

$$C = \alpha \frac{y_t}{m_t},$$

donde $\alpha = \gamma/2$. La riqueza (financiera) real del individuo se define como

$$a_t \equiv b_t + k_t + m_t,$$

donde b_t , es el stock de bonos, en términos reales, emitidos por el gobierno, k_t =capital físico y $m_t = M_t/P_t$. Para que coexistan bonos gubernamentales y acciones, en un ambiente de certidumbre, es necesario que ambos paguen el mismo rendimiento. La evolución de la riqueza está caracterizada por

$$\begin{aligned} \frac{da_t}{dt} &= rb_t + rk - \pi m_t + w_t N_t - c_t - \tau_t - \alpha \frac{y_t}{m_t} \\ &= ra_t - im_t + w_t N_t - c_t - \tau_t - \alpha \frac{y_t}{m_t}, \end{aligned}$$

donde i es la tasa nominal de interés, $w_t = W_t/P_t$ es el salario real, W_t es el salario nominal, c_t es el consumo y τ_t es un impuesto de suma fija. El individuo desea encontrar c_t , N_t y m_t que resuelvan:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^\infty [u(c_t - v(N_t))] e^{-\delta t} dt, \\ \text{sujeto a:} \quad & \frac{da_t}{dt} = ra_t - im_t + w_t N_t - c_t - \tau_t - \alpha \frac{y_t}{m_t}. \end{aligned}$$

Determine las demandas de consumo y saldos reales y la oferta de trabajo. ¿Qué variables determinan el consumo en $t = 0$? Incorpore decisiones de importación y exportación en el problema anterior.

Solución: El Hamiltoniano en valor presente se define como:

$$H(c_t, N_t, m_t; a_t, \lambda_t) = u(c_t - v(N_t)) + \lambda_t \left[ra_t - im_t + w_t N_t - c_t - \tau_t - \alpha \frac{y_t}{m_t} \right].$$

Las variables de control son c_t , N_t y m_t . La variable de estado es a_t y la variable de co-estado es λ_t . Las condiciones de primer orden (necesarias) son:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial N_t} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial m_t} = 0, \quad -\frac{\partial H}{\partial a_t} = \frac{d\lambda}{dt} - \lambda_t \delta,$$

lo que conduce a

$$u' = \lambda, \quad h' = w_t, \quad i = \alpha \frac{y_t}{m_t^2}, \quad \lambda = \lambda_0 e^{(\delta-r)t},$$

donde λ_0 es una constante por determinar. Por lo tanto, $h' = w_t$, se sigue que

$$\frac{dN^s(w_t)}{dw_t} = \frac{1}{h''} > 0,$$

aquí N^s denota la oferta de trabajo, la cual depende en forma directa del salario real w_t . Así, la demanda por saldos reales está dada por

$$m_t^d = \left(\frac{\alpha y_t}{r + \pi} \right)^{\frac{1}{2}},$$

la cual depende en forma directa del ingreso y_t e inversa de la tasa de interés nominal. Asimismo, de las ecuaciones anteriores se sigue que

$$c_t = \frac{e^{(r-\delta)t}}{\lambda_0} + h(N_t).$$

Si se hace también el siguiente supuesto sobre la condición de transversalidad (o condición “no Ponzi game”):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_t e^{-rt} = 0,$$

se elimina la posibilidad de que el individuo se endeude indefinidamente pagando intereses con más deuda. Por otra parte, integración por partes conduce a

$$\int_0^\infty \left(r a_t - \frac{da}{dt} \right) e^{-rt} dt = a_0 - \lim_{t \rightarrow \infty} a_t e^{-rt},$$

se tiene entonces que

$$\frac{1}{\delta \lambda_0} = a_0 + \int_0^\infty \left(w_t N_t - i m_t - \tau_t - \alpha \frac{y_t}{m_t} - h(N_t) \right) e^{-rt} dt.$$

Este resultado lleva a que

$$c_t = h(N_t) + \delta e^{(r-\delta)t} \left[a_0 + \int_0^\infty \left(w_t N_t - i m_t - \tau_t - \alpha \frac{y_t}{m_t} - h(N_t) \right) e^{-rt} dt \right].$$

Si, también, se supone que los mercados de trabajo y dinero están en equilibrio, esto es, existe w^* tal que $w^* = h(N^*)$ y $N^s(w^*) = N^d(w^*)$ y existe m^* tal que $m^* = M^s/P$, donde M^s es la oferta de dinero. Si $k_t \equiv k_0$, $b_t \equiv b_0$ y el nivel general de precios, P_t , y los impuestos en términos reales, τ_t , permanecen constantes a través del tiempo, entonces la trayectoria óptima de consumo se reduce a

$$c_t = h(N^*) + \frac{\delta}{r} e^{(r-\delta)t} \left[r(b + m^* + K)w^*N^* - im^* - \tau - \alpha \frac{y}{m^*} - h(N^*) \right].$$

Finalmente, si se define el ingreso disponible como

$$y_d = y + rb - \tau$$

donde

$$y = w^*N^* + rK$$

y se evalúa el consumo en $t = 0$, se obtiene

$$c_0 = \frac{r - \delta}{r} h(N^*) + \frac{\delta}{r} \left[y_d - \alpha \frac{y}{m^*} \right].$$

Si los costos de transacción, $\alpha y/m^*$, y la desutilidad del trabajo, $h(N^*)$, son relativamente pequeños con respecto a la componente del ingreso disponible, se observa que c_0 depende directamente del ingreso e inversamente de la tasa real de interés.

CAPÍTULO 80

MODELOS MACROECONÓMICOS DETERMINISTAS DE TASAS DE INTERÉS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Ecuaciones del modelo macroeconómico clásico
- Sistema IS-LM
- Determinación de la tasa de interés de equilibrio
- Ejercicio de política industrial
- Ejercicio de política fiscal expansiva
- Ejercicio de política monetaria expansiva

80.1 Introducción

En este capítulo se estudia el modelo macroeconómico clásico para una economía cerrada. Aunque el modelo es sencillo en su estructura, permite ilustrar de manera clara cómo se formulan las recomendaciones en materia de política económica a partir de un modelo matemático y un conjunto de supuestos.

80.2 Modelo macroeconómico clásico

A continuación se establece el modelo macroeconómico clásico en donde la economía es grande (fijadora de precios) y cerrada. El modelo consiste de varias reglas de comportamiento de los agentes económicos (unidades familiares y empresas), una definición sobre la forma de producir bienes mediante la combinación de insumos y una identidad que garantiza el equilibrio en el mercado de bienes. Consideré el siguiente modelo:

$$y = F(K, N), \quad F_N > 0, \quad F_K > 0, \quad F_{NN} < 0, \quad F_{KK} < 0, \quad F_{NK} > 0; \quad (80.1)$$

$$F_N(K, N) = \frac{W}{P}; \quad (80.2)$$

$$N = N\left(\frac{W}{P}\right), \quad N' > 0; \quad (80.3)$$

$$i = i(r), \quad i' < 0; \quad (80.4)$$

$$c = c(y - \tau, r), \quad 0 < c_1 < 1, \quad c_2 < 0; \quad (80.5)$$

$$y = c + i + g; \quad (80.6)$$

$$\frac{M}{P} = m(y, r + \pi), \quad m_1 > 0, \quad m_2 < 0. \quad (80.7)$$

La ecuación (80.1) indica que los bienes disponibles en esta economía se producen mediante la combinación de dos insumos: capital y trabajo. La función de producción es del tipo neoclásica, es decir, presenta productos marginales positivos, pero decrecientes. Los dos insumos se suponen complementos en producción. Se supone, además, que si ambos factores aumentan en la misma proporción, entonces el producto aumenta en exactamente dicha proporción. Esto se expresa en términos más precisos como sigue:

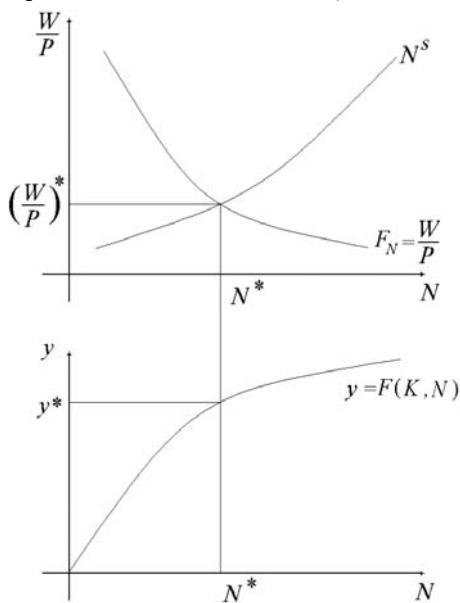
$$F(\lambda K, \lambda N) = \lambda y \quad \text{para toda } \lambda > 0.$$

La ecuación (80.2) especifica la demanda de trabajo por parte de la empresa. En este caso, el valor de los bienes producidos, por un incremento de la mano de obra en una unidad, es suficiente para pagarle al factor dicha unidad. La ecuación (80.3) establece que la oferta de trabajo del consumidor depende directamente del salario real, es decir, del poder adquisitivo que le proporciona el salario nominal. Así, los consumidores están dispuestos a incrementar las horas de trabajo a cambio de un mayor salario real. La ecuación (80.4) expresa que la oferta de inversión por parte de los consumidores hacia las empresas aumenta cuando la tasa de interés real que pagan los bonos que emite el gobierno para financiar su gasto disminuye y viceversa. La ecuación (80.5) señala que ante un aumento en el ingreso disponible (el ingreso después de impuestos de suma fija), la demanda de bienes de consumo aumenta. Asimismo, (80.5) indica que un aumento en la tasa de interés conduce a una reducción en el consumo presente, a fin de incrementarlo en el futuro. En otras palabras, el costo de oportunidad del consumo presente es la tasa de interés, o bien la tasa de interés es el precio que el consumidor tiene que pagar para trasladar consumo presente al futuro. La ecuación (80.6) es la identidad de la renta nacional. Al lado derecho de (80.6) se le conoce como demanda agregada y especifica los diferentes fines a que se destinan los bienes producidos. Por último, la ecuación (80.7) determina la demanda de saldos reales. El primer argumento de la función define la demanda transaccional, es decir, si el número de bienes aumenta entonces la cantidad de dinero necesario para llevar a cabo las transacciones aumenta. El segundo argumento indica que el costo de oportunidad de mantener saldos reales es la tasa nominal de interés.

80.3 Equilibrio en el modelo macroeconómico neoclásico

En el sistema de ecuaciones definido por (80.1)-(80.7) se consideran como variables endógenas a y , N , W/P , i , P , c y r , y como variables exógenas a K , τ , M y π . De esta manera, se cuenta con un sistema de siete ecuaciones con siete incógnitas (las variables denominadas como endógenas). Es importante destacar que el cociente W/P es una sola variable y, por lo tanto, no debe ser relacionada con el denominador, la cual es otra variable endógena.

A partir del subsistema que forman las ecuaciones (80.1), (80.2) y (80.3) se determinan el salario real y la cantidad de trabajo en equilibrio en el mercado laboral, así como el nivel de producción. En efecto, dado que el capital K es una variable pretederminada, las ecuaciones (80.2) y (80.3) pueden resolverse en W/P y N , ya que en este caso se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas W/P y N . Si las soluciones de estas dos ecuaciones se denotan mediante $(W/P)^*$ y N^* , entonces el nivel de producción queda automáticamente determinado a través de la ecuación (80.1). De esta manera, $y^* = F(K, N^*)$. En otras palabras, el equilibrio del mercado laboral determina el nivel de producción de la economía, véase al respecto la Gráfica 80.1.



Gráfica 80.1 Equilibrio en el mercado de trabajo y determinación del nivel de producción de equilibrio.

Una vez que se ha determinado la producción de equilibrio, y^* , ésta se sustituye en las ecuaciones (80.4) y (80.5) en (80.6) de tal manera que

$$y^* = c(y^* - \tau, r) + i(r) + g, \quad (80.8)$$

la cual es una ecuación implícita en la variable r . La ecuación (80.8) se puede resolver en r y dicha solución se denotará mediante r^* . A partir de esta tasa de interés de equilibrio, r^* , se determinan la inversión y el consumo a través

$$i^* = i^*(r^*) \quad \text{y} \quad c^*(y^* - \tau, r^*).$$

Por último, los valores de equilibrio y^* y r^* se sustituyen en (80.7), de tal suerte que el precio de equilibrio está dado por:

$$P^* = \frac{M}{m(y^*, r^* + \pi)}, \quad (80.9)$$

con lo cual queda determinado el equilibrio de la economía.

80.4 Curvas IS (Inversión-Ahorro), LM (Liquidez-Dinero) y DA (Demanda Agregada)

En esta sección se estudian tres curvas fundamentales asociadas con la determinación del equilibrio general. La sustitución de (80.4) y (80.5) en (80.6) conduce a la ecuación

$$y = c(y - \tau, r) + i(r) + g, \quad (80.10)$$

la cual puede ser vista como una relación entre y y r , el lugar geométrico que define (80.10) recibe el nombre de curva IS por sus siglas en inglés “Investment-Savings”, ya que una forma equivalente de escribir (80.10) es

$$y - c(y - \tau, r) = i(r) + g.$$

El lado izquierdo es por definición el ahorro, el lado derecho es la inversión más el gasto de gobierno. La pendiente de la curva IS se calcula mediante la diferenciación total de (80.10). Es decir,

$$(1 - c_1)dy \Big|_{IS} = (c_2 + i')dr + dg \quad (80.11)$$

donde $c_1 = \partial c / \partial y$ y $c_2 = \partial c / \partial r$. De esta manera, si $dg = 0$

$$\frac{\partial y}{\partial r} \Big|_{IS} = \frac{c_2 + i'}{1 - c_1} < 0, \quad (80.12)$$

es decir, en un sistema de ejes coordenados (y, r) , la curva IS tiene pendiente negativa. Esta curva se desplaza cuando hay cambios en g (o en τ). Por otro lado, la demanda de saldos reales, suponiendo por un momento que el nivel general de precios es constante (de hecho lo es y es igual a P^*), es una función de y y r y su lugar geométrico es llamado la curva LM, de sus siglas en inglés “Liquidity-Money”. En este caso, la diferencial total de (80.7) lleva a la siguiente ecuación:

$$d\left(\frac{M}{P^*}\right) = m_1 dy + m_2 dr,$$

donde $m_1 = \partial m / \partial y$, $m_2 = \partial m / \partial r$ y P^* es el precio de equilibrio determinado en la sección anterior. Por lo tanto, la pendiente de la curva LM está dada por

$$\frac{\partial y}{\partial r} \Big|_{LM} = -\frac{m_2}{m_1} > 0. \quad (80.13)$$

Es decir, en un sistema de ejes coordinados (y, r) , la curva LM tiene pendiente positiva y se desplaza cuando hay cambios en M/P^* (o en π). Finalmente, al conjuntar las ecuaciones correspondientes a las curvas IS y LM para eliminar r , se puede obtener una relación entre y y P , la

cual será llamada demanda agregada y denotada mediante DA. A fin de obtener la pendiente de la demanda agregada, se despeja dr en LM, de tal manera que

$$\left. dr \right|_{LM} = -\frac{m_1}{m_2} dy + \frac{1}{m_2} d\left(\frac{M}{P}\right) \quad (80.14)$$

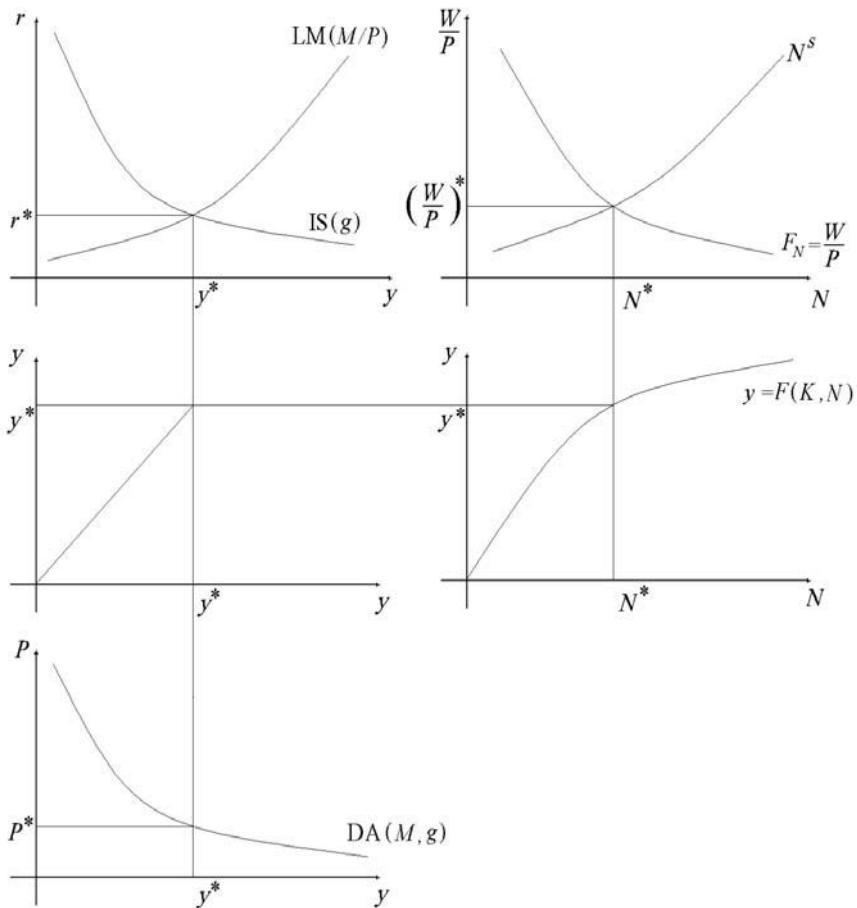
y se sustituye en (80.11), de tal manera que

$$\left(1 - c_1 + \frac{(c_2 + i')m_1}{m_2}\right) dy \Big|_{DA} = \frac{c_2 + i'}{m_2} \left(\frac{PdM - MdP}{P^2}\right) \quad (80.15)$$

Por lo tanto,

$$\left. \frac{\partial y}{\partial P} \right|_{DA} = -\frac{M(c_2 + i')}{P^2((1 - c_1)m_2 + (c_2 + i')m_1)} < 0, \quad (80.16)$$

cuando $dM = 0$. Así, en un sistema de ejes coordenados (y, P) , la curva DA tiene pendiente negativa y se desplaza cuando hay cambios en M (o en g, τ, π). La Gráfica 80.2 muestra el mecanismo a través del cual la economía alcanza su equilibrio.



Gráfica 80.2 Equilibrio en el modelo macroeconómico clásico.

80.5 Estática comparativa en el modelo macroeconómico clásico

En esta sección se llevan a cabo ejercicios de estática comparativa cuando se presenta un cambio en el acervo de capital, el gasto de gobierno y la oferta monetaria.

80.5.1 Efectos en el equilibrio por un cambio permanente en el acervo de capital

Con el propósito de examinar los efectos de un incremento en el acervo disponible de capital en el equilibrio de la economía, considere las diferenciales totales de (80.1), (80.2) y (80.3):

$$dy = F_K dK + F_N dN \quad (80.17)$$

$$F_{NK} dK + F_{NN} dN = d\left(\frac{W}{P}\right) \quad (80.18)$$

y

$$dN = N' d\left(\frac{W}{P}\right). \quad (80.19)$$

A partir de (80.18) y (80.19), se sigue que

$$F_{NK} dK + F_{NN} dN = \frac{1}{N'} dN.$$

Si se factoriza dN en la última expresión, se tiene que

$$\left(\frac{1}{N'} - F_{NN}\right) dN = F_{NK} dK.$$

Por lo tanto,

$$\frac{dN}{dK} = \frac{N' F_{NK}}{1 - F_{NN} N'} > 0. \quad (80.20)$$

Es decir, cuando el acervo de capital aumenta, la cantidad de trabajo de equilibrio aumenta. Ahora bien, el efecto sobre el salario de equilibrio por un incremento en K se obtiene a partir de (80.18) y (80.19), lo cual conduce a

$$d\left(\frac{W}{P}\right) = \frac{F_{NK}}{1 - F_{NN} N'} dK. \quad (80.21)$$

Así, ante un aumento en el capital, el salario de equilibrio se incrementa. Por otro lado, si se sustituye (80.19) en (80.17), se obtiene que

$$\begin{aligned} dy &= F_K dK + F_N \left(\frac{N' F_{NK}}{1 - F_{NN} N'} \right) dK \\ &= \left(F_K + \frac{F_N N' F_{NK}}{1 - F_{NN} N'} \right) dK. \end{aligned} \quad (80.22)$$

En consecuencia,

$$\frac{dy}{dK} = F_K + \frac{F_N N' F_{NK}}{1 - F_{NN} N'} > 0, \quad (80.23)$$

lo cual significa que, si el acervo de capital aumenta, la producción de equilibrio aumenta.

El análisis anterior también puede llevarse a cabo a través de un tratamiento matricial. Consideré de nuevo las ecuaciones (80.17), (80.18) y (80.19) escritas en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} -F_N & 0 & 1 \\ F_{NN} & -1 & 0 \\ 1 & -N' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dN \\ d(W/P) \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_K \\ -F_{NK} \\ 0 \end{pmatrix} dK.$$

El determinante está dado por:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -F_N & 0 & 1 \\ F_{NN} & -1 & 0 \\ 1 & -N' & 0 \end{vmatrix} = 1 - N'F_{NN}.$$

Si se aplica la regla de Cramer y se resuelve, por ejemplo, para dN , se tiene que

$$dN = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} F_K & 0 & 1 \\ -F_{NK} & -1 & 0 \\ 0 & -N' & 0 \end{vmatrix} = \frac{F_{NK}N'}{1 - F_{NN}N'} dK.$$

A continuación se verá qué sucede con la tasa de interés, la inversión y el consumo de equilibrio cuando $dK > 0$. Se supone, por el momento, que $d\tau = 0$ y $dg = 0$. A partir de (80.11), se sigue que

$$dr \Big|_{IS} = \frac{1 - c_1}{c_2 + i'} dy = \frac{1 - c_1}{c_2 + i'} \left(F_K + \frac{N'F_N F_{NK}}{1 - F_{NN}N'} \right) dK, \quad (80.24)$$

de donde

$$\frac{dr}{dK} \Big|_{IS} = \frac{1 - c_1}{c_2 + i'} \left(F_K + \frac{N'F_N F_{NK}}{1 - F_{NN}N'} \right) < 0. \quad (80.25)$$

Es decir, si el acervo de capital aumenta, entonces la tasa de interés disminuye. De esta manera, el nuevo punto de equilibrio se traslada hacia abajo sobre la curva IS.

Si se considera ahora a la curva LM y se supone por el momento que M/P permanece constante y que la tasa de inflación permanece constante, es decir, $d\pi = 0$, entonces (80.13) conduce a

$$dr \Big|_{LM} = -\frac{m_1}{m_2} dy. \quad (80.26)$$

Si ahora se sustituye (80.22) en (80.26), se tiene

$$dr \Big|_{LM} = -\frac{m_1}{m_2} dy = -\frac{m_1}{m_2} \left(F_K + \frac{N'F_N F_{NK}}{1 - F_{NN}N'} \right) dK,$$

así

$$\frac{dr}{dK} \Big|_{LM} = -\frac{m_1}{m_2} \left(F_K + \frac{N'F_N F_{NK}}{1 - F_{NN}N'} \right) > 0. \quad (80.27)$$

Por lo tanto, si el acervo de capital aumenta, entonces la tasa de interés aumenta. Así, la curva LM se desplaza hacia arriba.

Por último, considere la curva DA. A partir de la ecuación (80.16) y el supuesto $dM = 0$ y $d\pi = 0$, se sigue que

$$dP \Big|_{DA} = -\frac{P^2}{M} \left(m_1 + m_2 \left(\frac{1 - c_1}{c_2 + i'} \right) \right) dy. \quad (80.28)$$

De esta manera, a partir de (80.22) se cumple que

$$\frac{dP}{dK} \Big|_{DA} = -\frac{P^2}{M} \left(m_1 + m_2 \left(\frac{1 - c_1}{c_2 + i'} \right) \right) \left(F_K + \frac{F_N N' F_{NK}}{1 - F_{NN}N'} \right) < 0. \quad (80.29)$$

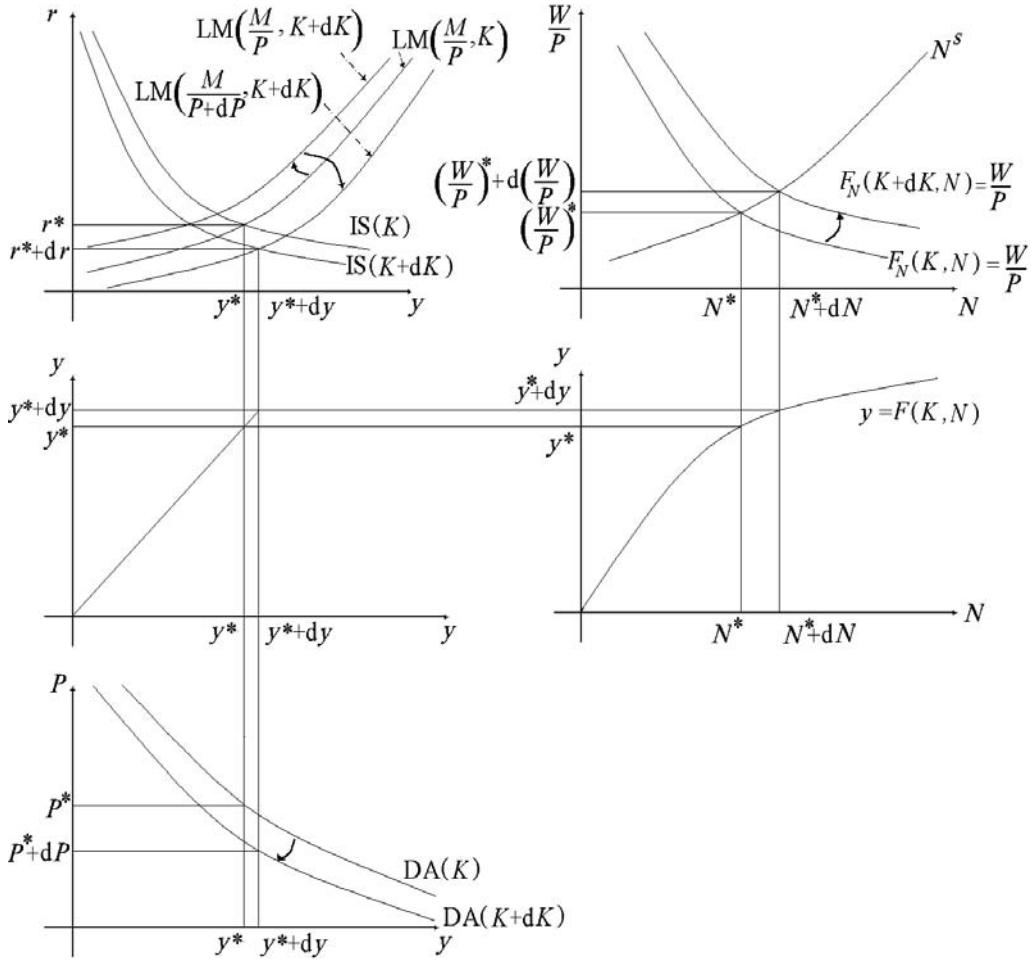
Es decir, un aumento en el capital, disminuye el nivel general de precios. Así, la curva DA se desplaza hacia abajo. Esto, a su vez, genera un desplazamiento de la curva LM hacia abajo. En efecto, a partir de (80.14) y (80.27) con $dM = 0$, se sigue que

$$dr \Big|_{LM} = -\frac{M}{m_2 P^2} dP - \frac{m_1}{m_2} dy.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial r}{\partial P} \Big|_{LM} = -\frac{M(1 - c_1)}{P^2(m_1(c_2 + i') + m_2(1 - c_1))} < 0. \quad (80.30)$$

Es decir, LM se traslada hacia abajo. La Gráfica 80.3 muestra todos los efectos en el equilibrio debidos a un incremento en la cantidad de capital. Como puede observarse, en el nuevo equilibrio, hay aumentos en N , W/P y y y disminuciones en r y P .



Gráfica 80.3 Efectos en el equilibrio por un cambio en el acervo de capital.

80.5.2 Política Fiscal

Un ejercicio de estática comparativa de política fiscal consiste en estudiar el efecto que un cambio en la tasa impositiva, $d\tau$, tiene sobre el equilibrio. Sin embargo, es frecuente referirse a ejercicios de política fiscal cuando se presenta un aumento en el gasto, $dg > 0$. En lo que sigue se supone que $d\tau = 0$. En este caso, a partir de (80.11), la curva IS satisface

$$\left. dy \right|_{IS} = \frac{1}{1 - c_1} [(c_2 + i')dr + dg].$$

Ahora bien, debido a que y^* está determinada por las primeras tres ecuaciones del modelo y este valor no se modifica cuando aumenta el gasto, por lo que $dy = 0$. Por lo tanto,

$$\left. \frac{\partial r}{\partial g} \right|_{IS} = -\frac{1}{c_2 + i'} > 0. \quad (80.31)$$

Es decir, si aumenta el gasto del gobierno, entonces la tasa de interés aumenta. Esto significa que la curva IS tiene un desplazamiento hacia arriba cuando $dg > 0$.

Considere ahora la curva de demanda agregada, DA, y suponga que $d\pi = 0$ y $dM = 0$. A partir de (80.16), se tiene que

$$-\frac{M}{P^2} dP \Big|_{DA} = m_1 dy - \frac{m_2}{c_2 + i'} dg. \quad (80.32)$$

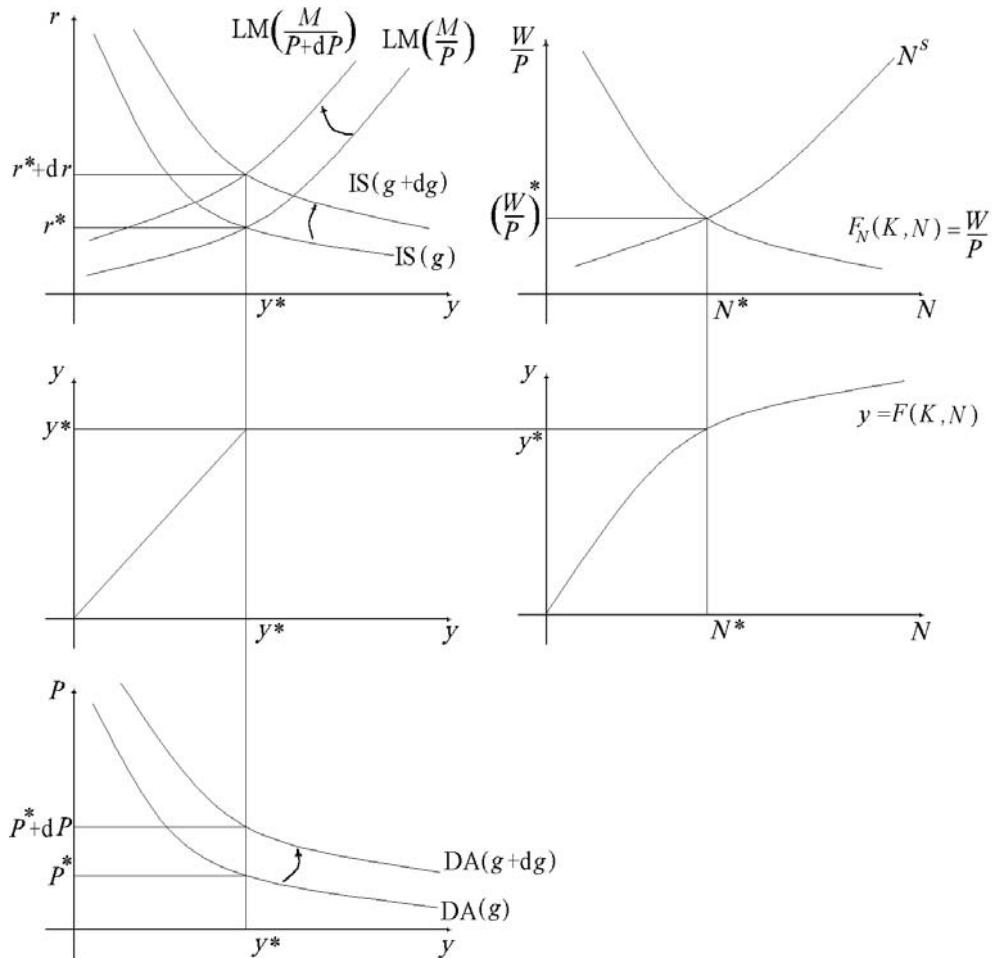
Si $dy = 0$ en (80.32), entonces

$$\frac{\partial P}{\partial g} \Big|_{DA} = \frac{m_2 P^2}{M(c_2 + i')} > 0, \quad (80.33)$$

lo cual indica que ante un aumento en el gasto del gobierno, el nivel general de precios se incrementa. Esto hace que la curva DA se desplace hacia arriba. Dicho aumento en precios produce, a su vez, un desplazamiento de LM hacia arriba, lo que conlleva a un aumento en la tasa de interés de equilibrio. En efecto, observe que

$$\frac{\partial r}{\partial P} \Big|_{LM} = -\frac{M}{m_2 P^2} < 0. \quad (80.34)$$

La Gráfica 80.4 muestra los efectos de la política fiscal en el equilibrio. En este caso, el nuevo equilibrio termina con una mayor tasa de interés y un mayor nivel general de precios.



Gráfica 80.4 Efectos de la política fiscal en el equilibrio.

80.5.3 Política Monetaria

En esta sección se examinan los efectos sobre el equilibrio cuando $dM > 0$. Si se supone que $d\pi = 0$ en la curva LM, se tiene que

$$d\left(\frac{M}{P}\right) = m_1 dy + m_2 dr.$$

Observe que $dy = 0$, ya que las tres primeras ecuaciones del modelo determinan el nivel general de la producción y éstas no han cambiado. De esta manera,

$$d\left(\frac{M}{P}\right) = m_2 dr. \quad (80.35)$$

Por lo tanto, si se supone, por un momento que los precios permanecen constantes, se sigue que

$$\frac{dr}{d\left(\frac{M}{P}\right)} \Big|_{LM} = \frac{1}{m_2} < 0. \quad (80.36)$$

En consecuencia, la curva LM se desplaza hacia abajo. Ahora suponga $dg = 0$. En este caso, la curva DA, en su parte correspondiente a IS, satisface que

$$dy = \frac{1}{1 - c_1} (c_2 + i') dr.$$

Así,

$$dr = \frac{1 - c_1}{c_2 + i'} dy.$$

Por otro lado, a partir de LM, se cumple que

$$d\left(\frac{M}{P}\right) = m_1 dy + m_2 dr.$$

Consecuentemente,

$$\frac{P dM - M dP}{P^2} = m_1 dy + m_2 \frac{1 - c_1}{c_2 + i'} dy.$$

Si $dy = 0$, entonces

$$\frac{P dM - M dP}{P^2} = 0.$$

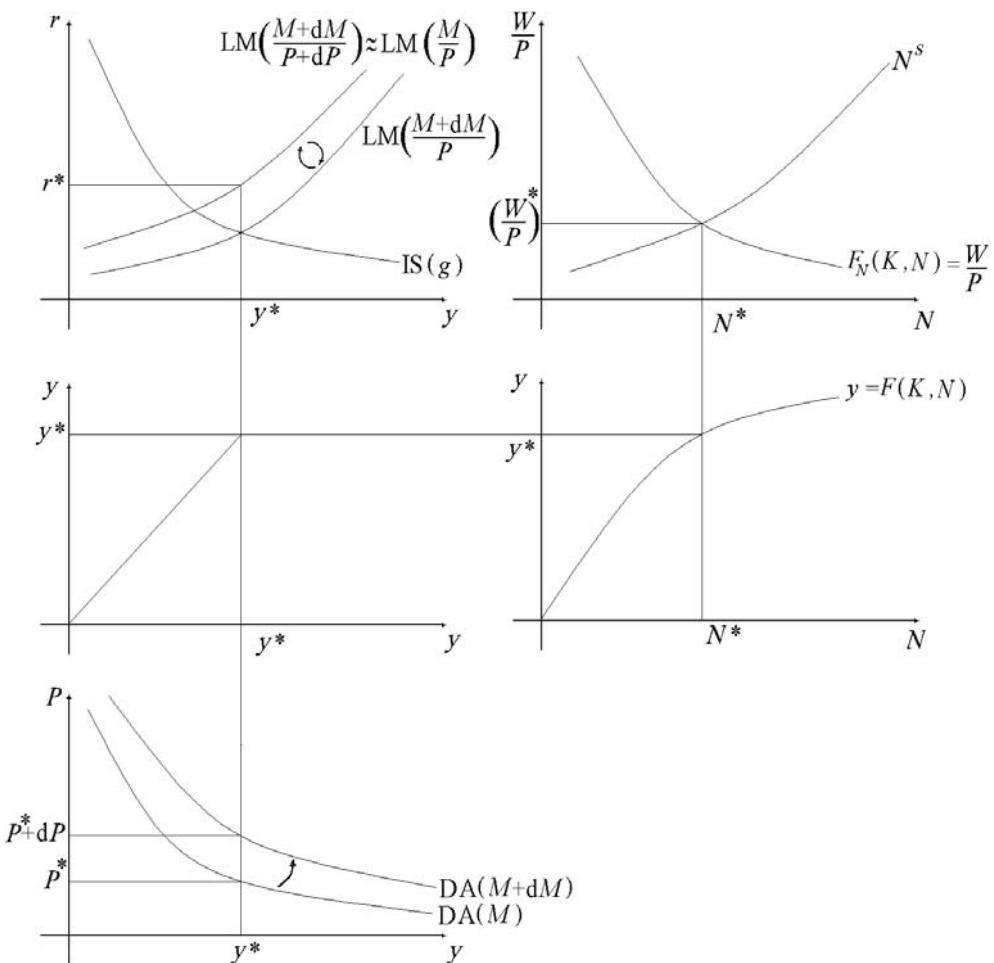
Por lo tanto,

$$P dM = M dP.$$

ó

$$\frac{dM}{M} = \frac{dP}{P}.$$

Es decir, el cambio porcentual en precios es igual al cambio porcentual de la cantidad de dinero. El aumento en precios conduce a un desplazamiento hacia arriba de la LM. En conclusión, un aumento en la cantidad de dinero en la economía produce sólo un aumento en precios, como lo muestra la Gráfica 80.5.



Gráfica 80.5 Efectos de la política fiscal en el equilibrio.

80.6 Bibliografía sugerida

- McCafferty, S. (1990). *Macroeconomic Theory*, Harpercollins College Div, USA.
- Sargent, T. J. and N. Wallace (1973). "The Stability of Models of Money and Growth with Perfect Foresight". *Econometrica*, Vol. 41, No. 6, pp. 1043-1048.
- Sargent, T. J. (1987). *Macroeconomic Theory*, Academic Press, San Diego, California.
- Ruiz Galindo, L. A. y F. Venegas-Martínez (2005). Implicaciones macroeconómicas de las decisiones de los agentes. *Análisis Económico*, Vol. 20, No. 45, pp. 5-27.
- Ruiz-Galindo, L. A. y F. Venegas-Martínez (2006). "Un modelo macroeconómico de simulación con microfundamentos para la economía mexicana". *Economía Mexicana, Nueva Época*, por aparecer.

80.7 Ejercicios

80.1 Considere el siguiente modelo de expectativas racionales de inflación endógena:

$$\begin{aligned}
 y &= F(K, N), \quad F_N > 0, \quad F_K > 0, \quad F_{NN} < 0, \quad F_{KK} < 0, \quad F_{NK} > 0; \\
 F_N(K, N) &= \frac{W}{P}; \\
 N &= N\left(\frac{W}{P}\right), \quad N' > 0; \\
 i &= i(r), \quad i' < 0; \\
 c &= c(y - \tau, r), \quad 0 < c_1 < 1, \quad c_2 < 0; \\
 y &= c + i + g; \\
 \frac{M}{P} &= m(y, r + \pi), \quad m_1 > 0, \quad m_2 < 0; \\
 \frac{\dot{P}}{P} &= \pi.
 \end{aligned}$$

Suponga que

$$\frac{M}{P} = \exp \left\{ \beta y^* - \alpha \left(r^* + \frac{\dot{P}}{P} \right) \right\}, \quad \alpha, \beta > 0,$$

donde y^* y r^* son valores de equilibrio (determinados en el modelo macroeconómico clásico). Asimismo, suponga que

$$M_s = \begin{cases} A & \text{si } s < t, \\ A(1 + \phi) & \text{si } s \geq t, \end{cases}$$

donde $\phi > 0$ y $A > 1$. Determine las tasas de inflación actual y esperada de equilibrio.

Solución: Observe primero que la expresión

$$\frac{M}{P} = \exp \left\{ \beta y^* - \alpha \left(r^* + \frac{\dot{P}}{P} \right) \right\}, \quad \alpha, \beta > 0$$

puede ser reescrita como

$$\frac{\dot{P}}{P} = \delta \ln(P) - \delta \ln(M) + \delta \gamma,$$

donde $\gamma = \beta y^* - \alpha r^*$, y $\delta = 1/\alpha > 0$, equivalentemente,

$$\frac{d}{dt} \ln P = \delta \ln(P) - \delta \ln(M) + \delta \gamma.$$

Si se define $x_t = \ln(P_t)$ y $w_t = \gamma - \ln(M_t)$, entonces

$$\dot{x}_s = \delta x_t + \delta w_t, \quad x_t \text{ dada.}$$

Si se conocen los valores de w_s para $0 < s < t$, esta ecuación diferencial ordinaria tiene como solución

$$\begin{aligned}
 x_s &= x_0 e^{\delta s} + e^{\delta s} \int_0^s \delta w_u e^{-\delta u} du \\
 &= x_0 e^{\delta s} + e^{\delta s} (\gamma - \ln(A))(1 - e^{-\delta s}) \\
 &= x_0 e^{\delta s} - (\gamma - \ln(A))(1 - e^{\delta s}).
 \end{aligned}$$

Si se normaliza $P_0 = 1$ y se supone $\gamma = 0$, se tiene que

$$\ln(P_s) = \ln(A)(1 - e^{\delta s}), \quad s < t.$$

Por otro lado, si se conocen los valores de w_s para $s \geq t$, la solución está dada por

$$\begin{aligned} x_s &= -e^{\delta t} \int_t^\infty \delta w_u e^{-\delta u} du \\ &= -e^{\delta t} (\gamma - \ln(A) - \ln(1 + \phi)) e^{-\delta t} \\ &= -(\gamma - \ln(A) - \ln(1 + \phi)). \end{aligned}$$

Si $\gamma = 0$, entonces

$$\ln(P_s) = \ln(A) + \ln(1 + \phi).$$

Evidentemente, cuando $\gamma = 0$, se tiene que P_s en $[0, t)$ es menor que P_s en $[t, \infty)$.

80.2 Repita el ejercicio anterior si la oferta monetaria satisface:

$$M_s = \begin{cases} M_0 e^{As} & \text{si } s < t, \\ M_t e^{A(1+\phi)s} & \text{si } s \geq t. \end{cases}$$

80.3 Repita el ejercicio anterior si al tiempo t se hace el anuncio de que la oferta monetaria se incrementará al tiempo $t + \theta$, es decir, la oferta monetaria satisface:

$$M_s = \begin{cases} A & \text{si } s < t + \theta, \\ A(1 + \phi) & \text{si } s \geq t + \theta. \end{cases}$$

Solución: Si $t \leq \tau \leq t + \theta$, entonces

$$x_\tau = -e^{\delta\tau} \left[\int_\tau^{t+\theta} \delta w_u e^{-\delta u} du + \int_{t+\theta}^\infty \delta w_u e^{-\delta u} du \right].$$

De esta manera

$$\begin{aligned} \ln(P_\tau) &= -e^{\delta\tau} \left[(\ln(A) + \ln(1 + \phi)) (e^{-\delta(t+\theta)} - e^{-\delta\tau}) + (\ln(A) + \ln(1 + \phi)) e^{-\delta(t+\theta)} \right] \\ &= \ln(A) (1 - e^{\delta(t+\theta-\tau)}) - (\ln(A) + \ln(1 + \phi)) e^{-\delta(t+\theta-\tau)} \\ &= \ln(A) + \ln(1 + \phi) e^{-\delta(t+\theta-\tau)}. \end{aligned}$$

Observe que en $\tau = t$ se cumple que

$$\ln(P_t) = \ln(A) + \ln(1 + \phi) e^{-\delta\theta},$$

lo cual es mayor que $\ln(A)$ y menor que $\ln(A) + \ln(1 + \phi)$. Por lo tanto, el anuncio hace que el log-precio salte en t de $\ln(A)$ a $\ln(1 + \phi) e^{-\delta(t+\theta-\tau)}$, después el log-precio crece durante $[t + \delta]$ hasta $\ln(A) + \ln(1 + \phi)$ y allí permanecerá.

80.4 Considere el modelo macroeconómico clásico para una economía abierta con tipo de cambio flotante:

$$y = F(K, N), \quad F_N > 0, \quad F_K > 0, \quad F_{NN} < 0, \quad F_{KK} < 0, \quad F_{NK} > 0;$$

$$F_N(K, N) = \frac{W}{P},$$

$$N = N \left(\frac{W}{P} \right), \quad N' > 0,$$

$$i = i(r), \quad i' < 0,$$

$$c = c(y - \tau, r), \quad 0 < c_1 < 1, \quad c_2 < 0,$$

$$y = c + i + g + x - z, \quad x = x(E, P), \quad x_1 > 0, x_2 < 0, \quad z = z(E, P, y), \quad z_1 < 0, z_2 > 0, z_3 > 0,$$

$$\frac{M}{P} = m(y, r + \pi), \quad m_1 > 0, \quad m_2 < 0,$$

$$Px - EQz + \phi(r + \pi) = BP = 0, \quad \phi' > 0,$$

donde Q es el nivel general de precios en el extranjero, x son exportaciones, z son importaciones y E es el tipo de cambio. La última ecuación es llamada la balanza de pagos. Obtenga esta ecuación utilizando argumentos de oferta ($S = Px + F(r + \pi)$) y demanda ($D = EQz + f(r + \pi)$) en el mercado de divisas, en donde F es la cuenta de capitales ($F' > 0$), f el servicio de la deuda ($f' > 0$) y $\phi = F - f$ el flujo neto de capitales. Suponga que las variables endógenas son $y, W/P, N, c, i, r, P$ y E . Identifique en la balanza de pagos la balanza comercial, la cuenta corriente y la cuenta de capitales. Asimismo, muestre que si el gobierno emite bonos nominales denominados tanto en moneda doméstica como en moneda extranjera, su restricción presupuestal está dada por

$$g = \tau + \frac{\dot{B}}{P} - (r + \pi) \frac{B}{P} + \frac{E \dot{B}^*}{P} - (r + \pi) \frac{EB^*}{P} + \frac{\dot{M}}{P}.$$

Verifique que $\phi(r + \pi) = E \dot{B}^* - (r + \pi)EB^*$. Efectúe un análisis completo de estática comparativa del modelo anterior (políticas fiscal y monetaria) y discuta el caso simplificado $x = x(E)$ y $z = z(E)$.

80.5 A continuación se modifica el ejercicio anterior para el caso de tipo de cambio fijo, $dE = 0$. Por simplicidad, suponga que $x = x(E)$ y $z = z(E)$. En este caso, el gobierno fija el tipo de cambio como un ancla nominal para contener la inflación. Cuando la demanda en el mercado de divisas excede a su oferta, el banco central interviene utilizando reservas internacionales. En otras palabras, si $Px + F < QEz$, entonces $-dRI + Px + F = QEz$ con $dRI < 0$, equivalentemente $dB = dRI$. Es decir,

$$xdP + F'dr = dRI.$$

Evidentemente, cuando los agentes compran divisas en grandes cantidades, se afecta el monto del circulante, en cuyo caso, el gobierno puede recoger bonos a través de una baja en la tasa de interés para incrementar de nuevo el circulante. De esta manera, la oferta monetaria se convierte en una variable endógena y $dM^S = dB + dRI$, de tal manera que en equilibrio

$$m_1 dy + m_2 dr = dB + dRI.$$

En este caso B es exógena y las variables endógenas son $y, W/P, N, c, i, r, P$ y dRI . Efectúe un análisis completo de estática comparativa de este modelo.

80.6 En el presente ejercicio se discute el modelo Keynesiano de precio fijo $P = 1$, en cuyo caso $\pi = 0$. A diferencia del modelo macroeconómico clásico se omiten las ecuaciones del mercado laboral y de la función de producción. En este caso, el modelo se transforma en

$$\begin{aligned} c &= c(y - \tau, r), \quad 0 < c_1 < 1, \quad c_2 < 0, \\ i &= i(r), \quad i' < 0, \\ y &= c + i + g, \\ \frac{M}{P} &= m(y, r), \quad m_1 > 0, \quad m_2 < 0. \end{aligned}$$

Alternativamente,

$$\begin{aligned} \text{IS: } \quad y &= c(y - \tau, r) + i(r) + g, \\ \text{LM: } \quad \frac{M}{P} &= m(y, r), \quad 0 < m_1, \quad m_2 < 0, \quad P = 1. \end{aligned}$$

En este caso, las variables endógenas son y y r . Efectúe un análisis completo de estática comparativa de este modelo.

80.7 En el presente ejercicio se discute el modelo Keynesiano de precio fijo $P = 1$ y tipo de cambio flexible. Suponga que $x = x(E)$ y $z = z(E)$. Con base en el ejercicio anterior, el modelo se extiende de la siguiente forma:

$$\text{IS: } y = c(y - \tau, r) + i(r) + g + x(E) - z(E),$$

$$\text{LM: } \frac{M}{P} = m(y, r), \quad m_1 > 0, \quad m_2 < 0, \quad P = 1,$$

$$\text{BP: } px - EQz + F(r) = 0.$$

Las variables endógenas son: y , r y E . Efectúe un análisis completo de estática comparativa.

80.8 En el presente ejercicio se discute el modelo Keynesiano de precio fijo $P = 1$ y tipo de cambio fijo $E = 1$. Suponga, por simplicidad, que $x = x(E)$ y $z = z(E)$. Con base en el ejercicio anterior, se tiene ahora que

$$y = c(y - \tau, r) + i(r) + g + x(E) - z(E),$$

$$m_1 dy + m_2 dr = dB + dRI, \quad m_1 > 0, \quad m_2 < 0, \quad P = 1,$$

$$F' dr = dRI.$$

Las variables endógenas son: y , r y dRI . Las variables exógenas son g , B y τ . Efectúe un análisis completo de estática comparativa.

80.9 En este ejercicio se discute el modelo Keynesiano de salario nominal rígido en el corto plazo. A diferencia del modelo macroeconómico clásico, en este caso se omite la oferta laboral. Los trabajadores firman contratos que fijan el salario ($dW = 0$) por un determinado periodo de tiempo (1 año, 2 años o más). El salario pactado corresponde al nivel de precios esperado por los trabajadores $W = P^e = 0$. Si en este periodo de tiempo se presenta un alza en precios, $dP > 0$, infortunadamente, el trabajador no podrá renegociar su salario sino hasta la próxima revisión de su contrato laboral y $dW = dP^e = 0$. Evidentemente, en este periodo no hay pleno empleo. En el largo plazo, las expectativas se ajustan de tal manera que $dW = dP^e = dP > 0$, es decir, el salario aumenta en la misma magnitud que los precios, con lo cual se recuperan los resultados del modelo clásico. Así, el modelo Keynesiano de salario nominal rígido en el corto plazo está dado por

$$y = F(K, N), \quad F_N > 0, \quad F_K > 0, \quad F_{NN} < 0, \quad F_{KK} < 0, \quad F_{NK} > 0;$$

$$F_N(K, N) = \frac{W}{P};$$

$$i = i(r), \quad i' < 0;$$

$$c = c(y - \tau, r), \quad 0 < c_1 < 1, \quad c_2 < 0;$$

$$y = c + i + g;$$

$$\frac{M}{P} = m(y, r + \pi), \quad m_1 > 0, \quad m_2 < 0.$$

En este caso, las variables endógenas son y , P , i , r , N y c . La cantidad w es fija y, como siempre, K es predeterminada. Sin pérdida de generalidad, suponga que inicialmente $W_0 = P_0 = 1$, en consecuencia, en $t = 0$, $F_N = 1$. Observe ahora que $dy = F_N dN$ y $P F_{NN} dN + F_N dP = dW$, donde $\beta = -1/F_{NN}$. Lo anterior implica que la oferta agregada está dada por $dy = \beta(dP - dW)$. Efectúe un análisis completo de estática comparativa.

CAPÍTULO 81

PROGRAMACIÓN DINÁMICA ESTOCÁSTICA EN TIEMPO CONTINUO

Conceptos básicos de este capítulo:

- Programación dinámica
- Control óptimo estocástico
- Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman
- Problema estocástico de decisión intertemporal de un consumidor

81.1 Introducción

En este capítulo se presenta la técnica de programación dinámica estocástica en tiempo continuo. En dicha técnica las ecuaciones recursivas de Bellman y la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman desempeñan un papel fundamental en la determinación de condiciones de primer orden de problemas de control óptimo estocástico. A manera de ilustración se desarrollan varias aplicaciones a problemas de decisión de consumidores-inversionistas racionales.

El “Padre de la programación dinámica” Richard Bellman (1921-1984) obtuvo, en 1946, su doctorado en matemáticas en la Universidad de Princeton. Posteriormente, fue consultor en la empresa “Rand Corporation” en Santa Mónica California y profesor en la Universidad de Stanford. Una de las contribuciones más importantes de Bellman (1957) a la teoría de optimización es el método de programación dinámica. La programación dinámica es muy útil en la solución de problemas de optimización en donde se toman decisiones en varias etapas. Dicho método se basa en el principio de optimalidad, el cual establece que dada una política óptima, cualquiera de sus subpolíticas es también óptima. Bellman (1962) encontró que el método también era aplicable al cálculo de variaciones y a problemas de control óptimo. Al parecer, Bellman no se dio cuenta que dicha ecuación estaba relacionada con la ecuación de Hamilton-Jacobi¹ que se estudia en Mecánica, ya que no la menciona en sus trabajos. Parece

¹ Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) matemático, físico y astrónomo irlandés que hizo importantes contribuciones en óptica, dinámica y álgebra. Su trabajo sobre dinámica y el concepto de Hamiltoniano es una de las bases para el desarrollo de la mecánica cuántica. A la edad de 18 años era considerado como uno de los mejores matemáticos de su tiempo. Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) matemático alemán, obtuvo su doctorado en matemáticas en la Universidad de Berlín a la edad de 21 años. En 1827 fue profesor de matemáticas en la Universidad de Königsberg. En 1843, su intenso ritmo de trabajo casi lo lleva a la muerte y a partir de este evento se retira y vive como pensionado por el gobierno alemán hasta su deceso. Entre las contribuciones más importantes de Jacobi se encuentra su tratado clásico en física matemática (1829) sobre funciones elípticas, las cuales surgen al integrar ecuaciones de segundo orden que representaban la energía cinética. Jacobi fue un extraordinario profesor de matemáticas que inspiraba a sus alumnos el amor hacia las matemáticas. Una explicación simple de la ecuación de Hamilton-Jacobi es como sigue: considere un sistema de N cuerpos con posiciones (q_1, q_2, \dots, q_N) y velocidades $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$. Defina el Lagrangeano $\mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t)$ de tal manera que, al tiempo t , a cada velocidad generalizada $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$ le corresponde un momentum generalizado (lineal) p_i , es decir, $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$ y $-\dot{p}_i = \partial\mathcal{L}/\partial q_i$. El Hamiltoniano, o energía total del sistema, al tiempo t , se define como

$$\mathcal{H}(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t).$$

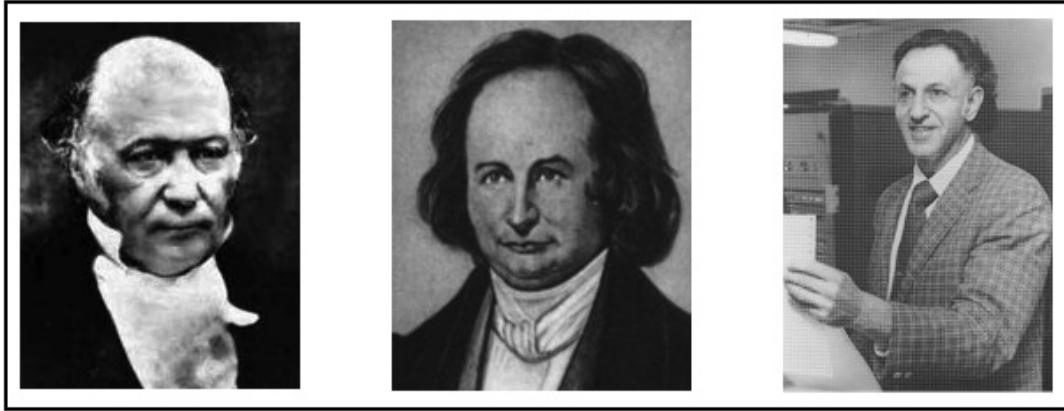
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \sum_{i=1}^N [(\partial\mathcal{H}/\partial q_i) dq_i + (\partial\mathcal{H}/\partial p_i) dp_i] + \partial\mathcal{H}/\partial t \\ &= \sum_{j=1}^N [\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - (\partial\mathcal{L}/\partial q_i) dq_i - (\partial\mathcal{L}/\partial \dot{q}_i) d\dot{q}_i] - \partial\mathcal{L}/\partial t, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\partial\mathcal{H}/\partial q_i = -\dot{p}_i, \quad \partial\mathcal{H}/\partial p_i = \dot{q}_i \quad \text{y} \quad \partial\mathcal{H}/\partial t = -\partial\mathcal{L}/\partial t.$$

ser que Rudolph E. Kalman (1960) y (1961) fue quien encontró dicha relación y probablemente fue el primero en utilizar el término de ecuación de Hamilton-Jacobi en problemas de control. Es muy probable también que el Profesor Harold J. Kushner (1971) (actualmente en "Brown University") haya sido el primero en estudiar la versión estocástica en tiempo continuo de la programación dinámica. Para conjuntar las contribuciones de Hamilton, Jacobi y Bellman se hace referencia a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B), en el caso estocástico ésta es una ecuación diferencial parcial de segundo orden y en el determinista una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.



