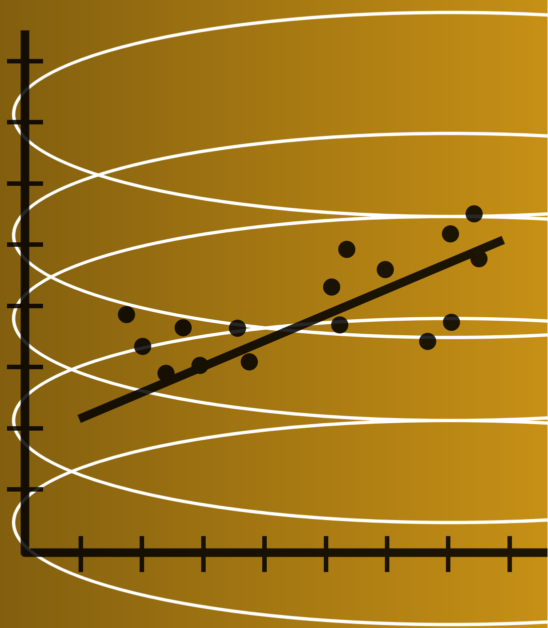
ANÁLISIS MATEMÁTICO CON PYTHON

HERRAMIENTAS PARA FINANZAS, ECONOMÍA Y GESTIÓN EMPRESARIAL

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\bar{X} = \frac{\sum fi \cdot xi}{\sum fi}$$



Wellcome Peujio, PhD

UNA GUÍA PASO A PASO

¿Buscas mejorar tu análisis en finanzas, economía y gestión empresarial? Descubre en este ebook cómo aplicar herramientas matemáticas y Python para tomar decisiones informadas y optimizar resultados.

Acerca del Autor

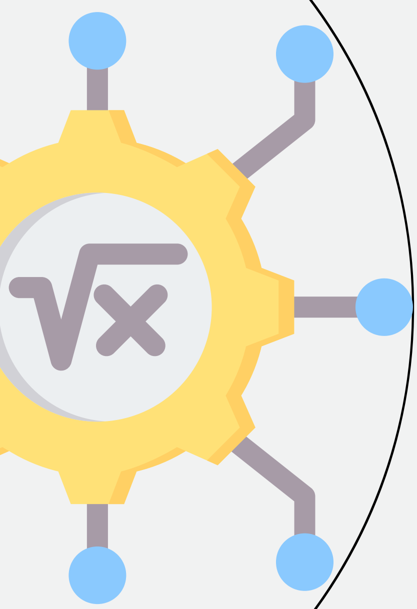
Primero y ante todo, agradezco al Dios Todopoderoso por darme la oportunidad de completar este ebook, un sueño hecho realidad.

Wellcome Peujio es licenciado en Matemática y Computación, y posee una maestría y doctorado en Ciencia Económica, con especialización en economía financiera y ciencia de datos. Desde temprana edad, desarrolló una profunda pasión por las matemáticas y la programación en Python, herramientas que considera fundamentales para resolver los problemas de la vida cotidiana.

Apasionado por el bienestar en todas sus formas, fundó la Wp Wellness Academy, una academia dedicada al bienestar físico, mental, espiritual y financiero. A través de esta plataforma, su misión es ayudar a las personas a alcanzar una vida plena y equilibrada, aplicando principios científicos en áreas clave como la salud, la economía y el crecimiento personal.

Con una combinación única de conocimientos en matemáticas aplicadas, economía y ciencia de datos, Wellcome tiene como propósito inspirar a otros a utilizar estas herramientas para mejorar su vida diaria y la toma de decisiones, demostrando que la ciencia y el bienestar pueden ir de la mano para lograr una vida más plena y satisfactoria.

Acerca del Libro



Este ebook está diseñado para estudiantes de nivel medio superior y superior que deseen entender cómo los conceptos matemáticos son esenciales en disciplinas clave como las finanzas, la economía y la administración. Además, conecta estas matemáticas con la programación en Python, proporcionando una herramienta poderosa para visualizar y optimizar los cálculos, lo que resulta en soluciones prácticas y eficientes para problemas reales.

A lo largo de este libro, exploraremos temas matemáticos fundamentales como el álgebra, las funciones, las derivadas, las integrales, y otros, cada uno estructurado de manera clara para facilitar la comprensión. Cada capítulo incluye:

1. Fundamentos Teóricos: Una introducción a los conceptos clave de cada tema, proporcionando una base sólida para entender su aplicabilidad en el análisis financiero, económico y administrativo.
2. Aplicaciones Prácticas: Explicaciones detalladas sobre cómo estos conceptos se utilizan en áreas como la gestión de inversiones, la optimización de recursos empresariales y la modelización económica.
3. Ejercicios y Soluciones: Problemas aplicados a situaciones reales con soluciones matemáticas y su implementación en Python (MathPY), permitiendo a los estudiantes automatizar cálculos, optimizar estrategias y visualizar resultados.

Objetivo del Libro

El objetivo principal de este ebook es demostrar cómo las matemáticas, lejos de ser un conjunto de reglas abstractas, son una herramienta práctica y valiosa para resolver problemas cotidianos y estratégicos en el ámbito de los negocios y la economía. Además, este libro pretende enseñar a los estudiantes cómo la programación en Python puede complementar sus conocimientos matemáticos, facilitando la resolución de cálculos complejos y mejorando la interpretación de datos a través de visualizaciones efectivas.

Este ebook está estructurado para que puedas aprender y aplicar los conceptos de manera gradual, comenzando con fundamentos básicos y avanzando hacia temas más complejos. Cada capítulo incluye ejercicios que no solo refuerzan los conceptos aprendidos, sino que también muestran cómo aplicar Python para resolver problemas reales en contextos financieros y económicos.

Estructura del Libro

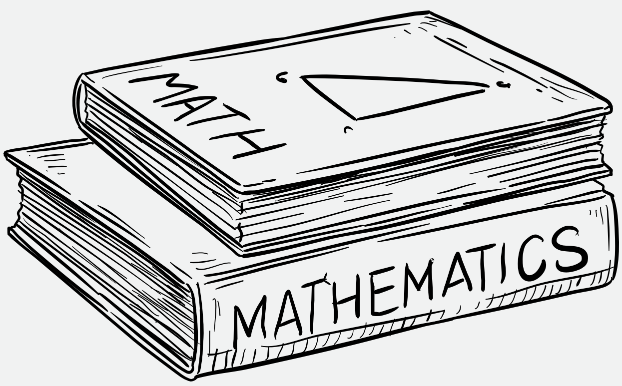
El libro está dividido en capítulos, cada uno dedicado a un tema matemático específico. A continuación se muestra la estructura de cada capítulo:

1. I.1 Fundamentos del Tema
    - Explicación teórica del tema con ejemplos simples.
    - Discusión sobre la relevancia de estos conceptos en contextos financieros y empresariales.
2. I.2 Aplicaciones del Tema en Finanzas, Economía y Administración
    - Explicación de cómo el tema se aplica en diferentes áreas, como la valoración de inversiones, la optimización de costos y la planificación financiera.
    - Ejemplos prácticos que muestran el uso del tema en problemas reales de negocios.
3. I.3 Ejercicios de Aplicaciones y Soluciones (MathPY)
    - Problemas aplicados a situaciones reales con soluciones matemáticas detalladas.
    - Implementación en Python que permite automatizar cálculos y generar visualizaciones para ilustrar los resultados.

Público Objetivo

Este libro está dirigido principalmente a estudiantes de nivel medio superior y superior, profesores, y profesionales del área de finanzas, economía y administración que deseen comprender cómo las matemáticas y la programación pueden aplicarse para resolver problemas complejos del mundo real. Ya sea que te intereses por la optimización de inversiones, la modelización económica, o simplemente quieras aprender a usar herramientas matemáticas y tecnológicas para mejorar la toma de decisiones, este libro es para ti.

¡Espero que disfrutes aprendiendo y aplicando los conceptos que aquí se presentan y que este libro te sirva como una guía práctica para el uso de las matemáticas en tu vida cotidiana!



Contenido

Capítulo 1: Álgebra: El Lenguaje Universal de los Números

I.1 Fundamentos del Álgebra

El álgebra es una de las ramas más fundamentales de las matemáticas, y sirve como un lenguaje universal que nos permite describir relaciones entre cantidades mediante el uso de símbolos. Estos símbolos, conocidos como **variables**, se utilizan para representar valores numéricos desconocidos o que pueden cambiar. El álgebra es la base para comprender ecuaciones, desigualdades, funciones y más, y su aplicación es esencial en múltiples disciplinas.

Conceptos Clave del Álgebra

- **Variables**: Son letras o símbolos que representan números o valores que pueden variar. Por ejemplo, en la ecuación $(x + 5 = 10)$, x es una variable.
- **Ecuaciones**: Son expresiones matemáticas que muestran la igualdad entre dos expresiones algebraicas. Por ejemplo, $(2x + 3 = 7)$.
- **Desigualdades**: Comparan dos valores o expresiones usando los símbolos $(<)$, $(>)$, $(\leq)$ o $(\geq)$. Por ejemplo, $(x > 5)$ significa que (x) es mayor que 5.
- **Resolución de ecuaciones**: El proceso de encontrar el valor de la variable que satisface la ecuación, como en $(2x + 3 = 7)$, donde $(x = 2)$.

Importancia del Álgebra en la Vida Cotidiana

El álgebra se utiliza en una variedad de situaciones cotidianas, desde la planificación financiera hasta la toma de decisiones empresariales. Nos permite modelar situaciones del mundo real mediante ecuaciones y resolver problemas que requieren análisis cuantitativo. Algunas áreas donde el álgebra es fundamental incluyen:

- **Gestión financiera**: Cálculos de ingresos, gastos y presupuestos.
- **Optimización**: Minimización de costos y maximización de beneficios en empresas.
- **Toma de decisiones**: Evaluación de diferentes opciones mediante el análisis de costos y beneficios.

I.2 Aplicaciones del Álgebra en las Ciencias: Desde la Economía hasta la Gestión Empresarial

El álgebra no es solo una disciplina teórica; tiene aplicaciones prácticas clave en muchas áreas del conocimiento, especialmente en las ciencias económicas y la gestión empresarial. A continuación, presentamos algunas de las aplicaciones más destacadas del álgebra en estas áreas:

1. Economía: Modelización de la Oferta y la Demanda

El álgebra es fundamental en economía para modelar cómo la oferta y la demanda de bienes y servicios cambian en función de factores como el precio. Las ecuaciones lineales permiten a los economistas predecir cómo fluctuará la demanda de un producto a medida que varía su precio.

Ejemplo: Si la demanda de un producto está dada por la ecuación ($D = 100 - 2P$), donde (P) es el precio, podemos calcular la demanda cuando el precio es ($P = 20$).

2. Finanzas: Cálculo de Intereses Simples y Compuestos

El álgebra es crucial en el campo de las finanzas para calcular intereses sobre préstamos e inversiones. Ya sea que estemos calculando el interés simple o el interés compuesto, las ecuaciones algebraicas nos permiten obtener rápidamente el saldo futuro de una cuenta o el costo de un préstamo.

Ejemplo: Si depositas $5,000 en una cuenta con un interés compuesto anual del 4%, la fórmula algebraica te permitirá calcular cuánto tendrás en la cuenta después de 3 años utilizando la fórmula del interés compuesto.

3. Gestión Empresarial: Optimización de Recursos

En el mundo empresarial, el álgebra es esencial para optimizar el uso de los recursos. Las empresas deben tomar decisiones estratégicas sobre cuántos productos fabricar, cómo asignar su presupuesto y cómo maximizar sus ganancias. Usando ecuaciones algebraicas, las empresas pueden modelar diferentes escenarios y tomar decisiones basadas en datos cuantitativos.

Ejemplo: Una empresa produce dos productos, A y B. Usando ecuaciones lineales, la empresa puede determinar cuántas unidades de cada producto debe fabricar para maximizar sus ganancias, respetando un presupuesto limitado.

Visualización y Optimización con Python

El álgebra no solo es útil en papel; puede ser fácilmente aplicada mediante la programación en Python para visualizar y optimizar problemas reales. Los ejemplos prácticos que se presentan en este capítulo incluirán soluciones matemáticas tradicionales y su implementación en Python, lo que permite automatizar cálculos y tomar decisiones más informadas.

I.3 Ejercicios de Aplicaciones y Soluciones (MathPY)

Ejercicio 1: Cálculo de Intereses Simples en una Cuenta de Ahorro

Una persona deposita $10,000 en una cuenta de ahorro que ofrece un interés simple anual del 5%. Con base en este escenario, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál será el saldo total en la cuenta después de 4 años?
2. ¿Cuál sería el saldo después de 6 años?
3. ¿Cómo afectaría un cambio en la tasa de interés al saldo final, si la tasa se incrementara al 7%?
4. ¿Cómo variaría el saldo si la persona decide dejar su dinero por 10 años?

Fórmulas:

El cálculo del interés simple se realiza utilizando la siguiente fórmula:

$$I = P \cdot r \cdot t$$

Donde:

- (I) es el interés generado.
- (P) es el principal o capital inicial.
- (r) es la tasa de interés anual (en decimal).
- (t) es el tiempo en años.

El saldo total en la cuenta después del periodo es:

$$A = P + I$$

Donde (A) es el saldo final.

Solución Matemática

Pregunta 1: Saldo después de 4 años

Utilizando la fórmula del interés simple:

$$I = P \cdot r \cdot t$$

Donde:

- $(P = 10,000)$

- $(r = 0.05)$ (5%)
- $(t = 4)$ años

Calculamos el interés generado:

$$I = 10,000 \cdot 0.05 \cdot 4 = 2,000$$

El saldo total en la cuenta después de 4 años es:

$$A = P + I = 10,000 + 2,000 = 12,000$$

Pregunta 2: Saldo después de 6 años

Usamos nuevamente la fórmula:

$$I = P \cdot r \cdot t$$

Con $(t = 6)$:

$$I = 10,000 \cdot 0.05 \cdot 6 = 3,000$$

El saldo total después de 6 años será:

$$A = 10,000 + 3,000 = 13,000$$

Pregunta 3: Efecto de un aumento en la tasa de interés (7%)

Si la tasa de interés es del 7%, el nuevo interés generado será:

$$I = 10,000 \cdot 0.07 \cdot 4 = 2,800$$

El saldo total después de 4 años será:

$$A = 10,000 + 2,800 = 12,800$$

Pregunta 4: Saldo después de 10 años

Con $(t = 10)$ y una tasa de interés del 5%, el interés generado será:

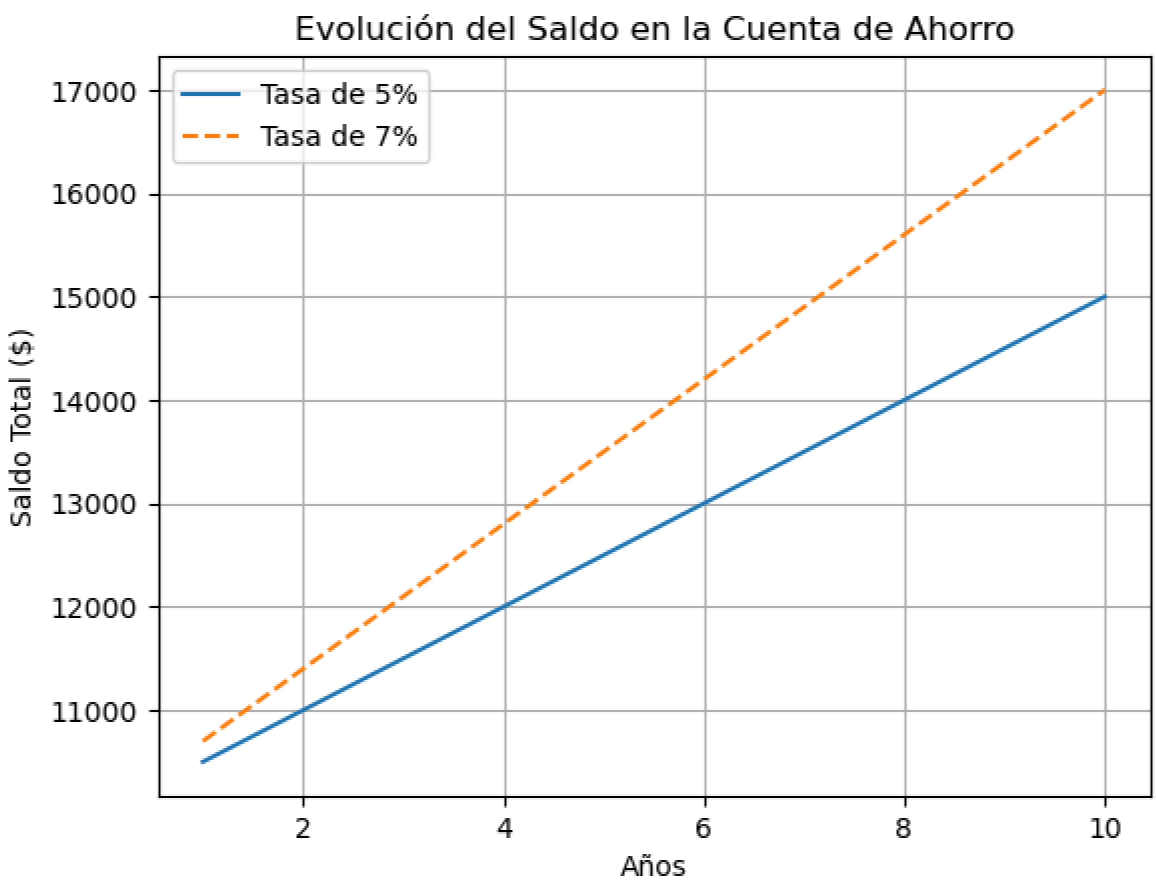
$$I = 10,000 \cdot 0.05 \cdot 10 = 5,000$$

El saldo total después de 10 años será:

$$A = 10,000 + 5,000 = 15,000$$

In [4]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros iniciales
P = 10000  # Principal
```

```python
r_5 = 0.05  # Tasa de interés 5%
r_7 = 0.07  # Tasa de interés 7%
años = np.arange(1, 11)  # Rango de años

# Función para calcular el saldo total con interés simple
def saldo_total(P, r, t):
    I = P * r * t
    return P + I

# Cálculos de saldo para cada tasa de interés
saldos_5 = [saldo_total(P, r_5, t) for t in años]
saldos_7 = [saldo_total(P, r_7, t) for t in años]

# Gráfico de la evolución del saldo
plt.plot(años, saldos_5, label='Tasa de 5%')
plt.plot(años, saldos_7, label='Tasa de 7%', linestyle='--')
plt.title('Evolución del Saldo en la Cuenta de Ahorro')
plt.xlabel('Años')
plt.ylabel('Saldo Total ($)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



Ejercicio 2: Comparación de Ofertas de Descuentos

Una tienda ofrece dos opciones de descuento para un televisor que cuesta $15,000:

1. Un descuento del 25% sobre el precio original.
2. Un descuento fijo de $3,500 sobre el precio original.

Con base en este escenario, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el precio final del televisor utilizando cada una de las opciones de descuento?
2. ¿Qué opción de descuento es más beneficiosa para el cliente?
3. Si el cliente cuenta con un presupuesto máximo de $12,000, ¿cuál de las opciones le permitiría comprar el televisor?
4. ¿Cuál sería el porcentaje de descuento en la opción 2, si se quisiera comparar con el porcentaje de la primera opción?

Fórmulas:

Para calcular el precio final con un descuento porcentual, utilizamos la siguiente fórmula:

$$P_{\text{final}} = P_{\text{original}} \cdot (1 - \frac{d}{100})$$

Donde:

- (P_{final}) es el precio final.
- $(P_{\text{original}} = 15,000)$ es el precio original.
- (d) es el descuento porcentual.

Para un descuento fijo:

$$P_{\text{final}} = P_{\text{original}} - D_{\text{fijo}}$$

Donde $(D_{\text{fijo}} = 3,500)$ es el descuento fijo.

Solución Matemática

Pregunta 1: Precio final con cada opción de descuento

Opción 1: Descuento porcentual del 25%

Utilizamos la fórmula del descuento porcentual:

$$P_{\text{final}} = P_{\text{original}} \cdot (1 - \frac{d}{100})$$

Donde:

- $(P_{\text{original}} = 15,000)$
- $(d = 25)$

Cálculo:

$$P_{\text{final}} = 15,000 \cdot (1 - \frac{25}{100}) = 15,000 \cdot 0.75 = 11,250$$

Opción 2: Descuento fijo de $3,500

Utilizamos la fórmula del descuento fijo:

$$P_{\text{final}} = P_{\text{original}} - D_{\text{fijo}}$$

Donde:

- ($P_{\text{original}} = 15,000$)
- ($D_{\text{fijo}} = 3,500$)

Cálculo:

$$P_{\text{final}} = 15,000 - 3,500 = 11,500$$

Pregunta 2: ¿Qué opción es más beneficiosa?

En la opción 1, el precio final es de $11,250.

En la opción 2, el precio final es de $11,500.

Por lo tanto, **la opción 1** es más beneficiosa para el cliente, ya que ofrece un precio más bajo.

Pregunta 3: ¿Cuál opción permite comprar con un presupuesto máximo de $12,000?

Ambas opciones permiten comprar el televisor, ya que el precio final en ambas opciones es inferior al presupuesto de $12,000.

Pregunta 4: Comparación porcentual con la opción 2

Para determinar el porcentaje de descuento en la opción 2, utilizamos la fórmula inversa:

$$d = \left(1 - \frac{P_{\text{final}}}{P_{\text{original}}}\right) \cdot 100$$

Donde:

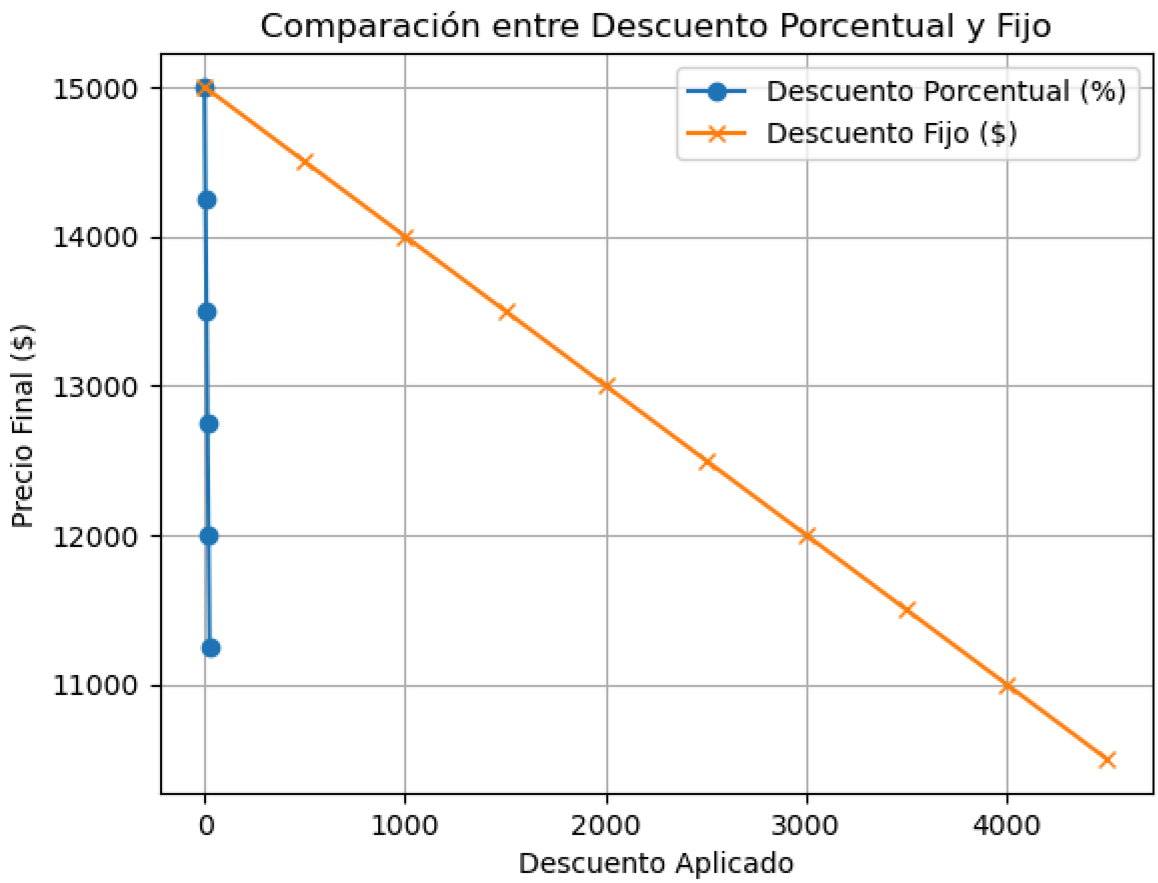
- ($P_{\text{final}} = 11,500$)
- ($P_{\text{original}} = 15,000$)

Cálculo:

$$d = \left(1 - \frac{11,500}{15,000}\right) \cdot 100 = (1 - 0.7667) \cdot 100 = 23.33\%$$

El descuento de la opción 2 es aproximadamente del 23.33%.

In [7]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros iniciales
precio_original = 15000  # Precio original del televisor
descuento_porcentual = 25  # Descuento porcentual de la opción 1
descuento_fijo = 3500  # Descuento fijo de la opción 2

# Función para calcular el precio final con descuento porcentual
def precio_con_descuento_porcentual(precio_original, d):
    return precio_original * (1 - d / 100)

# Función para calcular el precio final con descuento fijo
def precio_con_descuento_fijo(precio_original, d_fijo):
    return precio_original - d_fijo

# Cálculo del precio final con ambas opciones
precio_final_opcion_1 = precio_con_descuento_porcentual(precio_original, descuento_
precio_final_opcion_2 = precio_con_descuento_fijo(precio_original, descuento_fijo)

# Generar datos para la gráfica
precios_fijos = [precio_con_descuento_fijo(precio_original, d) for d in range(0, 50
precios_porcentuales = [precio_con_descuento_porcentual(precio_original, d) for d i
descuentos_fijos = np.arange(0, 5000, 500)
descuentos_porcentuales = np.arange(0, 30, 5)

# Gráfico de comparación entre descuentos fijos y porcentuales
plt.plot(descuentos_porcentuales, precios_porcentuales, label='Descuento Porcentual
plt.plot(descuentos_fijos, precios_fijos, label='Descuento Fijo ($)', marker='x')
plt.title('Comparación entre Descuento Porcentual y Fijo')
plt.xlabel('Descuento Aplicado')
plt.ylabel('Precio Final ($)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Imprimir resultados
print(f"Precio final con descuento del 25%: ${precio_final_opcion_1:.2f}")
print(f"Precio final con descuento fijo de $3,500: ${precio_final_opcion_2:.2f}")
```




```
Precio final con descuento del 25%: $11250.00
Precio final con descuento fijo de $3,500: $11500.00
```

Ejercicio 3: Optimización de Gastos en un Viaje

Estás planeando un viaje de 7 días y tienes un presupuesto de $20,000 para cubrir los siguientes gastos:

- Alojamiento: $2,000 por noche.
- Comidas: $500 por día.
- Actividades turísticas: $3,000 en total para el viaje.
- Transporte local: $1,000 en total para el viaje.

Con base en este escenario, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el costo total estimado del viaje si mantienes estos gastos?
2. Si decides reducir tus gastos en alojamiento en un 20%, ¿cuánto dinero ahorrarías en total?

3. ¿Cuál es el costo total si decides extender tu viaje a 10 días manteniendo los mismos gastos diarios?

4. Si tu presupuesto máximo es de $18,000, ¿qué porcentaje de reducción necesitas aplicar a tus gastos de alojamiento o actividades turísticas para ajustarte al presupuesto?

Fórmulas:

Para calcular el costo total del viaje utilizamos la fórmula:

$$C_{\text{total}} = C_{\text{alojamiento}} + C_{\text{comidas}} + C_{\text{actividades}} + C_{\text{transporte}}$$

Donde:

- ($C_{\text{alojamiento}}$) es el costo total del alojamiento por el número de noches.
- (C_{comidas}) es el costo de las comidas por día multiplicado por el número de días.
- ($C_{\text{actividades}}$) es el costo total de las actividades.
- ($C_{\text{transporte}}$) es el costo total del transporte local.

Para calcular los ahorros por reducción de un gasto, utilizamos:

$$Ahorro = C_{\text{gasto original}} \cdot \frac{r}{100}$$

Donde (r) es el porcentaje de reducción.

Solución Matemática

Pregunta 1: Costo total estimado del viaje

Utilizando la fórmula:

$$C_{\text{total}} = C_{\text{alojamiento}} + C_{\text{comidas}} + C_{\text{actividades}} + C_{\text{transporte}}$$

Cálculo:

- Alojamiento: ($C_{\text{alojamiento}} = 2,000 \cdot 7 = 14,000$)
- Comidas: ($C_{\text{comidas}} = 500 \cdot 7 = 3,500$)
- Actividades: ($C_{\text{actividades}} = 3,000$)
- Transporte: ($C_{\text{transporte}} = 1,000$)

Costo total:

$$C_{\text{total}} = 14,000 + 3,500 + 3,000 + 1,000 = 21,500$$

Pregunta 2: Ahorro por reducción del 20% en alojamiento

Usamos la fórmula de ahorro:

$$Ahorro = C_{\text{gasto original}} \cdot \frac{r}{100}$$

Donde:

- ($C_{\text{gasto original}} = 14,000$)
- ($r = 20$)

Cálculo:

$$Ahorro = 14,000 \cdot \frac{20}{100} = 2,800$$

El costo reducido del alojamiento será:

$$C_{\text{alojamiento reducido}} = 14,000 - 2,800 = 11,200$$

El costo total con el ahorro será:

$$C_{\text{total reducido}} = 11,200 + 3,500 + 3,000 + 1,000 = 18,700$$

Pregunta 3: Costo total si extiendes el viaje a 10 días

El costo del alojamiento y comidas se modifica. Cálculo:

- Alojamiento: ($C_{\text{alojamiento}} = 2,000 \cdot 10 = 20,000$)
- Comidas: ($C_{\text{comidas}} = 500 \cdot 10 = 5,000$)
- Actividades: ($C_{\text{actividades}} = 3,000$) (se mantiene)
- Transporte: ($C_{\text{transporte}} = 1,000$) (se mantiene)

Costo total:

$$C_{\text{total}} = 20,000 + 5,000 + 3,000 + 1,000 = 29,000$$

Pregunta 4: Reducción necesaria para ajustarse a un presupuesto de $18,000

Dado que el costo total actual es de $21,500, necesitamos reducir los gastos. El exceso es:

$$Exceso = 21,500 - 18,000 = 3,500$$

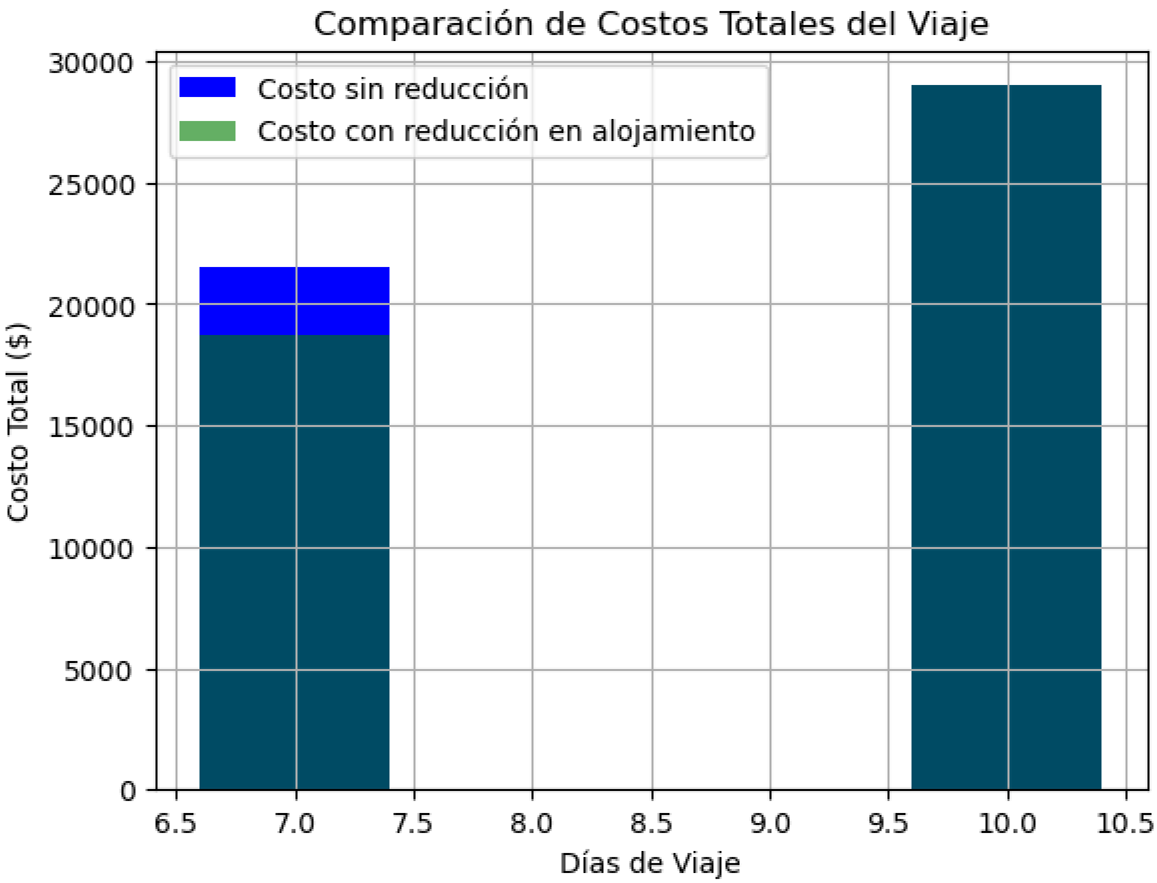
Para ajustar el presupuesto, reducimos el alojamiento o las actividades.

Reducción en porcentaje sobre el alojamiento:

$$r = \frac{Exceso}{C_{\text{alojamiento}}} \cdot 100 = \frac{3,500}{14,000} \cdot 100 = 25\%$$

Por lo tanto, se necesitaría una reducción del 25% en el costo del alojamiento para ajustarse al presupuesto.

In [10]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros iniciales
costo_alojamiento = 2000  # Costo por noche
costo_comidas = 500  # Costo por día
costo_actividades = 3000  # Costo total de actividades
costo_transporte = 1000  # Costo total de transporte

# Días de viaje
dias_7 = 7
dias_10 = 10

# Función para calcular el costo total
def costo_total(alojamiento, comidas, actividades, transporte, dias):
    return (alojamiento * dias) + (comidas * dias) + actividades + transporte

# Cálculos para 7 días y 10 días
costo_7_dias = costo_total(costo_alojamiento, costo_comidas, costo_actividades, cos
costo_10_dias = costo_total(costo_alojamiento, costo_comidas, costo_actividades, co

# Reducción del 20% en el alojamiento
costo_alojamiento_reducido = costo_alojamiento * 0.80
costo_7_dias_reducido = costo_total(costo_alojamiento_reducido, costo_comidas, cost

# Gráfica de comparación de costos
dias = [7, 10]
costos = [costo_7_dias, costo_10_dias]
costos_reducidos = [costo_7_dias_reducido, costo_10_dias]

plt.bar(dias, costos, label='Costo sin reducción', color='blue')
plt.bar(dias, costos_reducidos, label='Costo con reducción en alojamiento', color='
plt.title('Comparación de Costos Totales del Viaje')
plt.xlabel('Días de Viaje')
plt.ylabel('Costo Total ($)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Imprimir resultados
print(f"Costo total para 7 días: ${costo_7_dias:.2f}")
print(f"Costo total para 10 días: ${costo_10_dias:.2f}")
print(f"Costo total con reducción del 20% en el alojamiento para 7 días: ${costo_7_
```




```
Costo total para 7 días: $21500.00
Costo total para 10 días: $29000.00
Costo total con reducción del 20% en el alojamiento para 7 días: $18700.00
```

Ejercicio 4: Modelización de la Oferta y la Demanda

Una empresa vende un producto cuya demanda está dada por la siguiente ecuación lineal:

$$D = 100 - 2P$$

Donde:

- (D) es la cantidad demandada del producto.
- (P) es el precio del producto en dólares.

La oferta del producto está dada por la ecuación:

$$S = 20 + 3P$$

Donde:

- (S) es la cantidad ofrecida del producto.
- (P) es el precio del producto en dólares.

Con base en este escenario, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el precio de equilibrio del mercado, es decir, el precio en el que la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida?
2. ¿Cuál es la cantidad demandada y ofrecida en el precio de equilibrio?
3. Si la empresa fija el precio en $25, ¿cuál será la cantidad demandada y la cantidad ofrecida?
4. ¿Qué sucede con la cantidad demandada si el precio aumenta a $40?

Fórmulas:

El **precio de equilibrio** se encuentra igualando la oferta y la demanda:

$$D = S$$

Lo que da como resultado una ecuación lineal que permite resolver el precio de equilibrio (P).

Solución Matemática

Pregunta 1: Precio de equilibrio

Igualamos la oferta y la demanda para encontrar el precio de equilibrio:

$$100 - 2P = 20 + 3P$$

Resolviendo para (P):

$$100 - 20 = 3P + 2P$$

$$80 = 5P$$

$$P = \frac{80}{5} = 16$$

Por lo tanto, el precio de equilibrio es **$16**.

Pregunta 2: Cantidad demandada y ofrecida en el precio de equilibrio

Sustituimos $(P = 16)$ en las ecuaciones de demanda y oferta.

Demanda:

$$D = 100 - 2 \cdot 16 = 100 - 32 = 68$$

Oferta:

$$S = 20 + 3 \cdot 16 = 20 + 48 = 68$$

Por lo tanto, la cantidad demandada y ofrecida en el precio de equilibrio es **68 unidades**.

Pregunta 3: Cantidad demandada y ofrecida a un precio de $25

Sustituimos $(P = 25)$ en las ecuaciones de demanda y oferta.

Demanda:

$$D = 100 - 2 \cdot 25 = 100 - 50 = 50$$

Oferta:

$$S = 20 + 3 \cdot 25 = 20 + 75 = 95$$

A un precio de $25, la cantidad demandada es **50 unidades** y la cantidad ofrecida es **95 unidades**.

Pregunta 4: Cantidad demandada si el precio aumenta a $40

Sustituimos $(P = 40)$ en la ecuación de demanda.

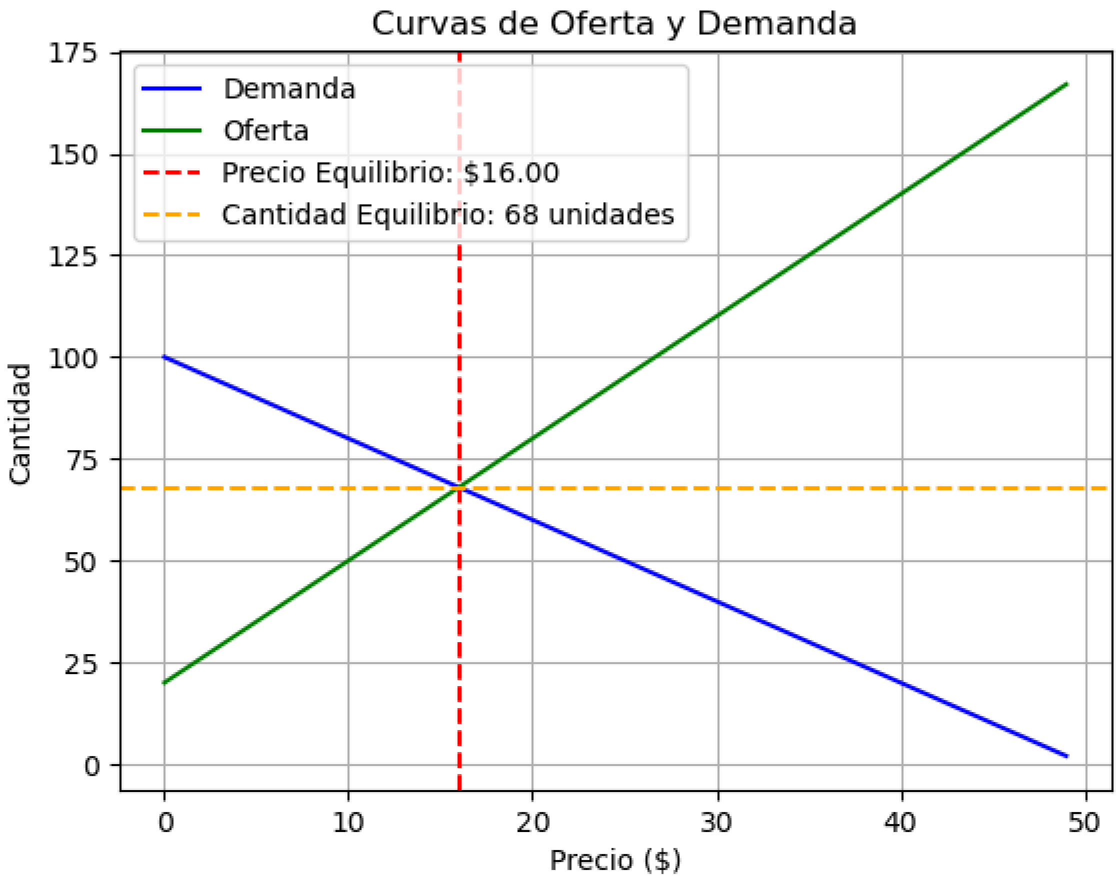
Demanda:

$$D = 100 - 2 \cdot 40 = 100 - 80 = 20$$

Si el precio aumenta a $40, la cantidad demandada es **20 unidades**.

In [13]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros
precio = np.arange(0, 50, 1)  # Rango de precios
demanda = 100 - 2 * precio  # Ecuación de la demanda
oferta = 20 + 3 * precio  # Ecuación de la oferta

# Función para calcular el precio de equilibrio
def precio_equilibrio():
    return (100 - 20) / (3 + 2)

# Función para calcular cantidad de equilibrio
def cantidad_equilibrio(P):
    D = 100 - 2 * P
    return D

# Calcular precio y cantidad de equilibrio
P_eq = precio_equilibrio()
Q_eq = cantidad_equilibrio(P_eq)
```

```
# Gráfico de oferta y demanda
plt.plot(precio, demanda, label='Demanda', color='blue')
plt.plot(precio, oferta, label='Oferta', color='green')
plt.axvline(P_eq, color='red', linestyle='--', label=f'Precio Equilibrio: ${P_eq:.2
plt.axhline(Q_eq, color='orange', linestyle='--', label=f'Cantidad Equilibrio: {Q_e
plt.title('Curvas de Oferta y Demanda')
plt.xlabel('Precio ($)')
plt.ylabel('Cantidad')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Imprimir resultados
print(f"Precio de equilibrio: ${P_eq:.2f}")
print(f"Cantidad de equilibrio: {Q_eq:.0f} unidades")
```




```
Precio de equilibrio: $16.00
Cantidad de equilibrio: 68 unidades
```

Ejercicio 5: Optimización de Producción y Maximización de Beneficios

Una empresa fabrica dos productos, (A) y (B). El costo de producción por unidad es:

- Producto (A): 20 **dólares** por unidad.
- Producto (B): 30 **dólares** por unidad.

El precio de venta es:

- Producto (A): 50 por **dólares** unidad.
- Producto (B): 70 **dólares** por unidad.

La empresa tiene un presupuesto máximo de $10,000 para la producción de ambos productos. Responde las siguientes preguntas:

1. Si la empresa produce 200 unidades de (A) y 100 unidades de (B), ¿cuál será el costo total de producción?
2. ¿Cuáles son los ingresos totales si se venden todas las unidades producidas?
3. ¿Cuál es la ganancia total si la empresa produce exactamente 200 unidades de (A) y 100 unidades de (B)?
4. Si la empresa quiere maximizar su beneficio, ¿cuántas unidades de (A) y (B) debe producir, respetando el límite presupuestario?

Fórmulas:

El **costo total de producción** se calcula como:

$$C_{\text{total}} = (C_A \cdot q_A) + (C_B \cdot q_B)$$

Donde:

- (C_A) es el costo de producción por unidad de (A).
- (q_A) es la cantidad de (A) producida.
- (C_B) es el costo de producción por unidad de (B).
- (q_B) es la cantidad de (B) producida.

El **ingreso total** se calcula como:

$$I_{\text{total}} = (P_A \cdot q_A) + (P_B \cdot q_B)$$

Donde:

- (P_A) es el precio de venta por unidad de (A).
- (P_B) es el precio de venta por unidad de (B).

La **ganancia total** es:

$$G_{\text{total}} = I_{\text{total}} - C_{\text{total}}$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Costo total de producción

Usamos la fórmula del costo total:

$$C_{\text{total}} = (C_A \cdot q_A) + (C_B \cdot q_B)$$

Donde:

- $(C_A = 20)$
- $(q_A = 200)$
- $(C_B = 30)$
- $(q_B = 100)$

Cálculo:

$$C_{\text{total}} = (20 \cdot 200) + (30 \cdot 100) = 4,000 + 3,000 = 7,000$$

El costo total de producción es **$7,000**.

Pregunta 2: Ingreso total

Usamos la fórmula del ingreso total:

$$I_{\text{total}} = (P_A \cdot q_A) + (P_B \cdot q_B)$$

Donde:

- $(P_A = 50)$
- $(q_A = 200)$
- $(P_B = 70)$
- $(q_B = 100)$

Cálculo:

$$I_{\text{total}} = (50 \cdot 200) + (70 \cdot 100) = 10,000 + 7,000 = 17,000$$

El ingreso total es **$17,000**.

Pregunta 3: Ganancia total

La ganancia total es la diferencia entre el ingreso total y el costo total:

$$G_{\text{total}} = I_{\text{total}} - C_{\text{total}} = 17,000 - 7,000 = 10,000$$

La ganancia total es **$10,000**.

Pregunta 4: Maximización de beneficio bajo un presupuesto

Para maximizar el beneficio, el costo total no debe exceder el presupuesto de $10,000:

$$C_{\text{total}} = (C_A \cdot q_A) + (C_B \cdot q_B) \leq 10,000$$

Sabemos que:

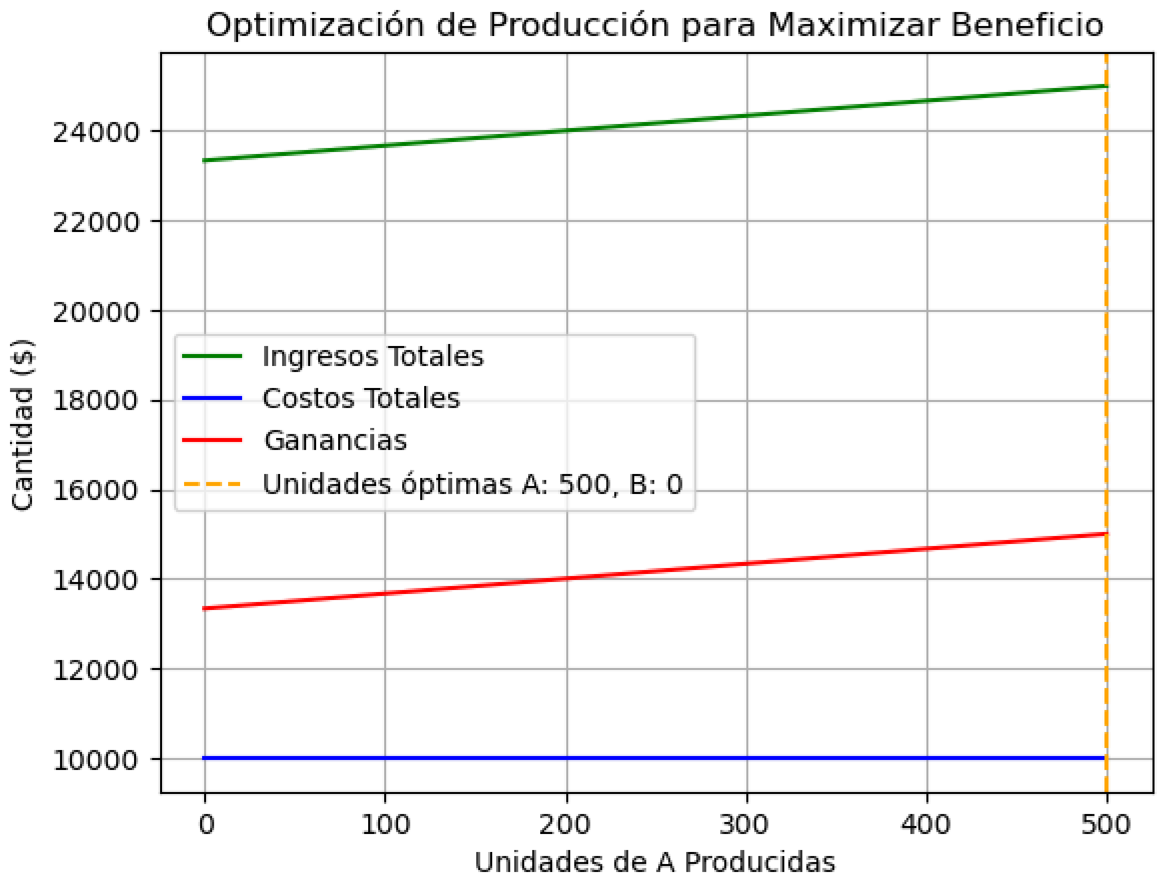
- $(C_A = 20)$
- $(C_B = 30)$

El problema se puede resolver maximizando la función de ganancia total sujeta a esta restricción presupuestaria.

In [16]:
```
from scipy.optimize import linprog
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros
C_A = 20  # Costo por unidad de A
C_B = 30  # Costo por unidad de B
P_A = 50  # Precio de venta por unidad de A
P_B = 70  # Precio de venta por unidad de B
presupuesto = 10000  # Presupuesto máximo de producción

# Coeficientes de la función objetivo (negativos porque estamos maximizando el bene
c = [-P_A, -P_B]

# Restricciones
A_eq = [[C_A, C_B]]  # Restricción de costos
b_eq = [presupuesto]  # Presupuesto máximo

# Límites de producción (no puede ser negativa)
limites = [(0, None), (0, None)]

# Optimización
resultado = linprog(c, A_eq=A_eq, b_eq=b_eq, bounds=limites, method='simplex')

# Cantidades óptimas de A y B
q_A_opt = resultado.x[0]
q_B_opt = resultado.x[1]

# Cálculo de ganancia total óptima
ganancia_opt = (P_A * q_A_opt + P_B * q_B_opt) - (C_A * q_A_opt + C_B * q_B_opt)

# Gráfico de comparación de ingresos y costos
q_A = np.arange(0, 501, 50)
q_B = (presupuesto - C_A * q_A) / C_B

ingresos_totales = P_A * q_A + P_B * q_B
costos_totales = C_A * q_A + C_B * q_B
ganancias = ingresos_totales - costos_totales

plt.plot(q_A, ingresos_totales, label='Ingresos Totales', color='green')
plt.plot(q_A, costos_totales, label='Costos Totales', color='blue')
plt.plot(q_A, ganancias, label='Ganancias', color='red')
plt.axvline(q_A_opt, color='orange', linestyle='--', label=f'Unidades óptimas A: {q
plt.title('Optimización de Producción para Maximizar Beneficio')
plt.xlabel('Unidades de A Producidas')
plt.ylabel('Cantidad ($)')
```

```
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Imprimir resultados
print(f"Cantidad óptima de A: {q_A_opt:.0f}")
print(f"Cantidad óptima de B: {q_B_opt:.0f}")
print(f"Ganancia total óptima: ${ganancia_opt:.2f}")
```

```
C:\Users\wpeuj\AppData\Local\Temp\ipykernel_25584\3956427988.py:23: DeprecationWarni
ng: `method='simplex'` is deprecated and will be removed in SciPy 1.11.0. Please use
one of the HiGHS solvers (e.g. `method='highs'`) in new code.
  resultado = linprog(c, A_eq=A_eq, b_eq=b_eq, bounds=limites, method='simplex')
```




```
Cantidad óptima de A: 500
Cantidad óptima de B: 0
Ganancia total óptima: $15000.00
```

Ejercicio 6: Cálculo del Valor Futuro de una Inversión

Un inversor deposita $8,000 en una cuenta de ahorros que ofrece una tasa de interés compuesto anual del 6%. La inversión se mantiene durante 5 años sin realizar ningún retiro.

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál será el valor futuro de la inversión después de 5 años?

2. ¿Cuál sería el valor futuro si la tasa de interés fuera del 8% anual en lugar del 6%?
3. Si el inversor decide añadir $1,000 adicionales al final del segundo año, ¿cuál será el nuevo valor futuro de la inversión?
4. ¿Cómo afectaría un cambio en el plazo a 10 años manteniendo la tasa de interés del 6%?

Fórmulas:

El **valor futuro** de una inversión con interés compuesto se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$FV = P \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Donde:

- (FV) es el valor futuro.
- (P) es el principal o capital inicial.
- (r) es la tasa de interés anual en porcentaje.
- (t) es el número de años.

Solución Matemática

Pregunta 1: Valor futuro de la inversión después de 5 años

Utilizamos la fórmula del valor futuro:

$$FV = P \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Donde:

- $(P = 8,000)$
- $(r = 6)$
- $(t = 5)$

Cálculo:

$$FV = 8,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 = 8,000 \cdot (1.06)^5$$

$$FV = 8,000 \cdot 1.3382 = 10,705.60$$

El valor futuro después de 5 años será **$10,705.60**.

Pregunta 2: Valor futuro con una tasa de interés del 8%

Usamos la misma fórmula, pero con $(r = 8)$:

$$FV = 8,000 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^5 = 8,000 \cdot (1.08)^5$$

$$FV = 8,000 \cdot 1.4693 = 11,754.40$$

El valor futuro con una tasa del 8% será **$11,754.40**.

Pregunta 3: Valor futuro con un depósito adicional de $1,000 al final del segundo año

Primero calculamos el valor futuro de los $8,000 después de 2 años:

$$FV_2 = 8,000 \cdot (1.06)^2 = 8,000 \cdot 1.1236 = 8,988.80$$

Ahora sumamos el depósito adicional de $1,000 y calculamos el valor futuro total al final de los 5 años:

$$FV_{\text{total}} = (8,988.80 + 1,000) \cdot (1.06)^3 = 9,988.80 \cdot 1.1910 = 11,895.78$$

El nuevo valor futuro será **$11,895.78**.

Pregunta 4: Valor futuro si el plazo es de 10 años

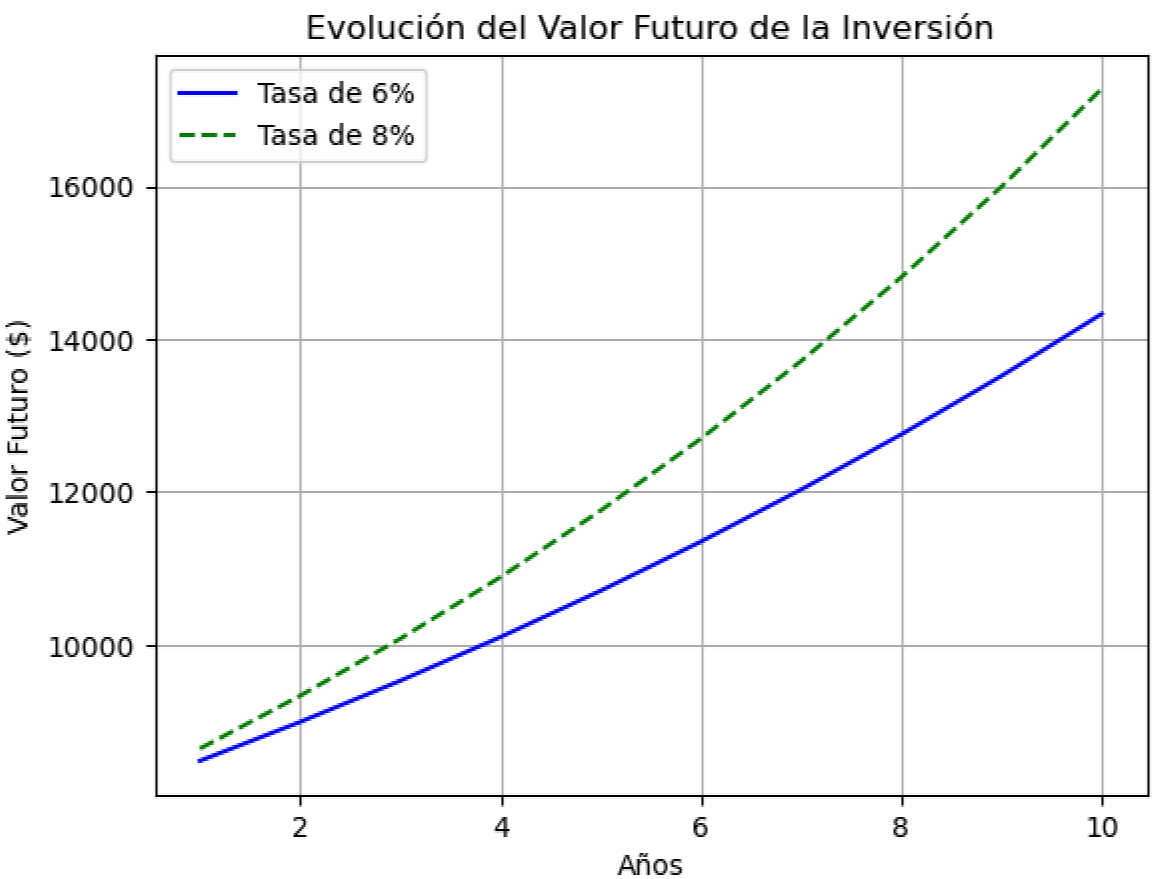
Usamos la fórmula del valor futuro con $(t = 10)$:

$$FV = 8,000 \cdot (1.06)^{10} = 8,000 \cdot 1.7908 = 14,326.40$$

El valor futuro después de 10 años será **$14,326.40**.

In [19]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros
P = 8000  # Capital inicial
r_6 = 6  # Tasa de interés del 6%
r_8 = 8  # Tasa de interés del 8%
años = np.arange(1, 11)  # Rango de años

# Función para calcular el valor futuro
def valor_futuro(P, r, t):
    return P * (1 + r / 100)**t

# Cálculo del valor futuro para diferentes tasas de interés
valores_6 = [valor_futuro(P, r_6, t) for t in años]
valores_8 = [valor_futuro(P, r_8, t) for t in años]
```

```
# Gráfico de la evolución del valor futuro
plt.plot(años, valores_6, label='Tasa de 6%', color='blue')
plt.plot(años, valores_8, label='Tasa de 8%', linestyle='--', color='green')
plt.title('Evolución del Valor Futuro de la Inversión')
plt.xlabel('Años')
plt.ylabel('Valor Futuro ($)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Imprimir resultados para el valor futuro después de 5 años
fv_5_años_6 = valor_futuro(P, r_6, 5)
fv_5_años_8 = valor_futuro(P, r_8, 5)
print(f"Valor futuro después de 5 años (6%): ${fv_5_años_6:.2f}")
print(f"Valor futuro después de 5 años (8%): ${fv_5_años_8:.2f}")

# Cálculo del valor futuro con depósito adicional después del segundo año
fv_2_años = valor_futuro(P, r_6, 2)
fv_total_con_deposito = valor_futuro(fv_2_años + 1000, r_6, 3)
print(f"Valor futuro con depósito adicional: ${fv_total_con_deposito:.2f}")
```




```
Valor futuro después de 5 años (6%): $10705.80
Valor futuro después de 5 años (8%): $11754.62
Valor futuro con depósito adicional: $11896.82
```

Ejercicio 7: Optimización de Inventarios utilizando el Modelo EOQ

Una tienda vende un producto a lo largo del año con una demanda constante de 2,000 unidades. Los costos por realizar un pedido son de 100 **dólares**, y el costo de almacenar una unidad por año es de 5 **dólares**.

Con base en este escenario, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la cantidad óptima de pedido (EOQ) que minimiza los costos totales de inventario?
2. ¿Cuántos pedidos se deben realizar al año?
3. ¿Cuál será el costo total anual de manejar el inventario si se realiza el pedido óptimo (EOQ)?
4. Si el costo de almacenamiento sube a $10 por unidad al año, ¿cómo afecta esto a la cantidad óptima de pedido?

Fórmulas:

La **cantidad óptima de pedido** (EOQ) se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

Donde:

- (D) es la demanda anual del producto.
- (S) es el costo por realizar un pedido.
- (H) es el costo de almacenamiento por unidad al año.

El **número de pedidos** se calcula con la siguiente fórmula:

$$\text{Número de pedidos} = \frac{D}{EOQ}$$

El **costo total anual de manejar el inventario** es:

$$\text{Costo Total} = \frac{D}{EOQ} \cdot S + \frac{EOQ}{2} \cdot H$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Cantidad óptima de pedido (EOQ)

Utilizamos la fórmula del EOQ:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

Donde:

- $(D = 2,000)$ (unidades por año)
- $(S = 100)$ (costo por pedido)
- $(H = 5)$ (costo de almacenamiento por unidad al año)

Cálculo:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,000 \cdot 100}{5}} = \sqrt{\frac{400,000}{5}} = \sqrt{80,000} = 282.84$$

Por lo tanto, la cantidad óptima de pedido es **283 unidades** (redondeando).

Pregunta 2: Número de pedidos al año

Utilizamos la fórmula:

$$\text{Número de pedidos} = \frac{D}{EOQ}$$

Cálculo:

$$\text{Número de pedidos} = \frac{2,000}{283} \approx 7.07$$

Se deben realizar **7 pedidos al año**.

Pregunta 3: Costo total anual de manejar el inventario

Utilizamos la fórmula:

$$\text{Costo Total} = \frac{D}{EOQ} \cdot S + \frac{EOQ}{2} \cdot H$$

Cálculo:

$$\text{Costo Total} = \frac{2,000}{283} \cdot 100 + \frac{283}{2} \cdot 5 = 7.07 \cdot 100 + 141.5 \cdot 5$$

$$\text{Costo Total} = 707 + 707.5 = 1,414.5$$

El costo total anual de manejar el inventario es **$1,414.50**.

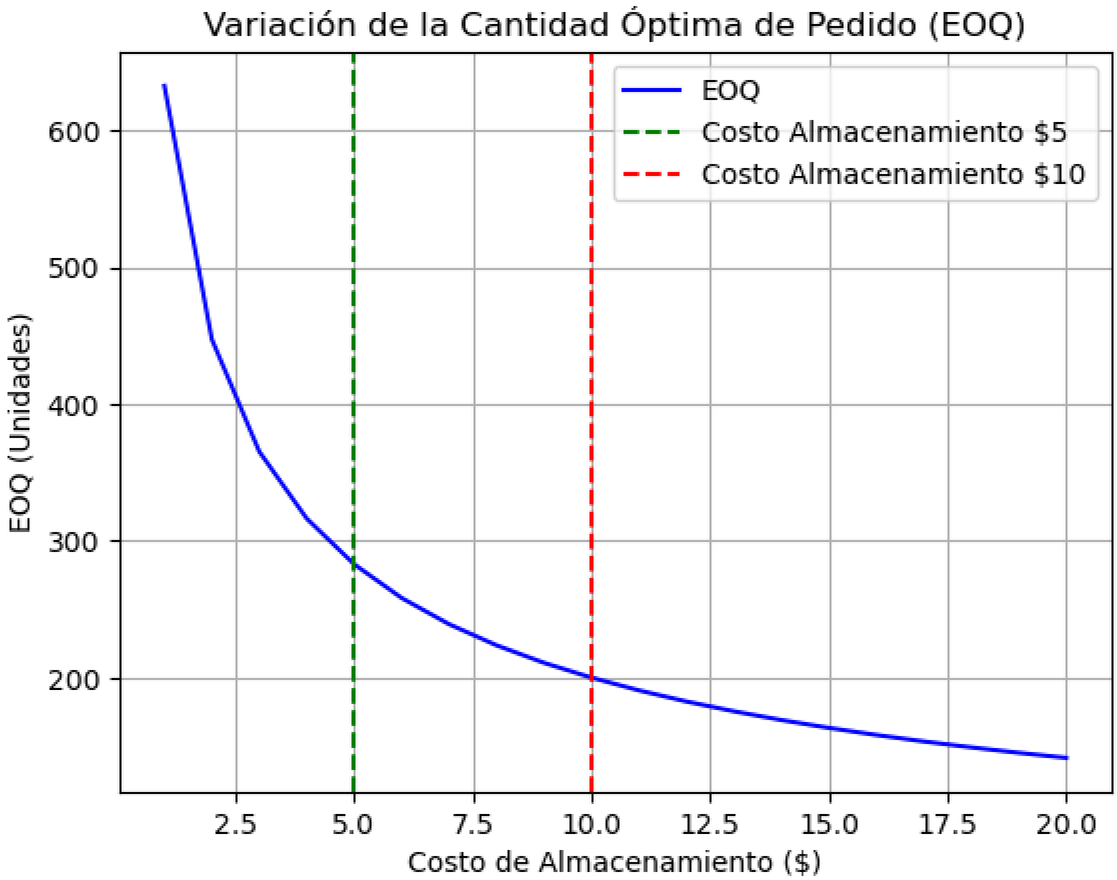
Pregunta 4: Impacto de un aumento en el costo de almacenamiento

Si el costo de almacenamiento sube a $(H = 10)$, recalculamos el EOQ:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,000 \cdot 100}{10}} = \sqrt{\frac{400,000}{10}} = \sqrt{40,000} = 200$$

Con el nuevo costo de almacenamiento, la cantidad óptima de pedido es **200 unidades**.