Hamilton, Jacobi y Bellman (Fuente: Wikipedia).

81.2 Control óptimo estocástico con un factor de riesgo

A continuación se obtiene la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada a un problema de control óptimo estocástico. Para ello es necesario determinar primero las ecuaciones recursivas de la programación dinámica. Considere el siguiente problema de optimización:

$$\text{Maximizar}_{u_t} \quad \mathbb{E} \left\{ \int_0^\infty F(t, u_t) dt \mid \mathcal{F}_t \right\}, \quad (81.1)$$

sujeto a

$$dx_t = \mu(x_t, u_t)dt + \sigma(x_t)dW_t, \quad (81.2)$$

donde W_t es un movimiento Browniano estandarizado definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. Las funciones $\mu(x_t, u_t)$ y $\sigma(x_t)$ se suponen conocidas y con segundas derivadas parciales continuas. En el problema anterior, u_t es llamada la variable de control y x_t la variable de estado. Con el propósito de caracterizar una solución del problema planteado en (81.1) y (81.2), se define

$$J(x_t, t) = \max_{u|_{[t, \infty)}} \mathbb{E} \left\{ \int_t^\infty F(s, u_s) ds \mid \mathcal{F}_t \right\}.$$

Esta expresión conduce a la siguiente relación de recursividad temporal sobre la funcional J :

$$\begin{aligned} J(x_t, t) &= \max_{u|_{[t, \infty)}} \mathbb{E} \left\{ \int_t^\infty F(s, u_s) ds \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \max_{u|_{[t, \infty)}} \mathbb{E} \left\{ \int_t^{t+dt} F(s, u_s) ds + \int_{t+dt}^\infty F(s, u_s) ds \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \max_{u|_{[t, t+dt]}} \mathbb{E} \left\{ \int_t^{t+dt} F(s, u_s) ds + J(x_t + dx_t, t + dt) \mid \mathcal{F}_t \right\}. \end{aligned}$$

Si en esta última expresión se aplica el teorema del valor medio para integrales en el primer término y se expande en serie de Taylor el segundo término, se sigue que

$$J(x_t, t) = \max_{u|_{[t, t+dt]}} E \{ F(t, u_t) dt + o(dt) + J(x_t, t) + dJ(x_t, t) + o(dt) \mid \mathcal{F}_t \}.$$

Equivalentemente,

$$0 = \max_{u|_{[t, t+dt]}} E \left\{ F(t, u_t) dt + o(dt) + dJ(x_t, t) \mid \mathcal{F}_t \right\}.$$

En virtud del lema de Itô, la expresión anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned} 0 = \max_{u|_{[t, t+dt]}} & E \left\{ F(t, u_t) dt + o(dt) + \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x_t} \mu(x_t, u_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial x_t^2} \sigma^2(x_t) \right) dt \right. \\ & \left. + \frac{\partial J}{\partial x_t} \sigma(x_t) dW_t \mid \mathcal{F}_t \right\}. \end{aligned}$$

Después de tomar valores esperados en todos los términos de la expresión anterior, se obtiene

$$0 = \max_{u|_{[t, t+dt]}} \left\{ F(t, u_t) dt + o(dt) + \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x_t} \mu(x_t, u_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial x_t^2} \sigma^2(x_t) \right) dt \right\}.$$

Si además se divide entre dt y se utiliza el hecho de que $o(dt)/dt \rightarrow 0$ cuando $dt \rightarrow 0$, se produce

$$0 = \max_{u_t} \left\{ F(t, u_t) + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x_t} \mu(x_t, u_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial x_t^2} \sigma^2(x_t) \right\}. \quad (81.3)$$

La expresión anterior es conocida como ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B). Si u_t es máximo, a partir de (81.3), se obtiene la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden en J :

$$F(t, u_t) + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x_t} \mu(x_t, u_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial x_t^2} \sigma^2(x_t) = 0. \quad (81.4)$$

Con el propósito de caracterizar una solución del problema de maximizar (81.1) sujeto a (81.2) es necesario encontrar la solución de la ecuación anterior. Si se supone que la función objetivo es de variables separables, es decir, de la forma:

$$F(t, u) = G(u_t) e^{-\delta t},$$

se puede suponer como candidato de solución de la ecuación diferencial parcial en (81.4) a

$$J(x_t, t) = \frac{1}{\delta} G(x_t) e^{-\delta t}.$$

Ahora bien, si se calculan las derivadas parciales de primer y segundo orden de J y se sustituyen en (81.4), se tiene

$$G(u_t) - G(x_t) + \frac{1}{\delta} G'(x_t) \mu(x_t, u_t) + \frac{1}{2\delta} G''(x_t) \sigma^2(x_t) = 0. \quad (81.5)$$

De esta manera, al derivar la ecuación anterior con respecto del control u_t , se sigue que

$$G'(u_t) + \frac{1}{\delta} G'(x_t) \frac{\partial \mu(x_t, u_t)}{\partial u_t} = 0. \quad (81.6)$$

Bajo ciertas condiciones sobre G y μ , esta ecuación caracteriza al control óptimo u_t en función de x_t .

81.3 Problema de control óptimo estocástico con dos factores de riesgo

A continuación se generaliza el problema de la sección anterior a dos factores de riesgo. Consideré el siguiente problema de horizonte finito:

$$\text{Maximizar}_{u_t} \quad \mathbb{E} \left\{ \int_t^T G(u_s) e^{-\delta s} ds + \frac{1}{\delta} G(x_T) e^{-\delta T} \mid \mathcal{F}_t \right\},$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} dx_t &= \mu(x_t, u_t) dt + \sigma(x_t) dW_t, \\ dy_t &= m(y_t) dt + s(y_t) dV_t \end{aligned}$$

y

$$\text{Cov}(dW_t, dV_t) = \rho dt.$$

Como antes, W_t y V_t son movimientos Brownianos estandarizados. Observe que los procesos dW_t y dV_t están correlacionados. Si se define

$$J(x_t, y_t, t) \equiv \max_{u|_{[t,T]}} \mathbb{E} \left\{ \int_t^T G(u_s) e^{-\delta s} ds + \frac{1}{\delta} G(x_T) e^{-\delta T} \mid \mathcal{F}_t \right\}, \quad t < T,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} J(x_t, y_t, t) &= \max_{u|_{[t,T]}} \mathbb{E} \left\{ \int_t^{t+dt} G(u_s) e^{-\delta s} ds + \int_{t+dt}^T G(u_s) e^{-\delta s} ds + \frac{1}{\delta} G(x_T) e^{-\delta T} \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \max_{u|_{[t,t+dt]}} \mathbb{E} \left\{ \int_t^{t+dt} G(u_s) e^{-\delta s} ds + J(x_t + dx_t, y_t + dy_t, t + dt) \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \max_{u|_{[t,t+dt]}} \mathbb{E} \{ G(u_t) e^{-\delta t} dt + o(dt) + J(x_t, y_t, t) + dJ(x_t, y_t, t) \mid \mathcal{F}_t \}. \end{aligned}$$

Si se aplica el lema de Itô a $J(x_t, y_t, t)$, la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} J(x_t, y_t, t) &= \max_{u|_{[t,t+dt]}} \mathbb{E} \left\{ G(u_t) e^{-\delta t} dt + o(dt) + J(x_t, y_t, t) \right. \\ &\quad + \left(J_t + \mu(x_t, u_t) J_x + \frac{1}{2} \sigma^2(x_t) J_{xx} + m(y_t) J_y + \frac{1}{2} s^2(y_t) J_{yy} + \sigma(x_t) s(y_t) \rho J_{xy} \right) dt \\ &\quad \left. + \sigma(x_t) J_x dW_t + s(y_t) J_y dV_t \mid \mathcal{F}_t \right\}. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} 0 &= \max_{u|_{[t,t+dt]}} \mathbb{E} \left\{ G(u_t) e^{-\delta t} dt + o(dt) \right. \\ &\quad + \left(J_t + \mu(x_t, u_t) J_x + \frac{1}{2} \sigma^2(x_t) J_{xx} + m(y_t) J_y + \frac{1}{2} s^2(y_t) J_{yy} + \sigma(x_t) s(y_t) \rho J_{xy} \right) dt \\ &\quad \left. + \sigma(x_t) J_x dW_t + s(y_t) J_y dV_t \mid \mathcal{F}_t \right\}. \end{aligned}$$

Al tomar valores esperados en todos los términos de la ecuación anterior, se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= \max_{u|_{[t,t+dt]}} \left\{ G(u_t) e^{-\delta t} dt + o(dt) \right. \\ &\quad \left. + \left(J_t + \mu(x_t, u_t) J_x + \frac{1}{2} \sigma^2(x_t) J_{xx} + m(y_t) J_y + \frac{1}{2} s^2(y_t) J_{yy} + \sigma(x_t) s(y_t) \rho J_{xy} \right) dt \right\}. \end{aligned}$$

Si ahora se divide entre dt y, posteriormente, se toma el límite cuando $dt \rightarrow 0$, se produce la ecuación de H-J-B:

$$0 = \max_{u_t} \left\{ G(u_t) e^{-\delta t} + J_t + \mu(x_t, u_t) J_x + \frac{1}{2} \sigma^2(x_t) J_{xx} + m(y_t) J_y + \frac{1}{2} s^2(y_t) J_{yy} + \sigma(x_t) s(y_t) \rho J_{xy} \right\}.$$

Si u_t es máximo, entonces

$$0 = G(u_t)e^{-\delta t} + J_t + \mu(x_t, u_t)J_x + \frac{1}{2}\sigma^2(x_t)J_{xx} + m(y_t)J_y + \frac{1}{2}s^2(y_t)J_{yy} + \sigma(x_t)s(y_t)\rho J_{xy}. \quad (81.7)$$

Dada la forma separable de la función J , se propone como candidato de la ecuación diferencial parcial anterior a

$$J(x_t, y_t, t) = \frac{1}{\delta}G(x_t)F(y_t, t)e^{-\delta t}.$$

Evidentemente, la condición final sobre F es $F(y_T, T) = 1$. Ahora se calcula la derivada parcial de J con respecto de t , esto es

$$J_t = -GF e^{-\delta t} + \frac{1}{\delta}GF_t e^{-\delta t}.$$

Asimismo, las primeras y segundas derivadas con respecto de x_t y y_t están dadas por:

$$J_x = \frac{1}{\delta}G'F e^{-\delta t}, \quad J_y = \frac{1}{\delta}GF_y e^{-\delta t},$$

$$J_{xx} = \frac{1}{\delta}G''F e^{-\delta t}, \quad J_{yy} = \frac{1}{\delta}GF_{yy} e^{-\delta t}$$

y

$$J_{xy} = G'F_y e^{-\delta t}.$$

Si estas derivadas parciales se sustituyen en la ecuación (81.7) se tiene:

$$\begin{aligned} 0 = & \delta[G(u_t) - G(x_t)F(y_t, t)] + G(x_t)F_t(y_t, t) + \mu(x_t, u_t)G'(x_t)F(y_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2(x_t)G''(x_t)F(y_t, t) \\ & + m(y_t)G(x_t)F_y(y_t, t) + \frac{1}{2}s^2(y_t)G(x_t)F_{yy}(y_t, t) + \sigma(x_t)s(y_t)\rho G'(x_t)F_y(y_t, t). \end{aligned}$$

Al derivar la ecuación anterior con respecto de la variable de control u_t , se sigue que

$$G'(u_t) + \frac{1}{\delta}G'(x_t)F(y_t, t)\frac{\partial\mu(x_t, u_t)}{\partial u_t} = 0. \quad (81.8)$$

Bajo ciertas condiciones de G , F y μ , la ecuación anterior caracteriza al control óptimo u_t en función de x_t y y_t .

81.4 Consumidor-inversionista con utilidad logarítmica

En esta sección se lleva a cabo una aplicación de la programación dinámica estocástica en tiempo continuo al problema de decisión intertemporal de un consumidor racional. Considere un consumidor maximizador de utilidad con vida infinita. Suponga que el individuo tiene acceso a un activo libre de riesgo, un bono cupón cero, y a un activo con riesgo, una acción.

81.4.1 Planteamiento del problema del consumidor-inversionista

Considere un consumidor adverso al riesgo que obtiene satisfacción por un bien de consumo. La función de utilidad esperada, al tiempo $t = 0$, del individuo se supone de la forma

$$V_0 = E \left\{ \int_0^{\infty} \ln(c_t) e^{-\delta t} dt \mid \mathcal{F}_0 \right\},$$

donde c_t es consumo, δ es la tasa subjetiva de descuento y \mathcal{F}_0 es la información disponible al tiempo $t = 0$. El supuesto de utilidad logarítmica permitirá generar soluciones analíticas.

81.4.2 Portafolio, activos y rendimientos

Los precios en términos reales del bono y la acción se denotarán, respectivamente, mediante b_t y S_t . El bono paga una tasa constante y libre de riesgo de incumplimiento r . Sea $w_t = S_t/a_t$ la proporción de la riqueza que el consumidor asigna a la tenencia de títulos de capital y sea $1 - w_t = b_t/a_t$ la proporción de la riqueza asignada a títulos de deuda. En este caso, la evolución de la riqueza real sigue la ecuación diferencial estocástica:

$$da_t = (1 - w_t)a_t dR_b + w_t a_t dR_S - c_t dt.$$

Si se supone que los rendimientos del bono y la acción satisfacen, respectivamente, que

$$dR_b = \frac{db_t}{b_t} = r dt$$

y

$$dR_S = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

entonces la restricción presupuestal del individuo se puede reescribir como:

$$da_t = \alpha(w_t, a_t, c_t) dt + \beta(w_t, a_t) dW_t, \quad (81.9)$$

donde

$$\alpha(w_t, a_t, c_t) = a_t \left(r + (\mu - r)w_t - \frac{c_t}{a_t} \right) \quad \text{y} \quad \beta(w_t, a_t) = w_t a_t \sigma.$$

81.4.3 Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

En esta sección se obtiene la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para el problema de decisión intertemporal del consumidor. Si se define

$$J(a_t, t) = E \left\{ \int_t^{\infty} \ln(c_s) e^{-\delta s} ds \mid \mathcal{F}_t \right\} = V(a_t) e^{-\delta t},$$

la condición de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B) está dada por:

$$0 = \max_{c_t, w_t} \left\{ \ln(c_t) - \delta V(a_t) + a_t V'(a_t) \left(r + (\mu - r)w_t - \frac{c_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} a_t^2 V''(a_t) w_t^2 \sigma^2 \right\}.$$

Si c_t y w_t son óptimos, entonces

$$0 = \ln(c_t) - \delta V(a_t) + a_t V'(a_t) \left(r + (\mu - r)w_t - \frac{c_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} a_t^2 V''(a_t) w_t^2 \sigma^2. \quad (81.10)$$

Las derivadas con respecto de c_t y w_t de la ecuación anterior conducen a

$$\frac{1}{c_t} - V'(a_t) = 0 \quad (81.11)$$

y

$$0 = V'(a_t) a_t (\mu - r) + V''(a_t) w_t a_t^2 \sigma^2 = 0.$$

La última ecuación implica que

$$V''(a_t) = -V'(a_t) \frac{(\mu - r)}{w_t a_t \sigma^2}. \quad (81.12)$$

Un candidato adecuado para resolver esta ecuación diferencial es

$$V(a_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(a_t), \quad (81.13)$$

ya que las derivadas

$$V'(a_t) = \frac{\beta_1}{a_t} \quad \text{y} \quad V''(a_t) = -\frac{\beta_1}{a_t^2} \quad (81.14)$$

eliminan la dependencia de a_t en la ecuación (81.12). Si se sustituye el candidato de solución en las ecuaciones (81.11) y (81.12), se obtiene

$$c_t = \frac{1}{\beta_1} a_t \quad (81.15)$$

y

$$w_t \equiv w = \frac{\mu - r}{\sigma^2}. \quad (81.16)$$

Además, si se sustituyen las derivadas $V'(a_t)$ y $V''(a_t)$, calculadas en (81.14), así como c_t , obtenido en (81.11), en la ecuación (81.10), se sigue que

$$0 = \ln(a_t)(1 - \delta\beta_1) - \ln(\beta_1) - \delta\beta_0 + \beta_1 [r + (\mu - r)w] - 1 - \frac{1}{2}\beta_1 \left(\frac{\mu - r}{\sigma^2} \right)^2 \sigma^2, \quad (81.17)$$

esto a su vez implica que

$$\beta_1 = \frac{1}{\delta} \quad (81.18)$$

y

$$\beta_0 = \frac{1}{\delta} \left(\ln(\delta) - 1 + \frac{r}{\delta} + \frac{1}{2\delta} \lambda^2 \right), \quad (81.19)$$

donde $\lambda = (\mu - r)/\sigma$.

81.4.4 Proceso de riqueza y consumo del agente

A continuación se determinan las trayectorias estocásticas de la riqueza y el consumo del individuo. Si se sustituyen los valores óptimos de w y c_t en la ecuación (81.9), se tiene

$$da_t = a_t [(r - \delta + \lambda^2) dt + \lambda dW_t],$$

donde $\lambda = (\mu - r)/\sigma$. Al aplicar el lema de Itô a $d \ln a_t$, se sigue que

$$d \ln a_t = (r - \delta + \frac{1}{2}\lambda^2) dt + \lambda dW.$$

Por lo tanto, la solución de esta ecuación diferencial estocástica, condicionada en a_0 , está dada por

$$a_t = a_0 \exp \left\{ (r - \delta + \frac{1}{2}\lambda^2) t + \lambda W_t \right\}.$$

Si se escribe $W_t = \mathcal{E}\sqrt{t}$, donde $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, entonces

$$a_t = a_0 \exp \left\{ (r - \delta + \frac{1}{2}\lambda^2) t + \lambda \mathcal{E}\sqrt{t} \right\}. \quad (81.20)$$

Por otra parte, como $c_t = \delta a_t$, el consumo satisface

$$c_t = \delta a_0 \exp \left\{ (r - \delta + \frac{1}{2}\lambda^2) t + \lambda \mathcal{E}\sqrt{t} \right\}. \quad (81.21)$$

81.5 Consumidor-inversionista con función de utilidad con coeficiente constante de aversión al riesgo

En esta sección, mediante el uso de las diversas técnicas de optimización hasta ahora estudiadas (Hamiltoniano, Euler-Lagrange y Hamilton-Jacobi-Bellman), se resuelve el problema de un consumidor-inversionista que toma decisiones en tiempo continuo, destacando su consistencia. Asimismo se lleva a cabo un análisis comparativo entre el caso determinista y estocástico sobre el problema de decisión y se enfatizan las diferencias.

Considere un consumidor racional que desea resolver el siguiente problema:

$$\text{Maximizar}_{c_t} \int_0^{\infty} \frac{c_t^{\gamma}}{\gamma} e^{-\delta t} dt$$

sujeto a:

$$\dot{a}_t = a_t r - c_t, \quad a_0 \text{ conocido},$$

donde c_t es consumo, δ es la tasa subjetiva de descuento y r es la tasa de interés real.

81.5.1 Control óptimo determinista (Hamiltoniano)

A continuación se utiliza la técnica del Hamiltoniano para resolver el problema de decisión del consumidor-inversionista. Observe, primero, que para garantizar que la utilidad marginal sea decreciente se requiere que $\gamma < 1$. Ahora bien, el Hamiltoniano está dado por

$$\mathcal{H}(c_t, a_t \lambda_t) = \frac{c_t^{\gamma}}{\gamma} + \lambda_t(a_t r - c_t).$$

Las condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = \dot{a}_t \quad \text{y} \quad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_t} = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \delta, \quad (81.22)$$

las cuales conducen, respectivamente, a

$$c_t^{\gamma-1} - \lambda_t = 0, \quad (81.23)$$

$$\dot{a}_t = r a_t - c_t \quad (81.24)$$

y

$$-\lambda_t r = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \delta. \quad (81.25)$$

Ahora bien, a partir de (81.25), se obtiene

$$\dot{\lambda}_t - \lambda(\delta - r) = 0.$$

La solución de la ecuación diferencial anterior, dado λ_0 , está dada por

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{(\delta-r)t}.$$

Después de sustituir la ecuación anterior en (81.23), se tiene

$$c_t = \lambda_0^{1/(\gamma-1)} e^{(\delta-r)t/(\gamma-1)}. \quad (81.26)$$

Por otro lado, en virtud de la ecuación (81.24), se sigue que

$$\int_0^{\infty} c_t e^{-rt} dt = r \int_0^{\infty} a_t e^{-rt} dt - \int_0^{\infty} \dot{a}_t e^{-rt} dt. \quad (81.27)$$

Al resolver la primera integral por partes, se tiene que

$$\int_0^\infty r a_t e^{-rt} dt = -a_t e^{-rt} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \dot{a}_t e^{-rt} dt.$$

Si se supone que $\lim_{t \rightarrow \infty} a_t e^{-rt} = 0$ en la ecuación anterior y el resultado se sustituye en (81.27), se verifica que

$$\int_0^\infty c_t e^{-rt} dt = a_0. \quad (81.28)$$

Si se sustituye (81.23) en esta ecuación, se obtiene

$$a_0 = \lambda_0^{1/(\gamma-1)} \int_0^\infty e^{-(\delta-r\gamma)t/(1-\gamma)} dt,$$

por lo que

$$a_0 = \lambda_0^{1/(\gamma-1)} \left(\frac{1-\gamma}{\delta-r\gamma} \right).$$

En virtud de (81.26), el consumo está dado por

$$c_t = a_0 \left(\frac{\delta-r\gamma}{1-\gamma} \right) e^{(r-\delta)t/(1-\gamma)}. \quad (81.29)$$

Por supuesto, para garantizar que el consumo sea positivo se requiere además que $\delta > r\gamma$.

81.5.2 Cálculo de variaciones (ecuación de Euler-Lagrange)

A continuación se utiliza la ecuación de Euler-Lagrange para caracterizar el consumo óptimo de un agente racional. Consideré de nuevo el problema

$$\underset{c_t}{\text{Maximizar}} \quad \int_0^\infty \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} dt$$

sujeto a:

$$a_0 = \int_0^\infty c_t e^{-rt} dt. \quad (81.30)$$

En este caso el Lagrangeano se define como:

$$\mathcal{L}(c_t, \mu) = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} + \mu c_t e^{-rt}.$$

La condición de primer orden es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0,$$

lo cual implica que

$$c_t^{\gamma-1} e^{-\delta t} - \mu e^{-rt} = 0.$$

Por lo tanto,

$$c_t = \mu^{1/(\gamma-1)} e^{(\delta-r)t/(\gamma-1)}.$$

Al sustituir la ecuación anterior en (81.30), se obtiene

$$a_0 = \mu^{1/(\gamma-1)} \int_0^\infty e^{-(\delta-r\gamma)t/(1-\gamma)} dt,$$

lo cual conduce, nuevamente, a (81.29).

81.5.3 Condición de Hamilton-Jacobi-Bellman, programación dinámica determinista

En esta sección se utiliza la condición de Hamilton-Jacobi-Bellman de programación dinámica determinista para resolver el problema intertemporal de decisión de un consumidor racional. Si se define

$$J(a_t, t) = \max_{c_t} \left\{ \int_t^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds \right\}, \quad (81.31)$$

se tiene la siguiente ecuación recursiva

$$\begin{aligned} J(a_t, t) &= \max_{c_t} \left\{ \int_t^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds \right\} \\ &= \max_{c_t} \left\{ \int_t^{t+dt} \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + \int_{t+dt}^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds \right\} \\ &= \max_{c|_{[t, t+dt]}} \left\{ \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} dt + J(a_t + da_t, t + dt) + o(dt) \right\} \\ &= \max_{c|_{[t, t+dt]}} \left\{ \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} dt + J(a_t, t) + J_t dt + J_a da + o(dt) \right\} \\ &= \max_{c|_{[t, t+dt]}} \left\{ \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} + J(a_t, t) + J_t + J_a \dot{a}_t + \frac{o(dt)}{dt} \right\}. \end{aligned} \quad (81.32)$$

Si se toma el límite cuando $dt \rightarrow 0$, entonces

$$J(a_t, t) = \max_{c_t} \left\{ e^{-\delta t} \frac{c_t^\gamma}{\gamma} + J(a_t, t) + J_t + J_a(a_t r - c_t) \right\}.$$

Equivalentemente,

$$0 = \max_{c_t} \left\{ e^{-\delta t} \frac{c_t^\gamma}{\gamma} + J_t + J_a(a_t r - c_t) \right\}. \quad (81.33)$$

Si c_t es máximo, entonces

$$0 = e^{-\delta t} \frac{c_t^\gamma}{\gamma} + J_t + J_a(a_t r - c_t). \quad (81.34)$$

Considere el siguiente candidato de solución de la ecuación anterior, en variables separables, de la ecuación anterior

$$J(a_t, t) = V(a_t) e^{-\delta t}.$$

Al sustituir la ecuación anterior en (81.32), se tiene que

$$0 = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} - \delta V(a_t) + V'(a_t)(a_t r - c_t). \quad (81.35)$$

Si se elige

$$V(a_t) = \frac{\beta a_t^\gamma}{\gamma},$$

se sigue que

$$0 = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} - \delta \beta \frac{a_t^\gamma}{\gamma} + \beta a_t^{\gamma-1}(a_t r - c_t).$$

La derivada de esta ecuación con respecto de c_t conduce a

$$c_t = \beta^{1/(\gamma-1)} a_t. \quad (81.36)$$

Si se sustituye la ecuación anterior en (81.34), se obtiene

$$0 = \frac{\beta^{\gamma/(\gamma-1)}}{\gamma} - \frac{\delta \beta}{\gamma} + \beta r - \beta^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (81.37)$$

de donde

$$\beta^{1/(\gamma-1)} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \left(\frac{\delta}{\gamma} - r \right) = \frac{\delta - \gamma r}{1-\gamma}. \quad (81.38)$$

Después de sustituir la ecuación anterior en (81.36), se obtiene

$$c_t = \left(\frac{\delta - \gamma r}{1-\gamma} \right) a_t. \quad (81.39)$$

Ahora bien, dado que

$$\dot{a}_t = r a_t - c_t = r a_t - \alpha a_t = (r - \alpha) a_t,$$

donde $\alpha = (\delta - \gamma r)/(1 - \gamma)$, se tiene

$$a_t = a_0 e^{(r-\alpha)t}.$$

Observe ahora que

$$r - \alpha = r - \frac{\delta - \gamma r}{1 - \gamma} = \frac{r - \delta}{1 - \gamma}.$$

Por lo tanto,

$$a_t = a_0 e^{(r-\delta)/(1-\gamma)t}.$$

Finalmente,

$$c_t = a_0 \left(\frac{\delta - \gamma r}{1 - \gamma} \right) e^{(r-\delta)t/(1-\gamma)}.$$

81.5.4 Condición de Hamilton-Jacobi-Bellman, programación dinámica estocástica

En esta sección se supone que el consumidor tiene acceso a un bono que paga una tasa de interés libre de riesgo, r , y a un activo con riesgo, una acción, que paga un rendimiento dR_s . En este caso, el agente desea resolver:

$$\text{Maximizar}_{c_t} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (81.40)$$

sujeto a:

$$\begin{cases} da_t = (1 - w_t)a_t r dt + w_t a_t dR_s - c_t dt, \\ dR_s = \mu dt + \sigma dW_t, \end{cases}$$

donde $w_t = b_t/a_t$ y $1 - w_t = S_t/a_t$. Las variables b_t y S_t representan, respectivamente, el precio del bono y el precio de la acción. De esta manera, la restricción se puede reescribir como:

$$da_t = a_t \left(r + (\mu - r)w_t - \frac{c_t}{a_t} \right) dt + w_t a_t \sigma dW_t. \quad (81.41)$$

Si se define

$$J(a_t, t) = \max_{c_t} \mathbb{E} \left[\int_t^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (81.42)$$

se obtiene la siguiente ecuación recursiva:

$$\begin{aligned} J(a_t, t) &= \max_{c_t} \mathbb{E} \left[\int_t^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \max_{c_t} \mathbb{E} \left[\int_t^{t+dt} \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + \int_{t+dt}^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \max_{c|_{[t, t+dt]}} \mathbb{E} \left[\int_t^{t+dt} \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + J(a_t + da_t, t + dt) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \max_{c|_{[t, t+dt]}} \mathbb{E} \left[\frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} dt + o(dt) + J(a_t, t) + dJ(a_t, t) \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

En virtud del lema de Itô, aplicado a $J = J(a_t, t)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
 0 &= \max_{c|_{[t,t+dt]}} \mathbb{E} \left[\frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} dt + o(dt) \right. \\
 &\quad \left. + \left(J_t + J_a a_t \left(r + (\mu - r) w_t - \frac{c_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} J_{aa} w_t^2 a_t^2 \sigma^2 \right) dt + J_a w_t a_t \sigma dW_t \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \max_{c_t} \left\{ \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} dt + o(dt) + \left(J_t + J_a a_t \left(r + (\mu - r) w_t - \frac{c_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} J_{aa} w_t^2 a_t^2 \sigma^2 \right) dt \right\} \\
 &= \max_{c_t} \left\{ \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} + J_t + J_a a_t \left(r + (\mu - r) w_t - \frac{c_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} J_{aa} w_t^2 a_t^2 \sigma^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{81.43}$$

Consideré ahora un candidato, en variables separables, de la ecuación diferencial parcial anterior

$$J(a_t, t) = V(a_t) e^{-\delta t}.$$

En este caso,

$$J_a = V'(a_t) e^{-\delta t}, \quad J_{aa} = V''(a_t) e^{-\delta t} \quad \text{y} \quad J_t = -\delta V(a_t) e^{-\delta t}.$$

Al sustituir las ecuaciones anteriores en (81.43), se tiene que

$$0 = \max_{c_t} \left[\frac{c_t^\gamma}{\gamma} - \delta V(a_t) + V'(a_t) a_t \left(r + (\mu - r) w_t - \frac{c_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} V''(a_t) w_t^2 a_t^2 \sigma^2 \right].$$

Si c_t es óptimo, se sigue que

$$0 = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} - \delta V(a) + V'(a_t) a_t \left(r + (\mu - r) w_t - \frac{c_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} V''(a_t) a_t^2 w_t^2 \sigma^2. \tag{81.44}$$

Si ahora se elige

$$V(a_t) = \beta \frac{a_t^\gamma}{\gamma}, \tag{81.45}$$

se verifica que

$$V'(a_t) = \beta a_t^{\gamma-1} \quad \text{y} \quad V''(a_t) = \beta(\gamma-1) a_t^{\gamma-2}.$$

Por lo tanto, la ecuación (81.44) se transforma en

$$0 = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} - \delta \beta \frac{a_t^\gamma}{\gamma} + \beta a_t^\gamma \left(r + (\mu - r) w_t - \frac{c_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} \beta(\gamma-1) a_t^\gamma w_t^2 \sigma^2. \tag{81.46}$$

Si se deriva la expresión anterior con respecto de c_t y w_t , se tiene que

$$c_t = \beta^{1/(\gamma-1)} a_t \tag{81.47}$$

y

$$w \equiv w_t = \left(\frac{1}{1-\gamma} \right) \left(\frac{\mu - r}{\sigma^2} \right). \tag{81.48}$$

Si se sustituyen (81.47) y (81.48) en la ecuación (81.46), se tiene que

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\beta^{\gamma/(\gamma-1)}}{\gamma} - \frac{\delta \beta}{\gamma} + \beta \left[r + \left(\frac{1}{1-\gamma} \right) \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 - \beta^{1/(\gamma-1)} \right] + \frac{1}{2} \beta(\gamma-1) \frac{\sigma^2}{(1-\gamma)^2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma^2} \right)^2 \\
 &= \frac{\beta^{\gamma/(\gamma-1)}}{\gamma} - \frac{\delta \beta}{\gamma} + \beta r + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{1-\gamma} \right) \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 - \beta^{\gamma/(\gamma-1)}.
 \end{aligned} \tag{81.49}$$

De esta manera,

$$\beta^{1/(\gamma-1)} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[\frac{\delta}{\gamma} - r - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\gamma} \right) \lambda^2 \right],$$

donde $\lambda \equiv (\mu - r)/\sigma$ es el premio al riesgo de mercado. Para garantizar que el consumo se mantenga positivo se requiere

$$\delta > r\gamma + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \lambda^2.$$

81.6 Condición de Hamilton-Jacobi-Bellman, programación dinámica estocástica y valuación de opciones

Se supone ahora que el individuo tiene acceso a tres activos reales: una acción de precio S_t , una opción sobre la acción de precio $c = c(S_t, t)$ y un bono de precio b_t libre de riesgo de incumplimiento que paga tasa fija r . Suponga que el rendimiento que paga el activo subyacente es

$$dR_S = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (81.50)$$

Asimismo, suponga que el rendimiento que paga el bono está dado por

$$dR_b = r dt. \quad (81.51)$$

En vista de (81.50), la aplicación del lema de Itô a $c = c(S_t, t)$ conduce a que el rendimiento de la opción satisface

$$dR_c = \frac{dc}{c_t} = \mu_c dt + \sigma_c dW_t, \quad (81.52)$$

donde

$$\mu_c \equiv \left(\frac{\partial c_t}{\partial t} + \frac{\partial c_t}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \frac{1}{c_t}$$

y

$$\sigma_c = \frac{\partial c_t}{\partial S_t} \sigma S_t \frac{1}{c_t}.$$

Se supone que $c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0)$, donde K es el precio de ejercicio de la opción. Sea $w_{1t} = S_t/a_t$ la proporción de la riqueza que el individuo asigna a la tenencia de acciones, $w_{2t} = c/a_t$ la proporción de la riqueza que asigna a una opción europea de compra sobre la acción, y $1 - w_{1t} - w_{2t}$ la fracción complementaria que se asigna a un instrumento libre de riesgo que paga un rendimiento r constante a cualquier plazo. En este caso, el agente desea resolver el siguiente problema:

$$\text{Maximizar}_{c_t} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (81.53)$$

sujeto a:

$$da_t = a_t w_{1t} dR_S + a_t w_{2t} dR_c + a_t (1 - w_{1t} - w_{2t}) dR_b - c_t dt. \quad (81.54)$$

Es importante destacar la diferencia entre la notación c y c_t , la primera representa el precio de la opción y la segunda el consumo. Después de sustituir (81.50)-(81.52) en la restricción presupuestal, ésta se puede reescribir como

$$da_t = a_t \left(r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_c - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t} \right) dt + a_t (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c) dW_t.$$

Si se define

$$J(a_t, t) = \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}} \mathbb{E} \left[\int_t^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

se sigue que

$$\begin{aligned} J(a_t, t) &= \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}} \mathbb{E} \left[\int_t^{t+dt} \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + \int_{t+dt}^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}|_{[t, t+dt]}} \mathbb{E} \left[\int_t^{t+dt} \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} ds + J(a_t + da_t, t + dt) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}|_{[t, t+dt]}} \mathbb{E} \left[\frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} dt + o(dt) + J(a_t, t) + dJ(a_t, t) \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

En virtud del lema de Itô, aplicado a $J = J(a_t, t)$, se tiene que

$$0 = \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}} \mathbb{E} \left[\frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} dt + o(dt) + \left[J_t + J_a a_t \left(r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_c - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} J_{aa} a_t^2 (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)^2 \right] dt + J_a a_t (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c) dW_t \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (81.55)$$

Si se toman esperanzas de los términos dentro del paréntesis y, posteriormente, se divide entre dt y se toma el límite cuando $dt \rightarrow 0$, se sigue que

$$0 = \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}} \left\{ \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} + J_t + J_a a_t \left(r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_c - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} J_{aa} a_t^2 (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)^2 \right\}. \quad (81.56)$$

Considere un candidato de la forma

$$J(a_t, t) = V(a_t) e^{-\delta t},$$

entonces

$$J_a = V'(a_t) e^{-\delta t}, \quad J_{aa} = V''(a_t) e^{-\delta t} \quad \text{y} \quad J_t = -\delta V(a_t) e^{-\delta t}.$$

Ahora bien, si w_{1t} , w_{2t} y c_t son óptimos, se tiene que

$$0 = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} - \delta V(a_t) + V'(a_t) a_t \left(r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_c - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} V''(a_t) a_t^2 (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)^2. \quad (81.57)$$

Suponga que

$$V(a_t) = \beta \frac{a_t^\gamma}{\gamma},$$

entonces

$$V'(a_t) = \beta a_t^{(\gamma-1)} \quad \text{y} \quad V''(a_t) = \beta(\gamma-1) a_t^{(\gamma-2)}.$$

De esta manera, la ecuación (81.57) se transforma en

$$0 = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} - \delta \beta \frac{a_t^\gamma}{\gamma} + \beta a_t^\gamma \left(r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_c - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} \beta(\gamma-1) a_t^\gamma (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)^2. \quad (81.58)$$

Al derivar la expresión anterior con respecto de c_t, w_{1t}, w_{2t} se obtienen, respectivamente:

$$c_t^{\gamma-1} - \beta a_t^{\gamma-1} = 0, \quad (81.59)$$

$$\beta a_t^\gamma (\mu - r) + \beta(\gamma-1) a_t^\gamma (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c) \sigma = 0$$

y

$$\beta a_t^\gamma (\mu_c - r) + \beta(\gamma-1) a_t^\gamma (w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c) \sigma_c = 0.$$

Estas tres ecuaciones se pueden reescribir como:

$$c_t = \beta^{1/(\gamma-1)} a_t,$$

$$\mu - r = (1 - \gamma)(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\sigma \quad (81.60)$$

y

$$\mu_c - r = (1 - \gamma)(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\sigma_c. \quad (81.61)$$

Las dos últimas ecuaciones implican que los premios al riesgo de S_t y $c(S_t, t)$ son iguales, es decir,

$$\frac{\mu_c - r}{\sigma_c} = \frac{\mu - r}{\sigma}. \quad (81.62)$$

Después de sustituir μ_c y σ_c en la ecuación anterior se tiene que

$$\left(\frac{\partial c_t}{\partial t} + \frac{\partial c_t}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) - r c_t = (\mu - r) \frac{\partial c_t}{\partial S_t} S_t,$$

lo cual conduce a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes:

$$\frac{\partial c_t}{\partial t} + \frac{\partial c_t}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 - r c_t = 0,$$

junto con la condición de frontera $c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0)$.

81.7 Dinámica de la riqueza real

En esta sección se determina la dinámica estocástica de riqueza real del consumidor. Si se sustituye (81.59) en (81.58), se tiene que

$$0 = \frac{\beta^{\gamma/(\gamma-1)}}{\gamma} - \frac{\delta\beta}{\gamma} + \beta(r + \lambda\sigma w_{1t} + \lambda_c\sigma_c w_{2t}) - \beta^{\gamma/(\gamma-1)} + \frac{\beta}{2(1-\gamma)}\lambda^2,$$

donde

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad \text{y} \quad \lambda_c = \frac{\mu_c - r}{\sigma_c}.$$

En virtud de que $\lambda = \lambda_c$, la ecuación anterior se transforma en

$$0 = \frac{\beta^{\gamma/(\gamma-1)}}{\gamma} - \frac{\delta\beta}{\gamma} + \beta r + \beta\lambda(\sigma w_{1t} + \sigma_c w_{2t}) - \beta^{\gamma/(\gamma-1)} + \frac{\beta}{2(1-\gamma)}\lambda^2$$

ó

$$0 = \frac{\beta^{\gamma/(\gamma-1)}}{\gamma} - \frac{\delta\beta}{\gamma} + \beta r + \beta\lambda^2 \frac{1}{1-\gamma} - \beta^{\gamma/(\gamma-1)} + \frac{\beta}{2(1-\gamma)}\lambda^2,$$

lo cual implica que

$$\beta^{1/(\gamma-1)} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[\frac{\delta}{\gamma} - r - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\gamma} \right) \lambda^2 \right].$$

81.8 Bibliografía sugerida

- Bellman, R. (1957). Dynamic Programming. Princeton University Press. Princeton, N. J.
- Bellman, R. and S. Dreyfus (1962). Applied Dynamic Programming. Princeton University Press. Princeton, N. J.
- Fleming, W. H. and R. W. Rishel (1982). Deterministic and Stochastic Optimal Control (Stochastic Modelling and Applied Probability). Springer-Verlag. New York, Berlin.
- Kalman, R. E. (1960). "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems". *Journal of Basic Engineering*, Vol. 82, pp. 35-45.
- Kalman, R. E. and R. S. Bucy (1961). "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory". *Journal of Basic Engineering*, Vol. 83. pp. 95-107.
- Kushner, H. J. (1971). Introduction to Stochastic Control. Holt Publications. New York.
- Venegas-Martínez, F. (2000). "On Consumption, Investment, and Risk". *Economía Mexicana, Nueva Época*, Vol. 9, No. 2, pp. 227-244.
- Venegas-Martínez, F. (2002). "Optimal Production in Monopoly Pricing: A Stochastic and Dynamic Approach". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas, REMEF*, Vol. 1, No. 2. pp. 153-168.

81.9 Ejercicios

81.1 De acuerdo con la subsección 81.4.4, el proceso que conduce a la riqueza real, a_t , del consumidor-inversionista está dado por

$$a_t = a_0 \exp \left\{ \left(r - \delta + \frac{1}{2} \lambda^2 \right) t + \lambda W_t \right\}.$$

Muestre que si $r = \delta$, entonces $a_0/a_t = e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2} \lambda^2 t}$ es una martingala.

81.2 Muestre que la dinámica estocástica de la riqueza real, a_t , en (81.41) y (81.54) satisface

$$a_t = a_0 \left[\exp \left\{ \left(r - \delta + \frac{1}{2} \lambda^2 \right) t + \lambda W_t \right\} \right]^{1-\gamma}.$$

81.3 Considere la función de utilidad hiperbólica, la cual está dada por:

$$u(c_t) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{\phi c_t}{1-\gamma} + \eta \right)^\gamma,$$

donde ϕ , γ , δ y η son constantes. Obtenga la condición de Hamilton-Jacobi-Bellman cuando el agente tiene acceso a un activo con riesgo y a una opción sobre dicha acción.

81.4 Repita el ejercicio anterior con

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}.$$

81.5 Repita el ejercicio anterior con

$$u(c_t) = -\frac{1}{\theta} e^{-\theta c_t}.$$

81.6 Considere un portafolio con w_t unidades de una acción de precio S_t y $1-w_t$ unidades de un bono libre de riesgo que paga una tasa de interés constante r . Suponga que el valor inicial del portafolio es $Z_0 = 1$. En este caso, el rendimiento del portafolio es $Z_t = w_t[(S_t - S_0)/S_0] + (1 - w_t)r$. Suponga que $(S_t - S_0)/S_0 = \mu t + \sigma W_t$, entonces

$$Z_t = [r + (\mu - r)w_t]t + \sigma w_t W_t.$$

Considere la función de utilidad $U(Z_t) = -e^{-\phi Z_t}$. Si se desea resolver el problema

$$\underset{w_t}{\text{Maximizar}} \quad E[-e^{-\phi Z_t}] = -e^{-\phi \{[r + (\mu - r)w_t - \frac{1}{2}\phi\sigma^2 w_t^2]t\}},$$

el cual es equivalente a

$$\underset{w_t}{\text{Maximizar}} \quad r + (\mu - r)w_t - \frac{1}{2}\phi\sigma^2 w_t^2,$$

la solución es

$$w = \frac{\lambda}{\sigma\phi}.$$

Compare este óptimo con (81.16) y (81.84). Discuta los resultados.

XIX. MODELOS ECONÓMICOS DE RIESGOS

- 82. Decisiones de consumo e inversión bajo condiciones riesgo e incertidumbre (I): modelos de difusión
- 83. Decisiones de consumo e inversión bajo condiciones riesgo e incertidumbre (II): difusión con saltos
- 84. Decisiones de consumo e inversión bajo condiciones riesgo e incertidumbre (III): generalizaciones diversas
- 85. Modelo de Cox-Ingersoll-Ross de equilibrio general para determinar el proceso de tasa corta
- 86. Modelo de tasa corta de Dothan
- 87. Modelo de Fisher de riesgo de inflación con bonos indexados
- 88. Riesgo no diversificable de tipo de cambio (I): difusión con saltos
- 89. Riesgo no diversificable de tipo de cambio (II): política fiscal incierta
- 90. Riesgo no diversificable de tipo de cambio (III): ingreso laboral incierto
- 91. Maximización de utilidad y valuación de opciones con volatilidad estocástica

CAPÍTULO 82

DECISIONES DE CONSUMO Y PORTAFOLIO BAJO CONDICIONES DE RIESGO (I): PROCESOS DE DIFUSIÓN

Conceptos básicos de este capítulo:

- Consumidor-inversionista maximizador de utilidad adverso al riesgo
- Procesos de difusión
- Control óptimo estocástico
- Condición de Hamilton-Jacobi-Bellman

82.1 Introducción

En el presente capítulo se desarrolla un modelo que describe el comportamiento de un consumidor-inversionista, adverso al riesgo, que toma decisiones de consumo y portafolio en un ambiente de riesgo. Considere una economía poblada por consumidores idénticos con vida infinita, los cuales maximizan su utilidad. Se supone que la función de utilidad tiene dos argumentos: un bien de consumo y la tenencia de saldos monetarios reales. El bien de consumo es de carácter perecedero y los saldos reales producen satisfacción en los consumidores por sus servicios de liquidez.

82.2 Dinámica del nivel general de precios

Se supone que en esta economía los individuos perciben que el precio del bien, P_t , es conducido por el siguiente proceso estocástico de difusión:

$$dP_t = \pi P_t dt + \sigma_P P_t dW_{P,t}, \quad (82.1)$$

donde el parámetro de tendencia, π , representa la tasa de inflación promedio esperada y el parámetro de volatilidad, σ_P , denota la variación esperada de la tasa de inflación. El proceso $W_{P,t}$ es un proceso de Wiener estandarizado, es decir, $W_{P,t}$ presenta incrementos normales independientes con $E[dW_{P,t}] = 0$ y $\text{Var}[dW_{P,t}] = dt$. La ecuación (82.1) generaliza el supuesto de previsión perfecta cuando el nivel general de precios sigue una distribución log-normal.

82.2.1 Activos del consumidor

El consumidor representativo posee tres diferentes acervos de activos: dinero, M_t ; títulos de deuda pública, B_t ; y acciones, k_t . En consecuencia, la riqueza real, a_t , del individuo está dada por:

$$a_t = m_t + b_t + k_t, \quad (82.2)$$

donde $m_t = M_t/P_t$ son los saldos monetarios reales y $b_t = B_t/P_t$ es la tenencia de bonos emitidos por el sector público en términos reales.

82.2.2 Problema de decisión del consumidor

El consumidor obtiene satisfacción por un bien de consumo y por la tenencia de saldos reales por sus servicios de liquidez. Se supone que la función de utilidad esperada es del tipo von Neumann-Morgenstern. Específicamente, la función de utilidad total descontada al tiempo $t = 0$, V_0 , de un individuo representativo y competitivo tiene la siguiente forma separable:

$$V_0 = E_0 \left\{ \int_0^{\infty} [u(c_t) + v(m_t)] e^{-\delta t} dt \right\}, \quad (82.3)$$

donde $u(c_t)$ es el índice de satisfacción por el consumo; $v(m_t)$ es la utilidad por mantener saldos reales; δ es la tasa subjetiva de descuento, también llamada tasa subjetiva intertemporal; y E_0 es la esperanza condicional al conjunto de información disponible en el tiempo $t = 0$. En particular, se seleccionan $u(c_t) = \theta \log(c_t)$ y $v(m_t) = (1 - \theta) \log(m_t)$, lo cual conduce a un consumidor adverso al riesgo. Este supuesto permitirá generar soluciones analíticas que faciliten el estudio de las mismas. Por otra parte, la evolución de la acumulación de la riqueza real sigue la ecuación diferencial estocástica:

$$da_t = a_t [N_{m,t} dR_{m,t} + N_{b,t} dR_{b,t} + N_{k,t} dR_{k,t}] - c_t (1 + \tau_c) dt - d\tau_t, \quad (82.4)$$

donde

$$N_{j,t} \equiv \frac{j_t}{a_t} \text{ proporción del portafolio en el activo } j, \quad j = m, b, k;$$

$dR_{j,t}$ = tasa de rendimiento real después de impuestos sobre el activo j , $j = m, b, k$;

$d\tau_t$ = impuestos sobre la riqueza; y

τ_c = impuesto *ad valorem* sobre el consumo.

82.2.3 Rendimiento de los activos

A continuación se determina el rendimiento de los activos disponibles en la economía. Se supone que las tasas nominales de rendimiento que pagan el dinero y los bonos son cero e i , respectivamente, es decir, $dM_t = 0 \times dt$ y $dB_t = i (1 - \tau_y) dt$, donde τ_y es un impuesto aplicado a la tasa de interés nominal de un bono gubernamental. El rendimiento estocástico por la tenencia de saldos reales al tiempo t , $dR_{m,t}$, es simplemente el cambio porcentual en el precio del dinero en términos de bienes. La aplicación del lema de Itô al cambio porcentual del inverso del nivel de precios, tomando (82.1) como el proceso subyacente, conduce a (véase el Apéndice 82.A)

$$dR_{m,t} = P_t d\left(\frac{1}{P_t}\right) = \frac{d(M_t/P_t)}{(M_t/P_t)} = r_m dt - \sigma_P dW_{P,t}, \quad (82.5)$$

donde $r_m = -\pi + \sigma_P^2$. El rendimiento estocástico por la tenencia de bonos se obtiene en forma similar como

$$dR_{b,t} = r_b dt - \sigma_P dW_{P,t}, \quad (82.6)$$

donde $r_b = i(1 - \tau_y) - \pi + \sigma_P^2$. Es importante observar que los rendimientos del dinero y de los bonos se ven afectados por la volatilidad en el nivel general de precios. La tasa de rendimiento de las acciones después de impuestos será denotada mediante

$$dR_{k,t} = r_k dt + \sigma_k dW_{k,t}, \quad (82.7)$$

donde el proceso $dW_{k,t}$ tiene características similares al proceso definido en (82.1).

Además del impuesto τ_y aplicado a la tasa de interés nominal de instrumentos de deuda pública y del impuesto *ad valorem* τ_c que se paga por el consumo, el consumidor paga un impuesto sobre la riqueza de la forma

$$d\tau_t = a_t \bar{\tau} dt + a_t \sigma_\tau dW_{\tau,t}, \quad (82.8)$$

donde $\bar{\tau}$ es la tasa impositiva media esperada sobre la riqueza real. Al igual que antes, $dW_{\tau,t}$ comparte las mismas características que el proceso de Wiener definido en (82.1).