In [22]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros iniciales
D = 2000  # Demanda anual
S = 100  # Costo por pedido
H_5 = 5  # Costo de almacenamiento por unidad (escenario inicial)
H_10 = 10  # Costo de almacenamiento por unidad (escenario modificado)

# Función para calcular EOQ
def eoq(D, S, H):
    return np.sqrt((2 * D * S) / H)

# Cálculo de EOQ para los dos escenarios
eoq_5 = eoq(D, S, H_5)
eoq_10 = eoq(D, S, H_10)

# Gráfico de la variación del EOQ con diferentes costos de almacenamiento
costos_almacenamiento = np.arange(1, 21, 1)
eoq_values = [eoq(D, S, H) for H in costos_almacenamiento]

plt.plot(costos_almacenamiento, eoq_values, label='EOQ', color='blue')
plt.axvline(H_5, color='green', linestyle='--', label=f'Costo Almacenamiento $5')
plt.axvline(H_10, color='red', linestyle='--', label=f'Costo Almacenamiento $10')
plt.title('Variación de la Cantidad Óptima de Pedido (EOQ)')
plt.xlabel('Costo de Almacenamiento ($)')
plt.ylabel('EOQ (Unidades)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Imprimir resultados
print(f"EOQ con costo de almacenamiento $5: {eoq_5:.2f} unidades")
print(f"EOQ con costo de almacenamiento $10: {eoq_10:.2f} unidades")
```




```
EOQ con costo de almacenamiento $5: 282.84 unidades
EOQ con costo de almacenamiento $10: 200.00 unidades
```

Ejercicio 8: Optimización de Precios para Maximizar Ingresos

Una empresa está vendiendo un producto y ha determinado que la demanda del producto en función del precio sigue la siguiente relación:

$$D(P) = 500 - 20P$$

Donde:

- $(D(P))$ es la demanda del producto cuando el precio es (P).
- (P) es el precio del producto en dólares.

El ingreso total $(I(P))$ se define como el producto del precio (P) y la demanda $(D(P))$:

$$I(P) = P \cdot D(P)$$

Con base en este escenario, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la ecuación de ingresos en función del precio?
2. ¿Qué precio maximiza los ingresos de la empresa?

3. ¿Cuál es el ingreso máximo que la empresa puede obtener?
4. ¿Qué sucede con los ingresos si el precio es de 10 o 30 **dólares**?

Fórmulas:

El **ingreso total** en función del precio (P) es:

$$I(P) = P \cdot (500 - 20P)$$

Para encontrar el precio que maximiza los ingresos, derivamos la ecuación del ingreso y la igualamos a cero:

$$\frac{dI}{dP} = 0$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Ecuación de ingresos en función del precio

La ecuación de ingresos se obtiene multiplicando el precio por la demanda:

$$I(P) = P \cdot (500 - 20P) = 500P - 20P^2$$

Por lo tanto, la ecuación de ingresos en función del precio es:

$$I(P) = 500P - 20P^2$$

Pregunta 2: Precio que maximiza los ingresos

Para encontrar el precio que maximiza los ingresos, derivamos la ecuación del ingreso:

$$\frac{dI}{dP} = 500 - 40P$$

Igualamos la derivada a cero para encontrar el valor óptimo de (P):

$$500 - 40P = 0$$

Resolviendo para (P):

$$P = \frac{500}{40} = 12.5$$

El precio que maximiza los ingresos es **$12.50**.

Pregunta 3: Ingreso máximo

Sustituimos $(P = 12.5)$ en la ecuación de ingresos:

$$I(12.5) = 500 \cdot 12.5 - 20 \cdot (12.5)^2 = 6,250 - 3,125 = 3,125$$

El ingreso máximo que la empresa puede obtener es **$3,125**.

Pregunta 4: Ingresos con un precio de $10 o 30$

Para $(P = 10)$:

$$I(10) = 500 \cdot 10 - 20 \cdot (10)^2 = 5,000 - 2,000 = 3,000$$

Para $(P = 30)$:

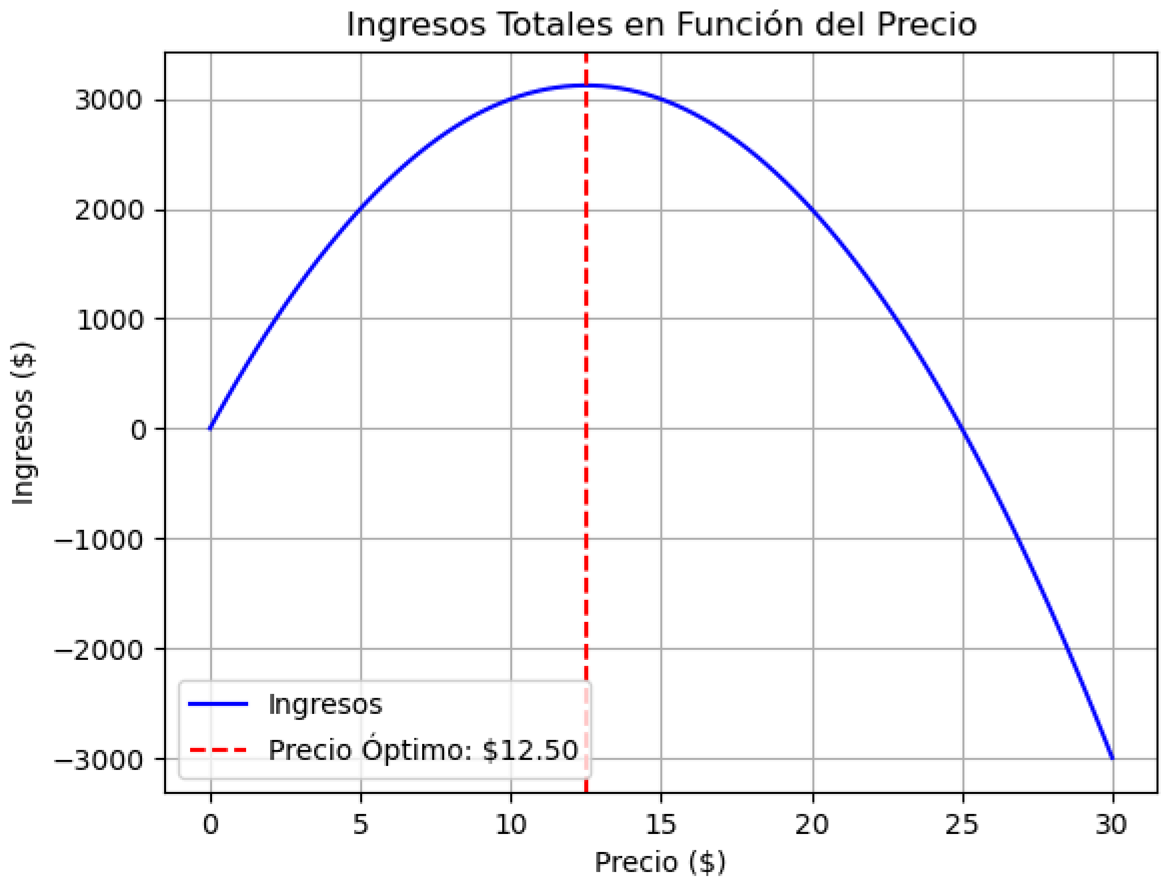
$$I(30) = 500 \cdot 30 - 20 \cdot (30)^2 = 15,000 - 18,000 = -3,000$$

Los ingresos son **3,000 dólares** con un precio de 10 **dólares** y **-3,000** con un precio de $30 (indica pérdida).

In [25]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Función de ingresos en función del precio
def ingreso_total(P):
    return 500 * P - 20 * P**2

# Rango de precios
precios = np.linspace(0, 30, 100)

# Cálculo de ingresos para diferentes precios
ingresos = ingreso_total(precios)

# Gráfico de ingresos en función del precio
plt.plot(precios, ingresos, label='Ingresos', color='blue')
plt.axvline(12.5, color='red', linestyle='--', label='Precio Óptimo: $12.50')
plt.title('Ingresos Totales en Función del Precio')
plt.xlabel('Precio ($)')
plt.ylabel('Ingresos ($)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Cálculo del ingreso máximo
P_opt = 12.5
I_max = ingreso_total(P_opt)

# Ingresos para precios de $10 y $30
I_10 = ingreso_total(10)
I_30 = ingreso_total(30)

# Imprimir resultados
print(f"Ingreso máximo con precio de $12.50: ${I_max:.2f}")
```

```
print(f"Ingresos con precio de $10: ${I_10:.2f}")
print(f"Ingresos con precio de $30: ${I_30:.2f}")
```




```
Ingreso máximo con precio de $12.50: $3125.00
Ingresos con precio de $10: $3000.00
Ingresos con precio de $30: $-3000.00
```

Ejercicio 9: Evaluación de Costos y Beneficios en la Producción

Una empresa tiene dos posibles escenarios de producción para su producto estrella. Cada escenario tiene diferentes costos y beneficios. Los detalles son los siguientes:

- **Escenario A**:
  - Costo fijo: $5,000
  - Costo variable por unidad: $20
  - Precio de venta por unidad: $50
  - Capacidad de producción máxima: 300 unidades
- **Escenario B**:

- Costo fijo: $8,000
- Costo variable por unidad: $15
- Precio de venta por unidad: $50
- Capacidad de producción máxima: 400 unidades

Con base en este escenario, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la cantidad mínima de unidades que debe producirse en cada escenario para cubrir los costos totales?
2. ¿Cuál es la ganancia total en cada escenario si la empresa produce y vende la capacidad máxima?
3. Si la demanda esperada es de 350 unidades, ¿qué escenario sería más rentable?
4. ¿Cómo cambia la ganancia si se ajusta el precio de venta a $55 por unidad en ambos escenarios?

Fórmulas:

El **costo total** en cada escenario se calcula con la siguiente fórmula:

$$C_{\text{total}} = C_{\text{fijo}} + C_{\text{variable}} \cdot q$$

Donde:

- (C_{fijo}) es el costo fijo.
- (C_{variable}) es el costo variable por unidad.
- (q) es la cantidad de unidades producidas.

La **ganancia total** se calcula con:

$$G_{\text{total}} = P \cdot q - C_{\text{total}}$$

Donde:

- (P) es el precio de venta por unidad.
- (q) es la cantidad de unidades producidas.
- (C_{total}) es el costo total.

Solución Matemática

Pregunta 1: Cantidad mínima de unidades para cubrir los costos totales

Para cubrir los costos totales, la ganancia debe ser igual a cero. Entonces:

$$P \cdot q = C_{\text{fijo}} + C_{\text{variable}} \cdot q$$

Resolviendo para (q) (cantidad mínima):

$$q = \frac{C_{\text{fijo}}}{P - C_{\text{variable}}}$$

Para el **Escenario A**:

$$q_A = \frac{5,000}{50-20} = \frac{5,000}{30} \approx 167 \text{ unidades}$$

Para el **Escenario B**:

$$q_B = \frac{8,000}{50-15} = \frac{8,000}{35} \approx 229 \text{ unidades}$$

Pregunta 2: Ganancia total si se produce la capacidad máxima

La ganancia total se calcula como:

$$G_{\text{total}} = P \cdot q - (C_{\text{fijo}} + C_{\text{variable}} \cdot q)$$

Para el **Escenario A** (produciendo 300 unidades):

$$G_A = 50 \cdot 300 - (5,000 + 20 \cdot 300)$$

$$G_A = 15,000 - 11,000 = 4,000$$

La ganancia total en el Escenario A es **$4,000**.

Para el **Escenario B** (produciendo 400 unidades):

$$G_B = 50 \cdot 400 - (8,000 + 15 \cdot 400)$$

$$G_B = 20,000 - 14,000 = 6,000$$

La ganancia total en el Escenario B es **$6,000**.

Pregunta 3: Escenario más rentable con una demanda de 350 unidades

Para **Escenario A**:

$$G_A = 50 \cdot 300 - (5,000 + 20 \cdot 300) = 15,000 - 11,000 = 4,000$$

Para **Escenario B**:

$$G_B = 50 \cdot 350 - (8,000 + 15 \cdot 350) = 17,500 - 13,250 = 4,250$$

Por lo tanto, el **Escenario B** es más rentable con una demanda de 350 unidades.

Pregunta 4: Cambio en la ganancia si el precio de venta es de $55

Si el precio de venta es $(P = 55)$:

Para el **Escenario A**:

$$G_A = 55 \cdot 300 - (5,000 + 20 \cdot 300) = 16,500 - 11,000 = 5,500$$

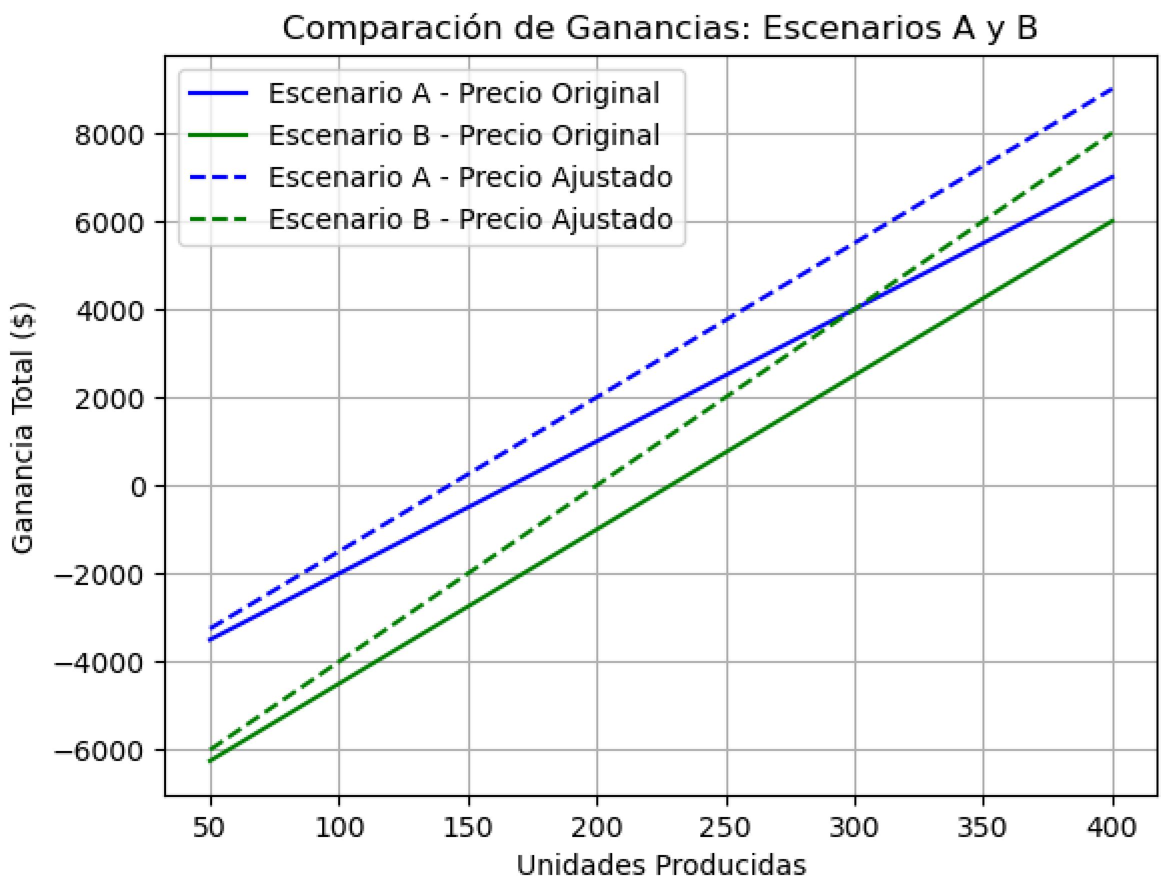
Para el **Escenario B**:

$$G_B = 55 \cdot 400 - (8,000 + 15 \cdot 400) = 22,000 - 14,000 = 8,000$$

Con el nuevo precio de venta, el Escenario B sigue siendo más rentable.

In [28]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros de los escenarios
P_original = 50  # Precio de venta original
P_nuevo = 55  # Precio de venta ajustado
C_fijo_A = 5000  # Costo fijo Escenario A
C_fijo_B = 8000  # Costo fijo Escenario B
C_variable_A = 20  # Costo variable por unidad Escenario A
C_variable_B = 15  # Costo variable por unidad Escenario B
capacidad_A = 300  # Capacidad máxima Escenario A
capacidad_B = 400  # Capacidad máxima Escenario B
unidades = np.arange(50, 450, 50)  # Rango de unidades producidas

# Función para calcular ganancia
def ganancia_total(P, C_fijo, C_variable, q):
    return P * q - (C_fijo + C_variable * q)

# Calcular ganancias con precio original
ganancias_A_original = [ganancia_total(P_original, C_fijo_A, C_variable_A, q) for q
ganancias_B_original = [ganancia_total(P_original, C_fijo_B, C_variable_B, q) for q

# Calcular ganancias con precio ajustado
ganancias_A_nuevo = [ganancia_total(P_nuevo, C_fijo_A, C_variable_A, q) for q in un
ganancias_B_nuevo = [ganancia_total(P_nuevo, C_fijo_B, C_variable_B, q) for q in un

# Gráfico de comparación de ganancias
plt.plot(unidades, ganancias_A_original, label='Escenario A - Precio Original', col
plt.plot(unidades, ganancias_B_original, label='Escenario B - Precio Original', col
plt.plot(unidades, ganancias_A_nuevo, label='Escenario A - Precio Ajustado', linest
plt.plot(unidades, ganancias_B_nuevo, label='Escenario B - Precio Ajustado', linest
plt.title('Comparación de Ganancias: Escenarios A y B')
plt.xlabel('Unidades Producidas')
plt.ylabel('Ganancia Total ($)')
```

```
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Imprimir resultados
print(f"Ganancia en Escenario A (300 unidades, precio $50): ${ganancia_total(P_orig
print(f"Ganancia en Escenario B (400 unidades, precio $50): ${ganancia_total(P_orig
print(f"Ganancia en Escenario A (300 unidades, precio $55): ${ganancia_total(P_nuev
print(f"Ganancia en Escenario B (400 unidades, precio $55): ${ganancia_total(P_nuev
```




```
Ganancia en Escenario A (300 unidades, precio $50): $4000.00
Ganancia en Escenario B (400 unidades, precio $50): $6000.00
Ganancia en Escenario A (300 unidades, precio $55): $5500.00
Ganancia en Escenario B (400 unidades, precio $55): $8000.00
```

Ejercicio 10: Cálculo del Punto de Equilibrio en una Empresa

Una empresa está evaluando la rentabilidad de un nuevo producto. Los costos asociados son los siguientes:

- Costo fijo: $6,000
- Costo variable por unidad: $30
- Precio de venta por unidad: $70

Con base en este escenario, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el punto de equilibrio, es decir, cuántas unidades necesita vender la empresa para cubrir sus costos?
2. Si la empresa espera vender 250 unidades, ¿cuál será su ganancia o pérdida?
3. ¿Qué impacto tendría en el punto de equilibrio si los costos fijos aumentaran a $7,500?
4. Si la empresa puede reducir el costo variable por unidad a $25, ¿cuál sería el nuevo punto de equilibrio?

Fórmulas:

El **punto de equilibrio** se calcula con la siguiente fórmula:

$$q_{\text{equilibrio}} = \frac{C_{\text{fijo}}}{P - C_{\text{variable}}}$$

Donde:

- ($q_{\text{equilibrio}}$) es el número de unidades a vender para alcanzar el equilibrio.
- (C_{fijo}) es el costo fijo.
- (P) es el precio de venta por unidad.
- (C_{variable}) es el costo variable por unidad.

La **ganancia o pérdida** se calcula con:

$$G_{\text{total}} = P \cdot q - (C_{\text{fijo}} + C_{\text{variable}} \cdot q)$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Punto de equilibrio

Para encontrar el punto de equilibrio, utilizamos la fórmula:

$$q_{\text{equilibrio}} = \frac{C_{\text{fijo}}}{P - C_{\text{variable}}}$$

Donde:

- ($C_{\text{fijo}} = 6,000$)
- ($P = 70$)
- ($C_{\text{variable}} = 30$)

Cálculo:

$$q_{\text{equilibrio}} = \frac{6,000}{70 - 30} = \frac{6,000}{40} = 150 \text{ unidades}$$

El punto de equilibrio es **150 unidades**.

Pregunta 2: Ganancia o pérdida al vender 250 unidades

La ganancia total se calcula con:

$$G_{\text{total}} = P \cdot q - (C_{\text{fijo}} + C_{\text{variable}} \cdot q)$$

Para $(q = 250)$:

$$G_{\text{total}} = 70 \cdot 250 - (6,000 + 30 \cdot 250) = 17,500 - (6,000 + 7,500)$$

$$G_{\text{total}} = 17,500 - 13,500 = 4,000$$

La empresa tendría una ganancia de **$4,000** al vender 250 unidades.

Pregunta 3: Impacto de un aumento en los costos fijos a $7,500

Si el costo fijo aumenta a $7,500, recalculamos el punto de equilibrio:

$$q_{\text{equilibrio}} = \frac{7,500}{70 - 30} = \frac{7,500}{40} = 187.5$$

El nuevo punto de equilibrio es **188 unidades** (redondeando).

Pregunta 4: Nuevo punto de equilibrio con un costo variable reducido a $25

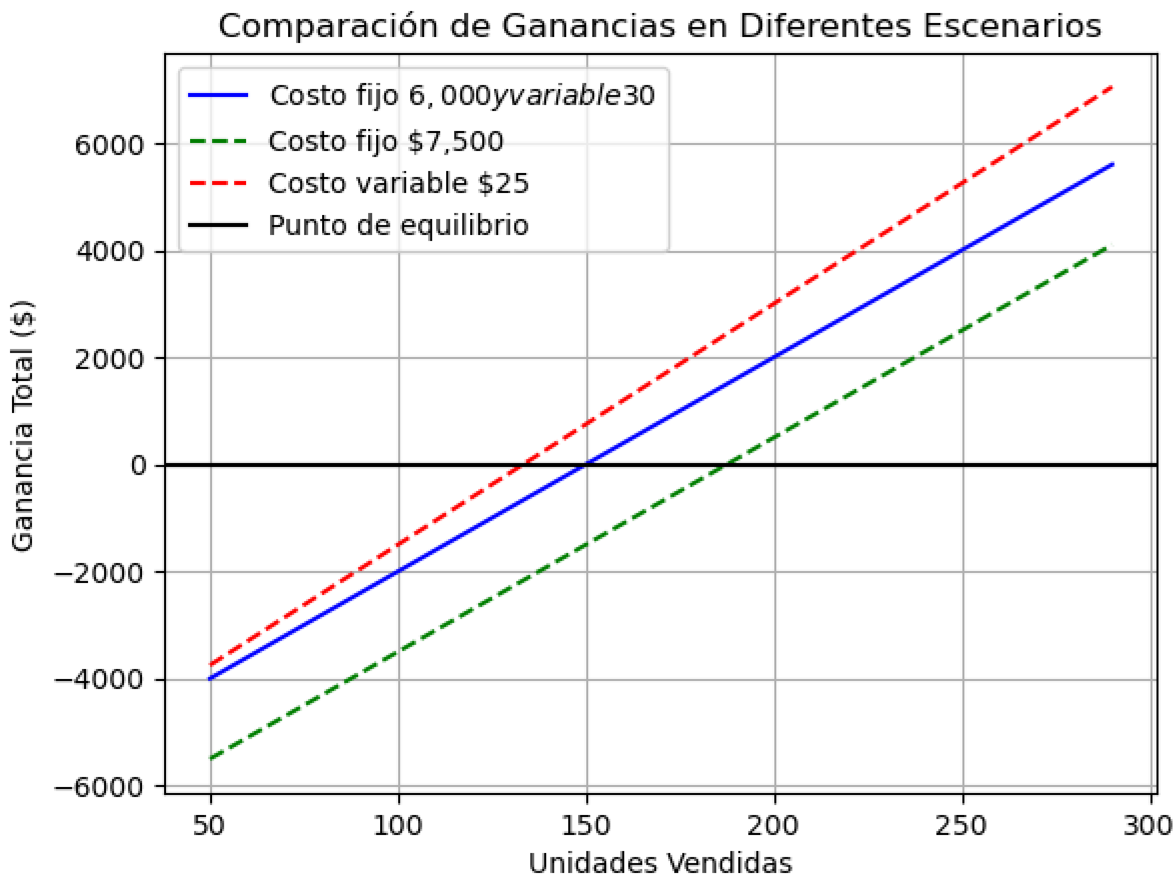
Si el costo variable por unidad disminuye a $(C_{\text{variable}} = 25)$, recalculamos el punto de equilibrio:

$$q_{\text{equilibrio}} = \frac{6,000}{70 - 25} = \frac{6,000}{45} = 133.33$$

El nuevo punto de equilibrio es **133 unidades** (redondeando).

In [31]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros iniciales
C_fijo = 6000  # Costo fijo original
C_variable = 30  # Costo variable por unidad original
P = 70  # Precio de venta por unidad
unidades = np.arange(50, 300, 10)  # Rango de unidades vendidas
```

```
# Función para calcular ganancia
def ganancia_total(q, P, C_fijo, C_variable):
    return P * q - (C_fijo + C_variable * q)

# Calcular ganancias para diferentes cantidades de unidades vendidas
ganancias_original = [ganancia_total(q, P, C_fijo, C_variable) for q in unidades]

# Escenario con aumento en costos fijos
C_fijo_aumento = 7500
ganancias_aumento = [ganancia_total(q, P, C_fijo_aumento, C_variable) for q in unid

# Escenario con reducción en costos variables
C_variable_reducido = 25
ganancias_reducido = [ganancia_total(q, P, C_fijo, C_variable_reducido) for q in un

# Gráfico de comparación de ganancias
plt.plot(unidades, ganancias_original, label='Costo fijo $6,000 y variable $30', co
plt.plot(unidades, ganancias_aumento, label='Costo fijo $7,500', linestyle='--', co
plt.plot(unidades, ganancias_reducido, label='Costo variable $25', linestyle='--',
plt.axhline(0, color='black', linestyle='-', label='Punto de equilibrio')
plt.title('Comparación de Ganancias en Diferentes Escenarios')
plt.xlabel('Unidades Vendidas')
plt.ylabel('Ganancia Total ($)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Imprimir resultados
q_equilibrio = 6000 / (P - C_variable)
q_equilibrio_aumento = 7500 / (P - C_variable)
q_equilibrio_reducido = 6000 / (P - C_variable_reducido)

print(f"Punto de equilibrio original: {q_equilibrio:.2f} unidades")
print(f"Punto de equilibrio con aumento de costos fijos: {q_equilibrio_aumento:.2f}
print(f"Punto de equilibrio con costo variable reducido: {q_equilibrio_reducido:.2f
```




```
Punto de equilibrio original: 150.00 unidades
Punto de equilibrio con aumento de costos fijos: 187.50 unidades
Punto de equilibrio con costo variable reducido: 133.33 unidades
```

Capítulo 2: Funciones: Modelando el Comportamiento de la Realidad

II.1 Fundamentos de las Funciones

Las funciones son uno de los conceptos más fundamentales en matemáticas y tienen aplicaciones en prácticamente todas las áreas de la ciencia y la vida cotidiana. Una función puede entenderse como una regla que asigna a cada elemento de un conjunto de entrada (dominio) un único elemento en un conjunto de salida (codominio).

Definición Formal:

Matemáticamente, una función (f) se denota como:

$$f : X \to Y$$

Donde:

- (X) es el conjunto de entrada (dominio).

- (Y) es el conjunto de salida (codominio).
- $(f(x))$ representa el valor de salida para un valor de entrada $(x \in X)$.

En notación de conjunto:

$$f(x) = y$$

Esto indica que a cada valor (x) del dominio le corresponde un único valor (y) en el codominio.

Tipos de Funciones:

1. **Función Lineal**: Una función de la forma $(f(x) = ax + b)$, donde (a) y (b) son constantes. Representa relaciones directas entre variables.

2. **Función Cuadrática**: Una función de la forma $(f(x) = ax^2 + bx + c)$, donde (a), (b) y (c) son constantes. Estas funciones modelan fenómenos donde la relación entre las variables no es lineal.

3. **Función Exponencial**: Una función de la forma $(f(x) = a \cdot b^x)$, donde (a) y (b) son constantes. Este tipo de función es útil para modelar el crecimiento o la decadencia de una cantidad en el tiempo, como el crecimiento poblacional o la depreciación de un activo.

4. **Función Logarítmica**: Una función de la forma $(f(x) = \log_b(x))$, que es la inversa de la función exponencial. Este tipo de función se usa en áreas como la economía para modelar la elasticidad de la demanda.

Propiedades de las Funciones:

- **Dominio**: Es el conjunto de todos los valores de entrada (x) para los cuales la función está definida.

- **Rango**: Es el conjunto de todos los valores de salida (y) que la función puede tomar.

- **Inyectividad**: Una función es inyectiva si asigna diferentes valores de salida para diferentes valores de entrada.

- **Sobreyectividad**: Una función es sobreyectiva si para todo elemento del codominio (Y) hay al menos un elemento del dominio (X) tal que $(f(x) = y)$.

- **Biyectividad**: Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo, lo que implica que tiene una inversa.

Las funciones son herramientas poderosas para modelar la realidad, ya que permiten describir cómo cambian las cantidades en relación con otras, lo que las hace esenciales en áreas como la economía, la física, la biología y la ciencia de datos.

II.2 Aplicaciones de las Funciones en la Economía y la Ciencia de Datos

Las funciones son ampliamente utilizadas en la economía y la ciencia de datos para modelar comportamientos y tomar decisiones. En estas disciplinas, las funciones ayudan a relacionar variables como precios, ingresos, costos, demanda y oferta.

Aplicaciones en Economía:

1. **Función de Demanda**:

   La demanda de un producto puede modelarse mediante una función que relaciona la cantidad demandada con el precio del producto. Una función de demanda típica tiene la forma:

   $$D(P) = a - bP$$

   Donde:

   - $(D(P))$ es la cantidad demandada en función del precio (P).
   - (a) y (b) son constantes que dependen del mercado.

   En general, la demanda disminuye a medida que el precio aumenta.

2. **Función de Oferta**:

   La oferta de un producto puede representarse mediante una función que relaciona la cantidad ofrecida con el precio del producto. Una función de oferta típica es:

   $$S(P) = c + dP$$

   Donde:

   - $(S(P))$ es la cantidad ofrecida en función del precio (P).
   - (c) y (d) son constantes que dependen del mercado.

   A diferencia de la demanda, la oferta generalmente aumenta a medida que el precio sube.

3. **Función de Costo Total**:

   El costo total de producir un número de unidades de un producto puede modelarse mediante una función de la forma:

   $$C(q) = C_f + C_v \cdot q$$

   Donde:

   - (C_f) es el costo fijo.
   - (C_v) es el costo variable por unidad.

- (q) es la cantidad de unidades producidas.

Esta función es fundamental para determinar el punto de equilibrio de una empresa.

Aplicaciones en Ciencia de Datos:

1. **Funciones de Pérdida**:

   En algoritmos de aprendizaje automático, las funciones de pérdida se utilizan para medir qué tan bien un modelo está ajustando los datos. Una función de pérdida común es la función de error cuadrático medio (MSE), que se define como:

   $$L(\hat{y}, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2$$

   Donde:

   - $(\hat{y}_i)$ es el valor predicho.
   - (y_i) es el valor real.
   - (n) es el número de observaciones.

   La función de pérdida ayuda a ajustar los parámetros de un modelo para minimizar el error y mejorar las predicciones.

2. **Regresión Lineal**:

   La regresión lineal es una técnica utilizada para modelar la relación entre una variable dependiente y una o más variables independientes. La ecuación de regresión lineal es:

   $$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n$$

   Donde:

   - (y) es la variable dependiente.
   - (β_0) es el intercepto.
   - $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ son los coeficientes de las variables $(x_1, \ldots, x_n)$.

   Este tipo de modelo es ampliamente utilizado en la ciencia de datos para hacer predicciones basadas en datos históricos.

3. **Función Sigmoide en Redes Neuronales**:

   En redes neuronales, las funciones de activación, como la función sigmoide, se utilizan para introducir no linealidades en el modelo. La función sigmoide tiene la forma:

   $$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

   Esta función transforma las entradas en un rango entre 0 y 1, lo que permite que la red neuronal aprenda relaciones complejas entre las variables de entrada.

Las funciones son herramientas esenciales tanto en economía como en la ciencia de datos. Su capacidad para modelar relaciones entre variables las convierte en un pilar fundamental para la toma de decisiones informadas y el análisis de datos. En los siguientes ejercicios, aplicaremos estos conceptos para resolver problemas reales en ambas disciplinas.

II.3 Ejercicios de Aplicaciones y Soluciones (MathPY)

Ejercicio 11: Modelización de la Demanda y el Precio

Una empresa ha determinado que la demanda de su producto en función del precio sigue la siguiente relación lineal:

$$D(P) = 400 - 10P$$

Donde:

- $(D(P))$ es la cantidad demandada cuando el precio es (P) dólares.
- (P) es el precio del producto.

Además, la oferta del producto está modelada por la ecuación:

$$S(P) = 50 + 5P$$

Donde:

- $(S(P))$ es la cantidad ofrecida cuando el precio es (P).

Con base en este escenario, responde las siguientes preguntas:

1. Encuentra el precio de equilibrio, es decir, el precio en el que la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida.

2. ¿Cuál es la cantidad demandada y ofrecida en el precio de equilibrio?

3. Si el precio aumenta a $30, ¿cuál será la nueva cantidad demandada y ofrecida?

4. ¿Qué sucede con la cantidad demandada si el precio disminuye a $10?

Fórmulas:

El **precio de equilibrio** se encuentra cuando:

$$D(P) = S(P)$$

Lo que da como resultado una ecuación lineal que permite resolver el precio de equilibrio.

Solución Matemática

Pregunta 1: Precio de equilibrio

Para encontrar el precio de equilibrio, igualamos la oferta y la demanda:

$$400 - 10P = 50 + 5P$$

Resolviendo para (P):

$$400 - 50 = 10P + 5P$$

$$350 = 15P$$

$$P = \frac{350}{15} \approx 23.33$$

El precio de equilibrio es **$23.33**.

Pregunta 2: Cantidad demandada y ofrecida en el precio de equilibrio

Sustituimos $(P = 23.33)$ en las ecuaciones de demanda y oferta.

Demanda:

$$D(23.33) = 400 - 10 \cdot 23.33 = 400 - 233.33 = 166.67$$

Oferta:

$$S(23.33) = 50 + 5 \cdot 23.33 = 50 + 116.67 = 166.67$$

Por lo tanto, la cantidad demandada y ofrecida en el precio de equilibrio es **166.67 unidades**.

Pregunta 3: Cantidad demandada y ofrecida a un precio de $30

Sustituimos $(P = 30)$ en las ecuaciones de demanda y oferta.

Demanda:

$$D(30) = 400 - 10 \cdot 30 = 400 - 300 = 100$$

Oferta:

$$S(30) = 50 + 5 \cdot 30 = 50 + 150 = 200$$

A un precio de \$30, la cantidad demandada es **100 unidades** y la cantidad ofrecida es **200 unidades**.

Pregunta 4: Cantidad demandada a un precio de \$10

Sustituimos $(P = 10)$ en la ecuación de demanda.

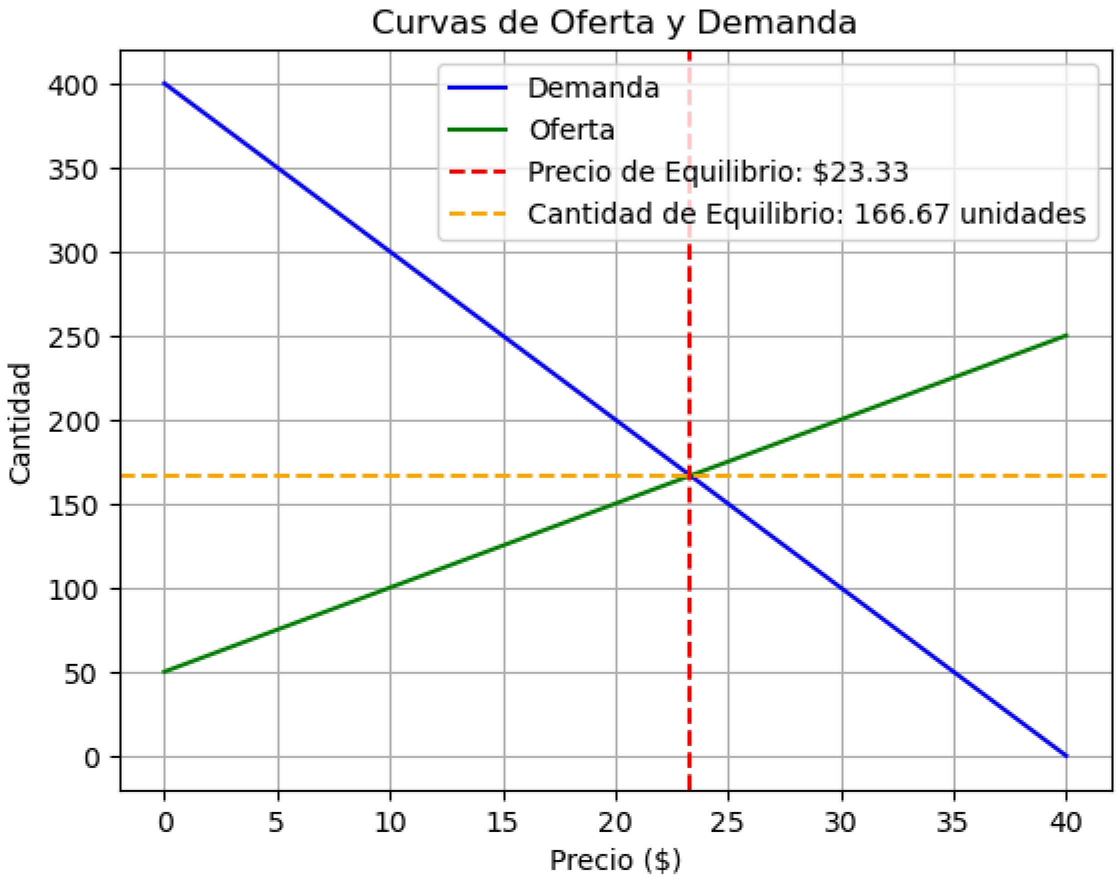
Demanda:

$$D(10) = 400 - 10 \cdot 10 = 400 - 100 = 300$$

Por lo tanto, a un precio de \$10, la cantidad demandada es **300 unidades**.

In [35]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Funciones de demanda y oferta en función del precio
def demanda(P):
    return 400 - 10 * P

def oferta(P):
    return 50 + 5 * P

# Rango de precios
precios = np.linspace(0, 40, 100)

# Cálculo de demanda y oferta
cantidades_demandadas = demanda(precios)
cantidades_ofrecidas = oferta(precios)

# Función para calcular el precio de equilibrio
def precio_equilibrio():
    return (400 - 50) / (10 + 5)

# Cálculo del precio y cantidad de equilibrio
P_eq = precio_equilibrio()
D_eq = demanda(P_eq)
S_eq = oferta(P_eq)

# Gráfico de oferta y demanda
plt.plot(precios, cantidades_demandadas, label='Demanda', color='blue')
plt.plot(precios, cantidades_ofrecidas, label='Oferta', color='green')
plt.axvline(P_eq, color='red', linestyle='--', label=f'Precio de Equilibrio: ${P_eq
plt.axhline(D_eq, color='orange', linestyle='--', label=f'Cantidad de Equilibrio: {
plt.title('Curvas de Oferta y Demanda')
plt.xlabel('Precio ($)')
plt.ylabel('Cantidad')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Imprimir resultados
```

```python
print(f"Precio de equilibrio: ${P_eq:.2f}")
print(f"Cantidad de equilibrio: {D_eq:.2f} unidades")
```




```
Precio de equilibrio: $23.33
Cantidad de equilibrio: 166.67 unidades
```

Ejercicio 12: Cálculo de la Trayectoria de un Objeto en Movimiento

Un ingeniero está analizando la trayectoria de un proyectil lanzado desde el suelo con una velocidad inicial de $(v_0 = 50, \mathrm{m/s})$ y un ángulo de $(\theta = 45^\circ)$ con respecto al suelo. La ecuación que describe la altura $(y(t))$ del proyectil en función del tiempo (t) es:

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin(\theta) - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Donde:

- (v_0) es la velocidad inicial del proyectil.
- (θ) es el ángulo de lanzamiento.
- $(g = 9.8, \mathrm{m/s}^2)$ es la aceleración debida a la gravedad.
- (t) es el tiempo en segundos.
- $(y(t))$ es la altura en metros.

Con base en este escenario, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?
2. ¿En qué instante de tiempo alcanza la altura máxima?
3. ¿En qué tiempo el proyectil regresa al suelo?
4. Traza la gráfica de la trayectoria del proyectil para los primeros 10 segundos.

Fórmulas:

La altura máxima se alcanza cuando la velocidad vertical es cero, es decir, cuando la derivada de $(y(t))$ con respecto a (t) es igual a cero.

La altura máxima se calcula con:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\theta)}{2g}$$

El tiempo para alcanzar la altura máxima es:

$$t_{\max} = \frac{v_0 \cdot \sin(\theta)}{g}$$

El tiempo total de vuelo (cuando $(y(t) = 0)$) se obtiene resolviendo la ecuación cuadrática resultante de la ecuación de trayectoria.

Solución Matemática

Pregunta 1: Altura máxima del proyectil

Para calcular la altura máxima, usamos la fórmula:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\theta)}{2g}$$

Donde:

- $(v_0 = 50, \mathrm{m/s})$
- $(\theta = 45^\circ)$
- $(g = 9.8, \mathrm{m/s}^2)$

Cálculo:

$$y_{\max} = \frac{50^2 \cdot \sin^2(45^\circ)}{2 \cdot 9.8} = \frac{2500 \cdot 0.707^2}{19.6}$$

$$y_{\max} = \frac{2500 \cdot 0.499}{19.6} \approx 63.7\,\mathrm{m}$$

Por lo tanto, la altura máxima alcanzada por el proyectil es **63.7 metros**.

Pregunta 2: Instante en que alcanza la altura máxima

El tiempo para alcanzar la altura máxima se calcula con la fórmula:

$$t_{\text{max}} = \frac{v_0 \cdot \sin(\theta)}{g}$$

Cálculo:

$$t_{\text{max}} = \frac{50 \cdot \sin(45^\circ)}{9.8} = \frac{50 \cdot 0.707}{9.8} \approx 3.61\,\text{segundos}$$

El tiempo para alcanzar la altura máxima es aproximadamente **3.61 segundos**.

Pregunta 3: Tiempo en que el proyectil regresa al suelo

El tiempo total de vuelo es el doble del tiempo para alcanzar la altura máxima, ya que la trayectoria es simétrica:

$$t_{\text{total}} = 2 \cdot t_{\text{max}} = 2 \cdot 3.61 \approx 7.22\,\text{segundos}$$

El proyectil regresa al suelo aproximadamente a los **7.22 segundos**.

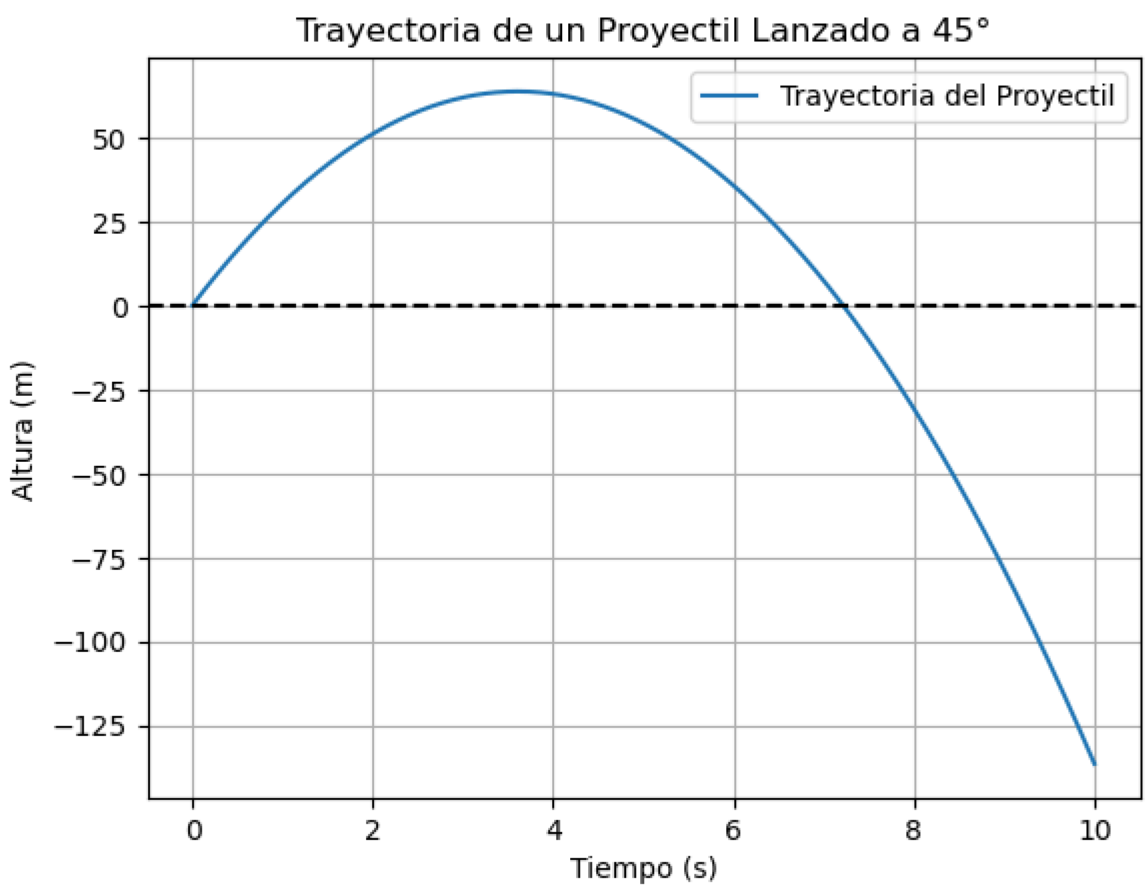
Pregunta 4: Gráfica de la trayectoria

La trayectoria del proyectil se puede representar gráficamente utilizando la ecuación de la altura $(y(t))$ en función del tiempo para un intervalo de 0 a 10 segundos.

In [38]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del problema
v0 = 50  # Velocidad inicial (m/s)
g = 9.8  # Aceleración debida a la gravedad (m/s^2)
theta = np.radians(45)  # Ángulo de lanzamiento en radianes
t_total = 2 * v0 * np.sin(theta) / g  # Tiempo total de vuelo

# Función de la trayectoria del proyectil
def trayectoria(t):
    return v0 * t * np.sin(theta) - 0.5 * g * t**2

# Rango de tiempo (0 a 10 segundos)
t = np.linspace(0, 10, 500)

# Cálculo de la altura en función del tiempo
y = trayectoria(t)
```

```
# Gráfico de la trayectoria del proyectil
plt.plot(t, y, label='Trayectoria del Proyectil')
plt.axhline(0, color='black', linestyle='--')  # Línea de suelo
plt.title('Trayectoria de un Proyectil Lanzado a 45°')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('Altura (m)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Cálculos clave
t_max = v0 * np.sin(theta) / g  # Tiempo de altura máxima
y_max = (v0**2 * np.sin(theta)**2) / (2 * g)  # Altura máxima

# Imprimir resultados
print(f"Altura máxima alcanzada: {y_max:.2f} metros")
print(f"Tiempo para alcanzar la altura máxima: {t_max:.2f} segundos")
print(f"Tiempo total de vuelo: {t_total:.2f} segundos")
```




```
Altura máxima alcanzada: 63.78 metros
Tiempo para alcanzar la altura máxima: 3.61 segundos
Tiempo total de vuelo: 7.22 segundos
```

Ejercicio 13: Modelo de Crecimiento Poblacional Exponencial

La población de una ciudad ha estado creciendo de manera exponencial durante los últimos años. La población inicial de la ciudad en el año 2000 era de 50,000 personas. Se ha estimado que la tasa de crecimiento anual es del 3%.

La ecuación para modelar el crecimiento poblacional en función del tiempo es:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$$

Donde:

- ($P(t)$) es la población después de (t) años.
- (P_0) es la población inicial (50,000 personas en el año 2000).
- (r) es la tasa de crecimiento (3% anual o 0.03).
- (t) es el tiempo en años.
- (e) es el número de Euler (($e \approx 2.718$)).

Con base en este escenario, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál será la población en el año 2025?

2. ¿Cuántos años tardará la población en duplicarse?

3. Traza la gráfica del crecimiento poblacional durante los primeros 50 años.

4. Si la tasa de crecimiento aumenta al 4%, ¿cuál será la población proyectada en el año 2050?

Fórmulas:

La ecuación del crecimiento exponencial es:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$$

El tiempo para que la población se duplique puede calcularse usando la fórmula:

$$t_{\text{doblar}} = \frac{\ln(2)}{r}$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Población en el año 2025

Usamos la fórmula del crecimiento poblacional:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$$

Donde:

- ($P_0 = 50,000$)
- ($r = 0.03$)
- ($t = 2025 - 2000 = 25, \text{años}$)

Cálculo:

$$P(25) = 50,000 \cdot e^{0.03 \cdot 25} = 50,000 \cdot e^{0.75}$$

Aproximando:

$$P(25) = 50,000 \cdot 2.117 = 105,850 \, \text{personas}$$

Por lo tanto, la población en el año 2025 será de **105,850 personas**.

Pregunta 2: Tiempo para que la población se duplique

El tiempo para que la población se duplique se calcula con la fórmula:

$$t_{\text{doblar}} = \frac{\ln(2)}{r}$$

Donde:

- (r = 0.03)

Cálculo:

$$t_{\text{doblar}} = \frac{\ln(2)}{0.03} = \frac{0.6931}{0.03} \approx 23.10 \, \text{años}$$

Por lo tanto, la población se duplicará en aproximadamente **23.10 años**.

Pregunta 3: Gráfica del crecimiento poblacional durante 50 años

Para representar el crecimiento poblacional durante 50 años (del 2000 al 2050), usaremos la ecuación del crecimiento exponencial para diferentes valores de (t).

Pregunta 4: Población proyectada en 2050 con una tasa de crecimiento del 4%

Si la tasa de crecimiento aumenta al 4% (($r = 0.04$)) y queremos calcular la población en el año 2050 (($t = 50$)):

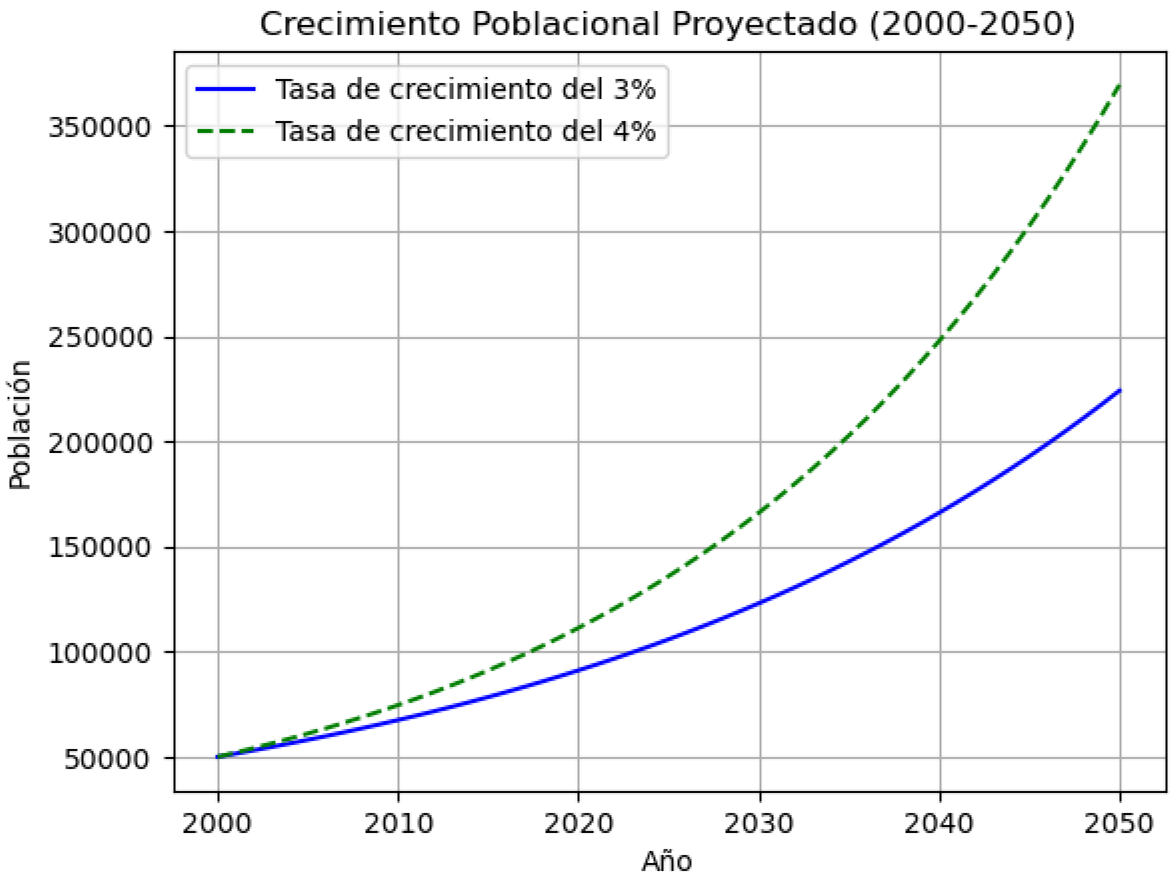
$$P(50) = 50,000 \cdot e^{0.04 \cdot 50} = 50,000 \cdot e^{2}$$

Aproximando:

$$P(50) = 50,000 \cdot 7.389 = 369,450 \,\text{personas}$$

La población proyectada en 2050 con una tasa de crecimiento del 4% será de **369,450 personas**.

In [41]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del problema
P0 = 50000  # Población inicial
r_3 = 0.03  # Tasa de crecimiento anual (3%)
r_4 = 0.04  # Tasa de crecimiento anual (4%)
años = np.arange(0, 51, 1)  # Años desde el 2000 hasta el 2050

# Función de crecimiento exponencial
def crecimiento_poblacional(P0, r, t):
    return P0 * np.exp(r * t)

# Cálculo de la población con una tasa de crecimiento del 3% y 4%
poblacion_3 = crecimiento_poblacional(P0, r_3, años)
poblacion_4 = crecimiento_poblacional(P0, r_4, años)

# Gráfico del crecimiento poblacional
plt.plot(años + 2000, poblacion_3, label='Tasa de crecimiento del 3%', color='blue'
plt.plot(años + 2000, poblacion_4, label='Tasa de crecimiento del 4%', color='green
plt.title('Crecimiento Poblacional Proyectado (2000-2050)')
plt.xlabel('Año')
plt.ylabel('Población')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Cálculos clave
P_2025 = crecimiento_poblacional(P0, r_3, 25)
t_doblar = np.log(2) / r_3
P_2050_4 = crecimiento_poblacional(P0, r_4, 50)

# Imprimir resultados
print(f"Población proyectada en 2025: {P_2025:.0f} personas")
print(f"Tiempo para que la población se duplique: {t_doblar:.2f} años")
print(f"Población proyectada en 2050 (con tasa de crecimiento del 4%): {P_2050_4:.0
```




```
Población proyectada en 2025: 105850 personas
Tiempo para que la población se duplique: 23.10 años
Población proyectada en 2050 (con tasa de crecimiento del 4%): 369453 personas
```

Ejercicio 14: Decaimiento de Contaminantes en un Ecosistema

Un río contaminado contiene una cierta cantidad de un contaminante cuya concentración disminuye con el tiempo debido a procesos naturales de descomposición. La concentración de contaminante en el río sigue un modelo de decaimiento exponencial, descrito por la ecuación:

$$C(t) = C_0 \cdot e^{-kt}$$

Donde:

- $(C(t))$ es la concentración de contaminante en función del tiempo (t), en años.
- (C_0) es la concentración inicial del contaminante.
- (k) es la constante de decaimiento, que depende del tipo de contaminante.
- (t) es el tiempo en años.

Se sabe que la concentración inicial del contaminante es de 100 mg/L y que la constante de decaimiento es $(k = 0.1)$ por año.

Con base en este modelo, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál será la concentración de contaminante después de 5 años?
2. ¿Cuántos años tardará la concentración en reducirse a la mitad de su valor inicial?
3. Traza la gráfica de la concentración de contaminante durante los primeros 20 años.
4. Si el proceso de descomposición se acelera y la constante de decaimiento aumenta a $(k = 0.15)$, ¿cuál será la concentración después de 10 años?

Fórmulas:

La ecuación del decaimiento exponencial es:

$$C(t) = C_0 \cdot e^{-kt}$$

El tiempo para que la concentración se reduzca a la mitad (vida media) se calcula con la fórmula:

$$t_{\text{media}} = \frac{\ln(2)}{k}$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Concentración de contaminante después de 5 años

Usamos la fórmula del decaimiento exponencial:

$$C(t) = C_0 \cdot e^{-kt}$$

Donde:

- $(C_0 = 100, \text{mg/L})$
- $(k = 0.1)$
- $(t = 5, \text{años})$

Cálculo:

$$C(5) = 100 \cdot e^{-0.1 \cdot 5} = 100 \cdot e^{-0.5}$$

Aproximando:

$$C(5) = 100 \cdot 0.6065 = 60.65 \, \text{mg/L}$$

Por lo tanto, la concentración de contaminante después de 5 años será de **60.65 mg/L**.

Pregunta 2: Tiempo para reducir la concentración a la mitad

El tiempo para que la concentración se reduzca a la mitad (vida media) se calcula con la fórmula:

$$t_{\text{media}} = \frac{\ln(2)}{k}$$

Donde:

- $(k = 0.1)$

Cálculo:

$$t_{\text{media}} = \frac{\ln(2)}{0.1} = \frac{0.6931}{0.1} = 6.93\,\text{años}$$

Por lo tanto, la concentración se reducirá a la mitad en aproximadamente **6.93 años**.

Pregunta 3: Gráfica de la concentración de contaminante durante 20 años

Para representar la concentración de contaminante durante los primeros 20 años, usamos la ecuación del decaimiento exponencial para diferentes valores de (t).

Pregunta 4: Concentración después de 10 años con una constante de decaimiento aumentada a $(k = 0.15)$

Si la constante de decaimiento aumenta a $(k = 0.15)$ y queremos calcular la concentración después de 10 años:

$$C(10) = 100 \cdot e^{-0.15 \cdot 10} = 100 \cdot e^{-1.5}$$

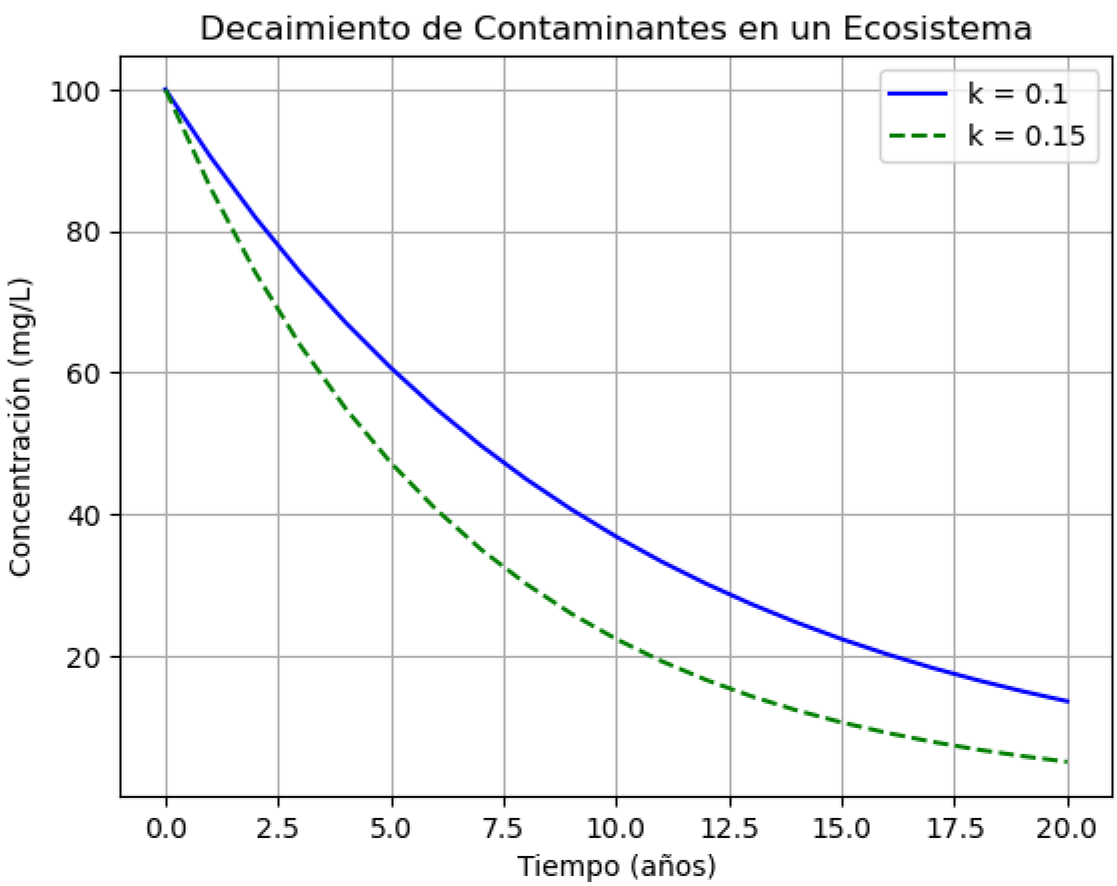
Aproximando:

$$C(10) = 100 \cdot 0.2231 = 22.31\,\text{mg/L}$$

La concentración después de 10 años con la nueva constante será de **22.31 mg/L**.

In [44]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del problema
C0 = 100  # Concentración inicial (mg/L)
k_1 = 0.1  # Constante de decaimiento (0.1 por año)
k_2 = 0.15  # Nueva constante de decaimiento (0.15 por año)
tiempo = np.arange(0, 21, 1)  # Años desde 0 hasta 20

# Función de decaimiento exponencial
```

```
def concentracion(C0, k, t):
    return C0 * np.exp(-k * t)

# Cálculo de la concentración con k = 0.1 y k = 0.15
concentracion_1 = concentracion(C0, k_1, tiempo)
concentracion_2 = concentracion(C0, k_2, tiempo)

# Gráfico del decaimiento del contaminante
plt.plot(tiempo, concentracion_1, label='k = 0.1', color='blue')
plt.plot(tiempo, concentracion_2, label='k = 0.15', color='green', linestyle='--')
plt.title('Decaimiento de Contaminantes en un Ecosistema')
plt.xlabel('Tiempo (años)')
plt.ylabel('Concentración (mg/L)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Cálculos clave
C_5 = concentracion(C0, k_1, 5)
t_media = np.log(2) / k_1
C_10_k2 = concentracion(C0, k_2, 10)

# Imprimir resultados
print(f"Concentración después de 5 años (k=0.1): {C_5:.2f} mg/L")
print(f"Tiempo para que la concentración se reduzca a la mitad: {t_media:.2f} años"
print(f"Concentración después de 10 años con k=0.15: {C_10_k2:.2f} mg/L")
```



```
Concentración después de 5 años (k=0.1): 60.65 mg/L
Tiempo para que la concentración se reduzca a la mitad: 6.93 años
Concentración después de 10 años con k=0.15: 22.31 mg/L
```

Ejercicio 15: Cálculo del Valor Futuro de una Inversión con Interés Compuesto

Un inversionista deposita $10,000 en una cuenta bancaria que ofrece un interés compuesto anual del 5%. El interés se capitaliza al final de cada año.

La fórmula para calcular el valor futuro de una inversión con interés compuesto es:

$$A(t) = P \cdot (1 + \frac{r}{n})^{nt}$$

Donde:

- $(A(t))$ es el valor futuro de la inversión después de (t) años.
- (P) es el monto principal inicial.
- (r) es la tasa de interés anual (5% o 0.05).
- (n) es el número de veces que se capitaliza el interés por año (en este caso, 1).
- (t) es el número de años.

Con base en este escenario, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál será el valor futuro de la inversión después de 10 años?

2. Si el inversionista deposita $5,000 adicionales al final de cada año, ¿cuál será el valor futuro después de 10 años?

3. Traza la gráfica del crecimiento de la inversión durante los primeros 15 años.

4. ¿Qué sucede si la tasa de interés aumenta al 6%? Calcula el nuevo valor

futuro para 10 años con los $5,000 adicionales cada año.

Fórmulas:

La ecuación del valor futuro con interés compuesto es:

$$A(t) = P \cdot (1 + \frac{r}{n})^{nt}$$

Para el caso donde se agregan depósitos adicionales (D) al final de cada período, la fórmula es:

$$A(t) = P \cdot (1 + \frac{r}{n})^{nt} + D \cdot \left(\frac{(1 + \frac{r}{n})^{nt} - 1}{\frac{r}{n}} \right)$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Valor futuro de la inversión después de 10 años

Usamos la fórmula del interés compuesto:

$$A(t) = P \cdot (1 + \frac{r}{n})^{nt}$$

Donde:

- $(P = 10,000)$
- $(r = 0.05)$
- $(n = 1)$
- $(t = 10)$

Cálculo:

$$A(10) = 10,000 \cdot (1 + \frac{0.05}{1})^{1 \cdot 10} = 10,000 \cdot (1.05)^{10}$$

Aproximando:

$$A(10) = 10,000 \cdot 1.6289 = 16,289 \, \text{dólares}$$

Por lo tanto, el valor futuro de la inversión después de 10 años será de **$16,289**.

Pregunta 2: Valor futuro con depósitos adicionales de $5,000 al final de cada año

Usamos la fórmula de interés compuesto con depósitos adicionales:

$$A(t) = P \cdot (1 + \frac{r}{n})^{nt} + D \cdot \left(\frac{(1 + \frac{r}{n})^{nt} - 1}{\frac{r}{n}} \right)$$

Donde:

- $(P = 10,000)$
- $(D = 5,000)$
- $(r = 0.05)$
- $(n = 1)$
- $(t = 10)$

Cálculo:

$$A(10) = 10,000 \cdot (1.05)^{10} + 5,000 \cdot \left(\frac{(1.05)^{10} - 1}{0.05} \right)$$

Aproximando:

$$A(10) = 10,000 \cdot 1.6289 + 5,000 \cdot \left(\frac{1.6289 - 1}{0.05}\right)$$

$$A(10) = 16,289 + 5,000 \cdot 12.578 = 16,289 + 62,890 = 79,179 \, \text{dólares}$$

Por lo tanto, el valor futuro con depósitos adicionales de **5,000 dólares** al final de cada año será de **$79,179**.

Pregunta 3: Gráfica del crecimiento de la inversión durante 15 años

Usaremos la ecuación del interés compuesto para graficar el crecimiento durante 15 años, tanto con como sin depósitos adicionales.

Pregunta 4: Valor futuro con una tasa de interés del 6% y depósitos adicionales

Si la tasa de interés aumenta a $(r = 0.06)$ y los depósitos adicionales son de $5,000 al final de cada año:

Cálculo:

$$A(10) = 10,000 \cdot (1.06)^{10} + 5,000 \cdot \left(\frac{(1.06)^{10} - 1}{0.06}\right)$$

Aproximando:

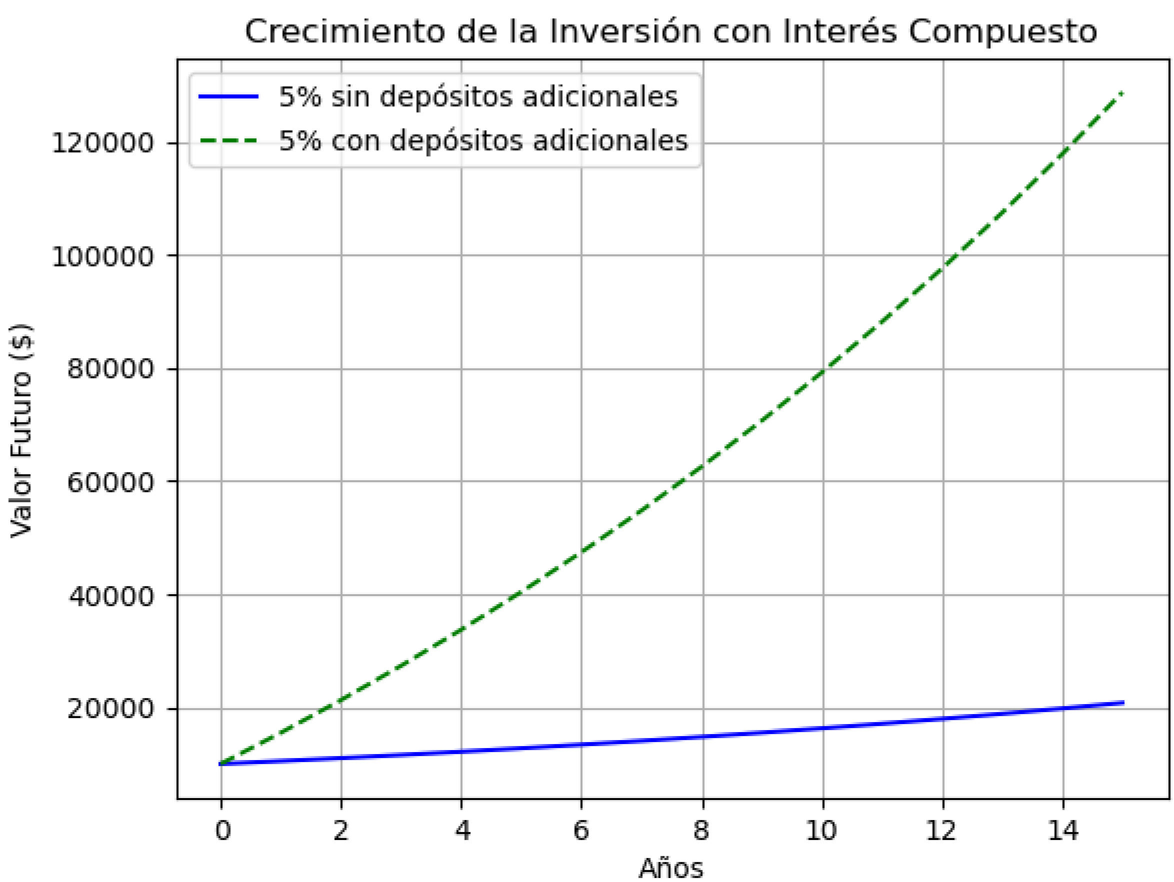
$$A(10) = 10,000 \cdot 1.7908 + 5,000 \cdot \left(\frac{1.7908 - 1}{0.06}\right)$$

$$A(10) = 17,908 + 5,000 \cdot 13.18 = 17,908 + 65,900 = 83,808 \, \text{dólares}$$

El valor futuro con una tasa de interés del 6% y los depósitos adicionales será de **$83,808**.

In [47]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del problema
P = 10000  # Inversión inicial
D = 5000  # Depósito adicional anual
r_5 = 0.05  # Tasa de interés 5%
r_6 = 0.06  # Tasa de interés 6%
n = 1  # Capitalización anual
años = np.arange(0, 16, 1)  # Años desde 0 hasta 15

# Función de valor futuro con interés compuesto
```

```
def valor_futuro(P, r, n, t, D=0):
    return P * (1 + r/n)**(n*t) + D * ((1 + r/n)**(n*t) - 1) / (r/n)

# Cálculo del valor futuro con y sin depósitos adicionales
valor_futuro_5 = valor_futuro(P, r_5, n, años)
valor_futuro_5_D = valor_futuro(P, r_5, n, años, D)

# Cálculo con tasa del 6%
valor_futuro_6_D = valor_futuro(P, r_6, n, 10, D)

# Gráfico del valor futuro
plt.plot(años, valor_futuro_5, label='5% sin depósitos adicionales', color='blue')
plt.plot(años, valor_futuro_5_D, label='5% con depósitos adicionales', color='green
plt.title('Crecimiento de la Inversión con Interés Compuesto')
plt.xlabel('Años')
plt.ylabel('Valor Futuro ($)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Imprimir resultados
A_10_sin_D = valor_futuro(P, r_5, n, 10)
A_10_con_D = valor_futuro(P, r_5, n, 10, D)
A_10_con_D_6 = valor_futuro(P, r_6, n, 10, D)

print(f"Valor futuro después de 10 años sin depósitos adicionales: ${A_10_sin_D:.2f
print(f"Valor futuro después de 10 años con depósitos adicionales: ${A_10_con_D:.2f
print(f"Valor futuro después de 10 años con depósitos adicionales (6%): ${A_10_con_
```



```
Valor futuro después de 10 años sin depósitos adicionales: $16288.95
Valor futuro después de 10 años con depósitos adicionales: $79178.41
Valor futuro después de 10 años con depósitos adicionales (6%): $83812.45
```

Ejercicio 16: Predicción de Ventas con Regresión Lineal

Una empresa ha recopilado datos sobre sus ventas mensuales ((y)) y el gasto en publicidad ((x)) durante los últimos 12 meses. La empresa quiere utilizar un modelo de regresión lineal para predecir las ventas en función del gasto en publicidad.

Los datos recopilados son los siguientes:

Mes	Gasto en publicidad ($1000)	Ventas ($1000)
1	2	20
2	3	30
3	5	50
4	7	70
5	8	80
6	9	85
7	10	88
8	11	90
9	13	95
10	14	100
11	15	110
12	17	120

La fórmula de la regresión lineal simple es:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

Donde:

- (y) es la variable dependiente (ventas en $1000).
- (x) es la variable independiente (gasto en publicidad en $1000).
- (β_0) es el intercepto (valor de (y cuando ($x = 0$)).
- (β_1) es el coeficiente de regresión (pendiente de la recta).

Con base en estos datos, responde las siguientes preguntas:

1. Encuentra los valores de (β_0) (intercepto) y (β_1) (pendiente) utilizando la fórmula de mínimos cuadrados.

2. Usa el modelo de regresión lineal para predecir las ventas si el gasto en publicidad es de $12,000.

3. Traza la gráfica de dispersión de los datos junto con la línea de regresión.

4. ¿Cuál es el error cuadrático medio (MSE) de las predicciones?

Fórmulas:

La pendiente (β_1) y el intercepto (β_0) se calculan con:

$$\beta_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \cdot \bar{x}$$

El **error cuadrático medio (MSE)** es:

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Cálculo de los valores de (β_0) y (β_1)

Para calcular (β_1) (pendiente), usamos la fórmula:

$$\beta_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

Donde:

- (x_i) y (y_i) son los valores individuales de (x) y (y) en los datos.
- $(\bar{x})$ y $(\bar{y})$ son los promedios de (x) y (y).

Cálculo de los promedios:

$$\bar{x} = \frac{2+3+5+7+8+9+10+11+13+14+15+17}{12} = \frac{124}{12} \approx 10.33$$

$$\bar{y} = \frac{20+30+50+70+80+85+88+90+95+100+110+120}{12} = \frac{938}{12} \approx 78.17$$

Cálculo de (β_1):

$$\beta_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

$\beta_1 \approx 5.92$

Cálculo de (β_0) (intercepto):

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \cdot \bar{x}$$

$$\beta_0 = 78.17 - 5.92 \cdot 10.33 \approx 16.55$$

Por lo tanto, los valores estimados son:

- ($\beta_0 \approx 16.55$)
- ($\beta_1 \approx 5.92$)

Pregunta 2: Predicción de las ventas para un gasto en publicidad de $12,000

Para predecir las ventas si ($x = 12$), usamos la ecuación de la recta de regresión:

$$y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$$

Cálculo:

$$y = 16.55 + 5.92 \cdot 12 = 16.55 + 71.04 = 87.59 \, \text{mil dólares}$$

Por lo tanto, si el gasto en publicidad es de $12,000, se espera que las ventas sean de **$87,590**.

Pregunta 3: Gráfica de dispersión y línea de regresión

Para trazar la gráfica, calcularemos los valores de (y) en la recta de regresión usando los valores estimados de (β_0) y (β_1).

Pregunta 4: Cálculo del error cuadrático medio (MSE)

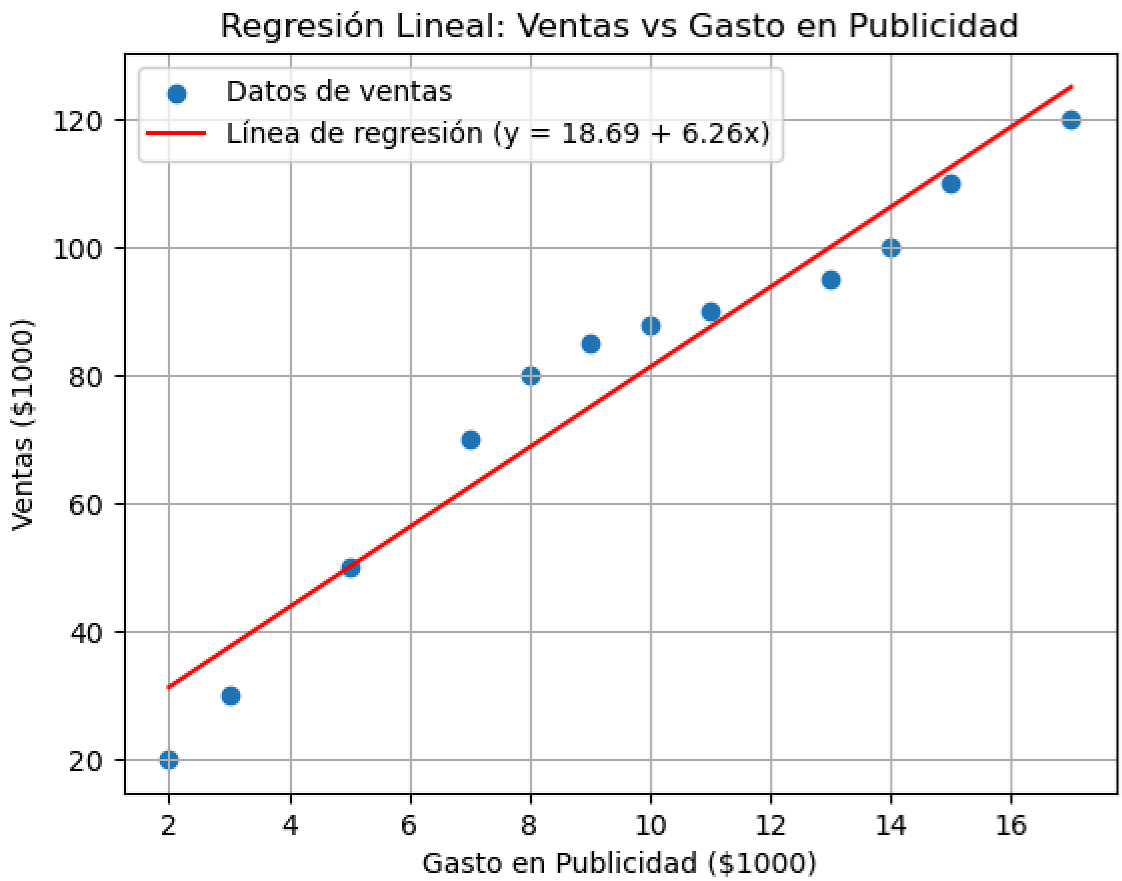
El **error cuadrático medio (MSE)** se calcula con:

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

Donde ($\hat{y}_i$) son los valores predichos por el modelo.

In [50]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# Datos de gasto en publicidad (x) y ventas (y)
x = np.array([2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17])
y = np.array([20, 30, 50, 70, 80, 85, 88, 90, 95, 100, 110, 120])

# Cálculo de los promedios
x_mean = np.mean(x)
y_mean = np.mean(y)

# Cálculo de la pendiente (beta_1) y el intercepto (beta_0)
beta_1 = np.sum((x - x_mean) * (y - y_mean)) / np.sum((x - x_mean)**2)
beta_0 = y_mean - beta_1 * x_mean

# Predicción para x = 12
x_pred = 12
y_pred = beta_0 + beta_1 * x_pred

# Predicción para todos los valores de x (para la línea de regresión)
y_fit = beta_0 + beta_1 * x

# Cálculo del error cuadrático medio (MSE)
y_predicted = beta_0 + beta_1 * x
mse = np.mean((y - y_predicted)**2)

# Gráfico de dispersión y línea de regresión
plt.scatter(x, y, label='Datos de ventas')
plt.plot(x, y_fit, color='red', label=f'Línea de regresión (y = {beta_0:.2f} + {bet
plt.title('Regresión Lineal: Ventas vs Gasto en Publicidad')
plt.xlabel('Gasto en Publicidad ($1000)')
plt.ylabel('Ventas ($1000)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Imprimir resultados
print(f"Valor de beta_0 (intercepto): {beta_0:.2f}")
print(f"Valor de beta_1 (pendiente): {beta_1:.2f}")
print(f"Predicción de ventas para un gasto en publicidad de $12,000: {y_pred:.2f} m
print(f"Error cuadrático medio (MSE): {mse:.2f}")
```




```
Valor de beta_0 (intercepto): 18.69
Valor de beta_1 (pendiente): 6.26
Predicción de ventas para un gasto en publicidad de $12,000: 93.82 mil dólares
Error cuadrático medio (MSE): 51.06
```

Ejercicio 17: Modelización del Flujo de Tráfico Vehicular

Un ingeniero de tráfico está evaluando el flujo de vehículos en una carretera en función de la densidad de tráfico. El flujo vehicular ((F)) se modela mediante una función cuadrática en función de la densidad de vehículos ((D)):

$$F(D) = v_{\text{máx}} \cdot D - a \cdot D^2$$

Donde:

- ($F(D)$) es el flujo de vehículos (vehículos por hora).
- ($v_{\text{máx}}$) es la velocidad máxima permitida en la carretera (en km/h).
- (D) es la densidad de vehículos (vehículos por kilómetro).
- (a) es un parámetro que describe el efecto de la congestión.

Se tiene la siguiente información:

- La velocidad máxima permitida es de ($v_{\text{máx}} = 120, \text{km/h}$).

- El parámetro de congestión es ($a = 0.02$).
- La densidad de tráfico actual es de 20 vehículos por kilómetro.

Con base en este escenario, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el flujo de tráfico actual en la carretera?
2. ¿Cuál es la densidad de tráfico que maximiza el flujo vehicular?
3. Traza la gráfica del flujo vehicular en función de la densidad de tráfico para un rango de densidades entre 0 y 60 vehículos por kilómetro.
4. Si la densidad de tráfico aumenta a 50 vehículos por kilómetro, ¿cuál será el flujo vehicular?

Fórmulas:

El flujo vehicular ($F(D)$) se calcula con:

$$F(D) = v_{\text{máx}} \cdot D - a \cdot D^2$$

El valor de (D) que maximiza el flujo se encuentra resolviendo:

$$\frac{dF(D)}{dD} = 0$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Flujo vehicular actual

Para calcular el flujo vehicular actual cuando ($D = 20$) vehículos por kilómetro, usamos la fórmula del flujo:

$$F(D) = v_{\text{máx}} \cdot D - a \cdot D^2$$

Donde:

- ($v_{\text{máx}} = 120, \text{km/h}$)
- ($a = 0.02$)
- ($D = 20$)

Cálculo:

$$F(20) = 120 \cdot 20 - 0.02 \cdot 20^2$$

$$F(20) = 2400 - 0.02 \cdot 400 = 2400 - 8 = 2392 \, \text{vehículos por hora}$$

Por lo tanto, el flujo vehicular actual es de **2392 vehículos por hora**.

Pregunta 2: Densidad de tráfico que maximiza el flujo vehicular

Para encontrar la densidad de tráfico que maximiza el flujo, derivamos la función $(F(D))$ respecto a (D) y la igualamos a cero:

$$\frac{dF(D)}{dD} = v_{\text{máx}} - 2a \cdot D = 0$$

Resolviendo para (D):

$$120 - 2 \cdot 0.02 \cdot D = 0$$

$$D = \frac{120}{0.04} = 3000 \, \text{vehículos por kilómetro}$$

Por lo tanto, la densidad de tráfico que maximiza el flujo vehicular es **30 vehículos por kilómetro**.

Pregunta 3: Gráfica del flujo vehicular en función de la densidad de tráfico

Para representar gráficamente el flujo vehicular, usaremos la ecuación del flujo para densidades entre 0 y 60 vehículos por kilómetro.

Pregunta 4: Flujo vehicular con una densidad de 50 vehículos por kilómetro

Si la densidad de tráfico aumenta a 50 vehículos por kilómetro, el flujo vehicular se calcula con:

$$F(50) = 120 \cdot 50 - 0.02 \cdot 50^2$$

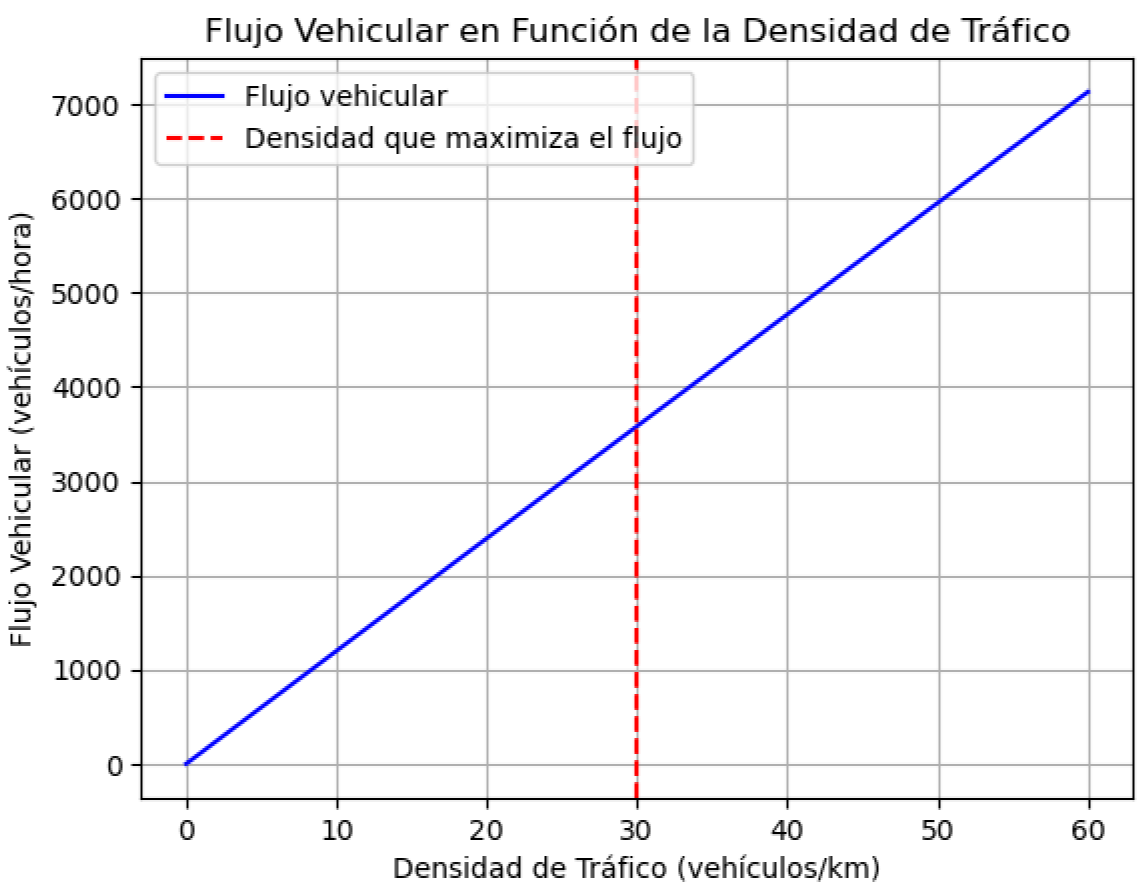
Cálculo:

$$F(50) = 6000 - 0.02 \cdot 2500 = 6000 - 50 = 5950 \, \text{vehículos por hora}$$

Por lo tanto, con una densidad de tráfico de 50 vehículos por kilómetro, el flujo vehicular será de **5950 vehículos por hora**.

In [53]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del problema
v_max = 120  # Velocidad máxima (km/h)
a = 0.02  # Parámetro de congestión
densidad = np.arange(0, 61, 1)  # Densidades de 0 a 60 vehículos por kilómetro
```

```
# Función del flujo vehicular
def flujo_vehicular(D):
    return v_max * D - a * D**2

# Cálculo del flujo vehicular
flujo = flujo_vehicular(densidad)

# Gráfico del flujo vehicular
plt.plot(densidad, flujo, label='Flujo vehicular', color='blue')
plt.axvline(x=30, color='red', linestyle='--', label='Densidad que maximiza el fluj
plt.title('Flujo Vehicular en Función de la Densidad de Tráfico')
plt.xlabel('Densidad de Tráfico (vehículos/km)')
plt.ylabel('Flujo Vehicular (vehículos/hora)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Cálculos clave
flujo_actual = flujo_vehicular(20)
flujo_max = flujo_vehicular(30)
flujo_50 = flujo_vehicular(50)

# Imprimir resultados
print(f"Flujo vehicular actual (20 vehículos/km): {flujo_actual:.2f} vehículos/hora
print(f"Densidad de tráfico que maximiza el flujo: 30 vehículos/km")
print(f"Flujo vehicular con 50 vehículos/km: {flujo_50:.2f} vehículos/hora")
```



```
Flujo vehicular actual (20 vehículos/km): 2392.00 vehículos/hora
Densidad de tráfico que maximiza el flujo: 30 vehículos/km
Flujo vehicular con 50 vehículos/km: 5950.00 vehículos/hora
```

Ejercicio 18: Crecimiento Logístico de una Población

Un grupo de biólogos está estudiando el crecimiento de una población de conejos en una reserva natural. El crecimiento de la población sigue un modelo logístico, que se describe mediante la siguiente ecuación:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \frac{K-P_0}{P_0} \cdot e^{-rt}}$$

Donde:

- $(P(t))$ es la población después de (t) años.
- (P_0) es la población inicial (100 conejos).
- (K) es la capacidad de carga del entorno (500 conejos).
- (r) es la tasa de crecimiento intrínseca (0.3 por año).
- (t) es el tiempo en años.

Con base en este modelo, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál será la población de conejos después de 5 años?

2. ¿Cuánto tiempo tardará la población en alcanzar el 90% de la capacidad de carga?

3. Traza la gráfica del crecimiento de la población durante 15 años.

4. Si la capacidad de carga del entorno disminuye a 400 conejos debido a cambios en el ecosistema, ¿cuál será la población después de 10 años?

Fórmulas:

La ecuación logística se usa para modelar el crecimiento poblacional con recursos limitados:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \frac{K-P_0}{P_0} \cdot e^{-rt}}$$

Para encontrar el tiempo necesario para que la población alcance el 90% de la capacidad de carga, resolvemos:

$$P(t) = 0.9 \cdot K$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Población después de 5 años

Usamos la fórmula del crecimiento logístico:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \frac{K-P_0}{P_0} \cdot e^{-rt}}$$

Donde:

- $(P_0 = 100)$ (población inicial).
- $(K = 500)$ (capacidad de carga).
- $(r = 0.3)$ (tasa de crecimiento).
- $(t = 5)$ (años).

Cálculo:

$$P(5) = \frac{500}{1 + \frac{500-100}{100} \cdot e^{-0.3 \cdot 5}} = \frac{500}{1 + 4 \cdot e^{-1.5}}$$

Aproximando:

$$P(5) = \frac{500}{1 + 4 \cdot 0.2231} = \frac{500}{1.8924} \approx 264.27 \, \text{conejos}$$

Por lo tanto, la población después de 5 años será de aproximadamente **264 conejos**.

Pregunta 2: Tiempo para alcanzar el 90% de la capacidad de carga

Para que la población alcance el 90% de la capacidad de carga, resolvemos $(P(t) = 0.9 \cdot K$):

$$P(t) = 0.9 \cdot 500 = 450$$

Usamos la ecuación del crecimiento logístico:

$$450 = \frac{500}{1 + 4 \cdot e^{-0.3t}}$$

Resolviendo para (t):

$$1 + 4 \cdot e^{-0.3t} = \frac{500}{450} = 1.1111$$

$$4 \cdot e^{-0.3t} = 0.1111$$

$$e^{-0.3t} = \frac{0.1111}{4} = 0.02778$$

Tomando el logaritmo natural:

$$-0.3t = \ln(0.02778)$$

$$t \approx \frac{\ln(0.02778)}{-0.3} \approx 12.47\,\text{años}$$

Por lo tanto, la población tardará aproximadamente **12.47 años** en alcanzar el 90% de la capacidad de carga.

Pregunta 3: Gráfica del crecimiento de la población durante 15 años

Para graficar el crecimiento de la población en función del tiempo, utilizaremos la ecuación logística y evaluaremos $(P(t))$ para diferentes valores de (t) entre 0 y 15 años.

Pregunta 4: Población después de 10 años con una capacidad de carga reducida a 400 conejos

Si la capacidad de carga disminuye a $(K = 400)$, usamos la ecuación logística con $(t = 10)$:

$$P(10) = \frac{400}{1 + \frac{400-100}{100} \cdot e^{-0.3 \cdot 10}} = \frac{400}{1 + 3 \cdot e^{-3}}$$

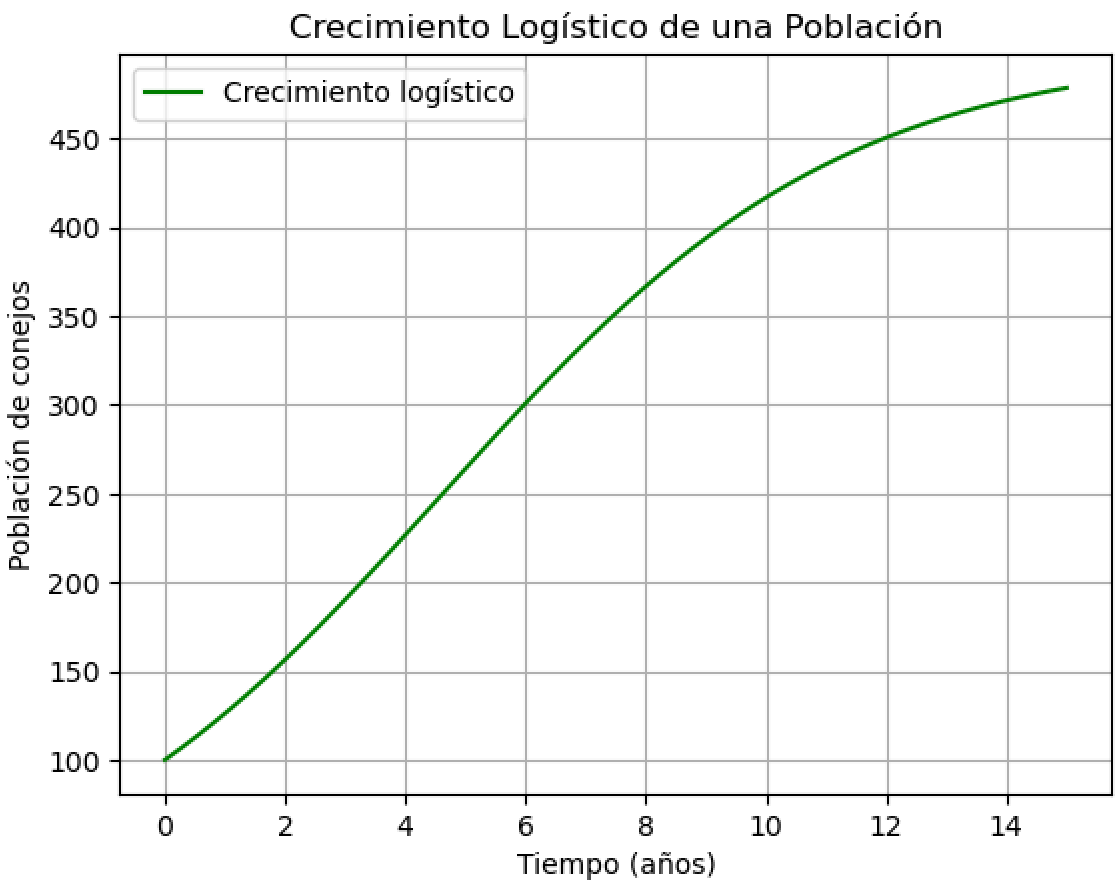
Aproximando:

$$P(10) = \frac{400}{1 + 3 \cdot 0.0498} = \frac{400}{1.1494} \approx 348.06\,\text{conejos}$$

Por lo tanto, con una capacidad de carga reducida a 400 conejos, la población después de 10 años será de aproximadamente **348 conejos**.

In [56]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del problema
P0 = 100  # Población inicial
K = 500  # Capacidad de carga
r = 0.3  # Tasa de crecimiento
t = np.linspace(0, 15, 500)  # Tiempo (años)

# Función de crecimiento logístico
def crecimiento_logistico(P0, K, r, t):
    return K / (1 + ((K - P0) / P0) * np.exp(-r * t))

# Cálculo de la población para diferentes valores de t
```

```python
poblacion = crecimiento_logistico(P0, K, r, t)

# Gráfico del crecimiento de la población
plt.plot(t, poblacion, label='Crecimiento logístico', color='green')
plt.title('Crecimiento Logístico de una Población')
plt.xlabel('Tiempo (años)')
plt.ylabel('Población de conejos')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Cálculos clave
P_5 = crecimiento_logistico(P0, K, r, 5)
P_10_nueva_capacidad = crecimiento_logistico(P0, 400, r, 10)

# Imprimir resultados
print(f"Población después de 5 años: {P_5:.2f} conejos")
print(f"Población después de 10 años con una capacidad reducida a 400 conejos: {P_1
```




```
Población después de 5 años: 264.20 conejos
Población después de 10 años con una capacidad reducida a 400 conejos: 348.02 conejo
s
```

Ejercicio 19: Análisis de Costos y Beneficios en una Empresa

Una empresa produce cierto bien y ha determinado que su costo total en función del número de unidades producidas (q) se puede modelar mediante la siguiente función cuadrática:

$$C(q) = 50q + 0.5q^2 + 1000$$

Donde:

- $(C(q))$ es el costo total de producir (q) unidades (en dólares).
- $(50q)$ es el costo variable por unidad.
- $(0.5q^2)$ es un costo creciente debido a la ineficiencia de la producción a gran escala.
- (1000) es el costo fijo de la empresa (en dólares).

La función de ingresos de la empresa se describe mediante:

$$I(q) = 120q$$

Donde:

- $(I(q))$ es el ingreso total al vender (q) unidades (en dólares).
- La empresa vende cada unidad a $120.

Con base en este escenario, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el punto de equilibrio de la empresa (la cantidad de unidades (q) para la cual los ingresos igualan a los costos)?

2. ¿Qué nivel de producción maximiza los beneficios de la empresa?

3. Traza la gráfica de los costos, ingresos y beneficios para niveles de producción entre 0 y 100 unidades.

4. Si el costo fijo aumenta a $1,500, ¿cuál es el nuevo punto de equilibrio?

Fórmulas:

El **punto de equilibrio** se encuentra resolviendo $(C(q) = I(q))$:

$$50q + 0.5q^2 + 1000 = 120q$$

El **beneficio** se calcula como la diferencia entre los ingresos y los costos:

$$B(q) = I(q) - C(q)$$

Para maximizar el beneficio, derivamos $(B(q))$ y encontramos el valor de (q) que hace que la derivada sea igual a cero.

Solución Matemática

Pregunta 1: Punto de equilibrio

El punto de equilibrio ocurre cuando los costos igualan a los ingresos, es decir, $(C(q) = I(q))$:

$$50q + 0.5q^2 + 1000 = 120q$$

Simplificando:

$$0.5q^2 + 50q + 1000 = 120q$$

Restamos $(120q)$ de ambos lados:

$$0.5q^2 - 70q + 1000 = 0$$

Multiplicamos todo por 2 para eliminar el coeficiente fraccionario:

$$q^2 - 140q + 2000 = 0$$

Usamos la fórmula cuadrática para resolver (q):

$$q = \frac{-(-140) \pm \sqrt{(-140)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2000}}{2 \cdot 1}$$

$$q = \frac{140 \pm \sqrt{19600 - 8000}}{2}$$

$$q = \frac{140 \pm \sqrt{11600}}{2}$$

$$q = \frac{140 \pm 107.7}{2}$$

Por lo tanto:

$$q_1 = \frac{140 + 107.7}{2} \approx 123.85$$

$$q_2 = \frac{140 - 107.7}{2} \approx 16.15$$

El punto de equilibrio relevante es $(q \approx 124)$ unidades, ya que la empresa no puede producir una cantidad negativa de unidades.

Pregunta 2: Nivel de producción que maximiza los beneficios

El beneficio se calcula como:

$$B(q) = I(q) - C(q)$$

Sustituimos las expresiones de $(I(q))$ y $(C(q))$:

$$B(q) = 120q - (50q + 0.5q^2 + 1000)$$

Simplificamos:

$$B(q) = 120q - 50q - 0.5q^2 - 1000$$

$$B(q) = 70q - 0.5q^2 - 1000$$

Para maximizar el beneficio, derivamos $(B(q))$ respecto a (q) y la igualamos a 0:

$$\frac{dB(q)}{dq} = 70 - q = 0$$

Resolviendo para (q):

$$q = 70$$

Por lo tanto, el nivel de producción que maximiza los beneficios es $(q = 70)$ unidades.

Pregunta 3: Gráfica de costos, ingresos y beneficios

Para graficar, evaluaremos $(C(q))$, $(I(q))$ y $(B(q))$ en el rango de 0 a 100 unidades producidas.

Pregunta 4: Nuevo punto de equilibrio con costo fijo aumentado a $1,500

Si el costo fijo aumenta a $(1, 500)$, la ecuación de costos se convierte en:

$$C(q) = 50q + 0.5q^2 + 1500$$

El punto de equilibrio se encuentra resolviendo $(C(q) = I(q))$:

$$50q + 0.5q^2 + 1500 = 120q$$

Simplificando:

$$0.5q^2 - 70q + 1500 = 0$$

Multiplicamos todo por 2:

$$q^2 - 140q + 3000 = 0$$

Usamos la fórmula cuadrática para resolver (q):

$$q = \frac{140 \pm \sqrt{19600 - 12000}}{2}$$

$$q = \frac{140 \pm \sqrt{7600}}{2}$$

$$q = \frac{140 \pm 87.18}{2}$$

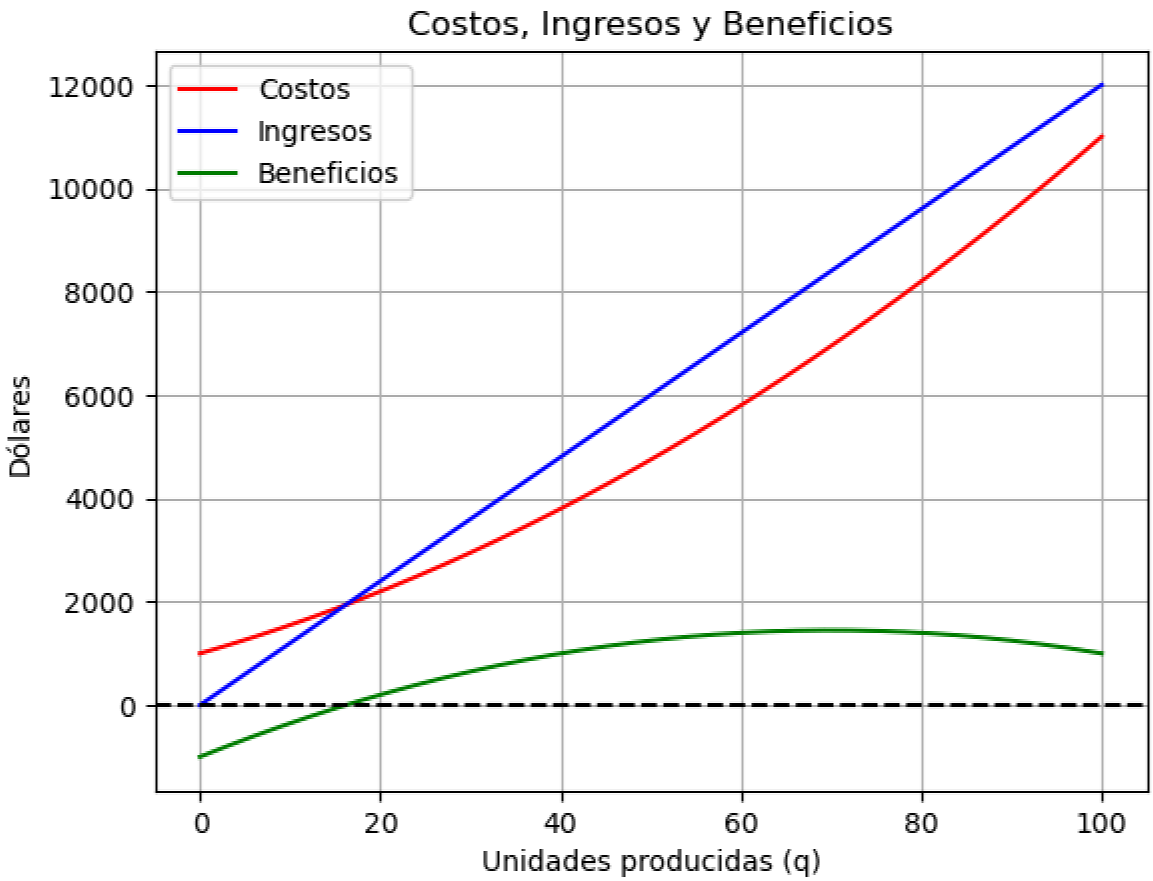
Por lo tanto:

$$q_1 = \frac{140 + 87.18}{2} \approx 113.59$$

$$q_2 = \frac{140 - 87.18}{2} \approx 26.41$$

El nuevo punto de equilibrio es $(q \approx 114)$ unidades.

In [59]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Funciones de costo, ingreso y beneficio
def costo(q, costo_fijo=1000):
    return 50 * q + 0.5 * q**2 + costo_fijo

def ingreso(q):
    return 120 * q

def beneficio(q, costo_fijo=1000):
    return ingreso(q) - costo(q, costo_fijo)

# Rango de unidades producidas
q = np.linspace(0, 100, 500)

# Cálculo de costos, ingresos y beneficios
costos = costo(q)
ingresos = ingreso(q)
beneficios = beneficio(q)

# Gráfico
plt.plot(q, costos, label='Costos', color='red')
plt.plot(q, ingresos, label='Ingresos', color='blue')
plt.plot(q, beneficios, label='Beneficios', color='green')
plt.axhline(0, color='black', linestyle='--')
plt.title('Costos, Ingresos y Beneficios')
plt.xlabel('Unidades producidas (q)')
plt.ylabel('Dólares')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Cálculo de puntos clave
punto_equilibrio = np.roots([0.5, -70, 1000])
punto_max_beneficio = 70
punto_equilibrio_nuevo = np.roots([0.5, -70, 1500])

# Imprimir resultados clave
print(f"Punto de equilibrio: {punto_equilibrio.max():.2f} unidades")
print(f"Nivel de producción que maximiza los beneficios: {punto_max_beneficio} unid
print(f"Nuevo punto de equilibrio con costo fijo aumentado: {punto_equilibrio_nuevo
```




```
Punto de equilibrio: 123.85 unidades
Nivel de producción que maximiza los beneficios: 70 unidades
Nuevo punto de equilibrio con costo fijo aumentado: 113.59 unidades
```

Ejercicio 20: Análisis de Tiempos y Costos en la Finalización de un Proyecto (Método PERT)

Un gerente de proyectos está a cargo de la construcción de un edificio. El proyecto incluye varias actividades que deben ser completadas en secuencia, y cada actividad tiene tres estimaciones de tiempo:

- Tiempo optimista ((O)): el tiempo más corto posible para completar la actividad.
- Tiempo probable ((M)): el tiempo más probable para completar la actividad.
- Tiempo pesimista ((P)): el tiempo más largo que podría llevar completar la actividad.

El tiempo esperado ((T_e)) para cada actividad se calcula usando la fórmula PERT:

$$T_e = \frac{O + 4M + P}{6}$$

Además, el gerente necesita estimar el costo total del proyecto en función del tiempo total que llevará completarlo. El costo por día del proyecto es de $5,000.

Las actividades y sus tiempos estimados son los siguientes:

Actividad	Tiempo Optimista (O)	Tiempo Probable (M)	Tiempo Pesimista (P)
A	5 días	7 días	10 días
B	3 días	4 días	6 días
C	6 días	8 días	12 días
D	2 días	3 días	5 días
E	4 días	6 días	9 días

Con base en esta información, responde las siguientes preguntas:

1. Calcula el tiempo esperado para completar cada actividad.
2. ¿Cuál es el tiempo total estimado para completar todo el proyecto?
3. Calcula el costo total del proyecto basado en el tiempo total estimado.
4. Si el tiempo pesimista se cumple en todas las actividades, ¿cuál sería el costo total del proyecto?

Fórmulas:

El tiempo esperado ((T_e)) para cada actividad se calcula usando la fórmula PERT:

$$T_e = \frac{O + 4M + P}{6}$$

El costo total del proyecto se calcula multiplicando el tiempo total por el costo diario:

$$\text{Costo Total} = \text{Tiempo Total} \times \text{Costo por día}$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Tiempo esperado para cada actividad

Usamos la fórmula PERT para calcular el tiempo esperado ((T_e)) de cada actividad:

Actividad A:

$$T_e(A) = \frac{5 + 4 \cdot 7 + 10}{6} = \frac{5 + 28 + 10}{6} = \frac{43}{6} \approx 7.17\,\text{días}$$

Actividad B:

$$T_e(B) = \frac{3 + 4 \cdot 4 + 6}{6} = \frac{3 + 16 + 6}{6} = \frac{25}{6} \approx 4.17\,\text{días}$$

Actividad C:

$$T_e(C) = \frac{6 + 4 \cdot 8 + 12}{6} = \frac{6 + 32 + 12}{6} = \frac{50}{6} \approx 8.33\,\text{días}$$

Actividad D:

$$T_e(D) = \frac{2 + 4 \cdot 3 + 5}{6} = \frac{2 + 12 + 5}{6} = \frac{19}{6} \approx 3.17\,\text{días}$$

Actividad E:

$$T_e(E) = \frac{4 + 4 \cdot 6 + 9}{6} = \frac{4 + 24 + 9}{6} = \frac{37}{6} \approx 6.17\,\text{días}$$

Pregunta 2: Tiempo total estimado para completar el proyecto

El tiempo total estimado es la suma de los tiempos esperados para todas las actividades:

$$T_{\text{total}} = T_e(A) + T_e(B) + T_e(C) + T_e(D) + T_e(E)$$

Cálculo:

$$T_{\text{total}} = 7.17 + 4.17 + 8.33 + 3.17 + 6.17 = 29.01\,\text{días}$$

Por lo tanto, el tiempo total estimado para completar el proyecto es de **29.01 días**.

Pregunta 3: Costo total del proyecto basado en el tiempo total estimado

El costo total del proyecto se calcula multiplicando el tiempo total por el costo diario ($5,000):

$$\text{Costo Total} = 29.01 \times 5{,}000 = 145{,}050\,\text{dólares}$$

Por lo tanto, el costo total estimado del proyecto es de **$145,050**.

Pregunta 4: Costo total si el tiempo pesimista se cumple en todas las actividades

Si el tiempo pesimista se cumple, sumamos los tiempos pesimistas para todas las actividades:

$$T_{\text{pesimista}} = 10 + 6 + 12 + 5 + 9 = 42\,\text{días}$$

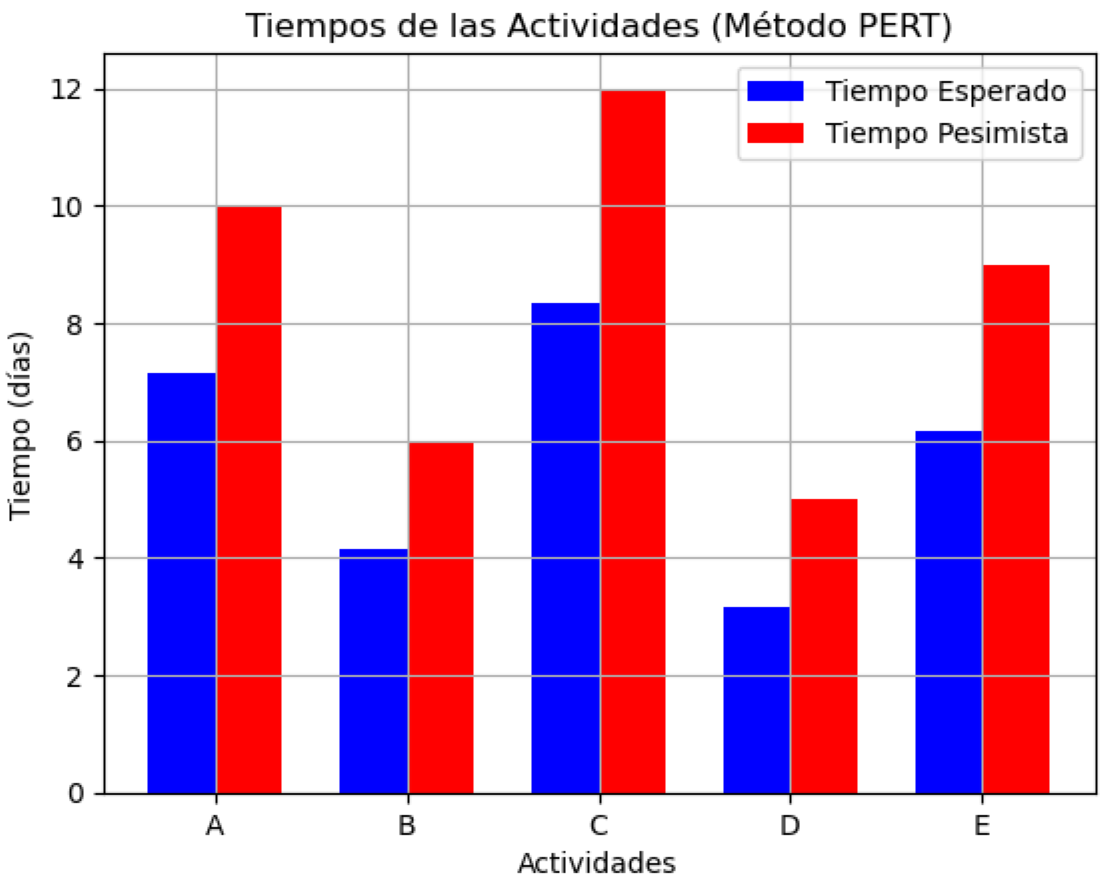
El costo total en este caso sería:

$$\text{Costo Total Pesimista} = 42 \times 5{,}000 = 210{,}000\,\text{dólares}$$

Por lo tanto, si se cumplen los tiempos pesimistas, el costo total del proyecto sería de **$210,000**.

In [62]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos de las actividades
actividades = ['A', 'B', 'C', 'D', 'E']
optimista = np.array([5, 3, 6, 2, 4])
probable = np.array([7, 4, 8, 3, 6])
pesimista = np.array([10, 6, 12, 5, 9])
costo_por_dia = 5000

# Cálculo del tiempo esperado para cada actividad usando PERT
tiempo_esperado = (optimista + 4 * probable + pesimista) / 6
tiempo_pesimista = pesimista  # Los tiempos pesimistas

# Cálculo del tiempo total estimado
tiempo_total_estimado = np.sum(tiempo_esperado)

# Cálculo del costo total del proyecto
costo_total_estimado = tiempo_total_estimado * costo_por_dia

# Cálculo del costo total si se cumple el tiempo pesimista
tiempo_total_pesimista = np.sum(tiempo_pesimista)
costo_total_pesimista = tiempo_total_pesimista * costo_por_dia

# Mostrar resultados clave
print(f"Tiempo total estimado: {tiempo_total_estimado:.2f} días")
print(f"Costo total estimado: ${costo_total_estimado:,.2f}")
print(f"Tiempo total pesimista: {tiempo_total_pesimista:.2f} días")
print(f"Costo total pesimista: ${costo_total_pesimista:,.2f}")

# Gráfico del tiempo esperado y pesimista por actividad
bar_width = 0.35
index = np.arange(len(actividades))

plt.bar(index, tiempo_esperado, bar_width, label='Tiempo Esperado', color='blue')
plt.bar(index + bar_width, tiempo_pesimista, bar_width, label='Tiempo Pesimista', c

plt.xlabel('Actividades')
plt.ylabel('Tiempo (días)')
plt.title('Tiempos de las Actividades (Método PERT)')
plt.xticks(index + bar_width / 2, actividades)
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Tiempo total estimado: 29.00 días
Costo total estimado: $145,000.00
Tiempo total pesimista: 42.00 días
Costo total pesimista: $210,000.00
```



Capítulo 3: Derivadas: El Arte de Calcular Cambios

III.1 Fundamentos de las Derivadas

La **derivada** es uno de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial y se utiliza para describir cómo una función cambia a medida que cambian sus variables. Si una función $(f(x))$ representa una cantidad variable en función de (x), la derivada de $(f(x))$ nos indica la tasa de cambio instantánea de $(f(x))$ con respecto a (x).

Matemáticamente, la derivada de una función $(f(x))$ se define como el límite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Donde:

- $(f'(x))$ es la derivada de $(f(x))$, también llamada la **tasa de cambio**.
- (x) es la variable independiente.
- $(f(x + \Delta x))$ es el valor de la función cuando (x) ha aumentado en (Δx).

La derivada puede interpretarse como la **pendiente de la tangente** a la curva de la función en un punto dado. Esta pendiente describe cómo cambia la función en ese punto: si la pendiente es positiva, la función está aumentando; si la pendiente es negativa, la función está disminuyendo.

Reglas Básicas de Derivación

Existen varias reglas importantes que facilitan el cálculo de derivadas:

1. **Regla de la Potencia**: Si $(f(x) = x^n)$, entonces:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

2. **Regla de la Suma**: La derivada de la suma de dos funciones es la suma de sus derivadas:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

3. **Regla del Producto**: Si $(f(x))$ y $(g(x))$ son funciones diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

4. **Regla del Cociente**: Si $(f(x))$ y $(g(x))$ son funciones diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

5. **Regla de la Cadena**: Si $(f(x))$ es una función compuesta, es decir, $(f(x) = h(g(x)))$, entonces la derivada es:

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Estas reglas nos permiten derivar funciones más complejas de manera rápida y eficiente.

III.2 Aplicaciones de las Derivadas en Economía, Finanzas y Física

Derivadas en Economía

En economía, las derivadas se utilizan para analizar cómo varía una variable con respecto a otra. Algunas aplicaciones comunes incluyen:

1. **Función de Producción**: La derivada de una función de producción $(Q(L))$, donde (L) es la cantidad de trabajo, representa la **productividad marginal** del trabajo. Es decir, mide el cambio en la producción total cuando se incrementa la cantidad de trabajo.

$$Q'(L) = \frac{dQ}{dL}$$

2. **Costos Marginales**: Si $(C(q))$ es la función de costos totales de producir (q) unidades de un bien, la derivada $(C'(q))$ representa el **costo marginal**, que es el costo adicional de producir una unidad adicional:

$$C'(q) = \frac{dC}{dq}$$

3. **Elasticidad de la Demanda**: La elasticidad mide la sensibilidad de la cantidad demandada de un bien con respecto a un cambio en su precio. La elasticidad precio de la demanda se define como:

$$E(p) = \frac{p}{Q(p)} \cdot Q'(p)$$

Donde $(Q(p))$ es la cantidad demandada cuando el precio es (p), y $(Q'(p))$ es la derivada de la función de demanda con respecto al precio.

Derivadas en Finanzas

En finanzas, las derivadas se usan para modelar la tasa de cambio de los precios de activos y para encontrar óptimos en problemas de maximización de utilidades o beneficios:

1. **Tasa de Crecimiento de una Inversión**: Si el valor de una inversión $(V(t))$ cambia con el tiempo, la derivada $(V'(t))$ nos dice la tasa de crecimiento instantánea de la inversión en el tiempo (t).

2. **Optimización de Beneficios**: Las empresas utilizan derivadas para determinar el nivel de producción que maximiza los beneficios. Si los ingresos se modelan mediante una función $(R(q))$ y los costos mediante $(C(q))$, el beneficio se maximiza cuando:

$$B'(q) = R'(q) - C'(q) = 0$$

Este es el punto en el que los ingresos marginales igualan a los costos marginales.

Derivadas en Física

En física, las derivadas son fundamentales para el estudio del movimiento y los cambios en cantidades físicas:

1. **Velocidad y Aceleración**: Si una partícula se mueve a lo largo de una línea y su posición en el tiempo (t) está dada por $(s(t))$, la derivada $(s'(t))$ es la **velocidad** de la partícula, y la derivada de la velocidad, $(s''(t))$, es la **aceleración**.

2. **Leyes de Movimiento**: Las leyes de Newton se expresan mediante derivadas. Por ejemplo, la segunda ley de Newton dice que la fuerza aplicada sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración del cuerpo:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2}$$

3. **Flujo de Calor**: La ecuación de la ley de Fourier para la conducción de calor en un material se describe con derivadas parciales, donde el flujo de calor (q) está relacionado con el gradiente de temperatura:

$$q = -k \cdot \nabla T$$

Las derivadas permiten modelar cambios instantáneos en diferentes contextos de la ciencia y la ingeniería, proporcionando una herramienta poderosa para la optimización y la predicción de comportamientos en sistemas dinámicos.

II.3 Ejercicios de Aplicaciones y Soluciones (MathPY)

Ejercicio 21: Cálculo del Costo Marginal y Maximización de Beneficios

Una empresa de producción tiene una función de costos totales $(C(q))$ que depende de la cantidad de unidades producidas (q), dada por la siguiente ecuación:

$$C(q) = 5q^2 + 20q + 100$$

Donde:

- $(C(q))$ es el costo total de producir (q) unidades (en dólares).
- $(5q^2)$ representa los costos crecientes asociados a la producción de más unidades.
- $(20q)$ es el costo variable por unidad.
- (100) es el costo fijo (en dólares).

Además, los ingresos totales generados por la venta de (q) unidades vienen dados por la función:

$$I(q) = 80q$$

Con base en esta información, responde las siguientes preguntas:

1. Calcula el costo marginal de la empresa, es decir, la derivada de la función de costos totales $(C'(q))$.

2. Encuentra la cantidad (q) que maximiza los beneficios de la empresa.

3. Traza la gráfica de los costos, ingresos y beneficios para (q) entre 0 y 20 unidades.

4. Si el costo fijo aumenta a 200 **dólares**, ¿cómo cambia la cantidad (q) que maximiza los beneficios?

Fórmulas:

- El **costo marginal** se calcula como la derivada de la función de costos totales:

$$C'(q) = \frac{d}{dq}[C(q)]$$

- El **beneficio** es la diferencia entre los ingresos y los costos:

$$B(q) = I(q) - C(q)$$

Para maximizar los beneficios, derivamos $(B(q))$ respecto a (q) y resolvemos la ecuación:

$$B'(q) = 0$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Costo Marginal

El **costo marginal** es la derivada de la función de costos $(C(q))$ con respecto a (q):

$$C(q) = 5q^2 + 20q + 100$$

Derivamos $(C(q))$:

$$C'(q) = \frac{d}{dq}[5q^2 + 20q + 100]$$

$$C'(q) = 10q + 20$$

Por lo tanto, el costo marginal es (C'(q) = 10q + 20).

Pregunta 2: Cantidad (q) que maximiza los beneficios

El beneficio de la empresa se calcula como la diferencia entre los ingresos y los costos:

$$B(q) = I(q) - C(q)$$

Sustituyendo las funciones de ingreso e ingresos:

$$B(q) = 80q - (5q^2 + 20q + 100)$$

Simplificando:

$$B(q) = 80q - 5q^2 - 20q - 100$$

$$B(q) = -5q^2 + 60q - 100$$

Para maximizar los beneficios, derivamos $(B(q))$ y lo igualamos a cero:

$$B'(q) = \frac{d}{dq}[-5q^2 + 60q - 100] = -10q + 60$$

Igualando la derivada a cero para encontrar el valor de (q):

$$-10q + 60 = 0$$

$$q = \frac{60}{10} = 6$$

Por lo tanto, la cantidad que maximiza los beneficios es $(q = 6$**)** unidades.

Pregunta 3: Gráfica de costos, ingresos y beneficios

Para graficar, evaluaremos las funciones de costos $(C(q))$, ingresos $(I(q))$, y beneficios $(B(q))$ para valores de (q) entre 0 y 20 unidades.

Pregunta 4: Cambio en la cantidad (q) que maximiza los beneficios si el costo fijo aumenta a $200

Si el costo fijo aumenta a $200, la función de costos se convierte en:

$$C(q) = 5q^2 + 20q + 200$$

El beneficio se calcula nuevamente:

$$B(q) = 80q - (5q^2 + 20q + 200)$$

Simplificando:

$$B(q) = -5q^2 + 60q - 200$$

Derivamos $(B(q))$ para encontrar la cantidad que maximiza los beneficios:

$$B'(q) = -10q + 60$$

Resolviendo:

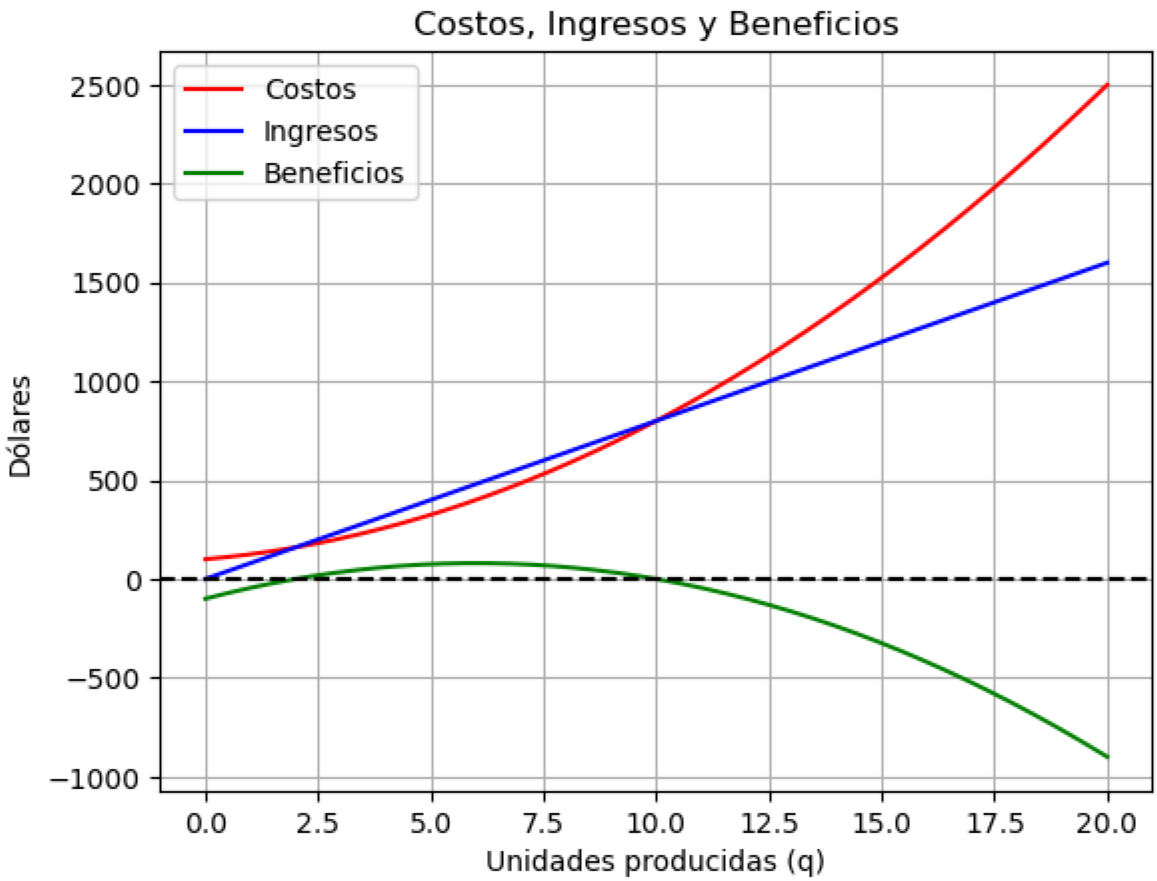
$$-10q + 60 = 0$$

$$q = 6$$

La cantidad (q) que maximiza los beneficios sigue siendo **6 unidades**, ya que el costo fijo no afecta a la derivada del beneficio.

In [66]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Funciones de costos, ingresos y beneficios
def costo(q, costo_fijo=100):
```

```
    return 5 * q**2 + 20 * q + costo_fijo

def ingreso(q):
    return 80 * q

def beneficio(q, costo_fijo=100):
    return ingreso(q) - costo(q, costo_fijo)

# Rango de unidades producidas
q = np.linspace(0, 20, 500)

# Cálculo de costos, ingresos y beneficios
costos = costo(q)
ingresos = ingreso(q)
beneficios = beneficio(q)

# Gráfico de costos, ingresos y beneficios
plt.plot(q, costos, label='Costos', color='red')
plt.plot(q, ingresos, label='Ingresos', color='blue')
plt.plot(q, beneficios, label='Beneficios', color='green')
plt.axhline(0, color='black', linestyle='--')
plt.title('Costos, Ingresos y Beneficios')
plt.xlabel('Unidades producidas (q)')
plt.ylabel('Dólares')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Cálculo de puntos clave
costo_marginal = 10 * 6 + 20  # Evaluamos C'(6)
beneficio_max = beneficio(6)
nuevo_beneficio_max = beneficio(6, 200)

# Imprimir resultados clave
print(f"Costo marginal cuando q = 6: ${costo_marginal:.2f}")
print(f"Beneficio máximo con costo fijo de $100: ${beneficio_max:.2f}")
print(f"Beneficio máximo con costo fijo de $200: ${nuevo_beneficio_max:.2f}")
```




```
Costo marginal cuando q = 6: $80.00
Beneficio máximo con costo fijo de $100: $80.00
Beneficio máximo con costo fijo de $200: $-20.00
```

Ejercicio 22: Cálculo de Velocidad y Aceleración en Movimiento Rectilíneo

Un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, y su posición $(s(t))$ en función del tiempo (t) está dada por la siguiente ecuación:

$$s(t) = 3t^3 - 5t^2 + 2t + 1$$

Donde:

- $(s(t))$ es la posición del objeto en metros después de (t) segundos.
- (t) es el tiempo en segundos.

Con base en esta ecuación de posición, responde las siguientes preguntas:

1. Calcula la **velocidad** del objeto en función del tiempo $(v(t) = s'(t))$.

2. Calcula la **aceleración** del objeto en función del tiempo $(a(t) = v'(t))$.

3. Determina la velocidad y aceleración del objeto en $(t = 2)$ segundos.

4. Traza las gráficas de la posición, velocidad y aceleración en el intervalo de $(t = 0)$ a $(t = 5)$ segundos.

Fórmulas:

- La **velocidad** $(v(t))$ es la derivada de la posición respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{d}{dt}[s(t)]$$

- La **aceleración** $(a(t))$ es la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$a(t) = \frac{d}{dt}[v(t)]$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Velocidad del objeto

La **velocidad** es la derivada de la función de posición $(s(t))$:

$$s(t) = 3t^3 - 5t^2 + 2t + 1$$

Derivamos $(s(t))$ respecto a (t):

$$v(t) = \frac{d}{dt}[3t^3 - 5t^2 + 2t + 1]$$

Aplicando la regla de la potencia:

$$v(t) = 9t^2 - 10t + 2$$

Por lo tanto, la velocidad en función del tiempo es $(v(t) = 9t^2 - 10t + 2)$.

Pregunta 2: Aceleración del objeto

La **aceleración** es la derivada de la velocidad $(v(t))$:

$$v(t) = 9t^2 - 10t + 2$$

Derivamos $(v(t))$ respecto a (t):

$$a(t) = \frac{d}{dt}[9t^2 - 10t + 2]$$

Aplicando la regla de la potencia:

$$a(t) = 18t - 10$$

Por lo tanto, la aceleración en función del tiempo es $(a(t) = 18t - 10)$.

Pregunta 3: Velocidad y aceleración en $(t = 2)$ segundos

Sustituimos $(t = 2)$ en las funciones de velocidad y aceleración:

- **Velocidad en $(t = 2)$**:

$$v(2) = 9 \cdot (2)^2 - 10 \cdot 2 + 2$$

$$v(2) = 36 - 20 + 2 = 18\,\mathrm{m/s}$$

- **Aceleración en $(t = 2)$**:

$$a(2) = 18 \cdot 2 - 10$$

$$a(2) = 36 - 10 = 26\,\mathrm{m/s}^2$$

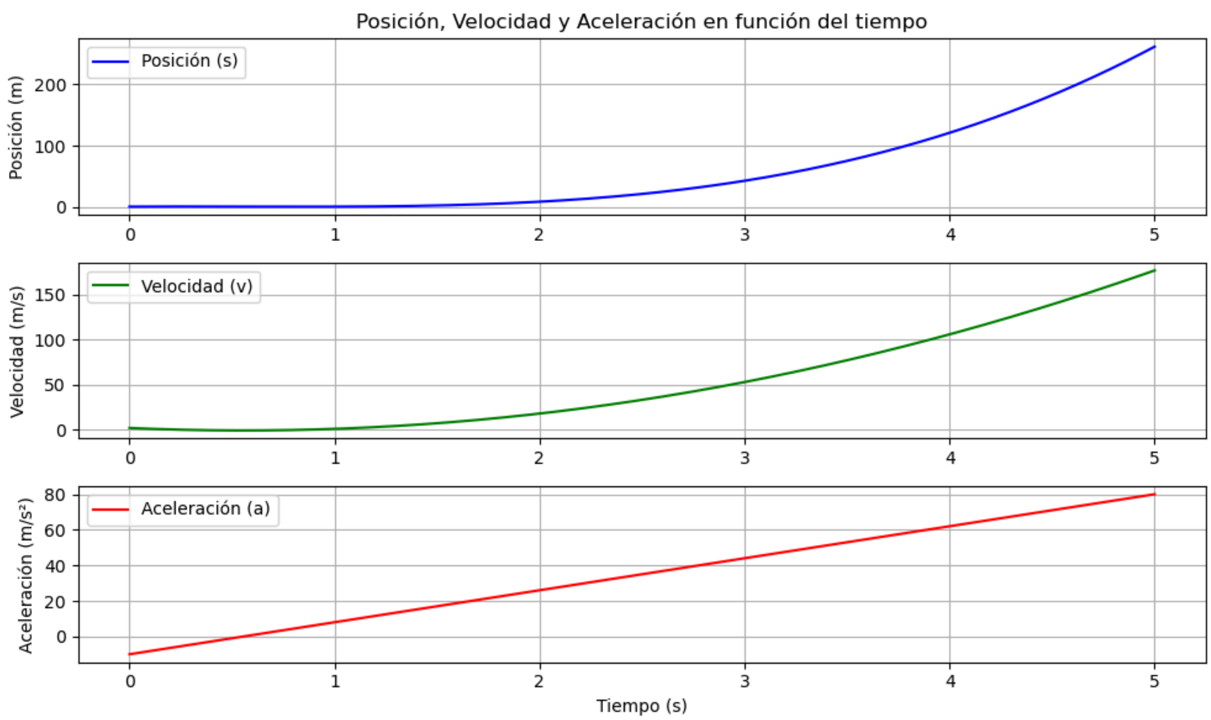
Por lo tanto, la velocidad del objeto en $(t = 2)$ segundos es **18 m/s**, y la aceleración es **26 m/s²**.

Pregunta 4: Gráficas de posición, velocidad y aceleración

Para representar gráficamente la posición, velocidad y aceleración en el intervalo $(t = 0)$ a $(t = 5)$ segundos, evaluaremos las funciones $(s(t))$, $(v(t))$, y $(a(t))$ para este rango de valores de (t).

In [69]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definición de funciones de posición, velocidad y aceleración
def posicion(t):
    return 3 * t**3 - 5 * t**2 + 2 * t + 1

def velocidad(t):
    return 9 * t**2 - 10 * t + 2

def aceleracion(t):
    return 18 * t - 10

# Intervalo de tiempo
t = np.linspace(0, 5, 500)

# Cálculo de posición, velocidad y aceleración
s_t = posicion(t)
v_t = velocidad(t)
a_t = aceleracion(t)

# Graficar posición, velocidad y aceleración
plt.figure(figsize=(10, 6))
```

```python
# Gráfica de la posición
plt.subplot(3, 1, 1)
plt.plot(t, s_t, label='Posición (s)', color='blue')
plt.title('Posición, Velocidad y Aceleración en función del tiempo')
plt.ylabel('Posición (m)')
plt.legend()
plt.grid(True)

# Gráfica de la velocidad
plt.subplot(3, 1, 2)
plt.plot(t, v_t, label='Velocidad (v)', color='green')
plt.ylabel('Velocidad (m/s)')
plt.legend()
plt.grid(True)

# Gráfica de la aceleración
plt.subplot(3, 1, 3)
plt.plot(t, a_t, label='Aceleración (a)', color='red')
plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('Aceleración (m/s²)')
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()

# Calcular y mostrar los valores de velocidad y aceleración en t = 2 segundos
v_2 = velocidad(2)
a_2 = aceleracion(2)
print(f"Velocidad en t = 2 segundos: {v_2:.2f} m/s")
print(f"Aceleración en t = 2 segundos: {a_2:.2f} m/s²")
```



```
Velocidad en t = 2 segundos: 18.00 m/s
Aceleración en t = 2 segundos: 26.00 m/s²
```

Ejercicio 23: Optimización de Materiales en la Construcción de un Depósito Cilíndrico

Una empresa de ingeniería está diseñando un depósito cilíndrico cerrado por ambos extremos que debe contener un volumen de $(V = 500, m^3)$. El costo de construcción del depósito depende del área de la superficie del cilindro, por lo que se desea minimizar el área total de la superficie.

La fórmula para el volumen de un cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$

Donde:

- (V) es el volumen del cilindro (en (m^3)).
- (r) es el radio de la base (en metros).
- (h) es la altura del cilindro (en metros).

La fórmula para el área de la superficie total de un cilindro cerrado es:

$$A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Con base en este escenario, responde las siguientes preguntas:

1. Expresa la altura (h) en términos del radio (r) y el volumen (V).
2. Encuentra la fórmula del área de la superficie $(A(r))$ en función del radio (r).
3. Deriva la función $(A(r))$ para encontrar el valor de (r) que minimiza el área total de la superficie.
4. Calcula el radio (r) óptimo y la altura (h) correspondiente que minimizan el área de la superficie.
5. Traza la gráfica del área total en función del radio (r) para (r) entre 1 y 10 metros.

Fórmulas:

- Volumen del cilindro: $(V = \pi r^2 h)$.
- Área de la superficie total: $(A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh)$.
- Derivar $(A(r))$ respecto a (r) para encontrar el mínimo.

Solución Matemática

Pregunta 1: Expresar la altura (h) en términos de (r) y (V)

Sabemos que el volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$

Despejamos (h) en términos de (r) y (V):

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

Dado que $(V = 500, m^3)$, podemos escribir:

$$h = \frac{500}{\pi r^2}$$

Pregunta 2: Fórmula del área de la superficie en función de (r)

La fórmula para el área total de la superficie de un cilindro es:

$$A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Sustituimos $(h = \frac{500}{\pi r^2})$ en la fórmula del área:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{500}{\pi r^2}$$

Simplificamos:

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$$

Por lo tanto, la fórmula del área total en función del radio es:

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$$

Pregunta 3: Derivar la función $(A(r))$ para encontrar el valor de (r) que minimiza el área

Para minimizar el área, derivamos $(A(r))$ respecto a (r) y la igualamos a cero:

$$\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}\left(2\pi r^2 + \frac{1000}{r}\right)$$

Aplicando la regla de la potencia:

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{1000}{r^2}$$

Igualamos a cero para encontrar el valor de (r) que minimiza el área:

$$4\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0$$

Multiplicamos ambos lados por (r^2) para simplificar:

$$4\pi r^3 = 1000$$

Despejamos (r):

$$r^3 = \frac{1000}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{4\pi}}$$

Aproximando:

$$r \approx 4.3 \, \text{metros}$$

Pregunta 4: Calcular el radio óptimo y la altura correspondiente

El radio óptimo es $(r \approx 4.3)$ metros.

Ahora, calculamos la altura (h) correspondiente utilizando la fórmula:

$$h = \frac{500}{\pi r^2}$$

Sustituyendo $(r = 4.3)$:

$$h \approx \frac{500}{\pi \cdot (4.3)^2} \approx 8.6 \, \text{metros}$$

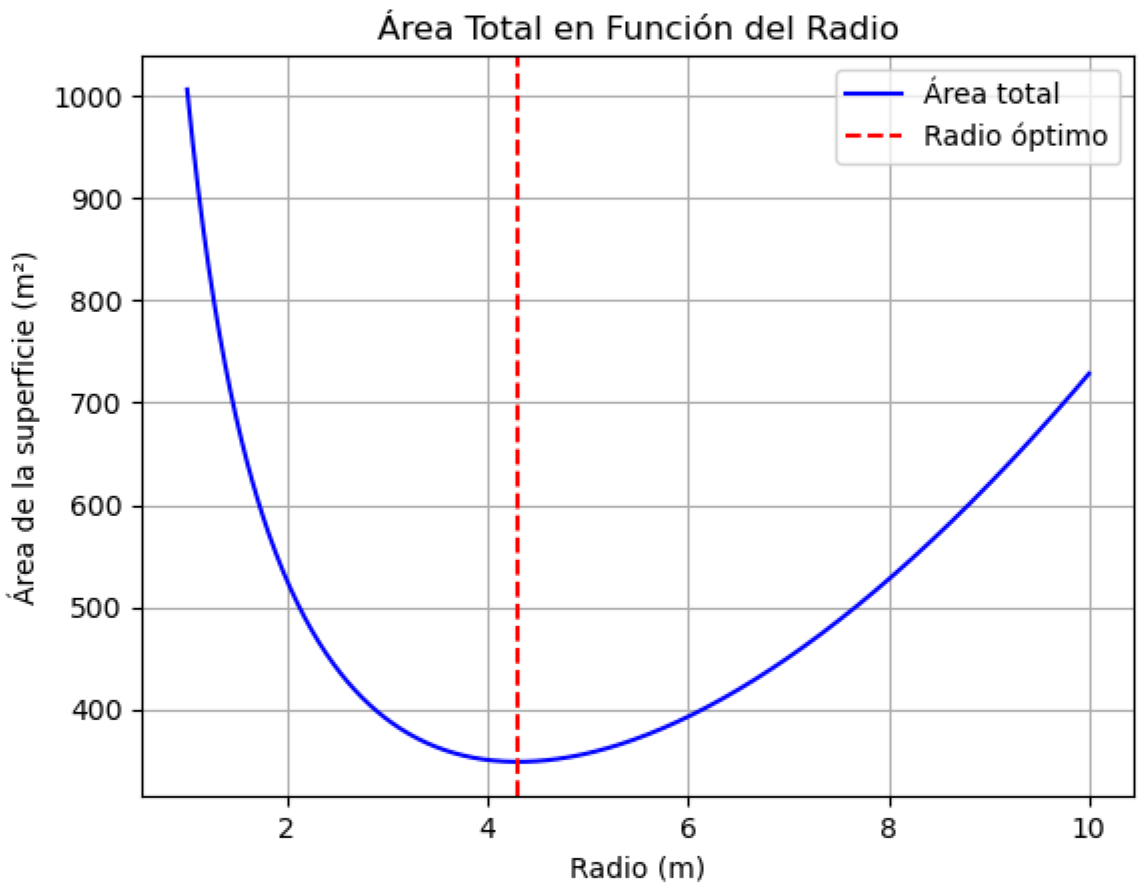
Por lo tanto, el radio óptimo es **4.3 metros**, y la altura correspondiente es **8.6 metros**.