82.3 Decisiones óptimas de los consumidores

El objetivo del consumidor es elegir, en cada momento, el portafolio de activos y la cantidad de consumo que maximicen (82.3) sujeto a (82.4). Note que después de sustituir las expresiones (82.5)-(82.8) en la ecuación estocástica de acumulación de la riqueza, expresión (82.4), ésta se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{da_t}{a_t} &= \left[N_{m,t}r_m + N_{b,t}r_b + N_{k,t}r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] dt \\ &\quad + N_{k,t}\sigma_k dW_{k,t} - (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_P dW_{P,t} - \sigma_\tau dW_{\tau,t}. \end{aligned} \quad (82.9)$$

La solución del problema de maximización de utilidad total descontada sujeto a (82.9) y a la restricción de normalización

$$N_{m,t} + N_{b,t} + N_{k,t} = 1, \quad (82.10)$$

está dada por (véase el Apéndice 82.B):

$$c_t = \frac{\delta\theta}{(1+\tau_c)}a_t, \quad (82.11)$$

$$0 = \frac{\delta(1-\theta)}{N_{m,t}} + r_m - (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_P^2 + N_{k,t}\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \delta\phi, \quad (82.12)$$

$$0 = r_b - (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_P^2 + N_{k,t}\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \delta\phi \quad (82.13)$$

y

$$0 = r_k - N_{k,t}\sigma_k^2 + (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_{Pk} + \sigma_{k\tau} - \delta\phi, \quad (82.14)$$

donde ϕ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción (82.10). Después de restar (82.12) de (82.13), se encuentra que la proporción óptima de la riqueza que se asigna a la tenencia de saldos reales:

$$\hat{N}_m = \frac{\delta(1-\theta)}{i(1-\tau_y)}, \quad (82.15)$$

la cual es independiente del tiempo. Asimismo, después de restar (82.13) de (82.14), se tiene que

$$\hat{N}_k = \frac{A}{B}, \quad (82.16)$$

donde

$$A \equiv r_k - r_b + \sigma_P^2 + \sigma_{Pk} + \sigma_{P\tau} + \sigma_{k\tau} \quad (82.17)$$

y

$$B \equiv \sigma_P^2 + 2\sigma_{Pk} + \sigma_k^2 > 0. \quad (82.18)$$

Note también que en ningún caso se han impuesto restricciones para que las proporciones de la riqueza asignadas a la tenencia de activos sean estrictamente positivas y menores que la unidad. Por lo tanto, las ventas en corto de activos son permitidas. Finalmente, el portafolio óptimo queda completamente determinado con \hat{N}_b , el cual se obtiene a partir de (82.10) como

$$\hat{N}_b = 1 - \frac{\delta(1-\theta)}{i(1-\tau_y)} - \hat{N}_k. \quad (82.19)$$

Apéndice 82.A

En este apéndice se establecen, sin demostración,¹ un par de resultados sobre la diferencial estocástica del cociente y la multiplicación de dos movimientos geométricos Brownianos. Dadas las ecuaciones diferenciales estocásticas, homogéneas y lineales,

$$dX_t = X_t (\mu_X dt + \sigma_X dW_X)$$

y

$$dY_t = Y_t (\mu_Y dt + \sigma_Y dW_Y),$$

donde dW_X , dW_Y son procesos de Wiener con $\text{Cov}(dW_X, dW_Y) = \rho_{XY} dt$, entonces las diferenciales estocásticas del cociente X_t/Y_t y del producto $X_t Y_t$ satisfacen, respectivamente,

$$d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) = \frac{X_t}{Y_t} \left[(\mu_X - \mu_Y + \sigma_Y^2 - \sigma_{XY}) dt + \sigma_X dW_X - \sigma_Y dW_Y \right] \quad (82.A.1)$$

y

$$d(X_t Y_t) = X_t Y_t [(\mu_X + \mu_Y + \sigma_{XY}) dt + \sigma_X dW_X + \sigma_Y dW_Y]. \quad (82.A.2)$$

Apéndice 82.B

En este apéndice se determinan las condiciones de primer orden para una solución interior del siguiente problema de control óptimo estocástico

$$\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} E_0 \left\{ \int_0^\infty [\theta \log(c_t) + (1-\theta) \log(N_{m,t} a_t)] e^{-\delta t} dt \right\}, \quad (82.B.1)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \frac{da_t}{a_t} &= \left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] \\ &\quad + N_{k,t} \sigma_k dW_{k,t} - (N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_P dW_{P,t} - \sigma_\tau dW_{\tau,t} \end{aligned} \quad (82.B.2)$$

y

$$1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t} = 0, \quad (82.B.3)$$

donde i , π , τ_c , τ_y , $\bar{\tau}$ y las correspondientes varianzas y covarianzas son tomadas como dadas. En este caso, la condición de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B) para la programación dinámica en tiempo continuo está dada por:

$$\begin{aligned} \max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} H(c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}; a_t) &\equiv \\ \max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} &\left\{ \theta \log(c_t) + (1-\theta) \log(N_{m,t} a_t) - \delta V(a_t) \right. \\ &+ a_t V'(a_t) \left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] \\ &+ \frac{1}{2} a_t^2 V''(a_t) \left[(N_{m,t} + N_{b,t})^2 \sigma_P^2 + N_{k,t}^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(N_{m,t} + N_{b,t}) N_{k,t} \sigma_{Pk} + 2(N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_{P\tau} - 2N_{k,t} \sigma_{k\tau} \right] \\ &\quad \left. + \phi(1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t}) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (82.B.4)$$

¹ Véase Gihman and Skorohod (1972).

donde ϕ es el multiplicador de Lagrange asociado con la condición de normalización, $V(a_t)e^{-\delta t}$ es la función de utilidad indirecta del consumidor y $V'(a_t)e^{-\delta t}$ es la variable de co-estado. La condición H-J-B evaluada en el máximo es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en $V(a_t)$. Con el propósito de resolver dicha ecuación diferencial, se postula la función $V(a_t)$ de la forma: $V(a_t) = \beta_0 + \beta_1 \log(a_t)$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} & \max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} H(c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}; a_t) \equiv \\ & \max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} \left\{ \theta \log(c_t) + (1 - \theta) \log(N_{m,t} a_t) - \delta [\beta_0 + \beta_1 \log(a_t)] \right. \\ & + \beta_1 \left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t(1 + \tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] \\ & - \frac{1}{2} \beta_1 \left[(N_{m,t} + N_{b,t})^2 \sigma_P^2 + N_{k,t}^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \right. \\ & \left. \left. - 2(N_{m,t} + N_{b,t}) N_{k,t} \sigma_{P,k} + 2(N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_{P,\tau} - 2N_{k,t} \sigma_{k,\tau} \right] \right. \\ & \left. + \phi(1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t}) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (82.B.5)$$

Por lo tanto, las condiciones necesarias para un máximo son:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial c_t} = \frac{\theta}{c_t} - \frac{\beta_1(1 + \tau_c)}{a_t}; \quad (82.B.6)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial N_{m,t}} = \frac{1 - \theta}{N_{m,t}} + \beta_1 \left[r_m - (N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_P^2 + N_{k,t} \sigma_{P,k} - \sigma_{P,\tau} \right] - \phi; \quad (82.B.7)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial N_{b,t}} = \beta_1 \left[r_b - (N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_P^2 + N_{k,t} \sigma_{P,k} - \sigma_{P,\tau} \right] - \phi; \quad (82.B.8)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial N_{k,t}} = \beta_1 \left[r_k - N_{k,t} \sigma_k^2 + (N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_{P,k} + \sigma_{k,\tau} \right] - \phi \quad (82.B.9)$$

y

$$0 = \frac{\partial H}{\partial \phi} = 1 - (N_{m,t} + N_{b,t} + N_{k,t}). \quad (82.B.10)$$

Falta sólo determinar los coeficientes β_0 y β_1 definidos en $V(a_t)$. Después de sustituir los valores óptimos de \hat{c}_t , \hat{N}_m , \hat{N}_b y \hat{N}_k en la condición de H-J-B, se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - \delta \beta_1) \log(a_t) + \theta \log(\theta) + (1 - \theta) \log(1 - \theta) \\ &- \theta \log[\beta_1(1 + \tau_c)] - (1 - \theta) \log[\beta_1 i(1 - \tau_y)] - \delta \beta_0 \\ &+ \beta_1 \left[\hat{N}_m (-\pi + \sigma_P^2) \right. \\ &+ \hat{N}_b [i(1 - \tau_y) - \pi + \sigma_P^2] + \hat{N}_k r_k - \frac{\hat{c}_t(1 + \tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \Big] \\ &- \frac{1}{2} \beta_1 \left[(\hat{N}_m + \hat{N}_b)^2 \sigma_P^2 + \hat{N}_k^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 - 2(\hat{N}_m + \hat{N}_b) \hat{N}_k \sigma_{P,k} \right. \\ &\left. \left. + 2(\hat{N}_m + \hat{N}_b) \sigma_{P,\tau} - 2\hat{N}_k \sigma_{k,\tau} \right], \right. \end{aligned} \quad (82.B.11)$$

lo cual implica $\beta_1 = 1/\delta$ y

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{\theta}{\delta} \log(\theta) + \frac{(1 - \theta)}{\delta} \log(1 - \theta) - \frac{\theta}{\delta} \log \left(\frac{1 + \tau_c}{\delta} \right) - \frac{(1 - \theta)}{\delta} \log \left[\frac{i(1 - \tau_y)}{\delta} \right] \\ &- \frac{\theta}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} \left[\hat{N}_m (-\pi + \sigma_P^2) + \hat{N}_b [i(1 - \tau_y) - \pi + \sigma_P^2] + \hat{N}_k r_k - \bar{\tau} \right] \\ &- \frac{1}{2} \frac{1}{\delta^2} \left[(\hat{N}_m + \hat{N}_b)^2 \sigma_P^2 + \hat{N}_k^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 - 2(\hat{N}_m + \hat{N}_b) \hat{N}_k \sigma_{P,k} \right. \\ &\left. + 2(\hat{N}_m + \hat{N}_b) \sigma_{P,\tau} - 2\hat{N}_k \sigma_{k,\tau} \right]. \end{aligned} \quad (82.B.12)$$

82.4 Bibliografía sugerida

- Gihman, I. I. and A. V. Skorohod (1972). Stochastic differential equations. Springer-Verlag, Berlin.
- Márquez-Pozos J. M., A. Islas-Camargo y F. Venegas-Martínez (2003). “Flujos internacionales de capital e inversión extranjera de cartera: el caso de México 1989-1999”. *El Trimestre Económico*, Vol. 70(4), No. 280, pp. 791-833.
- Turnovsky, S. J. (1993). “Macroeconomic Policies, Growth, and Welfare in a Stochastic Economy”. *International Economic Review*, Vol. 34, No. 4, pp. 953-981.
- Venegas-Martínez, F. (2001). “Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis”. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, No. 9, pp. 1429-1449.
- Venegas-Martínez, F. (2004). El TLCAN y su impacto en la inversión extranjera de cartera en México. Capítulo del libro: Diez años del TLCAN en México: una perspectiva analítica. E. R. Casares y H. Sobarzo (Compiladores). *El Trimestre Económico, Serie de Lecturas del Fondo de Cultura Económica*, pp. 169-186.
- Venegas-Martínez, F. (2004). “A Dynamic and Stochastic Extension of the Main Theorems of International Trade: The Case of Exhaustible and Non-Renewable Factors”. *Revista Mexicana de Economía y Finanzas, REMEF*, Vol. 3, No. 1, pp. 79-99.

82.5 Ejercicios

82.1 Repita el modelo desarrollado en el presente capítulo bajo el supuesto de que el consumidor-inversionista tiene acceso a un bono extranjero real cuya tasa de rendimiento está dada por

$$db_t^* = b_t^* dR_{b^*,t} = b_t^* r_{b^*} dt.$$

82.2 Repita el modelo desarrollado en el presente capítulo bajo el supuesto de que el consumidor-inversionista tiene acceso a un bono extranjero nominal cuya tasa de rendimiento está dada por

$$db_t^* = b_t^* r_{b^*} dt + b_t^* \sigma_{b^*} W_{b^*,t}.$$

CAPÍTULO 83

DECISIONES DE CONSUMO Y PORTAFOLIO BAJO CONDICIONES DE RIESGO (II): PROCESOS DE DIFUSIÓN CON SALTOS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Consumidor-inversionista maximizador de utilidad adverso al riesgo
- Procesos de difusión con saltos
- Control óptimo estocástico
- Condición de Hamilton-Jacobi-Bellman

83.1 Introducción

En el presente capítulo se desarrolla un modelo que describe el comportamiento de un consumidor-inversionista, adverso al riesgo, que toma decisiones de consumo y portafolio en un ambiente de riesgo.

Con el propósito de generar soluciones analíticamente tratables del problema de maximización de utilidad de un consumidor racional, la estructura de la economía se mantendrá lo más simple posible. En la economía se consume un solo bien de carácter perecedero. Los consumidores son idénticos y tienen vida infinita.

83.2 Dinámica de precios

Se supone que los individuos perciben que el precio del bien, P_t , es conducido por un proceso estocástico de difusión con saltos:

$$dP_t = \pi P_t dt + \sigma_P P_t dW_{P,t} + \nu_P P_t dQ_{P,t}, \quad (83.1)$$

donde π representa la tasa de inflación promedio esperada condicional a que ningún salto ocurra, σ_P es la volatilidad esperada de la tasa de inflación y $1 + \nu_P$ es el tamaño promedio esperado de posibles saltos en el nivel general de precios. El proceso $W_{P,t}$ es un proceso de Wiener estandarizado, es decir, $W_{P,t}$ presenta incrementos normales independientes con $E[dW_{P,t}] = 0$ y $\text{Var}[dW_{P,t}] = dt$. Se supone que los saltos en el nivel general de precios siguen un proceso de Poisson, $Q_{P,t}$, con parámetro de intensidad λ_P , de tal manera que

$$\Pr\{\text{un salto unitario durante } dt\} = \Pr\{dQ_{P,t} = 1\} = \lambda_P dt + o(dt), \quad (83.2)$$

mientras que¹

$$\Pr\{\text{ningún salto en } dt\} = \Pr\{dQ_{P,t} = 0\} = 1 - \lambda_P dt + o(dt). \quad (83.3)$$

Por lo tanto, $E[dQ_{P,t}] = \text{Var}[dQ_{P,t}] = \lambda_P dt$. El número inicial de saltos se supone igual a cero, es decir, $Q_{P,0} = 0$. En todo lo que sigue, se supondrá que los procesos $W_{P,t}$ y $Q_{P,t}$ no están correlacionados entre sí.

¹ Como siempre, $o(h)$ significa que $o(h)/h \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

83.3 Activos de los consumidores

El consumidor representativo tiene acceso a tres distintos activos en la economía: dinero, M_t ; títulos de deuda pública, B_t ; y títulos de capital, k_t . En consecuencia, la riqueza real, a_t , del individuo está dada por

$$a_t = m_t + b_t + k_t, \quad (83.4)$$

donde $m_t = M_t/P_t$ son los saldos monetarios reales y $b_t = B_t/P_t$ es la tenencia de bonos gubernamentales en términos reales. El consumidor obtiene satisfacción por el consumo del bien que produce la economía y por la tenencia de saldos reales, debido a sus servicios de liquidez. Se supone que la función de utilidad esperada es del tipo von Neumann-Morgenstern. Específicamente, la función de utilidad total descontada al tiempo $t = 0$, V_0 , de un individuo representativo, competitivo y adverso al riesgo tiene la siguiente forma separable:

$$V_0 = E \left[\int_0^{\infty} [\theta \log(c_t) + (1 - \theta) \log(m_t)] e^{-\delta t} dt \mid \mathcal{F}_0 \right], \quad (83.5)$$

donde \mathcal{F}_0 es la información disponible en el tiempo $t = 0$. Asimismo, la evolución de la acumulación de la riqueza real sigue la ecuación diferencial estocástica

$$da_t = a_t [N_{m,t} dR_{m,t} + N_{b,t} dR_{b,t} + N_{k,t} dR_{k,t}] - c_t (1 + \tau_c) dt - d\tau_t, \quad (83.6)$$

donde

$$N_{j,t} \equiv \frac{j_t}{a_t} \text{ proporción del portafolio en el activo } j, \quad j = m, b, k;$$

$dR_{j,t}$ = tasa de rendimiento real después de impuestos sobre el activo j , $j = m, b, k$;

$d\tau_t$ = impuestos sobre la riqueza; y

τ_c = impuesto sobre el consumo.

83.4 Rendimiento de los activos

A continuación se determinan los rendimientos de los activos. Se supone que las tasas nominales de rendimiento que pagan el dinero y los bonos son cero e i , respectivamente. El rendimiento estocástico por la tenencia de saldos reales al tiempo t , $dR_{m,t}$, es simplemente el cambio porcentual en el precio del dinero en términos de bienes. La aplicación del lema de Itô al cambio porcentual del inverso del nivel de precios, tomando (83.1) como el proceso subyacente, conduce a (véase el Apéndice 83.A):

$$dR_{m,t} = P_t d\left(\frac{1}{P_t}\right) = r_m dt - \sigma_P dW_{P,t} + \left(\frac{1}{1 + \nu_P} - 1\right) dQ_{P,t}, \quad (83.7)$$

donde $r_m = -\pi + \sigma_P^2$. El rendimiento estocástico por la tenencia de bonos se obtiene en forma similar como

$$dR_{b,t} = r_b dt - \sigma_P dW_{P,t} + \left(\frac{1}{1 + \nu_P} - 1\right) dQ_{P,t}, \quad (83.8)$$

donde $r_b = i - \pi + \sigma_P^2$. Es importante observar que los rendimientos del dinero y de los bonos se ven afectados por la volatilidad y posibles saltos en el nivel general de precios. La tasa de rendimiento de las acciones después de impuestos será denotada mediante

$$dR_{k,t} = r_k dt + \sigma_k dW_{k,t} + \nu_k dQ_{k,t}, \quad (83.9)$$

donde los procesos $dW_{k,t}$ y $dQ_{k,t}$ tienen características similares a los procesos definidos en (83.1).

Además del impuesto τ_c que se paga por el consumo, el consumidor paga un impuesto sobre la riqueza de la forma

$$d\tau_t = a_t \bar{\tau} dt + a_t \sigma_\tau dW_{\tau,t} + a_t \nu_\tau dQ_{\tau,t}, \quad (83.10)$$

donde $\bar{\tau}$ es la tasa impositiva media esperada sobre la riqueza real. Al igual que antes, $dW_{\tau,t}$ y $dQ_{\tau,t}$ comparten las mismas características que los procesos de Wiener y de Poisson definidos en (83.1).

83.5 Decisiones óptimas de los consumidores

El objetivo del consumidor es elegir, en cada momento, el portafolio de activos y la cantidad de consumo que maximicen (83.5) sujeto a (83.6). Observe que después de sustituir las expresiones (83.7)-(83.10) en la ecuación estocástica de acumulación de la riqueza, (83.6), ésta se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{da_t}{a_t} &= \left[N_{m,t}r_m + N_{b,t}r_b + N_{k,t}r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] dt \\ &\quad + [N_{k,t}\sigma_k dW_{k,t} - (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_P dW_{P,t} - \sigma_\tau dW_{\tau,t}] \\ &\quad + \left[(N_{m,t} + N_{b,t})\left(\frac{1}{1+\nu_P} - 1\right)dQ_{P,t} + N_{k,t}\nu_k dQ_{k,t} - \nu_\tau dQ_{\tau,t} \right]. \end{aligned} \quad (83.11)$$

La solución del problema de maximización de utilidad total descontada sujeto a (83.11) y a la restricción de normalización

$$N_{m,t} + N_{b,t} + N_{k,t} = 1, \quad (83.12)$$

están dadas por (véase el Apéndice 83.B):

$$c_t = \frac{\delta\theta}{(1+\tau_c)}a_t, \quad (83.13)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta(1-\theta)}{N_{m,t}} + r_m - (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_P^2 + N_{k,t}\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} \\ &\quad - \frac{\lambda_P\nu_P}{1+(1-N_{m,t}-N_{b,t})\nu_P} - \delta\phi, \end{aligned} \quad (83.14)$$

$$0 = \left[r_b - (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_P^2 + N_{k,t}\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \frac{\lambda_P\nu_P}{1+(1-N_{m,t}-N_{b,t})\nu_P} \right] - \delta\phi \quad (83.15)$$

y

$$0 = \left[r_k - N_{k,t}\sigma_k^2 + (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_{Pk} + \sigma_{k\tau} + \frac{\lambda_k\nu_k}{1+(1-N_{m,t}-N_{b,t})\nu_k} \right] - \delta\phi, \quad (83.16)$$

donde ϕ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción (83.12). Después de restar (83.14) de (83.15), se encuentra que la proporción óptima de la riqueza asignada a la tenencia de saldos reales:

$$\hat{N}_m = \frac{\delta(1-\theta)}{i}. \quad (83.17)$$

Asimismo, después de restar (83.15) de (83.16), se tiene que

$$N_k B - A - \frac{\lambda_P\nu_P}{1+N_{k,t}\nu_P} - \frac{\lambda_k\nu_k}{1+N_{k,t}\nu_k} = 0, \quad (83.18)$$

donde

$$B \equiv \sigma_P^2 + 2\sigma_{Pk} + \sigma_k^2 > 0 \quad (83.19)$$

y

$$A \equiv r_k - r_b + \sigma_P^2 + \sigma_{Pk} + \sigma_{P\tau} + \sigma_{k\tau}. \quad (83.20)$$

Claramente, la ecuación (83.18) es cúbica y, por lo tanto, tiene al menos una solución real, la cual denotaremos por \hat{N}_k . En particular, si suponemos que $\nu_P = \nu_k = 0$, se tiene como única solución:

$$\hat{N}_k|_{\nu_P=\nu_k=0} = \frac{A}{B}. \quad (83.21)$$

Si los parámetros ν_P y ν_k son de la misma magnitud y distintos de cero, entonces (83.18) se transforma en una ecuación cuadrática cuyas soluciones están dadas por:

$$\hat{N}_k|_{\nu_P=\nu_k} = \frac{A\nu_P - B \pm \sqrt{(A\nu_P + B)^2 + 4B\nu_P^2(\lambda_P + \lambda_k)}}{2B\nu_P}. \quad (83.22)$$

Observe que el discriminante es positivo y, en consecuencia, ambas raíces son reales. Note también que en ningún caso se han impuesto restricciones para que las proporciones de la riqueza asignadas a la tenencia de activos sean estrictamente positivas y menores que la unidad. Por lo tanto, las ventas en corto de activos son permitidas en todo momento. Finalmente, el portafolio óptimo queda completamente determinado con \hat{N}_b , el cual se obtiene a partir de (83.12) como

$$\hat{N}_b = 1 - \frac{\delta(1-\theta)}{i} - \hat{N}_k. \quad (83.23)$$

Apéndice 83.A

En este apéndice se establecen sin demostración¹ un par de resultados sobre la diferencial estocástica del cociente y la multiplicación de dos movimientos geométricos Brownianos. Dadas las ecuaciones diferenciales estocásticas, homogéneas y lineales,

$$dX_t = X_t (\mu_X dt + \sigma_X dW_X + \nu_X dQ_X)$$

y

$$dY_t = Y_t (\mu_Y dt + \sigma_Y dW_Y + \nu_Y dQ_Y),$$

donde dQ_X y dQ_Y son procesos de Poisson no correlacionados, dW_X , dW_Y son procesos de Wiener con $\text{Cov}(dW_X, dW_Y) = \rho_{XY}dt$ y los procesos de Wiener son no correlacionados con los procesos de Poisson. En este caso, las diferenciales estocásticas del cociente X_t/Y_t y del producto $X_t Y_t$ satisfacen, respectivamente,

$$\begin{aligned} d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) &= \frac{X_t}{Y_t} \left[(\mu_X - \mu_Y + \sigma_Y^2 - \sigma_{XY}) dt + \sigma_X dW_X - \sigma_Y dW_Y \right. \\ &\quad \left. + \nu_X dQ_X + \left(\frac{1}{1+\nu_Y} - 1\right) dQ_Y \right] \end{aligned} \quad (83.A.1)$$

y

$$d(X_t Y_t) = X_t Y_t [(\mu_X + \mu_Y + \sigma_{XY}) dt + \sigma_X dW_X + \sigma_Y dW_Y + \nu_X dQ_X + \nu_Y dQ_Y]. \quad (83.A.2)$$

Apéndice 83.B

A continuación se determinan las condiciones de primer orden para una solución interior del problema de maximización de utilidad total del consumidor:

$$\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} \mathbb{E}_0 \left\{ \int_0^\infty [\theta \log(c_t) + (1-\theta) \log(N_{m,t} a_t)] e^{-\delta t} dt \right\}, \quad (83.B.1)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \frac{da_t}{a_t} &= \left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] \\ &\quad + [N_{k,t} \sigma_k dW_{k,t} - (N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_P dW_{P,t} - \sigma_\tau dW_{\tau,t}] \\ &\quad + \left[(N_{m,t} + N_{b,t}) \left(\frac{1}{1+\nu_P} - 1 \right) dQ_{P,t} + N_{k,t} \nu_k dQ_{k,t} - \nu_\tau dQ_{\tau,t} \right] \end{aligned} \quad (83.B.2)$$

y

$$1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t} = 0, \quad (83.B.3)$$

¹ Véase Gihman y Skorohod (1972).

donde i , π , τ_c , τ_y , $\bar{\tau}$, y las correspondientes varianzas y covarianzas son tomadas como dadas. La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B) para el problema de control óptimo estocástico, planteado en (83.A.1)-(83.A.3), está dada por:

$$\begin{aligned} \max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} H(c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}; a_t) \equiv \\ \max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} \left\{ \theta \log(c_t) + (1 - \theta) \log(N_{m,t} a_t) - \delta V(a_t) \right. \\ + a_t V'(a_t) \left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t(1 + \tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] \\ + \frac{1}{2} a_t^2 V''(a_t) \left[(N_{m,t} + N_{b,t})^2 \sigma_P^2 + N_{k,t}^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \right. \\ \left. - 2(N_{m,t} + N_{b,t}) N_{k,t} \sigma_{Pk} + 2(N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_{P\tau} - 2N_{k,t} \sigma_{k\tau} \right] \\ + \lambda_P \left[V \left(a_t \left(1 - (N_{m,t} + N_{b,t}) \frac{\nu_P}{1 + \nu_P} \right) \right) - V(a_t) \right] \\ + \lambda_k [V(a_t(1 + N_{k,t} \nu_k)) - V(a_t)] \\ \left. + \lambda_\tau [V(a_t(1 - \nu_\tau)) - V(a_t)] + \phi(1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t}) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (83.B.4)$$

donde ϕ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de normalización (83.12), $V(a_t)e^{-\delta t}$ es la función de utilidad indirecta del agente y $V'(a_t)e^{-\delta t}$ es la variable de co-estado. La ecuación de H-J-B evaluada en el máximo se transforma en una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en $V(a_t)$. Se postula como candidato de solución a la función $V(a_t) = \beta_0 + \beta_1 \log(a_t)$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} H(c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}; a_t) \equiv \\ \max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} \left\{ \theta \log(c_t) + (1 - \theta) \log(N_{m,t} a_t) - \delta [\beta_0 + \beta_1 \log(a_t)] \right. \\ + \beta_1 \left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t(1 + \tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] \\ - \frac{1}{2} \beta_1 \left[(N_{m,t} + N_{b,t})^2 \sigma_P^2 + N_{k,t}^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \right. \\ \left. - 2(N_{m,t} + N_{b,t}) N_{k,t} \sigma_{Pk} + 2(N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_{P\tau} - 2N_{k,t} \sigma_{k\tau} \right] \\ + \beta_1 \left[\lambda_P \log \left(1 - (N_{m,t} + N_{b,t}) \frac{\nu_P}{1 + \nu_P} \right) + \lambda_k \log(1 + N_{k,t} \nu_k) + \lambda_\tau \log(1 - \nu_\tau) \right] \\ \left. + \phi(1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t}) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (83.B.5)$$

Por lo tanto, las condiciones necesarias de máximo están dadas por:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial c_t} = \frac{\theta}{c_t} - \frac{\beta_1(1 + \tau_c)}{a_t}; \quad (83.B.6)$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial H}{\partial N_{m,t}} = \frac{1 - \theta}{N_{m,t}} \\ + \beta_1 \left[r_{m,t} - (N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_P^2 + N_{k,t} \sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \frac{\lambda_P \nu_P}{1 + (1 - N_{m,t} - N_{b,t}) \nu_P} \right] - \phi; \end{aligned} \quad (83.B.7)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial N_{b,t}} = \beta_1 \left[r_b - (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_P^2 + N_{k,t}\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \frac{\lambda_P\nu_P}{1 + (1 - N_{m,t} - N_{b,t})\nu_P} \right] - \phi; \quad (83.B.8)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial N_{k,t}} = \beta_1 \left[r_k - N_{k,t}\sigma_k^2 + (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_{Pk} + \sigma_{k\tau} + \frac{\lambda_k\nu_k}{1 + (1 - N_{m,t} - N_{b,t})\nu_k} \right] - \phi; \quad (83.B.9)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial \phi} = 1 - (N_{m,t} + N_{b,t} + N_{k,t}). \quad (83.B.10)$$

Falta solamente determinar los coeficientes β_0 y β_1 definidos en $V(a_t)$. Después de sustituir los valores óptimos \hat{c}_t , \hat{N}_m , \hat{N}_b y \hat{N}_k en la condición H-J-B, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 = & (1 - \delta\beta_1) \log(a_t) + \theta \log(\theta) + (1 - \theta) \log(1 - \theta) \\ & - \theta \log[\beta_1(1 + \tau_c)] - (1 - \theta) \log[\beta_1 i(1 - \tau_y)] - \delta\beta_0 \\ & + \beta_1 \left[\hat{N}_m(-\pi + \sigma_P^2) + \hat{N}_b i(1 - \tau_y) + \hat{N}_k r_k - \frac{\hat{c}_t(1 + \tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] \\ & - \frac{1}{2}\beta_1 \left[(\hat{N}_m + \hat{N}_b)^2\sigma_P^2 + \hat{N}_k^2\sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 - 2(\hat{N}_m + \hat{N}_b)\hat{N}_k\sigma_{Pk} \right. \\ & \left. + 2(\hat{N}_m + \hat{N}_b)\sigma_{P\tau} - 2\hat{N}_k\sigma_{k\tau} \right] \\ & + \beta_1 \left[\lambda_P \log \left(1 - (\hat{N}_m + \hat{N}_b) \frac{\nu_P}{1 + \nu_P} \right) + \lambda_k \log(1 + \hat{N}_k\nu_k) + \lambda_\tau \log(1 - \nu_\tau) \right], \end{aligned} \quad (83.B.11)$$

lo cual implica que $\beta_1 = 1/\delta$ y

$$\begin{aligned} \beta_0 = & \frac{\theta}{\delta} \log(\theta) + \frac{(1 - \theta)}{\delta} \log(1 - \theta) - \frac{\theta}{\delta} \log \left(\frac{1 + \tau_c}{\delta} \right) - (1 - \theta)\delta \log \left[\frac{i(1 - \tau_y)}{\delta} \right] \\ & - \frac{\theta}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} \left[\hat{N}_m(-\pi + \sigma_P^2) + \hat{N}_b i(1 - \tau_y) + \hat{N}_k r_k - \bar{\tau} \right] \\ & - \frac{1}{2} \frac{1}{\delta^2} \left[(\hat{N}_m + \hat{N}_b)^2\sigma_P^2 + \hat{N}_k^2\sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 - 2(\hat{N}_m + \hat{N}_b)\hat{N}_k\sigma_{Pk} \right. \\ & \left. + 2(\hat{N}_m + \hat{N}_b)\sigma_{P\tau} - 2\hat{N}_k\sigma_{k\tau} \right] \\ & + \frac{1}{\delta^2} \left[\lambda_P \log \left(1 - (\hat{N}_m + \hat{N}_b) \frac{\nu_P}{1 + \nu_P} \right) + \lambda_k \log(1 + \hat{N}_k\nu_k) + \lambda_\tau \log(1 - \nu_\tau) \right]. \end{aligned} \quad (83.B.12)$$

83.6 Bibliografía sugerida

- Gihman, I. I. and A. V. Skorohod (1972). Stochastic differential equations. Springer-Verlag, Berlin.
- Venegas-Martínez, F. (2000). "On Consumption, Investment, and Risk". *Economía Mexicana, Nueva Época*, Vol. 9, No. 2, pp. 227-244.
- Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2000). "Mercados financieros incompletos y su impacto en los programas de estabilización de precios: el caso mexicano". *Momento Económico*, No. 111, pp. 20-27.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, No. 9, pp. 1429-1449.
- Venegas-Martínez, F. (2001). Chronic Inflations Jumps in a Stochastic Small Open Economy. Working paper, Mathematical Finance Group, Oxford University.
- Venegas-Martínez, F. (2004). "Reforma fiscal incierta y sus efectos en las decisiones de consumo y portafolio: impacto en el bienestar económico". *Problemas del Desarrollo, Revista Latinoamericana de Economía*, Vol. 35, No. 136, pp. 137-150.

- Venegas-Martínez, F. (2004). "Política fiscal, estabilización de precios y mercados incompletos". *Estudios Económicos*, Vol. 20, No. 1, pp. 3-18.
- Venegas-Martínez, F. (2005). "Decisiones para la administración del riesgo macroeconómico". *Denarius, Revista de Administración y Economía*, No. 10, pp. 105-130.
- Venegas-Martínez, F. (2005). "A Stochastic Model of Endogenous Growth: The Mexican Case 1930-2002". *Ánalisis Económico*, Vol. 20, No. 43, pp. 83-100.
- Venegas-Martínez, F. (2006). "Decisiones de consumo y portafolio bajo condiciones de riesgo e incertidumbre". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, Vol. 5, No. 1, pp. 3-11.

83.7 Ejercicios

83.1 Justifique por qué la ecuación (83.18) tiene una solución real.

Solución: Un polinomio de grado 3 con coeficientes reales tiene al menos una raíz real, ya que las raíces no reales se presentan en pares conjugados y raíces conjugadas tienen la misma multiplicidad.

83.2 Este ejercicio extiende el modelo desarrollado a una economía abierta con la inclusión de bonos extranjeros reales. Suponga que el consumidor representativo tiene acceso a cuatro activos diferentes: dinero (nominal) doméstico, M_t ; bonos gubernamentales (nominales) domésticos, B_t ; acciones domésticas, k_t ; y bonos (reales) extranjeros, b_t^* . De esta manera, la riqueza real del consumidor, a_t , en términos del consumo, como bien numerario, está dada por

$$a_t = m_t + b_t + k_t + b_t^*,$$

donde $m_t = M_t/P_t$ son los balances monetarios reales, $b_t = B_t/P_t$ representa bonos domésticos en términos reales y b_t^* define la tenencia de bonos extranjeros reales. La ecuación de evolución de la riqueza real es

$$da_t = a_t[N_{m,t}dR_{m,t} + N_{b,t}dR_{b,t} + N_{k,t}dR_{k,t} + N_{b^*,t}dR_{b^*,t}] - c_t(1 + \tau_c)dt - d\tau_t,$$

donde

$$N_{j,t} \equiv \frac{j_t}{a_t} = \text{participación del activo } j, j = m, b, k, b^*, \text{ en el portafolio};$$

$dR_{j,t}$ = rendimiento del activo j , $j = m, b, k, b^*$, después de impuestos;

τ_t = impuesto sobre la riqueza;

τ_c = impuesto al valor agregado sobre el consumo.

Una aplicación del lema de Itô conduce a

$$dR_{m,t} = \frac{d(M_t/P_t)}{M_t/P_t} = r_m dt - \sigma_P dW_{P,t} + \left(\frac{1}{1 + \nu_P} - 1 \right) dQ_{P,t},$$

donde $r_m = -\pi + \sigma_P^2$. Similarmente,

$$dR_{b,t} = \frac{d(B_t/P_t)}{B_t/P_t} = r_b dt - \sigma_P dW_{P,t} + \left(\frac{1}{1 + \nu_P} - 1 \right) dQ_{P,t},$$

donde $r_b = i(1 - \tau_y) - \pi + \sigma_P^2$, y τ_y es la tasa de impuestos sobre intereses. Denote la tasa de rendimiento de las acciones mediante

$$dR_{k,t} = r_k dt + \sigma_k dW_{k,t} + \nu_k dQ_{k,t},$$

donde $W_{k,t}$ es un movimiento Browniano y $Q_{k,t}$ es un proceso de Poisson con parámetro de intensidad λ_k . Por último, suponga que el consumidor toma como dada la tasa de rendimiento de los bonos extranjeros, la cual se supone determinista con

$$db_t^* = b_t^* dR_{b^*,t} = b_t^* r_{b^*} dt.$$

Suponga que el agente paga impuestos sobre la riqueza real de acuerdo con

$$d\tau_t = a_t \bar{\tau} dt + a_t \sigma_\tau dW_{\tau,t} + a_t \nu_\tau dQ_{\tau,t},$$

donde $\bar{\tau}$ es el impuesto medio esperado sobre la riqueza. Como antes, $W_{\tau,t}$ y $Q_{\tau,t}$ es un proceso de Poisson. Todos los procesos $Q_{P,t}$, $Q_{k,t}$ y $Q_{\tau,t}$ son mutuamente no correlacionados. Suponga que el consumidor maximiza

$$V_0 = E_0 \left\{ \int_0^\infty [u(c_t) + v(m_t)] e^{-\delta t} dt \right\},$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{da_t}{a_t} &= \left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k + N_{b^*,t} r_{b^*} - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] dt + dW_t \\ &\quad + (N_{m,t} + N_{b,t}) \left(\frac{1}{1+\nu_P} - 1 \right) dQ_{P,t} + N_{k,t} \nu_k dQ_{k,t} - \nu_\tau dQ_{\tau,t}, \end{aligned}$$

donde

$$dW_t = N_{k,t} \sigma_k dW_{k,t} - (N_{m,t} + N_{b,t}) \sigma_P dW_{P,t} - \sigma_\tau dW_{\tau,t}.$$

Evidentemente, la condición de normalización está dada por

$$1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t} - N_{b^*,t} = 0.$$

Demuestre que las condiciones de primer orden para una solución interior del problema de maximización de utilidad están dadas por:

$$\begin{aligned} c_t &= \frac{\delta\theta}{(1+\tau_c)} a_t; \\ \frac{\delta(1-\theta)}{N_{m,t}} + r_m + \sigma_{WP} - \frac{\lambda_P \nu_P}{1 + (1 - N_{m,t} - N_{b,t}) \nu_P} - \delta\phi &= 0; \\ r_k + \sigma_{WP} - \frac{\lambda_P \nu_P}{1 + (1 - N_{m,t} - N_{b,t}) \nu_P} - \delta\phi &= 0; \\ r_{b^*} - \sigma_{Wk} + \frac{\lambda_k \nu_k}{1 + N_{k,t}} - \delta\phi &= 0 \end{aligned}$$

y

$$r_{b^*} = \phi\delta,$$

donde ϕ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de normalización,

$$\text{Cov}(dW, \sigma_P W_{P,t}) = \sigma_{WP} dt$$

y

$$\text{Cov}(dW, \sigma_k W_{k,t}) = \sigma_{Wk} dt.$$

Determine los valores óptimos de $N_{j,t}$ para $j = m, b, k, b^*$.

Solución: Al restar la segunda condición de la tercera, se obtiene $N_{m,t}$. Al sustituir la última condición en la tercera y cuarta condiciones, se obtienen, respectivamente $N_{k,t}$ $N_{b^*,t}$. La decisión óptima $N_{b^*,t}$, se obtiene de la condición de normalización.

83.3 En este ejercicio se desarrolla un modelo de equilibrio macroeconómico. Se supone una empresa representativa que produce el único bien que hay en la economía y que el rendimiento que paga por las acciones emitidas está en función de la producción y de la política de

dividendos. Asimismo, se supone que la producción sigue una trayectoria estocástica definida por

$$dy_t = \gamma k_t dt + \gamma k_t \sigma_y dW_{y,t} + \gamma k_t \nu_y dQ_{y,t},$$

donde γ representa el producto marginal medio esperado del capital. Aquí, como en el caso del consumidor, $dW_{y,t}$ es un proceso Wiener y $dQ_{y,t}$ es un proceso de Poisson. En términos generales, el rendimiento que paga la empresa sobre las acciones emitidas se puede escribir como

$$dR_{k,t} = \frac{dv_t}{k_t} + \frac{du_t}{u_t},$$

donde dv_t son los dividendos y u_t es el precio de las acciones, en términos del producto. También, se supone que no hay impuestos sobre ganancias de capital. De esta forma, el rendimiento de las acciones tiene dos componentes: los dividendos que se pagan por acción y las ganancias (o pérdidas) de capital que resultan de diferencias en el precio de los títulos accionarios. Para conocer la trayectoria que sigue du_t/u_t , es necesario analizar el comportamiento de la producción, el acervo de acciones, el capital disponible y la política de inversión de la empresa. Todas estas variables determinan la posible existencia de ganancias de capital. Ahora bien, si se supone que el stock de acciones en cualquier tiempo, t , permanece constante e igual a N , entonces se cumple que $Nu_t = k_t$. Por lo tanto,

$$dk_t = N du_t.$$

Por otra parte, la producción después de impuestos puede tener dos usos: el pago de dividendos, dv_t , o el financiamiento de nueva inversión, dk_t , esta última entendida como la adquisición de capital nuevo. De esta forma, la trayectoria que sigue la producción después de impuestos está dada por

$$(1 - \tau_p) dy_t = dv_t + dk_t,$$

donde τ_p es el impuesto sobre ingresos corporativos y v_t representa el pago de dividendos. De las ecuaciones anteriores, se sigue que

$$\frac{du_t}{u_t} = \frac{(1 - \tau_p) dy_t - dv_t}{k_t}.$$

Al sustituir esta expresión en la ecuación del rendimiento de las acciones, se obtiene que

$$dR_{k,t} = (1 - \tau_p) \frac{dy_t}{k_t}.$$

Se supone ahora que los dividendos que pagan las empresas son una fracción constante α del ingreso corporativo después de impuestos. Es decir, los dividendos tienen la forma

$$dv_t = \alpha (1 - \tau_p) dy_t, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

En consecuencia, la trayectoria estocástica del rendimiento de las acciones, en términos del proceso de difusión que sigue la producción de bienes, está dada por

$$dR_{k,t} = (1 - \tau_p) \frac{dy_t}{k_t}.$$

Es importante observar en esta ecuación que el componente estocástico está determinado por dy_t , ya que el resto de las variables son deterministas. En consecuencia,

$$r_k = (1 - \tau_p) \gamma,$$

$$\sigma_k dW_{k,t} = (1 - \tau_p) \gamma \sigma_y dW_{y,t}$$

y

$$\nu_k dQ_{k,t} = (1 - \tau_p) \gamma \nu_y dQ_{y,t}.$$

De esta forma, la tasa de rendimiento de las acciones está en función de la tasa del producto marginal del capital. Similarmente, el componente estocástico $dR_{k,t}$ depende de los shocks de productividad por cambios en γ y del comportamiento exógeno de $dW_{y,t}$, además de los posibles saltos $dQ_{y,t}$. Con el propósito de cerrar el modelo, se describen las acciones del gobierno. El sector público no genera utilidad para los consumidores. El gobierno tiene el monopolio de la emisión de dinero y, a la vez, emite deuda para financiar su gasto. Los tres principales instrumentos de política económica que emplea el gobierno son, a saber: gasto público, oferta monetaria y emisión de deuda. La restricción presupuestal que enfrenta el gobierno en términos reales, tiene la forma

$$dg_t - d\tau_{1,t} - d\tau_{2,t} + m_t dR_{m,t} + b_t dR_{b,t} = dm_t + db_t,$$

donde dg_t es el cambio en gasto público del gobierno en términos reales; $d\tau_{1,t}$ es el cambio en el impuesto total recaudado proveniente de los consumidores, en términos reales; $d\tau_{2,t}$ es el cambio en el impuesto total recaudado proveniente de las empresas, también en términos reales. El gasto que realiza el gobierno sigue un proceso estocástico definido por

$$dg_t = \bar{g}\gamma k_t dt + \gamma k_t \sigma_g dW_{g,t} + \gamma k_t \nu_g dQ_{g,t}.$$

Al igual que en los casos anteriores, $dW_{g,t}$ es un proceso estocástico con una distribución normal con media cero y varianza dt y $dQ_{g,t}$ es un proceso de Poisson. De esta forma, el gasto del gobierno está definido como una fracción dg_t del producto real. Note que, en este caso, el factor estocástico del gasto es proporcional al producto. La oferta monetaria en esta economía tiene asociada una regla de expansión conducida por un proceso estocástico de difusión con saltos de la forma:

$$dM_t = \mu M_t dt + \sigma_M M_t dW_{M,t} + \nu_M M_t dQ_{M,t},$$

donde μ es la tasa de expansión monetaria media esperada, $dW_{M,t}$ es el componente de difusión, y $dQ_{M,t}$ es el componente de saltos en la tasa de expansión monetaria. La política de deuda que sigue el gobierno se lleva a cabo a través de la emisión de bonos. En este caso, la política de endeudamiento se fija de forma tal que la razón entre el stock de bonos y el stock monetario se mantenga constante, es decir, se supone que

$$\frac{B_t}{M_t} = \kappa = \text{constante}.$$

De esta forma, se obtiene la expresión

$$\frac{dB_t}{B_t} = \frac{dM_t}{M_t}.$$

Lo anterior significa que en operaciones de mercado abierto, el cambio porcentual de deuda emitida es igual al cambio porcentual de los cortos en la economía; o equivalentemente, el cambio porcentual en la cantidad que crece la oferta monetaria es igual al cambio porcentual de la deuda gubernamental que se salda. Los cambios en las cantidades reales de tributación, $d\tau_{1,t}$ y $d\tau_{2,t}$, que provienen de los consumidores y de las empresas, respectivamente, se describen a continuación. Todas las tasas τ_p y τ_c , son exógenas en nuestro modelo. En el caso de los consumidores, el impuesto total tiene cuatro fuentes: intereses, ganancias de capital, nivel de riqueza y consumo. De esta forma,

$$d\tau_{1,t} = a_t \bar{\tau} dt + a_t \sigma_\tau dW_{\tau,t} + a_t \nu_\tau dQ_{\tau,t} + \tau_c c_t dt.$$

Para las empresas, los impuestos se gravan sobre los ingresos corporativos. Es decir,

$$d\tau_{2,t} = \tau_p \gamma k_t [dt + \sigma_y dW_{y,t} + \nu_y dQ_{y,t}].$$

Determine el equilibrio en el sector real, la tasa de inflación de equilibrio, el nivel de impuestos de equilibrio y las tasas de rendimiento de equilibrio de los diferentes activos, así como los parámetros de volatilidad y saltos de equilibrio.

- 83.4** Si se presentan dificultades para resolver el ejercicio anterior, intente primero determinar el equilibrio macroeconómico en ausencia de componentes de saltos (en el contexto del capítulo anterior).

CAPÍTULO 84

DECISIONES DE CONSUMO Y PORTAFOLIO BAJO CONDICIONES DE RIESGO (III): PROCESOS DE DIFUSIÓN CON SALTOS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Consumidor maximizador de utilidad adverso al riesgo
- Economía abierta
- Procesos de difusión con saltos
- Control óptimo estocástico
- Condición de Hamilton-Jacobi-Bellman

84.1 Introducción

En este capítulo se extiende el problema de decisión del consumidor racional bajo condiciones de riesgo, en un marco de economía abierta, para incluir bonos emitidos en el extranjero. Esto requiere de algunas modificaciones con respecto al modelo desarrollado en el capítulo anterior. Se supone además que el precio del bien que produce la economía y el tipo de cambio siguen ambos procesos de difusión con saltos. De esta manera, la dinámica estocástica del nivel general de precios de la economía se obtiene de manera endógena.

84.2 Dinámica de precios

Como antes, se supone que el nivel general de precios de la economía, P_t , satisface la condición de poder de paridad de compra $P_t = P_t^* E_t$, donde P_t^* es el nivel de precios en el extranjero, y E_t es el tipo de cambio nominal. Se supone además que P_t^* y E_t son conducidos, respectivamente, por los siguientes procesos:

$$\frac{dP_t^*}{P_t^*} = \pi^* dt + \sigma_{P^*} dW_{P^*,t} + \nu_{P^*} dQ_{P^*,t} \quad (84.1)$$

y

$$\frac{dE_t}{E_t} = edt + \sigma_E dW_{E,t} + \nu_E dQ_{E,t}, \quad (84.2)$$

donde las componentes de difusión y saltos son definidos de manera usual. A continuación se introducen los bonos extranjeros denominados en moneda extranjera e internacionalmente comerciables, B_t^* . Estos bonos serán denotados en términos reales mediante $b_t^* = E_t B_t^* / P_t = B_t^* / P_t^*$, entonces la riqueza real del individuo está dada por

$$a_t = m_t + b_t + k_t + b_t^*. \quad (84.3)$$

Se supone ahora que los bonos domésticos, $B_t = b_t P_t$. En este caso la ecuación diferencial estocástica del índice de precios doméstico satisface:

$$\begin{aligned} \frac{dP_t}{P_t} &= \frac{d(P_t^* E_t)}{(P_t^* E_t)} = (\pi^* + e + \sigma_{P^*} E_t) dt + \sigma_{P^*} dW_{P^*,t} + \sigma_E dW_{E,t} \\ &\quad + \nu_{P^*} dQ_{P^*,t} + \nu_E dQ_{E,t}. \end{aligned} \quad (84.4)$$

Las tasas reales de retorno, para el consumidor representativo doméstico, por la tenencia de dinero, bonos domésticos, acciones y bonos extranjeros están dadas, respectivamente, por:

$$dR_{m,t} = \frac{d(M_t/P_t)}{M_t/P_t} = r_m dt - \sigma_P dW_{P,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_E} - 1 \right) dQ_{E,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_{P^*}} - 1 \right) dQ_{P^*,t}, \quad (84.5)$$

$$dR_{b,t} = \frac{d(B_t/P_t)}{B_t/P_t} = r_b dt - \sigma_P dW_{P,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_E} - 1 \right) dQ_{E,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_{P^*}} - 1 \right) dQ_{P^*,t}, \quad (84.6)$$

$$dR_{k,t} = r_k dt + \sigma_k dW_{k,t} + \nu_k dQ_{k,t}, \quad (84.7)$$

$$dR_{b^*,t} = \frac{d(B_t^*/P_t^*)}{B_t^*/P_t^*} = r_{b^*} dt - \sigma_{P^*} dW_{P^*,t} + \left(\frac{1}{1+\nu_{P^*}} - 1 \right) dQ_{P^*,t}. \quad (84.8)$$

Las componentes deterministas de los procesos anteriores satisfacen: $r_m = -\pi + \sigma_P^2$, $r_b = i(1 - \tau_y) - \pi + \sigma_P^2$ y $r_b = i^*(1 - \tau_y^*) - \pi^* + \sigma_{P^*}^2$. La ecuación diferencial estocástica de acumulación de la riqueza toma ahora la forma:

$$\begin{aligned} \frac{da_t}{a_t} = & \left[N_{m,t}r_m + N_{b,t}r_b + N_{k,t}r_k + N_{b^*,t}r_{b^*} - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] dt + dW_t \\ & + (N_{m,t} + N_{b,t})\left(\frac{1}{1+\nu_E} - 1\right)dQ_{E,t} \\ & + (N_{m,t} + N_{b,t} + N_{b^*,t})\left(\frac{1}{1+\nu_{P^*}} - 1\right)dQ_{P^*,t} \\ & + N_{k,t}\nu_k dQ_{k,t} - \nu_\tau dQ_{\tau,t}, \end{aligned} \quad (84.9)$$

donde las componentes de difusión satisfacen

$$dW_t = N_{k,t}\sigma_k dW_{k,t} - (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_P dW_{P,t} - N_{b^*,t}\sigma_{P^*} dW_{P^*,t} - \sigma_\tau dW_{\tau,t}. \quad (84.10)$$

84.3 Condiciones de primer orden del problema de maximización de utilidad

Las condiciones de primer orden para una solución interior del problema de maximización de utilidad, sujeto a la ecuación diferencial estocástica de acumulación de la riqueza y la condición de normalización, están dadas por:

$$c_t = \frac{\delta\theta}{(1+\tau_c)}a_t; \quad (84.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta(1-\theta)}{N_{m,t}} + r_m = & -\sigma_{WP} + \frac{\lambda_E\nu_E}{1+(1-N_{m,t}+N_{b,t})\nu_E} \\ & + \frac{\lambda_{P^*}\nu_{P^*}}{1+(1-N_{m,t}-N_{b,t}-N_{b^*,t})\nu_{P^*}} + \delta\phi; \end{aligned} \quad (84.12)$$

$$r_b = r_m + \frac{\delta(1-\theta)}{N_{m,t}}, \quad (84.13)$$

$$r_k = \sigma_{Wk} - \frac{\lambda_k\nu_k}{1+(1-N_{m,t}-N_{b,t}+N_{b^*,t})\nu_k} + \delta\phi \quad (84.14)$$

y

$$r_{b^*} = -\sigma_{WP^*} + \frac{\lambda_{P^*}\nu_{P^*}}{1+(1-N_{m,t}-N_{b,t}-N_{b^*,t})\nu_{P^*}} + \delta\phi. \quad (84.15)$$

A partir de (84.13), se encuentra, como en el caso en que no hay bonos extranjeros, que la proporción, en el portafolio óptimo, que se asigna a la tenencia de saldos monetarios reales está dada por

$$\hat{N}_m = \frac{\delta(1-\theta)}{i(1-\tau_y)}.$$

Al restar (84.14) de (84.13) y (84.15) de (84.14), se obtiene el siguiente sistema no homogéneo de ecuaciones en las variables $N_{k,t}$ y $N_{b^*,t}$

$$BN_{k,t} + GN_{b^*,t} = A + \frac{\lambda_k \nu_k}{1 + N_{k,t} \nu_k} + \frac{\lambda_{P^*} \nu_{P^*}}{1 + N_{k,t} \nu_{P^*}} + \frac{\lambda_E \nu_E}{1 + (N_{k,t} + N_{b^*,t}) \nu_E}, \quad (84.16)$$

$$B'N_{k,t} + G'N_{b^*,t} = A' + \frac{\lambda_k \nu_k}{1 + N_{k,t} \nu_k} + \frac{\lambda_{P^*} \nu_{P^*}}{1 + N_{k,t} \nu_{P^*}}, \quad (84.17)$$

donde A y B son constantes que dependen de varianzas y covarianzas, y

$$\begin{aligned} G &= \sigma_P^2 + \sigma_{Pk} + \sigma_{k\tau} - \sigma_{P^*P}, \\ A' &= r_k - r_{b^*} + \sigma_{Pk} + \sigma_{k\tau} + \sigma_{P^*P} + \sigma_{P^*\tau}, \\ B' &= \sigma_k^2 + \sigma_{Pk} + \sigma_{P^*k} - \sigma_{P^*P}, \\ G' &= \sigma_{Pk} + \sigma_{P^*P} - \sigma_{P^*k} - \sigma_{P^*}^2. \end{aligned}$$

Si se denota el total de acciones y bonos extranjeros mediante $z_t = N_{k,t} + N_{b^*,t}$ y $x_t = N_{k,t}/z_t = N_{k,t}/(N_{k,t} + N_{b^*,t})$ es la proporción de acciones en z_t , entonces el sistema (84.16)-(84.17) puede ser reescrito como:

$$(B - B')x_t z_t + (G - G')(1 - x_t)z_t = A - A' + \frac{\lambda_E \nu_E}{1 + z_k \nu_E}, \quad (84.18)$$

$$B'x_t z_t + G'(1 - x_t)z_t = A' + \frac{\lambda_k \nu_k}{1 + x_t z_t \nu_k} + \frac{\lambda_{P^*} \nu_{P^*}}{1 + x_t z_t \nu_{P^*}}. \quad (84.19)$$

Observe que en virtud de (84.18), se tiene que x_t se puede expresar como función de z_t :

$$x_t = \Theta + \Psi \frac{1}{z_t} + \Phi \frac{1}{z_t(1 + z_t \nu_E)} = \frac{\Theta z_t (1 + z_t \nu_E) + \Psi (1 + z_t \nu_E) + \Phi}{z_t (1 + z_t \nu_E)}, \quad (84.20)$$

donde

$$\Theta = -\frac{G - G'}{B - B' - (G - G')},$$

$$\Psi = -\frac{A - A'}{G - G'} \Theta$$

y

$$\Phi = \frac{\lambda_E \nu_E}{G - G'}.$$

Si se sustituye (84.20) en la ecuación (84.19), se obtiene

$$\begin{aligned} (B' - G')[((1 + z_t \nu_E)(\Psi + \Theta z_t) + \Phi)z_t] &= (A' - G'z_t)z_t(1 + z_t \nu_E) \\ &\quad + \frac{\lambda_k \nu_k z_t (1 + z_t \nu_E)^2}{(1 + z_t \nu_E)(1 + \Psi + \Theta z_t) + \Phi \nu_k} \\ &\quad + \frac{\lambda_{P^*} \nu_{P^*} z_t (1 + z_t \nu_E)^2}{(1 + z_t \nu_E)(1 + \Psi + \Theta z_t) + \Phi \nu_{P^*}}. \end{aligned} \quad (84.21)$$

La ecuación anterior tiene una raíz real denominada \hat{z} . Por lo tanto,

$$\hat{x} = \Theta + \Psi \frac{1}{\hat{z}} + \Phi \frac{1}{\hat{z}(1 + \hat{z} \nu_E)}. \quad (84.22)$$

A partir de las definiciones de \hat{z} y \hat{x} , se sigue que $\hat{N}_k = \hat{x}\hat{z}$ y $\hat{N}_{b^*} = (1 - \hat{x})\hat{z}$, respectivamente. El portafolio óptimo es completamente determinado por

$$\hat{N}_b = 1 - \frac{\delta(1 - \theta)}{i(1 - \tau_y)} - \hat{N}_k - \hat{N}_{b^*}. \quad (84.23)$$

84.4 Bibliografía sugerida

- Venegas-Martínez, F. (2000). "On Consumption, Investment, and Risk". *Economía Mexicana, Nueva Época*, Vol. 9, No. 2, pp. 227-244.
- Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2000). "Mercados financieros incompletos y su impacto en los programas de estabilización de precios: el caso mexicano". *Momento Económico*, No. 111, pp. 20-27.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, No. 9, pp. 1429-1449.
- Venegas-Martínez, F. (2004). "Reforma fiscal incierta y sus efectos en las decisiones de consumo y portafolio: impacto en el bienestar económico". *Problemas del Desarrollo, Revista Latinoamericana de Economía*, Vol. 35, No. 136, pp. 137-150.
- Venegas-Martínez, F. (2004). "Política fiscal, estabilización de precios y mercados incompletos". *Estudios Económicos*, Vol. 20, No. 1, pp. 3-18.
- Venegas-Martínez, F. (2005). "A Stochastic Model of Endogenous Growth: The Mexican Case 1930-2002". *Análisis Económico*, Vol. 20, No. 43, pp. 83-100.

84.5 Ejercicios

84.1 Justifique por qué (84.21) tiene una solución real.

Solución: Un polinomio de grado 7 con coeficientes reales tiene al menos una raíz real, ya que las raíces no reales se presentan en pares conjugados y raíces conjugadas tienen la misma multiplicidad.

84.2 Incluya un producto derivado en la restricción presupuestal (84.9) y resuelva el problema del consumidor racional.

CAPÍTULO 85

MODELO DE COX, INGERSOLL Y ROSS DE EQUILIBRIO GENERAL PARA DETERMINAR EL PROCESO DE TASA CORTA

Conceptos básicos de este capítulo:

- Determinación de la tasa corta en un modelo de equilibrio general
- Determinación de precios de derivados
- Consumidores racionales
- Utilidad esperada del tipo von Neumann-Morgenstern
- Programación dinámica estocástica en tiempo continuo
- Condición de Hamilton-Jacobi-Bellman
- Soluciones de esquina
- Ecuación diferencial parcial de Black y Scholes
- Modelo de tasa corta de Cox, Ingersoll y Ross

85.1 Introducción

En septiembre de 1978, John Cox, Jonathan Ingersoll y Stephen Ross enviaron a “Econometrica” dos artículos para ser considerados como posibles publicaciones: “An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices” y “A Theory of the Term Structure of Interest Rates”. Seis años más tarde, en octubre de 1984, son aceptados y en marzo de 1985 son finalmente publicados en dicho “Journal”. Estos artículos están íntimamente relacionados entre sí. De hecho el segundo podría verse como un caso particular del primero en donde la función de producción sigue un proceso de difusión específico. Con este proceso asociado a la tecnología se determina, de manera endógena, un modelo de tasa corta, conocido como el modelo de Cox, Ingersoll y Ross. Con el propósito de presentar la investigación de Cox, Ingersoll y Ross de manera integral, pero también sencilla, se desarrollan los principales resultados de los dos artículos simplificando la mayoría de los supuestos.