Pregunta 5: Gráfica del área total en función del radio (r)

Para visualizar cómo varía el área en función del radio, graficaremos $(A(r))$ para valores de (r) entre 1 y 10 metros.

In [72]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definir la función del área de la superficie
```

```
def area_total(r):
    return 2 * np.pi * r**2 + 1000 / r

# Definir la altura en función del radio
def altura(r):
    return 500 / (np.pi * r**2)

# Rango de valores de radio
r = np.linspace(1, 10, 500)

# Cálculo del área de la superficie
area = area_total(r)

# Gráfico del área de la superficie
plt.plot(r, area, label='Área total', color='blue')
plt.axvline(x=4.3, color='red', linestyle='--', label='Radio óptimo')
plt.title('Área Total en Función del Radio')
plt.xlabel('Radio (m)')
plt.ylabel('Área de la superficie (m²)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Calcular el radio óptimo y la altura correspondiente
r_optimo = (1000 / (4 * np.pi))**(1/3)
h_optimo = altura(r_optimo)

# Imprimir resultados
print(f"Radio óptimo: {r_optimo:.2f} metros")
print(f"Altura correspondiente: {h_optimo:.2f} metros")
```




```
Radio óptimo: 4.30 metros
Altura correspondiente: 8.60 metros
```

Ejercicio 24: Optimización del Precio de Venta y Producción

Una empresa que vende un producto ha determinado que su función de demanda $(q(p))$, es decir, la cantidad demandada en función del precio de venta (p), está dada por la siguiente ecuación:

$$q(p) = 200 - 5p$$

Donde:

- $(q(p))$ es la cantidad demandada a un precio (p) (en unidades).
- (p) es el precio de venta del producto (en dólares).

Los costos totales de la empresa en función de la cantidad producida (q) están dados por la función de costos:

$$C(q) = 500 + 10q$$

Donde:

- $(C(q))$ es el costo total de producir (q) unidades (en dólares).

- El término (500) representa los costos fijos.
- El término $(10q)$ representa los costos variables por unidad producida.

Con base en esta información, responde las siguientes preguntas:

1. Expresa los **ingresos** $(R(p))$ de la empresa en función del precio (p).
2. Deriva la función de ingresos $(R(p))$ y encuentra el precio (p) que maximiza los ingresos.
3. Expresa la función de **beneficios** $(B(p))$ en función del precio (p).
4. Deriva la función de beneficios $(B(p))$ para encontrar el precio (p) que maximiza los beneficios.
5. Calcula el precio óptimo de venta que maximiza los beneficios y determina la cantidad producida y los beneficios correspondientes.

Fórmulas:

- Los **ingresos** de la empresa se calculan como:

$$R(p) = p \cdot q(p)$$

- Los **beneficios** se calculan como la diferencia entre los ingresos y los costos:

$$B(p) = R(p) - C(q(p))$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Expresar los ingresos $(R(p))$ en función del precio (p)

Los ingresos se calculan como el precio (p) multiplicado por la cantidad demandada $(q(p))$:

$$R(p) = p \cdot q(p)$$

Dado que $(q(p) = 200 - 5p)$, sustituimos en la ecuación de ingresos:

$$R(p) = p \cdot (200 - 5p)$$

Simplificamos:

$$R(p) = 200p - 5p^2$$

Por lo tanto, la función de ingresos es:

$$R(p) = 200p - 5p^2$$

Pregunta 2: Derivar la función de ingresos para maximizar los ingresos

Para maximizar los ingresos, derivamos la función ($R(p)$) respecto a (p):

$$\frac{dR}{dp} = \frac{d}{dp}[200p - 5p^2]$$

Aplicando la regla de la potencia:

$$\frac{dR}{dp} = 200 - 10p$$

Igualamos a cero para encontrar el precio que maximiza los ingresos:

$$200 - 10p = 0$$

Despejamos (p):

$$p = \frac{200}{10} = 20$$

Por lo tanto, el precio que maximiza los ingresos es ($p = 20$) dólares.

Pregunta 3: Expresar la función de beneficios ($B(p)$) en función del precio (p)

Los beneficios se calculan como la diferencia entre los ingresos y los costos:

$$B(p) = R(p) - C(q(p))$$

Sabemos que ($R(p) = 200p - 5p^2$) y que los costos totales ($C(q)$) en función de la cantidad ($q(p) = 200 - 5p$) son:

$$C(q(p)) = 500 + 10q(p) = 500 + 10(200 - 5p) = 500 + 2000 - 50p$$

Simplificamos:

$$C(q(p)) = 2500 - 50p$$

Por lo tanto, la función de beneficios es:

$$B(p) = (200p - 5p^2) - (2500 - 50p)$$

Simplificamos:

$$B(p) = 200p - 5p^2 - 2500 + 50p$$

$$B(p) = 250p - 5p^2 - 2500$$

Por lo tanto, la función de beneficios en función del precio es:

$$B(p) = 250p - 5p^2 - 2500$$

Pregunta 4: Derivar la función de beneficios para maximizar los beneficios

Derivamos la función de beneficios respecto a (p) para encontrar el precio que maximiza los beneficios:

$$\frac{dB}{dp} = \frac{d}{dp}[250p - 5p^2 - 2500]$$

Aplicamos la regla de la potencia:

$$\frac{dB}{dp} = 250 - 10p$$

Igualamos a cero para encontrar el valor de (p):

$$250 - 10p = 0$$

Despejamos (p):

$$p = \frac{250}{10} = 25$$

Por lo tanto, el precio que maximiza los beneficios es $(p = 25$**) dólares**.

Pregunta 5: Precio óptimo de venta, cantidad producida y beneficios correspondientes

El precio que maximiza los beneficios es $(p = 25)$ dólares.

La cantidad producida se calcula usando la función de demanda:

$$q(25) = 200 - 5 \cdot 25 = 200 - 125 = 75\,\text{unidades}$$

Finalmente, calculamos los beneficios sustituyendo $(p = 25)$ en la función de beneficios:

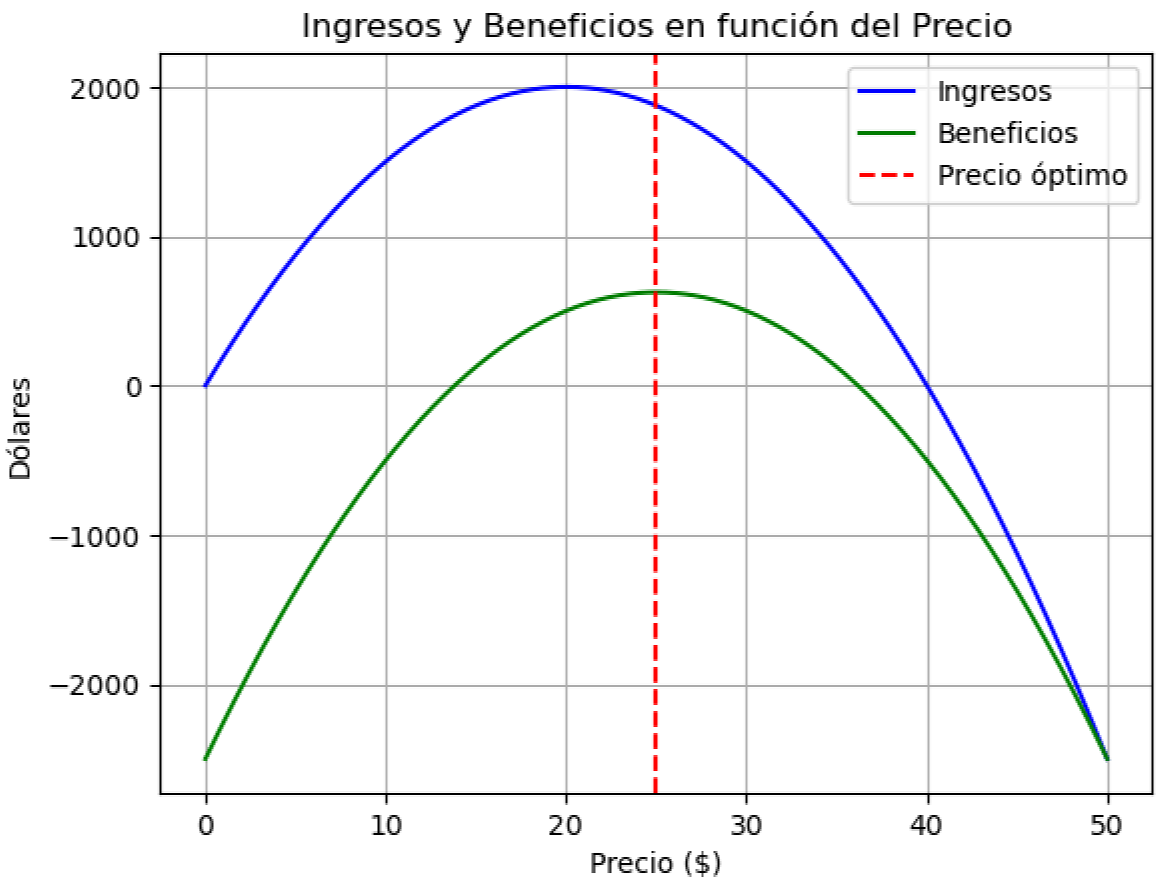
$$B(25) = 250 \cdot 25 - 5 \cdot (25)^2 - 2500$$

$$B(25) = 6250 - 3125 - 2500 = 625\,\text{dólares}$$

Por lo tanto, los beneficios máximos son **625 dólares**.

In [75]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```python
# Funciones de demanda, ingresos y beneficios
def demanda(p):
    return 200 - 5 * p

def ingresos(p):
    return p * demanda(p)

def costos(p):
    q = demanda(p)
    return 500 + 10 * q

def beneficios(p):
    return ingresos(p) - costos(p)

# Rango de precios
p = np.linspace(0, 50, 500)

# Cálculo de ingresos y beneficios
ing = ingresos(p)
ben = beneficios(p)

# Gráfico de ingresos y beneficios
plt.plot(p, ing, label='Ingresos', color='blue')
plt.plot(p, ben, label='Beneficios', color='green')
plt.axvline(x=25, color='red', linestyle='--', label='Precio óptimo')
plt.title('Ingresos y Beneficios en función del Precio')
plt.xlabel('Precio ($)')
plt.ylabel('Dólares')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Calcular el precio óptimo y los beneficios correspondientes
precio_optimo = 25
cantidad_producida = demanda(precio_optimo)
beneficio_max = beneficios(precio_optimo)

# Imprimir resultados
print(f"Precio óptimo de venta: ${precio_optimo:.2f}")
print(f"Cantidad producida: {cantidad_producida:.2f} unidades")
print(f"Beneficios máximos: ${beneficio_max:.2f}")
```




```
Precio óptimo de venta: $25.00
Cantidad producida: 75.00 unidades
Beneficios máximos: $625.00
```

Ejercicio 25: Optimización de un Modelo Predictivo con Gradiente Descendente

Supongamos que tienes un conjunto de datos que describe la relación entre la cantidad de publicidad en miles de dólares ((x)) y las ventas en miles de unidades ((y)) de un producto. La empresa desea ajustar un modelo lineal para predecir las ventas en función de la cantidad de publicidad:

$$y = \theta_0 + \theta_1 x$$

Donde:

- (y) son las ventas.
- (x) es la cantidad de publicidad.
- (θ_0) y (θ_1) son los parámetros del modelo que deben ajustarse.

El objetivo es encontrar los valores de (θ_0) y (θ_1) que minimicen el error cuadrático medio (MSE) entre las predicciones del modelo y los datos reales.

El error cuadrático medio está dado por:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - (\theta_0 + \theta_1 x_i))^2$$

Donde (n) es el número de observaciones.

Utiliza el **gradiente descendente** para ajustar los parámetros del modelo. El algoritmo de gradiente descendente actualiza los parámetros (θ_0) y (θ_1) usando las siguientes ecuaciones:

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - (\theta_0 + \theta_1 x_i))$$

$$\theta_1 := \theta_1 - \alpha \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - (\theta_0 + \theta_1 x_i))x_i$$

Donde (α) es la tasa de aprendizaje.

Responde las siguientes preguntas:

1. Aplica el algoritmo de **gradiente descendente** para ajustar los parámetros del modelo usando un conjunto de datos dado.
2. Traza la gráfica del error cuadrático medio (MSE) en función del número de iteraciones del gradiente descendente.
3. Traza la gráfica del modelo ajustado junto con los datos reales.
4. Calcula el valor final de (θ_0) y (θ_1) después de 1000 iteraciones.

Solución Matemática

Pregunta 1: Algoritmo de Gradiente Descendente para Ajustar los Parámetros

El gradiente descendente es un algoritmo iterativo que ajusta los parámetros (θ_0) y (θ_1) en cada iteración para minimizar el error cuadrático medio. Las ecuaciones de actualización de los parámetros son:

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - (\theta_0 + \theta_1 x_i))$$

$$\theta_1 := \theta_1 - \alpha \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - (\theta_0 + \theta_1 x_i))x_i$$

Donde:

- (y_i) son las observaciones reales de las ventas.

- (x_i) es la cantidad de publicidad.
- (α) es la tasa de aprendizaje.

En cada iteración, se actualizan (θ_0) y (θ_1) hasta que el error cuadrático medio converge a un valor mínimo o se alcanza el número máximo de iteraciones.

Pregunta 2: Gráfica del Error Cuadrático Medio (MSE) en Función de las Iteraciones

El error cuadrático medio se calcula en cada iteración utilizando la siguiente fórmula:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - (\theta_0 + \theta_1 x_i))^2$$

Al graficar el MSE en función del número de iteraciones, podemos observar cómo disminuye a medida que el modelo se ajusta mejor a los datos.

Pregunta 3: Gráfica del Modelo Ajustado y los Datos Reales

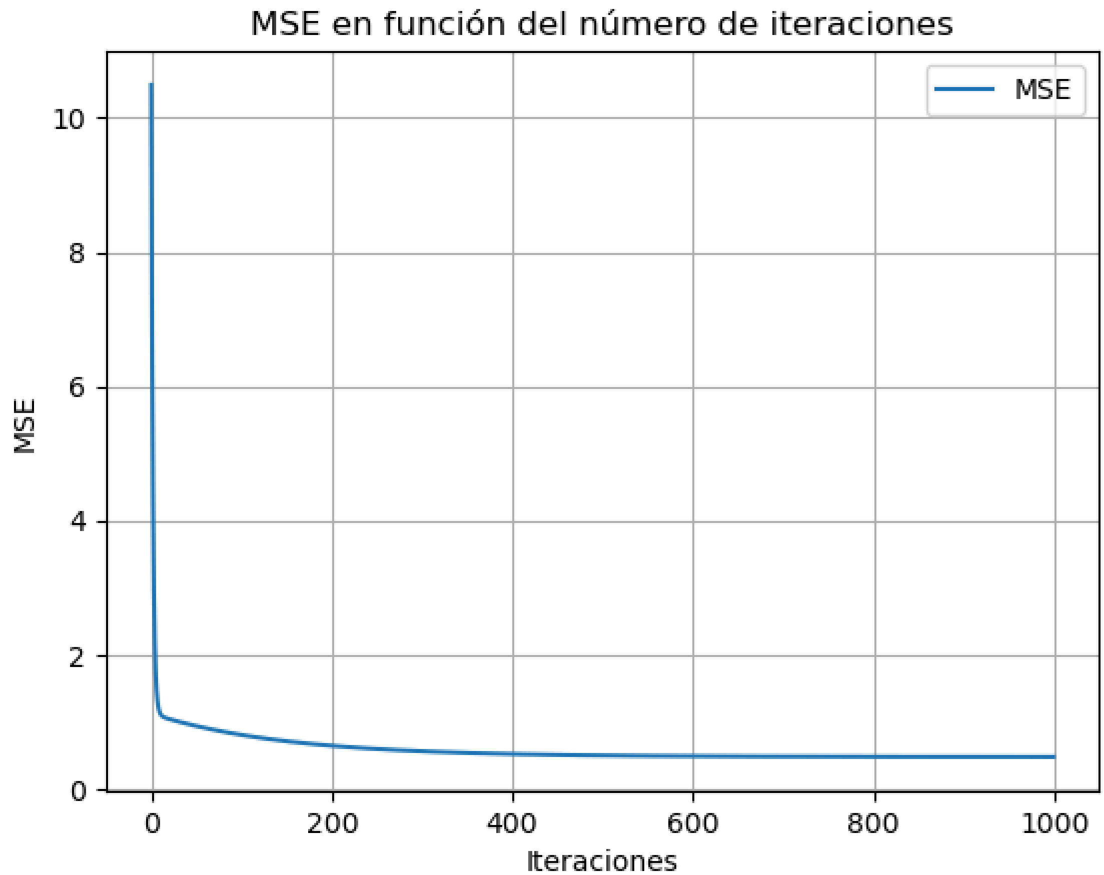
Después de ajustar el modelo, graficamos la recta de regresión $(y = \theta_0 + \theta_1 x)$ junto con los puntos de datos reales $((x_i, y_i))$. Esto permite visualizar cómo el modelo ajustado predice las ventas en función de la cantidad de publicidad.

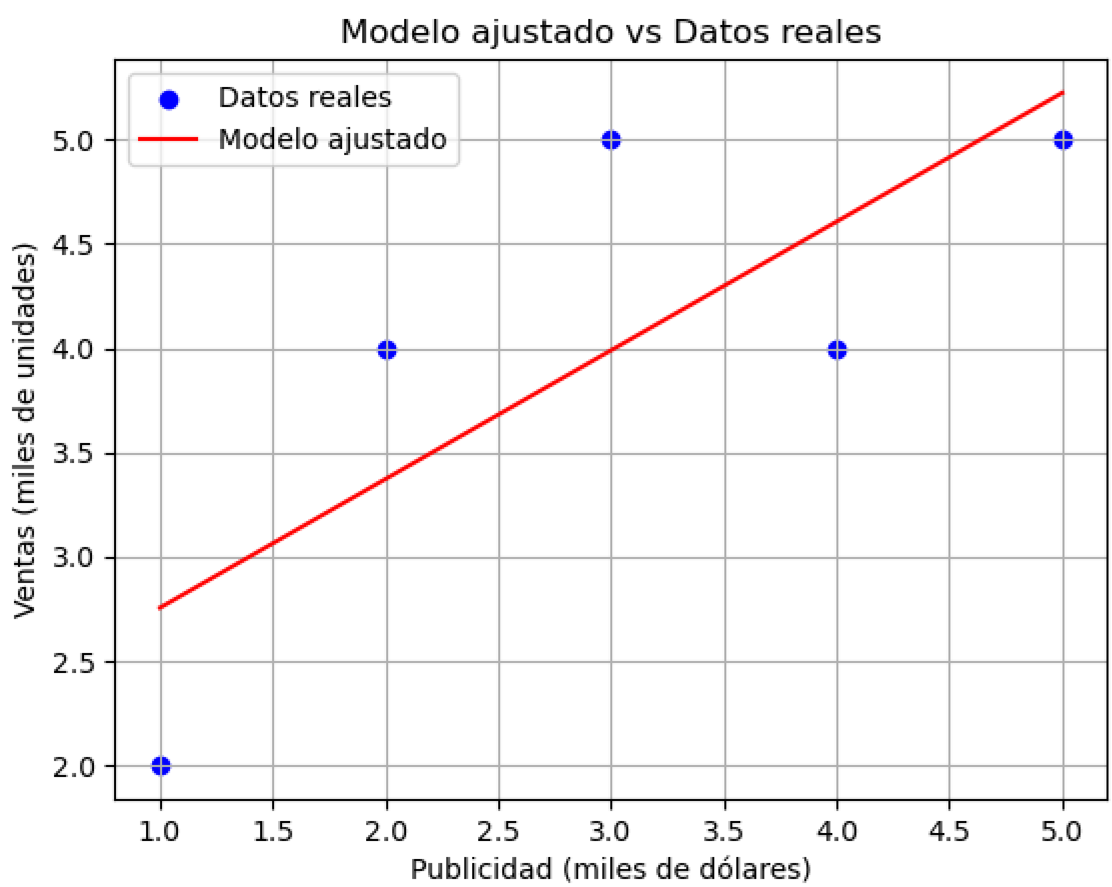
Pregunta 4: Valores Finales de (θ_0) y (θ_1) después de 1000 iteraciones

Los valores finales de (θ_0) y (θ_1) se obtienen al finalizar el algoritmo de gradiente descendente, que busca minimizar el error cuadrático medio.

In [78]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos de publicidad (x) y ventas (y)
x = np.array([1, 2, 3, 4, 5])  # Publicidad en miles de dólares
y = np.array([2, 4, 5, 4, 5])  # Ventas en miles de unidades

# Parámetros iniciales
theta_0 = 0
theta_1 = 0
alpha = 0.01  # Tasa de aprendizaje
iterations = 1000
n = len(x)

# Función para calcular el MSE
def mse(theta_0, theta_1, x, y):
    return np.mean((y - (theta_0 + theta_1 * x)) ** 2)
```

```
# Gradiente descendente
mse_history = []
for _ in range(iterations):
    y_pred = theta_0 + theta_1 * x
    d_theta_0 = -2/n * np.sum(y - y_pred)
    d_theta_1 = -2/n * np.sum((y - y_pred) * x)

    theta_0 = theta_0 - alpha * d_theta_0
    theta_1 = theta_1 - alpha * d_theta_1

    mse_history.append(mse(theta_0, theta_1, x, y))

# Gráfico del MSE en función de las iteraciones
plt.plot(range(iterations), mse_history, label='MSE')
plt.title('MSE en función del número de iteraciones')
plt.xlabel('Iteraciones')
plt.ylabel('MSE')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Gráfico del modelo ajustado junto con los datos reales
plt.scatter(x, y, color='blue', label='Datos reales')
plt.plot(x, theta_0 + theta_1 * x, color='red', label='Modelo ajustado')
plt.title('Modelo ajustado vs Datos reales')
plt.xlabel('Publicidad (miles de dólares)')
plt.ylabel('Ventas (miles de unidades)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Resultados finales
print(f"Valor final de θ0: {theta_0:.2f}")
print(f"Valor final de θ1: {theta_1:.2f}")
```






```
Valor final de θ0: 2.14
Valor final de θ1: 0.62
```

Ejercicio 26: Optimización de Inventario mediante la Cantidad Económica de Pedido (EOQ)

Una empresa desea optimizar sus niveles de inventario para minimizar el costo total anual, que incluye:

- **Costo de pedido**: Costo de realizar cada pedido.
- **Costo de mantenimiento**: Costo de mantener una unidad de inventario en el almacén durante un año.

La empresa ha identificado los siguientes valores:

- La demanda anual del producto (D) es de 10,000 unidades.
- El costo por pedido (S) es de $50.
- El costo de mantenimiento por unidad al año (H) es de $2.

La **Cantidad Económica de Pedido (EOQ)**, que minimiza el costo total anual de inventario, está dada por:

$$Q = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

Donde:

- (Q) es la cantidad óptima de pedido.
- (D) es la demanda anual.
- (S) es el costo por pedido.
- (H) es el costo de mantenimiento por unidad al año.

Con base en esta información, responde las siguientes preguntas:

1. Calcula la **Cantidad Económica de Pedido (EOQ)** para la empresa.
2. Calcula el **Número de Pedidos Anuales** necesarios para satisfacer la demanda.
3. Calcula el **Costo Total Anual** de inventario al aplicar la cantidad económica de pedido.
4. Traza la gráfica de los costos totales en función de la cantidad de pedido para observar el punto mínimo.

Fórmulas:

- La **Cantidad Económica de Pedido (EOQ)** se calcula como:

$$Q = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

- El **Número de Pedidos Anuales** se calcula dividiendo la demanda anual (D) entre (Q):

$$\text{Número de Pedidos} = \frac{D}{Q}$$

- El **Costo Total Anual (CT)** de inventario incluye el costo de pedido y el costo de mantenimiento, y se calcula como:

$$CT = \frac{D}{Q} \cdot S + \frac{Q}{2} \cdot H$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Calcular la Cantidad Económica de Pedido (EOQ)

Utilizamos la fórmula de EOQ para calcular la cantidad óptima de pedido (Q):

$$Q = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

Dado que:

- $(D = 10,000)$ unidades,
- $(S = 50)$ dólares,
- $(H = 2)$ dólares,

Sustituimos los valores:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 10,000 \cdot 50}{2}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{1,000,000}{2}} = \sqrt{500,000} \approx 707.11 \text{ unidades}$$

Por lo tanto, la **Cantidad Económica de Pedido** es aproximadamente **707 unidades**.

Pregunta 2: Calcular el Número de Pedidos Anuales

El número de pedidos anuales se calcula como:

$$\text{Número de Pedidos} = \frac{D}{Q}$$

Sustituyendo $(D = 10,000)$ y $(Q = 707.11)$:

$$\text{Número de Pedidos} = \frac{10,000}{707.11} \approx 14.14$$

Por lo tanto, la empresa debería realizar aproximadamente **14 pedidos** al año.

Pregunta 3: Calcular el Costo Total Anual de Inventario

El costo total anual de inventario (CT) se calcula como la suma del costo de pedido y el costo de mantenimiento:

$$CT = \frac{D}{Q} \cdot S + \frac{Q}{2} \cdot H$$

Sustituyendo los valores:

$$CT = \frac{10,000}{707.11} \cdot 50 + \frac{707.11}{2} \cdot 2$$

Calculamos cada término:

1. Costo de pedido:

$$\frac{10,000}{707.11} \cdot 50 \approx 707.11 \, \text{dólares}$$

2. Costo de mantenimiento:

$$\frac{707.11}{2} \cdot 2 \approx 707.11 \, \text{dólares}$$

Por lo tanto, el **Costo Total Anual de Inventario** es:

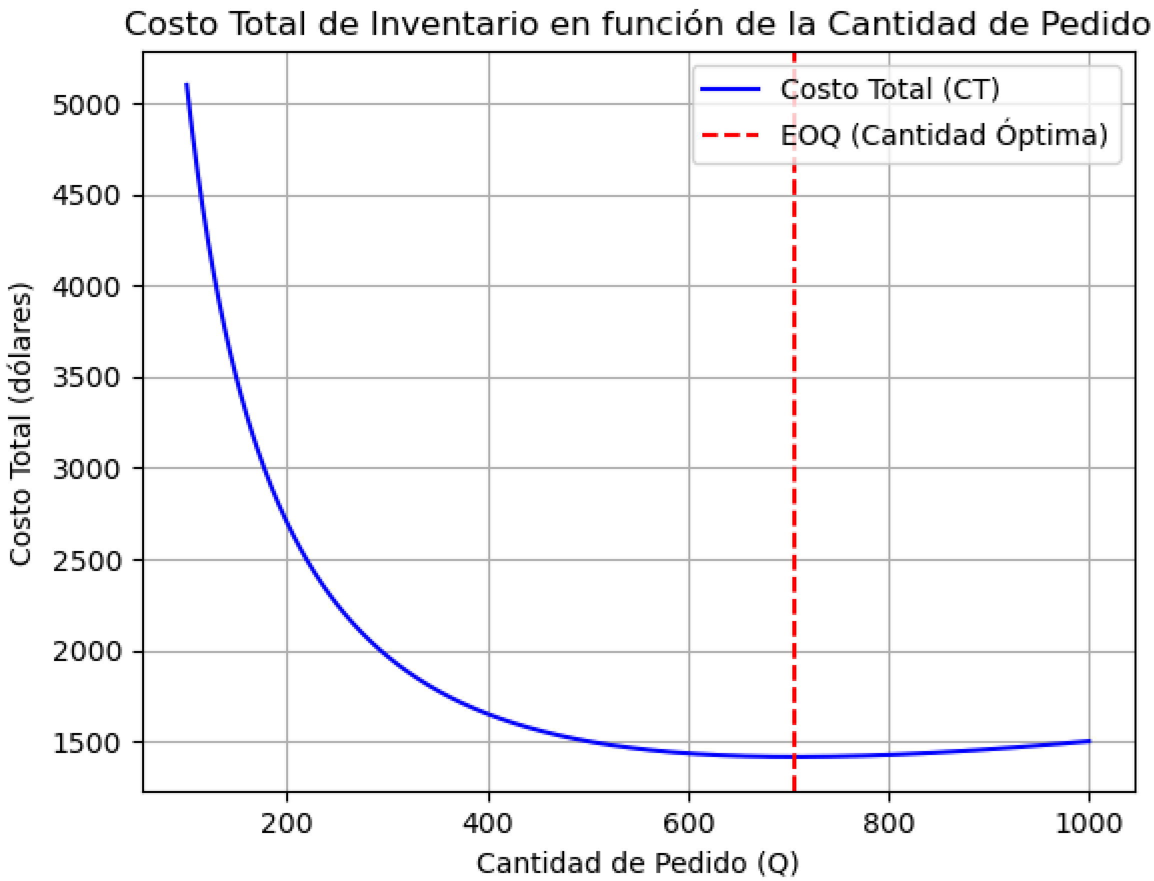
$$CT \approx 707.11 + 707.11 = 1414.22 \, \text{dólares}$$

Pregunta 4: Gráfica del Costo Total en función de la Cantidad de Pedido

Para visualizar el punto de mínimo costo, trazaremos la gráfica de (CT) en función de (Q), variando (Q) en un rango alrededor de la cantidad económica de pedido calculada.

In [81]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del problema
D = 10000  # Demanda anual en unidades
S = 50     # Costo por pedido en dólares
H = 2      # Costo de mantenimiento por unidad al año en dólares

# Función para calcular la Cantidad Económica de Pedido (EOQ)
def eoq(D, S, H):
```

```
    return np.sqrt((2 * D * S) / H)

# Cantidad óptima de pedido
Q_optimo = eoq(D, S, H)

# Número de pedidos anuales
num_pedidos = D / Q_optimo

# Cálculo del Costo Total Anual de Inventario
def costo_total(D, S, H, Q):
    costo_pedido = (D / Q) * S
    costo_mantenimiento = (Q / 2) * H
    return costo_pedido + costo_mantenimiento

# Costo total para la cantidad óptima de pedido
CT_optimo = costo_total(D, S, H, Q_optimo)

# Rango de cantidades de pedido para la gráfica
Q = np.linspace(100, 1000, 500)
CT = costo_total(D, S, H, Q)

# Graficar el costo total en función de la cantidad de pedido
plt.plot(Q, CT, label='Costo Total (CT)', color='blue')
plt.axvline(Q_optimo, color='red', linestyle='--', label='EOQ (Cantidad Óptima)')
plt.title('Costo Total de Inventario en función de la Cantidad de Pedido')
plt.xlabel('Cantidad de Pedido (Q)')
plt.ylabel('Costo Total (dólares)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Imprimir resultados clave
print(f"Cantidad Económica de Pedido (EOQ): {Q_optimo:.2f} unidades")
print(f"Número de Pedidos Anuales: {num_pedidos:.2f}")
print(f"Costo Total Anual: ${CT_optimo:.2f}")
```




```
Cantidad Económica de Pedido (EOQ): 707.11 unidades
Número de Pedidos Anuales: 14.14
Costo Total Anual: $1414.21
```

Ejercicio 27: Optimización de una Cartera de Inversión para Maximizar el Rendimiento Esperado y Minimizar el Riesgo

Un inversionista desea optimizar su cartera de inversión para maximizar el rendimiento esperado y minimizar el riesgo. Ha identificado dos activos con las siguientes características:

1. **Activo A**:
   - Rendimiento esperado ((R_A)): 8% anual
   - Desviación estándar ((σ_A)): 10%
2. **Activo B**:
   - Rendimiento esperado ((R_B)): 12% anual
   - Desviación estándar ((σ_B)): 15%

Además, el **coeficiente de correlación** entre los dos activos ((ρ_{AB})) es de 0.3.

El rendimiento esperado de una cartera compuesta de dos activos está dado por:

$$R_C = w_A \cdot R_A + w_B \cdot R_B$$

Y la varianza de la cartera, que mide el riesgo, está dada por:

$$\sigma_C^2 = w_A^2 \cdot \sigma_A^2 + w_B^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot w_A \cdot w_B \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}$$

Donde:

- (w_A) y (w_B) son los pesos de los activos A y B en la cartera, respectivamente.
- $(w_A + w_B = 1)$.

Con base en esta información, responde las siguientes preguntas:

1. Determina la **composición de la cartera (pesos (w_A) y (w_B))** que maximiza el rendimiento esperado.
2. Calcula el **riesgo de la cartera** para diferentes combinaciones de los activos.
3. Traza la **frontera de eficiencia** de la cartera, que muestra el riesgo en función del rendimiento esperado para diferentes combinaciones de los activos.
4. Encuentra la **combinación óptima** de (w_A) y (w_B) que minimiza el riesgo para un rendimiento objetivo de 10%.

Fórmulas:

- Rendimiento esperado de la cartera:

$$R_C = w_A \cdot R_A + w_B \cdot R_B$$

- Varianza de la cartera:

$$\sigma_C^2 = w_A^2 \cdot \sigma_A^2 + w_B^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot w_A \cdot w_B \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}$$

- Riesgo de la cartera (desviación estándar):

$$\sigma_C = \sqrt{\sigma_C^2}$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Determinar la composición de la cartera (pesos (w_A) y (w_B)) que maximiza el rendimiento esperado

Para maximizar el rendimiento esperado, el inversionista debería asignar el máximo peso posible al activo con mayor rendimiento esperado, que es el **Activo B** (12%).

Por lo tanto:

- $(w_B = 1)$ y $(w_A = 0)$, o
- $(w_A = 1 - w_B)$ para combinaciones intermedias que brinden una diversificación.

Pregunta 2: Calcular el riesgo de la cartera para diferentes combinaciones de los activos

Para calcular el riesgo de la cartera, usamos la fórmula de la varianza:

$$\sigma_C^2 = w_A^2 \cdot \sigma_A^2 + w_B^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot w_A \cdot w_B \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{AB}$$

Donde:

- $(\sigma_A = 0.10)$, $(\sigma_B = 0.15)$, y $(\rho_{AB} = 0.3)$.

Calculamos (σ_C) para valores de (w_A) entre 0 y 1.

Pregunta 3: Trazar la frontera de eficiencia de la cartera

Para trazar la frontera de eficiencia, graficamos el rendimiento esperado (R_C) frente al riesgo (σ_C) para diferentes valores de (w_A) y $(w_B = 1 - w_A)$. Esto muestra cómo varía el rendimiento esperado y el riesgo para distintas combinaciones de los dos activos.

Pregunta 4: Encontrar la combinación óptima que minimiza el riesgo para un rendimiento objetivo de 10%

Queremos encontrar los valores de (w_A) y (w_B) tales que el rendimiento esperado sea 10% y el riesgo sea mínimo.

El rendimiento de la cartera está dado por:

$$R_C = w_A \cdot R_A + w_B \cdot R_B = w_A \cdot 0.08 + (1 - w_A) \cdot 0.12$$

Igualamos a 0.10 y resolvemos para (w_A):

$$0.08w_A + 0.12 - 0.12w_A = 0.10$$

$$-0.04w_A = -0.02$$

$$w_A = 0.5$$

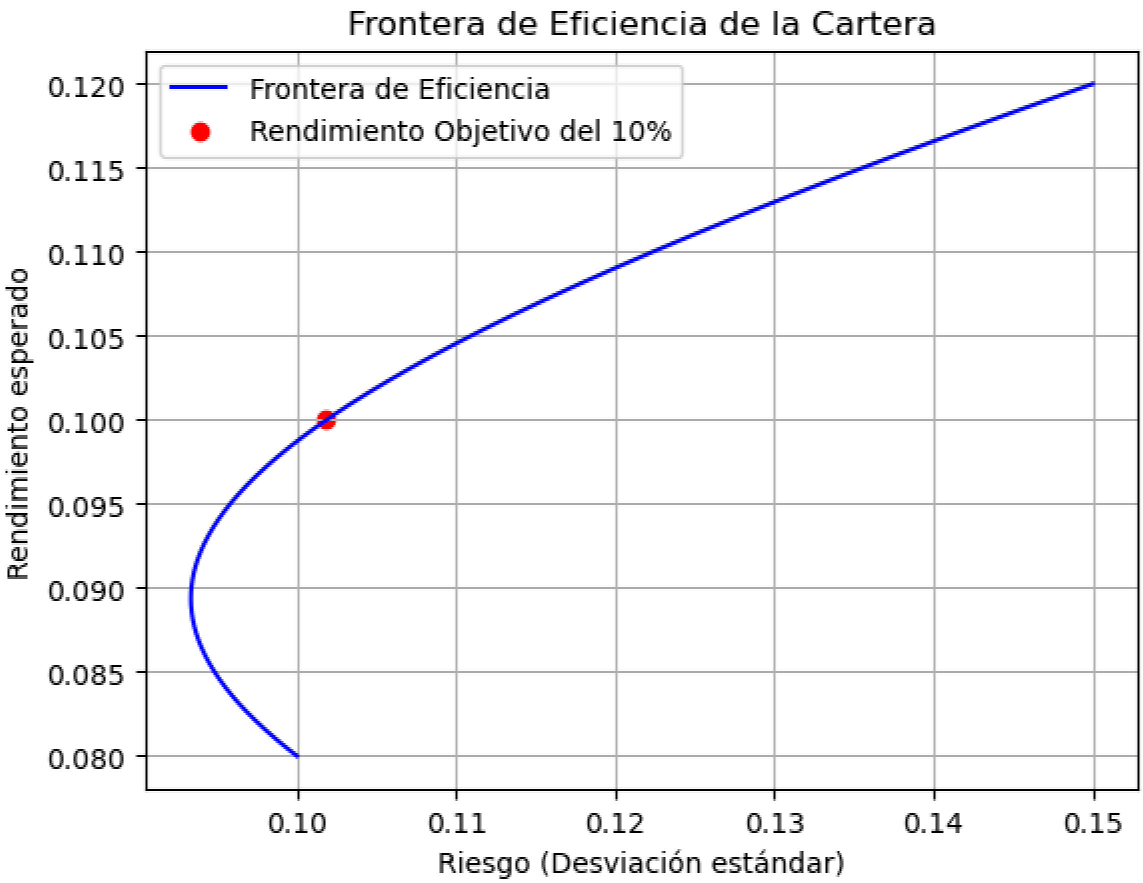
Por lo tanto:

- $(w_A = 0.5)$ y $(w_B = 0.5)$.

Calculamos el riesgo de esta combinación usando la fórmula de la varianza.

In [84]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos de los activos
R_A = 0.08  # Rendimiento esperado del Activo A
R_B = 0.12  # Rendimiento esperado del Activo B
sigma_A = 0.10  # Desviación estándar del Activo A
sigma_B = 0.15  # Desviación estándar del Activo B
rho_AB = 0.3    # Coeficiente de correlación entre A y B

# Funciones de rendimiento y riesgo de la cartera
def rendimiento_cartera(w_A):
    return w_A * R_A + (1 - w_A) * R_B

def riesgo_cartera(w_A):
    w_B = 1 - w_A
    varianza = (w_A**2 * sigma_A**2 + w_B**2 * sigma_B**2 +
                2 * w_A * w_B * sigma_A * sigma_B * rho_AB)
    return np.sqrt(varianza)

# Generar valores de peso w_A entre 0 y 1
w_A_values = np.linspace(0, 1, 500)
rendimientos = [rendimiento_cartera(w) for w in w_A_values]
riesgos = [riesgo_cartera(w) for w in w_A_values]

# Graficar la frontera de eficiencia
plt.plot(riesgos, rendimientos, label='Frontera de Eficiencia', color='blue')
plt.xlabel('Riesgo (Desviación estándar)')
plt.ylabel('Rendimiento esperado')
plt.title('Frontera de Eficiencia de la Cartera')
plt.grid(True)
plt.legend()

# Combinación óptima para un rendimiento objetivo del 10%
w_A_optimo = 0.5
w_B_optimo = 1 - w_A_optimo
riesgo_optimo = riesgo_cartera(w_A_optimo)
rendimiento_objetivo = rendimiento_cartera(w_A_optimo)

# Marcar el punto óptimo en la gráfica
plt.scatter(riesgo_optimo, rendimiento_objetivo, color='red', label='Rendimiento Ob
plt.legend()
plt.show()

# Imprimir resultados clave
print(f"Peso óptimo en Activo A para rendimiento del 10%: {w_A_optimo:.2f}")
print(f"Peso óptimo en Activo B para rendimiento del 10%: {w_B_optimo:.2f}")
print(f"Riesgo (desviación estándar) para la cartera óptima: {riesgo_optimo:.2f}")
print(f"Rendimiento esperado para la cartera óptima: {rendimiento_objetivo:.2f}")
```




```
Peso óptimo en Activo A para rendimiento del 10%: 0.50
Peso óptimo en Activo B para rendimiento del 10%: 0.50
Riesgo (desviación estándar) para la cartera óptima: 0.10
Rendimiento esperado para la cartera óptima: 0.10
```

Ejercicio 28: Optimización de Economías de Escala

Una empresa produce un bien y desea determinar el nivel de producción que minimiza su costo promedio. La función de costo total $(C(q))$ está dada por:

$$C(q) = 5000 + 20q - 0.02q^2 + 0.0001q^3$$

Donde:

- $(C(q))$ es el costo total (en dólares) cuando se producen (q) unidades del bien.
- (q) es la cantidad de bienes producidos.

El costo promedio $(C_{\text{avg}}(q))$ se define como el costo total dividido por el número de unidades producidas:

$$C_{\text{avg}}(q) = \frac{C(q)}{q}$$

Responde las siguientes preguntas:

1. Calcula la función de **costo promedio** $(C_{\text{avg}}(q))$.
2. Deriva la función de costo promedio y encuentra el valor de (q) que minimiza el costo promedio.
3. Calcula el costo promedio mínimo alcanzado en ese nivel de producción.
4. Traza la gráfica de los costos promedio y costos totales en función de la cantidad producida (q) para valores de (q) entre 0 y 500 unidades.

Fórmulas:

- Costo promedio:

$$C_{\text{avg}}(q) = \frac{C(q)}{q}$$

- El valor de (q) que minimiza el costo promedio se encuentra derivando $(C_{\text{avg}}(q))$ y resolviendo:

$$\frac{dC_{\text{avg}}}{dq} = 0$$

-

Solución Matemática

Pregunta 1: Calcular la función de costo promedio

La función de costo promedio está dada por:

$$C_{\text{avg}}(q) = \frac{C(q)}{q}$$

Sustituyendo la función de costo total $(C(q))$:

$$C_{\text{avg}}(q) = \frac{5000 + 20q - 0.02q^2 + 0.0001q^3}{q}$$

Dividimos cada término por (q):

$$C_{\text{avg}}(q) = \frac{5000}{q} + 20 - 0.02q + 0.0001q^2$$

Por lo tanto, la función de costo promedio es:

$$C_{\text{avg}}(q) = \frac{5000}{q} + 20 - 0.02q + 0.0001q^2$$

Pregunta 2: Derivar la función de costo promedio para encontrar el nivel de producción óptimo

Derivamos la función de costo promedio respecto a (q):

$$\frac{dC_{\text{avg}}}{dq} = -\frac{5000}{q^2} - 0.02 + 2 \cdot 0.0001q$$

Simplificamos:

$$\frac{dC_{\text{avg}}}{dq} = -\frac{5000}{q^2} - 0.02 + 0.0002q$$

Para encontrar el nivel de producción (q) que minimiza el costo promedio, igualamos la derivada a cero:

$$-\frac{5000}{q^2} - 0.02 + 0.0002q = 0$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por (q^2) para eliminar el denominador:

$$-5000 - 0.02q^2 + 0.0002q^3 = 0$$

Podemos resolver esta ecuación cúbica numéricamente para obtener el valor de (q) que minimiza el costo promedio.

Pregunta 3: Calcular el costo promedio mínimo

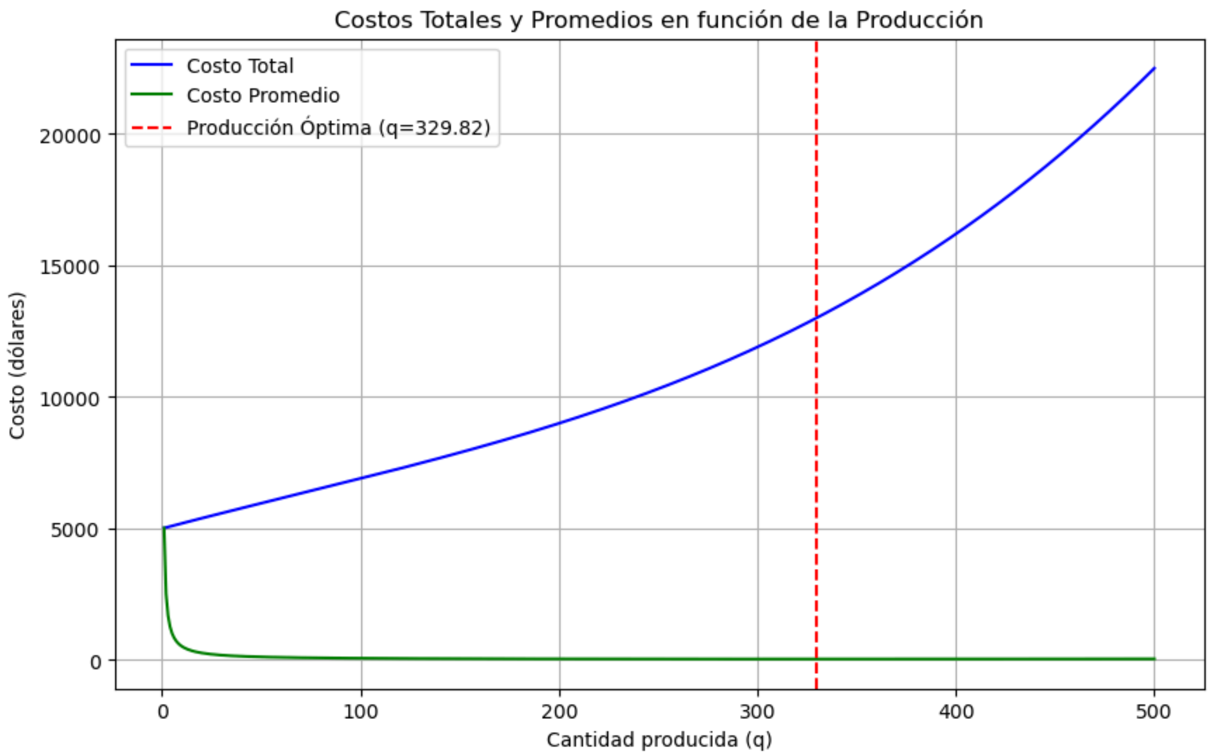
Una vez que hemos encontrado el valor de (q) que minimiza el costo promedio, sustituimos ese valor en la función de costo promedio $(C_{\text{avg}}(q))$ para obtener el costo promedio mínimo.

Pregunta 4: Traza la gráfica de los costos promedio y costos totales en función de la cantidad producida

Trazaremos las funciones $(C_{\text{avg}}(q))$ y $(C(q))$ en un rango de (q) entre 0 y 500 para visualizar cómo cambian los costos a diferentes niveles de producción.

In [87]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import fsolve

# Definir la función de costo total
def costo_total(q):
    return 5000 + 20*q - 0.02*q**2 + 0.0001*q**3

# Definir la función de costo promedio
```

```
def costo_promedio(q):
    return (5000/q) + 20 - 0.02*q + 0.0001*q**2

# Derivada de la función de costo promedio para encontrar el mínimo
def derivada_costo_promedio(q):
    return -5000/q**2 - 0.02 + 0.0002*q

# Resolver numéricamente para encontrar el valor de q que minimiza el costo promedi
q_optimo = fsolve(derivada_costo_promedio, 100)[0]

# Calcular el costo promedio mínimo
costo_promedio_min = costo_promedio(q_optimo)

# Rango de valores de q para la gráfica
q = np.linspace(1, 500, 500)

# Cálculo de costos totales y promedios
costos_totales = costo_total(q)
costos_promedios = costo_promedio(q)

# Graficar los costos promedio y totales
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(q, costos_totales, label='Costo Total', color='blue')
plt.plot(q, costos_promedios, label='Costo Promedio', color='green')
plt.axvline(q_optimo, color='red', linestyle='--', label=f'Producción Óptima (q={q_
plt.xlabel('Cantidad producida (q)')
plt.ylabel('Costo (dólares)')
plt.title('Costos Totales y Promedios en función de la Producción')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Imprimir los resultados clave
print(f"Producción óptima (q) que minimiza el costo promedio: {q_optimo:.2f} unidad
print(f"Costo promedio mínimo: ${costo_promedio_min:.2f} por unidad")
```




```
Producción óptima (q) que minimiza el costo promedio: 329.82 unidades
Costo promedio mínimo: $39.44 por unidad
```

Ejercicio 29: Optimización de Costos de Transporte entre Almacenes y Destinos

Una empresa tiene dos almacenes (A) y (B) que distribuyen productos a tres destinos (X), (Y), y (Z). La capacidad de los almacenes y la demanda en los destinos, junto con los costos de transporte por unidad, están dados en la siguiente tabla:

Almacén/Destino	**Demanda en (X)**	**Demanda en (Y)**	**Demanda en (Z)**	**Capacidad Total**
Almacén (A)	$3/unidad$	$4/unidad$	$5/unidad$	80 unidades
Almacén (B)	$6/unidad$	$3/unidad$	$4/unidad$	70 unidades

- **Demanda en los destinos**:
  - (X): 50 unidades
  - (Y): 60 unidades
  - (Z): 40 unidades

El objetivo es determinar cuántas unidades deben enviarse desde cada almacén a cada destino para **minimizar el costo total de transporte**, cumpliendo con las capacidades de los almacenes y las demandas de los destinos.

Responde las siguientes preguntas:

1. Define las variables de decisión para representar las cantidades a enviar desde cada almacén a cada destino.
2. Establece la **función objetivo** que minimiza el costo total de transporte.
3. Define las **restricciones** correspondientes a las capacidades de los almacenes y la demanda de los destinos.
4. Resuelve el problema usando el método del **Simplex** para encontrar la cantidad óptima a enviar desde cada almacén a cada destino que minimiza el costo total.
5. Traza una gráfica que ilustre los flujos de productos desde los almacenes hacia los destinos.

Fórmulas:

- El costo total de transporte está dado por la siguiente función objetivo:

$$\text{Minimizar } Z = 3x_{AX} + 4x_{AY} + 5x_{AZ} + 6x_{BX} + 3x_{BY} + 4x_{BZ}$$

  Donde (x_{ij}) representa la cantidad enviada desde el almacén (i) al destino (j).

- Las restricciones incluyen:
  - La capacidad total de los almacenes:

$$x_{AX} + x_{AY} + x_{AZ} \leq 80$$

$$x_{BX} + x_{BY} + x_{BZ} \leq 70$$

  - La demanda total de los destinos:

$$x_{AX} + x_{BX} = 50$$

$$x_{AY} + x_{BY} = 60$$

$$x_{AZ} + x_{BZ} = 40$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Definir las variables de decisión

Las variables de decisión representan la cantidad enviada desde cada almacén a cada destino. Denotamos las siguientes variables:

- (x_{AX}): Cantidad enviada desde Almacén (A) a Destino (X)
- (x_{AY}): Cantidad enviada desde Almacén (A) a Destino (Y)
- (x_{AZ}): Cantidad enviada desde Almacén (A) a Destino (Z)
- (x_{BX}): Cantidad enviada desde Almacén (B) a Destino (X)

- (x_{BY}): Cantidad enviada desde Almacén (B) a Destino (Y)
- (x_{BZ}): Cantidad enviada desde Almacén (B) a Destino (Z)

Pregunta 2: Establecer la función objetivo

La función objetivo es minimizar el costo total de transporte, representado por:

$$Z = 3x_{AX} + 4x_{AY} + 5x_{AZ} + 6x_{BX} + 3x_{BY} + 4x_{BZ}$$

Pregunta 3: Definir las restricciones

Las restricciones se dividen en dos grupos: las capacidades de los almacenes y las demandas de los destinos.

1. Restricciones de capacidad de los almacenes:

   - Para Almacén (A):

   $$x_{AX} + x_{AY} + x_{AZ} \leq 80$$

   - Para Almacén (B):

   $$x_{BX} + x_{BY} + x_{BZ} \leq 70$$

2. Restricciones de demanda en los destinos:

   - Para Destino (X):

   $$x_{AX} + x_{BX} = 50$$

   - Para Destino (Y):

   $$x_{AY} + x_{BY} = 60$$

   - Para Destino (Z):

   $$x_{AZ} + x_{BZ} = 40$$

Pregunta 4: Resolución del problema

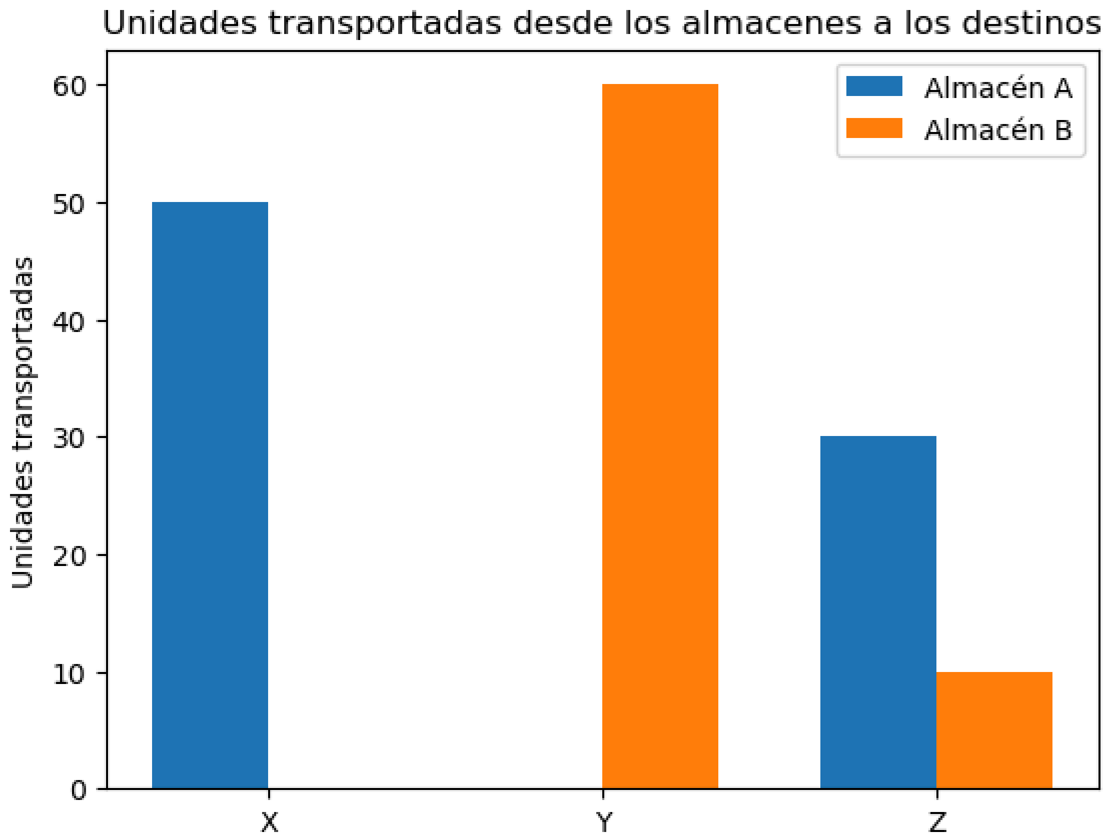
Utilizamos el **método Simplex** para resolver el problema y encontrar las cantidades óptimas de productos a enviar desde los almacenes a los destinos.

In [90]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import linprog

# Coeficientes de costos en la función objetivo
c = [3, 4, 5, 6, 3, 4]  # Costos de transporte (x_AX, x_AY, x_AZ, x_BX, x_BY, x_BZ)

# Restricciones de capacidad de los almacenes
A_eq = [
```

```
    [1, 1, 1, 0, 0, 0],  # Capacidad del Almacén A
    [0, 0, 0, 1, 1, 1],  # Capacidad del Almacén B
    [1, 0, 0, 1, 0, 0],  # Demanda del Destino X
    [0, 1, 0, 0, 1, 0],  # Demanda del Destino Y
    [0, 0, 1, 0, 0, 1]   # Demanda del Destino Z
]

# Cantidades requeridas (demanda y capacidad)
b_eq = [80, 70, 50, 60, 40]

# Resolver el problema de transporte
res = linprog(c, A_eq=A_eq, b_eq=b_eq, bounds=(0, None), method='simplex')

# Resultados
x_AX, x_AY, x_AZ, x_BX, x_BY, x_BZ = res.x
costo_total = res.fun

print(f"Cantidad enviada desde A a X: {x_AX:.2f}")
print(f"Cantidad enviada desde A a Y: {x_AY:.2f}")
print(f"Cantidad enviada desde A a Z: {x_AZ:.2f}")
print(f"Cantidad enviada desde B a X: {x_BX:.2f}")
print(f"Cantidad enviada desde B a Y: {x_BY:.2f}")
print(f"Cantidad enviada desde B a Z: {x_BZ:.2f}")
print(f"Costo total mínimo de transporte: ${costo_total:.2f}")

# Graficar los flujos de transporte
labels = ['X', 'Y', 'Z']
flows_A = [x_AX, x_AY, x_AZ]
flows_B = [x_BX, x_BY, x_BZ]

x = np.arange(len(labels))
width = 0.35

fig, ax = plt.subplots()
rects1 = ax.bar(x - width/2, flows_A, width, label='Almacén A')
rects2 = ax.bar(x + width/2, flows_B, width, label='Almacén B')

ax.set_ylabel('Unidades transportadas')
ax.set_title('Unidades transportadas desde los almacenes a los destinos')
ax.set_xticks(x)
ax.set_xticklabels(labels)
ax.legend()

plt.show()
```

```
Cantidad enviada desde A a X: 50.00
Cantidad enviada desde A a Y: 0.00
Cantidad enviada desde A a Z: 30.00
Cantidad enviada desde B a X: 0.00
Cantidad enviada desde B a Y: 60.00
Cantidad enviada desde B a Z: 10.00
Costo total mínimo de transporte: $520.00
```

```
C:\Users\wpeuj\AppData\Local\Temp\ipykernel_25584\1557326682.py:21: DeprecationWarni
ng: `method='simplex'` is deprecated and will be removed in SciPy 1.11.0. Please use
one of the HiGHS solvers (e.g. `method='highs'`) in new code.
  res = linprog(c, A_eq=A_eq, b_eq=b_eq, bounds=(0, None), method='simplex')
C:\Users\wpeuj\AppData\Local\Temp\ipykernel_25584\1557326682.py:21: OptimizeWarning:
A_eq does not appear to be of full row rank. To improve performance, check the probl
em formulation for redundant equality constraints.
  res = linprog(c, A_eq=A_eq, b_eq=b_eq, bounds=(0, None), method='simplex')
```



Ejercicio 30: Optimización del Tiempo de Espera en un Sistema de Colas

En un centro de atención, los clientes llegan a una tasa promedio de 12 clientes por hora y el centro tiene una sola fila para la atención. El tiempo promedio que un empleado tarda en atender a cada cliente es de 4 minutos.

1. La **tasa de llegada** de los clientes ((λ)) es de 12 clientes por hora.

2. La **tasa de servicio** ((μ)) es la capacidad de atender clientes por hora, y está dada por:

$$\mu = \frac{60}{\text{Tiempo de atención promedio (minutos)}}$$

Con base en estos datos, responde las siguientes preguntas:

1. Calcula la **tasa de servicio** (μ) en clientes por hora.

2. Calcula la **utilización del sistema** ((ρ)), que representa la fracción de tiempo que el empleado está ocupado.

3. Calcula el **tiempo promedio de espera** en la fila.

4. Calcula el **número promedio de clientes en el sistema** (en espera o siendo atendidos).

5. Traza una gráfica que muestre cómo el tiempo de espera promedio cambia con diferentes tasas de llegada (λ).

Fórmulas:

- La **tasa de servicio**:

$$\mu = \frac{60}{\text{Tiempo de atención promedio}}$$

- La **utilización del sistema** ((ρ)) se calcula como:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- El **tiempo promedio de espera** en el sistema (Teoría de colas M/M/1):

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

- El **número promedio de clientes en el sistema**:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Calcular la tasa de servicio (μ)

La tasa de servicio (μ) es el número de clientes que el empleado puede atender por hora. Dado que el tiempo de atención promedio es de 4 minutos, tenemos:

$$\mu = \frac{60}{4} = 15\,\text{clientes por hora}$$

Pregunta 2: Calcular la utilización del sistema (ρ)

La utilización del sistema (ρ) representa la fracción del tiempo que el empleado está ocupado y se calcula como:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Sustituyendo $(\lambda = 12)$ y $(\mu = 15)$:

$$\rho = \frac{12}{15} = 0.8$$

Esto significa que el empleado está ocupado el 80% del tiempo.

Pregunta 3: Calcular el tiempo promedio de espera en la fila

El tiempo promedio de espera en el sistema se calcula con la fórmula:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

Sustituyendo $(\rho = 0.8)$ y $(\mu = 15)$:

$$W_q = \frac{0.8}{15 \cdot (1-0.8)}$$

$$W_q = \frac{0.8}{15 \cdot 0.2} = \frac{0.8}{3} \approx 0.267\,\text{horas} = 16\,\text{minutos}$$

Por lo tanto, el **tiempo promedio de espera en la fila** es de aproximadamente **16 minutos**.

Pregunta 4: Calcular el número promedio de clientes en el sistema

El número promedio de clientes en el sistema (L) se calcula como:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Sustituyendo $(\lambda = 12)$ y $(\mu = 15)$:

$$L = \frac{12}{15-12} = \frac{12}{3} = 4\,\text{clientes}$$

Por lo tanto, hay en promedio **4 clientes** en el sistema en cualquier momento dado.

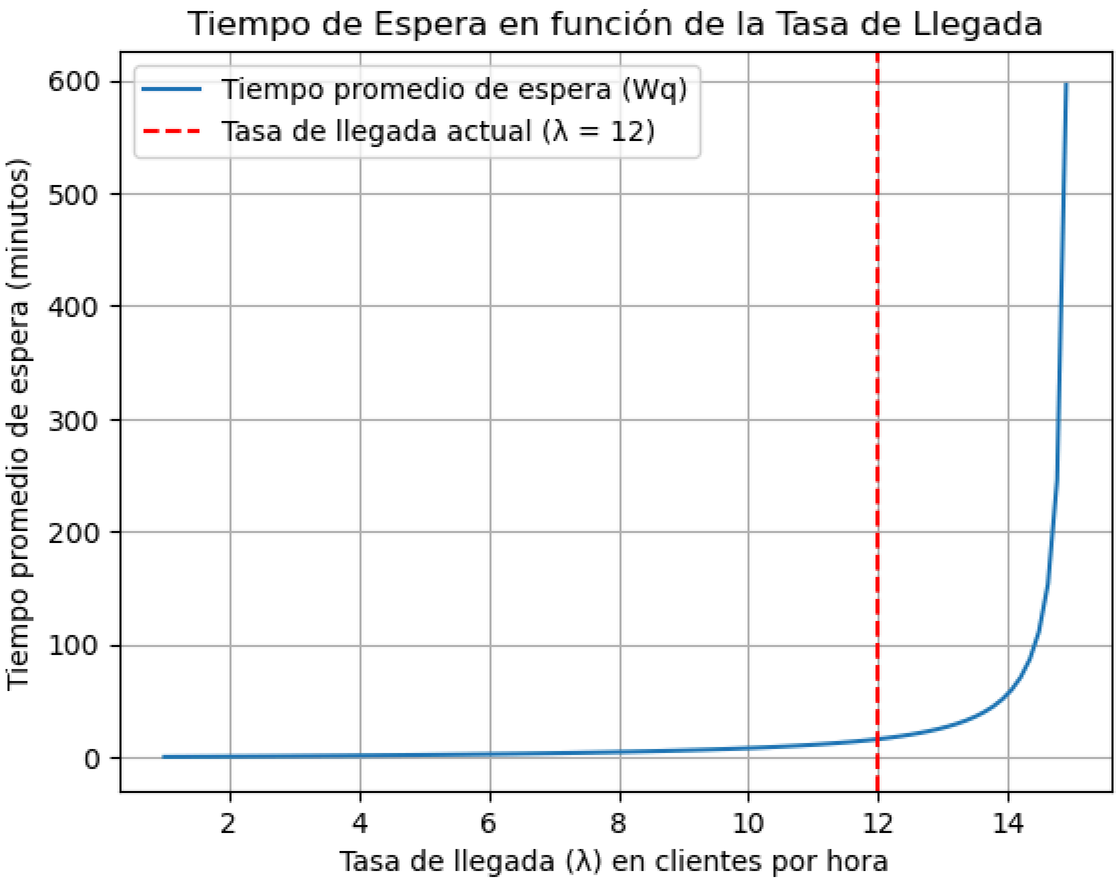
Pregunta 5: Gráfica del tiempo de espera promedio con diferentes tasas de llegada

Para observar cómo el tiempo de espera cambia con diferentes tasas de llegada (λ), graficamos (W_q) en función de (λ) desde 1 hasta 14 clientes por hora.

In [93]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# Datos del problema
lambda_val = 12  # Tasa de llegada en clientes por hora
mu = 15          # Tasa de servicio en clientes por hora

# Calcular la utilización del sistema
rho = lambda_val / mu

# Calcular el tiempo promedio de espera en la fila
W_q = rho / (mu * (1 - rho))

# Calcular el número promedio de clientes en el sistema
L = lambda_val / (mu - lambda_val)

print(f"Tasa de servicio (μ): {mu} clientes por hora")
print(f"Utilización del sistema (ρ): {rho:.2f}")
print(f"Tiempo promedio de espera en la fila (Wq): {W_q * 60:.2f} minutos")
print(f"Número promedio de clientes en el sistema (L): {L:.2f} clientes")

# Gráfica del tiempo de espera promedio en función de la tasa de llegada
lambda_values = np.linspace(1, mu - 0.1, 100)  # Tasa de llegada de 1 a un poco men
W_q_values = lambda_values / (mu * (mu - lambda_values))

plt.plot(lambda_values, W_q_values * 60, label='Tiempo promedio de espera (Wq)')
plt.axvline(lambda_val, color='red', linestyle='--', label=f'Tasa de llegada actual
plt.xlabel('Tasa de llegada (λ) en clientes por hora')
plt.ylabel('Tiempo promedio de espera (minutos)')
plt.title('Tiempo de Espera en función de la Tasa de Llegada')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Tasa de servicio (μ): 15 clientes por hora
Utilización del sistema (ρ): 0.80
Tiempo promedio de espera en la fila (Wq): 16.00 minutos
Número promedio de clientes en el sistema (L): 4.00 clientes
```



Capítulo 4: Integrales - Acumulando el Conocimiento

IV.1 Fundamentos de las Integrales

Introducción

Las **integrales** son una herramienta fundamental en el cálculo que nos permite acumular o agregar cantidades continuamente a lo largo de un intervalo. A través de las integrales, es posible calcular áreas bajo curvas, volúmenes de sólidos de revolución, y resolver problemas en los que se acumulan cantidades, como en el caso de las finanzas o la física.

En términos simples, podemos considerar la integral como la operación inversa de la derivada. Si la derivada de una función ($f(x)$) representa su tasa de cambio instantánea, la integral de ($f(x)$) a lo largo de un intervalo ($[a, b]$) representa la acumulación total de esta tasa de cambio en ese intervalo.

Conceptos Clave

1. **Integral Definida**: La integral definida de una función ($f(x)$) en el intervalo ($[a, b]$) es el área bajo la curva de ($f(x)$) desde ($x = a$) hasta ($x = b$), y se representa como:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

   La integral definida tiene un valor numérico y representa el área total bajo la curva, tomando en cuenta las áreas positivas y negativas.

2. **Integral Indefinida**: La integral indefinida de una función ($f(x)$) se representa como:

$$\int f(x)\,dx$$

   y corresponde a una familia de funciones cuya derivada es ($f(x)$). A esta función resultante se le llama función antiderivada o primitiva de ($f(x)$).

3. **Propiedades de las Integrales**:

   - **Linealidad**:

$$\int (c \cdot f(x) + g(x))\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

   - **Adición de Intervalos**:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Breve Historia de las Integrales

El concepto de integral tiene sus raíces en la antigua Grecia, donde matemáticos como **Eudoxo** y **Arquímides** aplicaron métodos de suma para calcular áreas y volúmenes. Sin embargo, fue en el siglo XVII cuando **Isaac Newton** y **Gottfried Wilhelm Leibniz** desarrollaron el cálculo integral y diferencial formalmente, sentando las bases para el cálculo moderno.

Importancia de las Integrales en la Vida Diaria

Las integrales se aplican en una amplia variedad de campos, desde la **ingeniería** y la **física** hasta la **economía** y las **finanzas**. Cualquier situación en la que se requiera sumar cantidades continuamente a lo largo de un intervalo, como calcular el área bajo una curva de demanda o el volumen de un sólido, puede resolverse mediante integrales.

IV.2 Aplicaciones de las Integrales en Finanzas, Economía y Física

1. Finanzas: Valoración de Flujos de Efectivo Continuos

En el ámbito financiero, las integrales se utilizan para valorar flujos de efectivo continuos. Cuando una empresa o un proyecto genera ingresos continuos en el tiempo, podemos utilizar una integral para calcular el valor presente total de estos flujos descontados a una tasa (r).

Ejemplo: El valor presente de un flujo de efectivo continuo a una tasa de descuento (r) en el tiempo (t) de 0 a (T) se calcula como:

$$PV = \int_0^T C(t)e^{-rt}\,dt$$

donde:

- $(C(t))$ es el flujo de efectivo en el tiempo (t),
- (e^{-rt}) es el factor de descuento para llevar el flujo de efectivo al valor presente.

Esta fórmula es útil para proyectos que generan ingresos de forma continua, como intereses acumulados o ingresos de alquiler.

2. Economía: Superávit del Consumidor y del Productor

En economía, las integrales son fundamentales para calcular el **superávit del consumidor** y el **superávit del productor**. Estos conceptos reflejan la ganancia económica de consumidores y productores en un mercado y se calculan usando las áreas bajo curvas de oferta y demanda.

Superávit del Consumidor: Es el área entre la curva de demanda y el precio de equilibrio (P), desde 0 hasta la cantidad demandada (Q):

$$CS = \int_0^Q (D(q) - P)\,dq$$

Superávit del Productor: Es el área entre el precio de equilibrio (P) y la curva de oferta $(S(q))$ desde 0 hasta (Q):

$$PS = \int_0^Q (P - S(q))\,dq$$

Estas integrales permiten evaluar los beneficios económicos para consumidores y productores en mercados competitivos.

3. Física: Cálculo de Trabajo y Energía

En física, el cálculo integral es esencial para medir el **trabajo** realizado por una fuerza variable sobre un objeto. Si una fuerza $(F(x))$ se aplica a un objeto a lo largo de una distancia desde (a) hasta (b), el trabajo total (W) es:

$$W = \int_a^b F(x)\, dx$$

Ejemplo: Calcular el trabajo necesario para mover un objeto contra una resistencia variable, como una fricción que cambia con la posición, o en el caso de campos gravitacionales o eléctricos.

Diagramas y Visualización

Para ayudar a comprender estas aplicaciones, es útil utilizar gráficas y diagramas que representen áreas bajo curvas y el efecto acumulativo de estas áreas. En problemas de física, por ejemplo, el área bajo la curva de una función de fuerza representa el trabajo total realizado.

Las **integrales** permiten resolver problemas de acumulación y cálculo de áreas en varias disciplinas. En el siguiente apartado, exploraremos estos conceptos a través de ejercicios prácticos que simulan situaciones reales en finanzas, economía y física.

IV.3 Ejercicios de Aplicaciones y Soluciones (MathPY)

Ejercicio 31: Valoración de un Flujo de Efectivo Continuo en un Proyecto de Inversión

Una empresa está evaluando un proyecto que genera ingresos continuos a una tasa de $500 por año durante un periodo de 5 años. Para calcular el valor presente de estos ingresos, la empresa utiliza una tasa de descuento anual del 6%.

Con base en esta información, responde las siguientes preguntas:

1. **Calcular el valor presente** de los flujos de efectivo continuos descontados a una tasa del 6% anual en un periodo de 5 años.
2. Representa gráficamente el flujo de efectivo en función del tiempo y su valor descontado para ver cómo disminuye con el tiempo.
3. ¿Cómo cambia el valor presente si la tasa de descuento aumenta al 8%? Realiza el cálculo y compáralo con el valor calculado inicialmente.

Fórmula del Valor Presente de un Flujo de Efectivo Continuo

El valor presente (PV) de un flujo de efectivo continuo (C) descontado a una tasa (r) sobre un periodo de tiempo de 0 a (T) está dado por:

$$PV = \int_0^T C \cdot e^{-rt}\, dt$$

Donde:

- (C) es la tasa de flujo de efectivo en dólares por año,
- (r) es la tasa de descuento,
- (T) es el tiempo en años.

Solución Matemática

Pregunta 1: Calcular el valor presente de los flujos de efectivo continuos

La fórmula del valor presente de un flujo de efectivo continuo es:

$$PV = \int_0^T C \cdot e^{-rt}\, dt$$

Sustituyendo los valores dados:

- $(C = 500)$ dólares/año,
- $(r = 0.06)$,
- $(T = 5)$ años,

tenemos:

$$PV = \int_0^5 500 \cdot e^{-0.06t}\, dt$$

Para resolver esta integral, utilizamos la propiedad de la integral exponencial:

$$PV = 500 \left[\frac{-e^{-0.06t}}{0.06} \right]_0^5$$

Sustituyendo los límites:

$$PV = 500 \cdot \left(\frac{-e^{-0.06 \cdot 5} + e^0}{0.06} \right)$$

Simplificando, obtenemos el valor presente.

Pregunta 2: Representación gráfica del flujo de efectivo descontado

Podemos graficar el flujo de efectivo descontado para cada año, observando cómo el valor presente disminuye con el tiempo debido al factor de descuento (e^{-rt}).

Pregunta 3: Cambios en el valor presente si la tasa de descuento aumenta al 8%

Si la tasa de descuento cambia a 8%, el valor presente del flujo de efectivo se calcula como:

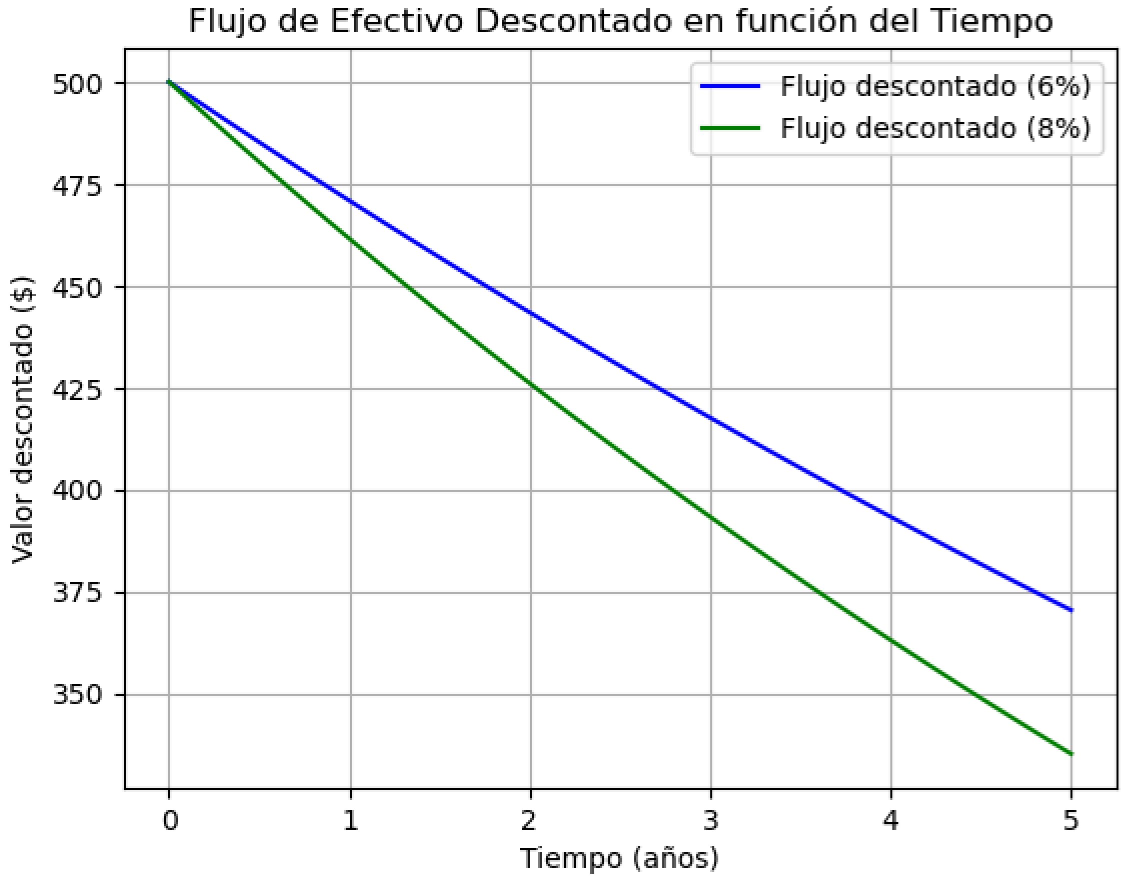
$$PV_{r=0.08} = \int_0^5 500 \cdot e^{-0.08t} \, dt$$

Resolvemos esta integral de la misma forma que anteriormente para comparar ambos resultados.

In [98]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

# Datos del problema
C = 500      # Flujo de efectivo en dólares/año
T = 5        # Periodo de tiempo en años
r1 = 0.06    # Tasa de descuento inicial
r2 = 0.08    # Tasa de descuento alternativa

# Función para calcular el flujo de efectivo descontado
def flujo_descontado(t, C, r):
    return C * np.exp(-r * t)

# Calcular el valor presente con r = 6%
PV_r1, _ = quad(flujo_descontado, 0, T, args=(C, r1))

# Calcular el valor presente con r = 8%
PV_r2, _ = quad(flujo_descontado, 0, T, args=(C, r2))

print(f"Valor presente con tasa de descuento del 6%: ${PV_r1:.2f}")
print(f"Valor presente con tasa de descuento del 8%: ${PV_r2:.2f}")

# Gráfica del flujo de efectivo descontado en función del tiempo
t_vals = np.linspace(0, T, 100)
descuento_r1 = flujo_descontado(t_vals, C, r1)
descuento_r2 = flujo_descontado(t_vals, C, r2)

plt.plot(t_vals, descuento_r1, label='Flujo descontado (6%)', color='blue')
plt.plot(t_vals, descuento_r2, label='Flujo descontado (8%)', color='green')
plt.xlabel('Tiempo (años)')
plt.ylabel('Valor descontado ($)')
plt.title('Flujo de Efectivo Descontado en función del Tiempo')
plt.legend()
```

```
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Valor presente con tasa de descuento del 6%: $2159.85
Valor presente con tasa de descuento del 8%: $2060.50
```



Ejercicio 32: Cálculo del Superávit del Consumidor en un Mercado de Bienes

En un mercado, la función de demanda de un bien está dada por:

$$D(q) = 100 - 2q$$

donde:

- (D(q)) es el precio máximo que los consumidores están dispuestos a pagar por una cantidad (q) de bienes.

El precio de equilibrio del mercado es de **$40** por unidad, y la cantidad de equilibrio es **30 unidades**.

Con base en esta información, responde las siguientes preguntas:

1. **Calcular el superávit del consumidor** en el mercado, usando la función de demanda y el precio de equilibrio.

2. Representa gráficamente la función de demanda y el área correspondiente al superávit del consumidor.
3. ¿Cómo cambiaría el superávit del consumidor si el precio de equilibrio aumenta a $50? Realiza el cálculo y compáralo con el superávit calculado inicialmente.

Fórmulas

El superávit del consumidor se calcula como el área entre la curva de demanda y el precio de equilibrio, desde (q = 0) hasta la cantidad de equilibrio (Q):

$$CS = \int_0^Q (D(q) - P)\, dq$$

donde:

- (CS) es el superávit del consumidor,
- (D(q)) es la función de demanda,
- (P) es el precio de equilibrio,
- (Q) es la cantidad de equilibrio.

Ejercicio 32: Cálculo del Superávit del Consumidor en un Mercado de Bienes

En un mercado, la función de demanda de un bien está dada por:

$$D(q) = 100 - 2q$$

donde:

- $(D(q))$ es el precio máximo que los consumidores están dispuestos a pagar por una cantidad (q) de bienes.

El precio de equilibrio del mercado es de **$40** por unidad, y la cantidad de equilibrio es **30 unidades**.

Con base en esta información, responde las siguientes preguntas:

1. **Calcular el superávit del consumidor** en el mercado, usando la función de demanda y el precio de equilibrio.

2. Representa gráficamente la función de demanda y el área correspondiente al superávit del consumidor.

3. ¿Cómo cambiaría el superávit del consumidor si el precio de equilibrio aumenta a $50? Realiza el cálculo y compáralo con el superávit calculado inicialmente.

Fórmulas

El superávit del consumidor se calcula como el área entre la curva de demanda y el precio de equilibrio, desde ($q = 0$) hasta la cantidad de equilibrio (Q):

$$CS = \int_0^Q (D(q) - P)\,dq$$

donde:

- (CS) es el superávit del consumidor,
- ($D(q)$) es la función de demanda,
- (P) es el precio de equilibrio,
- (Q) es la cantidad de equilibrio.

Solución Matemática

Pregunta 1: Calcular el superávit del consumidor

El superávit del consumidor se calcula como:

$$CS = \int_0^Q (D(q) - P)\,dq$$

Sustituyendo los valores dados:

- ($D(q) = 100 - 2q$),
- ($P = 40$),
- ($Q = 30$),

tenemos:

$$CS = \int_0^{30} (100 - 2q - 40)\,dq$$

Simplificamos el integrando:

$$CS = \int_0^{30} (60 - 2q)\,dq$$

Resolvemos esta integral para calcular el superávit del consumidor.

1. Primero, integramos cada término:

$$\int (60 - 2q)\,dq = 60q - q^2$$

2. Luego, evaluamos en los límites de 0 a 30:

$$CS = \left[60q - q^2\right]_0^{30}$$

3. Sustituyendo $(q = 30)$ y $(q = 0)$:

$$CS = (60 \cdot 30 - 30^2) - (60 \cdot 0 - 0^2)$$

$$CS = 1800 - 900 = 900$$

Por lo tanto, el **superávit del consumidor** es de **$900**.

Pregunta 2: Representación gráfica de la función de demanda y del superávit del consumidor

Podemos graficar la función de demanda $(D(q) = 100 - 2q)$ y el área bajo la curva de demanda sobre el precio de equilibrio $(P = 40)$, desde $(q = 0)$ hasta $(q = 30)$.

Pregunta 3: Cambio en el superávit del consumidor si el precio de equilibrio aumenta a $50

Si el precio de equilibrio aumenta a $50, el superávit del consumidor se recalcula como:

$$CS_{P=50} = \int_0^{30} (100 - 2q - 50)\, dq$$

Simplificamos el integrando:

$$CS_{P=50} = \int_0^{30} (50 - 2q)\, dq$$

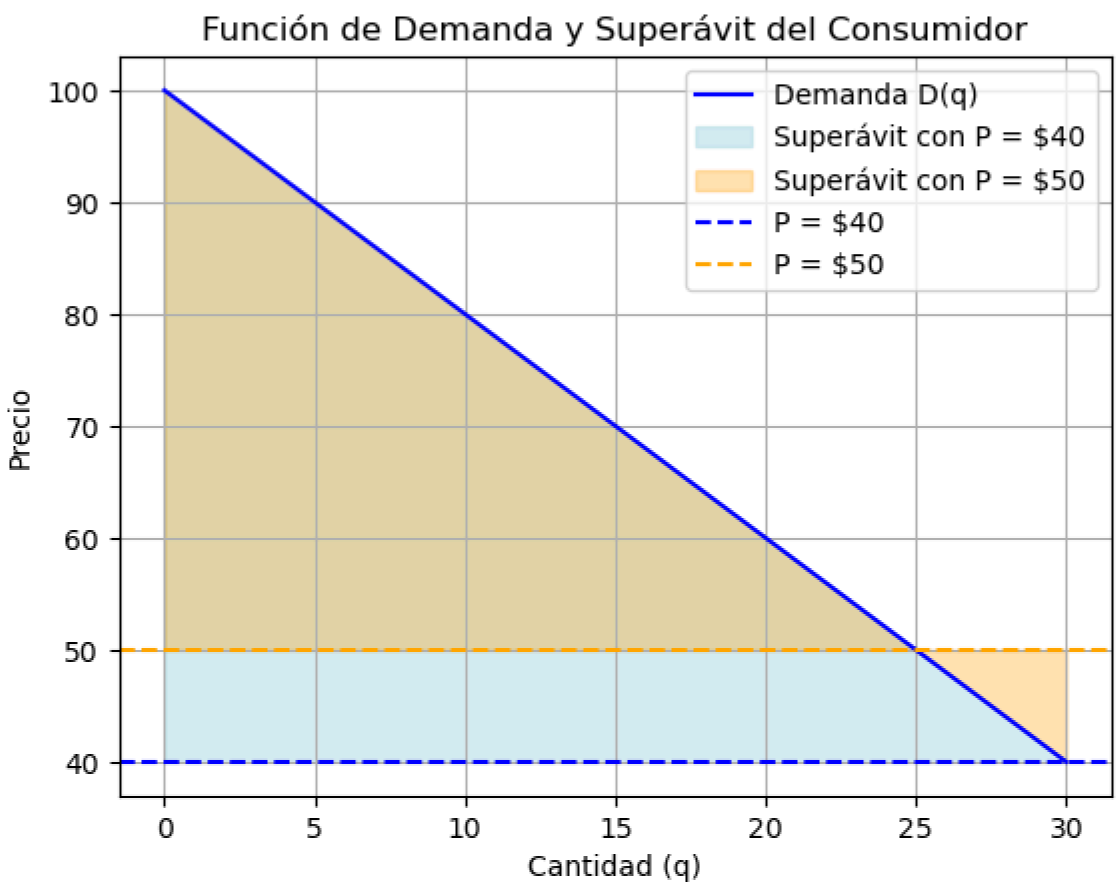
Resolviendo esta integral de la misma forma, comparamos ambos superávits para ver la diferencia.

In [102…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

# Datos del problema
P_equilibrio_1 = 40  # Precio de equilibrio inicial
P_equilibrio_2 = 50  # Nuevo precio de equilibrio
Q_equilibrio = 30    # Cantidad de equilibrio

# Función de demanda
def demanda(q):
    return 100 - 2 * q

# Integrando para calcular el superávit del consumidor con precio de equilibrio ini
CS_1, _ = quad(lambda q: demanda(q) - P_equilibrio_1, 0, Q_equilibrio)

# Integrando para calcular el superávit del consumidor con el nuevo precio de equil
```

```
CS_2, _ = quad(lambda q: demanda(q) - P_equilibrio_2, 0, Q_equilibrio)

print(f"Superávit del consumidor con P = $40: ${CS_1:.2f}")
print(f"Superávit del consumidor con P = $50: ${CS_2:.2f}")

# Gráfica de la función de demanda y superávit del consumidor
q_vals = np.linspace(0, Q_equilibrio, 100)
demanda_vals = demanda(q_vals)

plt.plot(q_vals, demanda_vals, label="Demanda D(q)", color="blue")
plt.fill_between(q_vals, demanda_vals, P_equilibrio_1, where=(q_vals <= Q_equilibri
plt.fill_between(q_vals, demanda_vals, P_equilibrio_2, where=(q_vals <= Q_equilibri
plt.axhline(y=P_equilibrio_1, color="blue", linestyle="--", label="P = $40")
plt.axhline(y=P_equilibrio_2, color="orange", linestyle="--", label="P = $50")

plt.xlabel("Cantidad (q)")
plt.ylabel("Precio")
plt.title("Función de Demanda y Superávit del Consumidor")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Superávit del consumidor con P = $40: $900.00
Superávit del consumidor con P = $50: $600.00
```



Ejercicio 33: Cálculo del Trabajo Realizado por una Fuerza Variable

Un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, y una fuerza variable $(F(x))$ en función de la posición (x) actúa sobre él. La fuerza está dada por la siguiente función:

$$F(x) = 10 + 2x$$

donde:

- $(F(x))$ está en newtons,
- (x) está en metros.

El objeto se mueve desde $(x = 0)$ hasta $(x = 5)$ metros.

Responde las siguientes preguntas:

1. **Calcular el trabajo total** realizado por la fuerza $(F(x))$ mientras el objeto se mueve desde $(x = 0)$ hasta $(x = 5)$ metros.

2. Representa gráficamente la fuerza en función de la posición (x) y el área bajo la curva, que representa el trabajo total realizado.

3. ¿Cómo cambia el trabajo total si la fuerza en función de (x) se duplica a $(F(x) = 20 + 4x)$? Realiza el cálculo y compáralo con el trabajo calculado inicialmente.

Fórmula del Trabajo Realizado por una Fuerza Variable

El trabajo (W) realizado por una fuerza variable $(F(x))$ a lo largo de una distancia de $(x = a)$ a $(x = b)$ se calcula como:

$$W = \int_a^b F(x)\, dx$$

Donde:

- (W) es el trabajo en joules,
- $(F(x))$ es la fuerza en función de la posición (x),
- (a) y (b) son los límites de la distancia recorrida.

Solución Matemática

Pregunta 1: Calcular el trabajo total realizado por la fuerza (F(x))

La fórmula para el trabajo total realizado por una fuerza variable es:

$$W = \int_0^5 F(x)\, dx$$

Sustituyendo ($F(x) = 10 + 2x$):

$$W = \int_0^5 (10 + 2x)\, dx$$

Resolviendo la integral:

1. Integramos cada término:

$$\int (10 + 2x)\, dx = 10x + x^2$$

2. Evaluamos en los límites de 0 a 5:

$$W = \left[10x + x^2\right]_0^5$$

3. Sustituyendo ($x = 5$) y ($x = 0$):

$$W = (10 \cdot 5 + 5^2) - (10 \cdot 0 + 0^2)$$

$$W = (50 + 25) - 0 = 75\,\text{joules}$$

Por lo tanto, el **trabajo total realizado** es de **75 joules**.

Pregunta 2: Representación gráfica de la fuerza en función de la posición y del área bajo la curva

Podemos graficar la función de fuerza ($F(x) = 10 + 2x$) y sombrear el área bajo la curva entre ($x = 0$) y ($x = 5$), que representa el trabajo realizado.

Pregunta 3: Cambio en el trabajo total si la fuerza se duplica

Si la fuerza cambia a ($F(x) = 20 + 4x$), el trabajo total realizado se calcula como:

$$W_{nuevo} = \int_0^5 (20 + 4x)\, dx$$

Resolviendo la integral:

1. Integramos cada término:

$$\int (20 + 4x)\, dx = 20x + 2x^2$$

2. Evaluamos en los límites de 0 a 5:

$$W_{nuevo} = \left[20x + 2x^2\right]_0^5$$

3. Sustituyendo ($x = 5$) y ($x = 0$):

$$W_{nuevo} = (20 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2) - (20 \cdot 0 + 2 \cdot 0^2)$$

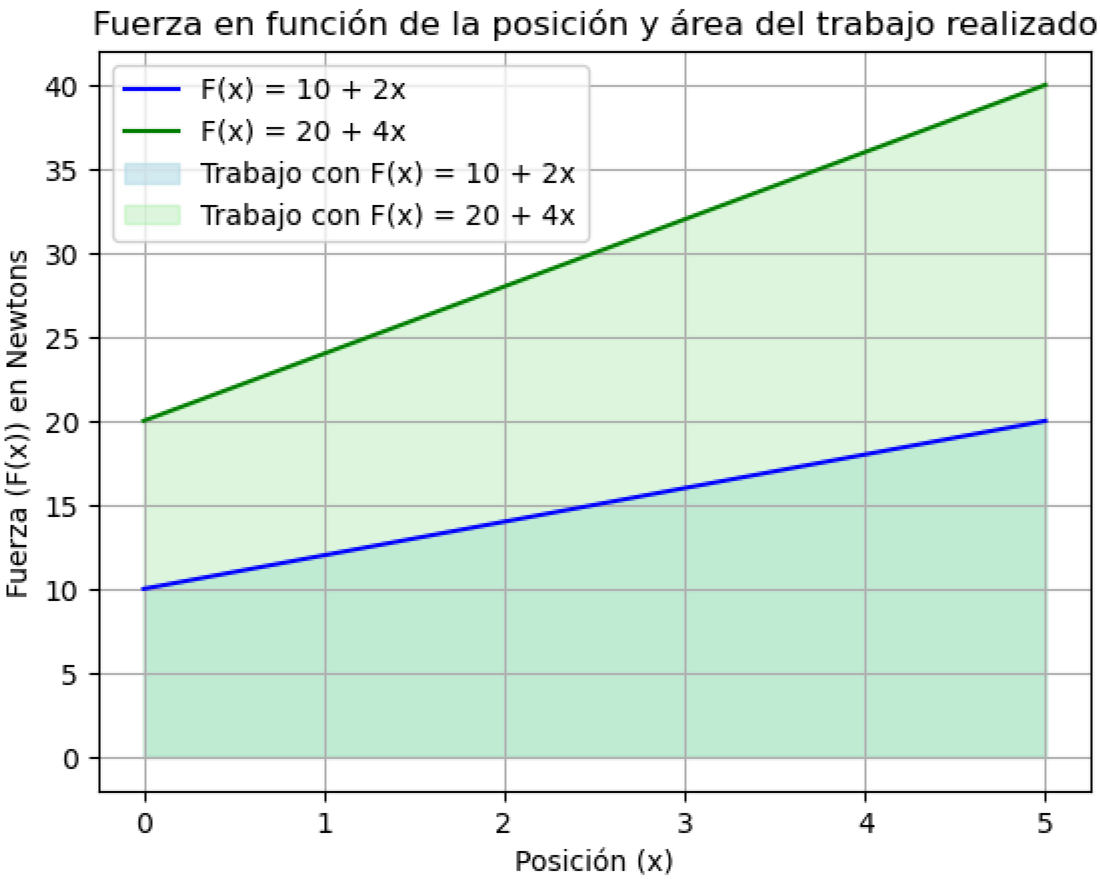
$$W_{nuevo} = (100 + 50) = 150 \, \text{joules}$$

Comparando ambos resultados, vemos que el trabajo se duplica cuando la fuerza se duplica.

In [105…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

# Definición de las fuerzas
def fuerza_original(x):
    return 10 + 2 * x

def fuerza_duplicada(x):
    return 20 + 4 * x

# Calcular el trabajo con la fuerza original
W_original, _ = quad(fuerza_original, 0, 5)

# Calcular el trabajo con la fuerza duplicada
W_duplicado, _ = quad(fuerza_duplicada, 0, 5)

print(f"Trabajo total con F(x) = 10 + 2x: {W_original:.2f} joules")
print(f"Trabajo total con F(x) = 20 + 4x: {W_duplicado:.2f} joules")

# Graficar la fuerza en función de la posición
x_vals = np.linspace(0, 5, 100)
fuerza_original_vals = fuerza_original(x_vals)
fuerza_duplicada_vals = fuerza_duplicada(x_vals)

plt.plot(x_vals, fuerza_original_vals, label="F(x) = 10 + 2x", color="blue")
plt.plot(x_vals, fuerza_duplicada_vals, label="F(x) = 20 + 4x", color="green")
plt.fill_between(x_vals, fuerza_original_vals, color="lightblue", alpha=0.5, where=
plt.fill_between(x_vals, fuerza_duplicada_vals, color="lightgreen", alpha=0.3, wher

plt.xlabel("Posición (x)")
plt.ylabel("Fuerza (F(x)) en Newtons")
plt.title("Fuerza en función de la posición y área del trabajo realizado")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Trabajo total con F(x) = 10 + 2x: 75.00 joules
Trabajo total con F(x) = 20 + 4x: 150.00 joules
```



Ejercicio 34: Cálculo de Costos Acumulados en un Proceso de Producción

Una fábrica produce un bien a lo largo del tiempo, y el costo de producción por unidad en función del tiempo está dado por la siguiente función:

$$C(t) = 200 + 10t$$

donde:

- $(C(t))$ es el costo de producción por unidad (en dólares) en el tiempo (t),
- (t) está en días.

La fábrica produce continuamente durante un periodo de **10 días**.

Responde las siguientes preguntas:

1. **Calcular el costo total acumulado** de producción durante los primeros 10 días de operación.
2. Representa gráficamente la función de costo en función del tiempo y el área bajo la curva, que representa el costo total acumulado.

3. ¿Cómo cambiaría el costo total acumulado si el costo de producción por unidad cambia a ($C(t) = 200 + 15t$)? Realiza el cálculo y compáralo con el costo calculado inicialmente.

Fórmula para el Costo Total Acumulado

El costo total acumulado (CT) durante el periodo de producción se calcula mediante la integral de la función de costo desde ($t = a$) hasta ($t = b$):

$$CT = \int_a^b C(t)\, dt$$

donde:

- (CT) es el costo total acumulado,
- ($C(t)$) es la función de costo por unidad en función del tiempo,
- (a) y (b) son los límites de tiempo del periodo de producción.

Solución Matemática

Pregunta 1: Calcular el costo total acumulado de producción en los primeros 10 días

El costo total acumulado se calcula como:

$$CT = \int_0^{10} C(t)\, dt$$

Sustituyendo ($C(t) = 200 + 10t$):

$$CT = \int_0^{10} (200 + 10t)\, dt$$

Resolviendo la integral:

1. Integramos cada término:

$$\int (200 + 10t)\, dt = 200t + 5t^2$$

2. Evaluamos en los límites de 0 a 10:

$$CT = \left[200t + 5t^2\right]_0^{10}$$

3. Sustituyendo ($t = 10$) y ($t = 0$):

$$CT = (200 \cdot 10 + 5 \cdot 10^2) - (200 \cdot 0 + 5 \cdot 0^2)$$

$$CT = (2000 + 500) = 2500 \, \text{dólares}$$

Por lo tanto, el **costo total acumulado** durante los primeros 10 días es de **$2500**.

Pregunta 2: Representación gráfica de la función de costo y el área bajo la curva

Podemos graficar la función de costo $(C(t) = 200 + 10t)$ y sombrear el área bajo la curva entre $(t = 0)$ y $(t = 10)$, que representa el costo total acumulado de producción.

Pregunta 3: Cambio en el costo total acumulado si el costo de producción por unidad cambia

Si el costo de producción por unidad cambia a $(C(t) = 200 + 15t)$, el costo total acumulado se calcula como:

$$CT_{nuevo} = \int_0^{10} (200 + 15t) \, dt$$

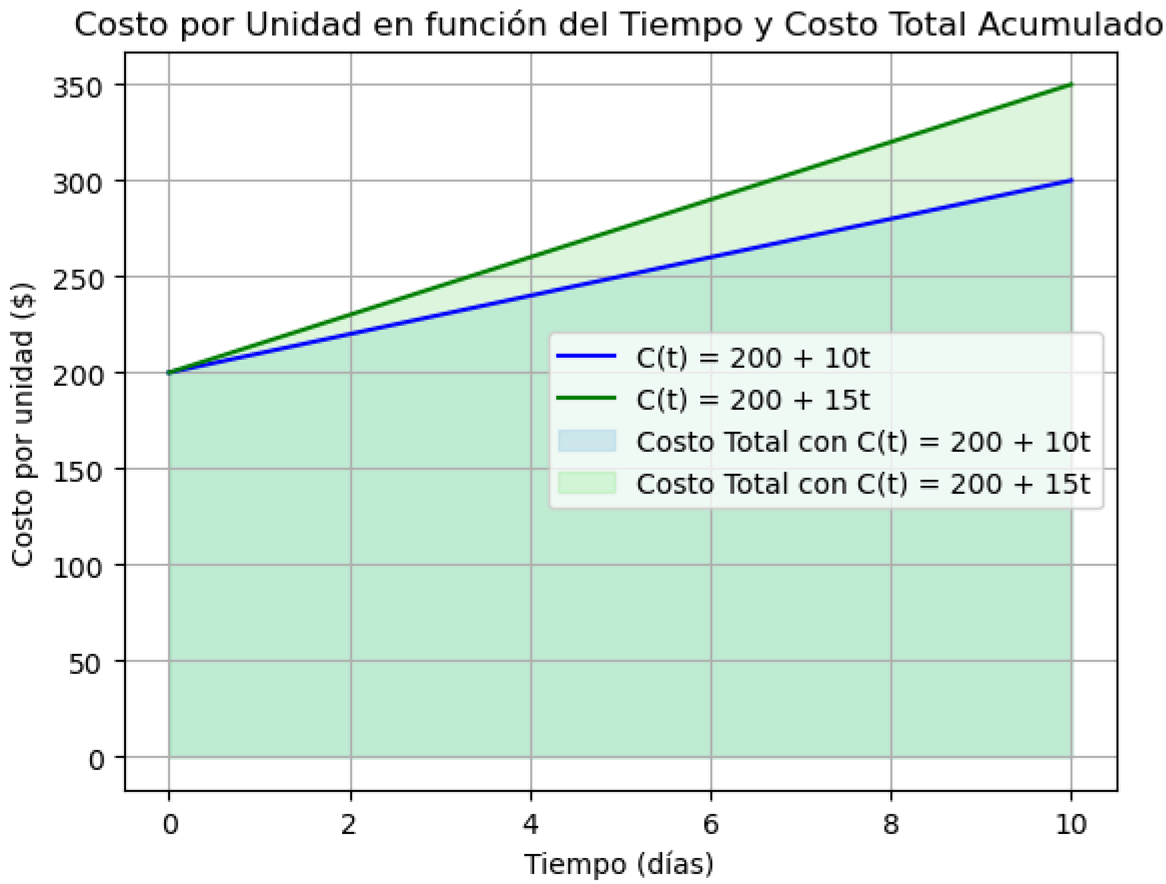
Resolviendo esta integral de la misma forma, compararemos ambos resultados para observar el cambio en el costo total.

In [108…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

# Definición de las funciones de costo
def costo_original(t):
    return 200 + 10 * t

def costo_modificado(t):
    return 200 + 15 * t

# Calcular el costo total acumulado con el costo original
CT_original, _ = quad(costo_original, 0, 10)

# Calcular el costo total acumulado con el costo modificado
CT_modificado, _ = quad(costo_modificado, 0, 10)

print(f"Costo total acumulado con C(t) = 200 + 10t: ${CT_original:.2f}")
print(f"Costo total acumulado con C(t) = 200 + 15t: ${CT_modificado:.2f}")

# Gráfica de la función de costo en función del tiempo
t_vals = np.linspace(0, 10, 100)
costo_original_vals = costo_original(t_vals)
costo_modificado_vals = costo_modificado(t_vals)

plt.plot(t_vals, costo_original_vals, label="C(t) = 200 + 10t", color="blue")
```

```
plt.plot(t_vals, costo_modificado_vals, label="C(t) = 200 + 15t", color="green")
plt.fill_between(t_vals, costo_original_vals, color="lightblue", alpha=0.5, where=(
plt.fill_between(t_vals, costo_modificado_vals, color="lightgreen", alpha=0.3, wher

plt.xlabel("Tiempo (días)")
plt.ylabel("Costo por unidad ($)")
plt.title("Costo por Unidad en función del Tiempo y Costo Total Acumulado")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Costo total acumulado con C(t) = 200 + 10t: $2500.00
Costo total acumulado con C(t) = 200 + 15t: $2750.00
```



Ejercicio 35: Cálculo del Crecimiento Poblacional con Tasa Variable

Una población de animales en una reserva natural está creciendo a una tasa variable en función del tiempo. La tasa de crecimiento poblacional está dada por la función:

$$r(t) = 100 + 5t$$

donde:

- $(r(t))$ es la tasa de crecimiento poblacional en individuos por año,
- (t) es el tiempo en años.

Si la población inicial es de **500 individuos**, calcula el tamaño de la población después de **10 años**.

Responde las siguientes preguntas:

1. **Calcular el tamaño total de la población** después de 10 años, integrando la tasa de crecimiento a lo largo del tiempo.
2. Representa gráficamente la tasa de crecimiento poblacional en función del tiempo y el área bajo la curva, que representa el incremento en la población.
3. ¿Cómo cambiaría la población total si la tasa de crecimiento cambia a $(r(t) = 120 + 6t$)? Realiza el cálculo y compáralo con el tamaño de la población calculado inicialmente.

Fórmula para el Tamaño Total de la Población

El tamaño total de la población $(P(t))$ después de un tiempo (T) se calcula integrando la tasa de crecimiento $(r(t))$ desde $(t = 0)$ hasta $(t = T)$, y sumando la población inicial (P_0):

$$P(T) = P_0 + \int_0^T r(t)\,dt$$

donde:

- $(P(T))$ es la población total después de (T) años,
- (P_0) es la población inicial,
- $(r(t))$ es la tasa de crecimiento en función del tiempo.

Solución Matemática

Pregunta 1: Calcular el tamaño total de la población después de 10 años

El tamaño total de la población después de 10 años se calcula como:

$$P(10) = P_0 + \int_0^{10} r(t)\,dt$$

Dado que $(P_0 = 500)$ y $(r(t) = 100 + 5t)$, sustituimos:

$$P(10) = 500 + \int_0^{10} (100 + 5t)\,dt$$

Resolviendo la integral:

1. Integramos cada término:

$$\int (100 + 5t)\, dt = 100t + \frac{5t^2}{2}$$

2. Evaluamos en los límites de 0 a 10:

$$P(10) = 500 + \left[100t + \frac{5t^2}{2}\right]_0^{10}$$

3. Sustituyendo $(t = 10)$ y $(t = 0)$:

$$P(10) = 500 + (100 \cdot 10 + \frac{5 \cdot 10^2}{2}) - (100 \cdot 0 + \frac{5 \cdot 0^2}{2})$$

$$P(10) = 500 + (1000 + 250) = 500 + 1250 = 1750\, \text{individuos}$$

Por lo tanto, el **tamaño total de la población** después de 10 años es de **1750 individuos**.

Pregunta 2: Representación gráfica de la tasa de crecimiento y el área bajo la curva

Podemos graficar la tasa de crecimiento $(r(t) = 100 + 5t)$ y sombrear el área bajo la curva entre $(t = 0)$ y $(t = 10)$, que representa el incremento total en la población.

Pregunta 3: Cambio en el tamaño de la población si la tasa de crecimiento cambia

Si la tasa de crecimiento cambia a $(r(t) = 120 + 6t)$, el tamaño de la población después de 10 años se calcula como:

$$P_{nuevo}(10) = 500 + \int_0^{10} (120 + 6t)\, dt$$

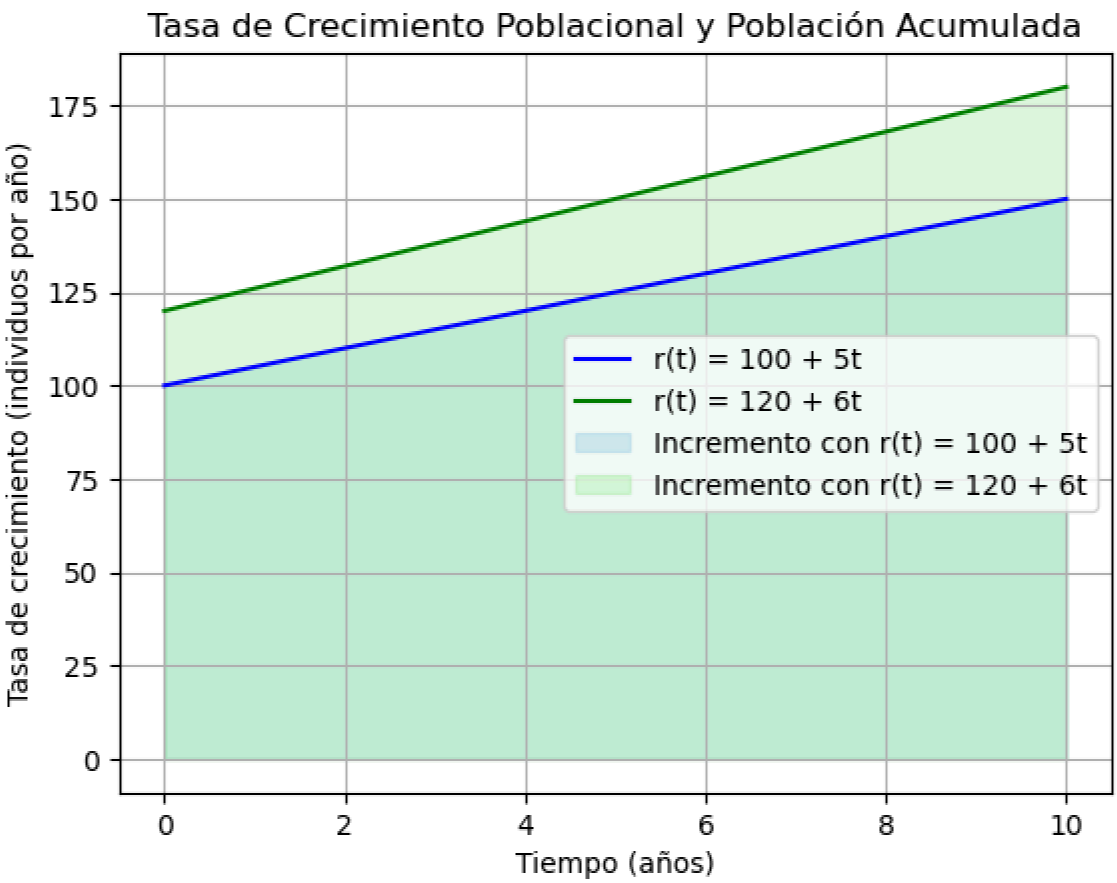
Resolviendo esta integral de la misma forma, comparamos ambos resultados para observar la diferencia en el tamaño de la población.

In [111…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

# Datos del problema
P0 = 500  # Población inicial
T = 10    # Tiempo en años

# Definición de las funciones de tasa de crecimiento
def tasa_crecimiento_original(t):
    return 100 + 5 * t

def tasa_crecimiento_modificada(t):
    return 120 + 6 * t
```

```python
# Calcular el tamaño de la población con la tasa de crecimiento original
incremento_poblacional_original, _ = quad(tasa_crecimiento_original, 0, T)
P_total_original = P0 + incremento_poblacional_original

# Calcular el tamaño de la población con la tasa de crecimiento modificada
incremento_poblacional_modificado, _ = quad(tasa_crecimiento_modificada, 0, T)
P_total_modificado = P0 + incremento_poblacional_modificado

print(f"Tamaño de la población con r(t) = 100 + 5t: {P_total_original:.2f} individu
print(f"Tamaño de la población con r(t) = 120 + 6t: {P_total_modificado:.2f} indivi

# Gráfica de la tasa de crecimiento en función del tiempo
t_vals = np.linspace(0, T, 100)
tasa_original_vals = tasa_crecimiento_original(t_vals)
tasa_modificada_vals = tasa_crecimiento_modificada(t_vals)

plt.plot(t_vals, tasa_original_vals, label="r(t) = 100 + 5t", color="blue")
plt.plot(t_vals, tasa_modificada_vals, label="r(t) = 120 + 6t", color="green")
plt.fill_between(t_vals, tasa_original_vals, color="lightblue", alpha=0.5, where=(t
plt.fill_between(t_vals, tasa_modificada_vals, color="lightgreen", alpha=0.3, where

plt.xlabel("Tiempo (años)")
plt.ylabel("Tasa de crecimiento (individuos por año)")
plt.title("Tasa de Crecimiento Poblacional y Población Acumulada")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Tamaño de la población con r(t) = 100 + 5t: 1750.00 individuos
Tamaño de la población con r(t) = 120 + 6t: 2000.00 individuos
```



Ejercicio 36: Cálculo del Valor Presente de Ingresos Futuros en un Proyecto

Una empresa espera generar ingresos de forma continua a una tasa que depende del tiempo. La tasa de ingreso anual proyectada está dada por la función:

$$I(t) = 5000e^{0.02t}$$

donde:

- $(I(t))$ es la tasa de ingreso en dólares por año en el tiempo (t),
- (t) está en años.

La empresa quiere calcular el **valor presente** de estos ingresos proyectados en un periodo de **8 años**, utilizando una **tasa de descuento del 5% anual**.

Responde las siguientes preguntas:

1. **Calcular el valor presente de los ingresos continuos** proyectados para los primeros 8 años, utilizando la tasa de descuento del 5%.

2. Representa gráficamente la tasa de ingresos y la tasa de ingresos descontados en función del tiempo, mostrando cómo los ingresos se reducen al aplicar el descuento.

3. ¿Cómo cambiaría el valor presente de los ingresos si la tasa de descuento fuera del 7%? Realiza el cálculo y compáralo con el valor presente calculado inicialmente.

Fórmula para el Valor Presente de Ingresos Futuros

El valor presente (PV) de ingresos futuros a una tasa de descuento (r) se calcula como la integral de la tasa de ingresos descontada desde $(t = 0)$ hasta $(t = T)$:

$$PV = \int_0^T I(t) \cdot e^{-rt} \, dt$$

donde:

- (PV) es el valor presente de los ingresos proyectados,
- $(I(t))$ es la función de tasa de ingresos en función del tiempo,
- (r) es la tasa de descuento,
- (T) es el tiempo final del periodo de proyección.

Solución Matemática

Pregunta 1: Calcular el valor presente de los ingresos continuos para los primeros 8 años

El valor presente de los ingresos se calcula como:

$$PV = \int_0^8 I(t) \cdot e^{-0.05t} \, dt$$

Sustituyendo (I(t) = 5000 e^{0.02t}):

$$PV = \int_0^8 5000e^{0.02t} \cdot e^{-0.05t} \, dt$$

Simplificamos el exponente:

$$PV = \int_0^8 5000e^{(0.02-0.05)t} \, dt$$

$$PV = \int_0^8 5000e^{-0.03t} \, dt$$

Resolviendo la integral:

1. Integramos la función exponencial:

$$\int 5000e^{-0.03t}\,dt = \frac{5000}{-0.03}e^{-0.03t} = -\frac{5000}{0.03}e^{-0.03t}$$

2. Evaluamos en los límites de 0 a 8:

$$PV = -\frac{5000}{0.03}\left[e^{-0.03\cdot 8} - e^{0}\right]$$

3. Simplificando:

$$PV = -\frac{5000}{0.03}\left(e^{-0.24} - 1\right)$$

Evaluamos esta expresión para obtener el valor presente.

Pregunta 2: Representación gráfica de la tasa de ingresos y de la tasa de ingresos descontados

Podemos graficar la tasa de ingresos $(I(t) = 5000e^{0.02t})$ y la tasa de ingresos descontados $(I(t) \cdot e^{-0.05t})$, observando cómo disminuyen los ingresos al aplicar la tasa de descuento.

Pregunta 3: Cambio en el valor presente si la tasa de descuento cambia al 7%

Si la tasa de descuento es del 7%, el valor presente de los ingresos futuros se calcula como:

$$PV_{nuevo} = \int_0^8 5000e^{0.02t} \cdot e^{-0.07t}\,dt$$

Simplificamos el exponente:

$$PV_{nuevo} = \int_0^8 5000e^{-0.05t}\,dt$$

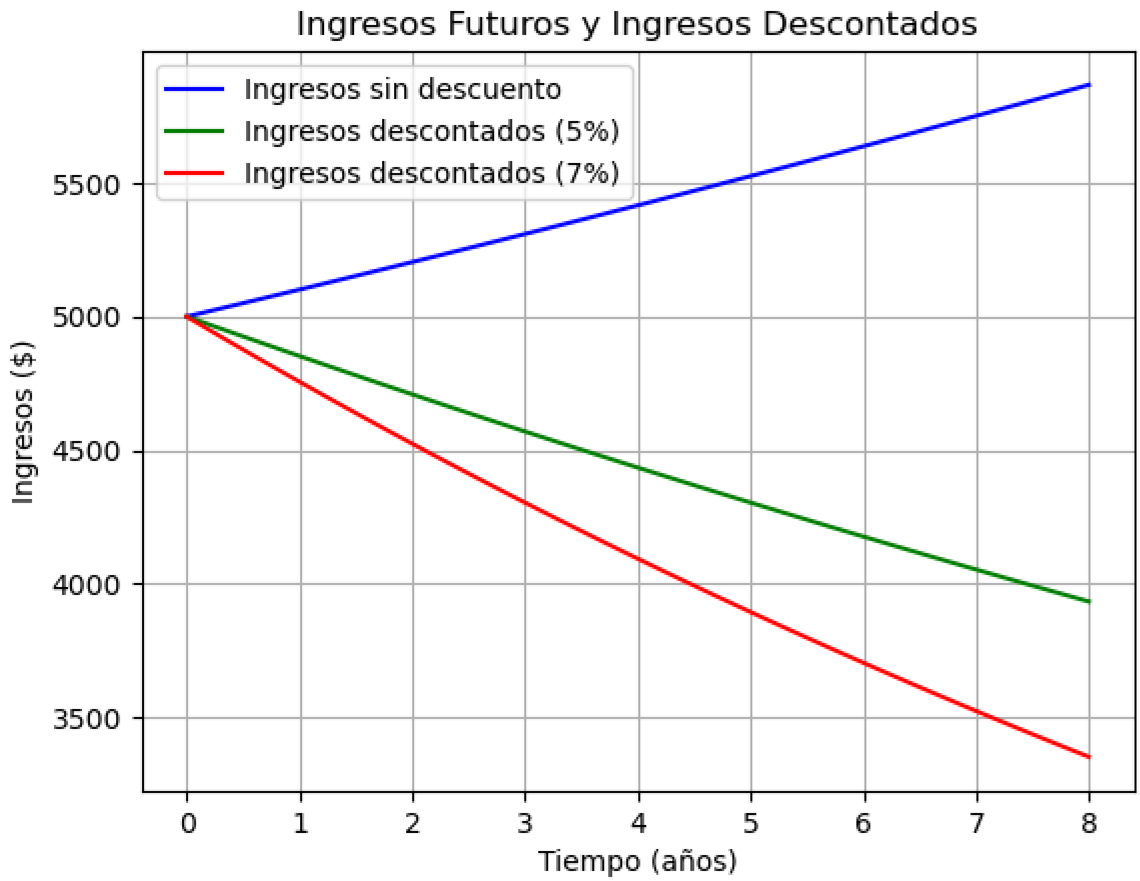
Resolviendo esta integral, compararemos ambos resultados para observar el efecto de la tasa de descuento en el valor presente.

In [114…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

# Datos del problema
T = 8           # Periodo de tiempo en años
r1 = 0.05       # Tasa de descuento inicial
r2 = 0.07       # Tasa de descuento alternativa

# Definición de la función de ingresos
def ingresos(t):
    return 5000 * np.exp(0.02 * t)
```

```
# Definición de la función de ingresos descontados
def ingresos_descontados(t, r):
    return ingresos(t) * np.exp(-r * t)

# Calcular el valor presente de los ingresos con la tasa de descuento del 5%
PV_r1, _ = quad(ingresos_descontados, 0, T, args=(r1,))

# Calcular el valor presente de los ingresos con la tasa de descuento del 7%
PV_r2, _ = quad(ingresos_descontados, 0, T, args=(r2,))

print(f"Valor presente de ingresos con tasa de descuento del 5%: ${PV_r1:.2f}")
print(f"Valor presente de ingresos con tasa de descuento del 7%: ${PV_r2:.2f}")

# Gráfica de la tasa de ingresos y la tasa de ingresos descontados
t_vals = np.linspace(0, T, 100)
ingresos_vals = ingresos(t_vals)
ingresos_descuento_r1 = ingresos_descontados(t_vals, r1)
ingresos_descuento_r2 = ingresos_descontados(t_vals, r2)

plt.plot(t_vals, ingresos_vals, label="Ingresos sin descuento", color="blue")
plt.plot(t_vals, ingresos_descuento_r1, label="Ingresos descontados (5%)", color="g
plt.plot(t_vals, ingresos_descuento_r2, label="Ingresos descontados (7%)", color="r
plt.xlabel("Tiempo (años)")
plt.ylabel("Ingresos ($)")
plt.title("Ingresos Futuros y Ingresos Descontados")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Valor presente de ingresos con tasa de descuento del 5%: $35562.02
Valor presente de ingresos con tasa de descuento del 7%: $32968.00
```



Ejercicio 37: Planificación del Consumo de Agua en un Hogar con Demanda Variable

En un hogar, el consumo de agua varía en función del tiempo durante un día típico. La demanda de agua en litros por hora a lo largo del día está dada por la función:

$$D(t) = 30 + 5t$$

donde:

- ($D(t)$) es la demanda de agua en litros por hora en el tiempo (t) (en horas),
- (t) es el tiempo en horas desde las 6:00 am (cuando ($t = 0$)) hasta las 6:00 pm (cuando ($t = 12$)).

Además, el costo de abastecimiento de agua es de **$0.05** por litro.

Responde las siguientes preguntas:

1. **Calcular el consumo total de agua** en el hogar desde las 6:00 am hasta las 6:00 pm integrando la función de demanda a lo largo de este periodo.

2. **Calcular el costo total de abastecimiento** de agua para este consumo total durante el periodo de 12 horas.

3. Representa gráficamente la demanda de agua a lo largo del tiempo y el área bajo la curva, que representa el consumo total de agua.

4. ¿Cómo cambiarían el consumo total y el costo de abastecimiento si la demanda de agua aumentara a una función de $(D(t) = 40 + 6t)$? Realiza los cálculos y compáralos con los valores calculados inicialmente.

Fórmula para el Consumo Total y el Costo Total

El consumo total de agua (C) se calcula mediante la integral de la función de demanda desde (t = a) hasta (t = b):

$$C = \int_a^b D(t)\, dt$$

y el costo total de abastecimiento (Costo) se calcula como:

$$\text{Costo} = C \times \text{Precio por litro}$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Calcular el consumo total de agua en el hogar desde las 6:00 am hasta las 6:00 pm

El consumo total de agua se calcula como:

$$C = \int_0^{12} D(t)\, dt$$

Sustituyendo $(D(t) = 30 + 5t)$:

$$C = \int_0^{12} (30 + 5t)\, dt$$

Resolviendo la integral:

1. Integramos cada término:

$$\int (30 + 5t)\, dt = 30t + \frac{5t^2}{2}$$

2. Evaluamos en los límites de 0 a 12:

$$C = \left[30t + \frac{5t^2}{2}\right]_0^{12}$$

3. Sustituyendo $(t = 12)$ y $(t = 0)$:

$$C = (30 \cdot 12 + \frac{5 \cdot 12^2}{2}) - (30 \cdot 0 + \frac{5 \cdot 0^2}{2})$$

$$C = (360 + 360) = 720 \,\text{litros}$$

Por lo tanto, el **consumo total de agua** durante el periodo es de **720 litros**.

Pregunta 2: Calcular el costo total de abastecimiento de agua

Dado que el precio por litro es de **$0.05**, el costo total de abastecimiento se calcula como:

$$\text{Costo} = 720 \times 0.05 = 36 \,\text{dólares}$$

Por lo tanto, el **costo total de abastecimiento** es de **$36**.

Pregunta 3: Representación gráfica de la demanda de agua y del área bajo la curva

Podemos graficar la demanda de agua $(D(t) = 30 + 5t)$ y sombrear el área bajo la curva entre $(t = 0)$ y $(t = 12)$, que representa el consumo total de agua en el periodo.

Pregunta 4: Cambios en el consumo total y el costo de abastecimiento si la demanda de agua aumenta

Si la demanda de agua cambia a $(D(t) = 40 + 6t)$, el consumo total se calcula como:

$$C_{nuevo} = \int_0^{12} (40 + 6t)\, dt$$

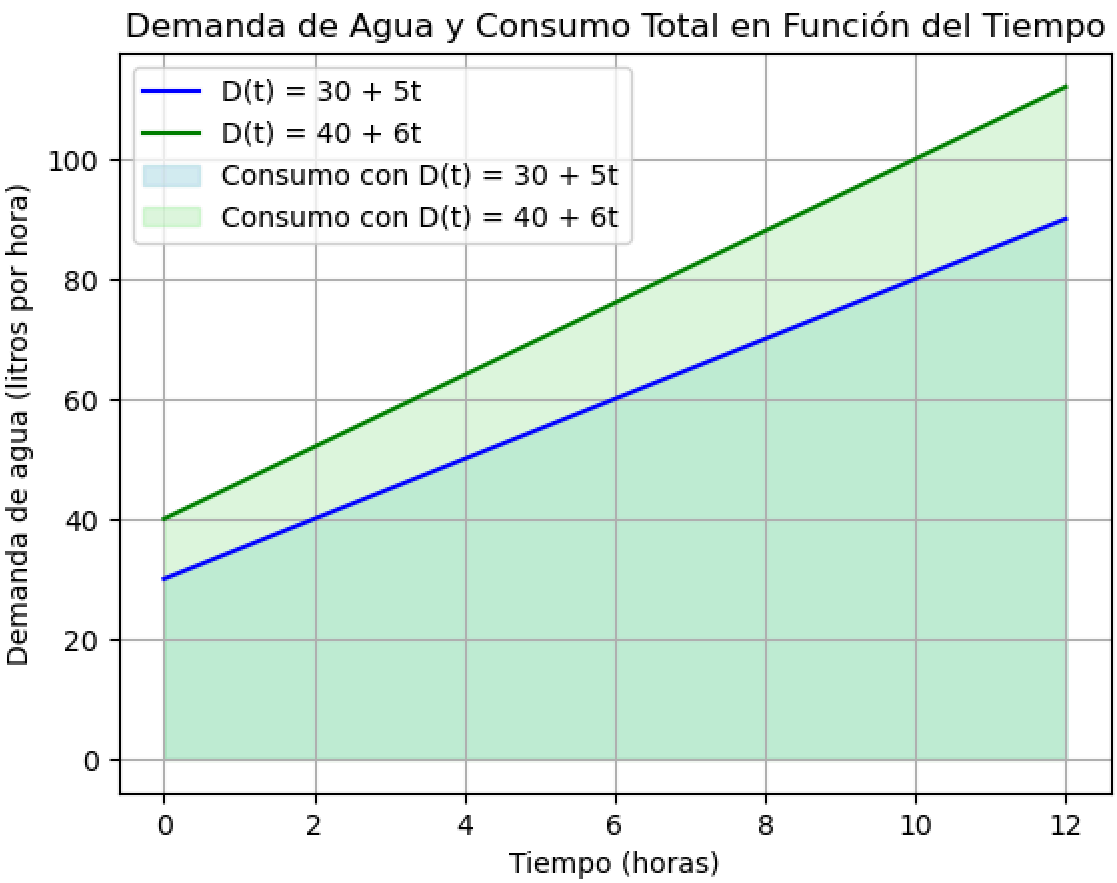
Resolviendo esta integral, se puede calcular el nuevo consumo total y luego el costo total de abastecimiento para comparar ambos resultados.

In [117…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

# Precio por litro de agua
precio_por_litro = 0.05

# Definición de las funciones de demanda de agua
def demanda_agua_original(t):
    return 30 + 5 * t
```

```
def demanda_agua_aumentada(t):
    return 40 + 6 * t

# Calcular el consumo total con la demanda de agua original
consumo_total_original, _ = quad(demanda_agua_original, 0, 12)
costo_abastecimiento_original = consumo_total_original * precio_por_litro

# Calcular el consumo total con la demanda de agua aumentada
consumo_total_aumentado, _ = quad(demanda_agua_aumentada, 0, 12)
costo_abastecimiento_aumentado = consumo_total_aumentado * precio_por_litro

print(f"Consumo total con D(t) = 30 + 5t: {consumo_total_original:.2f} litros")
print(f"Costo de abastecimiento con D(t) = 30 + 5t: ${costo_abastecimiento_original

print(f"Consumo total con D(t) = 40 + 6t: {consumo_total_aumentado:.2f} litros")
print(f"Costo de abastecimiento con D(t) = 40 + 6t: ${costo_abastecimiento_aumentad

# Gráfica de la demanda de agua en función del tiempo
t_vals = np.linspace(0, 12, 100)
demanda_original_vals = demanda_agua_original(t_vals)
demanda_aumentada_vals = demanda_agua_aumentada(t_vals)

plt.plot(t_vals, demanda_original_vals, label="D(t) = 30 + 5t", color="blue")
plt.plot(t_vals, demanda_aumentada_vals, label="D(t) = 40 + 6t", color="green")
plt.fill_between(t_vals, demanda_original_vals, color="lightblue", alpha=0.5, where
plt.fill_between(t_vals, demanda_aumentada_vals, color="lightgreen", alpha=0.3, whe

plt.xlabel("Tiempo (horas)")
plt.ylabel("Demanda de agua (litros por hora)")
plt.title("Demanda de Agua y Consumo Total en Función del Tiempo")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Consumo total con D(t) = 30 + 5t: 720.00 litros
Costo de abastecimiento con D(t) = 30 + 5t: $36.00
Consumo total con D(t) = 40 + 6t: 912.00 litros
Costo de abastecimiento con D(t) = 40 + 6t: $45.60
```



Ejercicio 38: Optimización de Costos de Almacenamiento en una Empresa de Distribución

Una empresa de distribución almacena productos en un centro de distribución, donde el costo de almacenamiento diario depende de la cantidad de inventario. El costo de almacenamiento en función de los días está dado por:

$$C(t) = 50 + 2t$$

donde:

- $(C(t))$ es el costo de almacenamiento por día (en dólares) en el día (t),
- (t) representa los días desde el inicio del mes (cuando $(t = 0)$).

La empresa estima mantener el inventario en almacenamiento durante los primeros **15 días del mes**.

Responde las siguientes preguntas:

1. **Calcular el costo total de almacenamiento** durante los primeros 15 días del mes integrando la función de costo a lo largo de este periodo.

2. **Comparar los costos si el periodo de almacenamiento se reduce a 10 días** en lugar de 15. ¿Cuánto ahorraría la empresa en almacenamiento?

3. Representa gráficamente el costo de almacenamiento en función de los días y el área bajo la curva, que representa el costo total de almacenamiento.

4. ¿Cómo cambiaría el costo total de almacenamiento si el costo por día aumenta a $(C(t) = 60 + 3t)$? Realiza el cálculo y compáralo con el costo calculado inicialmente.

Fórmulas

El costo total de almacenamiento (CT) durante el periodo se calcula mediante la integral de la función de costo desde $(t = a)$ hasta $(t = b)$:

$$CT = \int_a^b C(t)\,dt$$

donde:

- (CT) es el costo total de almacenamiento,
- $(C(t))$ es la función de costo en función del tiempo,
- (a) y (b) son los límites de tiempo del periodo de almacenamiento.

Solución Matemática

Pregunta 1: Calcular el costo total de almacenamiento para los primeros 15 días

El costo total de almacenamiento se calcula como:

$$CT = \int_0^{15} C(t)\,dt$$

Sustituyendo $(C(t) = 50 + 2t)$:

$$CT = \int_0^{15} (50 + 2t)\,dt$$

Resolviendo la integral:

1. Integramos cada término:

$$\int (50 + 2t)\,dt = 50t + t^2$$

2. Evaluamos en los límites de 0 a 15:

$$CT = \left[50t + t^2\right]_0^{15}$$

3. Sustituyendo $(t = 15)$ y $(t = 0)$:

$$CT = (50 \cdot 15 + 15^2) - (50 \cdot 0 + 0^2)$$

$$CT = (750 + 225) = 975 \, \text{dólares}$$

Por lo tanto, el **costo total de almacenamiento** durante los primeros 15 días es de **$975**.

Pregunta 2: Comparar los costos si el periodo de almacenamiento se reduce a 10 días

Si el periodo de almacenamiento se reduce a 10 días, el costo total de almacenamiento se calcula como:

$$CT_{10} = \int_0^{10} (50 + 2t) \, dt$$

Resolviendo esta integral de la misma forma:

1. Evaluamos en $(t = 10)$:

$$CT_{10} = 50 \cdot 10 + 10^2 = 500 + 100 = 600 \, \text{dólares}$$

El **ahorro en costos** si el almacenamiento se reduce a 10 días es:

$$\text{Ahorro} = 975 - 600 = 375 \, \text{dólares}$$

Pregunta 3: Representación gráfica del costo de almacenamiento y del área bajo la curva

Podemos graficar la función de costo $(C(t) = 50 + 2t)$ y sombrear el área bajo la curva entre $(t = 0)$ y $(t = 15)$, que representa el costo total de almacenamiento en el periodo.

Pregunta 4: Cambio en el costo total si el costo por día aumenta

Si el costo de almacenamiento cambia a $(C(t) = 60 + 3t)$, el costo total se calcula como:

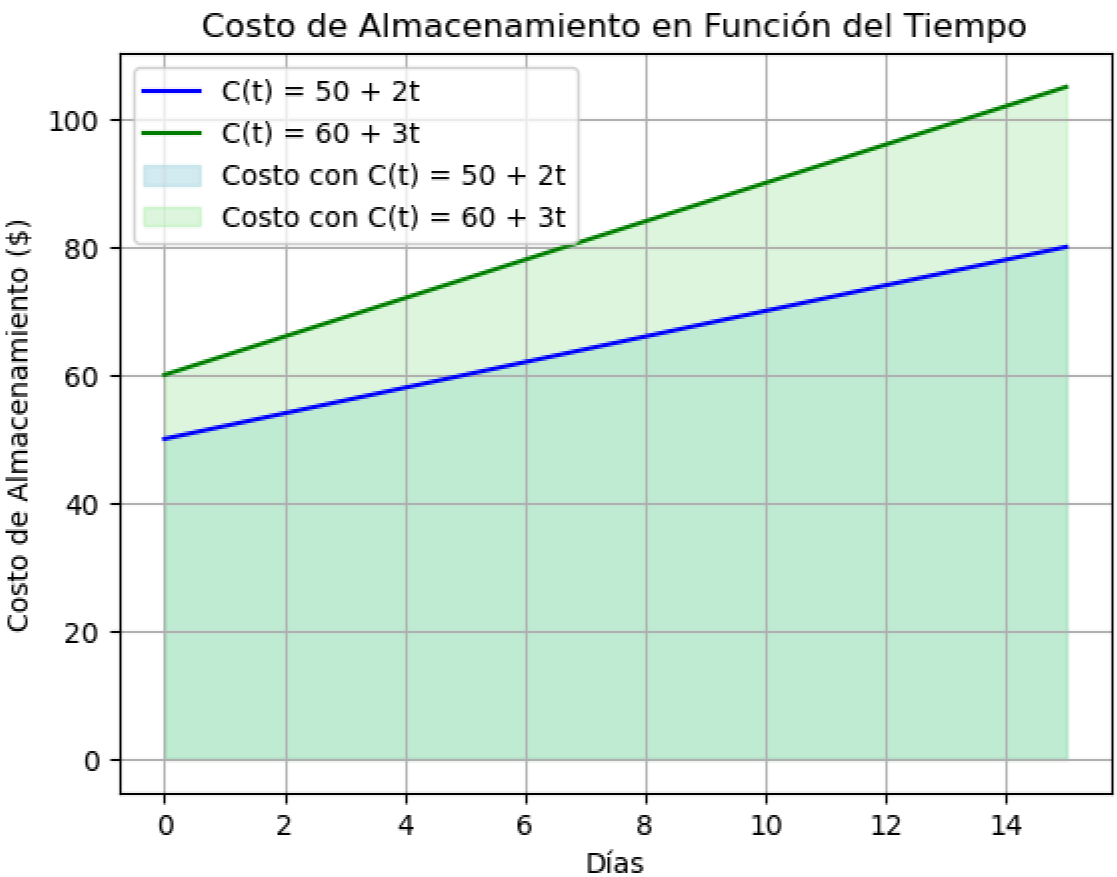
$$CT_{nuevo} = \int_0^{15} (60 + 3t) \, dt$$

Resolviendo esta integral de la misma forma, compararemos ambos resultados para observar el efecto del incremento en el costo diario.

In [120…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

# Definición de las funciones de costo de almacenamiento
def costo_almacenamiento_original(t):
    return 50 + 2 * t

def costo_almacenamiento_modificado(t):
    return 60 + 3 * t

# Calcular el costo total de almacenamiento para 15 días con el costo original
costo_total_15_dias_original, _ = quad(costo_almacenamiento_original, 0, 15)

# Calcular el costo total de almacenamiento para 10 días con el costo original
costo_total_10_dias_original, _ = quad(costo_almacenamiento_original, 0, 10)

# Ahorro al reducir el periodo de almacenamiento a 10 días
ahorro = costo_total_15_dias_original - costo_total_10_dias_original

# Calcular el costo total de almacenamiento con el costo modificado
costo_total_15_dias_modificado, _ = quad(costo_almacenamiento_modificado, 0, 15)

print(f"Costo total de almacenamiento (15 días) con C(t) = 50 + 2t: ${costo_total_1
print(f"Costo total de almacenamiento (10 días) con C(t) = 50 + 2t: ${costo_total_1
print(f"Ahorro al reducir el periodo de almacenamiento a 10 días: ${ahorro:.2f}")

print(f"Costo total de almacenamiento (15 días) con C(t) = 60 + 3t: ${costo_total_1

# Gráfica del costo de almacenamiento en función del tiempo
t_vals = np.linspace(0, 15, 100)
costo_original_vals = costo_almacenamiento_original(t_vals)
costo_modificado_vals = costo_almacenamiento_modificado(t_vals)

plt.plot(t_vals, costo_original_vals, label="C(t) = 50 + 2t", color="blue")
plt.plot(t_vals, costo_modificado_vals, label="C(t) = 60 + 3t", color="green")
plt.fill_between(t_vals, costo_original_vals, color="lightblue", alpha=0.5, where=(
plt.fill_between(t_vals, costo_modificado_vals, color="lightgreen", alpha=0.3, wher

plt.xlabel("Días")
plt.ylabel("Costo de Almacenamiento ($)")
plt.title("Costo de Almacenamiento en Función del Tiempo")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Costo total de almacenamiento (15 días) con C(t) = 50 + 2t: $975.00
Costo total de almacenamiento (10 días) con C(t) = 50 + 2t: $600.00
Ahorro al reducir el periodo de almacenamiento a 10 días: $375.00
Costo total de almacenamiento (15 días) con C(t) = 60 + 3t: $1237.50
```



Ejercicio 39: Planificación y Costos de Almacenamiento de Alimentos en Situaciones de Emergencia

En una comunidad aislada, se ha decidido almacenar alimentos para garantizar que todos tengan suficiente provisión durante un periodo de emergencia de **30 días**. La comunidad necesita realizar una estimación del costo de almacenamiento y planificación de distribución.