El modelo de equilibrio general de Cox, Ingersoll y Ross persigue dos objetivos, uno de los cuales consiste en caracterizar, en el equilibrio, los precios de los diferentes activos disponibles en la economía. El otro objetivo es determinar a partir de un proceso para el rendimiento del capital un proceso para la tasa corta.

85.2 Un modelo intertemporal de equilibrio general para determinar precios de activos

Con el propósito de obtener soluciones analíticamente tratables, los supuestos de la economía se mantendrán lo más simple posible. Considere una economía cerrada, la cual está poblada por individuos idénticos, maximizadores de utilidad y con vida infinita. La economía produce y consume un solo bien de carácter perecedero. Los consumidores tienen acceso a una acción y a un derivado sobre dicha acción. Los precios de estos activos están dados en términos reales, es decir, en términos de unidades del bien de consumo. Asimismo, existe un mercado de crédito en el que prevalece una tasa de interés r , la cual se determinará de manera endógena en el equilibrio.

85.3 Activos y sus precios

Suponga que el precio en términos reales, S_t , de la acción tiene una dinámica estocástica conducida por el movimiento geométrico Browniano de acuerdo con

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_s S_t dW_t, \quad (85.1)$$

donde el parámetro de tendencia, μ , representa el rendimiento medio esperado, el parámetro de volatilidad, σ_s , es la variación instantánea del rendimiento del activo y el proceso $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \mathbb{P}^W)$ junto con su filtración aumentada $\mathbb{F}^W = \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$. En lo que sigue, el precio del derivado de la acción se denotará por $v_t = v(S_t, t)$.

85.4 Restricción presupuestal del consumidor

De acuerdo con la sección anterior, la riqueza real, a_t , del individuo, en cada instante, está dada por:

$$a_t = S_t + v_t + b_t. \quad (85.2)$$

Sea $w_{1t} = S_t/a_t$ la proporción de la riqueza que el individuo asigna a la tenencia de acciones, $w_{2t} = v_t/a_t$ la proporción de la riqueza que se asigna a un derivado de precio v_t , y la proporción complementaria $1 - w_{1t} - w_{2t}$ será asignada a la tenencia de un bono de precio b_t que paga tasa de interés r . En consecuencia, la evolución de la acumulación de la riqueza real sigue la ecuación diferencial estocástica:

$$da_t = a_t w_{1t} dR_S + a_t w_{2t} dR_V + a_t (1 - w_{1t} - w_{2t}) r dt - c_t dt,$$

donde el rendimiento del activo con riesgo está dado por

$$dR_S = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_s dW_t \quad (85.3)$$

y el rendimiento de su derivado por

$$dR_v = \frac{dv_t}{v_t}.$$

Este rendimiento se obtiene mediante la aplicación del lema de Itô a $v(S_t, t)$, lo cual conduce a

$$dv_t = \frac{\partial v_t}{\partial t} dt + \frac{\partial v_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \sigma_s^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2} dt$$

ó

$$dv_t = \mu_v v_t dt + \sigma_v v_t dW_t \quad (85.4)$$

con

$$\mu_v \equiv \left(\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2} \sigma_s^2 S_t^2 \right) \frac{1}{v_t}$$

y

$$\sigma_v \equiv \frac{1}{v_t} \frac{\partial v_t}{\partial S_t} \sigma_s S_t.$$

En virtud de (85.3) y (85.4), la restricción presupuestal se puede escribir como:

$$da_t = a_t \left[\left(r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_v - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t} \right) dt + (w_{1t}\sigma_s + w_{2t}\sigma_v)dW_t \right]. \quad (85.5)$$

Se requiere especificar un pago al vencimiento del derivado, $v(S_t, T) = g(S_t)$.

85.5 Posibilidades de producción

Suponga una tecnología de la forma $y_t = A_t S_t$ donde el producto marginal del capital, A_t , en el proceso de producción sigue una ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$dA_t = \alpha(A_t)dt + \beta(A_t)dU_t, \quad (85.6)$$

donde

$$\alpha(A_t) = \kappa(\theta - A_t) \quad (85.7)$$

y

$$\beta(A_t) = \nu \sqrt{A_t}, \quad (85.8)$$

κ , θ y ν son constantes positivas, y $\{U_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega^U, \mathcal{F}^U, \mathbb{P}^U)$ junto con su filtración aumentada $\mathbb{F}^U = \{\mathcal{F}_t^U\}_{t \geq 0}$. Suponga también, por simplicidad, que

$$\text{Cov}(dW_t, dU_t) = 0. \quad (85.9)$$

Es importante destacar que las especificaciones (85.7) y (85.8) aseguran que A_t sea no negativa. De hecho, (85.6) junto con (85.7) y (85.8) definen el proceso de Cox-Ingersoll-Ross (CIR).

85.6 Problema de decisión del consumidor

Se supone que el consumidor representativo obtiene satisfacción por el bien de consumo. En este caso, la utilidad esperada es del tipo von Neumann-Morgenstern. Específicamente, la función de utilidad total descontada al tiempo t , V_t , de un individuo representativo, adverso al riesgo y competitivo (tomador de precios) tiene la siguiente forma:

$$V_t \equiv E \left[\int_t^T \ln(c_s) e^{-\delta s} ds \mid \mathcal{F}_t \right], \quad (85.10)$$

donde c_s es el consumo al tiempo s , δ es la tasa subjetiva de descuento y \mathcal{F}_t es la información relevante disponible hasta el tiempo t . En este caso $\mathcal{F}_t \equiv \mathcal{F}_t^W \times \mathcal{F}_t^U$. Así pues, el consumidor toma decisiones de consumo y portafolio de tal manera que se maximice su satisfacción. Es decir, el consumidor desea determinar la trayectoria de consumo y las proporciones de su riqueza que va a asignar a los diferentes activos disponibles en la economía, de tal manera que su satisfacción por el bien de consumo sea lo más grande posible.

85.7 Condiciones de primer orden

Considere un consumidor que también es productor. Dada la función objetivo (85.10) y las restricciones (85.5) y (85.6), la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman está dada por

$$\begin{aligned} 0 = \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}} & \left\{ \ln(c_t) e^{-\delta t} + J_t \right. \\ & + J_a a_t \left(r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_v - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t} \right) \\ & \left. + \frac{1}{2} J_{aa} a_t^2 (w_{1t} \sigma_s + w_{2t} \sigma_v)^2 + J_A \alpha(A_t) + \frac{1}{2} J_{AA} \beta^2(A_t) \right\}, \end{aligned}$$

donde

$$J(a_t, A_t, t) = \max_{c_t, w_1, w_2} E \left[\int_t^T \ln(c_s) e^{-\delta s} ds \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (85.11)$$

es la función de utilidad indirecta y $J_a(a_t, t)$ es la variable de co-estado. Si se toma como candidato de solución a $J(a_t, A_t, t) = H(a_t, A_t)e^{-\delta t}$, se tiene que

$$0 = \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}} \left\{ \ln(c_t) - \delta H + H_a a_t \left(r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_v - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} H_{aa} a_t^2 (w_{1t}\sigma_s + w_{2t}\sigma_v)^2 + H_A \alpha(A_t) + \frac{1}{2} H_{AA} \beta^2(A_t) \right\}. \quad (85.12)$$

En este caso se satisface que

$$H(a_t, A_t) = g(A_t) \ln(a_t) + f(A_t),$$

para algunas funciones $g(A_t)$ y $f(A_t)$. Después de derivar la ecuación (85.12) con respecto de las variables de control, la condición necesaria del consumo óptimo es

$$\frac{1}{c_t} = \frac{g(A_t)}{a_t} \quad (85.13)$$

y las condiciones de primer orden sobre w_1 y w_2 son:

$$\mu - r = w_1 \sigma_s^2 + w_2 \sigma_s \sigma_v \quad (85.14)$$

y

$$\mu_v - r = w_1 \sigma_s \sigma_v + w_2 \sigma_v^2. \quad (85.15)$$

Las dos últimas ecuaciones pueden ser reescritas en términos matriciales como:

$$\begin{pmatrix} \mu - r \\ \mu_v - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu_v \end{pmatrix} - \mathbb{I} r = \begin{pmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_s \sigma_v \\ \sigma_s \sigma_v & \sigma_v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

85.8 Portafolio de equilibrio

El portafolio de equilibrio está dado por $w_1 = 1$ y $w_2 = 0$, lo cual conduce a

$$\mu - r = \sigma_s^2 \quad (85.16)$$

y

$$\mu_v - r = \sigma_s \sigma_v. \quad (85.17)$$

De la segunda ecuación se sigue que

$$\left(\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2} \sigma_s^2 S_t^2 \right) \frac{1}{v_t} - r = \frac{\partial v_t}{\partial S_t} \sigma_s^2 S_t \frac{1}{v_t}.$$

Si se utiliza ahora la ecuación (85.16), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t} (r + \sigma_s^2) S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2} \sigma_s^2 S_t^2 - r v_t &= \frac{\partial v_t}{\partial S_t} \sigma_s^2 S_t \\ \text{ó} \quad \frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2} \sigma_s^2 S_t^2 - r v_t &= 0, \end{aligned} \quad (85.18)$$

con la condición de frontera

$$v(S_t, T) = g(S_t). \quad (85.19)$$

La ecuación anterior coincide con los resultados de Black y Scholes (1973) y Merton (1973).

85.9 Una fórmula alternativa para la tasa de interés de equilibrio

A continuación se presenta una fórmula alternativa para la tasa de interés de equilibrio. A partir de (85.16), se tiene que

$$r = \mu - \sigma_s^2. \quad (85.20)$$

En lo que sigue se supone que $\mu > \sigma_s^2$. La tasa de interés de equilibrio se puede reescribir de la siguiente forma:

$$r = (w_1, w_2) \begin{pmatrix} \mu \\ \mu_v \end{pmatrix} + (w_1, w_2) \begin{pmatrix} \sigma_s^2 & \sigma_s \sigma_v \\ \sigma_s \sigma_v & \sigma_v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \frac{a J_{aa}}{J_a},$$

donde $w_1 = 1$ y $w_2 = 0$. En efecto, es suficiente observar que

$$J_a = e^{-\delta t} g(A_t) \frac{1}{a_t}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{a J_{aa}}{J_a} = -1.$$

85.10 Dinámica de la tasa corta

En esta sección, a partir de un proceso para la función de producción, se determina el proceso que conduce a la tasa corta. Si se define $\mu = \bar{\mu} A_t$ y $\sigma_s^2 = \tilde{\sigma}_s^2 A_t$ en (85.20), se tiene que

$$r_t = \gamma A_t$$

donde

$$\gamma = \tilde{\mu} - \tilde{\sigma}_s^2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} dr_t &= \gamma dA_t \\ &= \gamma \kappa (\theta - A_t) dt + \gamma \nu \sqrt{A_t} dU_t \\ &= \kappa (\theta \gamma - r_t) dt + \gamma^{1/2} \nu \sqrt{r_t} dU_t. \end{aligned}$$

Sean

$$\alpha = \kappa, \quad b = \theta \gamma \quad \text{y} \quad \sigma = \gamma^{1/2} \nu.$$

De esta manera,

$$dr_t = \alpha(b - r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dU_t$$

con α , b y σ cantidades positivas. Se puede mostrar que si $\sigma^2 > 2\alpha b$ la tasa corta r_t puede tomar el valor cero. Sin embargo, cuando $\sigma^2 \leq 2\alpha b$ el término de tendencia es suficientemente grande para hacer del origen un punto inaccesible para la tasa corta. En cualquier caso, si el valor inicial r_0 es no negativo, entonces la tasa corta jamás podrá ser negativa.

85.11 Bibliografía sugerida

- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1985). "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices." *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 385-408.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates." *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 363-384.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

85.12 Ejercicios

85.1 Demuestre que si $w_1 = 0$ y $w_2 = 1$ (la otra solución de esquina), también se cumple que

$$\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2} \sigma_s^2 S_t^2 - r v_t = 0.$$

Solución: Observe que en este caso,

$$\mu - r = \sigma_s \sigma_v$$

y

$$\mu_v - r = \sigma_v^2.$$

De la segunda ecuación se tiene que

$$\left(\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2} \sigma_s^2 S_t^2 \right) \frac{1}{v_t} - r = \left(\frac{\partial v_t}{\partial S_t} \right)^2 \sigma_s^2 S_t^2 \frac{1}{v_t^2}.$$

Si ahora se utiliza la primera ecuación, se sigue que

$$\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t} (r + \sigma_s \sigma_v) S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2} \sigma_s^2 S_t^2 - r v_t = \left(\frac{\partial v_t}{\partial S_t} \right)^2 \sigma_s^2 S_t^2 \frac{1}{v_t}$$

ó

$$\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t} r S_t + \left(\frac{\partial v_t}{\partial S_t} \right)^2 \sigma_s^2 S_t^2 \frac{1}{v_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2} \sigma_s^2 S_t^2 - r v_t = \left(\frac{\partial v_t}{\partial S_t} \right)^2 \sigma_s^2 S_t^2 \frac{1}{v_t}.$$

85.2 A partir de las condiciones de primer orden sobre w_1 y w_2 :

$$\mu - r = w_1 \sigma_s^2 + w_2 \sigma_v$$

y

$$\mu_v - r = w_1 \sigma_s \sigma_v + w_2 \sigma_v^2,$$

sin suponer una solución de esquina, determine la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes

$$\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2} \sigma_s^2 S_t^2 - r v_t = 0,$$

con la condición de frontera

$$v(S_t, T) = g(S_t).$$

CAPÍTULO 86

MODELO DE TASA CORTA DE DOTHAN

Conceptos básicos de este capítulo:

- Modelo de tasa corta de Dothan
- Movimiento geométrico Browniano
- Maximización de utilidad
- Modelo CAPM
- Valuación de bonos cupón cero
- Funciones de Bessel

86.1 Introducción

En este capítulo se presenta, para una cierta clase de preferencias, una fórmula de valuación de bonos cupón cero cuando la tasa corta sigue un movimiento geométrico Browniano. Esta fórmula es desarrollada por L. Uri Dothan en su artículo “On the Term Structure of Interest Rates” en el “Journal of Financial Economics” en 1978.

Debido a que la tasa de interés no es en sí misma un activo negociado, no se puede construir una cobertura que elimine la dependencia de la ecuación de valuación sobre las preferencias. En el modelo de Dothan se utilizan fundamentos microeconómicos de maximización de utilidad bajo ciertas preferencias y de argumentos de arbitraje en el contexto del modelo CAPM en tiempo continuo para obtener una ecuación diferencial parcial cuya solución es el precio de un bono a descuento. En particular, las preferencias sobre el consumo que utiliza la propuesta de Dothan están asociadas con la función utilidad logarítmica.

86.2 Dinámica de la tasa corta y ecuación diferencial parcial de un bono

En esta sección se especifica la dinámica de la tasa corta y se determina la ecuación diferencial parcial de segundo orden que determina el precio de un bono cupón cero. Para ello, se utilizan argumentos típicos de arbitraje. Se supone que el precio del bono, B , es función de la tasa corta r_t y del tiempo t , es decir, $B = B(r_t, t)$. Asimismo, se supone que la tasa instantánea de interés r_t al tiempo t cambia en forma continua y es conducida por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = \epsilon r_t dt + \sigma r_t dW_t, \quad (86.1)$$

donde $\epsilon \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son constantes conocidas y $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre un espacio de probabilidad con una filtración $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Observe que la tasa de interés tiene una distribución lognormal y, en particular, r_t es positiva con probabilidad uno. Si se aplica el lema de Itô a B , se tiene que

$$dB = \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \epsilon r_t \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 r_t^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \right) dt + \frac{\partial B}{\partial r_t} \sigma r_t dW_t. \quad (86.2)$$

Equivalentemente,

$$dB = \mu_B B dt + \sigma_B B dW_t, \quad (86.3)$$

donde

$$\mu_B = \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \epsilon r_t \frac{\partial B}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 r_t^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} \right) / B \quad (86.4)$$

y

$$\sigma_B = \left(\frac{\partial B}{\partial r_t} \right) \frac{\sigma r_t}{B}. \quad (86.5)$$

86.3 Planteamiento del problema de control óptimo estocástico de maximización de utilidad

Dado que la tasa de interés no es un activo negociado, no se puede construir una cobertura que elimine la dependencia del proceso de valuación con las preferencias. A continuación se muestra que esta dependencia puede ser estudiada con el modelo CAPM en tiempo continuo con utilidad logarítmica. Suponga que un consumidor-inversionista tiene acceso a dos activos: un bono y una acción. Sea w_t la riqueza real del individuo y suponga que la acumulación de w_t sigue una ecuación diferencial estocástica dada por

$$dw_t = (1 - \theta)w_t r_t dt + \theta w_t dR_S - c_t dt, \quad (86.6)$$

donde c_t es consumo, θ es la proporción de la riqueza que asigna a la acción y dR_S es el rendimiento de la acción. Suponga también que el precio de la acción es conducido por las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \beta S_t dU_t. \quad (86.7)$$

Evidentemente,

$$dR_S = \frac{dS_t}{S_t} = \alpha dt + \beta dU_t. \quad (86.8)$$

Se supone además que los movimientos Brownianos dW_t y dU_t están correlacionados de tal forma que $\text{Cov}(dW_t, dU_t) = \rho dt$. Por lo tanto, la ecuación diferencial estocástica de la riqueza está dada por

$$dw_t = [w_t(r_t + \theta(\alpha - r_t)) - c_t] dt + w_t \theta \beta dU_t. \quad (86.9)$$

Ahora bien, el consumidor-inversionista desea determinar c_t y θ de tal manera que resuelvan el siguiente problema:

$$J(w_t, t) = \max_{c_t, \theta} \mathbb{E} \left[\int_t^T F(c_s, s) ds \mid \mathcal{F}_t \right]$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} dw_t &= [w_t(r_t + \theta(\alpha - r_t)) - c_t] dt + w_t \theta \beta dU_t, \\ dr_t &= \sigma r_t dW_t. \end{aligned}$$

Específicamente, considere $F(c_s, s) = \ln(c_s)e^{-\delta s}$ donde δ es la tasa subjetiva de descuento del individuo. Observe también que se ha tomado, en particular, $\epsilon = 0$ en la ecuación (86.1). La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman de la programación dinámica estocástica en tiempo continuo está dada por:

$$\begin{aligned} 0 = \max_{c_t, \theta} & \left\{ F(c_t, t) + \frac{\partial J}{\partial t} + [w_t(r_t + \theta(\alpha - r_t)) - c_t] \frac{\partial J}{\partial w_t} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} w_t^2 \theta^2 \beta^2 \frac{\partial^2 J}{\partial w_t^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 r_t^2 \frac{\partial^2 J}{\partial r_t^2} + w_t \theta \sigma_{sr} \frac{\partial^2 J}{\partial w_t \partial r_t} \right\}, \end{aligned} \quad (86.10)$$

donde $\sigma_{sr} = \beta \sigma r_t \rho$ es la covarianza entre S_t y r_t . Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial F}{\partial c_t} - \frac{\partial J}{\partial w_t} = 0 \quad (86.11)$$

y

$$(\alpha - r_t) \frac{\partial J}{\partial w_t} + w_t \theta \beta^2 \frac{\partial^2 J}{\partial w_t^2} + \sigma_{sr} \frac{\partial^2 J}{\partial w_t \partial r_t} = 0. \quad (86.12)$$

Dado que $F(c_t, t) = \ln(c_t)e^{-\delta t}$, entonces

$$\frac{e^{-\delta t}}{c_t} = \frac{\partial J}{\partial w_t}.$$

Se propone una solución de la forma

$$J(w_t, t) = g(t) \ln(w_t). \quad (86.13)$$

En este caso, se tiene que

$$\frac{\partial J}{\partial w_t} = \frac{g(t)}{w_t}, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial w_t^2} = -\frac{g(t)}{w_t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 J}{\partial w_t \partial r_t} = 0. \quad (86.14)$$

Si se sustituyen estas derivadas parciales en la ecuación (86.12), se obtiene

$$(\alpha - r_t) = \theta \beta^2. \quad (86.15)$$

De esta manera, el premio al riesgo, λ , satisface

$$\lambda = \frac{\alpha - r_t}{\beta} = \theta \beta. \quad (86.16)$$

Es decir, λ es constante. Ahora bien, si no existen oportunidades de arbitraje todos los activos dependientes de r_t deben satisfacer una ecuación similar a (86.16) en donde se tienen que sustituir las correspondientes media y volatilidad de los rendimientos del activo en cuestión. Por lo tanto,

$$\lambda = \frac{\mu_B - r_t}{\sigma_B}. \quad (86.17)$$

Si se sustituyen las definiciones de μ_B y σ_B en la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - \lambda \sigma r_t \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0, \quad (86.18)$$

lo que proporciona la ecuación diferencial parabólica y lineal que caracteriza el precio de un bono cupón cero.

Si se denota $\gamma = \lambda/\sigma$ y $\tau = T - t$ es el tiempo de vida del bono, entonces la ecuación (86.18) puede reescribirse como:

$$-\frac{\partial B}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} - \sigma^2 \gamma r_t \frac{\partial B}{\partial r_t} - r_t B = 0, \quad (86.19)$$

con condiciones en la frontera:

$$\begin{aligned} B(r_t, 0) &= 1, \\ B(0, \tau) &= 1, \\ B(\infty, \tau) &= 0, \quad \text{para } \tau > 0. \end{aligned} \quad (86.20)$$

86.4 Fórmula de valuación de un bono cupón cero cuando la tasa corta sigue un movimiento geométrico Browniano

Suponga, en particular, que $\gamma = 0$. De esta manera, $r_t = \alpha$. Considere ahora los siguientes cambios de variable:

$$x_t = \frac{2r_t}{\sigma^2}, \quad s = \frac{\sigma^2 \tau}{2} \quad \text{y} \quad B(r_t, \tau) = v(x_t, s), \quad (86.21)$$

entonces

$$r_t = \frac{\sigma^2 x_t}{2} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{2s}{\sigma^2}.$$

En consecuencia, las derivadas parciales de B con respecto de r_t y τ están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial r_t} &= \frac{\partial v}{\partial r_t} = \frac{\partial v}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial r_t} = \frac{2}{\sigma^2} \frac{\partial v}{\partial x_t}, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial r_t^2} &= \frac{\partial}{\partial r_t} \left(\frac{2}{\sigma^2} \frac{\partial v}{\partial x_t} \right) = \frac{2}{\sigma^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} \frac{\partial x_t}{\partial r_t} = \frac{4}{\sigma^4} \frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2}, \\ \frac{\partial B}{\partial \tau} &= \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial s}. \end{aligned}$$

Si se sustituyen las derivadas parciales anteriores en la ecuación diferencial (86.19), se tiene que

$$x_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} - x_t v - \frac{\partial v}{\partial s} = 0, \quad (86.22)$$

$$\begin{aligned} v(x_t, 0) &= 1, \\ v(0, s) &= 1, \\ v(\infty, s) &= 0. \end{aligned} \quad (86.23)$$

Si, además, se supone que $v(x_t, s) = w(x_t, s) + f(x_t)$, entonces la ecuación diferencial (86.22) se transforma en

$$x_t^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_t^2} + f''(x_t) \right) - x_t(w + f(x_t)) - \frac{\partial w}{\partial s} = 0. \quad (86.24)$$

Después de agrupar términos de manera conveniente, se tiene que

$$(x_t^2 f''(x_t) - x_t f(x_t)) + \left(x_t^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_t^2} - x_t w - \frac{\partial w}{\partial s} \right) = 0. \quad (86.25)$$

Si v es solución de la ecuación (86.22), entonces f y w satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$x_t f''(x_t) - f(x_t) = 0, \quad (86.26)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (86.27)$$

Así,

$$x_t^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_t^2} - x_t w - \frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad (86.28)$$

sujeto a:

$$w(x_t, 0) = v(x_t, 0) - f(x_t) = 1 - f(x_t), \quad (86.29)$$

$$w(0, s) = 0,$$

$$w(\infty, s) = 0.$$

Considere ahora el siguiente cambio de variable

$$z_t = 2\sqrt{x_t}$$

y

$$f(x_t) = \frac{z_t h(z_t)}{2},$$

entonces la derivada de f se puede expresar como

$$\begin{aligned} f'(x_t) &= \frac{df(x_t)}{dz_t} \frac{dz_t}{dx_t} \\ &= \left[\frac{z_t}{2} h'(z_t) + \frac{1}{2} h(z_t) \right] x_t^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{z_t}{2} h'(z_t) + \frac{1}{2} h(z_t) \right] \frac{2}{z_t} \\ &= h'(z_t) + \frac{h(z_t)}{z_t} \end{aligned}$$

y la segunda derivada de f con respecto de x_t está dada por

$$\begin{aligned} f''(x_t) &= \frac{dh'(z_t)}{dx_t} + \frac{d}{dx_t} \left(\frac{h(z_t)}{z_t} \right) \\ &= \frac{dh'(z_t)}{dz_t} \frac{dz_t}{dx_t} + \frac{d}{dz_t} \left(\frac{h(z_t)}{z_t} \right) \frac{dz_t}{dx_t} \\ &= h''(z_t) x_t^{-1/2} + \left[\frac{z_t h'(z_t) - h(z_t)}{z_t^2} \right] x_t^{-1/2} \\ &= \frac{2}{z_t} h''(z_t) + \frac{2}{z_t^3} [z_t h'(z_t) - h(z_t)] \\ &= \frac{2}{z_t} h''(z_t) + \frac{2}{z_t^2} h'(z_t) - \frac{2}{z_t^3} h(z_t). \end{aligned}$$

Si se sustituyen f y f'' en la ecuación (86.26), se tiene

$$\frac{z_t^2}{4} \left[\frac{2}{z_t} h''(z_t) + \frac{2}{z_t^2} h'(z_t) - \frac{2}{z_t^3} h(z_t) \right] - \frac{z_t}{2} h(z_t) = 0.$$

Al simplificar la ecuación anterior, se obtiene

$$z_t^2 h''(z_t) + z_t h'(z_t) - (z_t^2 + 1) h(z_t) = 0. \quad (86.30)$$

La solución de la ecuación diferencial anterior corresponde a la función modificada de Bessel de orden uno, la cual está dada por

$$K_1(z_t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{u^2} \exp \left\{ -\frac{z_t}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} du.$$

Observe que

$$K_1(\infty) = 0 \quad (86.31)$$

y

$$K_1(0) = \infty. \quad (86.32)$$

Asimismo,

$$\lim_{z_t \rightarrow \infty} z_t K_1(z_t) = 0. \quad (86.33)$$

En efecto, observe que

$$z_t K_1(z_t) = \int_0^\infty \frac{z_t}{2u^2} \exp \left\{ -\frac{z_t}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} du. \quad (86.34)$$

Escriba el integrando de (86.34) como

$$g_{z_t}(u) = \frac{z_t}{2u^2 e^{vz_t}}, \quad (86.35)$$

donde

$$v = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right).$$

Si se aplica la regla de L'Hopital a (86.35) cuando $z_t \rightarrow \infty$, se sigue que

$$\lim_{z_t \rightarrow \infty} \frac{z_t}{e^{vz_t}} = \lim_{z_t \rightarrow \infty} \frac{1}{ve^{vz_t}} = 0.$$

Claramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2u^2 e^{vn}} = 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{z_t \rightarrow \infty} z_t K_1(z_t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n K_1(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty g_n(u) du = \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(u) du = 0.$$

El límite (86.33) también se puede verificar a partir de la aproximación

$$z_t^{1/2} e^{z_t} K_1(z_t) = a_0 + a_1 \left(\frac{z_t}{2} \right) + a_2 \left(\frac{z_t}{2} \right)^2 + a_3 \left(\frac{z_t}{2} \right)^3 + \dots$$

válida para $2 \leq z_t < \infty$ y ciertas constantes a_0, a_1, a_2, \dots , a partir de la cual se sigue que

$$z_t K_1(z_t) = a_0 z_t^{1/2} e^{-z_t} + a_1 z_t^{1/2} e^{-z_t} \left(\frac{z_t}{2} \right) + a_2 z_t^{1/2} e^{-z_t} \left(\frac{z_t}{2} \right)^2 + a_3 z_t^{1/2} e^{-z_t} \left(\frac{z_t}{2} \right)^3 + \dots,$$

lo cual produce (86.33). Asimismo, observe que la aproximación

$$z_t K_1(z_t) = 1 + z_t \ln \left(\frac{z_t}{2} \right) I_1(z_t) + o \left(\frac{z_t}{2} \right) \quad (86.36)$$

válida para $0 < z_t < 2$ con $I_1(z_t)$ dada por

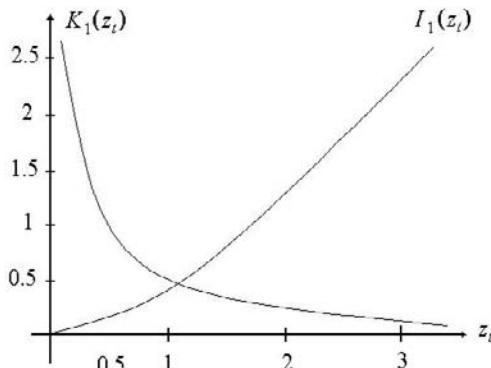
$$I_1(z_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{z_t}{2} \right)^{2k+1} \quad (86.37)$$

satisface $\lim_{z_t \rightarrow \infty} I_1(z_t) = \infty$ y $\lim_{z_t \rightarrow 0} I_1(z_t) = 0$. De esta manera, a partir de (86.36), se obtiene

$$\lim_{z_t \rightarrow 0} z_t K_1(z_t) = 1. \quad (86.38)$$

En consecuencia, a fin de que se cumplan $f(0) = 1$ y $f(\infty) = 0$, la solución de (86.26) está dada por

$$f(x_t) = z_t K_1(z_t) = 2\sqrt{x_t} K_1(2\sqrt{x_t}).$$



Gráfica 86.1 Función de Bessel $I_1(z_t)$ y $K_1(z_t)$.

Considere ahora los siguientes cambios de variables:

$$z_t = 2\sqrt{x_t} \quad y \quad w(x_t, s) = \frac{1}{2}z_t h(z_t, s).$$

De esta manera, las derivadas parciales de w están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x_t} &= \frac{\partial w}{\partial z_t} \frac{\partial z_t}{\partial x_t} \\ &= x_t^{-1/2} \frac{\partial w}{\partial z_t} \\ &= x_t^{-1/2} \left(\frac{z_t}{2} \frac{\partial h}{\partial z_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial z_t} \right) \\ &= \left(\frac{2}{z_t} \right) \left(\frac{z_t}{2} \frac{\partial h}{\partial z_t} + \frac{1}{2} h \right) \\ &= \frac{\partial h}{\partial z_t} + \frac{h}{z_t}. \end{aligned} \tag{86.39}$$

La segunda derivada de $w(x_t, s)$ con respecto de x_t satisface

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x_t^2} &= \frac{\partial^2 h}{\partial z_t \partial x_t} + \frac{\partial}{\partial x_t} \left(\frac{h}{z_t} \right) \\ &= \frac{\partial^2 h}{\partial z_t^2} x_t^{-1/2} + \left[\frac{z_t (\partial h / \partial z_t) x_t^{-1/2} - h x_t^{-1/2}}{z_t^2} \right] \\ &= \frac{\partial^2 h}{\partial z_t^2} \frac{2}{z_t} + \left[\frac{(\partial h / \partial z_t) - (h/z_t)}{z_t^2} \right] \\ &= \frac{\partial^2 h}{\partial z_t^2} \frac{2}{z_t} + \frac{\partial h}{\partial z_t} \frac{2}{z_t^2} - 2 \frac{h}{z_t^3}. \end{aligned} \tag{86.40}$$

Si se sustituyen (86.39) y (86.40) en (86.28), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{z_t^4}{16} \left[2 \frac{h_{zz}}{z_t} + 2 \frac{h_z}{z_t^2} - 2 \frac{h}{z_t^3} \right] - \frac{z_t^2}{4} \left[\frac{z_t}{2} h \right] - \frac{z_t}{2} h_s &= 0 \\ \text{o} \\ z_t^2 h_{zz} + z_t h_z - h - (z_t^2 + 1)h - 4h_s &= 0. \end{aligned} \tag{86.41}$$

A partir de (86.29), la condición de frontera que se debe cumplir es

$$\frac{z_t}{2} h(z_t, 0) = 1 - f(x_t) = 1 - z_t K_1(z_t),$$

lo cual implica

$$h(z_t, 0) = 2 \left[\frac{1}{z} - K_1(z_t) \right]. \tag{86.42}$$

Si se separan variables en $h(z_t, s)$, se tiene que

$$h(z_t, s) = \int_0^\infty \phi(\mu) K_{i\mu}(z_t) e^{-(1+\mu^2)s/4} d\mu, \tag{86.43}$$

donde el parámetro de separación es $-(1 + \mu^2)$ y la función $\phi(\mu)$ se determina a partir de la condición de frontera (86.42), la cual está dada por

$$\phi(\mu) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\mu \operatorname{senh}(\pi\mu/2)}{1 + \mu^2} \right), \tag{86.44}$$

donde

$$\operatorname{senh}(\pi\mu/2) = \frac{e^{\pi\mu/2} - e^{-\pi\mu/2}}{2}.$$

Dado que

$$K_{i\mu}(z_t) = \csc\left(\frac{i\mu\pi}{2}\right) \int_0^\infty \operatorname{sen}(z_t \operatorname{senh}(\theta)) \operatorname{senh}(i\mu\theta) d\theta,$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} h(z_t, 0) &= \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{senh}(\pi\mu/2)}{1 + \mu^2} K_{i\mu}(z_t) d\mu \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{sen}(z_t \operatorname{senh}(\theta)) \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{sen}(\mu\theta)}{1 + \mu^2} d\mu d\theta \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-\theta} \operatorname{sen}(z_t \operatorname{senh}(\theta)) d\theta = 2\left(\frac{1}{z_t} - K_1(z_t)\right). \end{aligned} \quad (86.45)$$

A partir de (86.43), se tiene que

$$\begin{aligned} h(z_t, s) &= \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{sen}(z_t \operatorname{senh}(\theta)) \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{sen}(\mu\theta)}{1 + \mu^2} e^{-(1+\mu^2)s/4} d\mu d\theta \\ &= \int_0^\infty \operatorname{sen}(z_t \operatorname{senh}(\theta)) \left[e^{-\theta} \operatorname{erfc}\left(\frac{s-2\theta}{2\sqrt{s}}\right) - e^\theta \operatorname{erfc}\left(\frac{s+2\theta}{2\sqrt{s}}\right) \right] d\theta. \end{aligned} \quad (86.46)$$

En virtud de que $B(t, T) = w(x_t, s) + f(x_t)$, se sigue que

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \sqrt{x_t} \int_0^\infty \operatorname{sen}(2\sqrt{x_t} \operatorname{senh}(\theta)) \left[e^{-\theta} \operatorname{erfc}\left(\frac{s-2\theta}{2\sqrt{s}}\right) - e^\theta \operatorname{erfc}\left(\frac{s+2\theta}{2\sqrt{s}}\right) \right] d\theta \\ &\quad + 2\sqrt{x_t} K_1(2\sqrt{x_t}), \end{aligned} \quad (86.47)$$

donde

$$x_t = \frac{2r_t}{\sigma^2},$$

$$s = \frac{\tau\sigma^2}{2},$$

$$\tau = T - t,$$

y

$$\operatorname{erfc}(a) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-q^2} dq.$$

De manera similar, la solución para el caso con $\gamma \neq 0$, está dada por

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \frac{1}{\pi^2} x_t^p \int_0^\infty \operatorname{sen}(2\sqrt{x_t} \operatorname{senh}(\theta)) \int_0^\infty H(\mu) \operatorname{sen}(\mu\theta) d\mu d\theta \\ &\quad + \frac{2}{\Gamma(2p)} x_t^p K_{2p}(2\sqrt{x_t}), \end{aligned} \quad (86.48)$$

donde

$$H(\mu) = e^{-(4p^2 + \mu^2)s/4} \mu \cosh\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) \left| \Gamma\left(-p + \frac{\mu i}{2}\right) \right|^2,$$

$$x_t = \frac{2r_t}{\sigma^2},$$

$$s = \frac{\tau\sigma^2}{2},$$

$$\tau = T - t$$

y

$$p = \frac{1}{2} + \gamma$$

ó

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \frac{1}{\pi^2} x_t^p \int_0^\infty \sin(2\sqrt{x_t} \operatorname{senh}(\theta)) \int_0^\infty H(\mu) \sin(\mu\theta) d\mu d\theta \\ &\quad + \frac{2}{\Gamma(2p)} x_t^p K_{2p}(2\sqrt{x_t}), \end{aligned} \tag{86.49}$$

donde

$$H(\mu) = \exp \left\{ -\frac{(4p^2 + \mu^2)\sigma^2(T-t)}{8} \right\} \mu \cosh \left(\frac{\pi\mu}{2} \right) \left| \Gamma \left(-p + \frac{\mu i}{2} \right) \right|^2,$$

$$x_t = \frac{2r_t}{\sigma^2}$$

y

$$p = \frac{1}{2} + \gamma.$$

86.5 Bibliografía sugerida

- Brigo, D. and F. Mercurio (2001). Interest Rate Models Theory and Practice. Springer-Verlag, Berlin, New York.
- Dothan, L. U. (1978). "On the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial Economics*, Vol. 6, No. 1, pp. 59-69.
- Venegas-Martínez, F. (2005). "Caracterización del precio de un bono cupón cero en un modelo de equilibrio general". *Revista de Estadística, Econometría y Finanzas Aplicadas*, Vol. 3, No. 3, pp. 1-16.

86.6 Ejercicios

86.1 Si

$$K_a(z_t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{u^{1+a}} \exp \left\{ -\frac{z_t}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} du.$$

Demuestre que

$$K_1(z_t) = K_{-1}(z_t).$$

Solución: Observe que

$$K_1(z_t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{u^2} \exp \left\{ -\frac{z_t}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \right\} du.$$

Considere el cambio de variable $v^{-1} = u$, entonces $du = -v^{-2}dv$ y

$$\begin{aligned} K_1(z_t) &= -\frac{1}{2} \int_\infty^0 v^2 \exp \left\{ -\frac{z_t}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right) \right\} \frac{dv}{v^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{z_t}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right) \right\} dv. \end{aligned}$$

86.2 Suponga que la tasa corta es conducida por

$$dr_t = \epsilon r_t dt + \sigma r_t dW_t,$$

donde $\epsilon \neq 0$ y $\sigma > 0$ son constantes conocidas y $(W_t)_{t \in [0, T]}$ es un movimiento Browniano definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Demuestre que

$$\begin{aligned} B(t, T) = & \frac{1}{\pi^2} x_t^p \int_0^\infty \operatorname{sen}(2\sqrt{x_t} \operatorname{senh}(\theta)) \int_0^\infty H(\mu) \operatorname{sen}(\mu\theta) d\mu d\theta \\ & + \frac{2}{\Gamma(2p)} x_t^p K_{2p}(2\sqrt{x_t}), \end{aligned}$$

donde

$$H(\mu) = \exp \left\{ -\frac{(4p^2 + \mu^2)\sigma^2(T-t)}{8} \right\} \mu \cosh \left(\frac{\pi\mu}{2} \right) \left| \Gamma \left(-p + \frac{\mu i}{2} \right) \right|^2,$$

$$x_t = \frac{2r_t}{\sigma^2}$$

y

$$p = \frac{1}{2} - \epsilon.$$

86.3 Considere un consumidor-inversionista que desea resolver el siguiente problema:

$$J(w_t, r_t, t) = \max_{c_t, \theta} \mathbb{E} \left[\int_t^T \ln(c_s) e^{-\delta s} ds \mid \mathcal{F}_t \right]$$

sujeto a:

$$dw_t = [w_t(r_t + \theta(\alpha - r_t)) - c_t] dt + w_t \theta \beta dU_t,$$

$$dr_t = \sigma r_t dW_t.$$

Suponga que

$$J(w_t, r_t, t) = g(t) \ln(w_t) + H(r_t, t)$$

y lleve a cabo un análisis completo del problema anterior de control óptimo estocástico.

CAPÍTULO 87

MODELO DE FISCHER DE RIESGO DE INFLACIÓN CON BONOS INDEXADOS

Conceptos básicos de este capítulo:

- Dinámica estocástica del nivel general de precios
- Bonos indexados
- Problema intertemporal de decisión de un consumidor-inversionista
- Equilibrio del consumidor

87.1 Introducción

Entre los contratos más populares para cubrirse contra la inflación, anticipada o no, destacan los bonos indexados. Estos instrumentos permiten a los agentes cubrirse del riesgo de inflación con costos bajos de transacción. En este capítulo se estudia cómo un consumidor-inversionista con vida infinita y maximizador de utilidad conforma su portafolio con tres diferentes activos: bonos indexados, títulos de capital y bonos nominales. Todo el ingreso del consumidor es debido exclusivamente al retorno de sus inversiones. Se supone que el nivel general de precios sigue un movimiento geométrico Browniano.

Uno de los principales resultados de este capítulo es que si las acciones no se utilizan para cubrirse contra la inflación, los bonos indexados sólo serán demandados si ofrecen un premio sobre los bonos nominales. Asimismo, se muestra que en un entorno de expectativas homogéneas y sin acceso a bonos extranjeros, sólo existirán bonos indexados.

87.2 Dinámica estocástica del nivel general de precios

En la economía hay un solo bien de consumo, de carácter perecedero, de precio P_t , el cual es conducido por un movimiento geométrico Browniano descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \pi dt + \sigma dW_t, \quad (87.1)$$

donde π es la inflación media esperada por unidad de tiempo y σ es la volatilidad instantánea del nivel general de precios por unidad de tiempo.

87.3 Rendimientos de los activos

El agente tiene acceso a tres diferentes activos: un bono indexado, que paga una tasa real de interés más la inflación observada, de precio B_{1t} ; una acción de precio K_t ; y un bono nominal de precio B_{3t} . Los ajustes (rebalanceo) en el portafolio ocurren instantáneamente y sin costo. No hay restricciones de no negatividad en la tenencia de activos. El bono indexado paga una tasa real, $r_1 = i_1 - \pi$, más la tasa de inflación observada, dP_t/P_t . Así, la ecuación que describe el rendimiento nominal de este bono indexado está dada por:

$$\begin{aligned} dR_{1t} &= \frac{dB_{1t}}{B_{1t}} \\ &= r_1 dt + \left(\frac{dP_t}{P_t} \frac{1}{dt} \right) dt \\ &= i_1 dt + \sigma dW_t. \end{aligned} \quad (87.2)$$

El rendimiento nominal de la acción es

$$dR_{2t} = \frac{dK_t}{K_t} = i_2 dt + s dV_t, \quad (87.3)$$

donde i_2 es el rendimiento nominal medio de la acción por unidad de tiempo y s^2 es la varianza del rendimiento nominal por unidad de tiempo. Se supone que los procesos dW_t y dV_t están correlacionados entre sí, es decir,

$$\text{Cov}(dW_t, dV_t) = \rho dt. \quad (87.4)$$

En virtud del lema de Itô, el rendimiento real de la acción satisface

$$\begin{aligned} \frac{d(K_t/P_t)}{K_t/P_t} &= (i_2 - \pi - \rho\sigma s + \sigma^2) dt + s dV_t - \sigma dW_t \\ &= r_2 dt + s dV_t - \sigma dW_t, \end{aligned} \quad (87.5)$$

donde

$$r_2 = i_2 - \pi - \rho\sigma s + \sigma^2.$$

Note, particularmente, que en el caso estocástico el rendimiento real esperado sobre la acción, r_2 , no es el rendimiento nominal esperado menos la tasa de inflación esperada ya que aparece el término $-\rho\sigma s + \sigma^2$ debido a la incertidumbre acerca de la tasa de inflación y la tasa de rendimiento sobre la acción. Por supuesto, podría presentarse el caso de que $\rho s = \sigma$. Sin embargo, en general, esto no se cumple. De hecho, si se presentara $\rho s = \sigma$ sería por pura casualidad.

La covarianza entre el rendimiento real de la acción y la tasa de inflación es

$$\sigma dW_t (s dV_t - \sigma dW_t) = (\sigma s \rho - \sigma^2) dt = \sigma (s \rho - \sigma) dt$$

y el coeficiente de correlación entre el rendimiento real sobre la acción y la tasa de inflación es

$$\lambda = \frac{s\rho - \sigma}{\sqrt{s^2 - 2\rho\sigma s + \sigma^2}}. \quad (87.6)$$

En el caso del bono nominal con rendimiento determinista se tiene que

$$dR_{3t} = \frac{dB_{3t}}{B_{3t}} = i_3 dt. \quad (87.7)$$

El rendimiento real del bono nominal se calcula mediante el lema de Itô y es igual a:

$$\frac{d(B_{3t}/P_t)}{B_{3t}/P_t} = r_3 dt - \sigma dW_t = r_3 dt - \sigma dW_t, \quad (87.8)$$

donde

$$r_3 = i_3 - \pi + \sigma^2.$$

Nuevamente, en el caso estocástico el rendimiento real esperado del bono nominal, r_3 , no es la tasa nominal esperada menos la tasa esperada de inflación.

87.4 Restricciones presupuestales

Sean w_{1t} , w_{2t} y w_{3t} las proporciones de la riqueza nominal que se asignan a bonos reales indexados, acciones y bonos nominales, respectivamente. Estas proporciones obviamente satisfacen

$$1 = w_{1t} + w_{2t} + w_{3t}. \quad (87.9)$$

La riqueza nominal, A_t , del consumidor es definida mediante

$$A_t = B_{1t} + K_t + B_{3t}. \quad (87.10)$$

y la restricción presupuestal está dada por

$$\begin{aligned}
 dA_t &= A_t(w_{1t}dR_{1t} + w_{2t}dR_{2t} + w_{3t}dR_{3t})dt - P_t c_t dt \\
 &= A_t(w_{1t}i_1 + w_{2t}i_2 + (1 - w_{1t} - w_{2t})i_3)dt \\
 &\quad + A_t(w_{1t}\sigma dW_t + w_{2t}s dV_t) - P_t c_t dt \\
 &= A_t\left(w_{1t}(i_1 - i_3) + w_{2t}(i_2 - i_3) + i_3 - \frac{P_t c_t}{A_t}\right)dt \\
 &\quad + A_t(w_{1t}\sigma dW_t + w_{2t}s dV_t).
 \end{aligned} \tag{87.11}$$

Esta última puede escribir en forma breve como

$$\frac{dA_t}{A_t} = \mu_t dt + dU_t, \tag{87.12}$$

donde

$$\mu_t = w_{1t}(i_1 - i_3) + w_{2t}(i_2 - i_3) + i_3 - \frac{P_t c_t}{A_t}$$

y

$$dU_t = w_{1t}\sigma dW_t + w_{2t}s dV_t.$$

87.5 Problema de decisión del consumidor

El consumidor-inversionista racional desea determinar la trayectoria de consumo y las proporciones de su riqueza que asignará a los diferentes activos de tal manera que se maximice su utilidad total descontada

$$E\left\{\int_0^\infty \ln(c_t) e^{-\delta t} dt \mid \mathcal{F}_0\right\}, \tag{87.13}$$

donde \mathcal{F}_0 es la información relevante disponible en $t = 0$. La solución del problema de decisión satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\begin{aligned}
 0 &= \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}} \left\{ \ln(c_t) e^{-\delta t} + J_t + J_A A_t \mu_t + J_P \pi P_t \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} J_A A_t^2 (w_{1t}^2 \sigma^2 + w_{2t}^2 s^2 + 2w_{1t} w_{2t} \sigma s \rho) \\
 &\quad + \frac{1}{2} J_P P_t^2 \sigma^2 \\
 &\quad \left. + J_P A_t (w_{1t} \sigma + w_{2t} s \rho) \right\},
 \end{aligned} \tag{87.14}$$

donde

$$J = J(A_t, P_t, t) = E\left\{\int_t^\infty \ln(c_s) e^{-\delta s} ds \mid \mathcal{F}_t\right\}$$

es la función de utilidad indirecta al tiempo t . La ecuación (87.14) es una ecuación diferencial parcial en J . Se propone como candidato de solución en variables separables a

$$J(A_t, P_t, t) = G(A_t, P_t) e^{-\delta t}. \tag{87.15}$$

Ahora, si se sustituye (87.15) en (87.14), se encuentra que

$$\begin{aligned}
 0 &= \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}} \left\{ \ln(c_t) - \delta G + G_A A_t \mu_t + G_P \pi P_t \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} G_A A_t^2 (w_{1t}^2 \sigma^2 + w_{2t}^2 s^2 + 2w_{1t} w_{2t} \sigma s \rho) \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} G_P P_t^2 \sigma^2 + G_A P_t A_t (w_{1t} \sigma + w_{2t} s \rho) \right\}.
 \end{aligned} \tag{87.16}$$

Si se propone ahora la siguiente forma funcional para G :

$$G(A_t, P_t) = \beta_0 + \beta_1 \ln(A_t P_t) + H(P_t, t) \tag{87.17}$$

y se sustituye en (87.16) junto con el valor de μ_t , se sigue que

$$\begin{aligned} 0 = \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}} & \left\{ \ln(c_t) - \delta(\beta_0 + \beta_1 \ln(A_t) + \beta_1 \ln(P_t)) \right. \\ & + \beta_1 \left(w_{1t}(i_1 - i_3) + w_{2t}(i_2 - i_3) + i_3 - \frac{P_t c_t}{A_t} \right) + \beta_1 \pi \\ & - \frac{1}{2} \beta_1 (w_{1t}^2 \sigma^2 + w_{2t}^2 s^2 + 2w_{1t} w_{2t} \sigma s \rho) \\ & \left. - \frac{1}{2} \beta_1 \sigma^2 + (\text{términos en } H) \right\}. \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden del problema de programación dinámica estocástica en tiempo continuo conducen a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{c_t} - \frac{\beta_1 P_t}{A_t} = 0, \quad (87.18)$$

$$(i_1 - i_3) - w_{1t} \sigma^2 - w_{2t} \sigma s \rho = 0 \quad (87.19)$$

y

$$(i_2 - i_3) - w_{2t} s^2 - w_{1t} \sigma s \rho = 0. \quad (87.20)$$

Así, de (87.18) se obtiene que $c_t \propto A_t/P_t$, es decir el consumo es proporcional a la riqueza real. Asimismo, a partir de (87.19) y (87.20) se tiene que las proporciones de la riqueza que se asignan a los diferentes activos w_{1t} , w_{2t} y w_{3t} son independientes del tiempo y del nivel de la riqueza. De este modo:

$$w_{1t} \equiv w_1, \quad w_{2t} \equiv w_2 \quad y \quad w_{3t} \equiv w_3.$$

El sistema de dos ecuaciones lineales, definido por (87.19) y (87.20), en las incógnitas w_1 y w_2 tiene la siguiente solución:

$$w_1 = \frac{i_1 - i_3}{\sigma^2(1 - \rho^2)} - \frac{(i_2 - i_3)\rho}{\sigma s(1 - \rho^2)} \quad (87.21)$$

y

$$w_2 = \frac{i_2 - i_3}{s^2(1 - \rho^2)} - \frac{(i_1 - i_3)\rho}{\sigma s(1 - \rho^2)}. \quad (87.22)$$

El valor de w_3 se determina mediante w_1 y w_2 , es decir,

$$\begin{aligned} w_3 &= 1 - w_1 - w_2 \\ &= 1 - \frac{i_1 - i_3}{\sigma^2(1 - \rho^2)} + \frac{(i_2 - i_3)\rho}{\sigma s(1 - \rho^2)} - \frac{i_2 - i_3}{s^2(1 - \rho^2)} + \frac{(i_1 - i_3)\rho}{\sigma s(1 - \rho^2)} \\ &= 1 - \frac{i_1 - i_3}{1 - \rho^2} \left(\frac{s - \rho \sigma}{\sigma^2 s} \right) - \frac{i_2 - i_3}{1 - \rho^2} \left(\frac{\sigma - \rho s}{s^2 \sigma} \right). \end{aligned} \quad (87.23)$$

87.6 Estática comparativa

Con el propósito de determinar la dirección y magnitud de los efectos de las variables exógenas en las decisiones de inversión, se realizan los siguientes ejercicios de estática comparativa. Observe primero que

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial i_1} &= \frac{1}{\sigma^2(1 - \rho^2)}, & \frac{\partial w_1}{\partial i_2} &= -\frac{\rho}{\sigma s(1 - \rho^2)}, & \frac{\partial w_1}{\partial i_3} &= \frac{-s + \rho \sigma}{s \sigma^2(1 - \rho^2)}, \\ \frac{\partial w_2}{\partial i_1} &= -\frac{\rho}{\sigma s(1 - \rho^2)}, & \frac{\partial w_2}{\partial i_2} &= \frac{1}{s^2(1 - \rho^2)}, & \frac{\partial w_2}{\partial i_3} &= \frac{-\sigma + \rho s}{s^2 \sigma(1 - \rho^2)}, \\ \frac{\partial w_3}{\partial i_1} &= -\frac{s - \rho \sigma}{\sigma^2 s(1 - \rho^2)}, & \frac{\partial w_3}{\partial i_2} &= -\frac{\sigma - \rho s}{s^2 \sigma(1 - \rho^2)}, & \frac{\partial w_3}{\partial i_3} &= \frac{s^2 + \sigma^2 - 2\rho \sigma s}{\sigma^2 s^2(1 - \rho^2)}. \end{aligned}$$

Como puede observarse, la demanda de cada activo está directamente relacionada con su propia tasa de interés nominal esperada. Por otro lado, si $\rho > 0$, los bonos indexados y las acciones son sustitutos en el sentido de que

$$\frac{\partial w_1}{\partial i_2} = \frac{\partial w_2}{\partial i_1} = -\frac{\rho}{\sigma s(1-\rho^2)} < 0.$$

Es decir, la demanda de cada uno de estos activos está inversamente relacionada con la tasa de interés nominal esperada del otro. Las otras derivadas de la función de demanda son, en general, de signo ambiguo.

La ambigüedad en las funciones de demanda puede ser removida con el supuesto $\rho = 0$. En este caso,

$$w_1 = \frac{i_1 - i_3}{\sigma^2},$$

$$w_2 = \frac{i_2 - i_3}{s^2}$$

y

$$w_3 = 1 - \frac{i_1 - i_3}{\sigma^2} - \frac{i_2 - i_3}{s^2}.$$

Por lo tanto, las derivadas parciales satisfacen

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial i_1} &= \frac{1}{\sigma^2}, & \frac{\partial w_1}{\partial i_2} &= 0, & \frac{\partial w_1}{\partial i_3} &= -\frac{1}{\sigma^2}, \\ \frac{\partial w_2}{\partial i_1} &= 0, & \frac{\partial w_2}{\partial i_2} &= \frac{1}{s^2}, & \frac{\partial w_2}{\partial i_3} &= -\frac{1}{s^2}, \\ \frac{\partial w_3}{\partial i_1} &= -\frac{1}{\sigma^2}, & \frac{\partial w_3}{\partial i_2} &= -\frac{1}{s^2}, & \frac{\partial w_3}{\partial i_3} &= \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

De esta manera, la dirección y magnitud de todos los efectos quedan totalmente definidos.

87.7 Condiciones de equilibrio

Ahora se examinarán las tasas de rendimiento, real y nominal, que se requieren para que el agente mantenga los diferentes activos. En este análisis sobre el equilibrio relativo de las tasas de rendimiento en un mercado, se supone que los agentes tienen preferencias idénticas y las mismas dotaciones iniciales de activos.

Los diferenciales de rendimiento requeridos son examinados en el punto $w_1 = 0$, es decir, donde el agente no tiene bonos indexados en su portafolio. En consecuencia, a partir de (87.22) y (87.23), se tiene que

$$i_1 - i_3 = \rho \sigma s w_2, \tag{87.24}$$

o en términos de los rendimientos reales

$$r_1 - r_3 = \rho \sigma s w_2 - \sigma^2. \tag{87.25}$$

Suponga ahora que $w_2 = 1$, es decir, la tenencia de ambos tipos de bonos son cero. Así, de la ecuación (87.25), se tiene que la diferencia entre los rendimientos reales depende de la covarianza entre el rendimiento real de la acción y la tasa de inflación, $\rho s - \sigma$. Si la acción no es una cobertura contra la inflación, es decir, si $\rho s - \sigma < 0$, entonces $r_1 < r_3$. En consecuencia, los bonos indexados sólo serán demandados si ofrecen un premio sobre los bonos nominales.