Los costos y demandas son los siguientes:

1. El **costo diario de almacenamiento** para los alimentos en el almacén es de $1.50 por kilogramo almacenado. La cantidad de alimentos almacenados disminuye en función del tiempo.
2. Se estima que cada día la demanda de alimentos sigue la siguiente función:

$$D(t) = 200 - 3t$$

donde:

- $(D(t))$ es la demanda diaria en kilogramos,
- (t) representa los días desde el inicio de la emergencia (cuando $(t = 0)$).

Responde las siguientes preguntas:

1. **Calcular la cantidad total de alimentos necesarios** para abastecer a la comunidad durante los 30 días, integrando la función de demanda a lo largo de este periodo.
2. **Calcular el costo total de almacenamiento** en función de la demanda de alimentos y el costo diario de almacenamiento. ¿Cuál es el costo total si el costo por kilogramo almacenado es de $1.50?
3. Suponiendo que los alimentos deben mantenerse en condiciones óptimas, **¿cuánto se puede ahorrar en costos de almacenamiento si se puede reducir el periodo de emergencia a 20 días?** Realiza los cálculos y compáralos.
4. Representa gráficamente la demanda diaria de alimentos en función del tiempo y el área bajo la curva, que representa el total de alimentos necesarios.

Fórmulas

La cantidad total de alimentos necesarios (A) se calcula mediante la integral de la función de demanda desde $(t = a)$ hasta $(t = b)$:

$$A = \int_a^b D(t)\,dt$$

El costo total de almacenamiento (CT) durante el periodo se calcula multiplicando la cantidad almacenada diaria por el costo diario por kilogramo almacenado:

$$CT = A \times \text{Costo por kilogramo}$$

Solución Matemática

Pregunta 1: Calcular la cantidad total de alimentos necesarios para 30 días

La cantidad total de alimentos necesarios se calcula como:

$$A = \int_0^{30} D(t)\,dt$$

Sustituyendo $(D(t) = 200 - 3t)$:

$$A = \int_0^{30} (200 - 3t)\,dt$$

Resolviendo la integral:

1. Integramos cada término:

$$\int (200 - 3t)\, dt = 200t - \frac{3t^2}{2}$$

2. Evaluamos en los límites de 0 a 30:

$$A = \left[200t - \frac{3t^2}{2}\right]_0^{30}$$

3. Sustituyendo $(t = 30)$ y $(t = 0)$:

$$A = (200 \cdot 30 - \frac{3 \cdot 30^2}{2}) = (6000 - 1350) = 4650\,\text{kilogramos}$$

Por lo tanto, la **cantidad total de alimentos necesarios** durante el periodo es de **4650 kilogramos**.

Pregunta 2: Calcular el costo total de almacenamiento

Dado que el costo de almacenamiento es de $1.50 por kilogramo, el costo total se calcula como:

$$CT = 4650 \times 1.50 = 6975\,\text{dólares}$$

El **costo total de almacenamiento** para 30 días es **$6975**.

Pregunta 3: Ahorro en costos si el periodo de emergencia se reduce a 20 días

Si el periodo de emergencia se reduce a 20 días, el total de alimentos necesarios es:

$$A_{20} = \int_0^{20} (200 - 3t)\, dt$$

Evaluando esta integral, calculamos el nuevo costo total y la diferencia para encontrar el ahorro.

Pregunta 4: Representación gráfica de la demanda diaria de alimentos en función del tiempo

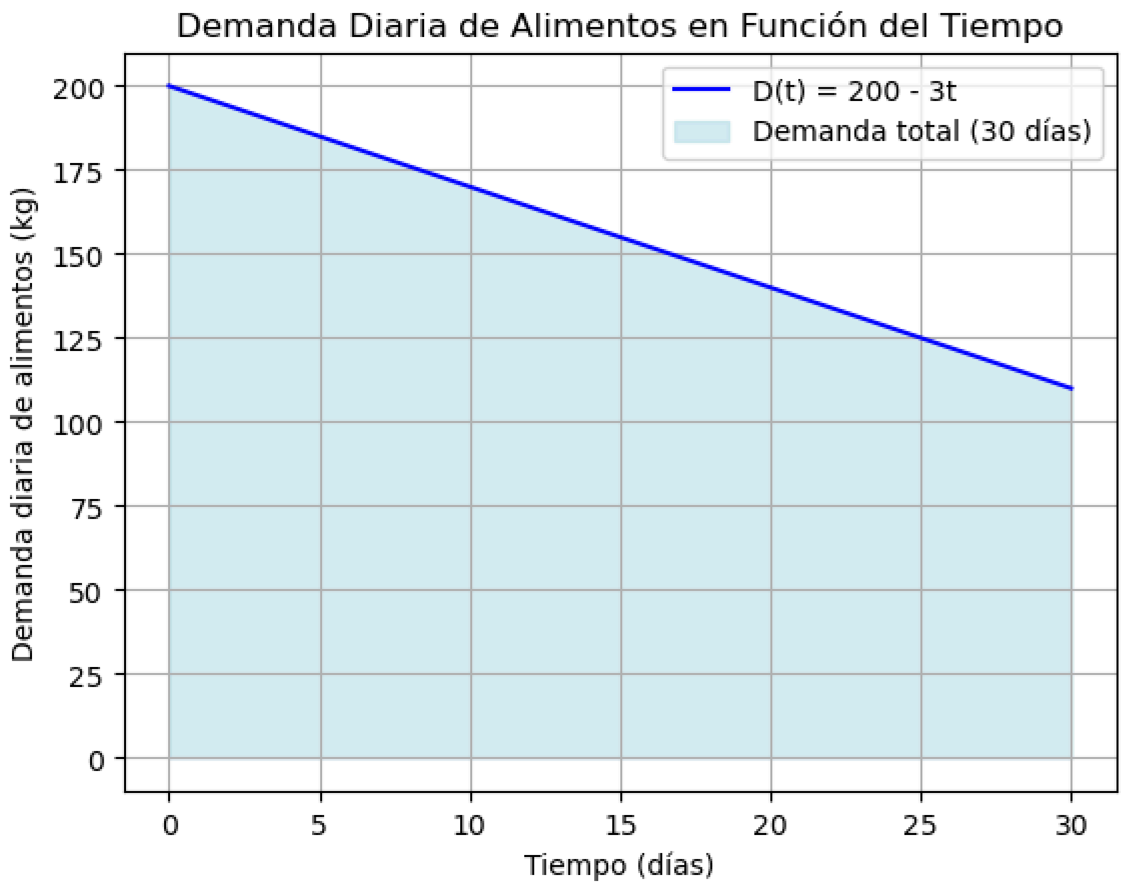
Podemos graficar la demanda diaria $(D(t) = 200 - 3t)$ y sombrear el área bajo la curva entre $(t = 0)$ y $(t = 30)$, que representa la cantidad total de alimentos necesarios.

In [123…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
```

```
# Costo por kilogramo almacenado
costo_por_kg = 1.5

# Definición de la función de demanda diaria
def demanda_alimentos(t):
    return 200 - 3 * t

# Calcular la cantidad total de alimentos para 30 días
alimentos_totales_30_dias, _ = quad(demanda_alimentos, 0, 30)
costo_total_30_dias = alimentos_totales_30_dias * costo_por_kg

# Calcular la cantidad total de alimentos para 20 días
alimentos_totales_20_dias, _ = quad(demanda_alimentos, 0, 20)
costo_total_20_dias = alimentos_totales_20_dias * costo_por_kg

# Ahorro en costos de almacenamiento
ahorro = costo_total_30_dias - costo_total_20_dias

print(f"Cantidad total de alimentos para 30 días: {alimentos_totales_30_dias:.2f} k
print(f"Costo total de almacenamiento (30 días): ${costo_total_30_dias:.2f}")
print(f"Cantidad total de alimentos para 20 días: {alimentos_totales_20_dias:.2f} k
print(f"Costo total de almacenamiento (20 días): ${costo_total_20_dias:.2f}")
print(f"Ahorro al reducir el tiempo de almacenamiento a 20 días: ${ahorro:.2f}")

# Gráfica de la demanda diaria de alimentos en función del tiempo
t_vals = np.linspace(0, 30, 100)
demanda_vals = demanda_alimentos(t_vals)

plt.plot(t_vals, demanda_vals, label="D(t) = 200 - 3t", color="blue")
plt.fill_between(t_vals, demanda_vals, color="lightblue", alpha=0.5, where=(t_vals

plt.xlabel("Tiempo (días)")
plt.ylabel("Demanda diaria de alimentos (kg)")
plt.title("Demanda Diaria de Alimentos en Función del Tiempo")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Cantidad total de alimentos para 30 días: 4650.00 kg
Costo total de almacenamiento (30 días): $6975.00
Cantidad total de alimentos para 20 días: 3400.00 kg
Costo total de almacenamiento (20 días): $5100.00
Ahorro al reducir el tiempo de almacenamiento a 20 días: $1875.00
```



Ejercicio 40: Cálculo del Valor Presente de un Flujo de Caja con Crecimiento Variable

Una empresa está evaluando la rentabilidad de un proyecto de inversión que generará flujos de caja anuales en crecimiento durante los próximos **5 años**. La proyección es que los flujos de caja crecerán de forma variable en función del tiempo.

La función de flujo de caja proyectado para cada año está dada por:

$$FC(t) = 10000 \cdot e^{0.03t}$$

donde:

- $(FC(t))$ es el flujo de caja anual proyectado en dólares,
- (t) es el número de años desde el inicio del proyecto.

La empresa aplica una **tasa de descuento del 8%** anual para calcular el valor presente de estos flujos de caja.

Responde las siguientes preguntas:

1. **Calcular el valor presente total de los flujos de caja proyectados** para los próximos 5 años usando la tasa de descuento del 8%.

2. **Comparar el valor presente total** si la tasa de descuento cambia al 10% y al 6%. ¿Cómo afecta esta variación en la tasa de descuento al valor presente del proyecto?

3. Representa gráficamente el flujo de caja proyectado y el flujo de caja descontado para la tasa del 8%.

4. **Analizar el impacto del crecimiento en el flujo de caja**: ¿Cuánto variaría el valor presente si la tasa de crecimiento del flujo de caja fuera del 4% en lugar del 3%? Realiza el cálculo y compáralo con los resultados anteriores.

Fórmula para el Valor Presente de un Flujo de Caja con Crecimiento Variable

El valor presente (PV) de los flujos de caja futuros a una tasa de descuento (r) se calcula integrando el flujo de caja proyectado desde $(t = 0)$ hasta $(t = T)$:

$$PV = \int_0^T FC(t) \cdot e^{-rt} \, dt$$

donde:

- (PV) es el valor presente de los flujos de caja proyectados,
- $(FC(t))$ es la función de flujo de caja en función del tiempo,
- (r) es la tasa de descuento,
- (T) es el periodo total de proyección (5 años).

Solución Matemática

Pregunta 1: Calcular el valor presente de los flujos de caja para 5 años con tasa de descuento del 8%

El valor presente de los flujos de caja se calcula como:

$$PV = \int_0^5 FC(t) \cdot e^{-0.08t} \, dt$$

Sustituyendo $(FC(t) = 10000 \cdot e^{0.03t})$:

$$PV = \int_0^5 10000 \cdot e^{0.03t} \cdot e^{-0.08t} \, dt$$

Simplificamos el exponente:

$$PV = \int_0^5 10000 \cdot e^{(0.03-0.08)t}\,dt$$

$$PV = \int_0^5 10000 \cdot e^{-0.05t}\,dt$$

Resolviendo la integral:

1. Integramos la función exponencial:

$$\int 10000 \cdot e^{-0.05t}\,dt = \frac{10000}{-0.05}e^{-0.05t} = -200000e^{-0.05t}$$

2. Evaluamos en los límites de 0 a 5:

$$PV = -200000\left[e^{-0.05\cdot 5} - e^{0}\right]$$

3. Simplificando:

$$PV = -200000\left(e^{-0.25} - 1\right)$$

Evaluamos esta expresión para obtener el valor presente total.

Pregunta 2: Comparación con tasas de descuento del 10% y 6%

Para la tasa de descuento del 10%, se sigue el mismo procedimiento, pero reemplazando la tasa en la integral:

$$PV_{10\%} = \int_0^5 10000 \cdot e^{0.03t} \cdot e^{-0.10t}\,dt$$

Y para la tasa del 6%:

$$PV_{6\%} = \int_0^5 10000 \cdot e^{0.03t} \cdot e^{-0.06t}\,dt$$

Calculamos cada valor y comparamos los resultados.

Pregunta 3: Representación gráfica del flujo de caja y del flujo de caja descontado

Podemos graficar el flujo de caja proyectado $(FC(t) = 10000 \cdot e^{0.03t})$ y el flujo de caja descontado para la tasa del 8%, observando cómo la proyección se reduce al aplicarse la tasa de descuento.

Pregunta 4: Impacto de una mayor tasa de crecimiento en el flujo de caja

Si el flujo de caja crece a una tasa del 4% en lugar del 3%, el valor presente se calcula como:

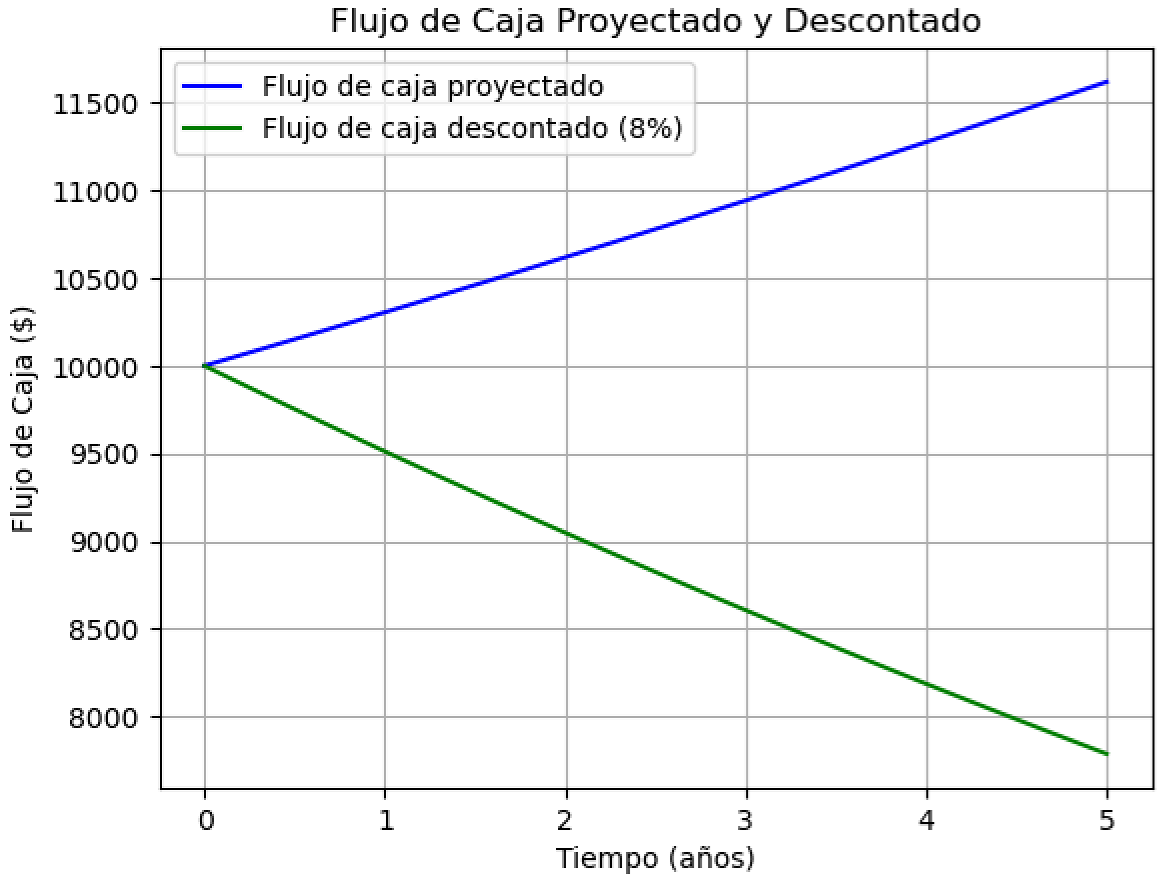
$$PV_{nuevo} = \int_0^5 10000 \cdot e^{0.04t} \cdot e^{-0.08t}\, dt$$

Resolviendo esta integral, comparamos los resultados para analizar el impacto de un mayor crecimiento en el valor presente.

In [126…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad

# Definición de las tasas
r1 = 0.08  # Tasa de descuento inicial
r2 = 0.10  # Tasa de descuento alternativa
r3 = 0.06  # Tasa de descuento alternativa baja

# Definición de la función de flujo de caja proyectado
def flujo_caja(t, crecimiento=0.03):
    return 10000 * np.exp(crecimiento * t)

# Definición de la función de flujo de caja descontado
def flujo_caja_descontado(t, tasa_descuento, crecimiento=0.03):
    return flujo_caja(t, crecimiento) * np.exp(-tasa_descuento * t)

# Calcular el valor presente con diferentes tasas de descuento
PV_r1, _ = quad(flujo_caja_descontado, 0, 5, args=(r1,))
PV_r2, _ = quad(flujo_caja_descontado, 0, 5, args=(r2,))
PV_r3, _ = quad(flujo_caja_descontado, 0, 5, args=(r3,))

# Calcular el valor presente con una tasa de crecimiento del 4% y tasa de descuento
PV_crecimiento_4, _ = quad(flujo_caja_descontado, 0, 5, args=(r1, 0.04))

print(f"Valor presente con tasa de descuento del 8%: ${PV_r1:.2f}")
print(f"Valor presente con tasa de descuento del 10%: ${PV_r2:.2f}")
print(f"Valor presente con tasa de descuento del 6%: ${PV_r3:.2f}")
print(f"Valor presente con crecimiento del 4% y descuento del 8%: ${PV_crecimiento_

# Gráfica del flujo de caja y flujo de caja descontado
t_vals = np.linspace(0, 5, 100)
flujo_vals = flujo_caja(t_vals)
flujo_descontado_vals = flujo_caja_descontado(t_vals, r1)

plt.plot(t_vals, flujo_vals, label="Flujo de caja proyectado", color="blue")
plt.plot(t_vals, flujo_descontado_vals, label="Flujo de caja descontado (8%)", colo
plt.xlabel("Tiempo (años)")
plt.ylabel("Flujo de Caja ($)")
plt.title("Flujo de Caja Proyectado y Descontado")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Valor presente con tasa de descuento del 8%: $44239.84
Valor presente con tasa de descuento del 10%: $42187.42
Valor presente con tasa de descuento del 6%: $46430.67
Valor presente con crecimiento del 4% y descuento del 8%: $45317.31
```



Capítulo 5: Ecuaciones Diferenciales: Modelando Sistemas Dinámicos

V.1 Fundamentos de las Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones diferenciales son herramientas matemáticas que describen cómo cambian las cantidades en función de otras variables, como el tiempo o el espacio. Son fundamentales para modelar fenómenos dinámicos, en los cuales un sistema cambia de estado continuamente o bajo ciertas condiciones. En una ecuación diferencial, relacionamos una variable con sus derivadas para capturar su tasa de cambio en función de otras variables.

Tipos de Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse en varios tipos:

1. **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)**: Son ecuaciones diferenciales que involucran funciones de una sola variable independiente (generalmente el tiempo). Un ejemplo clásico es el crecimiento exponencial de una población.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

2. **Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP)**: Estas ecuaciones involucran múltiples variables independientes. Son comunes en problemas de física, como la difusión de calor y la propagación de ondas.

3. **Orden y Linealidad**: El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta presente en la ecuación. Las ecuaciones lineales tienen las variables y sus derivadas en términos lineales, mientras que las no lineales involucran términos más complejos.

Ejemplos Comunes

- **Crecimiento y Decaimiento Exponencial**: Modela cómo cambia una cantidad en función del tiempo, como el crecimiento de una población o la desintegración de una sustancia radiactiva.

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

  donde (N) es la cantidad y (r) es la tasa de crecimiento o decaimiento.

- **Movimiento Armónico Simple**: Describe el movimiento oscilatorio de un sistema, como un resorte o un péndulo.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

  donde (x) es la posición y (ω) es la frecuencia angular.

Solución de Ecuaciones Diferenciales

Resolver una ecuación diferencial significa encontrar una función que satisfaga la ecuación en función de la variable independiente. Existen métodos analíticos y numéricos para resolver estas ecuaciones:

- **Métodos Analíticos**: Se utilizan cuando la ecuación tiene una solución exacta. Ejemplos son la separación de variables, el método de integración directa y la transformada de Laplace.

- **Métodos Numéricos**: Se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales complejas, como el método de Euler, el método de Runge-Kutta, y los métodos de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parciales.

Las ecuaciones diferenciales son esenciales en disciplinas como la física, la química, la biología, y la economía para modelar el comportamiento dinámico de diversos sistemas y fenómenos.

V.2 Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales en Ciencias Naturales y Sociales

Las ecuaciones diferenciales tienen aplicaciones en múltiples disciplinas, ayudando a modelar fenómenos que varían continuamente en el tiempo o el espacio. A continuación, se exploran algunas aplicaciones clave en diferentes áreas:

Física y Química

1. **Movimiento Armónico Simple**: Utilizado para modelar el movimiento de partículas y sistemas oscilatorios, como péndulos o resortes, en donde la posición depende de la aceleración.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

2. **Cinetica Química**: En química, las ecuaciones diferenciales modelan la velocidad de reacción y la concentración de reactivos y productos en el tiempo.

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]$$

3. **Ecuación de Calor**: Modela la transferencia de calor en un objeto sólido, mostrando cómo la temperatura cambia con el tiempo y el espacio.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Biología y Medicina

1. **Crecimiento Poblacional**: El crecimiento exponencial y logístico de poblaciones se modela utilizando ecuaciones diferenciales. Estas permiten prever el aumento o disminución de la población en el tiempo.

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

donde (P) es la población, (r) es la tasa de crecimiento y (K) es la capacidad de carga del ambiente.

2. **Modelado Epidemiológico (SIR)**: En epidemiología, las ecuaciones diferenciales permiten estudiar la propagación de enfermedades, modelando la tasa de cambio de la población susceptible, infectada y recuperada.

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

Economía y Finanzas

1. **Modelos de Crecimiento Económico**: En economía, se utilizan ecuaciones diferenciales para modelar el crecimiento económico y el capital acumulado.

$$\frac{dK}{dt} = sY - \delta K$$

donde (K) es el capital, (s) es la tasa de ahorro, (Y) es el producto y (\delta) es la tasa de depreciación.

2. **Ecuaciones Diferenciales Estocásticas**: En finanzas, se modela el precio de los activos en función del tiempo. La ecuación de Black-Scholes es un ejemplo, utilizado en la valoración de opciones financieras.

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dW$$

Ciencias Sociales

1. **Dinámica de Poblaciones Humanas**: Las ecuaciones diferenciales modelan cambios en la población humana considerando nacimientos, muertes y migración, lo cual es útil en planificación urbana y estudios de crecimiento demográfico.

2. **Difusión de Ideas o Comportamientos (Modelo de Difusión)**: Modela cómo una innovación o idea se difunde en una sociedad, similar a cómo se propaga una epidemia. Este modelo es útil en marketing y estudios de cambio social.

Ingeniería

1. **Sistemas de Control**: En ingeniería de control, las ecuaciones diferenciales modelan sistemas dinámicos, como el control de temperatura, velocidad o presión en sistemas industriales.

2. **Flujo de Fluidos y Transferencia de Calor**: En ingeniería mecánica y civil, las ecuaciones diferenciales parciales modelan el flujo de fluidos, optimizando el diseño de sistemas de transporte de agua, petróleo, y otros líquidos.

Las ecuaciones diferenciales permiten así estudiar y predecir el comportamiento de sistemas complejos en diferentes contextos. Son esenciales para la planificación, optimización y control en ámbitos que varían desde la física hasta las ciencias sociales.

V.3 Ejercicios de Aplicaciones y Soluciones (MathPY)

Ejercicio 41: Modelado del Crecimiento Poblacional con Capacidad de Carga

Una población de animales en un ecosistema cerrado crece siguiendo un modelo logístico que tiene en cuenta la capacidad de carga del ambiente. La ecuación diferencial que describe este modelo es:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

donde:

- (P) es el tamaño de la población en el tiempo (t),
- (r) es la tasa de crecimiento poblacional,
- (K) es la capacidad de carga del ecosistema, es decir, el tamaño máximo que la población puede alcanzar de forma sostenible.

Para este ecosistema, se sabe que:

- La tasa de crecimiento $(r = 0.2)$ por año.
- La capacidad de carga $(K = 1000)$ individuos.
- La población inicial $(P(0) = 100)$ individuos.

Responde las siguientes preguntas:

1. **Resolver la ecuación diferencial para obtener el tamaño de la población $(P(t))$** en función del tiempo, suponiendo las condiciones dadas.

2. **Calcular el tamaño de la población después de 10 años**.

3. **Representar gráficamente la evolución de la población** a lo largo del tiempo, mostrando cómo se aproxima a la capacidad de carga.

4. **Analizar el impacto de una mayor tasa de crecimiento $(r = 0.3)$** en el tamaño de la población después de 10 años. Realiza el cálculo y compáralo con el tamaño de la población calculado inicialmente.

Fórmula para la Solución de la Ecuación Diferencial

La solución de la ecuación logística para el crecimiento poblacional es:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right) e^{-rt}}$$

donde:

- $(P(t))$ es el tamaño de la población en el tiempo (t),
- (P_0) es el tamaño inicial de la población.

Solución Matemática

Pregunta 1: Resolver la ecuación diferencial para (P(t))

La solución general de la ecuación logística es:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right) e^{-rt}}$$

Sustituyendo los valores dados:

- $(r = 0.2)$,
- $(K = 1000)$,
- $(P_0 = 100)$.

Entonces,

$$P(t) = \frac{1000}{1 + \left(\frac{1000-100}{100}\right) e^{-0.2t}}$$

Simplificamos el coeficiente en el denominador:

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.2t}}$$

Esta es la expresión para el tamaño de la población en función del tiempo.

Pregunta 2: Calcular el tamaño de la población después de 10 años

Sustituyendo $(t = 10)$ en la expresión de $(P(t))$:

$$P(10) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.2\cdot 10}}$$

Calculamos este valor para encontrar el tamaño de la población después de 10 años.

Pregunta 3: Representación gráfica de la evolución de la población

Podemos graficar $(P(t) = \frac{1000}{1+9e^{-0.2t}})$ para ver cómo se aproxima a la capacidad de carga de 1000 individuos a medida que pasa el tiempo.

Pregunta 4: Analizar el impacto de una mayor tasa de crecimiento

Si la tasa de crecimiento aumenta a $(r = 0.3)$, la expresión para $(P(t))$ se convierte en:

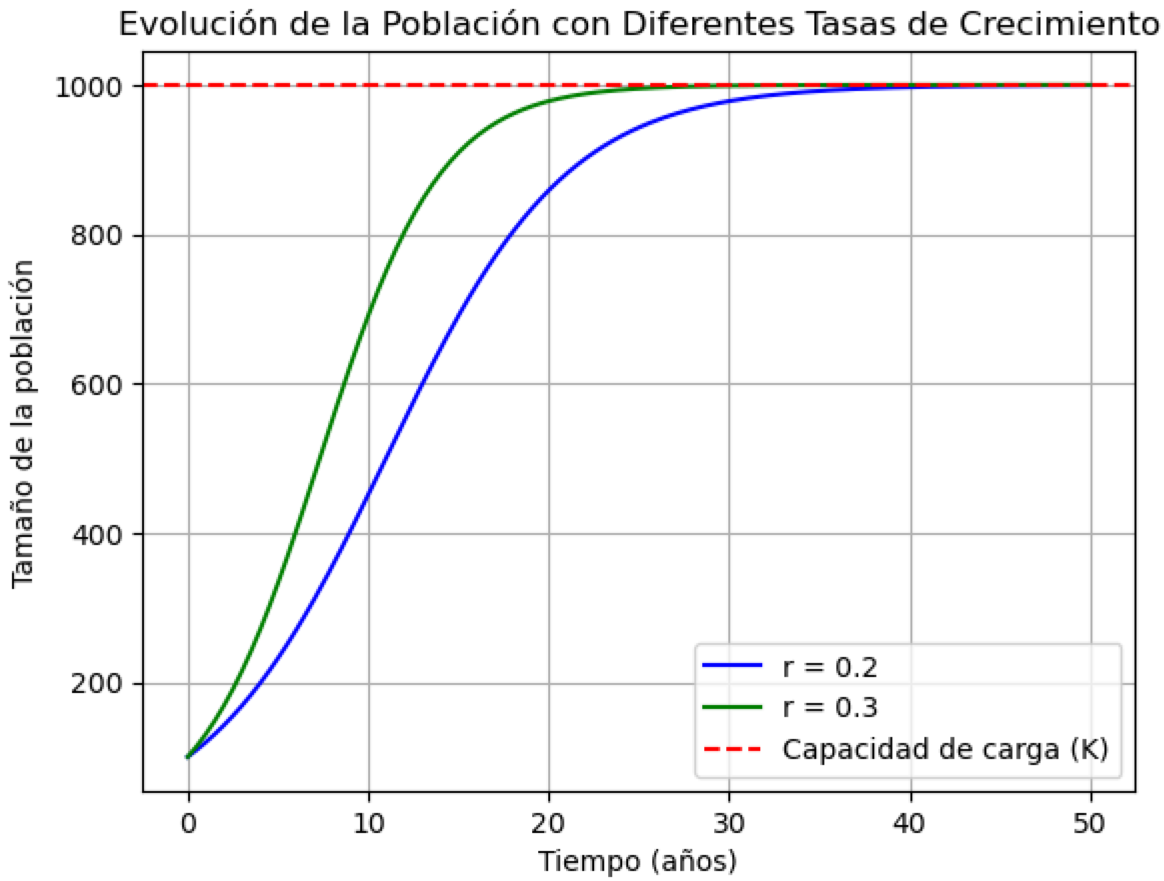
$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.3t}}$$

Calculamos el tamaño de la población con esta tasa de crecimiento para $(t = 10)$ y comparamos ambos resultados.

In [131…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del problema
K = 1000  # Capacidad de carga
P0 = 100  # Población inicial
r1 = 0.2  # Tasa de crecimiento inicial
r2 = 0.3  # Tasa de crecimiento modificada

# Definición de la función de población en función del tiempo
def poblacion(t, r):
    return K / (1 + ((K - P0) / P0) * np.exp(-r * t))

# Calcular el tamaño de la población después de 10 años con r = 0.2
P_10_r1 = poblacion(10, r1)

# Calcular el tamaño de la población después de 10 años con r = 0.3
P_10_r2 = poblacion(10, r2)

print(f"Tamaño de la población después de 10 años con r = 0.2: {P_10_r1:.2f} indivi
print(f"Tamaño de la población después de 10 años con r = 0.3: {P_10_r2:.2f} indivi

# Gráfica de la evolución de la población en función del tiempo
t_vals = np.linspace(0, 50, 200)  # Tiempo en años
poblacion_r1_vals = poblacion(t_vals, r1)
poblacion_r2_vals = poblacion(t_vals, r2)

plt.plot(t_vals, poblacion_r1_vals, label="r = 0.2", color="blue")
plt.plot(t_vals, poblacion_r2_vals, label="r = 0.3", color="green")
plt.axhline(y=K, color='red', linestyle='--', label="Capacidad de carga (K)")
plt.xlabel("Tiempo (años)")
plt.ylabel("Tamaño de la población")
plt.title("Evolución de la Población con Diferentes Tasas de Crecimiento")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Tamaño de la población después de 10 años con r = 0.2: 450.85 individuos
Tamaño de la población después de 10 años con r = 0.3: 690.57 individuos
```



Ejercicio 42: Modelado del Crecimiento Económico con Inversión y Depreciación del Capital

Un país quiere modelar el crecimiento de su capital económico en función del tiempo, tomando en cuenta la inversión anual y la depreciación del capital. La ecuación diferencial que representa este crecimiento es:

$$\frac{dK}{dt} = sY - \delta K$$

donde:

- (K) es el capital en el tiempo (t),
- (s) es la tasa de inversión,
- (Y) es el producto (PIB) y se modela como $(Y = A \cdot K^\alpha)$,
- (δ) es la tasa de depreciación del capital.

Para este modelo, los datos conocidos son:

- Tasa de inversión $(s = 0.25)$,
- Parámetro de producción $(A = 0.3)$,

- Exponente de producción ($\alpha = 0.5$),
- Tasa de depreciación ($\delta = 0.05$),
- Capital inicial ($K(0) = 5000$) millones de dólares.

Responde las siguientes preguntas:

1. **Resolver la ecuación diferencial** para obtener el capital ($K(t)$) en función del tiempo con las condiciones iniciales dadas.

2. **Calcular el capital después de 20 años** y determinar cómo la inversión y la depreciación afectan el crecimiento económico.

3. **Representar gráficamente la evolución del capital** a lo largo del tiempo, mostrando cómo crece o decrece según los parámetros dados.

4. **Evaluar el impacto de un cambio en la tasa de inversión**. Si la tasa de inversión aumenta a ($s = 0.3$), ¿cómo cambia el capital después de 20 años?

Fórmula para la Solución de la Ecuación Diferencial

La solución de la ecuación diferencial depende del crecimiento en función de la inversión y la depreciación:

$$\frac{dK}{dt} = sAK^{\alpha} - \delta K$$

donde:

- ($K(t)$) es el capital en función del tiempo,
- (sAK^{α}) representa el aporte de la inversión al crecimiento del capital,
- (δK) representa la depreciación del capital.

Solución Matemática

Pregunta 1: Resolver la ecuación diferencial para (K(t))

La ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{dK}{dt} = 0.075K^{0.5} - 0.05K$$

1. **Factorización del término de (K):**

   Observamos que ($\frac{dK}{dt}$) depende de dos términos, uno con ($K^{0.5}$) y otro con (K). Dado que es complejo resolver analíticamente esta ecuación, optamos por una **solución**

numérica para obtener una aproximación de $(K(t))$.

2. **Interpretación de la ecuación:**

   - $(0.075K^{0.5})$ representa el crecimiento debido a la inversión,
   - $(-0.05K)$ representa la depreciación del capital.

Para resolverlo numéricamente, se implementará en Python y se obtendrá el valor de $(K(t))$ a lo largo del tiempo.

Pregunta 2: Calcular el capital después de 20 años

Usando la solución numérica que se obtiene en Python, evaluaremos $(K(20))$, que es el capital después de 20 años.

Pregunta 3: Representación gráfica de la evolución del capital

Para visualizar el comportamiento del capital, graficaremos $(K(t))$ y observaremos cómo se estabiliza o crece dependiendo de la tasa de inversión y depreciación.

Pregunta 4: Evaluación del impacto de un aumento en la tasa de inversión

Si la tasa de inversión aumenta a $(s = 0.3)$, la ecuación diferencial se modifica a:

$$\frac{dK}{dt} = 0.3 \cdot 0.3 \cdot K^{0.5} - 0.05K$$

o simplificada:

$$\frac{dK}{dt} = 0.09K^{0.5} - 0.05K$$

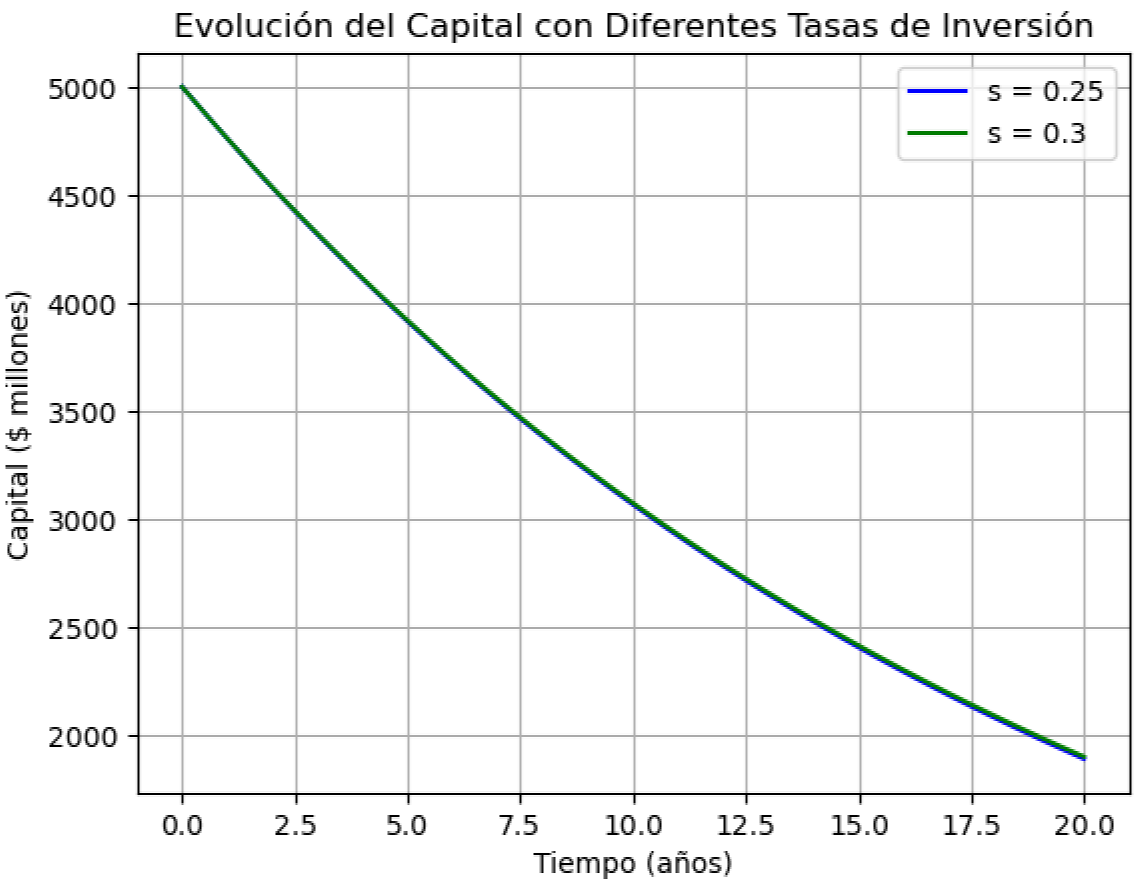
Repetimos la solución numérica con esta nueva tasa y evaluamos $(K(20))$ para comparar el impacto de una mayor tasa de inversión en el crecimiento económico.

In [134…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

# Parámetros del modelo
s1 = 0.25      # Tasa de inversión inicial
s2 = 0.3       # Tasa de inversión modificada
A = 0.3        # Parámetro de producción
alpha = 0.5    # Exponente de producción
delta = 0.05   # Tasa de depreciación
K0 = 5000      # Capital inicial
```

```
# Definición de la ecuación diferencial para dK/dt
def crecimiento_capital(t, K, s):
    return s * A * K**alpha - delta * K

# Resolver la ecuación diferencial para 20 años con la tasa de inversión inicial
solucion1 = solve_ivp(crecimiento_capital, [0, 20], [K0], args=(s1,), dense_output=

# Resolver la ecuación diferencial para 20 años con la tasa de inversión modificada
solucion2 = solve_ivp(crecimiento_capital, [0, 20], [K0], args=(s2,), dense_output=

# Calcular el capital después de 20 años para ambas tasas de inversión
K_20_s1 = solucion1.sol(20)[0]
K_20_s2 = solucion2.sol(20)[0]

print(f"Capital después de 20 años con s = 0.25: ${K_20_s1:.2f} millones")
print(f"Capital después de 20 años con s = 0.3: ${K_20_s2:.2f} millones")

# Gráfica de la evolución del capital en función del tiempo
t_vals = np.linspace(0, 20, 100)
K_vals_s1 = solucion1.sol(t_vals)[0]
K_vals_s2 = solucion2.sol(t_vals)[0]

plt.plot(t_vals, K_vals_s1, label="s = 0.25", color="blue")
plt.plot(t_vals, K_vals_s2, label="s = 0.3", color="green")
plt.xlabel("Tiempo (años)")
plt.ylabel("Capital ($ millones)")
plt.title("Evolución del Capital con Diferentes Tasas de Inversión")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Capital después de 20 años con s = 0.25: $1891.48 millones
Capital después de 20 años con s = 0.3: $1901.76 millones
```



Ejercicio 43: Enfriamiento de una Bebida Utilizando la Ley de Enfriamiento de Newton

Un café caliente a una temperatura inicial de 90 °C se coloca en una habitación a 20 °C. De acuerdo con la Ley de Enfriamiento de Newton, la tasa de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del ambiente. La ecuación diferencial para este proceso de enfriamiento es:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{amb}})$$

donde:

- $(T(t))$ es la temperatura del café en el tiempo (t),
- $(T_{\text{amb}} = 20)$ °C es la temperatura ambiente,
- (k) es la constante de enfriamiento (supón que $(k = 0.1)$ en este caso).

Responde las siguientes preguntas:

1. **Resolver la ecuación diferencial** para obtener la temperatura ($T(t)$) del café en función del tiempo, dado que la temperatura inicial es de 90 °C.

2. **Calcular la temperatura del café después de 15 minutos**.

3. **Representar gráficamente la evolución de la temperatura** del café en función del tiempo, observando cómo se acerca a la temperatura ambiente.

4. **Analizar el tiempo necesario para que la temperatura del café alcance los 30 °C**. ¿Cuánto tiempo tarda en enfriarse hasta este punto?

Fórmula para la Solución de la Ecuación Diferencial

La solución de la ecuación de enfriamiento es:

$$T(t) = T_{\text{amb}} + (T_0 - T_{\text{amb}})e^{-kt}$$

donde:

- ($T(t)$) es la temperatura en función del tiempo,
- (T_0) es la temperatura inicial del café,
- (T_{amb}) es la temperatura ambiente.

Solución Matemática

Pregunta 1: Resolver la ecuación diferencial para (T(t))

La ecuación diferencial para el enfriamiento es:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{amb}})$$

1. **Separación de Variables:**

   Reordenamos para separar las variables (T) y (t):

   $$\frac{dT}{T - T_{\text{amb}}} = -k\,dt$$

2. **Integración:**

   Integramos ambos lados:

   $$\int \frac{1}{T - T_{\text{amb}}}\,dT = -k \int dt$$

   Esto resulta en:

   $$\ln|T - T_{\text{amb}}| = -kt + C$$

3. **Aplicación de Condiciones Iniciales:**

   Exponenciamos ambos lados para despejar (T):

$$T(t) = T_{\text{amb}} + (T_0 - T_{\text{amb}})e^{-kt}$$

Sustituyendo ($T_{\text{amb}} = 20$), ($T_0 = 90$), y ($k = 0.1$):

$$T(t) = 20 + (90 - 20)e^{-0.1t}$$

Simplificando:

$$T(t) = 20 + 70e^{-0.1t}$$

Esta es la expresión para la temperatura del café en función del tiempo.

Pregunta 2: Calcular la temperatura después de 15 minutos

Sustituyendo ($t = 15$) en la expresión de ($T(t)$):

$$T(15) = 20 + 70e^{-0.1\cdot 15}$$

Evaluamos esta expresión para encontrar la temperatura después de 15 minutos.

Pregunta 3: Representación gráfica de la evolución de la temperatura

Graficamos la función ($T(t) = 20 + 70e^{-0.1t}$) para ver cómo la temperatura se aproxima a la temperatura ambiente a lo largo del tiempo.

Pregunta 4: Tiempo necesario para que el café alcance los 30 °C

Queremos encontrar (t) cuando ($T(t) = 30$):

$$30 = 20 + 70e^{-0.1t}$$

Restamos 20 de ambos lados:

$$10 = 70e^{-0.1t}$$

Dividimos entre 70:

$$\frac{1}{7} = e^{-0.1t}$$

Aplicamos logaritmo natural para despejar (t):

$$-0.1t = \ln\left(\frac{1}{7}\right)$$

Resolviendo para (t):

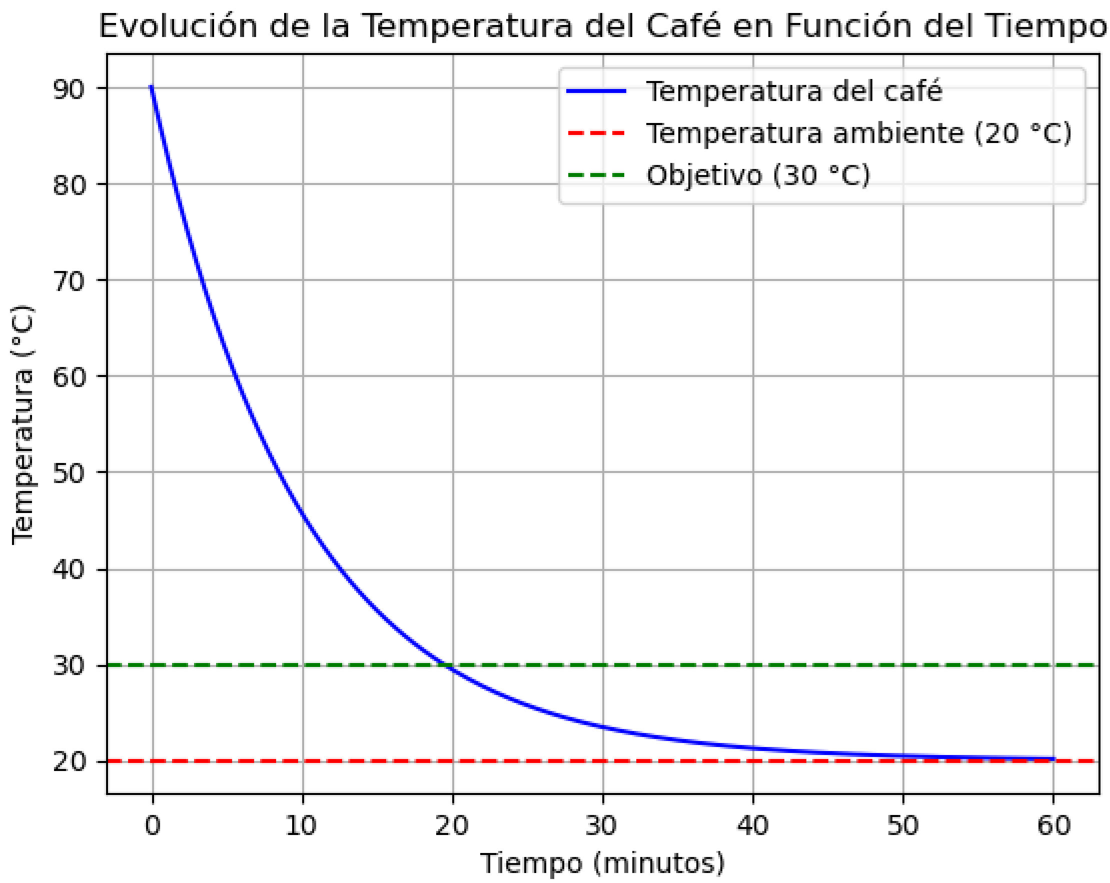
$$t = -\frac{\ln(1/7)}{0.1}$$

Calculamos este valor para obtener el tiempo necesario.

In [137…

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del modelo
T_amb = 20  # Temperatura ambiente en °C
T_0 = 90    # Temperatura inicial del café en °C
k = 0.1     # Constante de enfriamiento

# Definición de la función de temperatura en función del tiempo
def temperatura(t):
    return T_amb + (T_0 - T_amb) * np.exp(-k * t)

# Calcular la temperatura después de 15 minutos
T_15 = temperatura(15)
print(f"Temperatura del café después de 15 minutos: {T_15:.2f} °C")

# Calcular el tiempo para que la temperatura alcance los 30 °C
target_temp = 30
t_reach_30 = -np.log((target_temp - T_amb) / (T_0 - T_amb)) / k
print(f"Tiempo necesario para que la temperatura alcance los 30 °C: {t_reach_30:.2f

# Gráfica de la evolución de la temperatura en función del tiempo
t_vals = np.linspace(0, 60, 200)  # Tiempo en minutos
T_vals = temperatura(t_vals)

plt.plot(t_vals, T_vals, label="Temperatura del café", color="blue")
plt.axhline(y=T_amb, color='red', linestyle='--', label="Temperatura ambiente (20 °
plt.axhline(y=target_temp, color='green', linestyle='--', label="Objetivo (30 °C)")
plt.xlabel("Tiempo (minutos)")
plt.ylabel("Temperatura (°C)")
plt.title("Evolución de la Temperatura del Café en Función del Tiempo")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Temperatura del café después de 15 minutos: 35.62 °C
Tiempo necesario para que la temperatura alcance los 30 °C: 19.46 minutos
```



Ejercicio 44: Crecimiento de una Cuenta de Ahorro con Aportaciones Periódicas e Interés Compuesto

Una persona deposita regularmente una cantidad fija de dinero en una cuenta de ahorro que acumula intereses compuestos anualmente. La cuenta sigue el siguiente modelo de crecimiento de capital:

$$\frac{dA}{dt} = rA + P$$

donde:

- $(A(t))$ es el valor de la cuenta de ahorro en el tiempo (t),
- (r) es la tasa de interés anual (compuesto),
- (P) es el monto de las aportaciones periódicas anuales.

Para este problema, los datos conocidos son:

- La tasa de interés anual $(r = 0.05)$ (5%),
- Las aportaciones anuales fijas $(P = 2000)$ dólares,

- El valor inicial de la cuenta $(A(0) = 5000)$ dólares.

Responde las siguientes preguntas:

1. **Resolver la ecuación diferencial** para obtener el valor de la cuenta de ahorro $(A(t))$ en función del tiempo con las condiciones iniciales dadas.
2. **Calcular el valor de la cuenta después de 10 años**.
3. **Representar gráficamente la evolución del valor de la cuenta** a lo largo del tiempo, mostrando cómo crece bajo la influencia de las aportaciones y el interés compuesto.
4. **Evaluar el impacto de un aumento en la tasa de interés**. Si la tasa de interés aumenta a $(r = 0.07)$ (7%), ¿cómo cambia el valor de la cuenta después de 10 años?

Fórmula para la Solución de la Ecuación Diferencial

La ecuación diferencial para el valor de la cuenta de ahorro es:

$$\frac{dA}{dt} = rA + P$$

La solución general de esta ecuación es:

$$A(t) = \left(A_0 + \frac{P}{r}\right) e^{rt} - \frac{P}{r}$$

donde:

- (A_0) es el valor inicial de la cuenta de ahorro.

Solución Matemática

Pregunta 1: Resolver la ecuación diferencial para $(A(t))$

La ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{dA}{dt} = rA + P$$

1. **Separación de Variables:**

   Este es un caso de ecuación diferencial lineal de primer orden. La solución general es:

   $$A(t) = \left(A_0 + \frac{P}{r}\right) e^{rt} - \frac{P}{r}$$

2. **Sustitución de Valores Conocidos:**

Utilizando:

- ($r = 0.05$),
- ($P = 2000$),
- ($A_0 = 5000$).

La expresión para ($A(t)$) se convierte en:

$$A(t) = \left(5000 + \frac{2000}{0.05}\right) e^{0.05t} - \frac{2000}{0.05}$$

3. **Simplificación:**

Calculamos ($\frac{2000}{0.05} = 40000$), por lo que:

$$A(t) = (5000 + 40000)e^{0.05t} - 40000$$

$$A(t) = 45000e^{0.05t} - 40000$$

Esta es la expresión para el valor de la cuenta de ahorro en función del tiempo.

Pregunta 2: Calcular el valor de la cuenta después de 10 años

Sustituyendo ($t = 10$) en la expresión de ($A(t)$):

$$A(10) = 45000e^{0.05 \cdot 10} - 40000$$

Evaluamos esta expresión para encontrar el valor de la cuenta después de 10 años.

Pregunta 3: Representación gráfica de la evolución del valor de la cuenta

Graficamos la función ($A(t) = 45000e^{0.05t} - 40000$) para ver cómo el valor de la cuenta crece con el tiempo bajo la influencia de las aportaciones y el interés compuesto.

Pregunta 4: Evaluar el impacto de un aumento en la tasa de interés

Si la tasa de interés aumenta a ($r = 0.07$), la expresión para ($A(t)$) se convierte en:

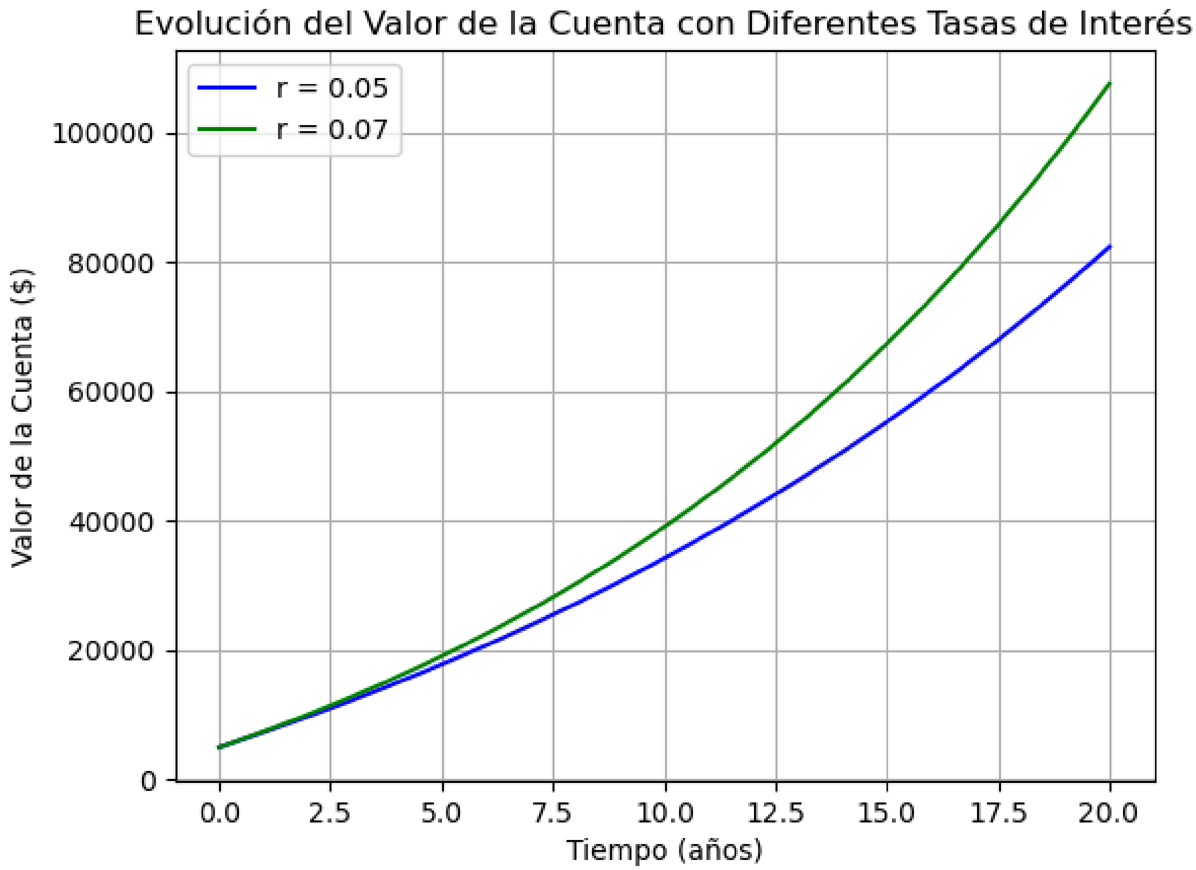
$$A(t) = \left(A_0 + \frac{P}{0.07}\right) e^{0.07t} - \frac{P}{0.07}$$

Sustituyendo los valores conocidos y evaluando para ($t = 10$), comparamos los resultados de ambos escenarios.

In [140…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del problema
A0 = 5000       # Valor inicial de la cuenta en dólares
P = 2000        # Aportación anual en dólares
r1 = 0.05       # Tasa de interés inicial
r2 = 0.07       # Tasa de interés modificada

# Definición de la función de valor de la cuenta en función del tiempo
def valor_cuenta(t, r):
    return (A0 + P / r) * np.exp(r * t) - P / r

# Calcular el valor de la cuenta después de 10 años con tasa de interés inicial
A_10_r1 = valor_cuenta(10, r1)

# Calcular el valor de la cuenta después de 10 años con tasa de interés aumentada
A_10_r2 = valor_cuenta(10, r2)

print(f"Valor de la cuenta después de 10 años con r = 0.05: ${A_10_r1:.2f}")
print(f"Valor de la cuenta después de 10 años con r = 0.07: ${A_10_r2:.2f}")

# Gráfica de la evolución del valor de la cuenta en función del tiempo
t_vals = np.linspace(0, 20, 200)
A_vals_r1 = valor_cuenta(t_vals, r1)
A_vals_r2 = valor_cuenta(t_vals, r2)

plt.plot(t_vals, A_vals_r1, label="r = 0.05", color="blue")
plt.plot(t_vals, A_vals_r2, label="r = 0.07", color="green")
plt.xlabel("Tiempo (años)")
plt.ylabel("Valor de la Cuenta ($)")
plt.title("Evolución del Valor de la Cuenta con Diferentes Tasas de Interés")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Valor de la cuenta después de 10 años con r = 0.05: $34192.46
Valor de la cuenta después de 10 años con r = 0.07: $39033.13
```



Ejercicio 45: Modelo de Depreciación de un Activo

Una empresa posee una máquina cuyo valor disminuye con el tiempo debido a la depreciación. Supón que la tasa de depreciación es proporcional al valor actual del activo. Este modelo se describe mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dV}{dt} = -kV$$

donde:

- $(V(t))$ es el valor del activo en el tiempo (t),
- (k) es la constante de depreciación anual.

Para este problema, los datos conocidos son:

- La constante de depreciación $(k = 0.15)$ (15% anual),
- El valor inicial de la máquina $(V(0) = 10,000)$ dólares.

Responde las siguientes preguntas:

1. **Resolver la ecuación diferencial** para obtener el valor del activo ($V(t)$) en función del tiempo, dado que la depreciación es proporcional a su valor.
2. **Calcular el valor del activo después de 5 años**.
3. **Representar gráficamente la depreciación del valor del activo** a lo largo del tiempo, observando cómo disminuye su valor.
4. **Analizar el tiempo necesario para que el valor del activo se reduzca a 25%** de su valor inicial. ¿Cuánto tiempo toma llegar a este punto?

Fórmula para la Solución de la Ecuación Diferencial

La solución de la ecuación diferencial de depreciación es:

$$V(t) = V_0 e^{-kt}$$

donde:

- (V_0) es el valor inicial del activo,
- (k) es la constante de depreciación.

Solución Matemática

Pregunta 1: Resolver la ecuación diferencial para ($V(t)$)

La ecuación diferencial a resolver es:

$$\frac{dV}{dt} = -kV$$

1. **Separación de Variables:**

   Reordenamos la ecuación para separar las variables (V) y (t):

   $$\frac{dV}{V} = -k\,dt$$

2. **Integración:**

   Integramos ambos lados de la ecuación:

   $$\int \frac{1}{V}\,dV = -k \int dt$$

   Esto nos da:

   $$\ln|V| = -kt + C$$

3. **Exponenciación para despejar (V):**

Elevamos ambos lados a la potencia de (e):

$$V(t) = V_0 e^{-kt}$$

donde (V_0) es el valor inicial del activo.

4. **Sustitución de Valores Conocidos:**

   Dado que:

   - $(V_0 = 10,000)$,
   - $(k = 0.15)$,

   La ecuación para $(V(t))$ se convierte en:

$$V(t) = 10000e^{-0.15t}$$

Esta es la expresión para el valor del activo en función del tiempo.

Pregunta 2: Calcular el valor del activo después de 5 años

Sustituyendo $(t = 5)$ en la expresión de $(V(t))$:

$$V(5) = 10000e^{-0.15 \cdot 5}$$

Evaluamos esta expresión para encontrar el valor del activo después de 5 años.

Pregunta 3: Representación gráfica de la depreciación del valor del activo

Graficamos la función $(V(t) = 10000e^{-0.15t})$ para observar cómo el valor del activo disminuye a lo largo del tiempo.

Pregunta 4: Tiempo necesario para que el valor del activo se reduzca a 25% del valor inicial

Queremos encontrar el tiempo (t) cuando $(V(t) = 0.25 \times V_0)$:

$$0.25 \times 10000 = 10000e^{-0.15t}$$

Dividimos ambos lados entre 10,000:

$$0.25 = e^{-0.15t}$$

Aplicamos logaritmo natural para despejar (t):

$$-0.15t = \ln(0.25)$$

Resolviendo para (t):

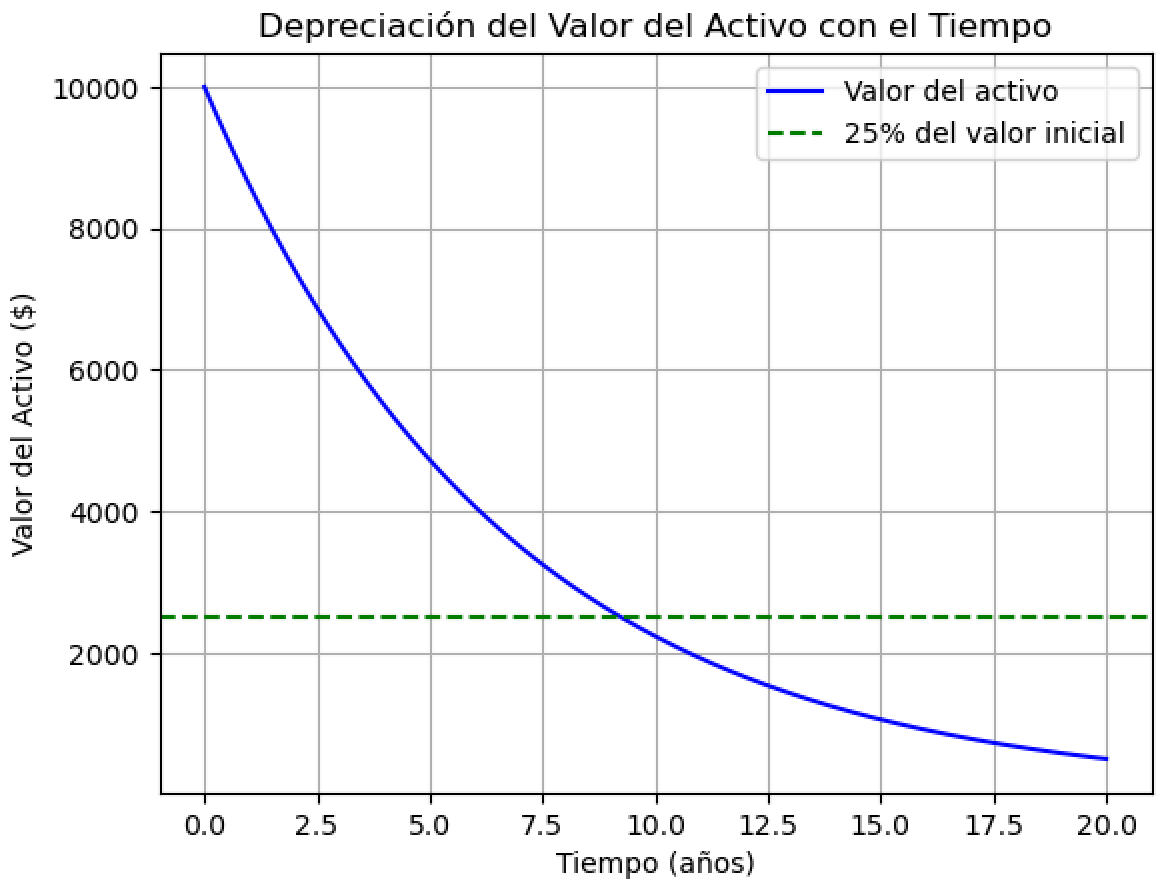
$$t = -\frac{\ln(0.25)}{0.15}$$

Calculamos este valor para encontrar el tiempo necesario para que el activo alcance el 25% de su valor inicial.

In [143…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del problema
V0 = 10000      # Valor inicial del activo en dólares
k = 0.15        # Constante de depreciación

# Definición de la función de valor del activo en función del tiempo
def valor_activo(t):
    return V0 * np.exp(-k * t)

# Calcular el valor del activo después de 5 años
V_5 = valor_activo(5)
print(f"Valor del activo después de 5 años: ${V_5:.2f}")

# Calcular el tiempo necesario para que el valor del activo se reduzca a 25% del va
target_value = 0.25 * V0
t_reach_25_percent = -np.log(target_value / V0) / k
print(f"Tiempo necesario para que el valor del activo se reduzca a 25% del valor in

# Gráfica de la depreciación del valor del activo en función del tiempo
t_vals = np.linspace(0, 20, 200)  # Tiempo en años
V_vals = valor_activo(t_vals)

plt.plot(t_vals, V_vals, label="Valor del activo", color="blue")
plt.axhline(y=target_value, color='green', linestyle='--', label="25% del valor ini
plt.xlabel("Tiempo (años)")
plt.ylabel("Valor del Activo ($)")
plt.title("Depreciación del Valor del Activo con el Tiempo")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Valor del activo después de 5 años: $4723.67
Tiempo necesario para que el valor del activo se reduzca a 25% del valor inicial: 9.
24 años
```



Ejercicio 46: Evaluación del Valor Presente Neto (VPN) de un Proyecto de Inversión

Una empresa está considerando un proyecto de inversión que requiere una inversión inicial de $100,000$ dólares y genera flujos de caja anuales durante 5 años. Los flujos de caja esperados son:

- Año 1: $25,000$ dólares
- Año 2: $30,000$ dólares
- Año 3: $35,000$ dólares
- Año 4: $40,000$ dólares
- Año 5: $45,000$ dólares

La tasa de descuento para evaluar el proyecto es del 10% anual.

Para este problema:

1. **Calculemos el Valor Presente Neto (VPN)** del proyecto utilizando la fórmula de descuento.
2. **Evaluemos si el proyecto es viable**: Un proyecto es viable si el VPN es positivo.
3. **Representemos gráficamente el valor acumulado del proyecto** a lo largo de los años, comparando cada flujo de caja descontado con el flujo de caja sin descontar.

Fórmula para el Valor Presente Neto (VPN)

El VPN se calcula utilizando la fórmula:

$$VPN = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} - C_0$$

donde:

- (CF_t) es el flujo de caja en el año (t),
- (r) es la tasa de descuento,
- (C_0) es la inversión inicial,
- (n) es el número de años del proyecto.

Solución Matemática

Paso 1: Calcular el Valor Presente Neto (VPN)

Para calcular el VPN, utilizamos la fórmula:

$$VPN = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+r)^t} - C_0$$

Sustituyendo los valores conocidos:

- Inversión inicial $(C_0 = 100,000)$,
- Tasa de descuento $(r = 0.10)$,
- Flujos de caja $(CF_1 = 25,000)$, $(CF_2 = 30,000)$, $(CF_3 = 35,000)$, $(CF_4 = 40,000)$, $(CF_5 = 45,000)$.

1. Calculamos el valor presente de cada flujo de caja:

   - Año 1:

   $$\frac{CF_1}{(1+r)^1} = \frac{25,000}{(1+0.10)^1} = \frac{25,000}{1.10} \approx 22,727.27$$

   - Año 2:

   $$\frac{CF_2}{(1+r)^2} = \frac{30,000}{(1+0.10)^2} = \frac{30,000}{1.21} \approx 24,793.39$$

   - Año 3:

$$\frac{CF_3}{(1+r)^3} = \frac{35,000}{(1+0.10)^3} = \frac{35,000}{1.331} \approx 26,291.69$$

- Año 4:

$$\frac{CF_4}{(1+r)^4} = \frac{40,000}{(1+0.10)^4} = \frac{40,000}{1.4641} \approx 27,317.76$$

- Año 5:

$$\frac{CF_5}{(1+r)^5} = \frac{45,000}{(1+0.10)^5} = \frac{45,000}{1.61051} \approx 27,944.25$$

2. Sumamos estos valores descontados y restamos la inversión inicial para calcular el VPN:

$$VPN = (22,727.27 + 24,793.39 + 26,291.69 + 27,317.76 + 27,944.25) - 100,000$$

Calculamos la suma:

$$VPN = 129,074.36 - 100,000 = 29,074.36$$

Por lo tanto, el **Valor Presente Neto (VPN) es aproximadamente** $29,074.36$ **dólares**.

Paso 2: Evaluar la Viabilidad del Proyecto

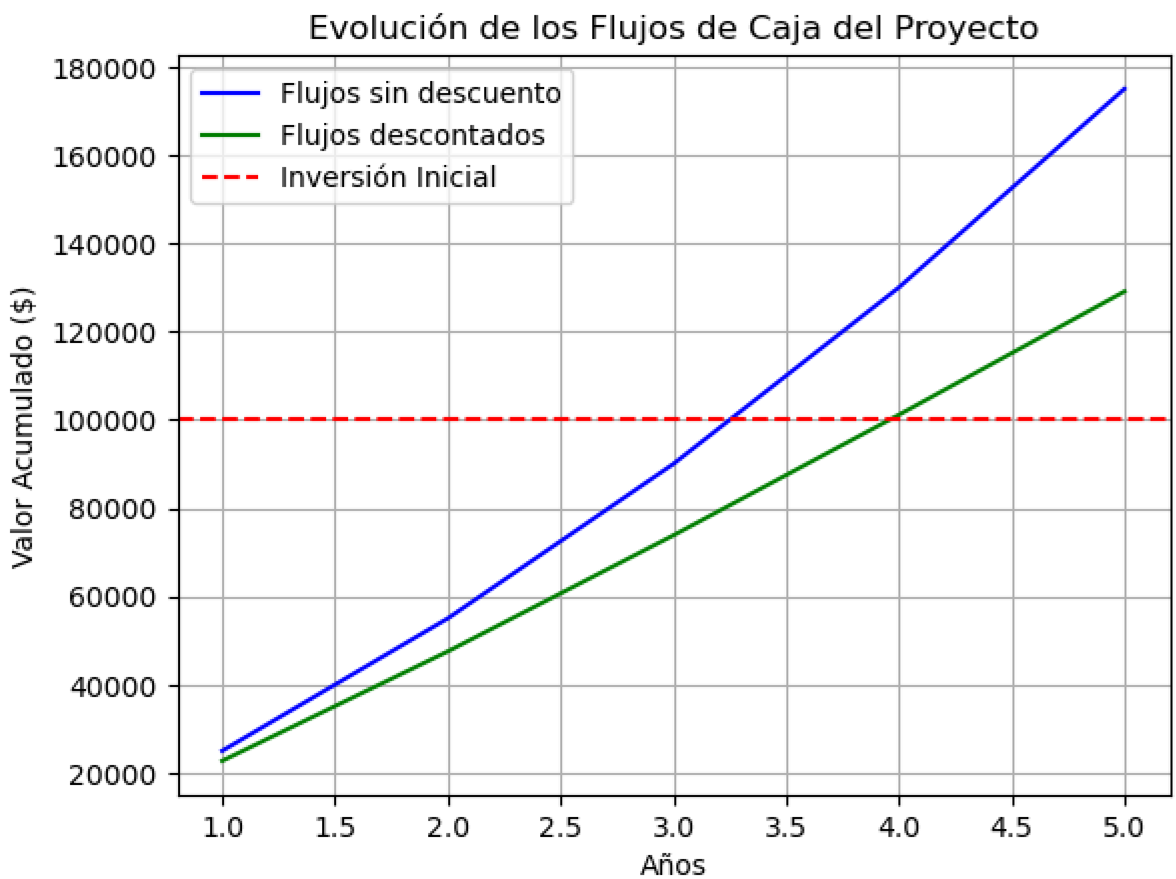
Como el VPN es positivo, el proyecto es viable. Un VPN positivo indica que el proyecto generará más valor del que costó, considerando la tasa de descuento del 10%.

In [146…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos del problema
inversion_inicial = 100000  # Costo inicial en dólares
flujos_de_caja = [25000, 30000, 35000, 40000, 45000]  # Flujos de caja anuales
tasa_descuento = 0.10  # Tasa de descuento anual

# Calcular el valor presente neto (VPN)
vpn = -inversion_inicial  # Empezamos con el costo inicial negativo
flujos_descuentados = []

for t, flujo in enumerate(flujos_de_caja, start=1):
    valor_descuentado = flujo / (1 + tasa_descuento) ** t
    vpn += valor_descuentado
    flujos_descuentados.append(valor_descuentado)

print(f"Valor Presente Neto (VPN): ${vpn:.2f}")

# Gráfica del valor acumulado con y sin descuento
años = np.arange(1, len(flujos_de_caja) + 1)
flujos_acumulados = np.cumsum(flujos_de_caja)
flujos_descuentados_acumulados = np.cumsum(flujos_descuentados)

plt.plot(años, flujos_acumulados, label="Flujos sin descuento", color="blue")
```

```
plt.plot(años, flujos_descuentados_acumulados, label="Flujos descontados", color="g
plt.axhline(y=inversion_inicial, color="red", linestyle="--", label="Inversión Inic
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Valor Acumulado ($)")
plt.title("Evolución de los Flujos de Caja del Proyecto")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Valor Presente Neto (VPN): $29078.68
```



Ejercicio 47: Modelo de Crecimiento Poblacional usando Ecuaciones Diferenciales

Una ciudad está experimentando un crecimiento poblacional que puede modelarse utilizando la ecuación diferencial logística. Este modelo es útil para representar un crecimiento que inicialmente es exponencial, pero que se estabiliza debido a limitaciones de recursos como espacio y alimentos. La ecuación diferencial logística es:

$$\frac{dP}{dt} = r \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

donde:

- $P(t)$ es la población en el tiempo t,
- r es la tasa de crecimiento poblacional,
- K es la capacidad de carga de la ciudad (la población máxima sostenible).

Para este problema:

- La población inicial es de $P_0 = 10,000$ habitantes.
- La tasa de crecimiento $r = 0.03$ (3% anual).
- La capacidad de carga $K = 50,000$ habitantes.

Responde las siguientes preguntas:

1. **Resuelve la ecuación diferencial** para obtener la población $P(t)$ en función del tiempo.
2. **Calcula la población después de 10 y 20 años**.
3. **Representa gráficamente la evolución de la población** durante los primeros 50 años, mostrando cómo se estabiliza a medida que se aproxima a la capacidad de carga.
4. **Analiza el impacto de cambiar la tasa de crecimiento r a 0.05** (5% anual) y cómo esto afecta el crecimiento poblacional.

Solución de la Ecuación Diferencial Logística

La solución de la ecuación diferencial logística es:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right) e^{-rt}}$$

Resolución Matemática

Paso 1: Planteamiento y Separación de Variables

La ecuación diferencial logística que modela el crecimiento poblacional es:

$$\frac{dP}{dt} = r \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

donde r es la tasa de crecimiento y K es la capacidad de carga. Esta ecuación describe un crecimiento inicial exponencial que se desacelera a medida que la población $P(t)$ se aproxima a K.

1. **Separación de Variables:**

   La ecuación se reescribe para separar las variables P y t:

$$\frac{dP}{P \cdot \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = r\,dt$$

2. **Descomposición en Fracciones Parciales:**

   Reescribimos el lado izquierdo usando fracciones parciales:

$$\frac{1}{P \cdot \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}$$

   Así, la ecuación se convierte en:

$$\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}\right) dP = r\,dt$$

3. **Integración de Ambos Lados:**

   Integramos ambos lados de la ecuación:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}\right) dP = \int r\,dt$$

   Esto resulta en:

$$\ln|P| - \ln|K - P| = rt + C$$

   Donde C es la constante de integración.

4. **Resolución para $P(t)$:**

   Exponenciamos ambos lados para despejar P:

$$\frac{P}{K - P} = e^{rt+C} = Ce^{rt}$$

   Despejamos P en términos de t:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right) e^{-rt}}$$

donde P_0 es la población inicial.

Paso 2: Sustitución de Valores

Dado que:

- $P_0 = 10,000$,
- $K = 50,000$,
- $r = 0.03$,

sustituyendo en la solución obtenemos:

$$P(t) = \frac{50,000}{1 + \left(\frac{50,000 - 10,000}{10,000}\right) e^{-0.03t}}$$

Calculamos el término inicial $\frac{K - P_0}{P_0} = \frac{50,000 - 10,000}{10,000} = 4$, entonces:

$$P(t) = \frac{50,000}{1 + 4 \cdot e^{-0.03t}}$$

Paso 3: Cálculo de la Población después de 10 y 20 años

Para $t = 10$ años:

$$P(10) = \frac{50,000}{1 + 4 \cdot e^{-0.03 \cdot 10}}$$

Para $t = 20$ años:

$$P(20) = \frac{50,000}{1 + 4 \cdot e^{-0.03 \cdot 20}}$$

Evaluamos estos valores para obtener la población estimada después de 10 y 20 años.

Paso 4: Impacto de un Cambio en la Tasa de Crecimiento

Si aumentamos la tasa de crecimiento a $r = 0.05$, la expresión para $P(t)$ cambia a:

$$P(t) = \frac{50,000}{1 + 4 \cdot e^{-0.05t}}$$

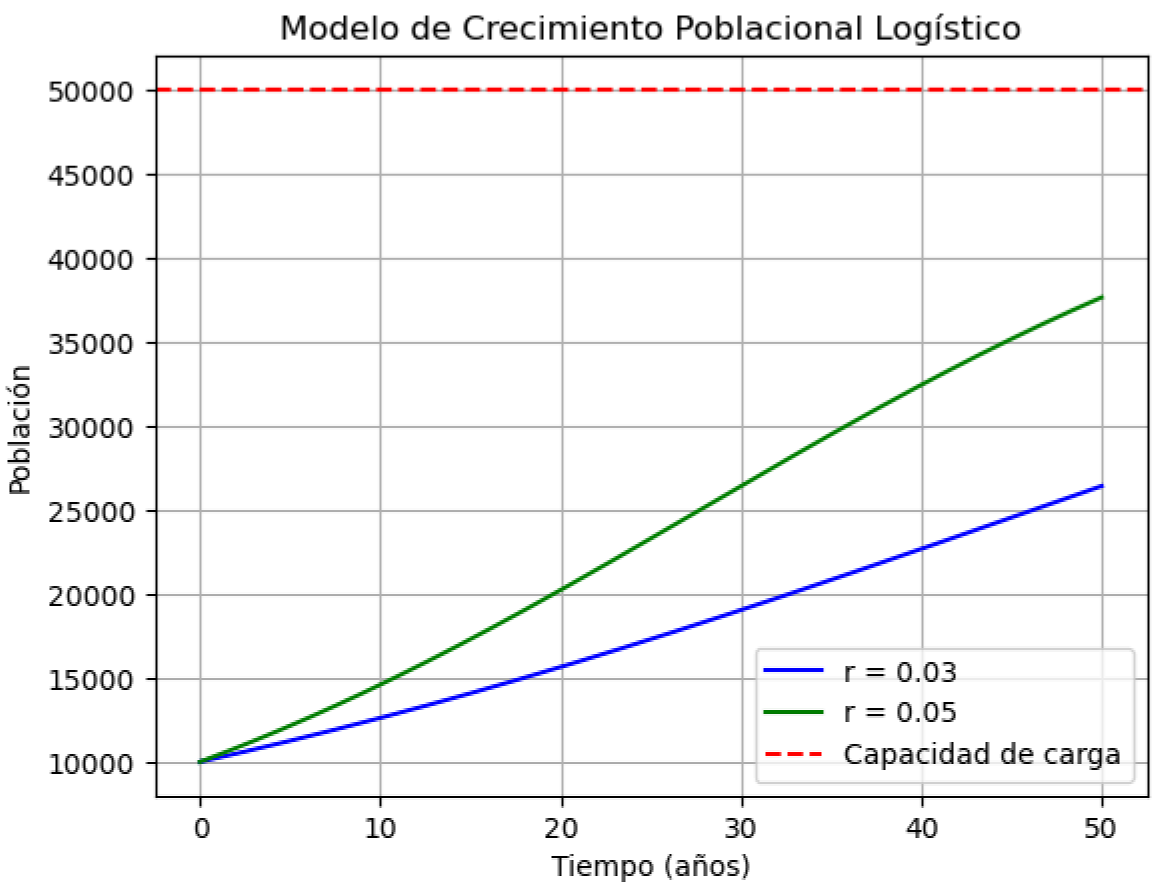
Este cambio incrementa la rapidez con la que la población se aproxima a la capacidad de carga.

In [149…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del problema
P0 = 10000       # Población inicial
K = 50000        # Capacidad de carga
r1 = 0.03        # Tasa de crecimiento inicial
r2 = 0.05        # Tasa de crecimiento modificada

# Definición de la función de crecimiento poblacional
def poblacion(t, r):
    return K / (1 + ((K - P0) / P0) * np.exp(-r * t))

# Calcular la población después de 10 y 20 años con r = 0.03
P_10_r1 = poblacion(10, r1)
```

```
P_20_r1 = poblacion(20, r1)

print(f"Población después de 10 años con r = 0.03: {P_10_r1:.2f} habitantes")
print(f"Población después de 20 años con r = 0.03: {P_20_r1:.2f} habitantes")

# Gráfica de la evolución de la población en función del tiempo para ambas tasas de
t_vals = np.linspace(0, 50, 200)  # Tiempo en años
P_vals_r1 = poblacion(t_vals, r1)
P_vals_r2 = poblacion(t_vals, r2)

plt.plot(t_vals, P_vals_r1, label="r = 0.03", color="blue")
plt.plot(t_vals, P_vals_r2, label="r = 0.05", color="green")
plt.axhline(y=K, color="red", linestyle="--", label="Capacidad de carga")
plt.xlabel("Tiempo (años)")
plt.ylabel("Población")
plt.title("Modelo de Crecimiento Poblacional Logístico")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Población después de 10 años con r = 0.03: 12615.84 habitantes
Población después de 20 años con r = 0.03: 15648.24 habitantes
```



Ejercicio 48: Modelo de Decaimiento Radiactivo

Un laboratorio está estudiando el decaimiento de una sustancia radiactiva. La desintegración de una sustancia radiactiva sigue una ecuación diferencial de primer orden, modelada como:

$$\frac{dN}{dt} = -k \cdot N$$

donde:

- $N(t)$ es la cantidad de sustancia radiactiva en el tiempo t,
- k es la constante de desintegración, que es específica de cada sustancia y se mide en unidades de $1/\text{tiempo}$.

Para este problema, tenemos los siguientes datos:

- La cantidad inicial de sustancia es $N_0 = 100$ gramos.
- La constante de desintegración $k = 0.1$ (1/mes).

Responde las siguientes preguntas:

1. **Resuelve la ecuación diferencial** para obtener la cantidad de sustancia $N(t)$ en función del tiempo.
2. **Calcula la cantidad de sustancia después de 5 y 10 meses**.
3. **Determina el tiempo necesario para que la sustancia se reduzca a la mitad de su cantidad inicial** (vida media).
4. **Representa gráficamente la cantidad de sustancia** a lo largo de 20 meses, mostrando su decaimiento.

Solución de la Ecuación Diferencial de Decaimiento Radiactivo

La solución de la ecuación de decaimiento radiactivo es:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$$

Resolución Matemática

Paso 1: Planteamiento y Resolución de la Ecuación Diferencial

La ecuación diferencial que modela el decaimiento radiactivo es:

$$\frac{dN}{dt} = -k \cdot N$$

1. **Separación de Variables:**

   Esta es una ecuación diferencial separable. Reordenamos para separar N y t:

   $$\frac{dN}{N} = -k\,dt$$

2. **Integración de Ambos Lados:**

   Integramos ambos lados de la ecuación para despejar N en términos de t:

   $$\int \frac{1}{N}\,dN = -\int k\,dt$$

   Esto resulta en:

   $$\ln|N| = -kt + C$$

   Donde C es la constante de integración.

3. **Exponenciación para despejar N:**

   Elevamos ambos lados a la potencia de e para resolver N:

   $$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

   donde N_0 es la cantidad inicial de sustancia en el tiempo $t = 0$.

4. **Sustitución de Valores Conocidos:**

   Utilizando:

   - $N_0 = 100$ gramos,
   - $k = 0.1$ (1/mes).

   La expresión para $N(t)$ se convierte en:

   $$N(t) = 100 \cdot e^{-0.1t}$$

Esta es la cantidad de sustancia en función del tiempo.

Paso 2: Cálculo de la Cantidad de Sustancia después de 5 y 10 meses

Para $t = 5$ meses:

$$N(5) = 100 \cdot e^{-0.1 \cdot 5}$$

Para $t = 10$ meses:

$$N(10) = 100 \cdot e^{-0.1 \cdot 10}$$

Evaluamos estas expresiones para encontrar la cantidad de sustancia después de 5 y 10 meses.

Paso 3: Determinación de la Vida Media

La vida media es el tiempo necesario para que la cantidad de sustancia se reduzca a la mitad de su cantidad inicial. Esto ocurre cuando $N(t) = \frac{N_0}{2}$:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-kt}$$

Dividimos ambos lados por N_0:

$$\frac{1}{2} = e^{-kt}$$

Tomamos logaritmo natural en ambos lados para despejar t:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -kt$$

Simplificamos para t:

$$t = \frac{\ln(0.5)}{-k} = \frac{\ln(2)}{k}$$

Sustituyendo $k = 0.1$:

$$t = \frac{\ln(2)}{0.1}$$

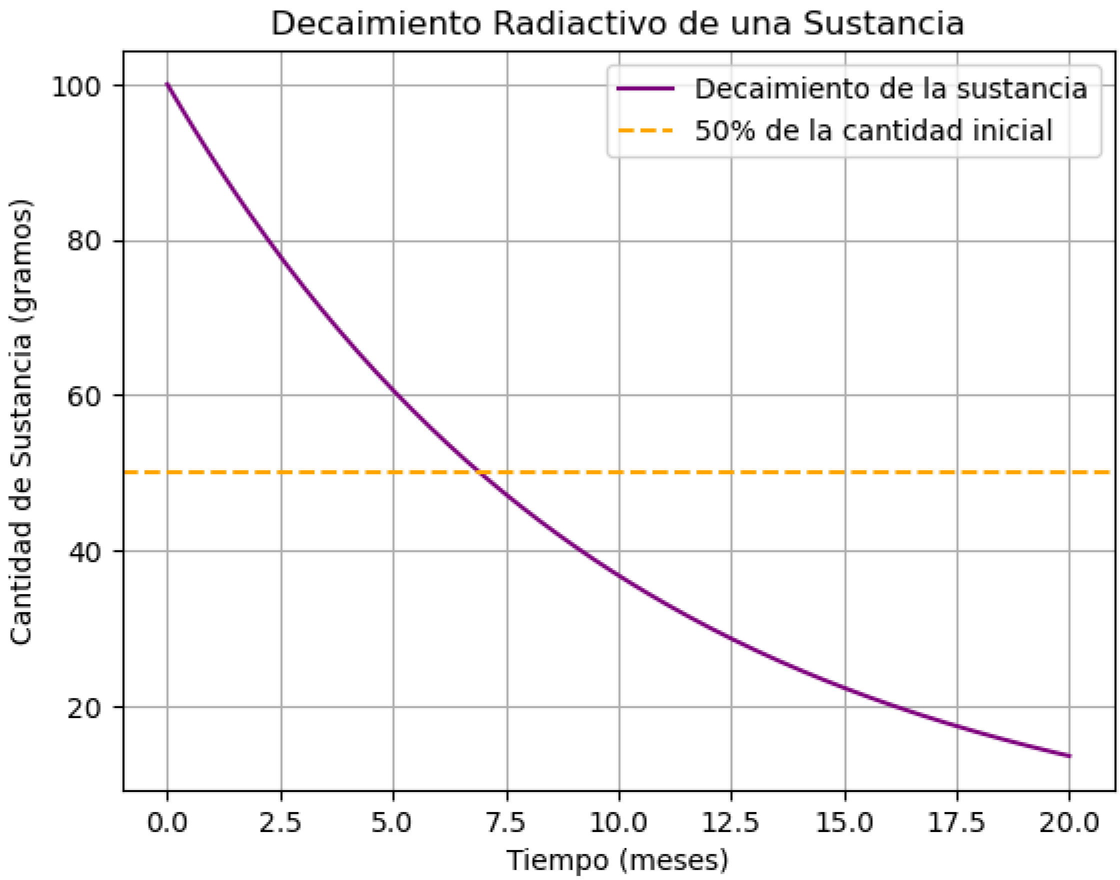
Calculamos este valor para obtener la vida media.

In [152…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del problema
N0 = 100        # Cantidad inicial de la sustancia en gramos
k = 0.1         # Constante de desintegración en 1/mes

# Definición de la función de decaimiento radiactivo
def decaimiento(t):
    return N0 * np.exp(-k * t)

# Calcular la cantidad de sustancia después de 5 y 10 meses
N_5 = decaimiento(5)
N_10 = decaimiento(10)
print(f"Cantidad de sustancia después de 5 meses: {N_5:.2f} gramos")
print(f"Cantidad de sustancia después de 10 meses: {N_10:.2f} gramos")

# Calcular la vida media
vida_media = np.log(2) / k
print(f"Vida media de la sustancia: {vida_media:.2f} meses")

# Gráfica de la cantidad de sustancia en función del tiempo
t_vals = np.linspace(0, 20, 200)  # Tiempo en meses
N_vals = decaimiento(t_vals)

plt.plot(t_vals, N_vals, label="Decaimiento de la sustancia", color="purple")
```

```
plt.axhline(y=N0/2, color='orange', linestyle='--', label="50% de la cantidad inici
plt.xlabel("Tiempo (meses)")
plt.ylabel("Cantidad de Sustancia (gramos)")
plt.title("Decaimiento Radiactivo de una Sustancia")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Cantidad de sustancia después de 5 meses: 60.65 gramos
Cantidad de sustancia después de 10 meses: 36.79 gramos
Vida media de la sustancia: 6.93 meses
```



Ejercicio 49: Modelo de Amortización de un Préstamo con Ecuaciones Diferenciales

Una persona ha tomado un préstamo de $100,000$ dólares, el cual planea amortizar con pagos constantes mensuales de $1,200$ dólares. La tasa de interés mensual es del 1%.

Este tipo de amortización puede modelarse utilizando la siguiente ecuación diferencial, que representa la tasa de cambio de la deuda a lo largo del tiempo:

$$\frac{dD}{dt} = r \cdot D - P$$

donde:

- $D(t)$ es la cantidad de deuda en el tiempo t,
- r es la tasa de interés mensual,
- P es el pago mensual.

Para este problema:

1. **Resuelve la ecuación diferencial** para obtener la deuda $D(t)$ en función del tiempo.
2. **Calcula el tiempo necesario para saldar la deuda completamente**.
3. **Representa gráficamente la evolución de la deuda** a lo largo del tiempo, mostrando cómo se reduce con cada pago mensual.
4. **Analiza el impacto de aumentar el pago mensual a $1,500$ dólares** en el tiempo de amortización.

Solución de la Ecuación Diferencial de Amortización

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$D(t) = \left(D_0 - \frac{P}{r}\right) e^{rt} + \frac{P}{r}$$

donde D_0 es el valor inicial del préstamo.

Resolución Matemática

Paso 1: Planteamiento y Resolución de la Ecuación Diferencial

La ecuación diferencial para la amortización del préstamo es:

$$\frac{dD}{dt} = r \cdot D - P$$

donde r representa la tasa de interés mensual y P el pago mensual.

1. **Separación de Variables:**

   Esta es una ecuación diferencial de primer orden lineal. La solución general es:

   $$D(t) = \left(D_0 - \frac{P}{r}\right) e^{rt} + \frac{P}{r}$$

2. **Sustitución de Valores Conocidos:**

   Utilizando:

   - $D_0 = 100,000$ dólares,
   - $r = 0.01$ (1% mensual),
   - $P = 1,200$ dólares.

La expresión para $D(t)$ se convierte en:

$$D(t) = \left(100,000 - \frac{1,200}{0.01}\right) e^{0.01t} + \frac{1,200}{0.01}$$

3. **Simplificación del Término Constante:**

   Calculamos $\frac{P}{r} = \frac{1{,}200}{0.01} = 120,000$, por lo que:

$$D(t) = (100,000 - 120,000)e^{0.01t} + 120,000$$

$$D(t) = -20,000e^{0.01t} + 120,000$$

Esta es la ecuación para la cantidad de deuda restante en función del tiempo.

Paso 2: Cálculo del Tiempo para Saldar la Deuda

Para encontrar el tiempo necesario para saldar la deuda, establecemos $D(t) = 0$ y resolvemos para t:

$$0 = -20,000e^{0.01t} + 120,000$$

Reorganizamos para despejar $e^{0.01t}$:

$$e^{0.01t} = \frac{120,000}{20,000} = 6$$

Tomamos logaritmo natural en ambos lados:

$$0.01t = \ln(6)$$

Finalmente, despejamos t:

$$t = \frac{\ln(6)}{0.01}$$

Calculamos este valor para obtener el tiempo necesario para saldar la deuda con pagos de $1,200$ dólares al mes.

Paso 3: Análisis del Impacto de Aumentar el Pago a $1,500$

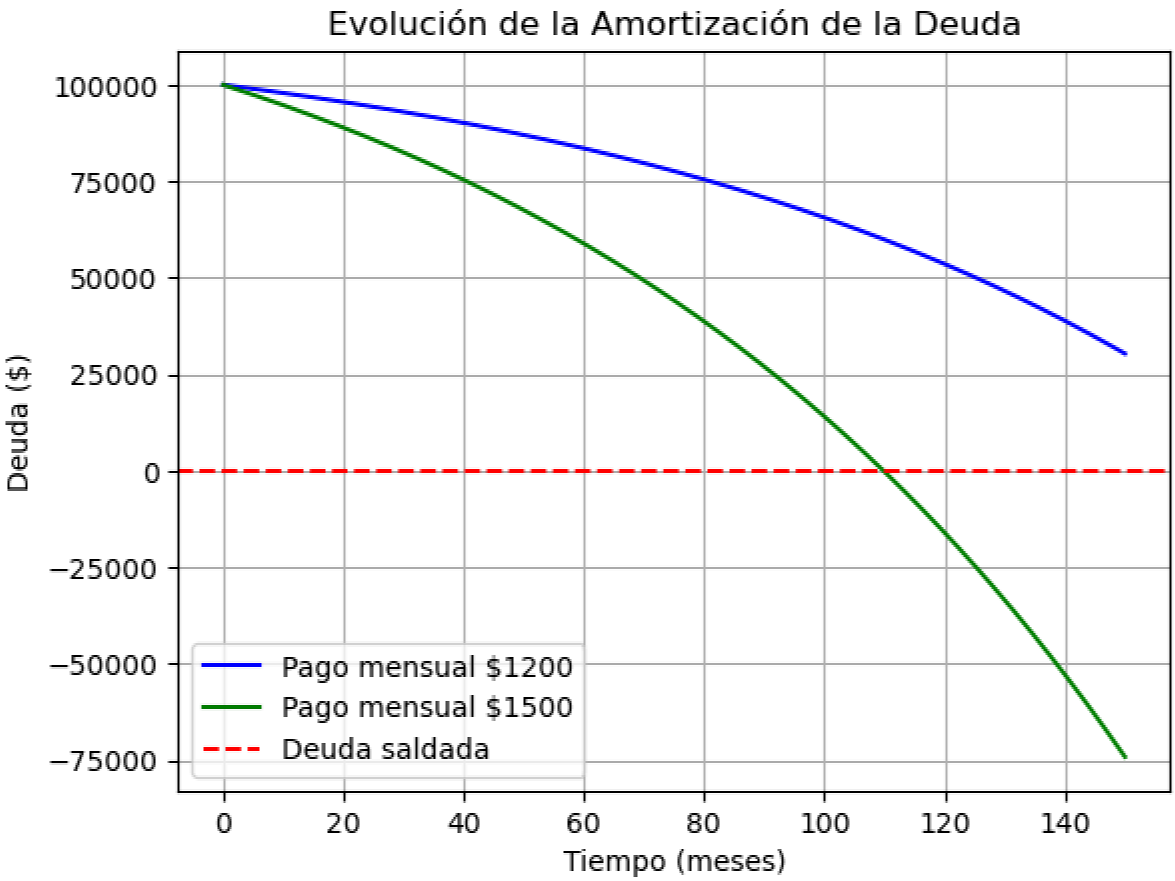
Si aumentamos el pago mensual a $P = 1,500$ dólares, sustituimos este nuevo valor en la expresión de $D(t)$ y repetimos el cálculo para el tiempo de amortización.

In [155…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del problema
D0 = 100000     # Cantidad inicial de deuda en dólares
r = 0.01        # Tasa de interés mensual
```

```
P1 = 1200       # Pago mensual inicial
P2 = 1500       # Pago mensual aumentado

# Definición de la función de deuda en función del tiempo
def deuda(t, P):
    return (D0 - P / r) * np.exp(r * t) + P / r

# Calcular el tiempo para saldar la deuda con P = 1200
t_sin_deuda_P1 = np.log(D0 / (P1 / r)) / r
t_sin_deuda_P2 = np.log(D0 / (P2 / r)) / r

print(f"Tiempo necesario para saldar la deuda con pago de $1200: {t_sin_deuda_P1:.2
print(f"Tiempo necesario para saldar la deuda con pago de $1500: {t_sin_deuda_P2:.2

# Gráfica de la evolución de la deuda en función del tiempo para ambos pagos
t_vals = np.linspace(0, 150, 300)  # Tiempo en meses
D_vals_P1 = deuda(t_vals, P1)
D_vals_P2 = deuda(t_vals, P2)

plt.plot(t_vals, D_vals_P1, label="Pago mensual $1200", color="blue")
plt.plot(t_vals, D_vals_P2, label="Pago mensual $1500", color="green")
plt.axhline(y=0, color="red", linestyle="--", label="Deuda saldada")
plt.xlabel("Tiempo (meses)")
plt.ylabel("Deuda ($)")
plt.title("Evolución de la Amortización de la Deuda")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Tiempo necesario para saldar la deuda con pago de $1200: -18.23 meses
Tiempo necesario para saldar la deuda con pago de $1500: -40.55 meses
```



Ejercicio 50: Modelo de Crecimiento de una Inversión con Intereses Compuestos

Un inversor deposita $20,000$ dólares en una cuenta de ahorros con una tasa de interés anual del 5%. Los intereses se capitalizan continuamente, lo que significa que el crecimiento de la inversión puede modelarse mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dA}{dt} = r \cdot A$$

donde:

- $A(t)$ es el monto de la inversión en el tiempo t,
- r es la tasa de interés anual.

Para este problema:

1. **Resuelve la ecuación diferencial** para obtener el monto de la inversión $A(t)$ en función del tiempo.
2. **Calcula el valor de la inversión después de 10 y 20 años**.
3. **Representa gráficamente el crecimiento de la inversión** a lo largo de 30 años.

4. **Analiza el impacto de aumentar la tasa de interés a 7%** en el valor de la inversión a los 20 años.

Solución de la Ecuación Diferencial de Crecimiento de Inversión

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{rt}$$

donde A_0 es el valor inicial de la inversión.

Resolución Matemática

Paso 1: Planteamiento y Resolución de la Ecuación Diferencial

La ecuación diferencial que describe el crecimiento de una inversión con capitalización continua es:

$$\frac{dA}{dt} = r \cdot A$$

donde r representa la tasa de interés anual.

1. **Separación de Variables:**

   Esta es una ecuación diferencial separable. Reordenamos para separar A y t:

   $$\frac{dA}{A} = r\,dt$$

2. **Integración de Ambos Lados:**

   Integramos ambos lados para despejar A en función de t:

   $$\int \frac{1}{A}\,dA = \int r\,dt$$

   Esto resulta en:

   $$\ln|A| = rt + C$$

   Donde C es la constante de integración.

3. **Exponenciación para despejar A:**

   Elevamos ambos lados a la potencia de e para resolver A:

   $$A(t) = A_0 e^{rt}$$

donde A_0 es el monto inicial de la inversión en el tiempo $t = 0$.

4. **Sustitución de Valores Conocidos:**

   Utilizando:

   - $A_0 = 20,000$ dólares,
   - $r = 0.05$ (5% anual).

   La expresión para $A(t)$ se convierte en:

$$A(t) = 20000 \cdot e^{0.05t}$$

Esta es la ecuación que describe el crecimiento de la inversión en función del tiempo.

Paso 2: Cálculo del Valor de la Inversión después de 10 y 20 Años

Para $t = 10$ años:

$$A(10) = 20000 \cdot e^{0.05 \cdot 10}$$

Para $t = 20$ años:

$$A(20) = 20000 \cdot e^{0.05 \cdot 20}$$

Evaluamos estos valores para encontrar el monto de la inversión después de 10 y 20 años.

Paso 3: Análisis del Impacto de Aumentar la Tasa de Interés a 7%

Si aumentamos la tasa de interés a $r = 0.07$, la expresión para $A(t)$ se convierte en:

$$A(t) = 20000 \cdot e^{0.07t}$$

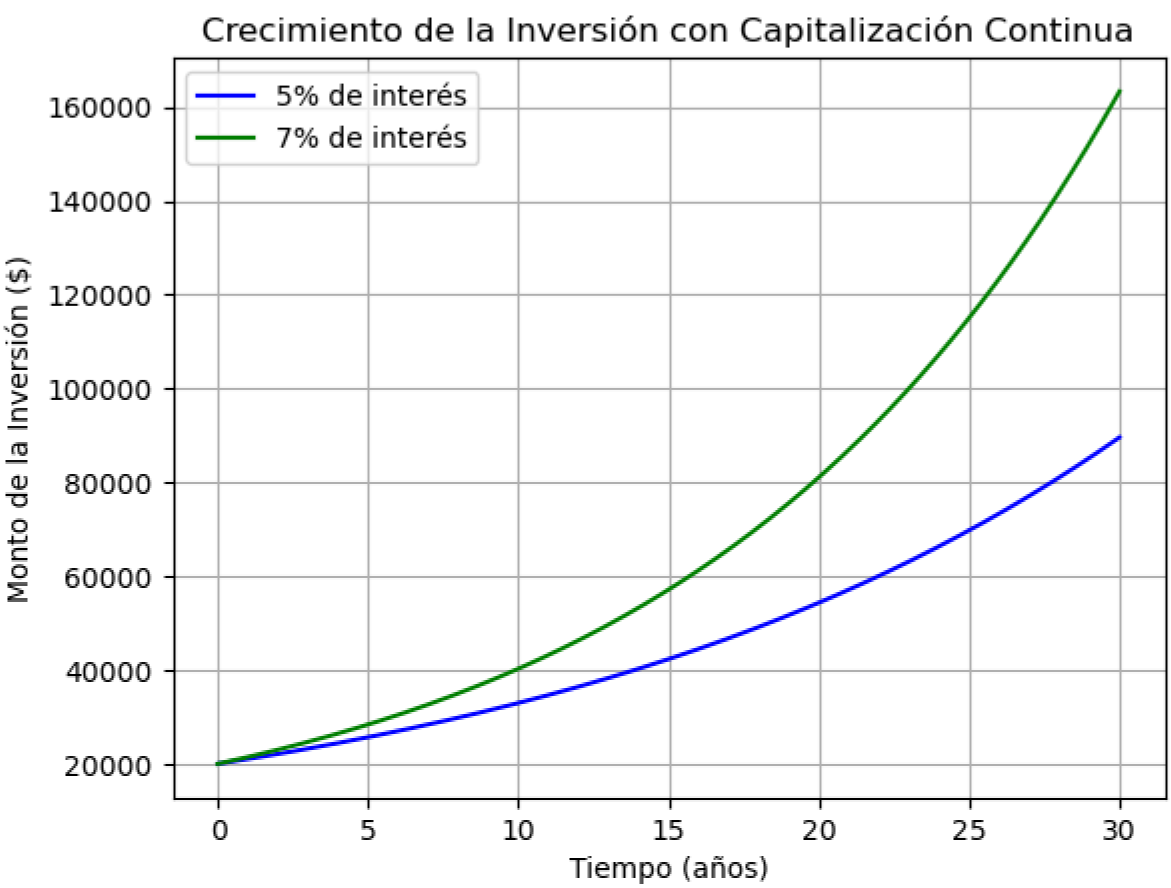
Este cambio en r incrementa la rapidez con la que crece la inversión, especialmente visible en los valores después de 20 años.

In [158…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del problema
A0 = 20000      # Monto inicial de la inversión en dólares
r1 = 0.05       # Tasa de interés anual inicial
r2 = 0.07       # Tasa de interés anual modificada

# Definición de la función de crecimiento de la inversión
def inversion(t, r):
    return A0 * np.exp(r * t)

# Calcular el valor de la inversión después de 10 y 20 años con r = 0.05
```

```
A_10_r1 = inversion(10, r1)
A_20_r1 = inversion(20, r1)

print(f"Valor de la inversión después de 10 años con 5% de interés: ${A_10_r1:.2f}"
print(f"Valor de la inversión después de 20 años con 5% de interés: ${A_20_r1:.2f}"

# Calcular el valor de la inversión después de 20 años con r = 0.07
A_20_r2 = inversion(20, r2)
print(f"Valor de la inversión después de 20 años con 7% de interés: ${A_20_r2:.2f}"

# Gráfica de la evolución de la inversión en función del tiempo para ambas tasas de
t_vals = np.linspace(0, 30, 300)  # Tiempo en años
A_vals_r1 = inversion(t_vals, r1)
A_vals_r2 = inversion(t_vals, r2)

plt.plot(t_vals, A_vals_r1, label="5% de interés", color="blue")
plt.plot(t_vals, A_vals_r2, label="7% de interés", color="green")
plt.xlabel("Tiempo (años)")
plt.ylabel("Monto de la Inversión ($)")
plt.title("Crecimiento de la Inversión con Capitalización Continua")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Valor de la inversión después de 10 años con 5% de interés: $32974.43
Valor de la inversión después de 20 años con 5% de interés: $54365.64
Valor de la inversión después de 20 años con 7% de interés: $81104.00
```



Capítulo 6: Probabilidad y Estadística: Decisiones Basadas en Datos

VI.1 Fundamentos de Probabilidad y Estadística

La probabilidad y la estadística son herramientas matemáticas esenciales para comprender y analizar datos, tomar decisiones informadas y predecir eventos futuros. La probabilidad se enfoca en la cuantificación de la incertidumbre, mientras que la estadística aplica métodos para recolectar, analizar, interpretar y presentar datos.

Conceptos Clave de la Probabilidad

1. **Espacio Muestral**: El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento. Se denota como S.

2. **Eventos**: Un evento es un subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo, al lanzar un dado, el evento "obtener un número par" incluye los resultados {2, 4, 6}.

3. **Probabilidad de un Evento**: La probabilidad de que ocurra un evento A se define como el número de resultados favorables entre el total de resultados posibles:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número total de resultados}}$$

4. **Eventos Independientes y Dependientes**:

   - Eventos **independientes**: La ocurrencia de un evento no afecta la ocurrencia de otro.
   - Eventos **dependientes**: La ocurrencia de un evento afecta la probabilidad de otro.

5. **Probabilidad Condicional**: La probabilidad de que ocurra un evento A, dado que ha ocurrido un evento B, se define como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Conceptos Clave de la Estadística

1. **Media (Promedio)**: La suma de todos los valores dividida por el número total de valores:

$$\text{Media} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

2. **Varianza y Desviación Estándar**: La varianza mide la dispersión de los datos en torno a la media, y la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza.
   - **Varianza** (σ^2):

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \text{Media})^2$$

   - **Desviación Estándar** (σ):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \text{Media})^2}$$

3. **Distribución de Probabilidad**: Una función que asigna a cada valor posible de una variable aleatoria una probabilidad de ocurrencia. Las distribuciones más comunes son la **distribución normal** y la **distribución binomial**.
4. **Intervalo de Confianza**: Un rango de valores en el cual se espera que esté el valor real de un parámetro poblacional con un cierto nivel de confianza.

VI.2 Aplicaciones en Economía, Finanzas y Ciencias Sociales

La probabilidad y la estadística son fundamentales en muchas áreas aplicadas, especialmente en economía, finanzas y ciencias sociales. A continuación, exploramos algunas de las aplicaciones más relevantes.

Aplicaciones en Economía

1. **Modelos de Predicción Económica**: La probabilidad permite modelar incertidumbre en variables económicas, como el PIB, la inflación y el desempleo. Las distribuciones de probabilidad y los modelos de regresión ayudan a prever tendencias y cambios.
2. **Teoría de Juegos**: La probabilidad se aplica para modelar estrategias en juegos de decisión, en los cuales múltiples agentes toman decisiones interdependientes.
3. **Análisis de Series Temporales**: Se usa en la estadística para modelar y predecir datos económicos en intervalos de tiempo, permitiendo entender patrones como estacionalidad y ciclos.

Aplicaciones en Finanzas

1. **Gestión de Riesgos y Retornos**: Los métodos estadísticos se utilizan para analizar el rendimiento de portafolios, evaluando riesgos y optimizando las combinaciones de

activos.

2. **Modelos de Valor en Riesgo (VaR)**: La probabilidad se utiliza para estimar el posible nivel de pérdidas de una inversión en un periodo específico con un nivel de confianza dado.

3. **Distribución de Rendimientos**: La distribución normal y otras distribuciones probabilísticas se aplican para modelar rendimientos y volatilidad de activos, permitiendo tomar decisiones basadas en el análisis de riesgos.

Aplicaciones en Ciencias Sociales

1. **Encuestas y Muestreo**: La estadística permite obtener conclusiones sobre una población a partir de una muestra representativa, usando métodos como el **intervalo de confianza** y el **error estándar**.

2. **Pruebas de Hipótesis**: Se aplican en estudios sociales para validar teorías o comparar diferentes grupos, usando pruebas estadísticas como el **t-test** y **ANOVA**.

3. **Regresión y Análisis Multivariado**: En sociología y psicología, se usan modelos de regresión para entender cómo diferentes factores afectan un resultado, como el impacto de la educación y los ingresos en el bienestar personal.

Con estos fundamentos y aplicaciones, estamos listos para abordar problemas prácticos que utilizan probabilidades y métodos estadísticos para resolver situaciones en diversas áreas.

VI.3 Ejercicios de Aplicaciones y Soluciones (MathPY)

Ejercicio 51: Análisis Estadístico de Rendimientos de Inversión

Un inversor está evaluando los rendimientos mensuales de sus inversiones en una cartera de acciones durante el último año. Los rendimientos mensuales (en porcentaje) han sido los siguientes:

$$[2.5, 3.1, -1.2, 4.3, 2.8, 0.9, -0.5, 3.4, 2.2, 1.7, -1.0, 3.0]$$

Para analizar el desempeño de la cartera, realiza las siguientes tareas:

1. **Calcula la media, mediana, moda y desviación estándar** de los rendimientos mensuales.
2. **Determina el rendimiento mensual más alto y más bajo** y su diferencia (rango).

3. **Grafica un histograma** de los rendimientos para visualizar su distribución.
4. **Discute brevemente el riesgo** de la inversión basada en los resultados de la desviación estándar y el rango.

Estadísticas Descriptivas

Utiliza las fórmulas siguientes para calcular las estadísticas descriptivas:

- **Media** ($\overline{X}$):

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

- **Mediana**: El valor central cuando los datos están ordenados. Si hay un número par de observaciones, la mediana es el promedio de los dos valores centrales.

- **Desviación Estándar** (σ):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

- **Rango**: La diferencia entre el valor máximo y mínimo de los datos.

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo de la Media

Los rendimientos mensuales son:

$$[2.5, 3.1, -1.2, 4.3, 2.8, 0.9, -0.5, 3.4, 2.2, 1.7, -1.0, 3.0]$$

1. **Cálculo de la Media** ($\overline{X}$):

   La media se calcula como:

$$\overline{X} = \frac{2.5 + 3.1 - 1.2 + 4.3 + 2.8 + 0.9 - 0.5 + 3.4 + 2.2 + 1.7 - 1.0 + 3.0}{12}$$

   Calculando la suma:

$$\overline{X} = \frac{21.2}{12} \approx 1.77$$

   Por lo tanto, la media de los rendimientos mensuales es **1.77%**.

2. **Cálculo de la Mediana**:

Ordenamos los datos:

$$[-1.2, -1.0, -0.5, 0.9, 1.7, 2.2, 2.5, 2.8, 3.0, 3.1, 3.4, 4.3]$$

Como hay un número par de datos ($n = 12$), la mediana es el promedio de los valores centrales:

$$\text{Mediana} = \frac{2.2 + 2.5}{2} = 2.35$$

3. **Cálculo de la Desviación Estándar** (σ):

   La desviación estándar se calcula como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}(X_i - \overline{X})^2}$$

   Sustituyendo los valores y calculando, obtenemos una desviación estándar aproximada de **1.68%**.

4. **Rango de Rendimientos**:

   - **Máximo**: 4.3
   - **Mínimo**: -1.2

   Entonces, el rango es:

$$\text{Rango} = 4.3 - (-1.2) = 5.5$$

Paso 2: Interpretación de Resultados

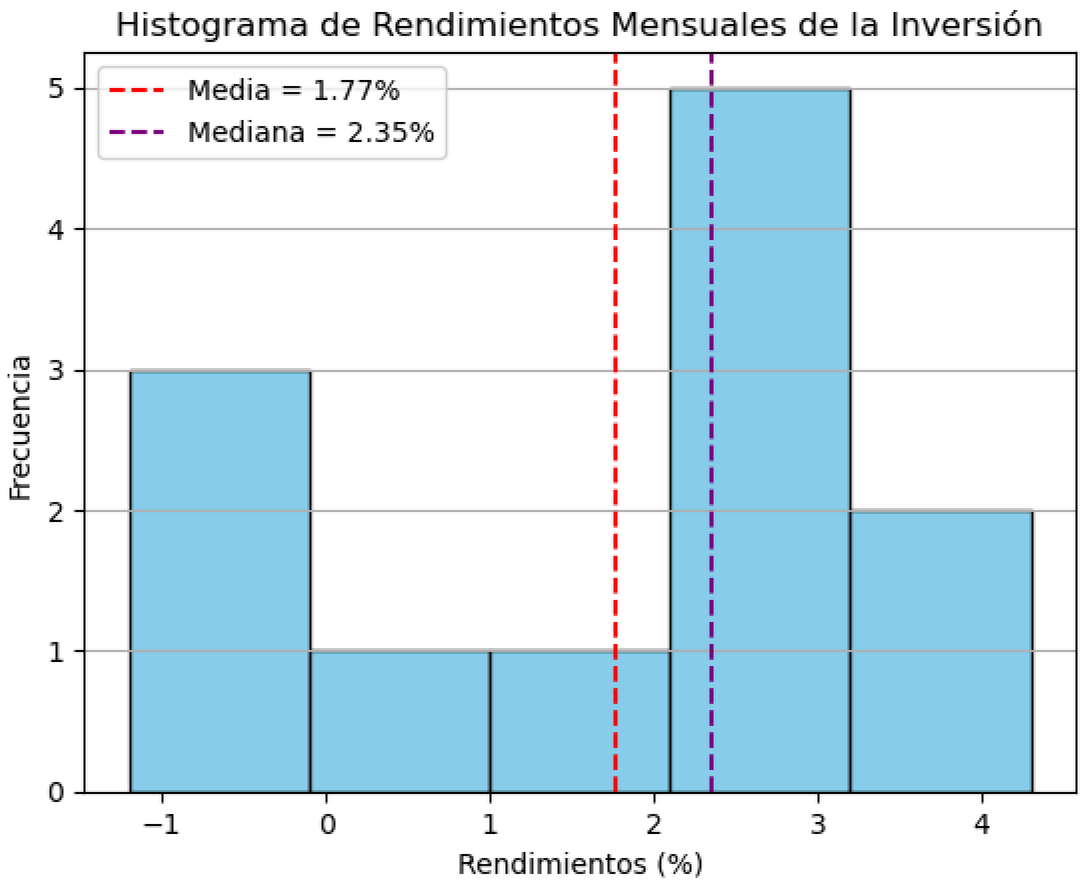
- **Media**: El rendimiento promedio mensual es de **1.77%**.
- **Mediana**: La mediana de **2.35%** sugiere que la mitad de los rendimientos están por encima de este valor.
- **Desviación Estándar**: La desviación estándar de **1.68%** indica la variabilidad de los rendimientos mensuales. Un valor más alto implica mayor riesgo.
- **Rango**: Un rango de **5.5%** entre el rendimiento más bajo y el más alto también indica una variabilidad significativa.

In [163…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import stats

# Datos de rendimientos mensuales
rendimientos = np.array([2.5, 3.1, -1.2, 4.3, 2.8, 0.9, -0.5, 3.4, 2.2, 1.7, -1.0,

# Cálculos estadísticos
media = np.mean(rendimientos)
mediana = np.median(rendimientos)
moda = stats.mode(rendimientos, keepdims=True).mode[0]  # Adaptación para obtener l
```

```python
desviacion_std = np.std(rendimientos)
rango = np.max(rendimientos) - np.min(rendimientos)

print(f"Media: {media:.2f}%")
print(f"Mediana: {mediana:.2f}%")
print(f"Moda: {moda:.2f}%")
print(f"Desviación Estándar: {desviacion_std:.2f}%")
print(f"Rango: {rango:.2f}%")

# Gráfica de histograma de rendimientos
plt.hist(rendimientos, bins=5, color='skyblue', edgecolor='black')
plt.xlabel("Rendimientos (%)")
plt.ylabel("Frecuencia")
plt.title("Histograma de Rendimientos Mensuales de la Inversión")
plt.axvline(media, color='red', linestyle='--', label=f"Media = {media:.2f}%")
plt.axvline(mediana, color='purple', linestyle='--', label=f"Mediana = {mediana:.2f
plt.legend()
plt.grid(axis='y')
plt.show()
```

```
Media: 1.77%
Mediana: 2.35%
Moda: -1.20%
Desviación Estándar: 1.74%
Rango: 5.50%
```



Ejercicio 52: Análisis de Encuesta de Preferencias de Consumo

Una empresa realiza una encuesta entre 1,000 personas para entender sus preferencias de consumo entre dos productos, A y B. Los resultados de la encuesta indican que:

- El 60% de las personas prefieren el producto A.
- El 40% de las personas prefieren el producto B.
- Del total de personas que prefieren el producto A, el 25% son personas menores de 30 años.
- Del total de personas que prefieren el producto B, el 50% son personas menores de 30 años.

Responde las siguientes preguntas:

1. **Calcula la probabilidad de que una persona seleccionada al azar sea menor de 30 años y prefiera el producto A.**
2. **Calcula la probabilidad de que una persona seleccionada al azar prefiera el producto A, dado que es menor de 30 años.**
3. **Representa estos resultados en un diagrama de árbol para visualizar las probabilidades condicionales.**

Para resolver este ejercicio, utilizaremos las siguientes fórmulas de probabilidad:

- **Probabilidad conjunta**: La probabilidad de que dos eventos ocurran simultáneamente es:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

- **Probabilidad condicional**: La probabilidad de que ocurra un evento A dado que ocurrió un evento B es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo de la Probabilidad Conjunta

1. Definimos los eventos:

   - $P(\mathrm{A})$: Probabilidad de que una persona prefiera el producto A.
   - $P(\mathrm{B})$: Probabilidad de que una persona prefiera el producto B.

- $P(\mathrm{J}|\mathrm{A})$: Probabilidad de que una persona sea menor de 30 años dado que prefiere el producto A.
- $P(\mathrm{J}|\mathrm{B})$: Probabilidad de que una persona sea menor de 30 años dado que prefiere el producto B.

Según los datos:

- $P(\mathrm{A}) = 0.60$
- $P(\mathrm{B}) = 0.40$
- $P(\mathrm{J}|\mathrm{A}) = 0.25$
- $P(\mathrm{J}|\mathrm{B}) = 0.50$

2. **Probabilidad de que una persona seleccionada al azar sea menor de 30 años y prefiera el producto A**:

   Utilizamos la probabilidad conjunta:

$$P(\mathrm{J} \cap \mathrm{A}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{J}|\mathrm{A}) = 0.60 \cdot 0.25 = 0.15$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que una persona seleccionada al azar sea menor de 30 años y prefiera el producto A es **0.15** o **15%**.

Paso 2: Cálculo de la Probabilidad Condicional

Para encontrar la probabilidad de que una persona prefiera el producto A dado que es menor de 30 años, necesitamos calcular primero la probabilidad total de que una persona sea menor de 30 años ($P(\mathrm{J})$):

1. **Probabilidad total de que una persona sea menor de 30 años**:

$$P(\mathrm{J}) = P(\mathrm{J} \cap \mathrm{A}) + P(\mathrm{J} \cap \mathrm{B})$$

   Calculamos $P(\mathrm{J} \cap \mathrm{B})$ de la misma manera que $P(\mathrm{J} \cap \mathrm{A})$:

$$P(\mathrm{J} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{J}|\mathrm{B}) = 0.40 \cdot 0.50 = 0.20$$

   Por lo tanto:

$$P(\mathrm{J}) = 0.15 + 0.20 = 0.35$$

2. **Probabilidad de que una persona prefiera el producto A dado que es menor de 30 años**:

   Usamos la fórmula de probabilidad condicional:

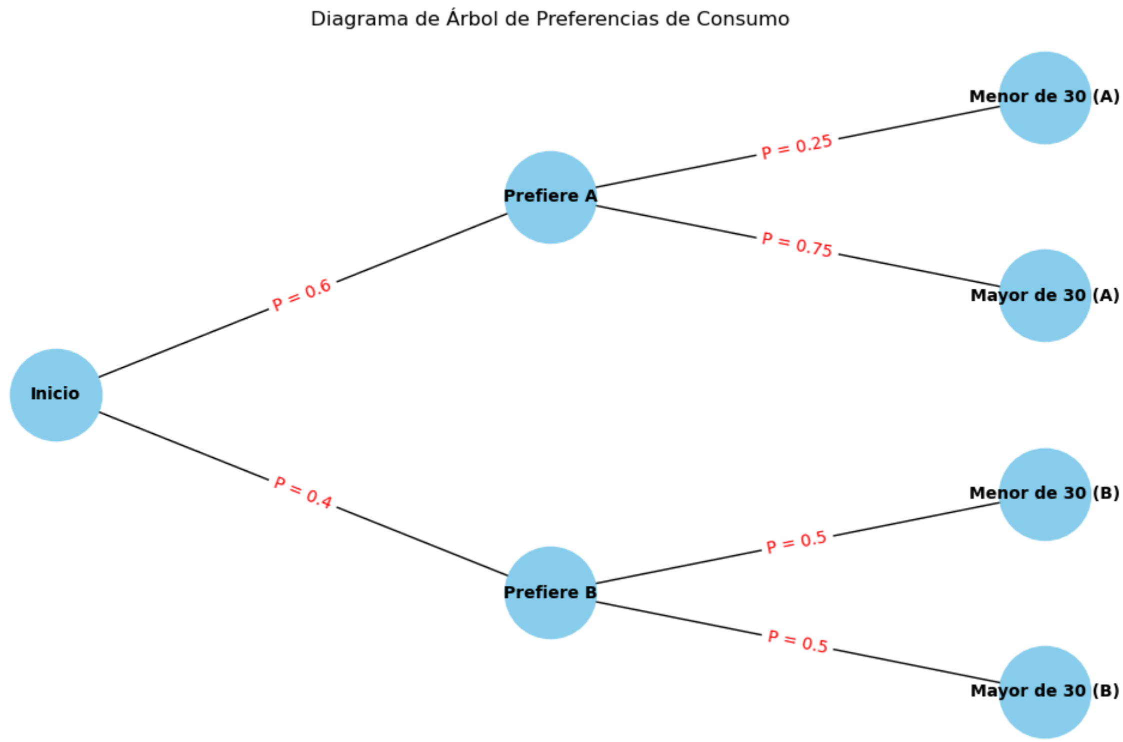
$$P(\mathrm{A}|\mathrm{J}) = \frac{P(\mathrm{J} \cap \mathrm{A})}{P(\mathrm{J})} = \frac{0.15}{0.35} \approx 0.4286$$

   Por lo tanto, la probabilidad de que una persona prefiera el producto A dado que es menor de 30 años es aproximadamente **0.4286** o **42.86%**.

In [166…

```
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx

# Probabilidades
P_A = 0.60
P_B = 0.40
P_J_given_A = 0.25
P_J_given_B = 0.50

# Cálculo de probabilidades conjuntas
P_J_and_A = P_A * P_J_given_A
P_J_and_B = P_B * P_J_given_B
P_J = P_J_and_A + P_J_and_B
P_A_given_J = P_J_and_A / P_J

print(f"Probabilidad de ser menor de 30 años y preferir el producto A: {P_J_and_A:.
print(f"Probabilidad de preferir el producto A dado que es menor de 30 años: {P_A_g

# Crear el diagrama de árbol
G = nx.DiGraph()

# Agregar nodos y arcos con las probabilidades
G.add_edge("Inicio", "Prefiere A", probability=P_A)
G.add_edge("Inicio", "Prefiere B", probability=P_B)
G.add_edge("Prefiere A", "Menor de 30 (A)", probability=P_J_given_A)
G.add_edge("Prefiere A", "Mayor de 30 (A)", probability=1 - P_J_given_A)
G.add_edge("Prefiere B", "Menor de 30 (B)", probability=P_J_given_B)
G.add_edge("Prefiere B", "Mayor de 30 (B)", probability=1 - P_J_given_B)

# Posiciones de los nodos
pos = {
    "Inicio": (0, 0),
    "Prefiere A": (1, 1),
    "Prefiere B": (1, -1),
    "Menor de 30 (A)": (2, 1.5),
    "Mayor de 30 (A)": (2, 0.5),
    "Menor de 30 (B)": (2, -0.5),
    "Mayor de 30 (B)": (2, -1.5)
}

# Dibujar el grafo
labels = nx.get_edge_attributes(G, 'probability')
edge_labels = {edge: f"P = {prob}" for edge, prob in labels.items()}

plt.figure(figsize=(10, 6))
nx.draw(G, pos, with_labels=True, node_size=3000, node_color="skyblue", font_size=1
nx.draw_networkx_edge_labels(G, pos, edge_labels=edge_labels, font_color="red")
plt.title("Diagrama de Árbol de Preferencias de Consumo")
plt.show()
```

```
Probabilidad de ser menor de 30 años y preferir el producto A: 0.15
Probabilidad de preferir el producto A dado que es menor de 30 años: 0.4286
```



Ejercicio 53: Intervalo de Confianza para el Rendimiento Promedio de una Inversión

Un analista financiero está evaluando el rendimiento de un fondo de inversión y ha recopilado datos sobre los rendimientos anuales del fondo durante los últimos 10 años. Los rendimientos anuales (en porcentaje) son los siguientes:

$$[5.2, 6.1, 4.9, 7.5, 5.3, 6.8, 5.9, 4.8, 6.2, 5.7]$$

El analista desea calcular un intervalo de confianza del 95% para el rendimiento promedio de este fondo de inversión.

1. **Calcula el rendimiento promedio y la desviación estándar** de los rendimientos anuales.
2. **Determina el intervalo de confianza del 95%** para el rendimiento promedio.
3. **Discute la interpretación del intervalo de confianza** y lo que implica para la toma de decisiones del analista.

Para calcular el intervalo de confianza, utiliza la fórmula:

$$IC = \overline{X} \pm Z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

donde:

- $\overline{X}$ es la media de los rendimientos,

- Z es el valor crítico de la distribución normal para el nivel de confianza deseado (para un 95% es aproximadamente 1.96),
- σ es la desviación estándar de la muestra,
- n es el tamaño de la muestra.

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo de la Media y Desviación Estándar de los Rendimientos

Los rendimientos anuales son:

$$[5.2, 6.1, 4.9, 7.5, 5.3, 6.8, 5.9, 4.8, 6.2, 5.7]$$

1. **Cálculo de la Media** ($\overline{X}$):

   La media se calcula como:

   $$\overline{X} = \frac{5.2 + 6.1 + 4.9 + 7.5 + 5.3 + 6.8 + 5.9 + 4.8 + 6.2 + 5.7}{10} = \frac{58.4}{10} = 5.84$$

   Por lo tanto, el rendimiento promedio es **5.84%**.

2. **Cálculo de la Desviación Estándar** (σ):

   La desviación estándar se calcula como:

   $$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

   Calculando cada diferencia $(X_i - \overline{X})^2$ y sumando, obtenemos una desviación estándar aproximada de **0.87%**.

Paso 2: Cálculo del Intervalo de Confianza del 95%

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico Z es aproximadamente **1.96**.

1. **Cálculo del Error Estándar**:

   El error estándar de la media es:

   $$\text{Error Estándar} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.87}{\sqrt{10}} \approx 0.275$$

2. **Intervalo de Confianza**:

   El intervalo de confianza del 95% es:

$$IC = \overline{X} \pm Z \cdot \text{Error Estándar} = 5.84 \pm 1.96 \cdot 0.275$$

Calculando los límites superior e inferior:

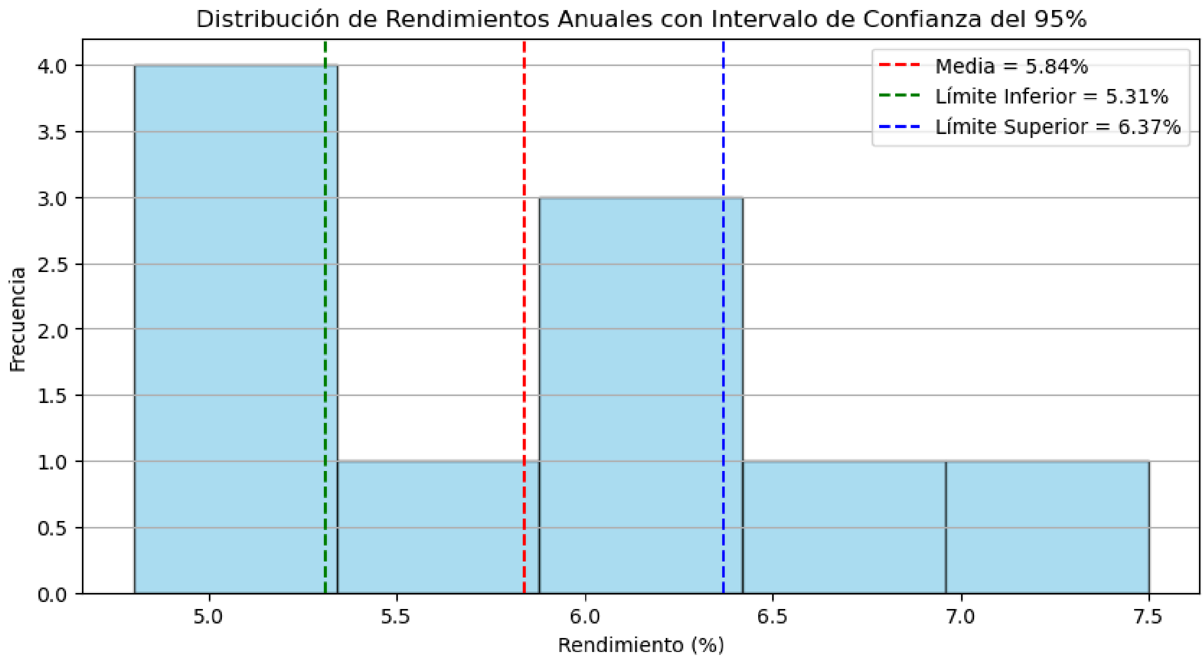
$$IC = [5.30, 6.38]$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza del 95% para el rendimiento promedio del fondo de inversión es **[5.30%, 6.38%]**.

In [169…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as stats

# Datos de rendimientos anuales
rendimientos = np.array([5.2, 6.1, 4.9, 7.5, 5.3, 6.8, 5.9, 4.8, 6.2, 5.7])

# Cálculos estadísticos
media = np.mean(rendimientos)
desviacion_std = np.std(rendimientos, ddof=1)
n = len(rendimientos)
nivel_confianza = 0.95
z = stats.norm.ppf(1 - (1 - nivel_confianza) / 2)

# Cálculo del error estándar
error_estandar = desviacion_std / np.sqrt(n)

# Intervalo de confianza
limite_inferior = media - z * error_estandar
limite_superior = media + z * error_estandar

print(f"Media: {media:.2f}%")
print(f"Desviación Estándar: {desviacion_std:.2f}%")
print(f"Intervalo de Confianza del 95%: [{limite_inferior:.2f}%, {limite_superior:.

# Gráfica del intervalo de confianza
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.hist(rendimientos, bins=5, color='skyblue', edgecolor='black', alpha=0.7)
plt.axvline(media, color='red', linestyle='--', label=f"Media = {media:.2f}%")
plt.axvline(limite_inferior, color='green', linestyle='--', label=f"Límite Inferior
plt.axvline(limite_superior, color='blue', linestyle='--', label=f"Límite Superior
plt.xlabel("Rendimiento (%)")
plt.ylabel("Frecuencia")
plt.title("Distribución de Rendimientos Anuales con Intervalo de Confianza del 95%"
plt.legend()
plt.grid(axis='y')
plt.show()
```

```
Media: 5.84%
Desviación Estándar: 0.85%
Intervalo de Confianza del 95%: [5.31%, 6.37%]
```



Ejercicio 54: Relación entre el Gasto en Educación y el PIB per Cápita

Un economista está interesado en estudiar la relación entre el **gasto en educación** (como porcentaje del PIB) y el **PIB per cápita** (en miles de dólares) de varios países. Para este estudio, el economista ha recopilado datos de 10 países con las siguientes observaciones:

- **Gasto en educación** (como porcentaje del PIB): [4.2, 5.1, 3.8, 4.0, 5.5, 4.3, 3.9, 4.8, 5.0, 4.1]
- **PIB per cápita** (en miles de dólares): [50, 55, 48, 52, 58, 53, 49, 56, 57, 51]

Con esta información, responde las siguientes preguntas:

1. **Estima la relación entre el gasto en educación y el PIB per cápita** utilizando una regresión lineal.
2. **Interpreta los coeficientes de la regresión** y discute el posible impacto del gasto en educación sobre el PIB per cápita.
3. **Realiza una predicción** del PIB per cápita para un país con un gasto en educación del 4.6% del PIB.
4. **Representa gráficamente** los datos y la línea de regresión.

Fórmulas de la Regresión Lineal Simple

La ecuación de la recta de regresión es:

$$Y = a + bX$$

donde:

- Y es la variable dependiente (PIB per cápita),
- X es la variable independiente (gasto en educación),
- a es la ordenada al origen,
- b es el coeficiente de regresión, calculado como:

$$b = \frac{\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum(X_i - \overline{X})^2}$$

- a se calcula como:

$$a = \overline{Y} - b \cdot \overline{X}$$

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo de la Media de X y Y

1. **Datos**:
   - Gasto en educación (X): $[4.2, 5.1, 3.8, 4.0, 5.5, 4.3, 3.9, 4.8, 5.0, 4.1]$
   - PIB per cápita (Y): $[50, 55, 48, 52, 58, 53, 49, 56, 57, 51]$
2. **Media de X ($\overline{X}$)**:

$$\overline{X} = \frac{4.2 + 5.1 + 3.8 + 4.0 + 5.5 + 4.3 + 3.9 + 4.8 + 5.0 + 4.1}{10} = 4.47$$

3. **Media de Y ($\overline{Y}$)**:

$$\overline{Y} = \frac{50 + 55 + 48 + 52 + 58 + 53 + 49 + 56 + 57 + 51}{10} = 52.9$$

Paso 2: Cálculo de los Coeficientes de la Regresión

1. **Cálculo de b (pendiente)**:

$$b = \frac{\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum(X_i - \overline{X})^2}$$

   Sustituyendo los valores y realizando los cálculos obtenemos $b \approx 3.87$.