Por último, si las expectativas son idénticas para los individuos, entonces cada demanda individual de bonos nominales es simplemente constante. Así, si cada individuo es adverso al riesgo, cada demanda individual de bonos nominales es del mismo signo. Dado que la demanda neta tiene que ser cero en el mercado, cada demanda individual debe ser cero. En consecuencia, ningún individuo presta o pide prestado a través de bonos nominales. Note que esto no contradice el hecho de que los bonos nominales deben proporcionar un premio sobre los bonos indexados,

simplemente su precio asegura que ninguno de ellos exista. Sin embargo, el mismo argumento no se aplica para bonos indexados. La cantidad de bonos indexados depende de las actitudes frente al riesgo de los consumidores: a mayor aversión al riesgo los individuos mantendrán cantidades positivas de bonos indexados y a menor aversión al riesgo pedirán prestado, emitiendo bonos indexados para comprar acciones.

87.8 Bibliografía sugerida

- Fischer, S. (1975). "The Demand for Index Bonds". *Journal of Political Economy*, Vol. 83, No. 3, pp. 509-534.
 Venegas-Martínez, F. (2001). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, No. 9, pp. 1429-1449.

87.9 Ejercicios

- 87.1** Con base en la sección 87.5, considere el siguiente sistema de dos ecuaciones en las incógnitas w_1 y w_2 :

$$(i_1 - i_3) - w_1 \sigma^2 - w_2 \sigma s \rho = 0$$

y

$$(i_2 - i_3) - w_2 s^2 - w_1 \sigma s \rho = 0.$$

Muestre que la solución está dada por:

$$w_1 = \frac{i_1 - i_3}{\sigma^2(1 - \rho^2)} - \frac{(i_2 - i_3)\rho}{\sigma s(1 - \rho^2)}$$

y

$$w_2 = \frac{i_2 - i_3}{s^2(1 - \rho^2)} - \frac{(i_1 - i_3)\rho}{\sigma s(1 - \rho^2)}.$$

- 87.2** Resuelva el problema de decisión del consumidor, planteado en la sección 87.5, cuando $u(c_t) = c_t^\gamma / \gamma$, $\gamma < 1$. Discuta los resultados.

- 87.3** Resuelva el problema anterior cuando $u(c_t) = (c_t^{1-\theta} - 1)/(1 - \theta)$, $\theta > 0$, $\theta \neq 1$.

CAPÍTULO 88

RIESGO NO DIVERSIFICABLE DE TIPO DE CAMBIO: DIFUSIÓN Y SALTOS DE POISSON

Conceptos básicos de este capítulo:

- Modelo estocástico de Ramsey
- Riesgo de tipo de cambio
- Mercados incompletos
- Procesos mixtos de difusión con saltos
- Decisiones de portafolio y consumo
- Control óptimo estocástico
- Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman
- Bienestar económico
- Dinero en la función de utilidad

88.1 Introducción

En este capítulo se desarrolla un modelo estocástico de Ramsey¹ con riesgo no diversificable de tipo de cambio. Se supone una economía abierta, pequeña y poblada por individuos idénticos con vida infinita. La economía produce y consume un solo bien de carácter perecedero. En esta economía los individuos requieren de dinero para financiar su consumo, es decir, existe una restricción “cash-in-advance”. Se supone que el público tiene expectativas de depreciación del tipo de cambio conducidas por un proceso mixto de difusión con saltos. Asimismo, se supone que no existen productos derivados para cubrir el riesgo cambiario, es decir, los mercados financieros son incompletos.

El modelo propuesto persigue varios objetivos. Uno de ellos consiste en llevar a cabo experimentos de estática comparativa para cuantificar los efectos de cambios permanentes en los parámetros que determinan las expectativas de depreciación en las decisiones de los agentes y en su bienestar económico. Asimismo, se pretende estudiar la dinámica estocástica de la riqueza y del consumo en el equilibrio. Por último, se extiende el modelo para incluir dinero en la función de utilidad. Tres apéndices contienen detalles técnicos sobre el problema de decisión, bajo incertidumbre, del consumidor.

88.2 Estructura de la economía

Con el propósito de obtener soluciones analíticamente tratables, la estructura de la economía se mantendrá lo más simple posible. El planteamiento del modelo propuesto es obviamente sencillo y puede extenderse en varias direcciones, como por ejemplo la inclusión de: dinero en la función de utilidad, bienes durables, transferencias del gobierno, etc.

¹ Frank Plumpton Ramsey (1903-1930). Excepcional matemático, economista y filósofo británico que muere prematuramente a la edad de 27 años. Ramsey dejó en sus escritos las bases para modelar cómo los agentes toman decisiones de consumo en el tiempo. Sus ideas serían posteriormente desarrolladas y popularizadas por varios célebres economistas. Ramsey también propuso un modelo general para la toma de decisiones bajo incertidumbre y un conjunto de axiomas para la utilidad esperada. En 1928, Ramsey publica su artículo seminal sobre la teoría matemática del ahorro de un consumidor tomador de precios. Mucho tiempo después, Robert Solow (1956) (Premio Nobel de Economía en 1987) y Swan (1956) desarrollan la teoría neoclásica del crecimiento. Una limitación importante de esta teoría es que la tasa de ahorro es exógena. Cass (1965) y Koopmans (1965) retoman el modelo de Ramsey para convertir la tasa de ahorro del modelo de Solow-Swan en una variable endógena, lo que en la literatura se conoce como el modelo de Ramsey.

88.2.1 Precios y activos

Considere una economía abierta y pequeña con un individuo representativo con vida infinita en un mundo con un solo bien de consumo perecedero. Se supone que el bien es comerciable internacionalmente sin barreras arancelarias y que su precio doméstico, P_t , está determinado por la paridad de poder de compra (PPP), a saber, $P_t = P_t^* E_t$, donde P_t^* es el precio en moneda extranjera del bien en el resto del mundo y E_t es el tipo de cambio nominal. En lo que sigue, por simplicidad, se supone que P_t^* es igual a 1. También, se supone que el tipo de cambio inicial, E_0 , es conocido e igual a 1. Por último, es importante recordar que la restricción PPP es una condición de equilibrio de largo plazo.

Se supone que el número de saltos, extremos e inesperados, en el tipo de cambio por unidad de tiempo sigue un proceso de Poisson q_t con intensidad λ , es decir,

$$\mathbb{P}\{\text{un salto unitario durante } dt\} = \mathbb{P}\{dq_t = 1\} = \lambda dt$$

y

$$\mathbb{P}\{\text{ningún salto durante } dt\} = \mathbb{P}\{dq_t = 0\} = 1 - \lambda dt + o(dt).$$

En consecuencia,

$$E[dq_t] = \text{Var}[dq_t] = \lambda dt. \quad (88.1)$$

El número inicial de saltos se supone igual a cero, esto es, $q_0 = 0$. Por último, es importante recordar que $o(dt)$ significa $o(dt)/dt \rightarrow 0$ cuando $dt \rightarrow 0$.

Se supone que el consumidor representativo percibe que la tasa de depreciación esperada del tipo de cambio, dE_t/E_t , y en consecuencia la tasa de inflación esperada, dP_t/P_t , debido a la PPP, sigue un movimiento geométrico Browniano con saltos de Poisson, específicamente,

$$\frac{dE_t}{E_t} = \frac{dP_t}{P_t} = \epsilon dt + \sigma dW_t + \nu dq_t, \quad (88.2)$$

donde el parámetro de tendencia, ϵ , es la tasa de depreciación media esperada condicionada a que no haya saltos, σ es la volatilidad instantánea de la tasa esperada de depreciación, ν es el tamaño medio del salto en la tasa de depreciación y (W_t) es un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con su filtración aumentada, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$. Así, dW_t es una variable aleatoria distribuida normalmente con

$$E[dW_t] = 0 \quad (88.3)$$

y

$$\text{Var}[dW_t] = dt. \quad (88.4)$$

Los procesos estocásticos dW_t y dq_t se suponen no correlacionados, es decir,

$$\text{Cov}(dW_t, dq_t) = 0.$$

Observe que la esperanza y la varianza, por unidad de tiempo, de la depreciación esperada del tipo de cambio están dadas, respectivamente, por

$$E\left[\frac{dE_t}{E_t} \frac{1}{dt}\right] = \epsilon + \nu \lambda$$

y

$$\text{Var}\left[\frac{dE_t}{E_t} \frac{1}{\sqrt{dt}}\right] = \sigma^2 + \nu^2 \lambda.$$

En lo que sigue, será conveniente introducir un nuevo parámetro, el inverso de la volatilidad también llamado precisión, $\kappa = 1/\sigma$. Dado que el interés específico de este modelo es cuantificar los efectos en el consumo y en las decisiones de portafolio de los agentes por cambios en ϵ , κ , λ y ν , se supondrá que todas ellas son constantes positivas.

El consumidor mantiene dos activos reales: saldos monetarios reales, $m_t = M_t/P_t$, donde M_t es dinero nominal y un bono real internacional, k_t . El bono paga una tasa de interés real

constante r (*i.e.*, el bono paga rk_t unidades del bien de consumo por unidad de tiempo). De esta manera, la riqueza real del consumidor, a_t , queda definida por

$$a_t = m_t + k_t, \quad (88.5)$$

donde a_0 es determinada exógenamente. Además, se supone que el resto del mundo no posee moneda doméstica. Considere ahora una restricción “cash-in-advance”, de Clower²,

$$m_t = \alpha c_t, \quad (88.6)$$

donde c_t es el consumo y $\alpha > 0$ es el tiempo que el dinero debe mantenerse para financiar el consumo. La condición (88.6) es crucial para conectar el tipo de cambio con el consumo, ya que $m_t = M_t/P_t = M_t/E_t$.

La tasa estocástica de rendimiento sobre los saldos monetarios reales, dr_m , es simplemente el cambio porcentual del precio del dinero en términos de bienes. Mediante la aplicación del lema de Itô para procesos mixtos de difusión con saltos al inverso del nivel general de precios, con (88.2) como el proceso subyacente (ver Apéndice 88.C, fórmula (88.C.2)), se obtiene

$$dr_m = P_t d\left(\frac{1}{P_t}\right) = (-\epsilon + \sigma^2)dt - \sigma dW_t + \left(\frac{1}{1+\nu} - 1\right) dq_t. \quad (88.7)$$

En lo que resta del modelo, se supone que $\epsilon \geq \sigma^2$.

88.2.2 Problema de decisión del consumidor

La ecuación diferencial estocástica de acumulación de la riqueza real del consumidor, en términos de las participaciones de cada activo en el portafolio, $w_t = m_t/a_t$, $1 - w_t = k_t/a_t$, así como del consumo, c_t , está dada por

$$da_t = a_t w_t dr_m + a_t (1 - w_t) r dt - c_t dt, \quad (88.8)$$

con a_0 determinada exógenamente. Para evitar complicaciones técnicas innecesarias, no se incluye en (88.8) un término que represente el salario real del consumidor. Si se sustituyen (88.6) y (88.7) en (88.8), se obtiene

$$da_t = a_t \left[(r - \rho w_t) dt - w_t \sigma dW_t + \left(\frac{1 + \nu(1 - w_t)}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t \right], \quad (88.9)$$

donde

$$\rho = \alpha^{-1} + r + \epsilon - \sigma^2.$$

La función de utilidad esperada del tipo von Neumann-Morgenstern al tiempo $t = 0$, V_0 , de un consumidor adverso al riesgo se supone de la forma

$$V_0 = E \left[\int_0^\infty \ln(c_t) e^{-rt} dt \mid \mathcal{F}_0 \right]. \quad (88.10)$$

Observe que la tasa subjetiva de descuento del agente es igual a la tasa de interés real internacional, r , la cual se supone constante. Se considera, en particular, la función de utilidad logarítmica a fin de obtener soluciones cerradas que hagan el modelo analíticamente más tratable.

² Robert W. Clower (1926-). En 1967 introduce la condición “cash-in-advance” como una expresión de la restricción de la demanda efectiva en su artículo “A Reconsideration of the Microfoundations of Monetary Theory”.

88.3 Equilibrio del consumidor

En esta sección se establece la condición necesaria de un máximo para el problema de control óptimo estocástico que resuelve un consumidor racional. Si se sustituye $\ln(c_t) = \ln(\alpha^{-1}a_tw_t)$ en el integrando de (88.10) y la expresión resultante se maximiza sujeto a la restricción de acumulación de riqueza dada en (88.9), la condición de primer orden para una solución interior es (véase el Apéndice (88.A))

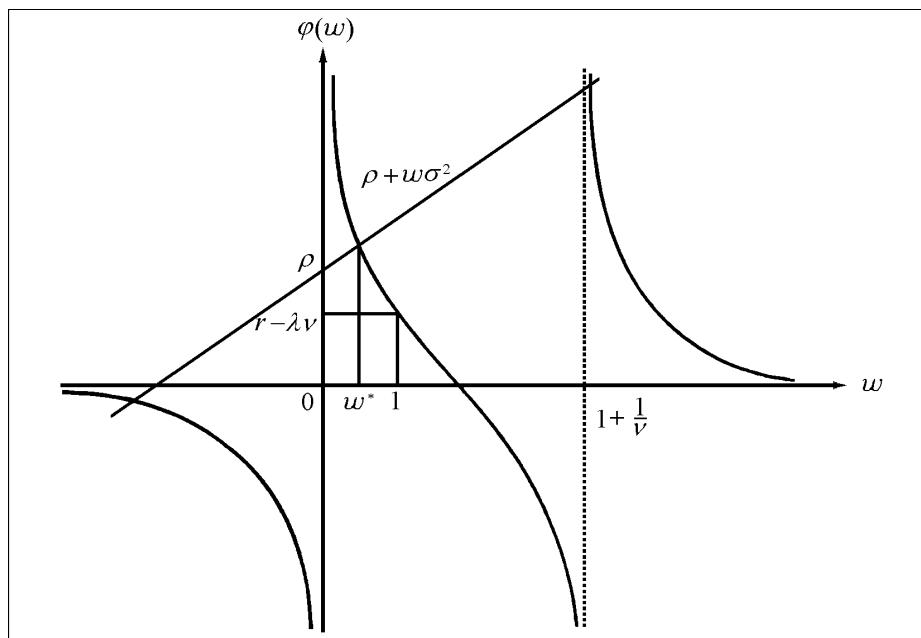
$$\frac{r}{w} - \frac{\lambda\nu}{1 + \nu(1 - w)} = \rho + w\sigma^2. \quad (88.11)$$

En este caso, la utilidad logarítmica conduce a un valor óptimo w^* que depende solamente de los parámetros que determinan las expectativas de depreciación, lo cual implica que w^* es constante. Así pues, la proporción óptima de la riqueza que el agente asigna a la tenencia de saldos reales y, en virtud de la restricción “cash-in-advance”, la proporción óptima de la riqueza que se asigna al consumo, es constante e igual a w^* . De esta manera, la actitud del consumidor hacia el riesgo cambiario es independiente de su riqueza real. En otras palabras, el nivel de riqueza resultante en cualquier momento no es relevante para las decisiones de portafolio ni de consumo.

Observe ahora que la ecuación (88.11) es cúbica con una raíz negativa y dos positivas, y sólo una de ellas satisface $0 < w^* < 1$. Para ver esto gráficamente, defina el lado izquierdo de (88.11) como $\varphi(w)$. La función $\varphi(w)$ tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \varphi(0^+) &= +\infty, \quad \varphi(0^-) = -\infty, \quad \varphi(1) = r - \lambda\nu, \\ \varphi\left(\frac{r}{r + \lambda}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\right) &= 0, \quad \varphi\left(\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^+\right) = \infty, \quad \varphi\left(\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^-\right) = -\infty, \\ \varphi(+\infty) &= 0 \quad \text{y} \quad \varphi(-\infty) = 0. \end{aligned}$$

Con esta información es posible bosquejar la gráfica de $\varphi(w)$ (véase la Gráfica 88.1). A partir de la definición de ρ , es inmediato que $\rho > r - \lambda\nu$, como se muestra en la Gráfica 88.1. La línea recta $\rho + w\sigma^2$, definida en el lado derecho de (88.11), intersecta $\varphi(w)$ tres veces. Justamente la intersección que se encuentra en medio define el estado estacionario de la proporción óptima de la riqueza asignada al consumo $w^* \in (0, 1)$. Una w negativa implica un consumo negativo, lo cual carece de sentido. El caso donde $w > 1$ no es de interés en este capítulo. La Gráfica 88.1 describe la determinación del valor óptimo w^* cuando $r - \lambda\nu > 0$. El lector puede inferir a partir de la Gráfica 88.1 que si $0 > r - \lambda\nu = \varphi(1)$, entonces w^* sigue estando en el intervalo $(0, 1)$.



Gráfica 88.1 Determinación de la w^* óptima.

88.4 Choques exógenos en los parámetros que determinan las expectativas de depreciación

En esta sección, a través de ejercicios de estática comparativa, se examina el impacto sobre la proporción óptima de la riqueza que se asigna al consumo por cambios en los parámetros que determinan las expectativas de depreciación del tipo de cambio.

El primer resultado relevante es que un incremento permanente en la tasa de depreciación, resulta en un incremento en el costo de oportunidad futuro de los bienes de consumo, lo cual, a su vez, conlleva a una caída permanente en la proporción de riqueza asignada al consumo futuro. En otras palabras, un incremento permanente en ϵ conduce a una reducción en w^* , como se muestra en la Gráfica 88.2. Para ver esto, es suficiente observar, en la Gráfica 88.2, que $\epsilon_1 < \epsilon_2$ implica $\rho_1 < \rho_2$, lo cual hace que la línea recta $\rho + w\sigma^2$ se traslade paralelamente hacia arriba, reduciendo con ello el valor del equilibrio de w_1^* a w_2^* . Alternativamente, si se deriva parcialmente (88.11) con respecto de ϵ , se encuentra que

$$\frac{\partial w^*}{\partial \epsilon} = -\Lambda,$$

donde

$$\Lambda = \left[\frac{r}{(w^*)^2} + \frac{\lambda\nu^2}{[1 + \nu(1 - w^*)]^2} + \sigma^2 \right]^{-1} > 0.$$

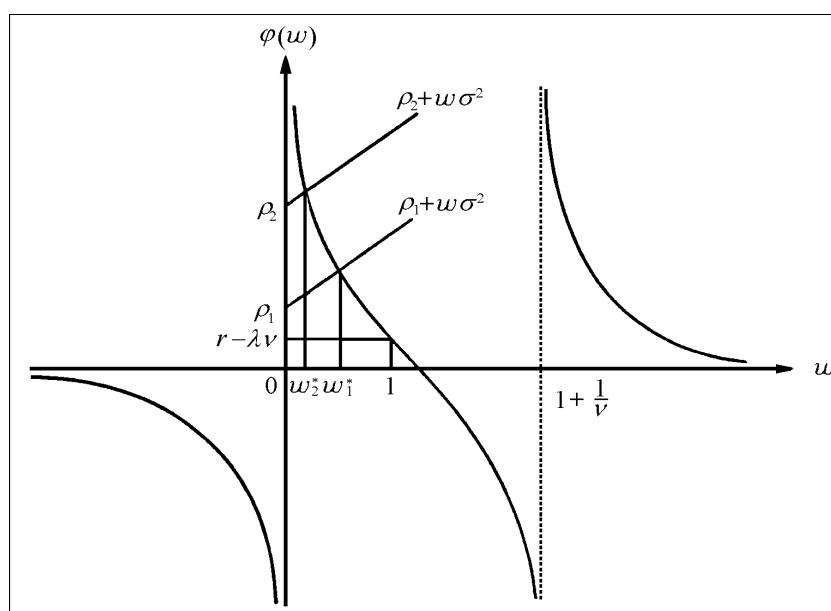
Observe también que un incremento permanente en el inverso de la volatilidad, κ , producirá un efecto similar al de ϵ sobre w^* dado que

$$\frac{\partial w^*}{\partial \sigma^2} = (1 - w^*)\Lambda > 0$$

y

$$\frac{\partial w^*}{\partial \kappa} = -\frac{\partial w^*}{\partial \sigma^2} \frac{2\sigma}{\kappa^2} < 0.$$

En este caso, el aumento en ρ , es debido a una reducción en σ^2 , lo cual traslada la línea recta $\rho + w\sigma^2$ hacia arriba. Al mismo tiempo, la pendiente de la recta $\rho + w\sigma^2$ disminuye por la reducción en σ^2 . El resultado final de estos movimientos es que w^* decrece. En otras palabras, el consumidor asigna una proporción mayor de su riqueza para financiar el consumo cuando hay un incremento en la volatilidad (futura) del precio del bien.



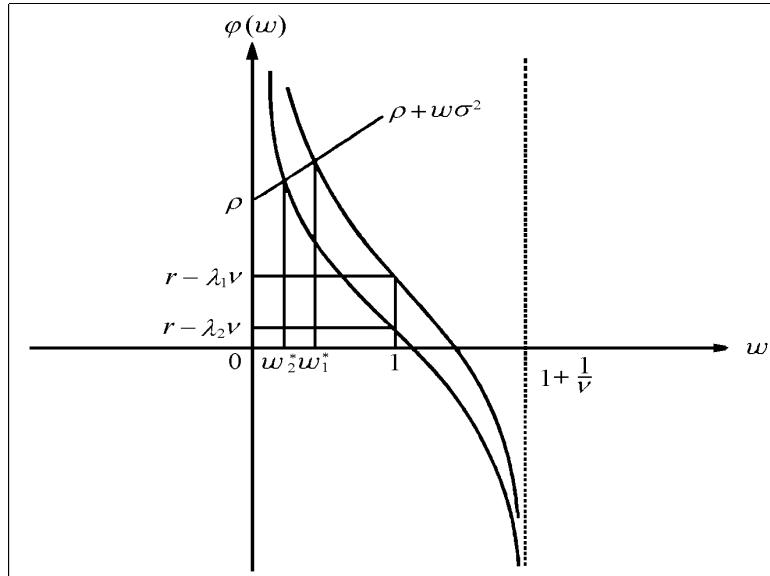
Gráfica 88.2 Respuesta de w^* ante un cambio permanente en ϵ .

Otro resultado relevante es la respuesta de la proporción de la riqueza que se asigna, en equilibrio, a la tenencia de saldos monetarios reales, w^* , a un cambio permanente en el parámetro de intensidad, λ . Un incremento permanente en el número medio esperado de saltos en el tipo de cambio, por unidad de tiempo, causa un incremento en el costo de oportunidad futuro de los bienes de consumo. Esto reduce permanentemente la proporción de la riqueza asignada para consumo futuro. En otras palabras, un incremento en λ , de λ_1 a λ_2 , reducirá w^* , de w_1^* a w_2^* , como se representa en la Gráfica 88.3. Similarmente, un incremento permanente en el tamaño esperado de los saltos del tipo de cambio, ν , reducirá w^* . Alternativamente, si se deriva parcialmente (88.11) con respecto de λ y ν , respectivamente, se obtiene

$$\frac{\partial w^*}{\partial \lambda} = -\frac{\nu \Lambda}{1 + \nu(1 - w^*)} < 0$$

y

$$\frac{\partial w^*}{\partial \nu} = -\frac{\lambda \Lambda}{[1 + \nu(1 - w^*)]^2} < 0.$$



Gráfica 88.3 Respuesta de w^* ante cambios permanentes en λ .

88.5 Choques exógenos en el bienestar económico

A continuación se evalúan los efectos sobre el bienestar económico cuando se presentan cambios en los parámetros que determinan las expectativas de depreciación. Como es usual, el criterio de bienestar, \mathcal{W} , del individuo representativo es el valor máximo que la utilidad puede tomar, $I(a_0, 0)$, partiendo de una riqueza real inicial, a_0 . Así, el bienestar económico está dado por (véase el Apéndice 88.A):

$$\mathcal{W}(\epsilon, \kappa, \lambda, \nu; a_0) = \frac{1}{r}[1 + \ln(a_0 \alpha^{-1} w^*)] - \frac{1}{r^2} \left[\rho w^* + \frac{1}{2}(w^* \sigma)^2 - \lambda \ln\left(\frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu}\right) \right].$$

El Cuadro 88.1 resume los impactos sobre el bienestar de cambios permanentes en la tasa promedio esperada de depreciación, el inverso de la volatilidad, la probabilidad de depreciación y el

tamaño medio esperado de un salto en el tipo de cambio.

Incremento en	Efecto sobre el bienestar
ϵ	$-\frac{w}{r^2} < 0$
κ	$-\frac{1}{r^2}[w(1 - \frac{1}{2}w)]\frac{2\sigma}{\kappa^2} < 0$
λ	$\frac{1}{r^2} \ln \left(\frac{1 + \nu(1 - w)}{1 + \nu} \right) < 0$
ν	$-\frac{1}{r^2} \left[\frac{\lambda w}{(1 + \nu)(1 + \nu(1 - w))} \right] < 0$

Cuadro 88.1 Efectos de cambios de política sobre el bienestar económico.

88.6 Trayectorias de riqueza y consumo

A continuación se obtiene el proceso estocástico que genera la riqueza del consumidor cuando la regla óptima (88.11) es aplicada. Después de sustituir la participación óptima w^* en (88.9), se obtiene

$$da_t = a_t \left[\left(\frac{\lambda \nu w^*}{1 + \nu(1 - w^*)} + (w^* \sigma)^2 \right) dt - w^* \sigma dW_t + \left(\frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t \right]. \quad (88.12)$$

La solución de esta ecuación diferencial estocástica, condicionada a a_0 , es (véase Apéndice 88.C, fórmula (88.C.3))

$$a_t = a_0 e^{\delta_t}, \quad (88.13)$$

donde

$$\delta_t = \eta_t + \gamma_t, \quad \eta_t \sim \mathcal{N}[F(w^*)t, G(w^*)t], \quad \gamma_t = H(w^*)q_t \quad y \quad q_t \sim \mathcal{P}(\lambda t) \quad (88.14)$$

y los componentes estacionarios de los parámetros de las distribuciones anteriores son:

$$F(w^*) = \frac{\lambda \nu w^*}{1 + \nu(1 - w^*)} + \frac{(w^* \sigma)^2}{2}, \quad G(w^*) = (w^* \sigma)^2$$

y

$$H(w^*) = \ln \left(\frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu} \right).$$

Como de costumbre, $q_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ denota una variable aleatoria Poisson con media λt . Observe que

$$E[\delta_t] = [F(w^*) + H(w^*)\lambda]t \quad y \quad \text{Var}[\delta_t] = [G(w^*) + [H(w^*)]^2\lambda]t. \quad (88.15)$$

Aunque $F(w^*)$ es siempre positiva y $H(w^*)$ es siempre negativa para todo $0 < w^* < 1$, la media de δ_t , $E[\delta_t]$, permanece positiva. En efecto, dado que $x - 1 - \log(x) \geq 0$ es válida $x > 0$, se sigue que

$$\frac{\nu w^*}{1 + \nu(1 - w^*)} - \ln \left(\frac{1 + \nu}{1 + \nu(1 - w^*)} \right) \geq 0.$$

En virtud de la ecuación (88.13), el proceso estocástico del consumo puede ser escrito como

$$c_t^* = \alpha^{-1} w^* a_0 e^{\delta_t}. \quad (88.16)$$

En ausencia de mercados de productos derivados que cubran contra el riesgo cambiario, el resultado anterior indica la presencia de un efecto riqueza debido a la incertidumbre en δ_t , pues dicha incertidumbre modifica el conjunto de oportunidades que enfrenta el consumidor. Por otra parte, el riesgo cambiario también afecta las participaciones en portafolio a través de w^* . De esta manera, cambios en los parámetros que determinan las expectativas de depreciación están acompañados tanto por un efecto ingreso como por un efecto sustitución en el consumo.

Por otro lado, es importante destacar que el consumo es una variable aleatoria. Por lo tanto, sólo es posible calcular la probabilidad de que tome valores en algún intervalo. Observe también que debido a la desigualdad de Jensen el consumo promedio satisface:

$$E[c_t^*] \geq \alpha^{-1} w^* a_0 e^{E[\delta_t]}.$$

Además, puede mostrarse que

$$-1 < \frac{\partial E[\delta_t]}{\partial \epsilon} = -\omega^* \Lambda \left[\frac{\lambda \nu^2}{[1 + \nu(1 - \omega^*)]^2} + \sigma^2 \right] < 0.$$

En otras palabras, un incremento en la tasa media esperada de depreciación, ϵ , causa una reducción en la media de δ_t , $E[\delta_t]$. Es también importante notar, en relación con (88.10) y (88.16), que el supuesto de que la tasa subjetiva de descuento es igual a la tasa de interés mundial no asegura un estado estacionario del nivel de consumo. No obstante, se tiene un estado estacionario, w^* , de la proporción de la riqueza que se asigna al consumo.

Vale la pena revisar el caso determinístico, *i.e.*, $\sigma = \lambda = 0$. En este marco, se tiene que el consumo óptimo es independiente de la tasa de depreciación. Bajo el supuesto de una función de utilidad logarítmica, se puede mostrar que

$$c^{**}(\epsilon) = \frac{ra_0}{1 + \alpha(r + \epsilon)}.$$

Al comparar el valor de arriba con (88.16), se tiene que $c^{**}(\epsilon)$ es el estado estacionario de consumo. En contraste con el marco estocástico propuesto, c_t^* muestra un comportamiento dinámico. Es importante destacar que el modelado de la incertidumbre con procesos mixtos de difusión con saltos es la clave para racionalizar dinámicas de consumo más interesantes que no pueden ser obtenidas a partir de modelos deterministas.

88.7 Dinero en la función de utilidad

En esta sección se incluye dinero directamente en la función de utilidad.³ La utilidad esperada al tiempo $t = 0$, V_0 , ahora toma la forma:

$$V_0 = E_0 \int_0^\infty [u(c_t) + v(m_t)] e^{-rt} dt, \quad (88.17)$$

donde $u(c_t) = \theta \ln(c_t)$ y $v(m_t) = \ln(m_t)$. Observe que el consumo y los saldos monetarios reales son independientes en el sentido de Pareto-Edgeworth. En este caso, la acumulación de riqueza estocástica en términos de consumo y las participaciones de los diferentes activos en el portafolio del agente se convierte en

$$da_t = a_t \left[(r - \phi w_t) dt - w_t \sigma dW_t + \left(\frac{1 + \nu(1 - w_t)}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t \right] - c_t dt, \quad (88.18)$$

donde $\phi = r + \epsilon - \sigma^2$. Las condiciones de primer orden para una solución interior del problema de maximización de (88.17) sujeto a (88.18) están dadas por (véase el Apéndice 88.B):

$$u'(c_t) = \frac{1 + \theta}{ra_t} \quad \text{y} \quad \frac{v'(m_t)}{u'(c_t)} = r + \epsilon - (1 - w) \sigma^2 + \lambda \left[1 - \frac{1 - \nu w}{1 + \nu(1 - w)} \right]. \quad (88.19)$$

³ Miguel Sidrauski (1939-1968), en su artículo "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy", escrito en 1967, retoma el modelo de Cass (1965) y Koopmans (1965) para introducir dinero en la función de utilidad, por sus servicios de liquidez, a fin de estudiar el crecimiento de una economía en donde los agentes incluyen no sólo capital, sino también dinero en sus decisiones de portafolio.

Observe que la segunda condición en (88.19) puede ser escrita como

$$\frac{r}{(1+\theta)w} - \frac{\lambda\nu}{1+\nu(1-w)} = \phi + w\sigma^2, \quad (88.20)$$

la cual coincide con el caso de una restricción “cash-in-advance”, dada en (88.11), excepto por el factor $1/(1+\theta)$ que ahora aparece en el primer término del lado izquierdo de (88.20). Por lo tanto, el mismo análisis de las secciones previas puede ser aplicado para la determinación de las proporciones óptimas de la riqueza que se asignan a los activos que conforman el portafolio.

La segunda condición en (88.19) iguala la utilidad marginal del dinero, normalizada por la utilidad marginal del consumo, con el costo marginal de los saldos monetarios reales. Esta condición explícitamente muestra cómo el costo de oportunidad de la tenencia de dinero es afectada por la incertidumbre, *i.e.*, por los pequeños cambios en la tasa de depreciación, los cuales están siempre presentes y por movimientos extremos en el tipo de cambio, los cuales ocurren ocasionalmente.

Si, como antes, se supone que $\epsilon \geq \sigma^2$, entonces el costo de oportunidad por la tenencia de saldos monetarios reales permanece positivo. Más importante aún, la función de utilidad logarítmica implica que el valor óptimo w^* depende sólo de los parámetros que determinan las expectativas de depreciación y las preferencias de los agentes, como se muestra en (88.20), y por lo tanto w^* es constante y estrictamente positiva. En otras palabras, la disposición del consumidor frente al riesgo cambiario es independiente de su riqueza. Por último, observe que el supuesto de que la tasa subjetiva de descuento es igual a la tasa de interés mundial no asegura un nivel de consumo de estado estacionario.

88.8 Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo estocástico de riesgo de tipo de cambio no diversificable. Una característica importante del modelo es que permite cuantificar el impacto sobre la proporción óptima de la riqueza que se asigna a la tenencia de saldos reales y, por lo tanto, al consumo cuando cambian los parámetros que determinan las expectativas de depreciación.

Es importante destacar que los resultados obtenidos a través del modelo propuesto dependen fuertemente del supuesto de utilidad logarítmica, el cual es un caso límite de la familia de funciones de utilidad con aversión relativa constante al riesgo. La función de utilidad logarítmica permite la obtención de soluciones explícitas que permiten examinar de manera sencilla los efectos en las decisiones del consumidor de la incertidumbre en el tipo de cambio.

El modelo es obviamente simple y puede ser extendido en varias direcciones para ganar alguna generalidad: 1) incluir una restricción presupuestal estocástica para el gobierno y transferencias gubernamentales y 2) incluir tanto bienes no comerciables como durables. De esta manera los supuestos serían más realistas con resultados ciertamente más ricos.

Apéndice 88.A Condiciones de primer orden del problema de decisión del consumidor (restricción “cash-in-advance”)

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para un problema de control óptimo estocástico (88.10), con $\ln(c_t) = \ln(\alpha^{-1}a_tw_t)$, sujeto a (88.9) es:

$$\begin{aligned} \max_w H(w_t; a_t, t) &\equiv \max_w \left\{ \ln(\alpha^{-1}a_tw_t)e^{-rt} + I_a(a_t, t)a_t(r - \rho w_t) + I_t(a_t, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}I_{aa}(a_t, t)a_t^2w_t^2\sigma^2 + \lambda \left[I \left(a_t \left(\frac{1 + \nu(1 - w_t)}{1 + \nu} \right), t \right) - I(a_t, t) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (88.A.1)$$

donde

$$I(a_t, t) = \max_w E_t \left[\int_t^\infty \ln(\alpha^{-1}a_tw_t) e^{-rs} ds \mid \mathcal{F}_t \right]$$

es la función de utilidad indirecta del agente (o función de bienestar económico) e $I_a(a_t, t)$ es la variable de co-estado. La condición de primer orden para una solución interior es:

$$H_w = 0. \quad (88.A.2)$$

Dado el factor de descuento exponencial en la utilidad total esperada, en (88.10), se postula como solución de (88.A.1) una función en variables separables:

$$I(a_t, t) = e^{-rt}[\beta_1 \ln(a_t) + \beta_0], \quad (88.A.3)$$

donde β_0 y β_1 son parámetros por determinar a partir de (88.A.1). Si se sustituye (88.A.3) en (88.A.1), y se calculan las condiciones de primer orden en (88.A.2), se tiene que

$$\frac{1}{\beta_1 w} - \frac{\lambda\nu}{1 + \nu(1 - w)} = \rho + w\sigma^2 \quad (88.A.4)$$

y $w_t \equiv w$ es invariante en el tiempo. Los coeficientes β_0 y β_1 son determinados después de sustituir w^* en (88.A.1). De esta manera, $\beta_1 = r^{-1}$ y

$$\beta_0 = \frac{1}{r}[1 + \ln(\alpha^{-1}w^*)] - \frac{1}{r^2}\left[\rho w^* + \frac{1}{2}(w^*\sigma)^2 - \lambda \ln\left(\frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu}\right)\right].$$

Existe también una condición de transversalidad que debe ser satisfecha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(a_t, t) = 0.$$

La ecuación (88.A.4) es cúbica con una raíz negativa y dos positivas, y sólo una de ellas satisface $0 < w^* < 1$, tal y como se representa en la Gráfica 88.1.

Apéndice 88.B Condiciones de primer orden del problema de decisión del consumidor cuando hay dinero en la función de utilidad

La ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman para un problema de maximización de (88.17) sujeto a (88.18) es:

$$\begin{aligned} \max_{c,w} H(c_t, w_t; a_t, t) \equiv \max_{c,w} \Big\{ & [\theta \ln(c_t) + \ln(a_t w_t)]e^{-rt} + I_a(a_t, t)a_t(r - \phi w_t) \\ & - I_a(a_t, t)c_t + I_t(a_t, t) + \frac{1}{2}I_{aa}(a_t, t)a_t^2 w_t^2 \sigma^2 \\ & + \lambda \left[I\left(a_t\left(\frac{1 + \nu(1 - w_t)}{1 + \nu}\right), t\right) - I(a_t, t) \right] \Big\} = 0. \end{aligned} \quad (88.B.1)$$

Las condiciones de primer orden (necesarias) para una solución interior son:

$$H_c = 0 \quad y \quad H_w = 0. \quad (88.B.2)$$

En este caso, se postula como solución de (88.B.1) a $I(a_t, t) = e^{-rt}[\beta_1 \ln(a_t) + \beta_0]$, donde β_0 y β_1 se determinan a partir de (88.B.1). Si se sustituye $I(a_t, t)$ en (88.B.1), y se calculan las condiciones de primer orden expresadas en (88.B.2), se tiene que

$$c_t = \frac{\theta a_t}{\beta_1}, \quad \frac{1}{\beta_1 w} - \frac{\lambda\nu}{1 + \nu(1 - w)} = \phi + w\sigma^2 \quad (88.B.3)$$

y $w_t \equiv w$ es invariante en el tiempo. Los coeficientes β_0 y β_1 se determinan después de sustituir los controles óptimos en (88.B.1). De esta manera, $\beta_1 = (1 + \theta)r^{-1}$ y

$$\beta_0 = \frac{1}{r}\left[1 + \theta \ln\left(\frac{\theta r}{1 + \theta}\right) + \ln(w^*)\right] - \frac{1 + \theta}{r^2}\left[\phi w^* + \frac{1}{2}(w^*\sigma)^2 - \lambda \ln\left(\frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu}\right)\right].$$

La segunda ecuación en (88.B.3) tiene las mismas propiedades que la de (88.A.4). Existe una condición de transversalidad similar a la que aparece en el Apéndice 88.A que debe ser satisfecha.

Apéndice 88.C Lema de Itô para procesos mixtos de difusión y saltos

En este apéndice se establecen, sin demostración, dos resultados útiles en el desarrollo del presente capítulo:

- 1) Lema de Itô para procesos mixtos de difusión y saltos. Dada una ecuación lineal diferencial estocástica homogénea

$$dx_t = x_t(\mu dt + \sigma dW_t + \nu dq_t) \quad (88.C.1)$$

y $g(x_t)$ con segunda derivada continua, entonces la diferencial estocástica de $g(x_t)$ está dada por

$$dg(x_t) = [g_x(x_t)\mu x_t + \frac{1}{2}g_{xx}(x_t)\sigma^2 x_t^2]dt + g_x(x_t)\sigma x_t dW_t + [g(x_t(1+\nu)) - g(x_t)]dq_t. \quad (88.C.2)$$

- 2) La solución de (88.C.1) está dada por

$$x_t = x_0 \exp \left\{ (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \int_0^t dW_u + \ln(1+\nu) \int_0^t dq_u \right\}. \quad (88.C.3)$$

Es también importante tener en mente, cuando se utiliza (88.C.3), que las siguientes propiedades de W_t y q_t se mantienen, para $t \geq 0$,

$$E \left[\int_0^t dW_u \mid \mathcal{F}_0 \right] = 0, \quad E \left[\left(\int_0^t dW_u \right)^2 \mid \mathcal{F}_0 \right] = t \quad \text{y} \quad E \left[\int_0^t dq_u \mid \mathcal{F}_0 \right] = \lambda t.$$

88.9 Bibliografía sugerida

- Cont, R. and P. Tankov (2004). Financial Modelling with Jump Processes. Chapman & Hall/CRC, London.
- González-Aréchiga, B., J. Díaz-Tinoco y F. Venegas-Martínez (2001). “Riesgo cambiario, brecha de madurez y cobertura con futuros: análisis local y de valor en riesgo”. *Economía Mexicana, Nueva Época*, Vol. 10, No. 2, pp. 259-290.
- Venegas-Martínez, F. (2000). “On Consumption, Investment, and Risk”. *Economía Mexicana, Nueva Época*, Vol. 9, No. 2, pp. 227-244.
- Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2000). “Mercados financieros incompletos y su impacto en los programas de estabilización de precios: el caso mexicano”. *Momento Económico*, No. 111, pp. 20-27.
- Venegas-Martínez, F. (2001). “Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis”. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, No. 9, pp. 1429-1449.
- Venegas-Martínez, F. (2004). “Reforma fiscal incierta y sus efectos en consumo, inversión y bienestar”. *Problemas del Desarrollo, Revista Latinoamericana de Economía*, No. 136, pp. 137-150.
- Venegas-Martínez, F. (2005). Administración de riesgo macroeconómico. *Denarius, Revista de Administración y Economía*, No. 8, por aparecer.

88.10 Ejercicios

88.1 Obtenga la ecuación (88.7)

$$dr_m = P_t d\left(\frac{1}{P_t}\right) = (-\epsilon + \sigma^2)dt - \sigma dW_t + \left(\frac{1}{1+\nu} - 1\right) dq_t. \quad (88.7)$$

Solución: Con el propósito de obtener (88.7), se recurre al Apéndice 88.C. Este apéndice establece el lema de Itô para procesos mixtos de difusión con saltos. Dada una ecuación diferencial estocástica lineal homogénea

$$dx_t = x_t(\mu dt + \sigma dW_t + \nu dq_t) \quad (88.C.1)$$

con $g(x_t)$ dos veces continuamente diferenciable, entonces la diferencial estocástica de $g(x_t)$ está dada por

$$dg(x_t) = [g_x(x_t)\mu x_t + \frac{1}{2}g_{xx}(x_t)\sigma^2 x_t^2]dt + g_x(x_t)\sigma x_t dW_t + [g(x_t(1+\nu)) - g(x_t)]dq_t. \quad (88.C.2)$$

Denote $x(t) = P_t$, $g(x_t) = g(P_t) = 1/P_t$, y $\mu = \epsilon$. En este caso, se tiene que la ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dP_t}{P_t} = \epsilon dt + \sigma dW_t + \nu dq_t \quad (88.D.2)$$

es equivalente a (88.C.1). A partir de (88.C.2), se sigue que

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{P_t}\right) &= dg(x_t) \\ &= [g_x(x_t)\mu x_t + \frac{1}{2}g_{xx}(x_t)\sigma^2 x_t^2]dt + g_x(x_t)\sigma x_t dW_t + [g(x_t(1+\nu)) - g(x_t)]dq_t \\ &= \left[-\left(\frac{1}{P_t^2}\right)\epsilon P_t + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{P_t^3}\right)\sigma^2 P_t^2\right]dt - \left(\frac{1}{P_t^2}\right)\sigma P_t dW_t + \left[\frac{1}{P_t(1+\nu)} - \frac{1}{P_t}\right]dq_t \\ &= \frac{1}{P_t}(-\epsilon + \sigma^2)dt - \frac{1}{P_t}\sigma dW_t + \frac{1}{P_t}\left(\frac{1}{1+\nu} - 1\right)dq_t, \end{aligned}$$

lo cual implica (88.7).

88.2 Obtenga la ecuación (88.9)

$$da_t = a_t \left[(r - \rho w_t)dt - w_t \sigma dW_t + \left(\frac{1 + \nu(1 - w_t)}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t \right], \quad (88.9)$$

donde $\rho = \alpha^{-1} + r + \epsilon - \sigma^2$.

Solución: La acumulación estocástica de la riqueza real del consumidor tanto en términos de las participaciones en el portafolio, $w_t = m_t/a_t$, $1 - w_t = k_t/a_t$, como de consumo, c_t , está dada por

$$da_t = a_t w_t dr_m + a_t (1 - w_t) r dt - c_t dt. \quad (88.8)$$

Si se sustituyen (88.6) y (88.7) en la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} da_t &= a_t w_t d \left[(-\epsilon + \sigma^2)dt - \sigma dW_t + \left(\frac{1}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t \right] + a_t (1 - w_t) r dt - \alpha^{-1} w_t a_t dt \\ &= a_t d \left[(-\epsilon + \sigma^2) w_t dt - w_t \sigma dW_t + w_t \left(\frac{1}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t \right] + a_t r dt - a_t w_t r dt - \frac{w_t a_t}{\alpha} dt \\ &= a_t d \left[-(\epsilon - \sigma^2) w_t dt - w_t \sigma dW_t + w_t \left(\frac{1}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t \right] + a_t r dt - a_t (r + \alpha^{-1}) w_t dt \\ &= a_t \left[[r - (\epsilon - \sigma^2 + r + \alpha^{-1}) w_t] dt - w_t \sigma dW_t + \left(\frac{1 + \nu(1 - w_t)}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t \right] \\ &= a_t \left[[r - \rho w_t] dt - w_t \sigma dW_t + \left(\frac{1 + \nu(1 - w_t)}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t \right] \end{aligned}$$

donde $\rho = \alpha^{-1} + r + \epsilon - \sigma^2$.

88.3 Obtenga la ecuación (88.11)

$$\frac{r}{w} - \frac{\lambda \nu}{1 + \nu(1 - w)} = \rho + w \sigma^2. \quad (88.11)$$

Solución: Utilice el Apéndice 88.A que establece la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para el problema de control óptimo de maximizar (88.10) sujeto a (88.9):

$$\begin{aligned} \max_w H(w_t; a_t, t) &\equiv \max_w \left\{ \ln(\alpha^{-1} a_t w_t) e^{-rt} + I_a(a_t, t) a_t (r - \rho w_t) + I_t(a_t, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} I_{aa}(a_t, t) a_t^2 w_t^2 \sigma^2 + \lambda \left[I \left(a_t \left(\frac{1 + \nu(1 - w_t)}{1 + \nu} \right), t \right) - I(a_t, t) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (88.A.1)$$

donde

$$I(a_t, t) = \max_w E \left[\int_t^\infty \ln(\alpha^{-1} a_t w_t) e^{-rs} ds \mid \mathcal{F}_t \right]$$

es la función de utilidad indirecta e $I_a(a_t, t)$ es la variable de co-estado. La condición de primer orden para una solución interior es:

$$H_w = 0. \quad (88.A.2)$$

Si se postula una solución de (88.A.1) en variables separables de la forma

$$I(a_t, t) = e^{-rt} [\beta_1 \ln(a_t) + \beta_0], \quad (88.A.3)$$

donde β_0 y β_1 son constantes por determinar a partir (88.A.1). Observe que después de sustituir (88.A.3) en (88.A.1), se sigue que

$$\begin{aligned} \max_w H(w_t; a_t, t) &\equiv \max_w \left\{ \ln(\alpha^{-1} a_t w_t) e^{-rt} + \left(\frac{\beta_1}{a_t} \right) a_t (r - \rho w_t) e^{-rt} \right. \\ &\quad - r[\beta_1 \ln(a_t) + \beta_0] e^{-rt} - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_1}{a_t^2} \right) a_t^2 w_t^2 \sigma^2 e^{-rt} \\ &\quad \left. + \lambda \beta_1 \ln \left(\frac{1 + \nu(1 - w_t)}{1 + \nu} \right) e^{-rt} \right\} = 0, \end{aligned}$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} \max_w H(w_t; a_t, t) &\equiv \max_w \left\{ e^{-rt} \left[\ln(\alpha^{-1} a_t w_t) + \beta_1(r - \rho w_t) - r[\beta_1 \ln(a_t) + \beta_0] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \beta_1 w_t^2 \sigma^2 + \lambda \beta_1 \ln \left(\frac{1 + \nu(1 - w_t)}{1 + \nu} \right) \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned} \max_w H(w_t; a_t, t) &\equiv \max_w \left\{ \ln(\alpha^{-1} a_t w_t) + \beta_1(r - \rho w_t) - r[\beta_1 \ln(a_t) + \beta_0] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \beta_1 w_t^2 \sigma^2 + \lambda \beta_1 \ln \left(\frac{1 + \nu(1 - w_t)}{1 + \nu} \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Si ahora se calcula la condición de primer orden expresada en (88.A.2), se tiene que

$$\frac{1}{\beta_1 w} - \frac{\lambda \nu}{1 + \nu(1 - w)} = \rho + w \sigma^2 \quad (88.A.4)$$

y $w_t \equiv w$ es invariante en el tiempo. Los coeficientes β_0 y β_1 se determinan cuando se sustituye w^* en la condición (88.A.1). En este caso, se encuentra que

$$\begin{aligned} &\ln(\alpha^{-1} a_t w^*) + \beta_1(r - \rho w^*) - r[\beta_1 \ln(a_t) + \beta_0] - \frac{1}{2} \beta_1 (w^*)^2 \sigma^2 \\ &+ \lambda \beta_1 \ln \left(\frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu} \right) = 0 \end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned} &(1 - r\beta_1) \ln(a_t) - r\beta_0 + r\beta_1 + \ln \left(\frac{w^*}{\alpha} \right) - \beta_1 \left[\rho w^* + \frac{1}{2} (w^*)^2 \sigma^2 \right. \\ &\quad \left. - \lambda \ln \left(\frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

lo cual conduce a

$$\beta_1 = r^{-1}$$

y

$$\beta_0 = \frac{1}{r} [1 + \ln(\alpha^{-1} w^*)] - \frac{1}{r^2} \left[\rho w^* + \frac{1}{2} (w^* \sigma)^2 - \lambda \ln \left(\frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu} \right) \right].$$

88.4 Calcule las derivadas parciales de los ejercicios de estática comparativa de la sección 88.4, a saber

$$\begin{cases} \frac{\partial w^*}{\partial \epsilon} = - \left[\frac{r}{(w^*)^2} + \frac{\lambda \nu^2}{[1 + \nu(1 - w^*)]^2} + \sigma^2 \right]^{-1} < 0, \\ \frac{\partial w^*}{\partial \sigma^2} = (1 - w^*) \left[\frac{r}{(w^*)^2} + \frac{\lambda \nu^2}{[1 + \nu(1 - w^*)]^2} + \sigma^2 \right]^{-1} > 0, \\ \frac{\partial w^*}{\partial \lambda} = - \frac{\nu}{1 + \nu(1 - w^*)} \left[\frac{r}{(w^*)^2} + \frac{\lambda \nu^2}{[1 + \nu(1 - w^*)]^2} + \sigma^2 \right]^{-1} < 0, \\ \frac{\partial w^*}{\partial \nu} = - \frac{\lambda}{[1 + \nu(1 - w^*)]^2} \left[\frac{r}{(w^*)^2} + \frac{\lambda \nu^2}{[1 + \nu(1 - w^*)]^2} + \sigma^2 \right]^{-1} < 0. \end{cases}$$

Solución: A partir de la condición (88.11), se sigue que

$$\frac{r}{w^*} - \frac{\lambda \nu}{1 + \nu(1 - w^*)} - \alpha^{-1} - r - \epsilon + \sigma^2 - w^* \sigma^2 = 0.$$

La diferencial total de la expresión anterior conduce a

$$\begin{aligned} & - \frac{r}{(w^*)^2} dw^* - \frac{\nu}{1 + \nu(1 - w^*)} d\lambda - \frac{\lambda}{[1 + \nu(1 - w^*)]^2} d\nu \\ & - \frac{\lambda \nu^2}{[1 + \nu(1 - w^*)]^2} dw^* - d\epsilon + d\sigma^2 - \sigma^2 dw^* - w^* d\sigma^2 = 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{r}{(w^*)^2} + \frac{\lambda \nu^2}{[1 + \nu(1 - w^*)]^2} + \sigma^2 \right]^{-1} dw^* - d\epsilon \\ & - \frac{\nu}{1 + \nu(1 - w^*)} d\lambda - \frac{\lambda}{[1 + \nu(1 - w^*)]^2} d\nu + (1 - w^*) d\sigma^2 = 0, \end{aligned}$$

con lo cual se obtienen las derivadas parciales en cuestión.

88.5 Calcule las derivadas parciales que se utilizaron para cuantificar el impacto en el bienestar económico por cambios en los parámetros que determinan las expectativas de depreciación del Cuadro 88.1, a saber,

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \epsilon} = - \frac{w}{r^2} < 0, \\ \frac{\partial W}{\partial \kappa} = - \frac{1}{r^2} [w(1 - \frac{1}{2}w)] \frac{2\sigma}{\kappa^2} < 0, \\ \frac{\partial w^*}{\partial \lambda} = \frac{1}{r^2} \ln \left(\frac{1 + \nu(1 - w)}{1 + \nu} \right) < 0, \\ \frac{\partial w^*}{\partial \nu} = - \frac{1}{r^2} \left[\frac{\lambda w}{(1 + \nu)(1 + \nu(1 - w))} \right] < 0. \end{cases}$$

Solución: A partir del Apéndice 88.A, se tiene que

$$I(a_t, t) = e^{-rt} [\beta_1 \ln(a_t) + \beta_0]. \quad (88.A.3)$$

También, se sabe que

$$\beta_1 = r^{-1}$$

y

$$\beta_0 = \frac{1}{r}[1 + \ln(\alpha^{-1}w^*)] - \frac{1}{r^2} \left[\rho w^* + \frac{1}{2}(w^*\sigma)^2 - \lambda \ln\left(\frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu}\right) \right].$$

Por lo tanto,

$$I(a_t, t) = e^{-rt} \left\{ \frac{1}{r} \ln(a_t) + \frac{1}{r}[1 + \ln(\alpha^{-1}w^*)] - \frac{1}{r^2} \left[\rho w^* + \frac{1}{2}(w^*\sigma)^2 - \lambda \ln\left(\frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu}\right) \right] \right\}.$$

El criterio de bienestar económico, \mathcal{W} , del agente representativo es la utilidad maximizada comenzando con la riqueza inicial a_0 . En consecuencia,

$$W(\epsilon, \kappa, \lambda, \nu; a_0) \equiv I(a_0, 0) = \frac{1}{r}[1 + \ln(a_0) + \ln(\alpha^{-1}w^*)] - \frac{1}{r^2} \left[\rho w^* + \frac{1}{2}(w^*\sigma)^2 - \lambda \ln\left(\frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu}\right) \right].$$

Al derivar parcialmente esta ecuación con respecto de los parámetros que determinan la depreciación del tipo de cambio se obtienen los resultados del Cuadro 88.1.

88.6 Obtenga la ecuación (88.13)

$$a_t = a_0 e^{\delta_t}, \quad (88.13)$$

donde

$$\delta_t = \eta_t + \gamma_t, \quad \eta_t \sim \mathcal{N}[F(w^*)t, G(w^*)t], \quad \gamma_t = H(w^*)q_t, \quad y \quad q_t \sim \mathcal{P}(\lambda t), \quad (88.14)$$

$$F(w^*) = \frac{\lambda\nu w^*}{1 + \nu(1 - w^*)} + \frac{(w^*\sigma)^2}{2}, \quad G(w^*) = (w^*\sigma)^2$$

y

$$H(w^*) = \ln\left(\frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu}\right).$$

Solución: Sustituya w^* en la ecuación estocástica de acumulación de la riqueza (88.9). De esta manera,

$$da_t = a_t \left[\left(\frac{\lambda\nu w^*}{1 + \nu(1 - w^*)} + (w^*\sigma)^2 \right) dt - w^* \sigma dW_t + \left(\frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu} - 1 \right) dq_t \right]. \quad (88.12)$$

La solución de la ecuación diferencial estocástica anterior, condicional en a_0 , se obtiene del Apéndice 88.C, fórmula (88.C.3), la cual está dada por

$$x_t = x_0 \exp \left\{ (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \int_0^t dW_u + \ln(1 + \nu) \int_0^t dq_u \right\}, \quad (88.C.3)$$

donde

$$dx_t = x_t (\mu dt + \sigma dW_t + \nu dq_t). \quad (88.C.1)$$

Ahora bien, si se denota (con algún abuso de notación)

$$\begin{cases} \mu = \frac{\lambda\nu w^*}{1 + \nu(1 - w^*)} + (w^*\sigma)^2, \\ \sigma \mapsto -w^*\sigma, \\ \nu \mapsto \frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu} - 1, \end{cases}$$

se tiene que (88.13) y (88.14) se siguen de (88.C.3).

88.7 Obtenga la ecuación (88.22)

$$u'(c_t) = \frac{1+\theta}{rat}, \quad y \quad \frac{v'(m_t)}{u'(c_t)} = r + \epsilon - (1-w)\sigma^2 + \lambda \left[1 - \frac{1-\nu w}{1+\nu(1-w)} \right]. \quad (88.22)$$

Solución: Utilice el Apéndice 88.B. En este caso, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para el problema de control óptimo de maximizar (88.20) sujeto a (88.21) está dada por

$$\begin{aligned} \max_{c,w} H(c_t, w_t; a_t, t) \equiv & \max_{c,w} \left\{ [u(c_t) + v(m_t)]e^{-rt} + I_a(a_t, t)a_t(r - \phi w_t) \right. \\ & - I_a(a_t, t)c_t + I_t(a_t, t) + \frac{1}{2}I_{aa}(a_t, t)a_t^2 w_t^2 \sigma^2 \\ & \left. + \lambda \left[I \left(a_t \left(\frac{1+\nu(1-w_t)}{1+\nu} \right), t \right) - I(a_t, t) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (88.B.1)$$

donde $u(c_t) = \theta \ln(c_t)$ y $v(m_t) = \ln(m_t)$. Se postula una solución de (88.B.1) de la forma $I(a_t, t) = e^{-rt}[\beta_1 \ln(a_t) + \beta_0]$, donde β_0 y β_1 son constantes por determinar a partir de (88.B.1). Si se sustituye $I(a_t, t)$ en (88.B.1), se tiene que

$$\begin{aligned} \max_{c,w} H(c_t, w_t; a_t, t) \equiv & \max_{c,w} \left\{ [u(c_t) + v(m_t)]e^{-rt} + \left(\frac{\beta_1}{a_t} \right) a_t(r - \phi w_t)e^{-rt} \right. \\ & - \left(\frac{\beta_1}{a_t} \right) c_t e^{-rt} - r[\beta_1 \ln(a_t) + \beta_0]e^{-rt} - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_1}{a_t^2} \right) a_t^2 w_t^2 \sigma^2 e^{-rt} \\ & \left. + \lambda \beta_1 \ln \left(\frac{1+\nu(1-w^*)}{1+\nu} \right) e^{-rt} \right\} = 0, \end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} \max_{c,w} H(c_t, w_t; a_t, t) \equiv & \max_{c,w} \left\{ u(c_t) + v(m_t) + \beta_1(r - \phi w_t) \right. \\ & - \beta_1 \left(\frac{c_t}{a_t} \right) - r[\beta_1 \ln(a_t) + \beta_0] - \frac{1}{2}\beta_1 w_t^2 \sigma^2 \\ & \left. + \beta_1 \lambda \ln \left(\frac{1+\nu(1-w^*)}{1+\nu} \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Si se calculan las condiciones de primer orden, se tiene que

$$u'(c_t) = \frac{\beta_1}{a_t}, \quad y \quad \frac{v'(m_t)}{u'(c_t)} = r + \epsilon - (1-w)\sigma^2 - \lambda \left[\frac{1-\nu w}{1+\nu(1-w)} - 1 \right]$$

ó

$$c_t = \frac{\theta a_t}{\beta_1}, \quad y \quad \frac{1}{\beta_1 w} - \frac{\lambda \nu}{1+\nu(1-w)} = \phi + w \sigma^2,$$

donde $\phi = r + \epsilon - \sigma^2$. Los coeficientes β_0 y β_1 se obtienen al sustituir los controles óptimos en (88.B.1). En este caso,

$$\begin{aligned} & \theta \ln(c_t) + \ln(w^* a_t) + \beta_1(r - \phi w^*) - \beta_1 \left(\frac{c_t}{a_t} \right) - r[\beta_1 \ln(a_t) + \beta_0] \\ & - \frac{1}{2}\beta_1(w^*)^2 \sigma^2 + \beta_1 \lambda \ln \left(\frac{1+\nu(1-w^*)}{1+\nu} \right) = 0, \end{aligned}$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} & \theta \ln \left(\frac{\theta a_t}{\beta_1} \right) + \ln(w a_t) + \beta_1 r - \beta_1 \phi w^* - \beta_1 \left(\frac{\theta}{\beta_1} \right) - r \beta_1 \ln(a_t) - r \beta_0 \\ & - \frac{1}{2}\beta_1(w^*)^2 \sigma^2 + \beta_1 \lambda \ln \left(\frac{1+\nu(1-w^*)}{1+\nu} \right) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(1 + \theta - r\beta_1) \ln(a_t) + \theta \ln\left(\frac{r\theta}{1 + \theta}\right) + \ln(w^*) + 1 - r\beta_0 \\ - \beta_1 \left[\phi w^* + \frac{1}{2} \beta_1 (w^*)^2 \sigma^2 - \lambda \ln\left(\frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu}\right) \right] = 0.$$

En consecuencia,

$$\beta_1 = (1 + \theta)r^{-1}$$

y

$$\beta_0 = \frac{1}{r} \left[1 + \theta \ln\left(\frac{\theta r}{1 + \theta}\right) + \ln(w^*) \right] \\ - \frac{1 + \theta}{r^2} \left[\phi w^* + \frac{1}{2} (w^*)^2 \sigma^2 - \lambda \ln\left(\frac{1 + \nu(1 - w^*)}{1 + \nu}\right) \right].$$

De esta manera,

$$c_t = \frac{\theta r a_t}{(1 + \theta)}, \quad \text{y} \quad \frac{r}{(1 + \theta)w} - \frac{\lambda \nu}{1 + \nu(1 - w)} = \phi + w\sigma^2.$$

CAPÍTULO 89

RIESGO NO DIVERSIFICABLE DE TIPO DE CAMBIO Y POLÍTICA FISCAL INCIERTA

Conceptos básicos de este capítulo:

- Riesgo no diversificable de tipo de cambio
- Política fiscal incierta
- Control óptimo estocástico
- Condición de Hamilton-Jacobi-Bellman
- Decisiones de consumo e inversión bajo incertidumbre

89.1 Introducción

En este capítulo se presenta un modelo que reconoce explícitamente la incertidumbre tanto en la dinámica del tipo de cambio como en el comportamiento esperado de la política fiscal. Se supone que el tipo de cambio es conducido por una mezcla de procesos estocásticos, específicamente se combina un movimiento Browniano con un proceso de saltos de Poisson. Asimismo, se supone que la tasa impositiva sobre la riqueza sigue un movimiento geométrico Browniano. Bajo este esquema, se supone que no existe un mercado de productos derivados para cubrirse contra depreciaciones futuras en el tipo de cambio. De esta manera, los mercados financieros son incompletos. También se examinan, en el equilibrio, las decisiones de consumo y portafolio de un consumidor representativo. Por último, se evalúan los efectos de choques exógenos, tanto de las expectativas de depreciación como de la política fiscal, sobre el bienestar económico.

Se supone que los agentes tienen expectativas de depreciación conducidas por un proceso combinado de difusión con saltos. En este contexto, los pequeños movimientos del tipo de cambio, que están siempre presentes, se modelan a través de un movimiento Browniano y una depreciación extrema y repentina (un salto en el tipo de cambio), que ocasionalmente ocurre, se modela mediante un proceso de Poisson. La mezcla de un movimiento Browniano con un proceso de saltos proporciona una distribución con colas pesadas y sesgo para el tipo de cambio, lo que permite producir dinámicas más realistas en el tipo de cambio que no pueden ser generadas utilizando únicamente el movimiento Browniano. Este hecho no sólo es una sofisticación teórica, sino un aspecto relevante que incorpora mayor realismo en el modelado del comportamiento del tipo de cambio. En un ambiente estocástico, aún más rico, se supone una tasa impositiva incierta sobre la riqueza. En particular, la tasa impositiva de la riqueza sigue un movimiento geométrico Browniano.

En el modelo, que se desarrolla en el presente capítulo, la recaudación no se regresa a los contribuyentes en forma alguna, sino que es gastada en compras improductivas del gobierno. Bajo el supuesto de agentes adversos al riesgo, se examina la dinámica de equilibrio del consumo y la riqueza cuando la política fiscal es incierta. En este contexto, también se discuten varios temas específicos de política económica. Por ejemplo, se estudian los impactos sobre el consumo y el bienestar económico debidos a cambios permanentes en los parámetros que determinan las expectativas, a saber: la tasa media esperada de depreciación, la volatilidad instantánea del tipo de cambio, la probabilidad de una posible depreciación, el tamaño medio esperado de un posible salto en el tipo de cambio, el impuesto medio esperado *ad valorem* al consumo y el impuesto medio esperado sobre la riqueza.

En resumen, los supuestos relevantes del modelo son: 1) los mercados de productos derivados financieros son inexistentes, 2) la recaudación de impuestos no es retribuida a los agentes y 3) las variables de política económica son estocásticas. Asimismo, el modelo tiene varias características distintivas que le permiten examinar los efectos en el consumo de la incertidumbre cambiaria y fiscal: 1) considera todos los factores de riesgo en la dinámica del tipo de cambio, proporcionando

así un ambiente estocástico más realista; 2) obtiene soluciones analíticas, haciendo más fácil la comprensión de los efectos del riesgo cambiario; y 3) examina los efectos sobre las decisiones de consumo y portafolio de un impuesto incierto sobre la riqueza.

Este capítulo se ha organizado de la siguiente manera. En la próxima sección se desarrolla el marco teórico de un modelo estocástico del tipo de Ramsey para una economía pequeña y abierta que consume un solo bien y tiene una restricción “cash-in-advance”. En esta economía, los agentes tienen expectativas de depreciación conducidas por un proceso combinado de difusión con saltos y pagan impuestos sobre la riqueza de acuerdo con un movimiento geométrico Browniano. En la sección 3 se resuelve el problema de decisión del consumidor. En la sección 4 se llevan a cabo experimentos de estática comparativa. En la sección 5 se examinan los efectos de la incertidumbre en el bienestar económico. En la sección 6 se estudia el comportamiento dinámico de la riqueza y del consumo. En la sección 7 se presentan las conclusiones y limitaciones del modelo. Dos apéndices contienen los detalles técnicos del problema del consumidor.

89.2 Marco teórico del modelo

Con el propósito de obtener soluciones analíticas en un modelo estocástico del tipo de Ramsey, se mantendrá la estructura de la economía tan simple como sea posible. Se considera una economía pequeña y abierta con agentes idénticos de vida infinita. La economía produce y consume un solo bien perecedero.

89.2.1 Dinámica del nivel de precios

Se supone que el bien es comercializable internacionalmente y el nivel general de precios domésticos, P_t , es determinado por la condición de poder de paridad de compra, a saber, $P_t = P_t^* e_t$, donde P_t^* es el precio en moneda extranjera del bien en el resto del mundo y e_t es el tipo de cambio nominal. Se supone, por simplicidad, que P_t^* es igual a 1. También, se supone que el valor inicial del tipo de cambio, e_0 , es conocido e igual a 1.

Asimismo, se supone que el número de saltos, movimientos extremos y repentinos, en el tipo de cambio, por unidad de tiempo, siguen un proceso de Poisson N_t con intensidad λ , de tal manera que

$$\mathbb{P}^{(N)} \{ \text{un salto unitario durante } dt \} = \mathbb{P}^{(N)} \{ dN_t = 1 \} = \lambda dt + o(dt), \quad (89.1)$$

mientras que

$$\mathbb{P}^{(N)} \{ \text{ningún salto en } dt \} = \mathbb{P}^{(N)} \{ dN_t = 0 \} = 1 - \lambda dt + o(dt), \quad (89.2)$$

donde $o(dt)/dt \rightarrow 0$ cuando $dt \rightarrow 0$. Así,

$$\mathbb{E}^{(N)} [dN_t] = \text{Var}^{(N)} [dN_t] = \lambda dt.$$

El número inicial de saltos se supone igual a cero, es decir, $N_0 = 0$.

Considera ahora un movimiento Browniano $(Z_t)_{t \geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad fijo con su filtración aumentada $(\Omega^{(Z)}, \mathcal{F}^{(Z)}, (\mathcal{F}_t^{(Z)})_{t \geq 0}, \mathbb{P}^{(Z)})$. Se supone que el consumidor percibe que la tasa de inflación esperada, dP_t/P_t , y por lo tanto la tasa esperada de depreciación, de_t/e_t , sigue un movimiento geométrico Browniano con saltos de Poisson descrito por

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{de_t}{e_t} = \pi dt + \sigma_P dZ_t + \eta dN_t, \quad (89.3)$$

donde π es la tasa media esperada de depreciación (o inflación) condicionada a que no se presenten saltos, σ_P es la volatilidad instantánea del nivel general de precios, y η es el tamaño medio esperado de un salto en el tipo de cambio. El proceso Z_t se supone independiente de N_t . En lo que se sigue, π , σ_P , λ y η son constantes positivas.

89.2.2 Saldos monetarios reales

El agente mantiene saldos monetarios reales, $m_t = M_t/P_t$, donde M_t es el acervo nominal de dinero. La tasa de retorno estocástica por la tenencia de saldos reales, dR_m , está dada por el cambio porcentual en el precio del dinero en términos de bienes. Al aplicar el lema de Itô para procesos de difusión con saltos al inverso del nivel de precios, con (89.3) como el proceso subyacente (véase el Apéndice 89.A, fórmula (89.A.2)), se obtiene

$$dR_m = d\left(\frac{M_t}{P_t}\right) \Big/ \left(\frac{M_t}{P_t}\right) = (-\pi + \sigma_P^2)dt - \sigma_P dZ_t - \left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)dN_t. \quad (89.4)$$

89.2.3 Bonos internacionales

El agente también tiene acceso a un bono internacional, b_t , que paga una tasa de interés real libre de riesgo, r , que es constante para todos los plazos. En este caso, se satisface

$$db_t = rb_t dt, \quad (89.5)$$

donde b_0 es dado. Así, el bono paga r unidades del bien de consumo por unidad de tiempo. Los agentes toman r como dada. La ecuación (89.5) se puede interpretar como una cuenta bancaria, en la que se realiza un depósito inicial con valor b_0 al tiempo cero y paga una tasa instantánea libre de riesgo, r , en cada instante t .

89.2.4 Impuestos sobre la riqueza

Se considera ahora un movimiento Browniano $(U_t)_{t \geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad fijo con su filtración aumentada $(\Omega^{(U)}, \mathcal{F}^{(U)}, (\mathcal{F}_t^{(U)})_{t \geq 0}, \mathbb{P}^{(U)})$. Se supone que el consumidor representativo percibe que su riqueza será gravada a una tasa incierta, τ_t , de acuerdo con la ecuación diferencial estocástica siguiente:

$$\frac{d\tau_t}{\tau_t} = \bar{\tau} dt + \sigma_\tau d\tilde{Z}_t, \quad \tau_0 > 0, \quad (89.6)$$

con

$$\tilde{Z}_t = \rho Z_t + \sqrt{1-\rho^2} U_t \quad (89.7)$$

y

$$\text{Cov}(dZ_t, d(\rho Z_t + \sqrt{1-\rho^2} U_t)) = \rho dt, \quad (89.8)$$

donde $\bar{\tau}$ es la tasa media esperada de crecimiento del impuesto sobre la riqueza, σ_τ es la volatilidad de la tasa impositiva en la riqueza y $\rho \in [-1, 1]$ es la correlación entre los cambios en la inflación y los cambios en los impuestos sobre la riqueza. Observe que un incremento en el tipo de cambio deprecia los saldos monetarios reales. Esto, a su vez, reduce el valor real de los activos, situación que puede llevar a la autoridad fiscal a modificar su política fiscal. Los procesos N_t , Z_t , y U_t se suponen independientes por pares.

89.2.5 Restricción del tipo “cash-in-advance”

Considere una restricción del tipo “cash-in-advance” de la forma Clower-Lucas-Feenstra:

$$m_t = \alpha c_t, \quad (89.9)$$

donde c_t es el consumo y $\alpha > 0$ es el tiempo que se mantiene el dinero para financiar el consumo. La condición (89.9) es crítica para ligar la política cambiaria con el consumo y las decisiones de portafolio. De esta forma, la depreciación en el tipo de cambio actúa como un impuesto estocástico en los saldos monetarios reales.

89.3 Problema de decisión del consumidor

En esta sección se caracterizan las decisiones óptimas de consumo y portafolio de un agente representativo. En lo subsecuente se empleará la función de utilidad logarítmica con el propósito de generar soluciones analíticas que hagan más simple el análisis.

89.3.1 Restricción presupuestal intertemporal

La acumulación de la riqueza del consumidor en términos de las decisiones de portafolio, $w_t = m_t/a_t$, $1 - w_t = b_t/a_t$, y de consumo, c_t , está dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\begin{cases} da_t = a_t w_t dR_m + a_t(1 - w_t) dR_b - (\tau_t a_t + (1 + \hat{\tau}) c_t) dt, & a_0 = m_0 + b_0 > 0, \\ d\tau_t = \bar{\tau} \tau_t dt + \sigma_\tau \tau_t (\rho dZ_t + \sqrt{1 - \rho^2} dU_t), & \tau_0 > 0, \end{cases} \quad (89.10)$$

donde $dR_b = db_t/b_t$, y $\hat{\tau}$ es una tasa impositiva *ad valorem* (al valor agregado) del consumo. Si se sustituyen la ecuaciones (89.4), (89.5) y (89.9) en la primera ecuación del sistema (89.10), se tiene que

$$da_t = a_t \left[(r - \beta w_t - \tau_t) dt - w_t \sigma_P dZ_t - w_t \left(\frac{\eta}{1 + \eta} \right) dN_t \right], \quad (89.11)$$

donde $\beta = (1 + \hat{\tau})\alpha^{-1} + r + \pi - \sigma_P^2$.

89.3.2 Índice de satisfacción

La función de utilidad del tipo von Neumann-Morgenstern al tiempo t , V_t , de un agente representativo, competitivo (precio aceptante) y adverso al riesgo está dada por:

$$V_t = E \left\{ \int_t^\infty \ln(c_s) e^{-rs} ds \mid \mathcal{F}_t \right\}, \quad (89.12)$$

donde $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{(Z)} \otimes \mathcal{F}_t^{(U)}$ representa toda la información disponible en t . Observe que la tasa subjetiva de descuento del agente ha sido igualada a la tasa de interés, r , para evitar dificultades técnicas innecesarias en la dinámica de equilibrio.

89.3.3 Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para el problema de control óptimo estocástico en el que se maximiza la utilidad esperada del agente, sujeto a su restricción presupuestal intertemporal, es:

$$\begin{aligned} & \lambda I(a_t, \tau_t, t) - I_t(a_t, \tau_t, t) - I_\tau(a_t, \tau_t, t)\bar{\tau}\tau_t - \frac{1}{2}I_{\tau\tau}(a_t, \tau_t, t)\tau_t^2\sigma_\tau^2 \\ & - I_a(a_t, \tau_t, t)a_t(r - \tau_t) \\ & = \max_w \left\{ \ln(\alpha^{-1}a_t w_t)e^{-rt} - I_a(a_t, \tau_t, t)a_t\beta w_t + \frac{1}{2}I_{aa}(a_t, \tau_t, t)a_t^2 w_t^2 \sigma_P^2 \right. \\ & \left. - I_{a\tau}(a_t, \tau_t, t)a_t\tau_t w_t \sigma_P \sigma_\tau \rho + \lambda I \left(a_t \left(\frac{1 + \eta(1 - w_t)}{1 + \eta} \right), \tau_t, t \right) \right\}, \end{aligned} \quad (89.13)$$

donde

$$I(a_t, \tau_t, t) = \max_w E_t \left\{ \int_t^\infty \ln(a_s w_s) e^{-rs} ds \mid \mathcal{F}_t \right\}$$

es la función de utilidad indirecta (o función de bienestar económico) del consumidor, e $I_a(a_t, \tau_t, t)$ es la correspondiente variable de coestado.

89.3.4 Reducción de la dimensión del problema

Dado el factor de descuento exponencial en la utilidad indirecta, es conveniente definir a $I(a_t, \tau_t, t)$ en forma separable como

$$I(a_t, \tau_t, t) \equiv F(a_t, \tau_t)e^{-rt}. \quad (89.14)$$

Por lo tanto, la ecuación (89.14) se transforma en

$$\begin{aligned} & (\lambda + r)F(a_t, \tau_t) - F_\tau(a_t, \tau_t)\bar{\tau}\tau_t - \frac{1}{2}F_{\tau\tau}(a_t, \tau_t)\tau_t^2\sigma_\tau^2 - F_a(a_t, \tau_t)a_t(r - \tau_t) \\ &= \max_w \left\{ \ln(\alpha^{-1}a_tw_t) - F_a(a_t, \tau_t)a_t\beta w_t + \frac{1}{2}F_{aa}(a_t, \tau_t)a_t^2w_t^2\sigma_P^2 \right. \\ & \quad \left. - F_{a\tau}(a_t, \tau_t)a_t\tau_tw_P\sigma_\tau\rho + \lambda F\left(a_t\left(\frac{1+\eta(1-w_t)}{1+\eta}\right), \tau_t\right) \right\}. \end{aligned} \quad (89.15)$$

Se postula como posible candidato de solución de (89.15) a

$$F(a_t, \tau_t) = \delta_0 + \delta_1 \ln\left(\frac{a_t}{\tau_t}\right) + H(\tau_t; \delta_2, \delta_3), \quad (89.16)$$

donde δ_0 , δ_1 y $H(\tau_t; \delta_2, \delta_3)$ se tienen que determinar a partir de la ecuación (89.15). Las constantes δ_2 y δ_3 se determinan de tal manera que $H(\tau_0) = 0$ y $H'(\tau_0) = 0$. Al sustituir la ecuación (89.16) en (89.15), se obtiene

$$\begin{aligned} & r(\delta_0 + \delta_1 \ln(a_t)) + \delta_1(\bar{\tau} - r - \frac{1}{2}\sigma_\tau^2) \\ & + rH(\tau_t) - H'(\tau_t)\tau_t\bar{\tau} - \frac{1}{2}H''(\tau_t)\tau_t^2\sigma_\tau^2 - r\delta_1 \ln(\tau_t) + \delta_1\tau_t \\ &= \max_w \left\{ \ln(\alpha^{-1}a_tw_t) - \delta_1\beta w_t - \frac{1}{2}\delta_1w_t^2\sigma_P^2 + \lambda\delta_1 \ln\left(\frac{1+\eta(1-w_t)}{1+\eta}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (89.17)$$

89.3.5 Condiciones de primer orden y determinación de coeficientes

Las condiciones de primer orden del problema de optimización intertemporal del agente representativo conducen a una proporción de riqueza asignada a la tenencia de saldos reales invariante en el tiempo, $w_t \equiv w$, así como a la relación

$$\frac{1}{\delta_1 w} - \frac{\lambda\eta}{1+\eta(1-w)} = (1+\hat{\tau})\alpha^{-1} + r + \pi - \sigma_P^2 + w\sigma_P^2. \quad (89.18)$$

Ahora se tiene que determinar $H(\tau_t)$ como solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$rH(\tau_t) - H'(\tau_t)\tau_t\bar{\tau} - \frac{1}{2}H''(\tau_t)\tau_t^2\sigma_\tau^2 - r\delta_1 \ln(\tau_t) + \delta_1\tau_t = 0. \quad (89.19)$$

Los coeficientes δ_0 y δ_1 son determinados de (89.15) después de sustituir el valor óptimo w^* . Así, $\delta_1 = r^{-1}$, lo que produce que el coeficiente de $\ln(a_t)$ en (89.17) sea cero, y

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{1}{r} \ln(\alpha^{-1}w^*) \\ & - \frac{1}{r^2} \left[((1+\hat{\tau})\alpha^{-1} + r + \pi - \sigma_P^2)w^* + \frac{1}{2}(w^*\sigma_P)^2 + \bar{\tau} - r - \frac{1}{2}\sigma_\tau^2 \right. \\ & \quad \left. - \lambda \ln\left(\frac{1+\eta(1-w^*)}{1+\eta}\right) \right]. \end{aligned} \quad (89.20)$$

El supuesto de utilidad logarítmica conduce a que w dependa solamente de los parámetros que determinan las características estocásticas de la economía y, por lo tanto, w es constante. Es

decir, la actitud del consumidor hacia el riesgo cambiario es independiente de su riqueza, *i.e.*, el nivel de riqueza resultante en cualquier instante no tiene relevancia para las decisiones de portafolio. Más aún, debido a la utilidad logarítmica, el coeficiente de correlación, $\rho \in [-1, 1]$, no juega papel alguno en las decisiones del consumidor. Por último, es importante señalar que la ecuación (89.18) es cúbica, por lo que tiene al menos una raíz real.

La solución de la ecuación (89.19) es (véase el Apéndice 89.B)

$$H(\tau_t) = \delta_2 \tau_t^{\gamma_1} + \delta_3 \tau_t^{\gamma_2} + \frac{1}{\bar{\tau}} \ln(\tau_t) \left(1 + \frac{2}{(\sigma_{\tau}^2 + 2\bar{\tau})} \tau_t \right) + \frac{1}{\bar{\tau}} \left(1 - \frac{\sigma_{\tau}^2}{2\bar{\tau}} \right), \quad (89.21)$$

donde

$$\gamma_1 = \frac{4r}{(2\bar{\tau} - \sigma_{\tau}^2) + \sqrt{(2\bar{\tau} - \sigma_{\tau}^2)^2 + 8r\sigma_{\tau}^2}}$$

y

$$\gamma_2 = \frac{4r}{(2\bar{\tau} - \sigma_{\tau}^2) - \sqrt{(2\bar{\tau} - \sigma_{\tau}^2)^2 + 8r\sigma_{\tau}^2}}.$$

Los coeficientes δ_2 y δ_3 son determinados de tal manera que $H(\tau_0) = 0$ y $H'(\tau_0) = 0$ (véase el Apéndice 89.B). La primera condición inicial, $H(\tau_0) = 0$, asegura que el bienestar económico,

$$W \equiv I(a_0, \tau_0, 0) = F(a_0, \tau_0) = \delta_0 + \frac{1}{r} \ln \left(\frac{a_0}{\tau_0} \right),$$

sea independiente de la selección de H . La segunda condición inicial, $H'(\tau_0) = 0$, garantiza que la función de bienestar sea decreciente con respecto del impuesto a la riqueza, esto es,

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_0} = -\frac{1}{r\tau_0} < 0$$

y también asegura que H sea la única solución de la ecuación (89.19).

89.3.6 Una asignación viable del portafolio

La ecuación (89.18) es cúbica con una raíz negativa y dos raíces positivas. Esto puede verse si se intersecta la línea recta definida por el lado derecho de la ecuación (89.18) con la gráfica definida por el lado izquierdo de (89.18). En este caso, hay solamente una intersección que proporciona un estado estacionario (único) de la riqueza que el consumidor asigna a la tenencia de saldos reales $w^* \in (0, 1)$.

89.4 Experimentos de política económica (estática comparativa)

En esta sección se obtienen los primeros resultados relevantes del modelo propuesto. Un aumento permanente en la tasa de depreciación, da como resultado un aumento en el costo de oportunidad futuro de comprar bienes, lo cual, a su vez, conduce a una disminución permanente de la proporción de la riqueza destinada al consumo futuro. Para ver esto, se calcula la derivada de la ecuación (89.18) con respecto de π , lo cual conduce a

$$\frac{\partial w^*}{\partial \pi} = -\Psi^{-1} < 0, \quad (89.22)$$

donde

$$\Psi = \left[\frac{r}{(w^*)^2} + \frac{\lambda \eta^2}{[1 + \eta(1 - w^*)]^2} + \sigma_P^2 \right]. \quad (89.23)$$

El segundo resultado es la respuesta de los saldos monetarios reales de equilibrio, w^* , a cambios permanentes en el parámetro de intensidad, λ . Un aumento en el número esperado de saltos en el tipo de cambio por unidad de tiempo ocasiona un incremento en el costo de oportunidad futuro de la compra de bienes. Esto, a su vez, disminuye permanentemente la proporción de la

riqueza dedicada al consumo futuro. De hecho, después de calcular la derivada de la ecuación (89.18) con respecto de λ se obtiene

$$\frac{\partial w^*}{\partial \lambda} = -\frac{\eta}{\Psi[1 + \eta(1 - w^*)]} < 0. \quad (89.24)$$

Un efecto equivalente es obtenido por un cambio en el tamaño medio esperado de un salto:

$$\frac{\partial w^*}{\partial \eta} = -\frac{\lambda}{\Psi[1 + \eta(1 - w^*)]^2} < 0. \quad (89.25)$$

Por último, un aumento en el impuesto *ad valorem* al consumo producirá una reducción permanente en la proporción de la riqueza asignada al consumo futuro, ya que

$$\frac{\partial w^*}{\partial \hat{\tau}} = -\frac{1}{\alpha \Psi} < 0. \quad (89.26)$$

89.5 Impacto en el bienestar económico

En esta sección se evalúan los impactos de choques exógenos en el bienestar económico. Como siempre, el criterio de bienestar, W , del individuo representativo es la utilidad indirecta con una riqueza real inicial, a_0 , y una tasa impositiva inicial de la riqueza, τ_0 . Por lo tanto, en virtud de la ecuación (89.14), el bienestar está definido por:

$$\begin{aligned} W(\pi, \lambda, \eta, \bar{\tau}, \hat{\tau}; a_0, \tau_0) &\equiv I(a_0, \tau_0, 0) = F(a_0, \tau_0) = \frac{1}{r}[1 + \ln(a_0/\tau_0) + \ln(\alpha^{-1}w^*)] \\ &- \frac{1}{r^2} \left[((1 + \hat{\tau})\alpha^{-1} + r + \pi - \sigma_P^2)w^* + \frac{1}{2}(w^*\sigma_P)^2 + \bar{\tau} - \frac{1}{2}\sigma_{\tau}^2 \right. \\ &\left. - \lambda \ln\left(\frac{1 + \eta(1 - w^*)}{1 + \eta}\right) \right], \end{aligned} \quad (89.27)$$

donde se ha utilizado el hecho de que $H(\tau_0) = 0$.

89.5.1 Impacto de cambios permanentes del tipo de cambio en el bienestar

Ahora se calculan los impactos en el bienestar económico de cambios permanentes en la tasa media esperada de depreciación, la probabilidad de depreciación, y el tamaño esperado de una depreciación. Primero, observe que un incremento en la tasa media esperada de depreciación reduce el bienestar económico. En efecto, al calcular la derivada de la ecuación (89.27) con respecto de π , se encuentra que

$$\frac{\partial W}{\partial \pi} = -\frac{w^*}{r^2} < 0. \quad (89.28)$$

Análogamente, un choque exógeno en la probabilidad de depreciación reduce el bienestar económico. Para ver esto, es suficiente calcular la derivada de la ecuación (89.27) con respecto de λ

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = \frac{1}{r^2} \ln\left(\frac{1 + \eta(1 - w^*)}{1 + \eta}\right) < 0. \quad (89.29)$$

Por último, un incremento en el tamaño medio esperado de un salto en el tipo de cambio reduce el bienestar económico, ya que

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = -\frac{1}{r^2} \left[\frac{\lambda w^*}{(1 + \eta)(1 + \eta(1 - w^*))} \right] < 0. \quad (89.30)$$

89.5.2 Impacto de la política fiscal en el bienestar económico

A continuación se calculan los impactos en el bienestar económico producidos por cambios permanentes en la tasa impositiva media esperada a la riqueza y el impuesto esperado *ad valorem* al consumo. En este caso, se tiene

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\tau}} = -\frac{1}{r^2} < 0 \quad (89.31)$$

y

$$\frac{\partial W}{\partial \hat{\tau}} = -\frac{1}{r^2} \alpha^{-1} w^* < 0. \quad (89.32)$$

Por lo tanto, aumentos en la tasa impositiva media esperada sobre la riqueza y la tasa impositiva en el consumo siempre conducirán a una reducción en el bienestar económico.

89.6 Riqueza y consumo

Ahora se obtiene el proceso estocástico que genera la riqueza real del consumidor cuando se aplica la regla óptima. Después de sustituir w^* en la ecuación (89.11), se obtiene

$$da_t = a_t \left[\left(\frac{\lambda \eta w^*}{1 + \eta(1 - w^*)} + (w^* \sigma_P)^2 - \tau_t \right) dt - w^* \sigma_P dz_t + \left(\frac{1 + \eta(1 - w^*)}{1 + \eta} - 1 \right) dN_t \right], \quad (89.33)$$

donde

$$\tau_t = \tau_0 \exp \left\{ \left(\bar{\tau} - \frac{1}{2} \sigma_{\tau}^2 \right) t + \mathcal{E} \sigma \sqrt{t} \right\} \quad (89.34)$$

y $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. La función densidad de probabilidad de τ_t , dado τ_0 , satisface

$$f_{\tau_t | \tau_0}(x | \tau_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t} \sigma_{\tau} x} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x/\tau_0) - (\bar{\tau} - \frac{1}{2} \sigma_{\tau}^2)t}{\sigma_{\tau} \sqrt{t}} \right)^2 \right\}. \quad (89.35)$$

Además, se tiene

$$\mathbb{E}[\tau_t | \tau_0] = \tau_0 e^{\bar{\tau} t} \quad (89.36)$$

y

$$\text{Var}[\tau_t | \tau_0] = \tau_0^2 e^{2\bar{\tau} t} (e^{\sigma_{\tau}^2 t} - 1). \quad (89.37)$$

La solución a la ecuación diferencial estocástica (89.33), condicionada por a_0 , es (véase el Apéndice 89.A, fórmula (89.A.3))

$$a_t = a_0 e^{\xi_t}, \quad (89.38)$$

donde¹

$$\xi_t = \theta_t + \phi_t, \quad \theta_t | \tau_t \sim \mathcal{N}[[F(w^*) - \tau_t]t, G(w^*)t], \quad (89.39)$$

$$\phi_t = L(w^*) N_t \quad (89.40)$$

y

$$N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t). \quad (89.41)$$

Los componentes estacionarios de los parámetros de las distribuciones antes mencionadas son:

$$F(w^*) = \frac{\lambda \eta w^*}{1 + \eta(1 - w^*)} + \frac{(w^* \sigma_P)^2}{2},$$

$$G(w^*) = (w^* \sigma_P)^2$$

y

$$L(w^*) = \ln \left(\frac{1 + \eta(1 - w^*)}{1 + \eta} \right).$$

¹ $x \sim \mathcal{P}(a)$ denota una variable aleatoria de tipo Poisson x con media a .

Además, observe que

$$E[\xi_t | \tau_t] = [F(w^*) - \tau_t + L(w^*)\lambda]t \quad (89.42)$$

y

$$\text{Var}[\xi_t | \tau_t] = [G(w^*) + [L(w^*)]^2\lambda]t. \quad (89.43)$$

Más aún, se sigue que

$$E[\xi_t] = E\{E[\xi_t | \tau_t]\} = [F(w^*) + \tau_0 e^{\bar{\tau}t} + L(w^*)\lambda]t \quad (89.44)$$

y

$$\text{Var}[\xi_t] = \text{Var}\{E[\xi_t | \tau_t]\} + E\{\text{Var}[\xi_t | \tau_t]\} = t^2 \tau_0^2 e^{2\bar{\tau}t} (e^{\sigma_t^2 t} - 1) + [G(w^*) + [L(w^*)]^2\lambda]t. \quad (89.45)$$

89.6.1 Dinámica del consumo

En virtud de las ecuaciones (89.9) y (89.38), el proceso estocástico para el consumo se puede escribir como

$$c_t^* = \alpha^{-1} w^* a_0 e^{\xi_t}. \quad (89.46)$$

Esto indica que, en ausencia de mercados de productos derivados financieros, el riesgo de depreciación tiene un efecto en la riqueza a través de la incertidumbre en ξ_t , es decir, la incertidumbre cambia el conjunto de oportunidades que enfrenta el consumidor. Por otra parte, el riesgo de depreciación también afecta la composición del portafolio por medio de sus efectos en w^* . De este modo, un cambio en la política económica estará acompañado tanto del efecto riqueza como del de sustitución. De la ecuación (89.46), se puede calcular la probabilidad de que, en un intervalo de tiempo dado, ocurran ciertos niveles de consumo. Es también importante observar, al considerar las ecuaciones (89.12) y (89.46), que el supuesto de que la tasa subjetiva de descuento del agente es igual a la tasa de interés mundial no asegura un nivel de estado estacionario en el consumo. Sin embargo, se tiene un estado estacionario de la riqueza asignada al consumo. Se puede concluir que la incertidumbre es un elemento clave para racionalizar dinámicas del consumo más realistas que no podrían ser obtenidas a través de modelos deterministas.

Apéndice 89.A

En este apéndice se establecen dos resultados útiles en el desarrollo del presente capítulo:

1) El lema de Itô para procesos combinados de difusión y saltos de Poisson, el cual puede ser enunciado de la siguiente manera. Dada la ecuación diferencial estocástica lineal y homogénea

$$dx_t = x_t(\mu dt + \sigma dz_t + \eta dq_t), \quad z_t \sim \mathcal{N}(0, t), \quad q_t \sim \mathcal{P}(\lambda t), \quad (89.A.1)$$

y una función $g(x_t)$ continua y dos veces diferenciable, entonces la diferencial estocástica de $g(x_t)$ está dada por

$$dg(x_t) = [g_x(x_t)\mu x_t + \frac{1}{2}g_{xx}(x_t)\sigma^2 x_t^2]dt + g_x(x_t)\sigma x_t dz_t + [g(x_t(1+\eta)) - g(x_t)]dq_t. \quad (89.A.2)$$

2) La solución a la ecuación (89.A.1) está dada por

$$x_t = x_0 \exp \left\{ (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \int_0^t dz_u + \ln(1+\eta) \int_0^t dq_u \right\}. \quad (89.A.3)$$

Es importante tener presente, al usar (89.A.3), que para $t \geq 0$ las propiedades para z_t y q_t son:

$$E \left[\int_0^t dz_u \right] = 0, \quad E \left[\left(\int_0^t dz_u \right)^2 \right] = \int_0^t du = t, \quad \text{y} \quad E \left[\int_0^t dq_u \right] = \lambda t.$$

Apéndice 89.B

En este apéndice se resuelve la ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden no homogénea, la cual aparece en la ecuación (89.20). Sea $H = H(\tau)$ y considere la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogénea del tipo de Euler-Cauchy

$$\tau^2 H'' + \frac{2\bar{\tau}}{\sigma^2} \tau H' - \frac{2r}{\sigma^2} H = -\frac{2}{\sigma^2} \ln(\tau) + \frac{2}{r\sigma^2} \tau, \quad (89.B.1)$$

donde r y σ son constantes positivas. A continuación, la ecuación (89.B.1) se transforma en una ecuación diferencial con coeficientes constantes, para ello se aplica el método de Euler en el que se utiliza el siguiente cambio de variable $\tau = e^t$. Así, $t = \ln(\tau)$,

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (89.B.2)$$

y

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \tau^2} = \frac{1}{\tau^2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{\partial H}{\partial t} \right). \quad (89.B.3)$$

Después de sustituir las ecuaciones (89.B.2) y (89.B.3) en la ecuación (89.B.1), se obtiene

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \left(\frac{2\bar{\tau}}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{2r}{\sigma^2} H = -\frac{2}{\sigma^2} t + \frac{2}{r\sigma^2} e^t. \quad (89.B.4)$$

La solución general es de la forma:

$$H(t) = H_c(t) + H_p(t), \quad (89.B.5)$$

donde H_c es la solución complementaria, asociada a la ecuación homogénea y H_p es una solución particular de la ecuación no homogénea. Para determinar H_c , se requiere resolver la ecuación característica siguiente:

$$\gamma^2 + \left(\frac{2\bar{\tau}}{\sigma^2} - 1 \right) \gamma - \frac{2r}{\sigma^2} = 0.$$

De aquí que la solución complementaria es

$$H_c(t) = \delta_2 e^{\gamma_1 t} + \delta_3 e^{\gamma_2 t}, \quad (89.B.6)$$

donde las dos raíces están dadas por

$$\gamma_1 = \frac{4r}{(2\bar{\tau} - \sigma^2) + \sqrt{(2\bar{\tau} - \sigma^2)^2 + 8r\sigma^2}}$$

y

$$\gamma_2 = \frac{4r}{(2\bar{\tau} - \sigma^2) - \sqrt{(2\bar{\tau} - \sigma^2)^2 + 8r\sigma^2}}.$$

Enseguida se determina H_p , para ello se utiliza el método de coeficientes indeterminados. Se supone que la solución es de la forma siguiente

$$H_p(t) = At + B + Cte^t. \quad (89.B.7)$$

Por lo tanto, $H'_p(t) = A + C(t+1)e^t$ y $H''_p(t) = C(t+2)e^t$. Posteriormente, se sustituye la ecuación (89.B.7) en la ecuación (89.B.4), lo cual conduce a

$$\left(\frac{2\bar{\tau}}{\sigma^2} - \frac{2r}{\sigma^2} \right) Cte^t + \left(1 + \frac{2\bar{\tau}}{\sigma^2} \right) Ce^t - \frac{2r}{\sigma^2} At + \left(\frac{2\bar{\tau}}{\sigma^2} - 1 \right) A - \frac{2r}{\sigma^2} B = -\frac{2}{\sigma^2} t + \frac{2}{r\sigma^2} e^t.$$

Al resolver término a término se tiene que los valores de A , B y C están dados, respectivamente, por

$$A = \frac{1}{r}, \quad B = \frac{1}{2r^2} (2\bar{\tau} - \sigma^2) \quad \text{y} \quad C = \frac{2}{r(\sigma^2 + 2\bar{\tau})},$$

de donde para una solución particular se cumple que $\bar{\tau} = r$. Por lo tanto,

$$H_p(t) = \frac{1}{\bar{\tau}}t - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}^2} + \frac{1}{\bar{\tau}} + \frac{2}{\bar{\tau}(\sigma^2 + 2\bar{\tau})}te^t. \quad (89.B.8)$$

Al sustituir las ecuaciones (89.B.6) y (89.B.8) en la ecuación (89.B.5) se tiene que

$$H(t) = \delta_2 e^{\gamma_1 t} + \delta_3 e^{\gamma_2 t} + \frac{1}{\bar{\tau}}t - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}^2} + \frac{1}{\bar{\tau}} + \frac{2}{\bar{\tau}(\sigma^2 + 2\bar{\tau})}te^t.$$

Como $\tau = e^t$, la solución general de la ecuación (89.B.1), en términos de τ , está dada por

$$H(\tau) = \delta_2 \tau^{\gamma_1} + \delta_3 \tau^{\gamma_2} + \frac{1}{\bar{\tau}} \ln(\tau) \left(1 + \frac{2}{\sigma^2 + 2\bar{\tau}} \tau \right) + \frac{1}{\bar{\tau}} \left(1 - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}} \right). \quad (89.B.9)$$

Los valores de δ_2 y δ_3 que satisfacen las condiciones iniciales $H(\tau_0) = H'(\tau_0) = 0$ son

$$\delta_2 = \frac{\tau_0^{-\gamma_1}}{\bar{\tau}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\gamma_2 \left(\ln(\tau_0) + 1 - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}} \right) - \frac{2\tau_0}{\sigma^2 + 2\bar{\tau}} (1 + \ln(\tau_0)(1 - \gamma_2)) + 1 \right]$$

y

$$\delta_3 = \frac{\tau_0^{-\gamma_2}}{\bar{\tau}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[-\gamma_1 \left(\ln(\tau_0) + 1 - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}} \right) + \frac{2\tau_0}{\sigma^2 + 2\bar{\tau}} (1 + \ln(\tau_0)(1 - \gamma_1)) + 1 \right].$$

89.8 Bibliografía sugerida

- Venegas-Martínez, F. (2001). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, No. 9, pp. 1429-1449.
- Venegas-Martínez, F. (2000). "On Consumption, Investment, and Risk". *Economía Mexicana, Nueva Época*, Vol. 9, No. 2, pp. 227-244.
- Venegas-Martínez, F. (2000). "Utilidad, aprendizaje y estabilización". *Gaceta de Economía*, Año 5, No. 10, pp. 153-169.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Política fiscal y renta petrolera: una propuesta de régimen fiscal para Pemex". *Problemas del Desarrollo, Revista Latinoamericana de Economía*, Vol. 32, No. 124, pp. 55-108.
- Venegas-Martínez, F. (2006). "Efectos fiscales sobre planes temporales de estabilización inflacionaria: un enfoque de estrategia auto-financiable". *EconoQuantum, Revista de Economía y Negocios*, por aparecer.
- Venegas-Martínez, F. (2006). "Fiscal Policy in a Stochastic Temporary Stabilization Model: Undiversifiable devaluation Risk". *Journal of World Economics Review*, Vol. 1, No. 1, pp. 87-106.
- Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2000). "Mercados Financieros Incompletos y Su Impacto en los Programas de Estabilización de Precios: El Caso Mexicano". *Momento Económico*, Vol. 111, pp. 20-27.

89.9 Ejercicios

89.1 Repita el análisis efectuado en el transcurso del presente capítulo para la función de utilidad

$$V_t = \mathbb{E} \left\{ \int_t^{\infty} c_s^{\gamma} e^{-rs} ds \mid \mathcal{F}_t \right\}.$$

89.2 Muestre que si

$$\tau_t = \tau_0 \exp \left\{ (\bar{\tau} - \frac{1}{2}\sigma_{\tau}^2)t + \mathcal{E}\sigma\sqrt{t} \right\}$$

y $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, entonces la función densidad de τ_t , dado τ_0 , está dada por

$$f_{\tau_t | \tau_0}(x | \tau_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma_{\tau}x} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x/\tau_0) - (\bar{\tau} - \frac{1}{2}\sigma_{\tau}^2)t}{\sigma_{\tau}\sqrt{t}} \right)^2 \right\}.$$

Además, verifique que

$$\mathbb{E}[\tau_t | \tau_0] = \tau_0 e^{\bar{\tau}t}$$

y

$$\text{Var}[\tau_t | \tau_0] = \tau_0^2 e^{2\bar{\tau}t} (e^{\sigma_{\tau}^2 t} - 1).$$

89.3 Verifique que

$$H(\tau) = \delta_2 \tau^{\gamma_1} + \delta_3 \tau^{\gamma_2} + \frac{1}{\bar{\tau}} \ln(\tau) \left(1 + \frac{2}{\sigma^2 + 2\bar{\tau}} \tau \right) + \frac{1}{\bar{\tau}} \left(1 - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}} \right)$$

con

$$\delta_2 = \frac{\tau_0^{-\gamma_1}}{\bar{\tau}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\gamma_2 \left(\ln(\tau_0) + 1 - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}} \right) - \frac{2\tau_0}{\sigma^2 + 2\bar{\tau}} (1 + \ln(\tau_0)(1 - \gamma_2)) + 1 \right]$$

y

$$\delta_3 = \frac{\tau_0^{-\gamma_2}}{\bar{\tau}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[-\gamma_1 \left(\ln(\tau_0) + 1 - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}} \right) + \frac{2\tau_0}{\sigma^2 + 2\bar{\tau}} (1 + \ln(\tau_0)(1 - \gamma_1)) + 1 \right],$$

satisface la ecuación diferencial

$$\tau^2 H'' + \frac{2\bar{\tau}}{\sigma^2} \tau H' - \frac{2r}{\sigma^2} H = -\frac{2}{\sigma^2} \ln(\tau) + \frac{2}{r\sigma^2} \tau, \quad H(\tau_0) = H'(\tau_0) = 0,$$

donde r y σ son constantes positivas.

CAPÍTULO 90

RIESGO NO DIVERSIFICABLE DE TIPO DE CAMBIO (III): INGRESO LABORAL INCIERTO

Conceptos básicos de este capítulo:

- Ingreso laboral estocástico
- Riesgo de tipo de cambio
- Movimiento geométrico Browniano
- Mercados incompletos
- Decisiones de consumo y portafolio

90.1 Introducción

En este capítulo se presenta un modelo estocástico de estabilización temporal de precios con un ancla nominal en el tipo de cambio. El modelo reconoce explícitamente la incertidumbre en la dinámica esperada tanto de la tasa de devaluación como del ingreso laboral. Bajo este marco, las expectativas de devaluación son conducidas por un proceso de difusión con saltos y el ingreso laboral es gobernado por un movimiento geométrico Browniano. Se supone que no existe un mercado de productos derivados para cubrirse contra devaluaciones y fluctuaciones adversas en el ingreso laboral futuro, de esta manera los mercados financieros son incompletos. Se examina la dinámica de las decisiones de consumo y portafolio cuando se implementa un programa de estabilización. Por último, se evalúan los efectos de choques exógenos en las expectativas tanto de la devaluación como de ingreso laboral sobre el bienestar económico.

El capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera. En la próxima sección se desarrolla un modelo estocástico del tipo de Ramsey para una economía pequeña y abierta que produce y consume un solo bien y que tiene una restricción “cash-in-advance”. Los agentes tienen expectativas de devaluación conducidas por un proceso de difusión con saltos y su ingreso laboral es guiado de acuerdo con un movimiento geométrico Browniano. En la sección 90.3 se resuelve el problema de decisión del consumidor. En la sección 90.4 se llevan a cabo experimentos de estática comparativa. En la sección 90.5 se examinan los efectos de choques exógenos en el bienestar económico. Por último, en la sección 90.6 se estudia el comportamiento dinámico de la riqueza y del consumo y se discuten varios temas relevantes de política cambiaria.

90.2 Planteamiento del modelo

En esta sección se presenta un modelo estocástico de estabilización temporal de precios que reconoce explícitamente la incertidumbre en la dinámica esperada tanto de la tasa de inflación como del ingreso laboral. En este marco, la incertidumbre del ingreso laboral es conducida por un movimiento geométrico Browniano. Además, se supone que no hay productos derivados para cubrirse contra devaluaciones futuras y que el ingreso generado por el señoraje (impuesto inflacionario) es gastado en compras improductivas del gobierno. Así mismo, bajo el supuesto de que los agentes son adversos al riesgo, se examina la dinámica de equilibrio del consumo y la riqueza cuando un programa de estabilización de precios se pone en marcha. Por último, se estudian los efectos en el consumo y en el bienestar económico debidos a cambios permanentes en los parámetros que determinan las expectativas, a saber, la tasa media esperada de devaluación, la volatilidad del tipo de cambio, la probabilidad de devaluación, el tamaño medio esperado de una posible devaluación y el ingreso laboral medio esperado.

90.2.1 Los supuestos del modelo

Con el propósito de obtener soluciones analíticas en un modelo estocástico del tipo de Ramsey, se mantendrá la estructura de la economía tan simple como sea posible. Considere una economía pequeña y abierta con agentes idénticos con vida infinita. La economía produce y consume un sólo bien perecedero. Se supone que el bien es comercializable internacionalmente y que el nivel general de precios en la economía doméstica, P_t , es determinado por la condición de poder de paridad de compra, a saber, $P_t = P_t^*e_t$, donde P_t^* es el precio en moneda extranjera del bien en el resto del mundo y e_t es el tipo de cambio nominal. Se supone, por simplicidad, que P_t^* es igual a 1. También se supone que el valor inicial del tipo de cambio, e_0 , es conocido e igual a 1.

Se supone que el número de devaluaciones esperadas, *i.e.*, los saltos en el tipo de cambio, por unidad de tiempo, siguen un proceso de Poisson N_t con intensidad λ , de tal manera que

$$\mathbb{P}^{(N)}\{\text{un salto unitario durante } dt\} = \mathbb{P}^{(N)}\{dN_t = 1\} = \lambda dt + o(dt), \quad (90.1)$$

mientras que

$$\mathbb{P}^{(N)}\{\text{ningún salto en } dt\} = \mathbb{P}^{(N)}\{dN_t = 0\} = 1 - \lambda dt + o(dt). \quad (90.2)$$

Así, $E^{(N)}[dN_t] = \text{Var}^{(N)}[dN_t] = \lambda dt$. El número inicial de saltos se supone igual a cero, es decir, $N_0 = 0$.

Considere un movimiento Browniano $(Z_t)_{t \geq 0}$ definido en un espacio de probabilidad fijo con su filtración aumentada $(\Omega^{(Z)}, \mathcal{F}^{(Z)}, (\mathcal{F}_t^{(Z)})_{t \geq 0}, \mathbb{P}^{(Z)})$. Se supone que el consumidor percibe que la tasa de inflación esperada, dP_t/P_t , y por lo tanto la tasa esperada de devaluación, de_t/e_t , sigue un movimiento geométrico Browniano con saltos de Poisson definido por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{de_t}{e_t} = \pi dt + \sigma_P dZ_t + \gamma dN_t, \quad (90.3)$$

donde π es la tasa media esperada de devaluación condicionada a que no se presenten saltos, σ_P es la volatilidad instantánea del nivel general de precios, y γ es el tamaño medio esperado de un salto en el tipo de cambio. Por simplicidad, se supone que el proceso Z_t es independiente de N_t ; de otra forma $\text{Cov}(Z_t, N_t) = \rho_{ZN}dt \neq 0$ y el coeficiente de correlación ρ_{ZN} podría ser incorporado sin dificultad en todo el análisis subsecuente con un poco más de álgebra, lo cual no es relevante para el objetivo de la presente investigación. Asimismo, en lo que se sigue, π , σ_P , λ y γ son constantes positivas.

90.2.2 Saldos monetarios reales

El agente mantiene saldos monetarios reales, $m_t = M_t/P_t$, donde M_t es el acervo nominal de dinero. La tasa estocástica de rendimiento por la tenencia de saldos reales, dR_m , está dada por el cambio porcentual en el precio del dinero en términos de bienes. Al aplicar el lema de Itô para procesos de difusión con saltos al inverso del nivel de precios, con (90.3) como el proceso subyacente (véase el Apéndice 90.A, fórmula (90.A.2)), se obtiene

$$dR_m = d\left(\frac{M_t}{P_t}\right) / \left(\frac{M_t}{P_t}\right) = (-\pi + \sigma_P^2)dt - \sigma_P dZ_t - \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma}\right)dN_t. \quad (90.4)$$

Observe que la tendencia del rendimiento por la tenencia de saldos reales no sólo incluye la depreciación media por inflación, π , sino también un efecto compensatorio de la varianza, σ_P^2 .

90.2.3 Bonos internacionales

El agente también tiene acceso a un bono internacional, b_t , que paga una tasa de interés real libre de riesgo (de incumplimiento), r , que es constante para todos los plazos. En este caso, se satisface

$$db_t = rb_t dt, \quad b_0 \text{ dado.} \quad (90.5)$$

Es decir, el bono paga r unidades del bien de consumo por unidad de tiempo. Note que por el supuesto de economía pequeña, el agente toma r como dada.

90.2.4 Una economía del tipo “cash-in-advance”

Considere una restricción del tipo “cash-in-advance” de la forma Clower-Lucas-Feenstra:

$$m_t = \alpha c_t, \quad (90.6)$$

donde c_t es el consumo y $\alpha > 0$ es el tiempo promedio que el agente mantiene el dinero para financiar su consumo. La condición (90.6) es crítica para ligar la política cambiaria y el consumo. De esta forma, la devaluación actúa como un impuesto estocástico en los saldos monetarios reales.

90.2.5 Ingreso laboral incierto

El consumidor representativo administra y trabaja en su propio negocio. Se supone que el ingreso laboral, y_t , es transformado en activos reales, a_t , a una tasa incierta v_t , de tal manera que

$$y_t = v_t a_t,$$

y v_t es conducido por un movimiento geométrico Browniano. Sea $(U_t)_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad fijo equipado con su filtración aumentada $(\Omega^{(U)}, \mathcal{F}^{(U)}, (\mathcal{F}_t^{(U)})_{t \geq 0}, \mathbb{P}^{(U)})$. Se supone que la tasa de variación del ingreso, v_t , está dada por

$$\frac{dv_t}{v_t} = \bar{v} dt + \sigma_v d\tilde{Z}_t, \quad v_0 > 0, \quad (90.7)$$

donde

$$\tilde{Z}_t = \rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2} U_t \quad (90.8)$$

y

$$\text{Cov}(dZ_t, d(\rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2} U_t)) = \rho dt, \quad (90.9)$$

\bar{v} y σ_v son constantes positivas y $\rho \in [-1, 1]$ es la correlación entre cambios en la inflación y cambios en el ingreso laboral. De nuevo, por simplicidad, se supone que los procesos N_t , Z_t y U_t son independientes dos a dos; de otra forma sería necesario incorporar los correspondientes coeficientes de correlación con un poco más de álgebra.

90.3 Problema del consumidor

En esta sección se caracterizan las decisiones óptimas de consumo y portafolio. Para ello, se obtienen soluciones explícitas que hacen más sencilla la comprensión de los aspectos relevantes de los programas temporales de estabilización.

La acumulación de la riqueza del consumidor en términos del portafolio, $w_t = m_t/a_t$, $1 - w_t = b_t/a_t$, y del consumo, c_t , está dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\begin{aligned} da_t &= a_t w_t dR_m + a_t (1 - w_t) dR_b + (v_t a_t - c_t) dt, \quad a_0 = m_0 + b_0 > 0, \\ dv_t &= \bar{v} v_t dt + \sigma_v v_t (\rho dZ_t + \sqrt{1 - \rho^2} dU_t), \quad v_0 > 0, \end{aligned} \quad (90.10)$$

donde $dR_b = db_t/b_t$. Es decir, el agente destina una proporción w_t de su riqueza a saldos reales y la proporción complementaria $1 - w_t$ a la compra de bonos, al mismo tiempo su ingreso laboral modifica la riqueza, la cual es marginalmente reducida por el consumo. Si se sustituyen las ecuaciones (90.4), (90.5) y (90.6) en la primera ecuación del sistema de ecuaciones diferenciales (90.10), se tiene que

$$da_t = a_t \left[(r - \zeta w_t + v_t) dt - w_t \sigma_P dZ_t - w_t \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \right) dN_t \right], \quad (90.11)$$

donde $\zeta = \alpha^{-1} + r + \pi - \sigma^2$.

90.3.1 Función de utilidad

La utilidad total esperada del tipo von Neumann-Morgenstern al tiempo t , V_t , del consumidor competitivo adverso al riesgo se supone de la forma:

$$V_t = E \left\{ \int_t^\infty \ln(c_s) e^{-rs} ds \mid \mathcal{F}_t \right\}, \quad (90.12)$$

donde $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{(Z)} \otimes \mathcal{F}_t^{(U)}$ representa la información total disponible al tiempo t . Se emplea la función de utilidad logarítmica con el propósito de obtener soluciones cerradas que hagan el análisis más sencillo. Observe también que la tasa subjetiva de descuento del agente ha sido igualada a la tasa de interés r con el fin de alcanzar un estado estacionario para w_t y, así, evitar dificultades técnicas innecesarias.

90.3.2 La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para el problema de control óptimo estocástico en el que se maximiza la utilidad esperada del agente, sujeto a su restricción presupuestal intertemporal, es:

$$\begin{aligned} & \lambda J(a_t, v_t, t) - J_t(a_t, v_t, t) - J_v(a_t, v_t, t)\bar{v}v_t - \frac{1}{2}J_{vv}(a_t, v_t, t)v_t^2\sigma_v^2 - J_a(a_t, v_t, t)a_t(r + v_t) \\ &= \max_w \left\{ \ln(\alpha^{-1}a_tw_t)e^{-rt} - J_a(a_t, v_t, t)a_t\zeta w_t + \frac{1}{2}J_{aa}(a_t, v_t, t)a_t^2w_t^2\sigma_P^2 \right. \\ & \quad \left. - J_{av}(a_t, v_t, t)a_tv_tw_t\sigma_P\sigma_v\rho + \lambda J\left(a_t\left(\frac{1+\gamma(1-w_t)}{1+\gamma}\right), v_t, t\right) \right\}, \end{aligned} \quad (90.13)$$

donde

$$J(a_t, v_t, t) = \max_w E_t \left\{ \int_t^\infty \ln\left(\alpha^{-1}a_sw_s\right) e^{-rs} ds \mid \mathcal{F}_t \right\} \quad (90.14)$$

es la función de utilidad indirecta (bienestar económico) del consumidor y $J_a(a_t, v_t, t)$ es la variable de coestado.

Dado el factor de descuento exponencial en la ecuación (90.14), se define $J(a_t, v_t, t)$ en forma separable en el tiempo como

$$J(a_t, v_t, t) \equiv F(a_t, v_t)e^{-rt}.$$

Por lo tanto, la ecuación (90.14) se transforma en

$$\begin{aligned} & (\lambda + r)F(a_t, v_t) - F_v(a_t, v_t)\bar{v}v_t - \frac{1}{2}F_{vv}(a_t, v_t)v_t^2\sigma_v^2 - F_a(a_t, v_t)a_t(r + v_t) \\ &= \max_w \left\{ \ln(\alpha^{-1}a_tw_t) - F_a(a_t, v_t)a_t\zeta w_t + \frac{1}{2}F_{aa}(a_t, v_t)a_t^2w_t^2\sigma_P^2 \right. \\ & \quad \left. - F_{av}(a_t, v_t)a_tv_tw_t\sigma_P\sigma_v\rho + \lambda F\left(a_t\left(\frac{1+\gamma(1-w_t)}{1+\gamma}\right), v_t\right) \right\}. \end{aligned} \quad (90.15)$$

Se postula como posible candidato de solución de la ecuación diferencial ordinaria (90.15) a:

$$F(a_t, v_t) = \theta_0 + \theta_1 \ln(a_tv_t) + \phi(v_t; \theta_2, \theta_3), \quad (90.16)$$

donde θ_0 , θ_1 y $\phi(v_t)$ son determinados a través de la ecuación (90.15). Si se sustituye la ecuación (90.16) en la ecuación (90.15), se tiene que

$$\begin{aligned} & r(\theta_0 + \theta_1 \ln(a_t)) - \theta_1\bar{v} + \frac{1}{2}\theta_1\sigma_v^2 - \theta_1r \\ & + r\phi(v_t) - \phi'(v_t)\bar{v}v_t - \frac{1}{2}\phi''(v_t)v_t^2\sigma_v^2 + r\theta_1 \ln(v_t) - \theta_1v_t \\ &= \max_w \left\{ \ln(\alpha^{-1}a_tw_t) - \theta_1\zeta w - \frac{1}{2}\theta_1w_t^2\sigma_P^2 \right. \\ & \quad \left. + \lambda\theta_1 \ln\left(\frac{1+\gamma(1-w_t)}{1+\gamma}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (90.17)$$

90.3.3 Condiciones de primer orden y determinación de coeficientes

Después de calcular las condiciones de primer orden del problema de optimización intertemporal, se obtiene que $w_t \equiv w$ es independiente del tiempo, así como la relación

$$\frac{1}{\theta_1 w} - \frac{\lambda \gamma}{1 + \gamma(1 - w)} = \zeta + w \sigma_p^2. \quad (90.18)$$

Se selecciona a $\phi(v_t)$ como solución de la ecuación diferencial de segundo orden dada por

$$r\phi(v_t) - \phi'(v_t)\bar{v}v_t - \frac{1}{2}\phi''(v_t)v_t^2\sigma_v^2 + r\theta_1 \ln(v_t) - \theta_1 v_t = 0. \quad (90.19)$$

Los coeficientes θ_0 y θ_1 son determinados a partir de la ecuación (90.15) al sustituir w^* óptima. Así, $\theta_1 = r^{-1}$, mientras que el coeficiente de $\ln(a_t)$ en la ecuación (90.17) es cero, y

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{1}{r} \ln(\alpha^{-1}w^*) \\ &- \frac{1}{r^2} \left[(\alpha^{-1} + r + \pi - \sigma_p^2)w^* + \frac{1}{2}(w^*\sigma_p)^2 - \bar{v} - r + \frac{1}{2}\sigma_v^2 - \lambda \ln\left(\frac{1 + \gamma(1 - w^*)}{1 + \gamma}\right) \right]. \end{aligned} \quad (90.20)$$

La utilidad logarítmica conduce a que w dependa solamente de los parámetros que determinan las características estocásticas de la economía y, por lo tanto, w es constante. Es decir, la actitud del consumidor hacia el riesgo cambiario es independiente de su riqueza, *i.e.*, el nivel de riqueza resultante en cualquier instante no tiene relevancia para las decisiones de portafolio. Más aún, debido a la utilidad logarítmica, el coeficiente de correlación, $\rho \in [-1, 1]$, no juega papel alguno en las decisiones del consumidor. Por último, es importante señalar que la ecuación (90.18) es cúbica, por lo que tiene al menos una raíz real.

La solución de la ecuación diferencial (90.19) es (véase el Apéndice 90.B).

$$\phi(v_t) = \theta_2 v_t^{\lambda_1} + \theta_3 v_t^{\lambda_2} - \frac{1}{\bar{v}} \ln(v_t) \left(1 + \frac{2}{(2\bar{v} + \sigma_v^2)} v_t \right) + \frac{1}{\bar{v}} \left(\frac{\sigma_v^2}{2\bar{v}} - 1 \right), \quad (90.21)$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{4r}{(2\bar{v} - \sigma_v^2) + \sqrt{(2\bar{v} - \sigma_v^2)^2 + 8r\sigma_v^2}} \quad (90.22)$$

y

$$\lambda_2 = \frac{4r}{(2\bar{v} - \sigma_v^2) - \sqrt{(2\bar{v} - \sigma_v^2)^2 + 8r\sigma_v^2}}. \quad (90.23)$$

Los coeficientes θ_2 y θ_3 son obtenidos de tal manera que $\phi(v_0) = 0$ y $\phi'(v_0) = 0$ (ver Apéndice 90.B). La primera condición inicial asegura que el bienestar económico,

$$W \equiv J(a_0, v_0, 0) = F(a_0, v_0) = \theta_0 + \theta_1 \ln(a_0 v_0)$$

es independiente de la selección de ϕ . La segunda condición, $\phi'(v_0) = 0$, conduce a

$$\frac{\partial J}{\partial v} \Big|_{v=v_0} = \frac{1}{r v_0} > 0,$$

lo cual asegura que un incremento en v_0 mejora el bienestar económico. Por supuesto, esta segunda condición también asegura una solución única, ϕ , de la ecuación diferencial (90.19).

La ecuación (90.18) es cúbica con una raíz negativa y dos raíces positivas. Esto puede ser visto al intersectar la línea recta definida por el lado derecho de la ecuación (90.18) con la gráfica definida por el lado izquierdo de (90.18). En este caso, hay solamente una intersección que proporciona un estado estacionario único de la proporción de la riqueza asignada al consumo $w^* \in (0, 1)$.

90.4 Experimentos de política económica, estática comparativa

A continuación se obtienen varios resultados relevantes. En primer lugar, observe que un aumento permanente en la tasa de devaluación produce un aumento en el costo de oportunidad futuro de comprar bienes, lo cual conduce, a su vez, a una disminución permanente de la proporción de la riqueza destinada al consumo futuro. Para ver esto, se calcula la derivada de la ecuación (90.18) con respecto de π , lo cual lleva a

$$\frac{\partial w^*}{\partial \pi} = -\Delta^{-1} < 0, \quad (90.24)$$

donde

$$\Delta = \left[\frac{r}{(w^*)^2} + \frac{\lambda \gamma^2}{[1 + \gamma(1 - w^*)]^2} + \sigma_P^2 \right] > 0.$$

Otro resultado importante es la respuesta de los saldos monetarios reales de equilibrio, w^* , a cambios permanentes en el parámetro de intensidad, λ . Un aumento permanente en el número esperado de devaluaciones por unidad de tiempo ocasiona un incremento en el costo de oportunidad futuro de la compra de bienes. Esto, a su vez, disminuye permanentemente la proporción de la riqueza dedicada al consumo futuro. De hecho, después de calcular la derivada de la ecuación (90.18) con respecto de λ , se obtiene

$$\frac{\partial w^*}{\partial \lambda} = -\frac{\gamma}{\Delta[1 + \gamma(1 - w^*)]} < 0. \quad (90.25)$$

Un efecto equivalente es obtenido por un cambio permanente en el tamaño medio esperado de un salto, en cuyo caso se calcula la derivada de la ecuación (18) con respecto de γ , esto es,

$$\frac{\partial w^*}{\partial \gamma} = \frac{\lambda}{\Delta[1 + \gamma(1 - w^*)]^2} < 0. \quad (90.26)$$

90.5 Impacto de choques exógenos en el bienestar económico

Ahora se determinan los efectos de choques exógenos en el bienestar económico. Como siempre, el criterio de bienestar, W , del individuo representativo es la utilidad maximizada con riqueza real inicial, a_0 , y tasa impositiva inicial sobre la riqueza, τ_0 . En virtud de la ecuación (90.14), el bienestar está definido por:

$$W(\pi, \lambda, \gamma, \bar{v}; a_0, v_0) \equiv J(a_0, v_0, 0) = F(a_0, v_0) = \frac{1}{r}[1 + \ln(a_0 v_0) + \ln(\alpha^{-1} w^*)] - \frac{1}{r^2} \left[(\alpha^{-1} + r + \pi - \sigma_P^2) w^* + \frac{1}{2}(w^* \sigma_P)^2 - \bar{v} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 - \lambda \ln\left(\frac{1 + \gamma(1 - w^*)}{1 + \gamma}\right) \right], \quad (90.27)$$

donde se ha utilizado el hecho de que $\phi(v_0) = 0$.

Ahora se calculan los impactos en el bienestar económico producidos por cambios permanentes en la tasa media esperada de devaluación, la probabilidad de devaluación y el tamaño esperado de una devaluación. Primero, note que bajo el supuesto de la utilidad logarítmica, un incremento en la tasa media de devaluación reduce el bienestar económico. De hecho, al calcular la derivada de la ecuación (90.27) con respecto de π , se encuentra que

$$\frac{\partial W}{\partial \pi} = -\frac{w^*}{r^2} < 0. \quad (90.28)$$

Análogamente, los choques exógenos en la probabilidad de devaluación producirán una reducción en el bienestar económico. Para ver esto, es suficiente calcular la derivada de la ecuación (90.27) con respecto de λ

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = \frac{1}{r^2} \ln\left(\frac{1 + \gamma(1 - w^*)}{1 + \gamma}\right) < 0. \quad (90.29)$$

Por último, un aumento permanente del tamaño esperado de una devaluación reduce el bienestar económico, así

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma} = -\frac{1}{r^2} \left[\frac{\lambda w^*}{(1+\gamma)(1+\gamma(1-w^*))} \right] < 0. \quad (90.30)$$

Por último, se calculan los impactos en el bienestar económico producidos por cambios permanentes en la tasa impositiva media esperada sobre la relación de transformación entre el ingreso laboral y los activos reales \bar{v} . En este caso, se tiene

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{v}} = \frac{1}{r^2} > 0. \quad (90.31)$$

De aquí que un incremento en \bar{v} , conducirá a un incremento en el bienestar económico.

90.6 Dinámica de la riqueza y el consumo

A continuación se obtiene el proceso estocástico que genera la riqueza real del consumidor cuando las decisiones óptimas son aplicadas. Después de sustituir la proporción óptima w^* en la ecuación (90.11), se obtiene

$$da_t = a_t \left[\left(\frac{\lambda \gamma w^*}{1 + \gamma(1 - w^*)} + (w^* \sigma)^2 + v_t \right) dt - w^* \sigma dz_t + \left(\frac{1 + \gamma(1 - w^*)}{1 + \gamma} - 1 \right) dN_t \right], \quad (90.32)$$

donde

$$v_t = v_0 \exp \left\{ (\bar{v} - \frac{1}{2} \sigma_v^2) t + \mathcal{E} \sigma \sqrt{t} \right\} \quad (90.33)$$

y $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. La función de densidad de probabilidad de v_t , dado v_0 , está definida por

$$f_{v_t|v_0}(x|v_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t} \sigma_v x} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x/v_0) - (\bar{v} - \frac{1}{2} \sigma_v^2)t}{\sigma_v \sqrt{t}} \right)^2 \right\}, \quad (90.34)$$

en cuyo caso se tiene que

$$E[v_t|v_0] = v_0 e^{\bar{v}t} \quad (90.35)$$

y

$$\text{Var}[v_t|v_0] = v_0^2 e^{2\bar{v}t} (e^{\sigma_v^2 t} - 1). \quad (90.36)$$

La solución a la ecuación diferencial estocástica (90.32), sujeta a a_0 , es (véase Apéndice 90.A, fórmula (90.A.3))

$$a_t = a_0 e^{\delta_t}, \quad (90.37)$$

donde

$$\delta_t = \eta_t + \xi_t, \quad \eta_t|v_t \sim \mathcal{N}[[F(w^*) + v_t]t, G(w^*)t], \quad (90.38)$$

$$\xi_t = H(w^*) N_t \quad (90.39)$$

y¹

$$N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t). \quad (90.40)$$

Los componentes estacionarios de los parámetros de la distribución anterior son:

$$\begin{aligned} F(w^*) &= \frac{\lambda \gamma w^*}{1 + \gamma(1 - w^*)} + \frac{(w^* \sigma_P)^2}{2}, \\ G(w^*) &= (w^* \sigma_P)^2, \end{aligned} \quad (90.41)$$

y

$$H(w^*) = \ln \left(\frac{1 + \gamma(1 - w^*)}{1 + \gamma} \right).$$

¹ $x \sim \mathcal{P}(a)$ denota a variable aleatoria tipo Poisson x con media a .

Observe también que

$$\mathbb{E}[\delta_t|v_t] = [F(w^*) + v_t + H(w^*)\lambda]t \quad (90.42)$$

y

$$\text{Var}[\delta_t|v_t] = [G(w^*) + [H(w^*)]^2\lambda]t. \quad (90.43)$$

Más aún, se sigue que

$$\mathbb{E}[\delta_t] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[\delta_t|v_t]\} = [F(w^*) + v_0 e^{\bar{v}t} + H(w^*)\lambda]t \quad (90.44)$$

y

$$\text{Var}[\delta_t] = \text{Var}\{\mathbb{E}[\delta_t|v_t]\} + \mathbb{E}\{\text{Var}[\delta_t|v_t]\} = t^2 v_0^2 e^{2\bar{v}t} (e^{\sigma_t^2 t} - 1) + [G(w^*) + [H(w^*)]^2\lambda]t. \quad (90.45)$$

Aunque $F(w^*)$ siempre es positivo y $H(w^*)$ siempre es negativo para toda $0 < w^* < 1$, la media de δ_t , $\mathbb{E}[\delta_t|v_t]$, permanece positiva. En efecto, ya que $x - 1 - \log(x) \geq 0$ es válida para toda $x > 0$, se tiene que

$$\frac{\gamma w^*}{1 + \gamma(1 - w^*)} - \ln\left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma(1 - w^*)}\right) \geq 0,$$

de donde se obtiene la afirmación acerca del signo de $\mathbb{E}[\delta_t|v_t]$. Por último, observe que, en virtud de (90.37), las ecuaciones (90.44) y (90.45) determinan la media y la varianza de la velocidad a la que crece la riqueza real del individuo.

En virtud de las ecuaciones (90.6) y (90.38), el proceso estocástico para el consumo puede ser escrito como

$$c_t^* = \alpha^{-1} w^* a_0 e^{\delta_t}. \quad (90.46)$$

Esto indica que, en ausencia de mercados de derivados, el riesgo de devaluación tiene un efecto sobre la riqueza a través de la incertidumbre en δ_t , esto es, la incertidumbre modifica el conjunto de oportunidades que enfrenta el consumidor. Por otra parte, el riesgo de devaluación también afecta la composición del portafolio por medio de sus efectos sobre w^* . Por lo tanto, un cambio de política económica estará acompañado tanto por un efecto riqueza como por un efecto sustitución. Note que de la ecuación (90.46) se puede calcular la probabilidad de que, en un intervalo dado, ocurran determinados niveles de consumo. También es importante notar, considerando las ecuaciones (90.46) y (90.12), que el supuesto de una tasa subjetiva de descuento igual a la tasa de interés mundial no asegura un estado estacionario en el consumo. Sin embargo, se tiene un estado estacionario de la proporción de la riqueza que se destina para el consumo. Se puede concluir que la incertidumbre es la clave para racionalizar dinámicas de consumo más realistas que no podrían ser obtenidas a partir de modelos deterministas. Por último, observe que, en virtud de (90.46), las ecuaciones (90.44) y (90.45) determinan la media y la varianza de la velocidad a la que crece el consumo.

Apéndice 90.A

En este apéndice se establecen sin demostración dos resultados útiles en el desarrollo de este capítulo:

1) El lema de Itô para procesos combinados de difusión y saltos de Poisson, el cual puede ser enunciado de la siguiente manera. Dada la ecuación diferencial estocástica lineal y homogénea

$$dx_t = x_t(\mu dt + \sigma dz_t + \gamma dq_t), \quad z_t \sim \mathcal{N}(0, t), \quad q_t \sim \mathcal{P}(\lambda t) \quad (90.A.1)$$

y una función $g(x_t)$ con segunda derivada continua, entonces la diferencial estocástica de $g(x_t)$ está dada por

$$dg(x_t) = [g_x(x_t)\mu x_t + \frac{1}{2}g_{xx}(x_t)\sigma^2 x_t^2]dt + g_x(x_t)\sigma x_t dz_t + [g(x_t(1 + \gamma)) - g(x_t)]dq_t. \quad (90.A.2)$$

2) La solución a la ecuación (90.A.1) está dada por

$$x_t = x_0 \exp \left\{ (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \int_0^t dz_u + \ln(1 + \gamma) \int_0^t dq_u \right\}. \quad (90.A.3)$$

Es importante tener en cuenta que al utilizar (90.A.3) se cumplen las siguientes propiedades:

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t dz_u \right] = 0, \quad \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t dz_u \right)^2 \right] = \int_0^t du = t \quad \text{y} \quad \mathbb{E} \left[\int_0^t dq_u \right] = \lambda t$$

para todo $t \geq 0$.

Apéndice 90.B

En este apéndice se resuelve la ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden no homogénea, la cual aparece en la ecuación (90.20). Sea $\phi = \phi(v)$ y considere la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogénea del tipo de Euler-Cauchy

$$v^2 \phi'' + \frac{2\bar{v}}{\sigma^2} v \phi' - \frac{2r}{\sigma^2} \phi = \frac{2}{\sigma^2} \ln(v) - \frac{2}{r\sigma^2} v, \quad (90.B.1)$$

donde r y σ son constantes positivas. Para transformar la ecuación (90.B.1) en una ecuación diferencial con coeficientes constantes se aplica el método de Euler en el que se utiliza el siguiente cambio de variable $v = e^t$. Así, $t = \ln(v)$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (90.B.2)$$

y

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} = \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad (90.B.3)$$

Después de sustituir las ecuaciones (90.B.2) y (90.B.3) en la ecuación (90.B.1), se obtiene

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \left(\frac{2\bar{v}}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{2r}{\sigma^2} \phi = \frac{2}{\sigma^2} t - \frac{2}{r\sigma^2} e^t. \quad (90.B.4)$$

La solución general de esta ecuación es de la forma:

$$\phi(t) = \phi_c(t) + \phi_p(t), \quad (90.B.5)$$

donde ϕ_c es la solución complementaria asociada a la ecuación homogénea y ϕ_p es una solución particular de la ecuación no homogénea. Para determinar ϕ_c se necesita resolver la siguiente ecuación característica en λ :

$$\lambda^2 + \left(\frac{2\bar{v}}{\sigma^2} - 1 \right) \lambda - \frac{2r}{\sigma^2} = 0.$$

De aquí que la solución complementaria es

$$\phi_c(t) = \theta_2 e^{\lambda_1 t} + \theta_3 e^{\lambda_2 t}, \quad (90.B.6)$$

donde las dos raíces están dadas por

$$\lambda_1 = \frac{4r}{(2\bar{v} - \sigma^2) + \sqrt{(2\bar{v} - \sigma^2)^2 + 8r\sigma^2}}$$

y

$$\lambda_2 = \frac{4r}{(2\bar{v} - \sigma^2) - \sqrt{(2\bar{v} - \sigma^2)^2 + 8r\sigma^2}}.$$

Enseguida se determina ϕ_p , para ello se utiliza el método de coeficientes indeterminados. Se supone que la solución es de la siguiente forma:

$$\phi_p(t) = At + B + Cte^t. \quad (90.B.7)$$

Por lo tanto, $\phi'_p(t) = A + C(t+1)e^t$ y $\phi''_p(t) = C(t+2)e^t$. Posteriormente, se sustituye la ecuación (90.B.7) en la ecuación (90.B.4) para obtener

$$\left(\frac{2\bar{v}}{\sigma^2} - \frac{2r}{\sigma^2}\right)Cte^t + \left(1 + \frac{2\bar{v}}{\sigma^2}\right)Ce^t - \frac{2r}{\sigma^2}At + \left(\frac{2\bar{v}}{\sigma^2} - 1\right)A - \frac{2r}{\sigma^2}B = \frac{2}{\sigma^2}t - \frac{2}{r\sigma^2}e^t.$$

Al resolver término a término se tiene que los valores de A , B y C están dados por

$$A = -\frac{1}{r}, \quad B = \frac{1}{2r^2}(\sigma^2 - 2\bar{v}) \quad \text{y} \quad C = -\frac{2}{r(\sigma^2 + 2\bar{v})}.$$

Por lo tanto, para obtener una solución particular se debe cumplir que $\bar{v} = r$. En consecuencia,

$$\phi_p(t) = -\frac{1}{\bar{v}}t - \frac{1}{\bar{v}} + \frac{\sigma^2}{2\bar{v}^2} - \frac{2}{\bar{v}(\sigma^2 + 2\bar{v})}te^t. \quad (90.B.8)$$

Al sustituir las ecuaciones (90.B.6) y (90.B.8) en la ecuación (90.B.5), se tiene que

$$\phi(t) = \theta_2 e^{\lambda_1 t} + \theta_3 e^{\lambda_2 t} - \frac{1}{\bar{v}}t - \frac{1}{\bar{v}} + \frac{\sigma^2}{2\bar{v}^2} - \frac{2}{\bar{v}(\sigma^2 + 2\bar{v})}te^t.$$

Como $v = e^t$, la solución general de la ecuación (90.B.1), en términos de v , está dada por

$$\phi(v_t) = \theta_2 v_t^{\lambda_1} + \theta_3 v_t^{\lambda_2} - \frac{1}{\bar{v}} \ln(v_t) \left(1 + \frac{2}{(\sigma^2 + 2\bar{v})}v_t\right) + \frac{1}{\bar{v}} \left(\frac{\sigma^2}{2\bar{v}} - 1\right). \quad (90.B.9)$$

Los valores de θ_2 y θ_3 que satisfacen las condiciones iniciales $\phi(v_0) = \phi'(v_0) = 0$ son

$$\theta_2 = \frac{v_0^{-\lambda_1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{v}} \left[\lambda_2 \left(\ln(v_0) + 1 - \frac{\sigma^2}{2\bar{v}} \right) - \frac{2v_0}{2\bar{v} + \sigma^2} (1 + \ln(v_0)(1 - \lambda_2)) + 1 \right]$$

y

$$\theta_3 = \frac{v_0^{-\lambda_2}}{(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{v}} \left[-\lambda_1 \left(\ln(v_0) + 1 - \frac{\sigma^2}{2\bar{v}} \right) + \frac{2v_0}{2\bar{v} + \sigma^2} (1 + \ln(v_0)(1 - \lambda_1)) + 1 \right].$$

90.7 Bibliografía sugerida

- Merton, R. C. (1969). "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous Time Case". *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 51, No. 3, pp. 247-257.
- Merton, R. C. (1971). "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model". *Journal of Economic Theory*, Vol. 3, No. 4, pp. 373-413.
- Venegas-Martínez, F. (2006). Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks. *Economic Modelling*, Vol. 23, No. 1, pp. 157-173.
- Venegas-Martínez, F. (2006). "Estabilización de precios e ingreso laboral incierto: un enfoque estocástico", *Investigación Económica*, Vol. 65, No. 256, pp. 45-69.

90.8 Ejercicios

90.1 Efectúe el mismo análisis de este capítulo con un candidato de la forma

$$J(a_t, v_t, t) = \max_w \mathbb{E}_t \left\{ \int_t^\infty \ln(c_s) e^{-rs} ds \mid \mathcal{F}_t \right\} = \frac{e^{-rt}}{r} [\ln(a_t) + g(v_t, t)].$$

90.2 Realice el mismo análisis de este capítulo considerando la función de utilidad $u(c_t) = c_t^\gamma / \gamma$.

CAPÍTULO 91

MAXIMIZACIÓN DE UTILIDAD Y VALUACIÓN DE OPCIONES CON VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

Conceptos básicos de este capítulo:

- Maximización de utilidad
- Volatilidad estocástica
- Ecuación diferencial parcial del precio de una opción con volatilidad estocástica

91.1 Introducción

En esta sección se obtiene, a través de agentes racionales maximizadores de utilidad, la ecuación diferencial parcial que caracteriza el precio (valor) de una opción europea de compra cuando la volatilidad es estocástica. En particular, se supone que la volatilidad es conducida por un movimiento geométrico Browniano. Se supone que los agentes tienen acceso a tres activos financieros: una acción, una opción sobre la acción y un bono libre de riesgo de incumplimiento que paga tasa fija. Se supone también que no hay impuestos y que no existen costos de transacción en el mantenimiento del portafolio, es decir, no hay comisiones.

91.2 Planteamiento del problema de valuación

Se supone que el precio del activo subyacente, S_t , sigue un movimiento geométrico Browniano, cuya volatilidad al cuadrado (la varianza), $\sigma_t^2 = V_t$, es conducida por otro movimiento geométrico Browniano, es decir,

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \\ dV_t = \alpha V_t dt + \beta V_t dZ_t, \end{cases} \quad (91.1)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ es el parámetro de tendencia del subyacente, $\alpha \in \mathbb{R}$ es la tendencia de la varianza y $\beta > 0$ es la volatilidad de la varianza, las cuales son cantidades conocidas. Asimismo, se supone que los movimientos Brownianos dW_t y dZ_t están correlacionados entre sí, de tal forma que

$$\text{Cov}(dW_t, dZ_t) = \rho dt.$$

Observe, por último, que no se considera el pago de dividendos.

Considere ahora un consumidor-inversionista racional que tiene acceso a tres diferentes activos: una acción de precio S_t , una opción sobre la acción de precio $c = c(S_t, V_t, t)$ y un bono libre de riesgo de incumplimiento que paga una tasa constante r . El bono también puede verse como un depósito bancario que paga tasa r . Como siempre, se supone que el precio de una opción europea de compra, c , depende de las variables de estado, esto es, $c = c(S_t, V_t, t)$. En lo subsecuente, a_t denotará la riqueza real del agente al instante t . Las proporciones de la riqueza que el agente asigna a la tenencia de los diferentes activos, la acción, el derivado y el bono serán denotadas, respectivamente, por x_t , y_t y $1 - x_t - y_t$. La ecuación de evolución de la riqueza real (restricción presupuestal) está dada por

$$da_t = x_t a_t dR_S + y_t a_t dR_c + (1 - x_t - y_t) a_t r dt - c_t dt,$$

donde $dR_S = dS_t/S_t$ y $dR_c = dc/c$. Es importante destacar la diferencia entre c y c_t , el primer caso se refiere al precio de la opción y el segundo al bien de consumo. Ahora bien, de acuerdo con el lema de Itô, se tiene que el precio de la opción sigue una ecuación de la forma

$$dc = \mu_c c dt + \sigma_c c dW_t + \xi_c c dZ_t, \quad (91.2)$$

donde los coeficientes μ_c , σ_c y ξ_c están dados, respectivamente, por:

$$\mu_c = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \alpha V_t \frac{\partial c}{\partial V_t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \beta^2 V_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} + \rho \beta V_t \sigma_t S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t} \right), \quad (91.3)$$

$$\sigma_c = \frac{1}{c} \sigma_t S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} \quad (91.4)$$

y

$$\xi_c = \frac{1}{c} \beta V_t \frac{\partial c}{\partial V_t}. \quad (91.5)$$

Ahora bien, en virtud de (91.1) y (91.2), la ecuación de evolución de la riqueza se puede reescribir como:

$$da_t = a_t \left[r + (\mu - r)x_t + (\mu_c - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] dt + a_t(x_t \sigma_t + y_t \sigma_c) dW_t + a_t y_t \xi_c dZ_t. \quad (91.6)$$

En lo que sigue, la función de utilidad (satisfacción) del agente por el consumo de un bien genérico, c_t , se denotará mediante $u(c_t)$. Suponga que la función de utilidad indirecta, o bienestar económico, del individuo está dada por:

$$J(a_t, V_t, t) = \max_{\{c_t, x_t, y_t\}} \mathbb{E} \left[\int_t^T u(c_s) e^{-\delta s} ds + b(a_T, T) \mid \mathcal{F}_t \right], \quad (91.7)$$

sujeta a la ecuación (91.6). El parámetro $\delta > 0$ determina la tasa subjetiva de descuento del individuo, \mathcal{F}_t denota la información relevante disponible al tiempo t y $b(a_T, T)$ representa la función de legado (herencia o salvamento) en T . Observe que también T representa la fecha de ejercicio de la opción. Por último, se supone que $u(\cdot)$ satisface $u' > 0$ y $u'' < 0$, es decir, la función de utilidad es estrictamente creciente y cóncava. En otras palabras, la utilidad marginal es positiva pero decreciente.

A continuación se emplean varias formas funcionales de la función de utilidad para obtener la ecuación diferencial parcial que caracteriza el precio de la opción.

91.3 Función de utilidad con coeficiente constante de aversión al riesgo

En esta sección se supone que la función de utilidad tiene la siguiente forma funcional:

$$u(c_t) = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} \quad (91.8)$$

y que el término de legado es

$$b(a_T, T) = e^{-\delta T} \frac{a_T^\gamma}{\gamma}, \quad (91.9)$$

donde γ es el parámetro de aversión al riesgo. Observe que si $\gamma = 1$ el inversionista es neutral al riesgo, mientras que si $0 < \gamma < 1$, el inversionista es adverso al riesgo. El caso $\gamma = 0$ corresponde a la función de utilidad logarítmica, la cual se estudiará más adelante.

Para resolver el problema (91.7), con la función de utilidad de (91.8), se utilizará la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Es decir, la función $J = J(a_t, V_t, t)$, expresada en (91.7), debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden:

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} & \left\{ \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial a_t} a_t \left[r + (\mu - r)x_t + (\mu_c - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2} a_t^2 [(x_t \sigma_t + y_t \sigma_c)^2 + y_t^2 \xi_c^2 + 2(x_t \sigma_t + y_t \sigma_c) y_t \xi_c \rho] + \frac{\partial J}{\partial V_t} \alpha V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial V_t^2} \beta^2 V_t^2 \\ & \left. + \frac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t} a_t \beta V_t [(x_t \sigma_t + y_t \sigma_c) \rho + y_t \xi_c] \right\}. \end{aligned} \quad (91.10)$$

Al igualar a cero las derivadas parciales de (91.10) con respecto de c_t , x_t y y_t , se obtienen las siguientes condiciones necesarias para un máximo:

$$e^{-\delta t} c_t^{\gamma-1} - \frac{\partial J}{\partial a_t} = 0, \quad (91.11)$$

$$\mu - r = -\left(x_t \sigma_t + y_t \sigma_c + y_t \xi_c \rho\right) \sigma_t a_t \frac{\frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2}}{\frac{\partial J}{\partial a_t}} - \sigma_t \beta V_t \rho \frac{\frac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial J}{\partial a_t}} \quad (91.12)$$

y

$$\mu_c - r = -\left[(y_t \sigma_c + x_t \sigma_t) \sigma_c + y_t \xi_c^2 + (x_t \sigma_t + y_t \sigma_c) \xi_c \rho + y_t \sigma_c \xi_c \rho\right] a_t \frac{\frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2}}{\frac{\partial J}{\partial a_t}} - (\rho \sigma_c + \xi_c) \beta V_t \frac{\frac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial J}{\partial a_t}}. \quad (91.13)$$

Se propone un candidato de solución de la forma:

$$J(a_t, V_t, t) = e^{-\delta t} g(V_t, t) \frac{a_t^\gamma}{\gamma}, \quad (91.14)$$

el cual separa variables (multiplicativamente). La función $g(V_t, t)$ es conocida como el coeficiente del premio al riesgo. Este nombre se justifica a continuación. Observe primero que a partir de (91.14), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_t} &= e^{-\delta t} g(V_t, t) a_t^{\gamma-1}, \\ \frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2} &= (\gamma - 1) e^{-\delta t} g(V_t, t) a_t^{\gamma-2} \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t} = e^{-\delta t} \frac{\partial g}{\partial V_t} a_t^{\gamma-1}.$$

En virtud de estas ecuaciones, el coeficiente de aversión al riesgo, el cual aparece explícitamente en (9.12) y (9.13), satisface

$$-a_t \frac{\frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2}}{\frac{\partial J}{\partial a_t}} = 1 - \gamma = -c_t \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)},$$

en donde $-c_t u''(c_t)/u'(c_t)$ es la elasticidad de la utilidad marginal (coeficiente relativo de aversión al riesgo). Además,

$$\frac{\frac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t}}{\frac{\partial J}{\partial a_t}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)} = \frac{1}{V_t} \frac{\partial g}{\partial V_t} \frac{V_t}{g} = \frac{1}{V_t} \varepsilon_{g,V},$$

en donde $\varepsilon_{g,V}$ es la elasticidad de g con respecto de V_t . Para obtener la ecuación diferencial parcial que determina el precio de la opción se requiere una solución de esquina. En particular, se requiere que haya inversión en la acción, pero no en la opción ni en el bono libre de riesgo. Al sustituir $x_t = 1$ y $y_t = 0$ en las ecuaciones (91.11), (91.12) y (91.13), éstas se transforman, respectivamente, en:

$$c_t^{\gamma-1} = g(V_t, t) a_t^{\gamma-1}, \quad (91.15)$$

$$\mu - r = (1 - \gamma) \sigma_t^2 - \rho \sigma_t \beta V_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)} \quad (91.16)$$

y

$$\mu_c - r = (1 - \gamma) \sigma_t (\sigma_c + \xi_c \rho) - (\sigma_c \rho + \xi_c) \beta V_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)}. \quad (91.17)$$

En particular, los premios al riesgo para el activo subyacente y el producto derivado están dados por las ecuaciones:

$$\lambda_S = \frac{\mu - r}{\sigma_t} = (1 - \gamma)\sigma_t - \rho\beta V_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)} \quad (91.18)$$

y

$$\lambda_c = \frac{\mu_c - r}{\sigma_c} = \left(1 + \frac{\xi_c}{\sigma_c}\rho\right)(1 - \gamma)\sigma_t - \left(\rho + \frac{\xi_c}{\sigma_c}\right)\beta V_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)}.$$

A partir de las ecuaciones anteriores se puede concluir que

$$\lambda_c = \lambda_S + \frac{\xi_c}{\sigma_c}\rho(1 - \gamma)\sigma_t - \frac{\xi_c}{\sigma_c} \left(\frac{\beta V_t}{g} \right) \frac{\partial g}{\partial V_t},$$

la cual conduce a

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2} V_t S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} - r c + \left[\alpha V_t - \beta V_t \rho (1 - \gamma) \sigma_t + \left(\frac{\beta^2 V_t^2}{g} \right) \frac{\partial g}{\partial V_t} \right] \frac{\partial c}{\partial V_t} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} \beta^2 V_t^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t} \beta V_t^{3/2} S_t \rho = 0, \end{aligned} \quad (91.19)$$

junto con la condición de frontera $c(S_t, V_t, T) = \max(S_t - K, 0)$. Asimismo, la ecuación (91.10) se simplifica si se sustituye el candidato de solución J y la solución de esquema $x_t = 1$ y $y_t = 0$, en cuyo caso se obtiene

$$0 = \frac{g^{\gamma/(\gamma-1)}}{\gamma} - \frac{\delta}{\gamma} g + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial g}{\partial t} + \mu g - g^{\gamma/(\gamma-1)} + \frac{1}{2} (\gamma - 1) V_t g + (\alpha V_t + \gamma \sigma_t \beta V_t \rho) \frac{1}{\gamma} \frac{\partial g}{\partial V_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta^2 V_t^2}{\gamma} \right) \frac{\partial^2 g}{\partial V_t^2}, \quad (91.20)$$

donde se ha utilizado que

$$c_t = [g(V_t, t)]^{1/(\gamma-1)} a_t \quad \text{y} \quad \frac{\partial J}{\partial t} = \left(-\delta g + \frac{\partial g}{\partial V_t} \right) e^{-\delta t} \frac{a_t^\gamma}{\gamma}.$$

De esta manera, la ecuación (91.20) se transforma en

$$0 = -\frac{\partial g}{\partial t} + (\gamma - 1) g^{\gamma/(\gamma-1)} + \left[(\delta - \mu \gamma) - \frac{1}{2} \gamma (\gamma - 1) V_t \right] g - (\alpha V_t + \gamma \beta V_t^{3/2} \rho) \frac{\partial g}{\partial V_t} - \frac{1}{2} \beta^2 V_t^2 \frac{\partial^2 g}{\partial V_t^2}. \quad (91.21)$$

La condición de frontera, en este caso, es $g(V_t, T) = 1$, lo cual asegura que se satisface el valor del legado en (91.9). Como puede observarse, se requiere la solución de (91.21), $g = g(V_t, t)$, a fin de sustituirla en (91.20) y poder resolver esta última en $c(S_t, V_t, t)$.

La ecuación (91.19) indica cómo ajustar el proceso estocástico que sigue el precio del activo subyacente, dado en la ecuación (91.1). En este caso,

$$\begin{cases} dS_t = r S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \\ dV_t = \left[\alpha V_t - \beta V_t \rho (1 - \gamma) \sigma_t + \left(\frac{\beta^2 V_t^2}{g} \right) \frac{\partial g}{\partial V_t} \right] dt + \beta V_t dZ_t. \end{cases}$$

91.4 Función de utilidad logarítmica

Considere de nuevo un consumidor racional con vida infinita maximizador de utilidad. Se supone una función de utilidad logarítmica, lo cual conduce a que el consumidor es adverso al riesgo. Como antes, se supone que el consumidor tiene acceso a un activo libre de riesgo (de cumplimiento), por ejemplo un bono cupón cero, una acción con riesgo y una opción sobre dicha

acción. Se supone que la función de utilidad esperada al tiempo t de un individuo representativo y competitivo tiene la siguiente forma:

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T \ln(c_s) e^{-\delta s} ds + \ln(a_T) \frac{e^{-\delta T}}{\delta} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad (91.22)$$

donde δ es la tasa subjetiva de descuento y \mathcal{F}_t es la información disponible al tiempo t .

El consumidor representativo posee tres diferentes activos, en términos reales: un título de deuda de precio b_t , una acción de precio S_t y una opción europea de compra de precio $c(S_t, V_t, t)$ sobre la acción. En consecuencia, la riqueza real, a_t , del individuo está dada por:

$$a_t = b_t + S_t + c(S_t, V_t, t). \quad (91.23)$$

Sea $x_t = S_t/a_t$ la proporción de la riqueza que el consumidor asigna a la tenencia de títulos de capital, $y_t = c/a_t$ la proporción de la riqueza que el consumidor asigna a la tenencia de opciones y $1 - x_t - y_t = b_t/a_t$ la proporción de la riqueza que el consumidor destina a títulos de deuda. De esta manera, la evolución de la acumulación de la riqueza real sigue la ecuación diferencial estocástica de la forma

$$da_t = a_t x_t dR_S + a_t y_t dR_c + a_t (1 - x_t - y_t) dR_b - c_t dt, \quad (91.24)$$

donde dR_S es el rendimiento del activo con riesgo, dR_c es el rendimiento de la opción y $dR_b = rdt$ el rendimiento del bono. Es importante distinguir entre las cantidades $c = c(S_t, V_t, t)$ y c_t , la primera representa el precio de la opción y la segunda el consumo. Suponga que

$$dR_S = \mu dt + \sigma_t dW_t, \quad (91.25)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma_t \geq 0$ y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}^W)$ y

$$dV_t = \alpha V_t dt + \beta V_t dZ_t, \quad (91.26)$$

donde $V_t = \sigma_t^2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración $(\Omega^Z, \mathcal{F}^Z, \{\mathcal{F}_t^Z\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}^Z)$. Suponga que

$$\text{Cov}(dW_t, dZ_t) = \rho dt.$$

Durante el intervalo de tiempo $[t, t + dt]$, el activo subyacente cambia de S_t a $S_t + dS_t$, en consecuencia, el precio de la opción cambia de $c(S_t, V_t, t)$ a $c + dc$. El cambio marginal en el precio de la opción se obtiene mediante el lema de Itô como:

$$\begin{aligned} dc &= \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial c}{\partial V_t} \alpha V_t + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \beta^2 V_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} + \sigma_t \beta S_t V_t \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t} \right) dt \\ &\quad + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma_t S_t dW_t + \frac{\partial c}{\partial V_t} \beta V_t dZ_t \end{aligned}$$

ó

$$dc = \mu_c c dt + \sigma_c c dW_t + \xi_c c dZ_t,$$

donde

$$\mu_c = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial c}{\partial V_t} \alpha V_t + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \beta^2 V_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} + \sigma_t \beta S_t V_t \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t} \right) / c, \quad (91.27)$$

$$\sigma_c = \frac{\partial c}{\partial S_t} \frac{\sigma_t S_t}{c} \quad (91.28)$$

y

$$\xi_c = \frac{\partial c}{\partial V_t} \frac{\beta V_t}{c}. \quad (91.29)$$

Si se sustituye (91.25) y la ecuación anterior a (91.27) en (91.24), se tiene que

$$da_t = a_t \left[r + (\mu - r)x_t + (\mu_c - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] dt + a_t [(\sigma_t x_t + \sigma_c y_t) dW_t + y_t \xi_c dZ_t]. \quad (91.30)$$

Sea

$$J(a_t, V_t, t) = \max_{c_t, x_t, y_t} E \left[\int_t^T \ln(c_s) e^{-\delta s} ds + \ln(a_T) \frac{e^{-\delta T}}{\delta} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

La condición necesaria del problema de control óptimo estocástico en el que el consumidor racional maximizar la utilidad total queda expresado como:

$$\begin{aligned} 0 &= \ln(c_t) e^{-\delta t} + J_t + J_a a_t \left[r + (\mu - r)x_t + (\mu_c - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} J_{aa} a_t^2 \left[(\sigma_t x_t + \sigma_c y_t)^2 + \xi_c^2 y_t^2 + 2(\sigma_t x_t + \sigma_c y_t) \xi_c y_t \rho \right] \\ &\quad + J_V \alpha V_t + \frac{1}{2} J_{VV} \beta^2 V_t^2 + J_{aV} a_t V_t \beta [(\sigma_t x_t + \sigma_c y_t) \rho + \xi_c y_t]. \end{aligned}$$

Considere el siguiente candidato de solución

$$J(a_t, V_t, t) = [\ln(a_t) + g(V_t, t)] \frac{1}{\delta} e^{-\delta t}.$$

En este caso, se sigue que $g(V_t, T) = 0$. Asimismo,

$$\begin{aligned} 0 &= \ln(c_t) - [\ln(a_t) + g(V_t, t)] + \frac{1}{\delta} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{\delta} \left[r + (\mu - r)x_t + (\mu_c - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\delta} \left[(\sigma_t x_t + \sigma_c y_t)^2 + \xi_c^2 y_t^2 + 2(\sigma_t x_t + \sigma_c y_t) \xi_c y_t \rho \right] + \frac{\alpha}{\delta} \frac{\partial g}{\partial V_t} V_t + \frac{\beta^2}{2\delta} \frac{\partial^2 g}{\partial V_t^2} V_t^2. \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son

$$c_t = \delta a_t, \quad (91.31)$$

$$\mu - r = (\sigma_t x_t + \sigma_c y_t) \sigma_t + \xi_c y_t \sigma_t \rho$$

y

$$\mu_c - r = (\sigma_t x_t + \sigma_c y_t) \sigma_c + y_t \xi_c^2 + (\sigma_t x_t + \sigma_c y_t) \xi_c \rho + y_t \sigma_c \xi_c \rho. \quad (91.32)$$

Las dos últimas condiciones se pueden reescribir como

$$\lambda_S \equiv \frac{\mu - r}{\sigma_t} = \sigma_t x_t + \sigma_c y_t + \xi_c y_t \rho \quad (91.33)$$

y

$$\lambda_c \equiv \frac{\mu_c - r}{\sigma_c} = \sigma_t x_t + \sigma_c y_t + y_t \frac{\xi_c^2}{\sigma_c} + (\sigma_t x_t + \sigma_c y_t) \rho \frac{\xi_c}{\sigma_c} + y_t \xi_c \rho.$$

Al sustituir (91.33) en la expresión anterior, se tiene que

$$\lambda_c = \lambda_S \left(1 + \rho \frac{\xi_c}{\sigma_c} \right) + y_t \frac{\xi_c^2}{\sigma_c} (1 - \rho^2). \quad (91.34)$$

Si $y_t = 0$ y $x_t = 1$, entonces

$$\lambda_c = \lambda_S \left(1 + \rho \frac{\xi_c}{\sigma_c} \right). \quad (91.35)$$

Después de sustituir (91.27), (91.28) y (91.29) en la ecuación anterior, se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 - r c + (\alpha - \lambda \beta) \frac{\partial c}{\partial V_t} V_t + \frac{1}{2} \beta^2 V_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial S_t V_t} \beta S_t V_t^{3/2} \rho = 0,$$

donde

$$\lambda \equiv \lambda_S \rho.$$

Si se sustituyen $x_t = 1$ y $y_t = 0$ en la condición HJB, se tiene que

$$0 = \log(\delta) - g + \frac{1}{\delta} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\mu}{\delta} - 1 - \frac{1}{2\delta} \sigma_t^2 + \frac{\alpha}{\delta} \frac{\partial g}{\partial V_t} V_t + \frac{1}{2\delta} \frac{\partial^2 g}{\partial V_t^2} \beta^2 V_t^2.$$

Ahora bien, en virtud de (91.33), se sigue que $\sigma_t^2 = \mu - r$. De esta manera,

$$0 = \delta[\log(\delta) - 1] + \frac{1}{2}(\mu + r) - \delta g + \frac{\partial g}{\partial t} + \alpha \frac{\partial g}{\partial V_t} V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial V_t^2} \beta^2 V_t^2$$

junto con la condición de frontera $g(V_t, T) = 0$. La solución de esta ecuación diferencial parcial es independiente de V_t y está dada por

$$g(t) = A - Ae^{-\delta(T-t)}.$$

donde

$$A = \log(\delta) - 1 + \frac{1}{2\delta}(\mu + r).$$

Observe que g satisface

$$\frac{dg}{dt} = \delta g - \delta A$$

y $g(T) = 0$.

91.5 Bibliografía sugerida

- Lewis, A. L. (2000). Option Valuation Under Stochastic Volatility: With Mathematica Code, Finance Press. U. K.
 Venegas-Martínez, F. y G. P. Aguilar (2004). “Maximización de utilidad y valuación de derivados con volatilidad estocástica”. *Revista Mexicana de Economía y Finanzas, REMEF*, Vol. 4, No. 2, pp. 73-82.

91.6 Ejercicios

- 91.1** Repita el análisis de la sección 91.3 con $b(a_T, T) = a_T^\gamma / \delta \gamma$ y con el siguiente candidato de solución

$$J(a_t, V_t, t) = \left[\frac{a_t^\gamma}{\gamma} + g(V_t, t) \right] \frac{1}{\delta} e^{\delta t}.$$

¿Se modifica la ecuación diferencial parcial que caracteriza a c ? Discuta los resultados.

- 91.2** Repita el análisis de la sección 91.4 con el siguiente candidato de solución

$$J(a_t, V_t, t) = \ln(a_t) g(V_t, t) \frac{1}{\delta} e^{-\delta t}.$$

Muestre que

$$0 = \delta[\log(\delta) - 1] + \frac{1}{2}(\mu + r) - \delta g + \frac{\partial g}{\partial t} + \alpha \frac{\partial g}{\partial V_t} V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial V_t^2} \beta^2 V_t^2, \quad g(V_t, T) = 1.$$

Verifique que en este caso la solución está dada por:

$$g(V_t, t) = g(t) = A + (1 - A) e^{-\delta(T-t)},$$

donde

$$A = \log(\delta) - 1 + \frac{1}{2\delta}(\mu + r).$$

¿Cambió la ecuación diferencial parcial que caracteriza a c ?

91.3 Muestre que si $\rho = \pm 1$, la ecuación (91.19) satisface

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2} V_t S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} - r c + (\alpha - \lambda_S \beta) \frac{\partial c}{\partial V_t} V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} \beta^2 V_t^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t} \beta V_t^{3/2} S_t = 0,$$

con la condición de frontera $c(S_t, V_t, T) = \max(S_t - K, 0)$.

91.4 Considere la función de utilidad hiperbólica, la cual está dada por:

$$u(c_t) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{\phi c_t}{1-\gamma} + \eta \right)^\gamma$$

y

$$b(a_T, T) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{\phi a_T}{1-\gamma} + \eta \right)^\gamma e^{-\delta T},$$

donde ϕ , γ , δ y η son constantes. Obtenga la ecuación diferencial parcial que determina el precio de una opción europea con volatilidad estocástica conducida por un movimiento geométrico Browniano.

Solución: Observe primero que la utilidad marginal está dada por

$$\frac{\partial u}{\partial c_t} = \phi \left(\frac{\phi c_t}{1-\gamma} + \eta \right)^{\gamma-1}.$$

Se propone como candidato de solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman una función de la forma:

$$J(a_t, V_t, t) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{\phi a_t}{1-\gamma} + \eta \right)^\gamma g(V_t, t) e^{-\delta t},$$

esto implica que

$$\frac{\partial J}{\partial a_t} = \phi \left(\frac{\phi a_t}{1-\gamma} + \eta \right)^{\gamma-1} g(V_t, t) e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2} = -\phi^2 \left(\frac{\phi a_t}{1-\gamma} + \eta \right)^{\gamma-2} g(V_t, t) e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial J}{\partial V_t} = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{\phi a_t}{1-\gamma} + \eta \right)^\gamma \frac{\partial g}{\partial V_t} e^{-\delta t}$$

y

$$\frac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t} = \phi \left(\frac{\phi a_t}{1-\gamma} + \eta \right)^{\gamma-1} \frac{\partial g}{\partial V_t} e^{-\delta t}.$$

Al sustituir estas ecuaciones en las condiciones de primer orden y utilizando una solución de esquina, se obtienen las ecuaciones:

$$\left(\frac{\phi c_t}{1-\gamma} + \eta \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{\phi a_t}{1-\gamma} + \eta \right)^{\gamma-1} g(V_t, t),$$

$$\mu - r = V_t \phi \left(\frac{\phi a_t}{1-\gamma} + \eta \right)^{-1} - \sigma_t \beta V_t \rho \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)}$$

y

$$\mu_c - r = (\sigma_c + \xi_c \rho) \sigma_t \phi \left(\frac{\phi a_t}{1-\gamma} + \eta \right)^{-1} - (\sigma_c \rho + \xi_c) \beta V_t \frac{\frac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)}.$$

Equivalentemente,

$$\lambda_S = \sigma_t \phi \left(\frac{\phi a_t}{1 - \gamma} + \eta \right)^{-1} - \beta V_t \rho \left(\frac{1}{g} \right) \frac{\partial g}{\partial V_t}$$

y

$$\lambda_c = \left(1 + \frac{\xi_c}{\sigma_c} \rho \right) \sigma_t \phi \left(\frac{\phi a_t}{1 - \gamma} + \eta \right)^{-1} - \left(\rho + \frac{\xi_c}{\sigma_c} \right) \beta V_t \left(\frac{1}{g} \right) \frac{\partial g}{\partial V_t}.$$

Por lo tanto,

$$\lambda_c = \lambda_S + \frac{\xi_c}{\sigma_c} \rho \left[\lambda_S + \beta V_t \rho \left(\frac{1}{g} \right) \frac{\partial g}{\partial V_t} \right] - \frac{\xi_c}{\sigma_c} \beta V_t \left(\frac{1}{g} \right) \frac{\partial g}{\partial V_t}$$

o

$$\begin{aligned} \lambda_c &= \left(1 + \frac{\xi_c}{\sigma_c} \rho \right) \lambda_S - \frac{\xi_c}{\sigma_c} \beta V_t \left(\frac{1}{g} \right) \frac{\partial g}{\partial V_t} (1 - \rho^2) \\ &= \lambda_S + \frac{\xi_c}{\sigma_c} \left[\rho \lambda_S - \beta V_t \left(\frac{1}{g} \right) \frac{\partial g}{\partial V_t} (1 - \rho^2) \right]. \end{aligned}$$

La ecuación anterior conduce a

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2} V_t S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} - r c + \left[\alpha V_t - \beta V_t \rho \lambda_S - \left(\frac{\beta^2 V_t^2}{g} \right) \frac{\partial g}{\partial V_t} (1 - \rho^2) \right] \frac{\partial c}{\partial V_t} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} \beta^2 V_t^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t} \beta V_t \sigma_t S_t \rho = 0. \end{aligned}$$

Observe ahora que

$$c_t = \left(a_t + \frac{1 - \gamma}{\phi} \eta \right) g(V_t, t)^{1/(\gamma-1)} - \frac{1 - \gamma}{\phi} \eta.$$

Continue el análisis sobre la función g .

91.5 Repita el ejercicio anterior con

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}.$$

91.6 Repita el ejercicio anterior con

$$u(c_t) = -\frac{1}{\theta} e^{-\theta c_t}.$$

91.7 En la sección 91.4 modifique la función objetivo de tal manera que se desea maximizar

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T \ln(c_s) e^{-\delta s} ds \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Repita el análisis con un candidato de la forma

$$J(a_t, V_t, t) = \left(\frac{e^{\delta t} - e^{\delta T}}{\delta} \right) \ln(a_t) + g(V_t, t).$$

BIBLIOGRAFÍA

- Abramowitz, M. and I. A. Stegun (1972). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing, New York, Dover.
- Acerbi, C. (2001). Risk Aversion and Coherent Risk Measures: A Spectral Representation Theorem. Manuscript, Abaxbank, Italy.
- Adams, K. and D. Van Deventer (1994). "Fitting Yield Curves and Smooth Forward Rate Curves with Maximum Smoothness". *Journal of Fixed Income*, Vol. 4, No. 1, pp. 52-62.
- Ahn, D., J. Boudoukh, M. Richardson, and R. F. Whitelaw (1999). "Optimal Risk Management Using Options". *The Journal of Finance*, Vol. 54, No. 1, pp. 359-375.
- Altman, E. I. (1968). "Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy". *Journal of Finance*, Vol. 23, No. 4, pp. 589-609.
- Amram, M. and N. Kulatilaka (1999), Real Options Managing Strategic Investment in an Uncertain World, Harvard Business School Press, Boston Massachusetts.
- Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath (1999). "Coherent Measures of Risk". *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, pp. 203-228.
- Bachelier, L. (1900). Théorie de la Speculation, Thèse de Docteur ès Sciences Mathématiques. Université Paris Sorbonne. Gauthier-Villars, Paris.
- Bachelier, L. (1964). Theory of Speculation. Translation from the French edition. P. H. Cootner, editor, in The Random Character of Stock Market Prices, Cambridge, The MIT Press, pp. 17-79.
- Ball, C. A. and W. N. Torous (1985). "On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing". *The Journal of Finance*, Vol. 40, No. 1, pp. 155-173.
- Barone-Adesi, G. and R. E. Whaley (1987). "Efficient Analytic Approximation of American Option Values". *Journal of Finance*, Vol. 42, No. 2, pp. 301-320.
- Bauer, H. (1981). Probability Theory and Elements of Measure Theory. Academic Press, London.
- Beaglehole, D. and M. Tenney (1992). "Corrections and Additions to a Nonlinear Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial Economics*, Vol. 32, No. 3, pp. 345-353.
- Bellman, R. (1957). Dynamic Programming. Princeton University Press. Princeton, N. J.
- Bellman, R. and S. Dreyfus (1962). Applied Dynamic Programming. Princeton University Press. Princeton, N. J.
- Bertsekas, D. P. (2001). Dynamic Programming and Optimal Control. 2nd Edition. Publisher. Athena Scientific.
- Bingham, N. H. and R. Kiesel (1998). Risk-Neutral Valuation, Pricing and Hedging of Financial Derivatives. Series Springer Finance. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
- Black, F. (1976). "The pricing of commodity contracts". *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1-2, pp. 167-179.
- Black, F., E. Derman, and W. Toy (1990). "A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal*, Vol. 46, No. 1, pp. 33-39.
- Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- Boer, F. P. (2002). The Real Options, Solution. Finding Total Value in a High-Risk World, John Wiley & Sons, Inc.
- Boyarchenko, S. I. and S. Z. Levendorskii (2002). Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory. Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability. World Scientific Publishing Company, New Jersey, USA.

- Brennan, M. J. and E. S. Schwartz (1979). "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds". *Journal of Banking and Finance*, Vol. 3, No. 2, pp. 133-155.
- Brenner, M. and M. G. Subrahmanyam (1998). "A Simple Approach to Option Valuation and Hedging in the Black-Scholes Model". *Financial Analysts Journal*, Vol. 50, No. 2, pp. 25-28.
- Brigo, D. and F. Mercurio (2001). Interest Rate Models Theory and Practice. Springer-Verlag, Berlin, New York.
- Browder, F. E. (1984). The One-Dimensional Heat Equation (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). Cambridge University Press.
- Brown, R. (1828). A Brief Account on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies. *Edinburgh New Philosophical Journal*, July-September, pp. 358-371.
- Brown, R. (1828). A Brief Account of Microscopical Observations on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies. Unpublished.
- Brown, R. (1829). "Additional Remarks on Active Molecules". Unpublished.
- Chua, J. H. (1984). "A Closed-Form Formula for Calculating Bond Duration". *Financial Analysts Journal*, Vol. 40, No. 3, pp. 76-78.
- Clebaner, F. C. (1999). Introduction to Stochastic Processes with Applications. Imperial College Press, London.
- Cont, R. and P. Tankov (2004). Financial Modelling with Jump Processes. Chapman & Hall/CRC, London.
- Conze, A. and Viswanathan (1991). "Path Dependent Options: The Case of Lookback Options". *The Journal of Finance*, Vol. 46, No. 5, pp. 1893-1907.
- Copeland, T. and V. Antikarov (2003). Real Options, A Practitioner's Guide. Thomson Texere.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1981). "The Relation between Forward Prices and Futures Prices". *Journal of Financial Economics*, Vol. 9, No. 4, pp. 321-346.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1985). "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices." *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 385-408.
- Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates." *Econometrica*, Vol. 53, No. 2, pp. 363-384.
- Cox, J. and S. A. Ross (1976), "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes." *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 2, pp. 145-166.
- Cox, J. C., S. A. Ross, and M. Rubinstein (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach". *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, No. 3, pp. 229-263.
- Cruz, M. G. (2002). Modeling, Measuring and Hedging Operational Risk. John Wiley & Sons.
- Cuthbertson, K. and D. Nitzsche (2001). Financial Engineering, Derivatives and Risk Management. John Wiley & Sons, Inc.
- Das, S. (1996). Structured Notes and Derivative Embedded Securities. Euromoney Publications.
- De Boor, C. (2001). A Practical Guide to Splines. Springer-Verlag, New York, Berlin.
- Díaz-Tinoco, J. y F. Venegas-Martínez (2004). "Márgenes con spread intraclasses para el mercado mexicano de derivados". *El Trimestre Económico*, Vol. 71(3), No. 283, pp. 681-716.
- Díaz-Tinoco, J. y F. Venegas-Martínez (2001). "Política agrícola y contratos de futuros: un modelo de arbitraje". *Momento Económico*, No. 115, pp. 2-21.
- Dixit, A. K and R. S. Pindyck (1994). Investment under Uncertainty. Princeton University Press, Princeton N. J.
- Duffie, D. and J. Pan (1997). "An Overview of Value at Risk". *Journal of Derivatives*, Vol. 4, No. 3, pp. 7-49.
- Delbaen, F. and S. Lorimier (1992). "Estimation of the Yield Curve and the Forward Rate Curve Starting from a Finite Number of Observations". *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 11, No. 4, pp. 259-269.
- Delbaen, F. (2000). Coherent Risk Measures on General Probability Spaces. Manuscript, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.

- Dewynne, J. N., A. E. Whalley, and P. Wilmott (1994). "Path-Dependent Options and Transaction Costs". *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering*, Vol. 347, No. 1684, Mathematical Models in Finance, pp. 517-529.
- Doléans-Dade, C. (1976). "On the Existence and Unicity of Solutions of Stochastic Differential Equations". *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, Vol. 36, pp. 93-101.
- Dothan, L. U. (1978). "On the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial Economics*, Vol. 6, No. 1, pp. 59-69.
- Drezner, Z. (1978). "Computation of the Bivariate Normal Integral". *Mathematics of Computation*, Vol. 32, No. 141, pp. 277-279.
- Elliot, R. J. and P. E. Kopp (1999). Mathematics of Financial Markets. Springer-Verlag, New York.
- Emanuel, D. and J. Macbeth (1982), "Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 17, pp. 533-554.
- Embrechts P., C. Klüppelberg, and T. Mikosch (1991). Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Einstein, A. (1956). Investigations on the Theory of the Brownian Movement. Translated by A. D. Cowper, Dover Publications, Inc. pp. 12-19.
- Esser, A. (2003). General Valuation Principles for Arbitrary Payoffs and Applications to Power Options under Stochastic Volatility. Manuscript, Goethe University, Frankfurt, Germany.
- Fabozzi, F. J. (2003). Bond Markets: Analysis and Strategies (5th Edition) Prentice Hall.
- Fischer, S. (1975). "The Demand for Index Bonds". *Journal of Political Economy*, Vol. 83, No. 3, pp. 509-534.
- Fleming, W. H. and R. W. Rishel (1982). Deterministic and Stochastic Optimal Control (Stochastic Modelling and Applied Probability). Springer-Verlag. New York, Berlin.
- French, K. (1983). "A Comparison of Futures and Forward Prices". *Journal of Financial Economics*, Vol. 12, No. 3, pp. 311-342.
- Fundia-Aizenstat, A. and F. Venegas-Martínez (2004). "Probabilistic Greeks". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, Vol. 3, No. 3, pp. 303-311.
- García-Guerrero, V. M. y Venegas-Martínez, F. (2005). "Control óptimo determinista aplicado al problema económico de crecimiento endógeno". *Revista Ingeniería, Investigación y Tecnología*, Vol. 6, No. 2, pp. 127-137.
- Garman, M. B. (1977). A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes. Working paper No. 50. January. Research Program in Finance. University of California, Berkeley.
- Garman, M. B. and S. W. Kohlhagen (1983). "Foreign Currency Option Values". *Journal of International Money and Finance*, Vol. 2, No. 3, pp. 231-237.
- Gelfand, I. M. and S. V. Fomin (1963). Calculus of Variations. Prentice-Hall, Inc.
- Geske, R. (1979). "The valuation of compound options". *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, No. 1, pp. 63-81.
- Geske, R. (1977). "The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options." *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 12, No. 4, pp. 541-552.
- Ghosh, D. K. (1997). "Risk-free Profits with Forward Contracts in Exchange Rates and Interest Rates". *Journal of Multinational Financial Management*, Vol. 7, No. 3, pp. 253-264.
- Gihman, I. I. and A. V. Skorohod (1972). Stochastic differential equations. Springer-Verlag, New York, Berlin.
- Girsanov, I. V. (1960). "On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures". *Journal of Theory of Probability and its Applications*, Vol. 5, pp. 285-301.
- Girsanov, I. V. (1962). "An Example on Non-uniqueness of the Solution to the Stochastic Differential Equation of K. Itô". *Journal of Theory of Probability and its Applications*, Vol. 7, pp. 325-331.

- Goldman, M. B., H. B. Sosin and M. A. Gatto (1979). "Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High". *The Journal of Finance*, Vol. 34, No. 5, pp. 1111-1127.
- González-Aréchiga, B., J. Díaz-Tinoco y F. Venegas-Martínez (2001). "Riesgo cambiario, brecha de madurez y cobertura con futuros: análisis local y de valor en riesgo". *Economía Mexicana, Nueva Época*, Vol. 10, No. 2, pp. 259-290.
- González-Aréchiga, B., F. Venegas-Martínez y J. Díaz-Tinoco (2000). "Riesgo de tasas de interés e inmunización por duración y convexidad con futuros: análisis local y de valor en riesgo". *Investigación Económica*, Vol. 60, No. 233, pp. 72-112.
- Gutiérrez-Andrade, M., F. Venegas-Martínez y H. M. Bravo-Pérez (2005). "Política Fiscal en el Manejo de los Recursos Hídricos: Un modelo de equilibrio general computable", *Estudios Económicos*, Vol. 20, No. 2, pp. 219-261.
- Haar, A. (1916). "Über einige Eigenschaften der orthogonalen Funktionensysteme". *American Journal of Mathematics*, Vol. 38, pp. 1-5.
- Hansen, A. T. and P. L. Jorgensen (2000). "Analytical Valuation of American-Style Asian Options". *Management Science*, Vol. 46, No. 8, pp. 1116-1136.
- Heath, D., R. Jarrow and A. Morton (1990). "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 25, No. 4, pp. 419-440.
- Heath, D., R. Jarrow and A. Morton (1992). "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation". *Econometrica*, Vol. 60, No. 1, pp. 77-105.
- Henderson, M. J. and R. E. Quandt (1980). Microeconomic Theory: A Mathematical Approach. McGraw-Hill.
- Heston, S. I. (1993). "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options". *Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2, pp. 327-343.
- Ho, T. and S. Lee (1986). "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims". *Journal of Finance*, Vol. 41, No. 5, pp. 1129-1142.
- Hoggard, T., A. E. Whalley, and P. Wilmott (1994). "Hedging Option Portfolios in the Presence of Transaction Costs". *Advances in Futures and Options Research*, Vol. 7, pp. 21-35.
- Hull, J. C. (2002). Option, Futures, and other Derivatives, 5th Edition, Upper Saddle River, New Jersey.
- Hull, J. C. and A. White (1987). "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility". *Journal of Finance*, Vol. 42, No. 2, pp. 281-300.
- Hull, J. C. and A. White (1990). "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities". *The Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, pp. 573-592.
- Hull, J. C. and A. White (2000). "Valuing Credit Default Swaps I: No Counterparty Default Risk". *Journal of Derivatives*, Vol. 8, No. 1, pp. 2940.
- Islas Camargo, A. and F. Venegas-Martínez (2003). "Pricing Derivatives Securities with Prior Information on Long-memory Volatility". *Economía Mexicana, Nueva Época*, Vol. 12, No. 1, pp. 103-134.
- J. P. Morgan Bank (1995). RiskMetrics Technical Manual. New York.
- James, J. and N. Webber (2000). Interest Rate Modelling: Financial Engineering. John Wiley & Sons. Chichester, England.
- Jamshidian, F. (1989). "An Exact Bond Option Formula". *The Journal of Finance*, Vol. 44, No. 1, pp. 205-209.
- Jarrow, R. A. and G. S. Oldfield (1981). "Forward Contracts and Futures Contracts". *Journal of Financial Economics*, Vol. 9, No. 2, pp. 373-382.
- Jarrow, R. (2002). "Put Option Premiums and Coherent Risk Measures". *Mathematical Finance*, Vol. 12, No. 2, pp. 135-142.
- Jorion, P. (2001). Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk. Second Edition. McGraw-Hill.
- Kalman, R. E. (1960). "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems". *Journal of Basic Engineering*, Vol. 82, pp. 35-45.

- Kalman, R. E. and R. S. Bucy (1961). "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory". *Journal of Basic Engineering*, Vol. 83, pp. 95-107.
- Karatzas, I. and S. E. Shreve (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag, Berlin.
- Knott, G. D. (1999). Interpolating Cubic Splines (Progress in Computer Science and Applied Logic). Birkhäuser/Springer.
- Kolmogorov, A. (1933). "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung". *Ergeb. Math.*, Vol. 2, No. 3.
- Kreyszig, E. (1978). Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons, New York.
- Kushner, H. J. (1971). Introduction to Stochastic Control. Holt Publications. New York.
- Leland, H. E. (1985). "Option Pricing and Replication with Transaction Costs". *Journal of Finance*, Vol. 40, No. 5, pp. 1283-1301.
- Lewis, A. L. (2000). Option Valuation Under Stochastic Volatility: With Mathematica Code, Finance Press. U. K.
- Litzenberger, R. H. (1992). "Swaps: Plain and Fanciful". *Journal of Finance*, Vol. 47, No. 3, pp. 831-850.
- Longstaff, F. A. (1989). "A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial Economics*, Vol. 23, No. 2, pp. 195-224.
- Longstaff, F. A. and E. S. Schwartz (1995). "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt". *The Journal of Finance*, Vol. 50, No. 3, pp. 789-819.
- Macaulay, F. R. (1938). Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest-Rates, Bond Yields and Stock Prices in the U.S. Since 1856. National Bureau of Economic Research, New York.
- Márquez-Pozos, J. M., A. Islas-Camargo y F. Venegas-Martínez (2003). "Flujos internacionales de capital e inversión extranjera de cartera: el caso de México 1989-1999". *El Trimestre Económico*, Vol. 70(4), No. 280, pp. 791-833.
- McCafferty, S. (1990). Macroeconomic Theory. Harpercollins College Div.
- McCann, K. and J. Cilia (1994). Structured Notes. Federal Reserve Bank of Chicago, Financial Markets Unit (Supervision and Regulation), manuscript.
- Masaki, K. (2003). Stochastic Processes with Applications to Finance. Chapman & Hall/CRC, ACRC Press Company.
- Mas-Collel, A., M. D. Whinston, and J. R. Green (1995). Microeconomic Theory. Oxford University Press.
- Merton, R. C. (1969). "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous Time Case". *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 51, No. 3, pp. 247-257.
- Merton, R. C. (1971). "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model". *Journal of Economic Theory*, Vol. 3, No. 4, pp. 373-413.
- Merton, R. C. (1973). "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model". *Econometrica*, Vol. 41, No. 5, pp. 867-887.
- Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.
- Merton, R. C. (1974). "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates". *The Journal of Finance*, Vol. 29, No. 2, pp. 449-470.
- Merton, R. C. (1976). "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1-2, pp. 125-144.
- Metropolis, N. and S. Ulam (1949). "The Monte Carlo Method". *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 44, No. 247, pp. 335-341.
- Metodología y reglas de mantenimiento del IPC (2005). Bolsa Mexicana de Valores. Dirección de Información y Productos.
- Mun, J. (2002). Real Options Analysis, Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions. John Wiley & Sons, Inc.

- Musiela, M. and M. Rutkowsky (1997). Martingale Methods in Financial Modelling. Applications of Mathematics. Stochastic Modelling and Applied Probability Series. Springer-Verlag, Berlin.
- Nelson, C. R. and A. F. Siegel (1987). "Parsimonious Modeling of Yield Curves". *The Journal of Business*, Vol. 60, No. 4, pp. 473-489.
- Novikov, A. A. (1972). "On an Identity for Stochastic Integrals". *Theory Probab. Appl.*, Vol. 17, pp. 717-720.
- Øksendal, B. (1991). Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications. Fifth Edition. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Park, H. Y. and A. H. Chen (1985). "Differences between Futures and Forward Prices: A Further Investigation of Marking to Market Effects". *Journal of Futures Markets*, Vol. 5, No. 1, pp. 77-88.
- Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamrelidze, and E. F. Mishchenko (1962). The Mathematical Theory of Optimal Processes (English translation from the Russian 1960). John Wiley & Sons, New York.
- Rebonato, R. (1998). Interest-Rate Option Models. Second edition. John Wiley & Sons. Chichester, England.
- Revuz, D. and M. Yor (1991). Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer. New York, Berlin.
- Rohatgi, V. K. (1976). An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Ross, S. M. (1985). Introduction to Probability Models. Academic Press, Inc., Third Edition, Orlando, Florida, USA.
- Ross, S. M. (1999). Simulation. Second edition, Prentice Hall.
- Reiss, R. D. and M. Thomas (2000). Statistical Analysis of Extreme Values (from Insurance, Finance, Hydrology and other Fields). Second Edition, Birkhäuser-Verlag. Basel, Boston, Berlin.
- Ruiz Galindo, L. A. y F. Venegas-Martínez (2005). Implicaciones macroeconómicas de las decisiones de los agentes. *Análisis Económico*, Vol. 20, No. 45, pp. 5-27.
- Ruiz-Galindo, L. A. y F. Venegas-Martínez (2006). "Un modelo macroeconómico de simulación con microfundamentos para la economía mexicana". *Economía Mexicana, Nueva Época*, por aparecer.
- Sankaran, M. (1963). "Approximations to the Non-Central Chi-Square Distribution." *Biometrika*, Vol. 50, pp. 199-204.
- Scott, L. O. (1987). "Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 22, No. 4, pp. 419-438.
- Samuelson, P. A. (1965). "Rational Theory of Warrant Prices". *Industrial Management Review*, Vol. 6, No. 2, pp.13-39.
- Sargent, T. J. (1987). Macroeconomic Theory. Academic Press, San Diego, California.
- Schoutens, W. (2003). Lévy Processes in Finance (Pricing Financial Derivatives). Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd, England.
- Schroder, M. (1989). "Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula". *The Journal of Finance*, Vol. 44, No. 1 , pp. 211-219.
- Schwartz, E. S. and L. Trigeorgis (2001). Real Options and Investment under Uncertainty. The MIT Press Cambridge, England.
- Siegel, A. F. and C. R. Nelson (1988). "Long-Term Behavior of Yield Curves". *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 23, No. 1, pp. 105-110.
- Smith, G. D. (1986). Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods (Oxford Applied Mathematics & Computing Science Series). 3rd edition. Oxford University Press.
- Stakgold, I. (1997). Green's Functions and Boundary Value Problems. 2nd edition. Wiley-Interscience, New York.

- Steel, J. M. (2001). Stochastic Calculus and Financial Applications, Series Applications of Mathematics. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
- Trigeorgis, L. (1998). Real Options, Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation. Cambridge. The MIT Press.
- Turnbull, S. M. (1987). "Swaps: A Zero Sum Game". *Financial Management*, Vol. 16, No. 1, pp. 15-21.
- Turnovsky, S. J. (1993). "Macroeconomic Policies, Growth, and Welfare in a Stochastic Economy". *International Economic Review*, Vol. 34, No. 4, pp. 953-981.
- Varian, H. R. (1992). Microeconomic Analysis. W. W. Norton & Company, New York.
- Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure." *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No. 2, pp. 177-188.
- Venegas-Martínez, F. (1990). "On Regularity and Optimality Conditions for Maximum Entropy Priors". *The Brazilian Journal of Probability and Statistics*, Vol. 4, pp. 105-136.
- Venegas-Martínez, F. (1990). "Supplementary Prior Information, Computational Aspects, and Classification". *Journal of the Inter-American Statistical Institute*, Vol. 42, No. 139, pp. 64-80.
- Venegas-Martínez, F. (1990). "Supplementary Prior Information". Contributions to Probability and Mathematical Statistics, *CLAPEM Proceedings*, Vol. 4, pp. 228-237.
- Venegas-Martínez, F. (1992). "Entropy Maximization and Cross-Entropy Minimization on Quantiles: A Matrix Approach". *Agrociencia, Serie Matemáticas Aplicadas, Estadística y Computación*, Vol. 3, No. 2, pp. 71-76.
- Venegas-Martínez, F. (1993). "Learning on Utility Parameters". *Recent Advances in Bayesian Statistics and Econometrics*, Proceedings, Vol. 2, pp. 65-83.
- Venegas-Martínez, F. (1997). "On Information Functionals and Priors". Memoria del XII Foro Nacional de Estadística. *Asociación Mexicana de Estadística, INEGI*, Resúmenes in extenso, pp. 183-188.
- Venegas-Martínez, F. (1999). "Crecimiento endógeno, dinero, impuestos y deuda externa". *Investigación Económica*, Vol. 59, No. 229, pp. 15-36.
- Venegas-Martínez, F. (2000). "Utilidad, aprendizaje y estabilización". *Gaceta de Economía*, Año 5, No. 10, pp. 153-169.
- Venegas-Martínez, F. (2000). "On Consumption, Investment, and Risk". *Economía Mexicana, Nueva Época*, Vol. 9, No. 2, pp. 227-244.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, No. 9, pp. 1429-1449.
- Venegas-Martínez, F. (2001). Chronic Inflations Jumps in a Stochastic Small Open Economy. Working paper, Mathematical Finance Group, Oxford University.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO". *Estudios Económicos*, Vol. 16, No. 32, pp. 203-226.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Una guía completa para economistas en la valuación de opciones". *Gaceta de Economía*, Año 6, No. 12, pp. 155-212.
- Venegas-Martínez, F. (2001). "Política fiscal y renta petrolera: una propuesta de régimen fiscal para Pemex." *Problemas del Desarrollo, Revista Latinoamericana de Economía*, Vol. 32, No. 124, pp. 55-108.
- Venegas-Martínez, F. (2002). "Cobertura de flujos financieros con instrumentos de renta fija." *Estudios Económicos*, Vol. 17, No. 2, pp. 171-192.
- Venegas-Martínez, F. (2002). "Liberación comercial, distribución del ingreso, capital humano, e imperfecciones del mercado de crédito educativo". *Denarius, Revista de Administración y Economía*, No. 6, pp. 79-102.
- Venegas-Martínez, F. (2002). "Bayesian Procedures for Pricing Contingent Claims: Prior Information on Volatility". *Morfismos*, Vol. 6. No. 2, pp. 25-41.
- Venegas-Martínez, F. (2002). "Optimal Production in Monopoly Pricing: A Stochastic and Dynamic Approach". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, Vol. 1, No. 2. pp. 153-168.

- Venegas-Martínez, F. (2002). "La administración financiera y sus herramientas". *Ejecutivos de Finanzas*, Vol. 31, No. 10, pp. 50-54.
- Venegas-Martínez, F. (2003). "Inmunización de flujos financieros de tesorerías con bonos cupón cero: un análisis de duración y convexidad con el modelo de Heath, Jarrow y Morton". *Momento Económico*, No. 129-130, pp. 3-17.
- Venegas-Martínez, F. (2003). "Inmunización de flujos financieros con futuros de tasas de interés: un análisis de duración y convexidad con el modelo de Nelson y Siegel". *Revista de Administración Mackenzie*, Vol. 4, No. 1, pp. 107-123.
- Venegas-Martínez, F. (2003). Inmunización del valor presente de flujos de efectivo de tesorerías de corporativos, inversionistas institucionales y fondos pensiones con futuros del Mexder. Trabajo de Investigación ganador del Primer Lugar del Premio Nacional MexDer 2003, www.mexder.com/MEX/premio.html
- Venegas-Martínez, F. (2004). "Reforma fiscal incierta y sus efectos en las decisiones de consumo y portafolio: impacto en el bienestar económico". *Problemas del Desarrollo, Revista Latinoamericana de Economía*, Vol. 35, No. 136, pp. 137-150.
- Venegas-Martínez, F. (2004). "Política fiscal, estabilización de precios y mercados incompletos". *Estudios Económicos*, Vol. 20, No. 1, pp. 3-18.
- Venegas-Martínez, F. (2004). El TLCAN y su impacto en la inversión extranjera de cartera en México. Capítulo del libro: Diez años del TLCAN en México: una perspectiva analítica. E. R. Casares y H. Sobarzo (Compiladores). El Trimestre Económico, Serie de Lecturas del Fondo de Cultura Económica, pp. 169-186.
- Venegas-Martínez, F. (2004). "A Dynamic and Stochastic Extension of the Main Theorems of International Trade: The Case of Exhaustible and Non-Renewable Factors". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, Vol. 3, No. 1, pp. 79-99.
- Venegas-Martínez, F. (2004). "On Information Measures and Prior Distributions: A Synthesis". *Morfismos*, Vol. 8, No. 2, pp. 27-51.
- Venegas-Martínez, F. (2004). Administración coherente de riesgos con futuros del Mexder. Trabajo de Investigación ganador del Segundo Lugar del Premio Nacional MexDer 2004, www.mexder.com/MEX/premio.html
- Venegas-Martínez, F. (2005). "Caracterización del precio de un bono cupón cero en un modelo de equilibrio general". *Revista de Estadística, Econometría y Finanzas Aplicadas*, Vol. 3, No. 3, pp. 1-16.
- Venegas-Martínez, F. (2005). "Decisiones para la administración del riesgo macroeconómico". *Denarius, Revista de Administración y Economía*, No. 10, pp. 105-130.
- Venegas-Martínez, F. (2005). "A Stochastic Model of Endogenous Growth: The Mexican Case 1930-2002". *Análisis Económico*, Vol. 20, No. 43, pp. 83-100.
- Venegas-Martínez, F. (2005). "Bayesian Inference, Prior Information on Volatility, and Option Pricing: A Maximum Entropy Approach". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 8, No. 1, pp. 1-12.
- Venegas-Martínez, F. (2005). "De Bachelier a Merton: 100 años del movimiento Browniano en economía y finanzas". *Panorama Económico*, Vol. 1, No. 1, pp. 9-64.
- Venegas-Martínez, F. (2005). "Entendiendo los mercados de swaps: un enfoque de equilibrio general". *Revista de Estadística, Econometría y Finanzas Aplicadas*, Vol. 3, No. 4, pp. 181-196.
- Venegas-Martínez, F. (2006). "Efectos fiscales sobre planes temporales de estabilización inflacionaria: un enfoque de estrategia auto-financiable". *EconoQuantum, Revista de Economía y Negocios*, por aparecer.
- Venegas-Martínez, F. (2006). "Decisiones de consumo y portafolio bajo condiciones de riesgo e incertidumbre". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, Vol. 5, No. 1, pp. 3-11.
- Venegas-Martínez, F. (2006). Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks. *Economic Modelling*, Vol. 23, No. 1, pp. 157-173.
- Venegas-Martínez, F. (2006). "Fiscal Policy in a Stochastic Temporary Stabilization Model: Undiversifiable devaluation Risk". *Journal of World Economics Review*, Vol. 1, No. 1, pp. 87-106.

- Venegas-Martínez, F. (2006). "Mercados de notas estructuradas: un análisis descriptivo y métodos de valuación." *El Trimestre Económico*, por aparecer.
- Venegas-Martínez, F. (2006). "Valuación de productos derivados con procesos regulares de Lévy". *Panorama Económico*, por aparecer.
- Venegas-Martínez, F. (2006). "Estabilización de precios e ingreso laboral incierto: un enfoque estocástico", *Investigación Económica*, Vol. 65. No. 256, pp. 45-69.
- Venegas-Martínez, F. y A. Islas-Camargo (2005). "Volatilidad en los mercados de América Latina". *Comercio Exterior*, Vol. 55. No. 11, pp. 936-947.
- Venegas-Martínez, F. y A. Fundia-Aizenstat (2006). "Opciones reales, valuación financiera de proyectos y estrategias de negocios: aplicaciones al caso mexicano". *El Trimestre Económico*, Vol. 73(2), No. 290, pp. 363-450.
- Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2000). "Mercados financieros incompletos y su impacto en los programas de estabilización de precios: el caso mexicano". *Momento Económico*, No. 111, pp. 20-27.
- Venegas-Martínez, F. y B. González-Aréchiga (2002). "Cobertura de tasas de interés con futuros del mercado mexicano de derivados: un modelo estocástico de duración y convexidad". *El Trimestre Económico*, Vol. 59(2), No. 274, pp. 227-250.
- Venegas-Martínez, F., B. González-Aréchiga y J. Díaz-Tinoco (2002). "Cobertura con futuros de títulos de capital". *Momento Económico*, No. 120, pp. 14-34.
- Venegas-Martínez, F., E. de Alba, and M. Ordorica (1999). "On Information, Priors, Econometrics, and Economic Modeling". *Estudios Económicos*, Vol. 14, No. 27, pp. 53-86.
- Venegas-Martínez, F., E. de Alba, and M. Ordorica (1995). "An Economist's Guide to The Kalman Filter". *Estudios Económicos*, Vol. 10, No. 20, pp. 123-145.
- Venegas-Martínez, F. y G. Dubcovsky (2002). "Perspectiva de la administración de riesgos financieros en México". *Ejecutivos de Finanzas*, Vol. 31, No. 9. pp. 50-52.
- Venegas-Martínez, F. y G. Pérez-Lechuga (2003). "Prior Information in Stochastic Optimization: Quasigradient Methods". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, Vol. 2, No. 2, pp. 175-192.
- Venegas-Martínez, F. y G. P. Aguilar (2004). "Maximización de utilidad y valuación de derivados con volatilidad estocástica". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, Vol. 4, No. 2, pp. 73-82.
- Venegas-Martínez, F. y J. M. Carrillo-Rivera (2002). "Cambio tecnológico en la administración de riesgos financieros: el caso mexicano". *Revista Mexicana de Economía y Finanzas*, Vol. 1, No. 4, pp. 289-304.
- Wall, L. D. and J. J. Pringle (1989). "Alternative Explanations of Interest Rate Swaps: A Theoretical and Empirical Analysis". *Financial Management*, Vol. 18, No. 2, pp. 59-73.
- Wan, F. Y. M. (1995). *Introduction to the Calculus of Variations and Its Applications*. Second Edition. Chapman & Hall/CRC.
- Wilmott, P. (1998). *Derivatives (The Theory and Practice of Financial Engineering)*. John Wiley & Sons, England.
- Wilmott, P., S. Howison, and J. Dewynne (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*. Cambridge University Press.
- Whaley, R. E. (1981). "On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends." *Journal of Financial Economics*, Vol. 9, No. 2, pp. 207-211.
- Wolfhard, J. (2002). *Pseudo Random Numbers: Generation and Quality Checks, Quantum Simulations of Complex Many-Body Systems. From Theory to Algorithms*. Lecture Notes, Vol. 10, pp. 447-458.
- Yang, H. and T. K. Siu (2001). "Coherent Risk Measures for Derivatives under the Black-Scholes Economy". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 4, No. 5, pp. 819-835.
- Yosida, K. (1978). *Functional Analysis*. Sixth Edition. A series of Comprehensive Studies in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Zellner, A. (1971). *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, New York: Wiley.

- Zellner, A. (1991). Bayesian Methods and Entropy in Economics and Econometrics, Maximum Entropy and Bayesian Methods (W. T. Grandy and L. H. Schick, eds.), Dordrecht, Netherlands: Kluwer, pp. 17-31.
- Zellner, A. (1996). "Models, Prior Information and Bayesian Analysis". *Journal of Econometrics*, Vol. 75, No. 1, pp. 51-58.
- Zellner, A. (1996). "Past and Recent Results on Maximal Data Information Priors". *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 49, No. 1, pp. 3-8.
- Zellner, A. (2004). Statistics, Econometrics and Forecasting, Cambridge University Press.
- Zellner, A. and F. C. Palm (eds.) (2004). The Structural Econometric Modeling, Time Series Analysis (SEMTSA) Approach, Cambridge University Press.

ÍNDICE POR AUTOR

A

Acerbi, C., 747.
Adams, K., 677, 684.
Aguilar, G. P., 1117.
Ahn, D., 721.
Altman, E. I., 793.
Amram, M., 814.
Antikarov, V., 814.
Arrow, K. J., 961.
Artzner, P., 747.

B

Bachelier, L., 142.
Ball, C. A., 391.
Barone-Adesi, G., 340, 348.
Bauer, H., 27.
Beaglehole, D., 581.
Bellman, R., 950, 1025.
Bertsekas, D. P., 950.
Bingham, N. H., 61.
Black, F., 142, 199, 213, 223, 227, 236, 245, 263, 266, 278, 287, 301, 313, 348, 376, 448, 560, 612, 836, 1053.
Boer, F. P., 814.
Bolyanskii, V. G., 936.
Boudoukh, J., 721.
Boyarchenko, S. I., 411.
Bravo-Pérez, H. M., 977.
Brennan, M. J., 587.
Brenner, M., 199.
Brigo, D., 1063.
Browder, F. E., 109.
Brown, R., 13, 40, 142.
Bucy, R. S., 1025.

C

Carrillo-Rivera, J. M., 177.
Chen, A. H., 182.
Chua, J. H., 642.
Cilia, J., 836.
Clebaner, F. C., 61.
Cont, R., 1081.
Conze, A., 451.
Copeland, T., 814.
Cox, J. C., 182, 278, 287, 313, 364, 391, 536, 544, 560, 581, 657, 1053.

Cruz, M. G., 868.

Cuthbertson, K., 814.

D

Das, S., 836.
de Alba, E., 330.
De Boor, C., 684.
Delbaen, F., 688, 747.
Derman, E., 612.
Dewynne, J., 421, 459, 850.
Díaz-Tinoco, J., 177, 182, 587, 642, 1081.
Dixit, A. K., 814.
Doléans-Dade, C., 104.
Dothan, L. U., 1063.
Dreyfus, S., 1025.
Drezner, Z., 348, 369, 814.
Dubcovsky, G., 177.
Duffie, D., 721.

E

Eber, J. M., 747.
Einstein, A., 142.
Elliot, R. J., 544.
Emanuel, D., 364.
Embrechts P., 884.
Esser, A., 376.

F

Fabozzi, F. J., 642.
Fischer, S., 1070.
Fleming, W. H., 1025.
Fomin, S. V., 911.
French, K., 182.
Fundia-Aizenstat, A., 263.

G

Gamrelidze, R. V., 936.
García-Guerrero, V. M., 936.
Garman, M. B., 245, 313, 480, 633.
Gatto, M. A., 448.
Gelfand, I. M., 911.
Geske, R., 348, 369.
Ghosh, D. K., 177.
Gihman, I. I., 1034, 1040.
Girsanov, I. V., 104, 236, 235, 633.
Goldman, M. B., 448.
González-Aréchiga, B., 177, 490, 516, 526,

536, 587, 642, 1040, 1081, 1099.
 Green, J. R., 977.
 Gutiérrez-Andrade, M., 977.

H

Haar, A., 669.
 Hansen, A. T., 421.
 Heath, D., 626, 747.
 Henderson, M. J., 977.
 Heston, S. I., 301, 313.
 Hicks, J. R., 961.
 Ho, T., 560, 570, 612, 626, 836.
 Hoggard, T., 397.
 Howison, S., 459, 850.
 Hull, J. C., 301, 570, 612, 626, 657, 767,
 836.

I

Ingersoll, J. E., 182, 313, 536, 544, 560, 581,
 657, 1053.
 Islas Camargo, A., 329, 330, 1034.

J

James, J., 474, 642, 688.
 Jamshidian, F., 836.
 Jarrow, R., 177, 626, 747.
 Jones, M. C., 677.
 Jorgensen, P. L., 421.
 Jorion, P., 721.

K

Kalman, R. E., 1025.
 Karatzas, I., 40, 61, 82, 92, 249, 253, 428,
 436.
 Keynes, J. M., 961.
 Kiesel, R., 61.
 Klüpperberg, C., 884.
 Knott, G. D., 684.
 Kohlhagen, S. W., 245, 313.
 Kolmogorov, A., 27.
 Kopp, P. E., 544.
 Kreyszig, E., 669.
 Kulatilaka, N., 814.
 Kushner, H. J., 1025.

L

Lee, S., 560, 570, 612, 626, 836.
 Leland, H. E., 397.
 Levendorskii S. Z., 411.
 Lewis, A. L., 1117.
 Litzenberger, R. H., 190.

Longstaff, F. A., 581, 777.
 Lorimier, S., 688.

M

Macaulay, F. R., 642, 721.
 Macbeth, J., 364
 Márquez-Pozos, J. M., 1034.
 Masaki, K., 857.
 Mas-Collel, A., 977.
 McCafferty, S., 994, 1006.
 McCann, K., 836.
 Mercurio, F., 1063.
 Merton, R. C., 142, 199, 213, 233, 236, 245,
 263, 266, 278, 287, 391, 459, 490, 499,
 560, 767, 1053, 1110.
 Metropolis, N., 857.
 Mikosch, T., 884.
 Mishchenko, E. F., 936.
 Morton, A., 626.
 Mun, J., 814.
 Musiela, M., 82, 249, 253, 428, 436, 459.

N

Nelson, C. R., 657.
 Nietzsche, D., 814.
 Novikok, A. A., 104.

O

Øksendal, B., 82.
 Oldfield, G. S., 177.
 Ordóñez, M., 330.

P

Palm, F. C., 27.
 Pan, J., 721.
 Park, H. Y., 182.
 Pérez-Lechuga, G., 330.
 Pindyck, R. S., 814.
 Pontryagin, L. S., 936.
 Pringle, J. J., 190.

Q

Quandt, R. E., 977.

R

Rebonato, R., 474.
 Reiss, R. D., 884.
 Revuz, D., 40, 61, 92, 104, 236, 253, 428.
 Richardson, J. M., 721.

- Rishel, R. W., 1025.
Rohatgi, V. K., 27.
Ross S. A., 182, 278, 287, 313, 364, 391, 536, 544, 560, 581, 657, 1053.
Ross, S. M., 793, 857.
Rubinstein, M., 278, 287.
Ruiz-Galindo, L. A., 1006.
Rutkowsky, M., 82, 249, 253, 428, 436.
- S**
Samuelson, P. A., 142, 157.
Sankaran, M., 364.
Sargent, T. J., 994, 1006.
Scholes, M., 142, 199, 213, 233, 227, 236, 245, 263, 266, 278, 287, 301, 313, 348, 376, 448, 560, 1053.
Schoutens, W., 411.
Schroder, M., 364.
Schwartz, E. S., 587, 777, 814.
Scott, L. O., 301.
Shreve, S. E., 40, 61, 82, 92, 249, 253, 428, 436.
Siegel, A. F., 657.
Siu, T. K., 747.
Skorohod, A. V., 1034, 1040.
Slutsky, E., 960.
Smith, G. D., 850.
Sosin, H. B., 448.
Stakgold, I., 266.
Steel, J. M., 61.
Subrahmanyam, M. G., 199, 233.
- Turnovsky, S. J., 1034.
- U**
Ulam, S., 857.
- V**
Van Deventer, D., 677, 684.
Varian, H. R., 977, 994.
Vasicek, O., 480, 490, 499, 516, 526, 633, 657, 836.
Venegas-Martínez, F., 177, 142, 182, 213, 227, 263, 301, 329, 330, 364, 391, 411, 421, 448, 451, 474, 490, 516, 526, 536, 587, 626, 642, 657, 777, 814, 836, 911, 936, 950, 977, 944, 1006, 1025, 1034, 1040, 1048, 1070, 1081, 1099, 1110.
Viswanathan, 451.
- W**
Wall, L. D., 190.
Wallace, N., 1006.
Walras, L., 976.
Wan, F. Y. M., 911.
Wand, M. P., 421, 677.
Webber, N., 474, 642, 688.
Whaley, A. E., 397.
Whaley R. E., 340, 348, 349.
Whinston, M. D., 977.
White, A., 301, 570, 612, 626, 657, 767, 836.
Whitelaw, R. F., 721.
Wilmott, P., 266, 397, 421, 459, 850.
Wolfhard, J., 857.
- Y**
Yang, H., 747.
Yor, M., 40, 61, 92, 104, 236, 253, 428.
Yosida, K., 669.
- Z**
Zellner, A., 27, 330, 868.

ÍNDICE POR TEMA

A

- Aproximación de Sankaran, 364.
- Árbol
 - binomial, 269.
 - de tasa corta, 512, 557, 594.
 - de opciones reales, 808.
 - trinomial, 277.
- Axiomas de Artzner-Delbaen-Eber-Heath, 728.

B

- Bienestar económico, 965, 1076, 1095, 1106.
- Bolsa
 - de futuros, 179.
 - Mexicana de Valores, 151.
- Bonos
 - con riesgo, 752.
 - consol, 583.
 - cupón cero, 175, 465, 633, 1056.
 - cuponados, 184, 821.
 - extranjeros, 1091.
 - indexados, 1065.

C

- Cadena de Markov, 788.
- Cálculo de variaciones, 889.
- Calibración de curva de rendimiento, 552, 565.
- Calificación crediticia, 752.
- Cámara de compensación y liquidación, 179, 180.
- Cambio de numerario, 230.
- Caminata aleatoria, 44, 46.
- Cap, 823.
- Caplets, 823.
- Clarckia pulchella, 1.
- Cobertura con varianza mínima, 389.
- Cobertura Delta, 205, 256, 271.
- Colas pesadas, 733.
- Condición
 - de Arrow, 920.
 - de Cournot, 966.
 - de Engel, 966.
 - de equilibrio, 479, 1069.
 - de frontera, 217, 266, 419.
 - de Kuhn-Tucker, 953.
 - de Legendre, 899, 944.

de Lipschitz, 476.

de Mangasarian, 919.

de no arbitraje, 166, 167, 206, 239,

419.

de Novikov, 103.

de von Mises, 881.

de Weierstrass, 944.

Consumidor-inversionista, 1029, 1036, 1045, 1050, 1067, 1092.

Contratos forward

sobre un bono, 175.

sobre un índice bursátil, 174.

sobre una acción, 162, 273.

sobre una acción con dividendos, 171.

sobre una tasa de interés, 174, 189.

sobre tipo de cambio, 176.

Contratos futuros, 179.

Control

óptimo determinista, 913, 949.

óptimo estocástico, 1012, 1038, 1046, 1051, 1074, 1092.

Convergencia

con probabilidad uno, 27.

cuadrática media, 54.

del modelo binomial a Black-Scholes, 281.

en distribución, 26, 284.

en \mathcal{L}^q , 27.

en probabilidad, 26.

estocástica, 26.

Convexidad, 639.

Cópula uniforme, 732.

Corrección Beaglehole-Tenney, 572.

Costos

de ajuste, 990, 991.

de transacción, 393.

Criterio de Altman, 784.

Cuenta bancaria, 194, 205.

Curva

de indiferencia, 957.

de rendimiento, 460, 506, 553.

inicial, 552, 565.

D

Delta de Dirac, 268.

Demanda

de consumo, 956, 1097.

- de inversión, 985.
- de saldos monetarios reales, 986, 1091.
- de trabajo, 990.
- Hicksiana, 971, 973.
- Marshalliana, 956, 967, 973.
- Derivada de Radon-Nikodym, 98, 432.
- Derivados
 - de crédito, 765.
 - de tasas de interés, 819.
- Diferencial
 - estocástica, 69.
 - de Fréchet, 889.
 - de Gateaux, 891.
 - de un cociente, 80.
 - de un producto, 81.
- Distribución
 - a posteriori*, 26.
 - a priori*, 26, 316.
 - beta, 866, 868.
 - binomial, 865.
 - Burr, 884.
 - de frecuencia, 862.
 - de severidad, 862.
 - del máximo de un movimiento Browiano, 424, 436, 440, 449.
 - del mínimo de un movimiento Browiano, 432, 440, 449.
 - exponencial, 318.
 - exponencial bivariada, 758.
 - Fréchet, 875.
 - Gamma, 320, 403.
 - Gaussiana inversa, 404.
 - generalizada de Pareto, 878.
 - Gumbel, 873.
 - infinitamente divisible, 407.
 - normal, 149, 402.
 - normal bivariada, 344, 368.
 - Poisson, 403.
 - Weibull, 321, 875.
 - χ^2 no central, 360, 542.
- Desigualdad
 - de Doob, 91.
 - de Jensen, 92.
- Duración, 638.

- E**
- Ecuación
 - adjunta, 916.
 - de Bellman-Euler-Lagrange, 942.
 - de Chapman-Kolmogorov, 120, 788.

- de difusión de calor, 107, 220, 454.
- de Euler, 896.
- de Fourier, 122.
- de Garman-Vasicek, 479.
- de Hamilton-Jacobi-Bellman, 1016, 1020, 1023, 1032, 1039, 1051, 1080, 1092, 1104, 1116.
- de Slutsky, 960.
- diferencial parcial de Black-Scholes, 206, 208, 217, 226, 239, 265, 1052.
- diferencial parcial de Fokker-Planck, 253.
- diferencial parcial de Kolmogorov, 252, 355.
- Efecto
 - ingreso, 964.
 - sustitución, 963.
- Elasticidad constante de la varianza, 353.
- Equilibrio general, 206, 998.
- Espacio
 - métrico, 21.
 - muestral, 18.
- Esperanza condicional, 24, 115.
 - de la cola del VaR, 729.
- Estadística Bayesiana, 25, 326, 864.
- Estado
 - absorbente, 786.
 - accesible, 789.
 - comunicado, 790.
 - ergódico, 792.
 - recurrente, 790.
 - transitorio, 790, 791.
- Estática comparativa, 959, 1068, 1075, 1095, 1106.
- Estructura de plazos
 - de tasa de interés, 460, 466, 496, 533.
 - de volatilidad, 591.
- Experimento aleatorio, 18.

- F**
- Filtración, 35.
 - aumentada, 36.
- Floor, 825.
- Floorlet, 825.
- Fórmula
 - de Brenner-Subrahmanyam, 199.
 - de Cameron-Martin, 101.
 - de Conze y Viswanathan, 450.
 - de Goldman, Sosin y Gatto, 447.
 - de Hull-White para valuar opciones con volatilidad estocástica, 301.

- de interpolación de Newton, 363.
- de Lévy-Khinchin, 406.
- de Merton para valuar opciones con difusión y saltos, 385.
- de valuación binomial, 271, 281.
- de valuación de Black-Scholes, 198, 255, 266, 287.
- de valuación de derivados, 234, 248.
- F**unción
 - característica, 311, 356, 401.
 - de aversión al riesgo, 909, 910, 926, 929.
 - de Bessel, 327, 357, 1059.
 - de Bessel modificada, 328.
 - de densidad, 23.
 - de densidad del movimiento geométrico Browniano, 194, 248, 251, 266, 354.
 - de distribución, 23.
 - de gasto mínimo, 971.
 - de Green, 265, 356.
 - de transición, 357.
 - de utilidad con coeficiente constante, 909, 910, 926, 929, 950, 1018, 1112.
 - de utilidad cuasilineal, 970.
 - de utilidad exponencial negativa, 911, 933.
 - de utilidad indirecta, 965.
 - de utilidad logarítmica, 908, 922, 967, 973, 983, 1104.
 - generatriz de momentos, 284, 522.
 - medible, 22.
- G**
 - Griegas de Black-Scholes, 256.
 - Delta, 256.
 - Gamma, 259.
 - Kappa, 261.
 - Rho, 261.
 - Theta, 259.
 - Vega, 260.
- H**
 - Hamilton, 1011.
 - Hamiltoniano, 916, 987, 1018.
- I**
 - Identidad de Roy, 966.
 - Í**ndice
 - de bursatilidad, 151.
 - de precios, 152.
- Información *a priori*, 316.
- Ingreso laboral, 1103.
- Inmunización con bonos, 637.
- Integral estocástica (de Itô), 50, 52, 68, 69.
- IS-LM, 999.
- J**
 - Jacobi, 1011.
 - Jacobiano, 195.
- L**
 - L**ema
 - de Itô, 69.
 - de Shephard, 972.
 - Lemas del cálculo de variaciones, 894.
- M**
 - Margen, 180.
 - Martingala, 46, 87, 90, 91, 92, 107, 123, 232, 272.
 - Martingala exponencial, 103.
 - Matriz de transición, 785.
 - Media del movimiento geométrico Browniano, 195.
 - Medida
 - coherente de riesgo, 725.
 - de Lebesgue, 543.
 - de probabilidad, 20.
 - de Wiener, 38.
 - martingala equivalentes, 99.
 - Mercados
 - completos, 207.
 - de capitales, 151, 991, 993.
 - incompletos, 1071, 1101.
 - Método
 - de alambrada, 186.
 - de Bootstrapping, 186.
 - de diferencias finitas, 841.
 - con dos factores, 849.
 - explícito, 847.
 - implícito, 848.
 - de Newton-Raphson, 535.
 - generalizado de momentos, 534.
 - Monte Carlo, 625, 851.
 - Modelo
 - binomial, 269.
 - CAPM, 134.
 - de Barone-Adesi y Whaley, 335.
 - de Black, 822.
 - de Black-Derman-Toy, 589.

- de Black-Scholes, 128, 134.
 de Brennan y Schwartz, 583.
 de Cox-Ingersoll-Ross de equilibrio, 1049.
 de Cox-Ingersoll-Ross de tasa, 305, 527, 541, 1053.
 de Dothan, 1055.
 de Fischer de bonos indexados, 1065.
 de Geske, 367.
 de Heath-Jarrow-Morton, 617.
 de Heston, 305.
 de Ho-Lee, 549, 829.
 de Hull-White de derivados de crédito, 765.
 de Hull-White de riesgo crédito, 760.
 de Hull-White de tasa corta, 563, 830.
 de Hull-White de volatilidad estocástica, 291.
 de Jamshidian, 828.
 de Longstaff, 571.
 de Longstaff y Schwartz de riesgo crédito, 771.
 de Merton de riesgo crédito, 763.
 de Merton de tasa corta, 483.
 de Merton para valuar opciones, 136.
 de Merton para valuar opciones con difusión y saltos, 385.
 de migración de crédito, 783.
 de Nelson y Siegel, 647.
 de Ramsey determinista, 922, 929, 933.
 de Ramsey estocástico, 1073.
 de Samuelson para valuar warrants, 128.
 de Vasicek, 503, 519.
 de Whaley, 343.
 macroeconómico clásico, 997.
- Movimiento
 Browniano, 1, 31, 48, 88, 90, 91, 92, 123, 1929.
 geométrico Browniano, 149, 166, 193, 204, 225, 229, 237, 247, 251, 255, 371, 446, 822, 1055, 1058, 1065.
- N**
 Notas estructuradas, 832.
 sobre índices de amortización, 833.
 sobre índices duales, 834.
 sobre tasas flotantes apalancadas, 835.
 Step-up, 833.
- O**
Opción
 americana, 335, 343, 448, 811.
 asiática, 417.
 compuesta, 367.
 con barrera, 453.
 europea, 126, 197, 256.
 francesa, 124.
 lookback, 439, 449.
 parisina, 119.
 perpetua, 128.
 potencia, 371.
 real 799.
 compuesta, 806.
 de abandono, 805.
 de cambio tecnológico, 805.
 de cierre temporal, 804.
 de contracción, 804.
 de expansión, 803.
 de permanencia, 805.
- P**
 Pago continuo de dividendos, 237.
 Paridad
 de opciones de compra y venta, 198, 261.
 cap-floor, 826.
- Política
 económica, 1106.
 fiscal, 1003, 1091.
 monetaria, 1005.
- Portafolio
 autofinanciable, 225, 231, 241, 275.
 replicante, 168, 225, 231, 241, 275, 344.
- Precio
 de ejercicio, 197.
 de ejercicio flotante, 418, 440.
 de entrega, 163.
 de entrega de equilibrio, 164.
 de estado, 271.
 de un bono cupón cero, 521.
 futuro, 180.
 log-normal, 149, 266.
- Premio
 al riesgo de mercado, 229, 479, 497.
 por ejercicio anticipado, 336.
- Principio
 de máxima entropía, 316.
 de mínima entropía cruzada, 317.
 de reflexión, 427, 434, 442.
 del máximo de Pontryagin, 916.

- P**
- Probabilidad
 - de incumplimiento, 754.
 - neutral al riesgo, 311.
 - Problema
 - de integración, 970.
 - dual, 971.
 - isoperimétrico, 906.
 - Programación
 - dinámica determinista, 937.
 - dinámica estocástica, 1011.
 - no lineal, 954.
 - Proceso
 - adaptado a una filtración, 36.
 - de Cox-Ingersoll-Ross, 305.
 - de difusión, 1029.
 - de difusión con saltos, 381, 1035, 1045, 1072.
 - de Lévy, 408.
 - de Ornstein-Uhlenbeck, 305, 519, 542.
 - de Poisson, 381.
 - de Poisson no homogéneo, 776.
 - de varianza promedio, 292.
 - de Wiener, 37.
 - estocástico, 33.
 - Markoviano, 46, 122.
 - Prueba
 - de Kolmogorov-Smirnov, 854.
 - χ^2 , 853.
- R**
- Rendimientos normales, 148.
 - Restricción
 - “cash-in-advance”, 989, 1091, 1103.
 - presupuestal, 956, 1066, 1112.
 - Reversión a la media, 503.
- Riesgo**
- crédito, 751.
 - de mercado, 149.
 - de tipo de cambio, 1072, 1089, 1101.
 - operativo, 861.
- S**
- Swap, 183.
 - de tasas de interés, 189.
 - de tipo de cambio, 190.
 - σ -álgebra, 18.
 - aumentada, 21.
 - de Borel, 21.
 - generada por un conjunto, 36.
- T**
- Tasa
 - corta, 470, 475, 483, 496, 520, 571, 589, 620, 629.
 - de descuento, 466.
 - de interés, 465.
 - forward, 468, 488, 505, 554, 518, 647.
 - instantánea de riesgo crédito, 776.
 - interna de retorno, 822.
 - Teorema
 - de Cauchy, 402, 412.
 - de Feynman-Kač.
 - de Girsanov, 96, 97, 233, 240, 431, 441, 629.
 - de Lévy, 90.
 - de representación de martingalas, 90.
 - del límite central, 283.
 - del residuo, 411, 413.
 - Tiempo
 - de paro, 423.
 - de primera visita, 424.
 - Transformada inversa de Fourier, 406.
- U**
- Utilidad, 908, 1056.
- V**
- Valor
 - del dinero en el tiempo, 467.
 - en riesgo, 729, 873.
 - extremo, 873.
 - intrínseco, 197, 270.
 - presente neto, 800.
 - presente neto modificado, 801.
 - Valuación neutral al riesgo, 194, 197, 198, 234, 239, 243, 247, 255, 266, 270, 291, 326, 620, 631.
 - Variable aleatoria, 22.
 - Variación cuadrática media, 48.
 - Varianza del movimiento geométrico Browniano, 195.
 - Volatilidad
 - constante, 193.
 - en función del tiempo, 291.
 - estocástica, 291, 305, 1111.