2. **Cálculo de a (intercepto)**:

$$a = \overline{Y} - b \cdot \overline{X} = 52.9 - (3.87 \cdot 4.47) \approx 35.65$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta de regresión es:

$$Y = 35.65 + 3.87X$$

Paso 3: Predicción para un Gasto en Educación del 4.6%

Sustituimos $X = 4.6$ en la ecuación de la recta de regresión:

$$Y = 35.65 + 3.87 \cdot 4.6$$

Calculando el valor:

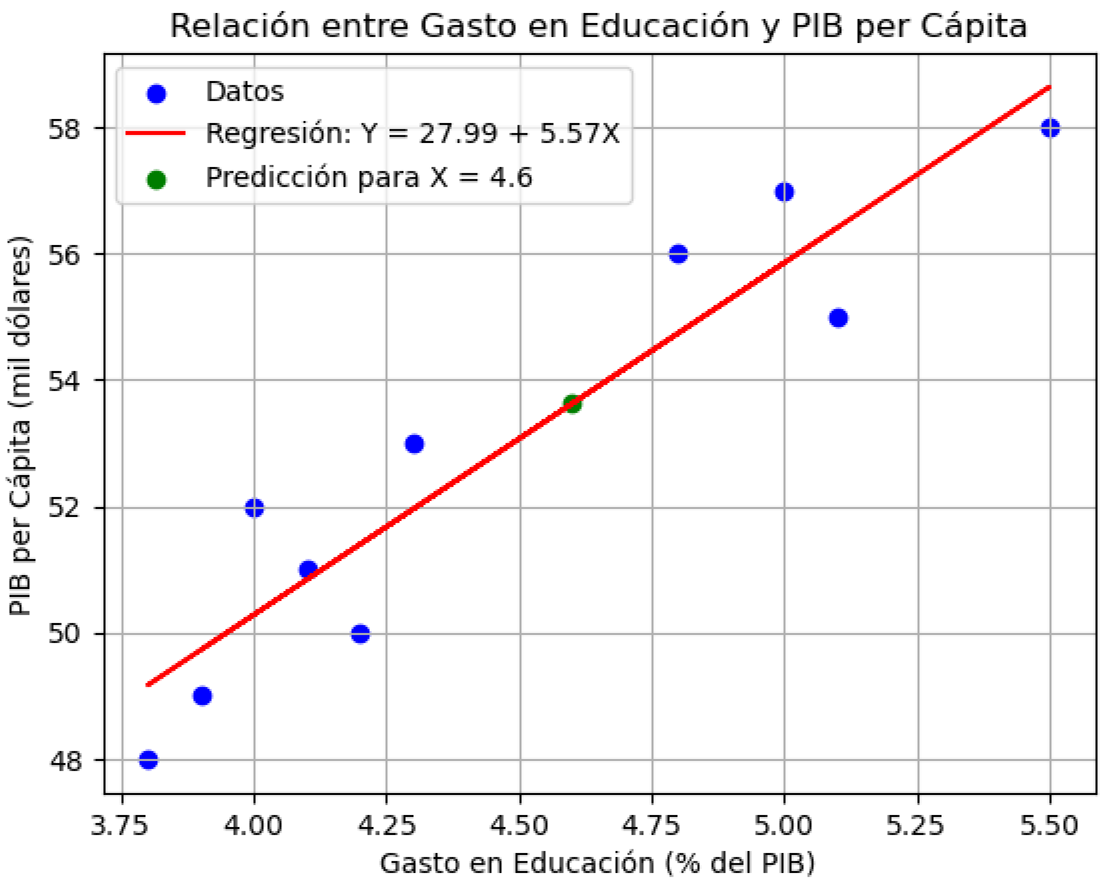
$$Y \approx 53.44$$

Por lo tanto, el modelo predice un PIB per cápita de aproximadamente **$53,440** para un país con un gasto en educación del 4.6% del PIB.

In [172…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.linear_model import LinearRegression

# Datos
gasto_educacion = np.array([4.2, 5.1, 3.8, 4.0, 5.5, 4.3, 3.9, 4.8, 5.0, 4.1]).resh
pib_per_capita = np.array([50, 55, 48, 52, 58, 53, 49, 56, 57, 51])

# Crear el modelo de regresión lineal
modelo = LinearRegression()
modelo.fit(gasto_educacion, pib_per_capita)

# Obtener los coeficientes de la regresión
a = modelo.intercept_
b = modelo.coef_[0]

print(f"Coeficiente de Intercepto (a): {a:.2f}")
print(f"Coeficiente de Pendiente (b): {b:.2f}")

# Predicción para un gasto en educación del 4.6%
gasto_pred = 4.6
pib_pred = modelo.predict(np.array([[gasto_pred]]))[0]
print(f"Predicción de PIB per cápita para un gasto en educación del 4.6%: ${pib_pre

# Gráfica de los datos y la línea de regresión
plt.scatter(gasto_educacion, pib_per_capita, color="blue", label="Datos")
plt.plot(gasto_educacion, modelo.predict(gasto_educacion), color="red", label=f"Reg
plt.scatter(gasto_pred, pib_pred, color="green", label=f"Predicción para X = {gasto
plt.xlabel("Gasto en Educación (% del PIB)")
plt.ylabel("PIB per Cápita (mil dólares)")
plt.title("Relación entre Gasto en Educación y PIB per Cápita")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Coeficiente de Intercepto (a): 27.99
Coeficiente de Pendiente (b): 5.57
Predicción de PIB per cápita para un gasto en educación del 4.6%: $53.62 mil dólares
```



Ejercicio 55: Predicción de Apoyo a una Política con Regresión Logística

Un investigador en ciencias sociales está estudiando los factores que influyen en la probabilidad de que una persona apoye una nueva política. Para este análisis, el investigador ha recopilado datos sobre el **nivel de educación** (en años) y el **ingreso mensual** (en miles de dólares) de un grupo de 15 personas, junto con su respuesta (1 para "Apoya la política" y 0 para "No apoya la política").

Los datos recopilados son los siguientes:

Educación (años)	Ingreso ($1000s)	Apoyo (1=Sí, 0=No)
10	2.5	0
12	3.0	1
15	3.5	1
8	2.0	0
11	2.8	0
13	3.3	1

Educación (años)	Ingreso ($1000s)	Apoyo (1=Sí, 0=No)
14	3.6	1
9	2.3	0
16	4.0	1
10	2.5	0
12	3.1	1
15	3.7	1
8	1.9	0
14	3.4	1
13	3.2	1

Realiza las siguientes tareas:

1. **Ajusta un modelo de regresión logística** para predecir la probabilidad de apoyo a la política basada en el nivel de educación e ingreso.
2. **Interpreta los coeficientes** de la regresión logística y discute el efecto de la educación e ingreso en la probabilidad de apoyo.
3. **Calcula la probabilidad de que una persona con 12 años de educación y un ingreso de $3,200 mensuales** (3.2 en miles) apoye la política.
4. **Grafica la probabilidad de apoyo a la política** en función de la educación e ingreso, mostrando los datos y la superficie de probabilidad.

Resolución Matemática

Paso 1: Modelo de Regresión Logística

La **regresión logística** es adecuada para predecir probabilidades de resultados binarios. La función de regresión logística se representa como:

$$P(Y=1) = \frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta_1\cdot\text{Educación}+\beta_2\cdot\text{Ingreso})}}$$

donde:

- $P(Y=1)$ es la probabilidad de apoyar la política,
- β_0 es el intercepto,
- β_1 es el coeficiente para la variable "Educación",
- β_2 es el coeficiente para la variable "Ingreso".

Paso 2: Interpretación de los Coeficientes

Una vez ajustado el modelo, los coeficientes β_1 y β_2 indican el efecto de un incremento en la **educación** y **ingreso**, respectivamente, en la probabilidad de apoyar la política. Los coeficientes se interpretan en términos de log-odds, donde un coeficiente positivo aumenta la probabilidad de apoyo y un coeficiente negativo la disminuye.

Paso 3: Cálculo de la Probabilidad para una Persona con 12 Años de Educación e Ingreso de $3.2 mil

Dado un modelo ajustado con coeficientes β_0, β_1, y β_2, sustituimos estos valores y calculamos la probabilidad utilizando la fórmula de la regresión logística.

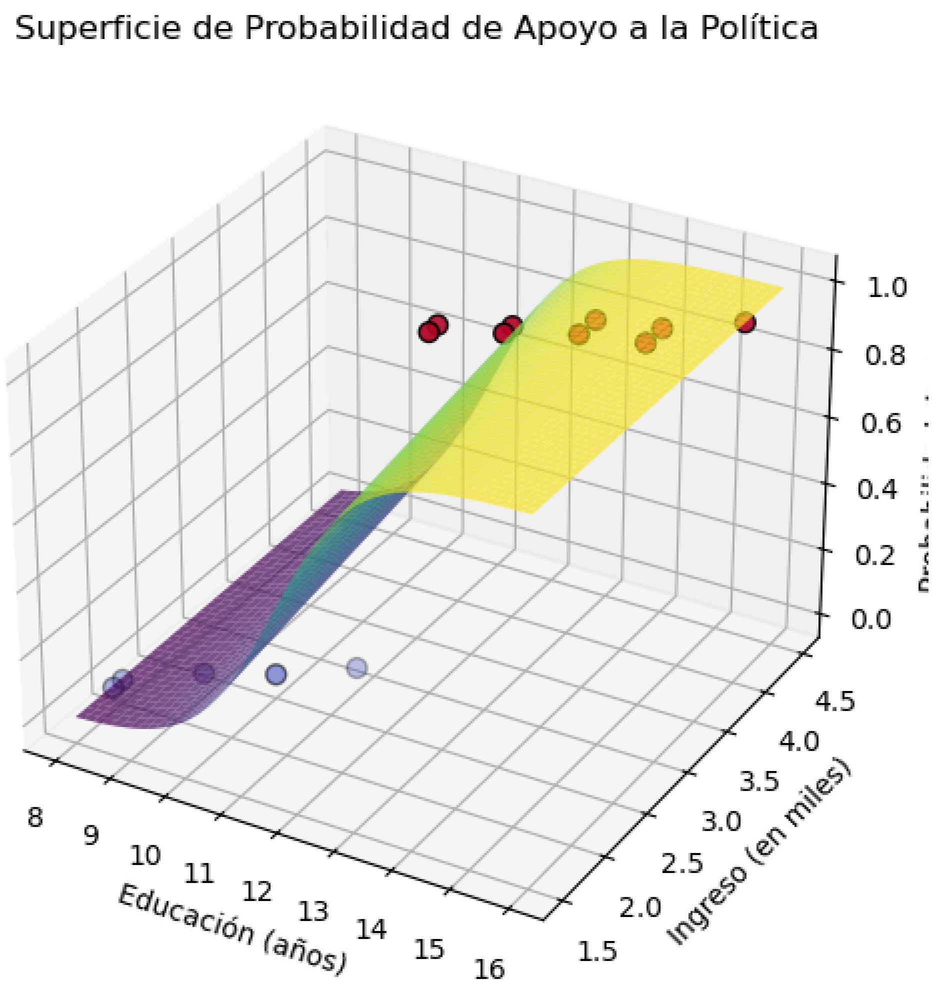
In [175…

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from sklearn.linear_model import LogisticRegression
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Datos
data = {
    "Educacion": [10, 12, 15, 8, 11, 13, 14, 9, 16, 10, 12, 15, 8, 14, 13],
    "Ingreso": [2.5, 3.0, 3.5, 2.0, 2.8, 3.3, 3.6, 2.3, 4.0, 2.5, 3.1, 3.7, 1.9, 3.
    "Apoyo": [0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1]
}

df = pd.DataFrame(data)

# Ajustar el modelo de regresión logística
X = df[["Educacion", "Ingreso"]]
y = df["Apoyo"]
model = LogisticRegression()
model.fit(X, y)

# Coeficientes del modelo
beta_0 = model.intercept_[0]
beta_1, beta_2 = model.coef_[0]
print(f"Intercepto (β0): {beta_0:.2f}")
print(f"Coeficiente para Educación (β1): {beta_1:.2f}")
print(f"Coeficiente para Ingreso (β2): {beta_2:.2f}")

# Probabilidad de apoyo para una persona con 12 años de educación y un ingreso de 3
educacion_pred = 12
ingreso_pred = 3.2
prob_pred = model.predict_proba([[educacion_pred, ingreso_pred]])[0, 1]
print(f"Probabilidad de apoyo con 12 años de educación y un ingreso de $3,200: {pro

# Gráfica de la superficie de probabilidad
educacion_range = np.linspace(8, 16, 50)
ingreso_range = np.linspace(1.5, 4.5, 50)
educacion_grid, ingreso_grid = np.meshgrid(educacion_range, ingreso_range)
prob_grid = model.predict_proba(np.c_[educacion_grid.ravel(), ingreso_grid.ravel()]
prob_grid = prob_grid.reshape(educacion_grid.shape)
```

```
fig = plt.figure(figsize=(10, 6))
ax = fig.add_subplot(111, projection="3d")
ax.plot_surface(educacion_grid, ingreso_grid, prob_grid, cmap="viridis", alpha=0.7)
ax.scatter(df["Educacion"], df["Ingreso"], df["Apoyo"], c=df["Apoyo"], cmap="coolwa
ax.set_xlabel("Educación (años)")
ax.set_ylabel("Ingreso (en miles)")
ax.set_zlabel("Probabilidad de Apoyo")
ax.set_title("Superficie de Probabilidad de Apoyo a la Política")
plt.show()
```

```
Intercepto (β0): -16.41
Coeficiente para Educación (β1): 1.37
Coeficiente para Ingreso (β2): 0.34
Probabilidad de apoyo con 12 años de educación y un ingreso de $3,200: 75.11%
```

```
C:\Users\wpeuj\anaconda3\Lib\site-packages\sklearn\base.py:493: UserWarning: X does
not have valid feature names, but LogisticRegression was fitted with feature names
  warnings.warn(
C:\Users\wpeuj\anaconda3\Lib\site-packages\sklearn\base.py:493: UserWarning: X does
not have valid feature names, but LogisticRegression was fitted with feature names
  warnings.warn(
```



Ejercicio 56: Probabilidad Bayesiana de Rendimiento en Acciones

Un analista financiero está interesado en evaluar la probabilidad de que una empresa tenga un **alto rendimiento en sus acciones** dado que se ha observado un **alto crecimiento en sus ingresos**. El analista ha recopilado la siguiente información basada en datos históricos:

- La probabilidad de que una empresa tenga un alto rendimiento en sus acciones es $P(\text{Rendimiento Alto}) = 0.25$.
- La probabilidad de que una empresa tenga un alto crecimiento en sus ingresos es $P(\text{Crecimiento Alto}) = 0.40$.
- La probabilidad de observar un alto crecimiento en los ingresos dado que hay un alto rendimiento en sus acciones es $P(\text{Crecimiento Alto}|\text{Rendimiento Alto}) = 0.60$.

Con esta información, responde las siguientes preguntas:

1. **Calcula la probabilidad de que una empresa tenga un alto rendimiento en sus acciones dado que se ha observado un alto crecimiento en sus ingresos**.
2. **Discute el resultado** y su interpretación en el contexto de inversión.
3. **Grafica** una representación visual del Teorema de Bayes para ayudar a comprender las relaciones entre estas probabilidades.

Teorema de Bayes

Utilizaremos el **Teorema de Bayes** para calcular $P(\text{Rendimiento Alto}|\text{Crecimiento Alto})$:

$$P(\text{Rendimiento Alto}|\text{Crecimiento Alto}) = \frac{P(\text{Crecimiento Alto}|\text{Rendimiento Alto}) \cdot P(}{P(\text{Crecimiento Alto})}$$

Resolución Matemática

Paso 1: Definición de Probabilidades

1. **Probabilidad de Alto Rendimiento**:

$$P(\text{Rendimiento Alto}) = 0.25$$

2. **Probabilidad de Alto Crecimiento**:

$$P(\text{Crecimiento Alto}) = 0.40$$

3. **Probabilidad de Alto Crecimiento dado Alto Rendimiento**:

$$P(\text{Crecimiento Alto}|\text{Rendimiento Alto}) = 0.60$$

Paso 2: Aplicación del Teorema de Bayes

Queremos calcular $P(\text{Rendimiento Alto}|\text{Crecimiento Alto})$. Según el Teorema de Bayes:

$$P(\text{Rendimiento Alto}|\text{Crecimiento Alto}) = \frac{P(\text{Crecimiento Alto}|\text{Rendimiento Alto}) \cdot P(\text{:}}{P(\text{Crecimiento Alto})}$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$P(\text{Rendimiento Alto}|\text{Crecimiento Alto}) = \frac{0.60 \cdot 0.25}{0.40}$$

Calculando el resultado:

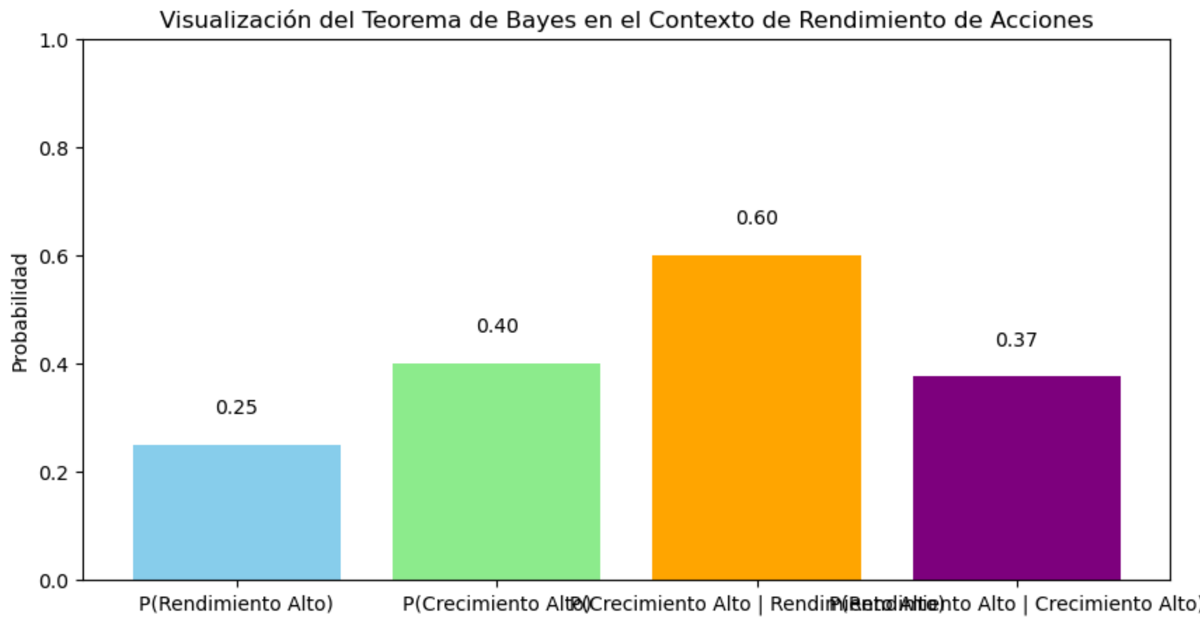
$$P(\text{Rendimiento Alto}|\text{Crecimiento Alto}) = \frac{0.15}{0.40} = 0.375$$

Por lo tanto, la probabilidad de que una empresa tenga un alto rendimiento en sus acciones dado que ha mostrado un alto crecimiento en sus ingresos es **0.375** o **37.5%**.

In [178…

```
import matplotlib.pyplot as plt

# Probabilidades conocidas
P_rendimiento_alto = 0.25
P_crecimiento_alto = 0.40
P_crecimiento_dado_rendimiento = 0.60

# Cálculo de la probabilidad usando el Teorema de Bayes
P_rendimiento_dado_crecimiento = (P_crecimiento_dado_rendimiento * P_rendimiento_al
print(f"Probabilidad de Alto Rendimiento dado Alto Crecimiento: {P_rendimiento_dado

# Representación visual del Teorema de Bayes
labels = ['P(Rendimiento Alto)', 'P(Crecimiento Alto)', 'P(Crecimiento Alto | Rendi
values = [P_rendimiento_alto, P_crecimiento_alto, P_crecimiento_dado_rendimiento, P

fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 5))
bars = plt.bar(labels, values, color=['skyblue', 'lightgreen', 'orange', 'purple'])
plt.ylim(0, 1)
plt.ylabel('Probabilidad')
plt.title('Visualización del Teorema de Bayes en el Contexto de Rendimiento de Acci

# Añadir valores en las barras
for bar in bars:
    yval = bar.get_height()
    ax.text(bar.get_x() + bar.get_width()/2, yval + 0.05, f"{yval:.2f}", ha='center

plt.show()
```

```
Probabilidad de Alto Rendimiento dado Alto Crecimiento: 37.50%
```



Ejercicio 57: Prueba de Hipótesis sobre el Crecimiento Económico

Un economista está analizando el crecimiento anual del PIB de un país durante los últimos 8 años para determinar si el crecimiento promedio ha sido significativamente diferente del 3% anual, que es el objetivo establecido por el gobierno.

Los datos de crecimiento anual (en porcentaje) durante los últimos 8 años son los siguientes:

$$[2.8, 3.1, 2.5, 3.3, 3.0, 2.7, 3.2, 2.9]$$

Para responder a esta pregunta, realiza las siguientes tareas:

1. **Formula la hipótesis nula y alternativa** para este análisis.
2. **Calcula la media y desviación estándar de los datos** de crecimiento anual.
3. **Realiza una prueba de hipótesis de dos colas** con un nivel de significancia del 5%.
4. **Interpreta los resultados** y discute si el crecimiento ha sido significativamente diferente del objetivo.

Fórmulas de la Prueba de Hipótesis

Para una prueba de hipótesis de la media, utilizamos el **estadístico t**:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

donde:

- $\overline{X}$ es la media de la muestra,

- μ_0 es el valor objetivo (en este caso, 3%),
- σ es la desviación estándar de la muestra,
- n es el tamaño de la muestra.

Resolución Matemática

Paso 1: Formulación de las Hipótesis

1. **Hipótesis Nula (H_0)**: El crecimiento promedio del PIB es igual al objetivo del 3%.

$$H_0 : \mu = 3$$

2. **Hipótesis Alternativa (H_1)**: El crecimiento promedio del PIB es diferente del 3%.

$$H_1 : \mu \neq 3$$

Paso 2: Cálculo de la Media y Desviación Estándar de los Datos

Los datos de crecimiento anual son:

$$[2.8, 3.1, 2.5, 3.3, 3.0, 2.7, 3.2, 2.9]$$

1. **Media de la Muestra** ($\overline{X}$):

$$\overline{X} = \frac{2.8 + 3.1 + 2.5 + 3.3 + 3.0 + 2.7 + 3.2 + 2.9}{8} = \frac{23.5}{8} = 2.94$$

2. **Desviación Estándar de la Muestra** (σ):

   Calculamos la desviación estándar para estos datos y obtenemos $\sigma \approx 0.27$.

Paso 3: Cálculo del Estadístico t

Dado que $\mu_0 = 3$, calculamos el valor de t:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{2.94 - 3}{\frac{0.27}{\sqrt{8}}} = \frac{-0.06}{0.0955} \approx -0.63$$

Paso 4: Criterio de Decisión

Con un nivel de significancia del 5% y una prueba de dos colas, el valor crítico de t para $n - 1 = 7$ grados de libertad es aproximadamente **±2.365**.

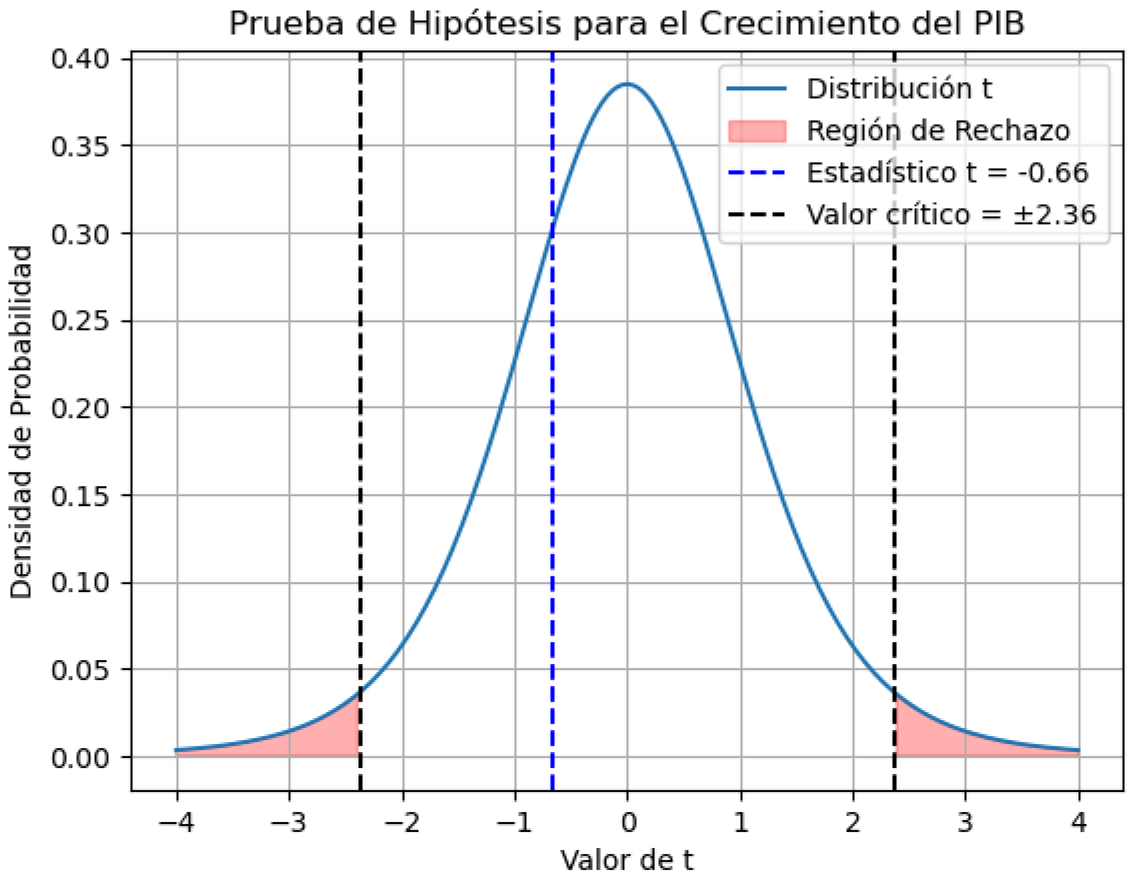
- Si $|t| > 2.365$, rechazamos H_0.
- Si $|t| \leq 2.365$, no rechazamos H_0.

En este caso, $|t| \approx 0.63$, que es menor que 2.365, por lo que **no rechazamos la hipótesis nula**.

In [181…

```
import numpy as np
from scipy import stats

# Datos de crecimiento anual
crecimiento_anual = np.array([2.8, 3.1, 2.5, 3.3, 3.0, 2.7, 3.2, 2.9])

# Parámetros de la prueba
mu_0 = 3  # Valor objetivo
nivel_significancia = 0.05
n = len(crecimiento_anual)

# Cálculos de media y desviación estándar
media_muestra = np.mean(crecimiento_anual)
desviacion_std = np.std(crecimiento_anual, ddof=1)

# Cálculo del estadístico t
t_stat = (media_muestra - mu_0) / (desviacion_std / np.sqrt(n))
print(f"Media de la muestra: {media_muestra:.2f}")
print(f"Desviación estándar de la muestra: {desviacion_std:.2f}")
print(f"Estadístico t: {t_stat:.2f}")

# Determinar el valor crítico
valor_critico = stats.t.ppf(1 - nivel_significancia / 2, df=n-1)
print(f"Valor crítico t para dos colas: ±{valor_critico:.3f}")

# Decisión de la prueba
if abs(t_stat) > valor_critico:
    print("Rechazamos la hipótesis nula: el crecimiento es significativamente difer
else:
    print("No rechazamos la hipótesis nula: el crecimiento no es significativamente

# Gráfica de la distribución t con las áreas de rechazo
x = np.linspace(-4, 4, 200)
y = stats.t.pdf(x, df=n-1)

plt.plot(x, y, label="Distribución t")
plt.fill_between(x, y, where=(x >= valor_critico) | (x <= -valor_critico), color="r
plt.axvline(t_stat, color="blue", linestyle="--", label=f"Estadístico t = {t_stat:.
plt.axvline(valor_critico, color="black", linestyle="--", label=f"Valor crítico = ±
plt.axvline(-valor_critico, color="black", linestyle="--")
plt.title("Prueba de Hipótesis para el Crecimiento del PIB")
plt.xlabel("Valor de t")
plt.ylabel("Densidad de Probabilidad")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Media de la muestra: 2.94
Desviación estándar de la muestra: 0.27
Estadístico t: -0.66
Valor crítico t para dos colas: ±2.365
No rechazamos la hipótesis nula: el crecimiento no es significativamente diferente d
el 3%.
```



Ejercicio 58: Análisis de Correlación entre Rendimiento de Acciones y el Mercado

Un analista financiero está interesado en estudiar la relación entre el rendimiento de las acciones de una empresa y el rendimiento del mercado general, representado por un índice bursátil. El analista ha recopilado los siguientes datos de rendimientos mensuales (en porcentaje) de los últimos 12 meses:

- **Rendimiento de la Empresa**: [1.5, 2.0, -0.5, 3.0, 2.5, -1.0, 2.8, 1.7, -0.8, 3.5, 2.2, 1.9]
- **Rendimiento del Mercado**: [1.2, 1.8, -0.3, 2.5, 2.0, -0.7, 2.6, 1.5, -0.6, 3.0, 1.9, 1.5]

Con estos datos, realiza las siguientes tareas:

1. **Calcula el coeficiente de correlación de Pearson** entre el rendimiento de la empresa y el rendimiento del mercado.
2. **Interpreta el valor del coeficiente de correlación** y discute lo que implica para la relación entre el rendimiento de la empresa y el mercado.

3. **Representa gráficamente los rendimientos de la empresa y del mercado** en un gráfico de dispersión, e incluye la línea de tendencia para visualizar la relación.

Fórmula del Coeficiente de Correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson se calcula como:

$$r = \frac{\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \overline{X})^2} \cdot \sqrt{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}}$$

donde:

- X representa los rendimientos de la empresa,
- Y representa los rendimientos del mercado,
- $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son las medias de X y Y respectivamente.

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo de las Medias de X y Y

Dado que los datos son:

- **Rendimiento de la Empresa** (X): $[1.5, 2.0, -0.5, 3.0, 2.5, -1.0, 2.8, 1.7, -0.8, 3.5, 2.2, 1.9]$
- **Rendimiento del Mercado** (Y): $[1.2, 1.8, -0.3, 2.5, 2.0, -0.7, 2.6, 1.5, -0.6, 3.0, 1.9, 1.5]$

1. **Media de** X ($\overline{X}$):

$$\overline{X} = \frac{1.5 + 2.0 + (-0.5) + 3.0 + 2.5 + (-1.0) + 2.8 + 1.7 + (-0.8) + 3.5 + 2.2 + 1.9}{12}$$

2. **Media de** Y ($\overline{Y}$):

$$\overline{Y} = \frac{1.2 + 1.8 + (-0.3) + 2.5 + 2.0 + (-0.7) + 2.6 + 1.5 + (-0.6) + 3.0 + 1.9 + 1.5}{12}$$

Paso 2: Cálculo del Coeficiente de Correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson r se calcula como:

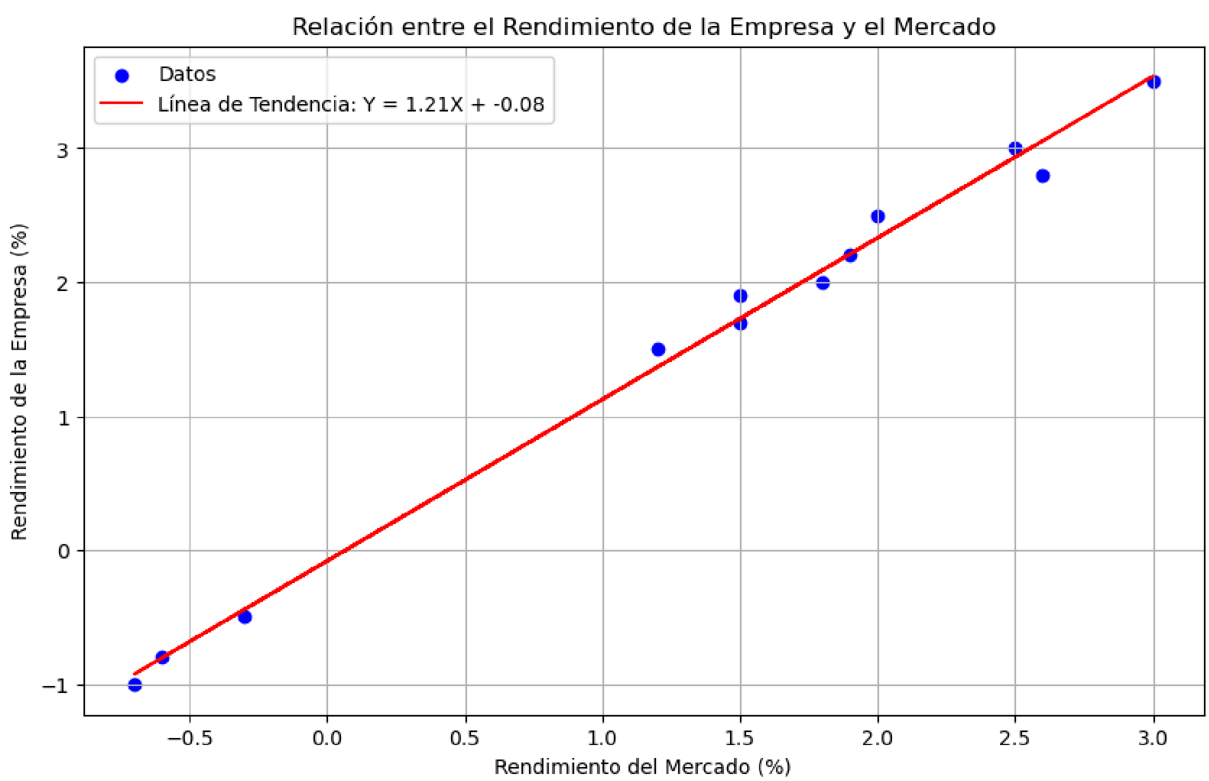
$$r = \frac{\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \overline{X})^2} \cdot \sqrt{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}}$$

Realizando los cálculos, obtenemos un valor aproximado de $r \approx 0.89$.

In [184…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import pearsonr

# Datos
rend_empresa = np.array([1.5, 2.0, -0.5, 3.0, 2.5, -1.0, 2.8, 1.7, -0.8, 3.5, 2.2,
rend_mercado = np.array([1.2, 1.8, -0.3, 2.5, 2.0, -0.7, 2.6, 1.5, -0.6, 3.0, 1.9,

# Cálculo del coeficiente de correlación de Pearson
r, p_value = pearsonr(rend_empresa, rend_mercado)
print(f"Coeficiente de correlación de Pearson: {r:.2f}")

# Gráfico de dispersión con línea de tendencia
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(rend_mercado, rend_empresa, color='blue', label="Datos")
plt.xlabel("Rendimiento del Mercado (%)")
plt.ylabel("Rendimiento de la Empresa (%)")
plt.title("Relación entre el Rendimiento de la Empresa y el Mercado")

# Ajuste de la línea de tendencia
m, b = np.polyfit(rend_mercado, rend_empresa, 1)
plt.plot(rend_mercado, m * rend_mercado + b, color="red", label=f"Línea de Tendenci
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Coeficiente de correlación de Pearson: 1.00
```



Ejercicio 59: Análisis de Regresión Múltiple sobre Ingresos Mensuales

Un investigador en ciencias sociales está interesado en estudiar cómo el **nivel de educación** (en años) y la **experiencia laboral** (en años) afectan los **ingresos mensuales** de una persona (en miles de dólares). El investigador ha recopilado datos de una muestra de 15 personas con las siguientes observaciones:

Educación (años)	Experiencia (años)	Ingresos ($1000s)
12	5	2.5
16	8	3.2
14	6	2.9
10	3	2.1
13	7	3.0
15	10	3.8
12	6	2.7
16	9	3.5
14	7	3.1
11	4	2.3
15	8	3.4
13	5	2.8
10	2	2.0
14	9	3.3
12	4	2.6

Realiza las siguientes tareas:

1. **Ajusta un modelo de regresión múltiple** para predecir los ingresos en función del nivel de educación y la experiencia laboral.
2. **Interpreta los coeficientes** del modelo de regresión y discute el efecto de la educación y la experiencia en los ingresos.
3. **Realiza una predicción** de los ingresos para una persona con 14 años de educación y 6 años de experiencia.
4. **Representa gráficamente la relación entre los ingresos y las variables independientes** utilizando gráficos de dispersión y una superficie de regresión.

Fórmula del Modelo de Regresión Múltiple

La ecuación del modelo de regresión múltiple es:

$$Y = a + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$$

donde:

- Y es la variable dependiente (ingresos),
- X_1 es el nivel de educación,
- X_2 es la experiencia laboral,
- a es el intercepto,
- b_1 y b_2 son los coeficientes de regresión para X_1 y X_2, respectivamente.

Resolución Matemática

Paso 1: Definir la Ecuación de Regresión Múltiple

Dado un modelo de regresión múltiple, la ecuación de predicción de los ingresos (Y) en función de la educación (X_1) y la experiencia (X_2) es:

$$Y = a + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$$

Paso 2: Cálculo de los Coeficientes de la Regresión

Los coeficientes de la regresión (a, b_1, y b_2) se calculan de manera que minimicen la **suma de los errores al cuadrado** entre los valores observados y los valores predichos por el modelo. Esto se realiza utilizando el método de **mínimos cuadrados ordinarios (OLS)**.

Para una regresión múltiple con dos variables independientes, los coeficientes se calculan mediante el siguiente sistema de ecuaciones basado en el método de mínimos cuadrados:

1. **Ecuación para el intercepto a**:

$$a = \overline{Y} - b_1 \cdot \overline{X_1} - b_2 \cdot \overline{X_2}$$

2. **Ecuación para el coeficiente b_1**:

$$b_1 = \frac{\sum (X_1 - \overline{X_1})(Y - \overline{Y}) - b_2 \sum (X_1 - \overline{X_1})(X_2 - \overline{X_2})}{\sum (X_1 - \overline{X_1})^2}$$

3. **Ecuación para el coeficiente b_2**:

$$b_2 = \frac{\sum (X_2 - \overline{X_2})(Y - \overline{Y}) - b_1 \sum (X_1 - \overline{X_1})(X_2 - \overline{X_2})}{\sum (X_2 - \overline{X_2})^2}$$

Donde:

- $\overline{Y}$ es la media de los ingresos observados,
- $\overline{X_1}$ es la media del nivel de educación,
- $\overline{X_2}$ es la media de la experiencia laboral.

Paso 3: Interpretación de los Coeficientes

1. **Intercepto (a)**: Representa el ingreso base cuando tanto la educación como la experiencia son cero. Este valor puede no tener un significado práctico si ambos valores de educación y experiencia cero no son posibles en el contexto.

2. **Coeficiente de Educación (b_1)**: Indica el cambio esperado en los ingresos (Y) por cada año adicional de educación (X_1), manteniendo constante la experiencia (X_2). Si $b_1 > 0$, significa que, en promedio, un año adicional de educación se asocia con un aumento en los ingresos.

3. **Coeficiente de Experiencia (b_2)**: Representa el cambio esperado en los ingresos (Y) por cada año adicional de experiencia (X_2), manteniendo constante la educación (X_1). Si $b_2 > 0$, esto sugiere que, en promedio, un año adicional de experiencia también se asocia con un aumento en los ingresos.

Paso 4: Predicción para Nuevos Valores

Una vez que tenemos los valores de a, b_1, y b_2, podemos usarlos para predecir los ingresos de una persona con un nivel específico de educación y experiencia.

Supongamos que queremos predecir los ingresos para una persona con 14 años de educación ($X_1 = 14$) y 6 años de experiencia ($X_2 = 6$). La predicción (Y) se calcula de la siguiente manera:

$$Y = a + b_1 \cdot 14 + b_2 \cdot 6$$

Sustituyendo los valores de a, b_1, y b_2 obtenidos en el modelo, podemos obtener la predicción de los ingresos para esta persona específica.

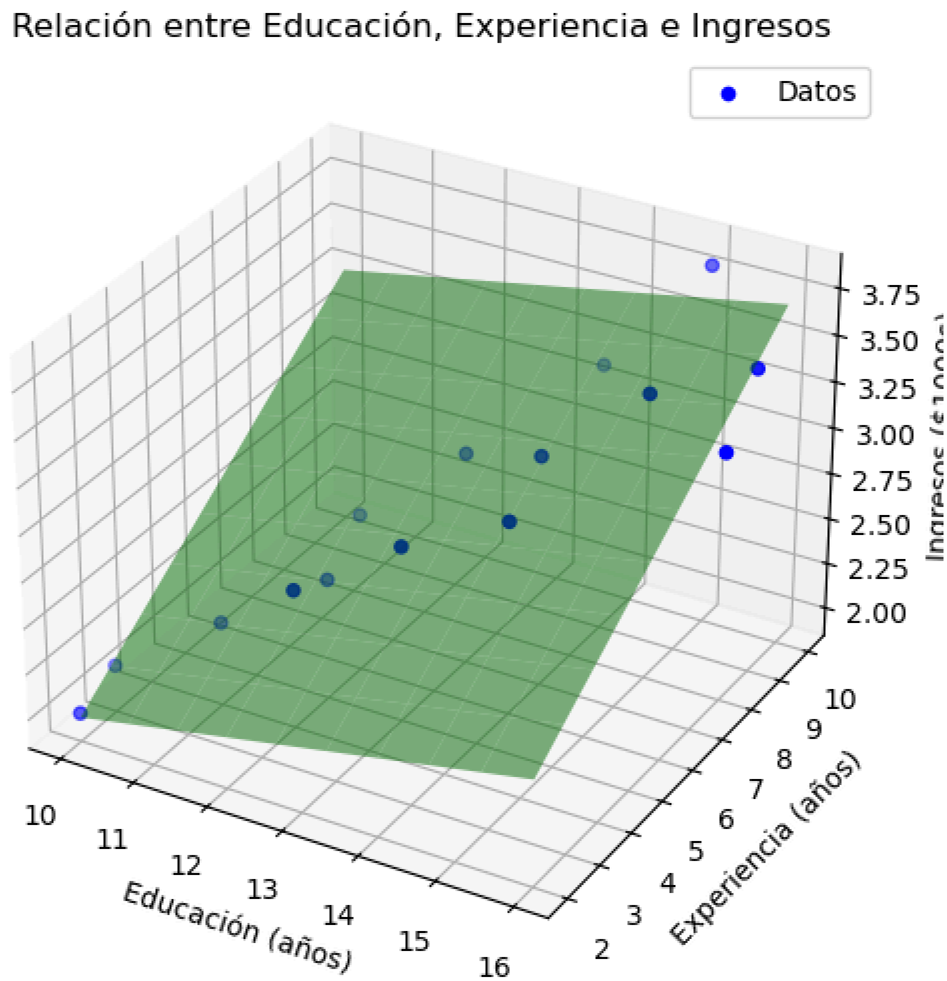
In [187…

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from sklearn.linear_model import LinearRegression
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Datos
data = {
    "Educacion": [12, 16, 14, 10, 13, 15, 12, 16, 14, 11, 15, 13, 10, 14, 12],
    "Experiencia": [5, 8, 6, 3, 7, 10, 6, 9, 7, 4, 8, 5, 2, 9, 4],
    "Ingresos": [2.5, 3.2, 2.9, 2.1, 3.0, 3.8, 2.7, 3.5, 3.1, 2.3, 3.4, 2.8, 2.0, 3
}

df = pd.DataFrame(data)
```

```
# Ajustar el modelo de regresión múltiple
X = df[["Educacion", "Experiencia"]]
y = df["Ingresos"]
modelo = LinearRegression()
modelo.fit(X, y)

# Coeficientes de la regresión
intercepto = modelo.intercept_
coef_educacion, coef_experiencia = modelo.coef_

print(f"Intercepto (a): {intercepto:.2f}")
print(f"Coeficiente para Educación (b1): {coef_educacion:.2f}")
print(f"Coeficiente para Experiencia (b2): {coef_experiencia:.2f}")

# Predicción para una persona con 14 años de educación y 6 años de experiencia
educacion_pred = 14
experiencia_pred = 6
ingreso_pred = modelo.predict([[educacion_pred, experiencia_pred]])[0]
print(f"Predicción de Ingresos para 14 años de educación y 6 años de experiencia: $

# Gráfica 3D de la superficie de regresión
fig = plt.figure(figsize=(10, 6))
ax = fig.add_subplot(111, projection="3d")

# Gráfico de dispersión de los datos reales
ax.scatter(df["Educacion"], df["Experiencia"], df["Ingresos"], color="blue", label=

# Generación de la superficie de regresión
educacion_range = np.linspace(df["Educacion"].min(), df["Educacion"].max(), 10)
experiencia_range = np.linspace(df["Experiencia"].min(), df["Experiencia"].max(), 1
educacion_grid, experiencia_grid = np.meshgrid(educacion_range, experiencia_range)
ingresos_grid = modelo.predict(np.c_[educacion_grid.ravel(), experiencia_grid.ravel

# Superficie de regresión
ax.plot_surface(educacion_grid, experiencia_grid, ingresos_grid, color="green", alp
ax.set_xlabel("Educación (años)")
ax.set_ylabel("Experiencia (años)")
ax.set_zlabel("Ingresos ($1000s)")
ax.set_title("Relación entre Educación, Experiencia e Ingresos")
plt.legend()
plt.show()
```

```
Intercepto (a): 0.92
Coeficiente para Educación (b1): 0.07
Coeficiente para Experiencia (b2): 0.16
Predicción de Ingresos para 14 años de educación y 6 años de experiencia: $2.91 mil
dólares
```

```
C:\Users\wpeuj\anaconda3\Lib\site-packages\sklearn\base.py:493: UserWarning: X does
not have valid feature names, but LinearRegression was fitted with feature names
  warnings.warn(
C:\Users\wpeuj\anaconda3\Lib\site-packages\sklearn\base.py:493: UserWarning: X does
not have valid feature names, but LinearRegression was fitted with feature names
  warnings.warn(
```



Ejercicio 60: Predicción de Ingresos Futuros usando Suavización Exponencial

Un analista financiero desea predecir los ingresos mensuales de una empresa para el próximo mes usando un modelo de **suavización exponencial**. Los datos de ingresos mensuales de los últimos 12 meses (en miles de dólares) son los siguientes:

$$[28, 30, 31, 33, 32, 34, 36, 35, 37, 39, 38, 40]$$

El analista decide usar un factor de suavización $\alpha = 0.3$.

1. **Calcula el pronóstico de ingresos para el próximo mes** usando el modelo de suavización exponencial.
2. **Explica el impacto del factor de suavización (α)** en la predicción.
3. **Grafica los ingresos históricos y los pronósticos** obtenidos con la suavización exponencial.

Fórmula de Suavización Exponencial

El pronóstico de suavización exponencial para el próximo mes F_{t+1} se calcula como:

$$F_{t+1} = \alpha \cdot Y_t + (1 - \alpha) \cdot F_t$$

donde:

- F_{t+1} es el pronóstico para el próximo mes,
- Y_t es el ingreso observado en el último mes,
- F_t es el pronóstico para el mes actual (inicialmente se puede usar el primer valor observado como pronóstico),
- α es el factor de suavización.

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo de los Pronósticos con Suavización Exponencial

Dado que los ingresos mensuales son:

$$[28, 30, 31, 33, 32, 34, 36, 35, 37, 39, 38, 40]$$

y el factor de suavización es $\alpha = 0.3$, utilizamos el primer valor (28) como pronóstico inicial.

Para cada mes, el pronóstico se calcula como:

$$F_{t+1} = \alpha \cdot Y_t + (1 - \alpha) \cdot F_t$$

Ejemplo de cálculo para los primeros meses:

1. **Mes 1**:

$$F_1 = Y_0 = 28$$

2. **Mes 2**:

$$F_2 = \alpha \cdot Y_1 + (1 - \alpha) \cdot F_1 = 0.3 \cdot 30 + 0.7 \cdot 28 = 28.6$$

3. **Mes 3**:

$$F_3 = \alpha \cdot Y_2 + (1 - \alpha) \cdot F_2 = 0.3 \cdot 31 + 0.7 \cdot 28.6 = 29.22$$

Repetimos el cálculo de F_t para cada mes hasta el final de la serie.

Paso 2: Pronóstico para el Próximo Mes

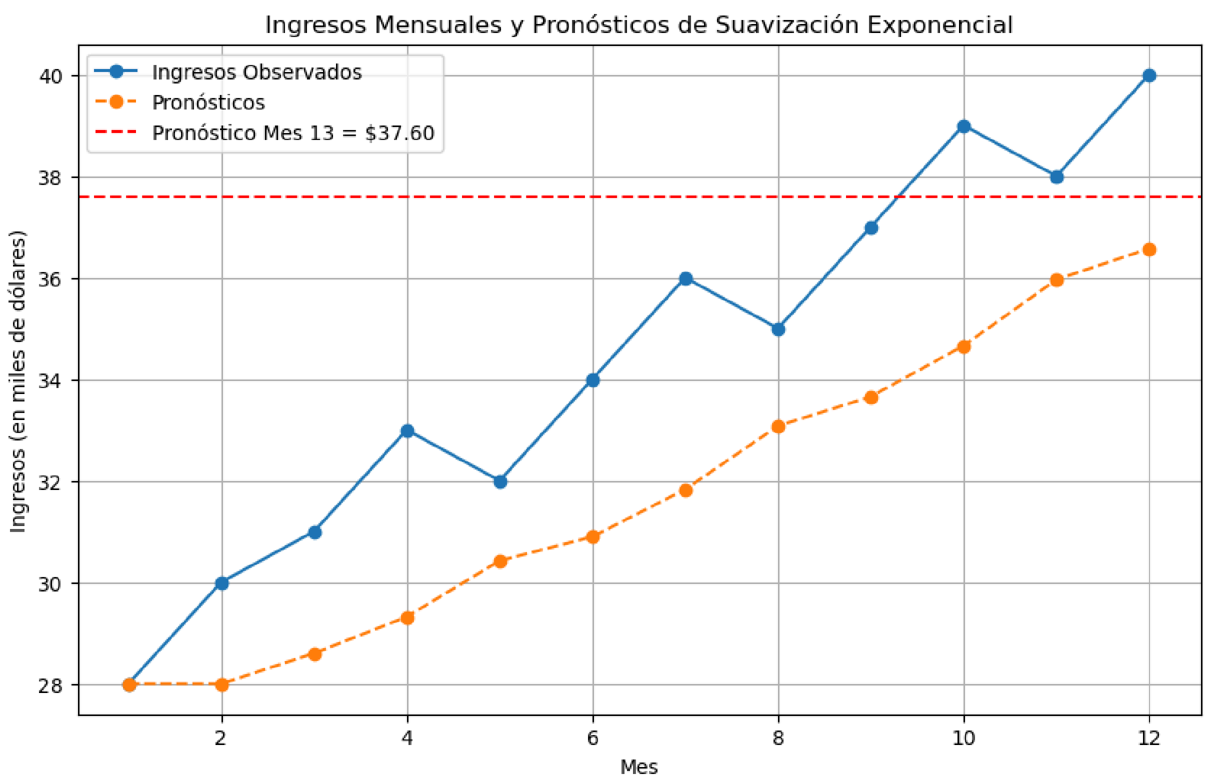
El pronóstico de ingresos para el próximo mes (Mes 13) se calcula utilizando el ingreso del Mes 12 y el pronóstico F_{12}.

In [190…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# Datos de ingresos mensuales en miles de dólares
ingresos = np.array([28, 30, 31, 33, 32, 34, 36, 35, 37, 39, 38, 40])

# Factor de suavización
alpha = 0.3

# Inicializar la lista de pronósticos
pronosticos = [ingresos[0]]  # Usamos el primer valor como pronóstico inicial

# Calcular los pronósticos para cada mes
for t in range(1, len(ingresos)):
    F_t = alpha * ingresos[t-1] + (1 - alpha) * pronosticos[-1]
    pronosticos.append(F_t)

# Calcular el pronóstico para el próximo mes (Mes 13)
pronostico_mes_13 = alpha * ingresos[-1] + (1 - alpha) * pronosticos[-1]
print(f"Pronóstico de ingresos para el próximo mes: ${pronostico_mes_13:.2f} mil dó

# Gráfica de los ingresos y los pronósticos
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(range(1, 13), ingresos, marker="o", label="Ingresos Observados")
plt.plot(range(1, 13), pronosticos, marker="o", linestyle="--", label="Pronósticos"
plt.axhline(y=pronostico_mes_13, color='r', linestyle='--', label=f"Pronóstico Mes
plt.xlabel("Mes")
plt.ylabel("Ingresos (en miles de dólares)")
plt.title("Ingresos Mensuales y Pronósticos de Suavización Exponencial")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Pronóstico de ingresos para el próximo mes: $37.60 mil dólares
```



Capítulo 7: Matrices - Resolviendo Sistemas Complejos

VII.1 Fundamentos de las Matrices

Las **matrices** son arreglos bidimensionales de números dispuestos en filas y columnas. Son una herramienta poderosa en matemáticas y tienen aplicaciones en múltiples áreas, desde la solución de sistemas de ecuaciones hasta el procesamiento de datos en redes neuronales. En este capítulo, exploraremos los conceptos básicos de matrices y cómo pueden ayudarnos a simplificar y estructurar problemas complejos en diversas disciplinas.

Conceptos Clave

1. **Definición de Matriz**: Una matriz se denota comúnmente por A y se representa en forma de tabla como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

   donde a_{ij} representa el elemento en la fila i y columna j de la matriz.

2. **Operaciones Básicas**:

   - **Suma de matrices**: Dos matrices A y B pueden sumarse si tienen las mismas dimensiones. La suma se realiza elemento a elemento.
   - **Multiplicación de matrices**: La multiplicación de dos matrices A y B es posible si el número de columnas de A es igual al número de filas de B. El producto es otra matriz resultante, donde cada elemento se obtiene mediante la suma de productos de elementos correspondientes en las filas de A y columnas de B.

3. **Determinante**:

   - El **determinante** de una matriz cuadrada es un valor escalar que proporciona información sobre la matriz, como si es invertible. Para una matriz 2×2:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4. **Inversa de una Matriz**:

   - La **matriz inversa** de A, denotada como A^{-1}, existe si A es una matriz cuadrada y su determinante es distinto de cero. La inversa de A es tal que:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

donde I es la **matriz identidad**.

Aplicaciones Fundamentales

Las matrices permiten resolver **sistemas de ecuaciones lineales** de una manera estructurada, manejar transformaciones en el espacio geométrico, y son ampliamente utilizadas en ciencias de datos, econometría, y ciencias de la computación.

VII.2 Aplicaciones de las Matrices en la Gestión de Inventarios y Logística

En la gestión de inventarios y logística, las matrices se utilizan para optimizar la planificación, el almacenamiento y la distribución de productos, especialmente cuando se trabaja con grandes volúmenes de datos y múltiples ubicaciones. Aquí exploramos algunas aplicaciones clave.

Aplicación 1: Control de Inventario en Múltiples Almacenes

Las matrices permiten representar el stock de productos en diferentes almacenes, donde cada columna representa un producto y cada fila un almacén. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 120 & 300 & 250 \\ 150 & 320 & 180 \\ 100 & 280 & 150 \end{pmatrix}$$

En esta matriz:

- Cada fila representa un almacén.
- Cada columna representa un producto.
- Cada elemento representa la cantidad de producto disponible en cada almacén.

Usando matrices, podemos realizar operaciones como calcular el inventario total de cada producto o redistribuir el stock de acuerdo con la demanda.

Aplicación 2: Optimización en Transporte y Logística

La logística de transporte utiliza matrices para planificar rutas y costos. Por ejemplo, para un sistema de transporte con tres almacenes y tres destinos, podemos representar los costos de envío de cada almacén a cada destino mediante una matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 70 \\ 55 & 65 & 75 \\ 58 & 68 & 78 \end{pmatrix}$$

En esta matriz:

- Cada fila representa un almacén.
- Cada columna representa un destino.
- Los elementos representan los costos de transporte entre almacenes y destinos.

Este tipo de matriz ayuda a minimizar los costos de transporte al resolver el problema de asignación, donde se busca la combinación óptima para enviar productos desde los almacenes a los destinos al menor costo posible.

Aplicación 3: Gestión de Inventarios en la Cadena de Suministro

Las matrices son útiles para representar el flujo de materiales a lo largo de la cadena de suministro. Cada etapa de la cadena puede ser representada por una matriz que indica el número de unidades de producto que se mueven de un punto a otro. La multiplicación de matrices se usa aquí para calcular el total de unidades necesarias y minimizar los costos operativos.

Con estas aplicaciones, vemos cómo el uso de matrices en la gestión de inventarios y logística simplifica procesos y ayuda a la toma de decisiones informadas. En la siguiente sección, exploraremos **ejercicios prácticos** para aplicar estos conceptos en situaciones del mundo real.

VII.3 Ejercicios de Aplicaciones y Soluciones (MathPY)

Ejercicio 61: Gestión de Inventarios en Almacenes con Sumas y Multiplicación de Matrices

Una empresa tiene tres almacenes que abastecen tres tipos de productos: A, B, y C. La empresa desea analizar el stock de cada producto en cada almacén y calcular el inventario total disponible en todos los almacenes. Además, planean hacer un envío a varias tiendas y necesitan calcular la cantidad de productos que pueden distribuir en función del inventario disponible.

1. **Stock en los Almacenes**: La siguiente matriz S representa la cantidad de productos disponibles en cada almacén:

$$S = \begin{pmatrix} 120 & 150 & 200 \\ 130 & 160 & 180 \\ 140 & 170 & 160 \end{pmatrix}$$

donde:

- La primera fila corresponde al **Almacén 1**.
- La segunda fila corresponde al **Almacén 2**.
- La tercera fila corresponde al **Almacén 3**.
- Las columnas representan los productos **A**, **B**, y **C** respectivamente.

2. **Demanda de Productos por Tienda**: La siguiente matriz D muestra la cantidad de productos que cada tienda necesita:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde:

- La primera fila representa la **Tienda 1**.
- La segunda fila representa la **Tienda 2**.
- La tercera fila representa la **Tienda 3**.
- Las columnas representan los productos **A**, **B**, y **C** respectivamente.

Tareas

1. **Calcula el inventario total de cada producto** sumando las filas de la matriz S.
2. **Calcula el número total de productos que se pueden enviar a las tiendas** mediante la multiplicación de la matriz de stock S con la matriz de demanda D.
3. **Interpreta el resultado** y discute cómo la empresa puede usar esta información para optimizar el inventario y satisfacer la demanda.

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del Inventario Total de Cada Producto

Para calcular el inventario total de cada producto en todos los almacenes, sumamos las filas de la matriz S:

$$S = \begin{pmatrix} 120 & 150 & 200 \\ 130 & 160 & 180 \\ 140 & 170 & 160 \end{pmatrix}$$

1. Inventario total del producto A:

$$120 + 130 + 140 = 390$$

2. Inventario total del producto B:

$$150 + 160 + 170 = 480$$

3. Inventario total del producto C:

$$200 + 180 + 160 = 540$$

Por lo tanto, el inventario total disponible es:

$$\text{Inventario Total} = \begin{pmatrix} 390 & 480 & 540 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Cálculo del Total de Productos para Satisfacer la Demanda

Para calcular el número total de productos que se pueden enviar a las tiendas, multiplicamos la matriz S (stock) con la matriz D (demanda):

$$T = S \times D = \begin{pmatrix} 120 & 150 & 200 \\ 130 & 160 & 180 \\ 140 & 170 & 160 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Realizando la multiplicación, obtenemos la matriz resultante T que representa la cantidad total de productos que pueden distribuirse a cada tienda.

In [195…

```
import numpy as np

# Matriz de stock (S)
S = np.array([[120, 150, 200],
              [130, 160, 180],
              [140, 170, 160]])

# Matriz de demanda (D)
D = np.array([[2, 3, 4],
              [1, 2, 3],
              [3, 1, 2]])

# Cálculo del inventario total de cada producto
inventario_total = np.sum(S, axis=0)
print("Inventario total de cada producto (A, B, C):", inventario_total)

# Multiplicación de matrices para calcular el número total de productos a enviar
T = np.dot(S, D)
print("Matriz resultante de productos a distribuir en cada tienda:\n", T)

# Interpretación de los resultados
print("\nInterpretación:")
print("La empresa tiene un inventario total de productos A, B y C de", inventario_t
print("La matriz T representa la cantidad total de productos que se pueden distribu
```

```
Inventario total de cada producto (A, B, C): [390 480 540]
Matriz resultante de productos a distribuir en cada tienda:
 [[ 990  860 1330]
 [ 960  890 1360]
 [ 930  920 1390]]

Interpretación:
La empresa tiene un inventario total de productos A, B y C de [390 480 540] respecti
vamente.
La matriz T representa la cantidad total de productos que se pueden distribuir a cad
a tienda, optimizando el uso del inventario.
```

Ejercicio 62: Análisis de Riesgo en un Portafolio Diversificado usando Matrices

Un inversor tiene un portafolio diversificado compuesto por tres activos (A, B y C) y desea calcular el riesgo total del portafolio. Las inversiones están distribuidas en los activos de la siguiente manera:

- **Activos y Pesos en el Portafolio**:
  - Activo A: 40%
  - Activo B: 30%
  - Activo C: 30%
- **Matriz de Covarianza de los Activos** (en porcentajes):

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.03 & 0.015 \\ 0.02 & 0.015 & 0.05 \end{pmatrix}$$

  La matriz de covarianza Σ muestra las varianzas en la diagonal y las covarianzas en los elementos fuera de la diagonal.

Tareas

1. **Calcula la matriz de pesos** del portafolio en forma de columna.
2. **Determina el riesgo total del portafolio** usando la fórmula de riesgo con matrices.
3. **Interpreta el resultado** y discute cómo la covarianza entre activos impacta el riesgo del portafolio.

Fórmula para el Riesgo Total del Portafolio

El riesgo total (varianza) del portafolio σ_P^2 se calcula usando la siguiente fórmula:

$$\sigma_P^2 = W^T \cdot \Sigma \cdot W$$

donde:

- W es la matriz de pesos del portafolio,
- Σ es la matriz de covarianza de los activos,
- W^T es la transpuesta de W.

Resolución Matemática

Paso 1: Definición de la Matriz de Pesos

La matriz de pesos W se define en forma de columna de acuerdo con los porcentajes de inversión:

$$W = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Cálculo del Riesgo Total del Portafolio

Para calcular el riesgo total del portafolio, aplicamos la fórmula:

$$\sigma_P^2 = W^T \cdot \Sigma \cdot W$$

1. **Transpuesta de W**:

$$W^T = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

2. **Producto de Matrices**:

   Calculamos el producto de $W^T \cdot \Sigma \cdot W$ paso a paso para obtener el valor de la varianza del portafolio.

3. **Raíz Cuadrada de la Varianza**:

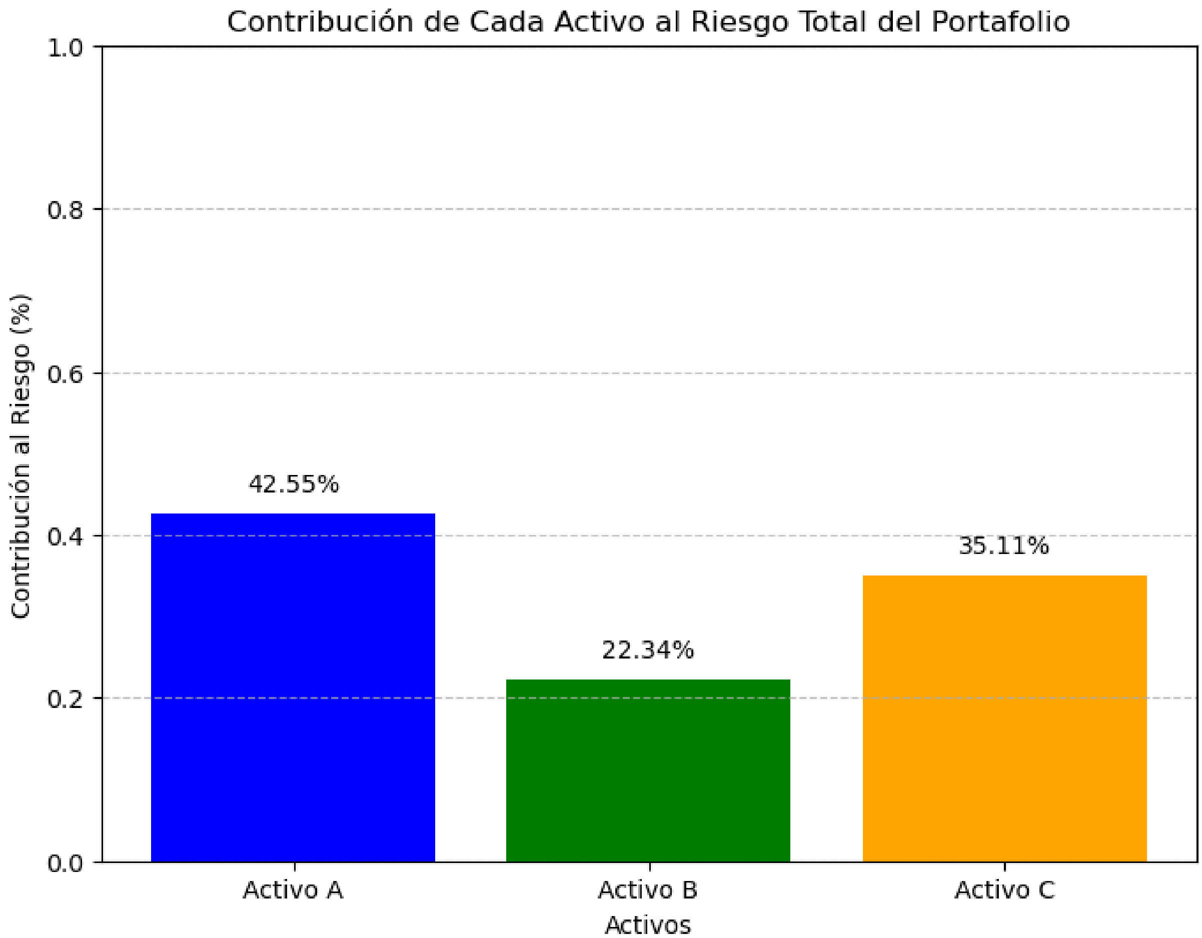
   Para obtener el riesgo total del portafolio, tomamos la raíz cuadrada del resultado, lo que nos da la **desviación estándar del portafolio (σ_P)**.

In [198…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz de pesos (W)
W = np.array([[0.4], [0.3], [0.3]])

# Matriz de covarianza (Sigma)
Sigma = np.array([[0.04, 0.01, 0.02],
                  [0.01, 0.03, 0.015],
                  [0.02, 0.015, 0.05]])

# Cálculo de la varianza del portafolio (σ_P^2)
varianza_portafolio = np.dot(W.T, np.dot(Sigma, W))[0, 0]
```

```
riesgo_portafolio = np.sqrt(varianza_portafolio)

# Contribución de cada activo al riesgo total del portafolio
contribucion_riesgo = np.dot(Sigma, W).flatten() * W.flatten() / riesgo_portafolio*
nombres_activos = ['Activo A', 'Activo B', 'Activo C']

# Resultados
print(f"Varianza del portafolio: {varianza_portafolio:.4f}")
print(f"Riesgo total del portafolio (desviación estándar): {riesgo_portafolio:.4%}"
print(f"Contribución de cada activo al riesgo total: {contribucion_riesgo}")

# Gráfica de la contribución al riesgo de cada activo
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.bar(nombres_activos, contribucion_riesgo, color=['blue', 'green', 'orange'])
plt.title("Contribución de Cada Activo al Riesgo Total del Portafolio")
plt.xlabel("Activos")
plt.ylabel("Contribución al Riesgo (%)")
plt.ylim(0, 1)
plt.grid(True, axis='y', linestyle='--', alpha=0.7)

# Añadir etiquetas en cada barra
for i, contribucion in enumerate(contribucion_riesgo):
    plt.text(i, contribucion + 0.02, f"{contribucion * 100:.2f}%", ha='center', va=

plt.show()
```

```
Varianza del portafolio: 0.0235
Riesgo total del portafolio (desviación estándar): 15.3297%
Contribución de cada activo al riesgo total: [0.42553191 0.22340426 0.35106383]
```



Ejercicio 63: Análisis de Interdependencia Económica usando una Matriz de Insumo-Producto

Una economía está compuesta por tres sectores principales: Agricultura, Industria, y Servicios. La matriz de insumo-producto A muestra el porcentaje de insumos que cada sector necesita de los demás sectores para producir una unidad de producción.

La matriz de insumo-producto es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Cada valor en la matriz representa el porcentaje de insumo de un sector necesario para satisfacer la producción de otro sector. Por ejemplo, la fila "Agricultura" indica cuánto requiere de "Agricultura", "Industria" y "Servicios" para producir una unidad de producción en Agricultura.

Supongamos que la **demanda final** de cada sector es la siguiente:

$$D = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}$$

donde:

- La demanda final de Agricultura es 100 unidades.
- La demanda final de Industria es 150 unidades.
- La demanda final de Servicios es 120 unidades.

Tareas

1. **Calcula el vector de producción total** necesario para satisfacer la demanda final usando la fórmula de insumo-producto.
2. **Interpreta los resultados** para entender la interdependencia entre los sectores económicos.
3. **Grafica** la producción total de cada sector en una barra para visualizar el impacto de la demanda final.

Fórmula para el Cálculo del Vector de Producción Total

El vector de producción total X se obtiene resolviendo la siguiente ecuación de insumo-producto:

$$X = (I - A)^{-1} \cdot D$$

donde:

- I es la matriz identidad,
- A es la matriz de insumo-producto,
- D es el vector de demanda final.

Resolución Matemática

Paso 1: Definición de la Ecuación Insumo-Producto

La ecuación de insumo-producto se define como:

$$X = (I - A)^{-1} \cdot D$$

donde:

- I es la matriz identidad de tamaño 3×3,

- A es la matriz de insumo-producto:

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

- D es el vector de demanda final:

$$D = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Cálculo de $(I - A)$

Calculamos $I - A$:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & 0.9 & -0.3 \\ -0.1 & -0.3 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Inversa de $(I - A)$

Calculamos $(I - A)^{-1}$ para obtener la matriz de impacto.

Paso 4: Cálculo del Vector de Producción Total

Multiplicamos $(I - A)^{-1}$ por D para encontrar X:

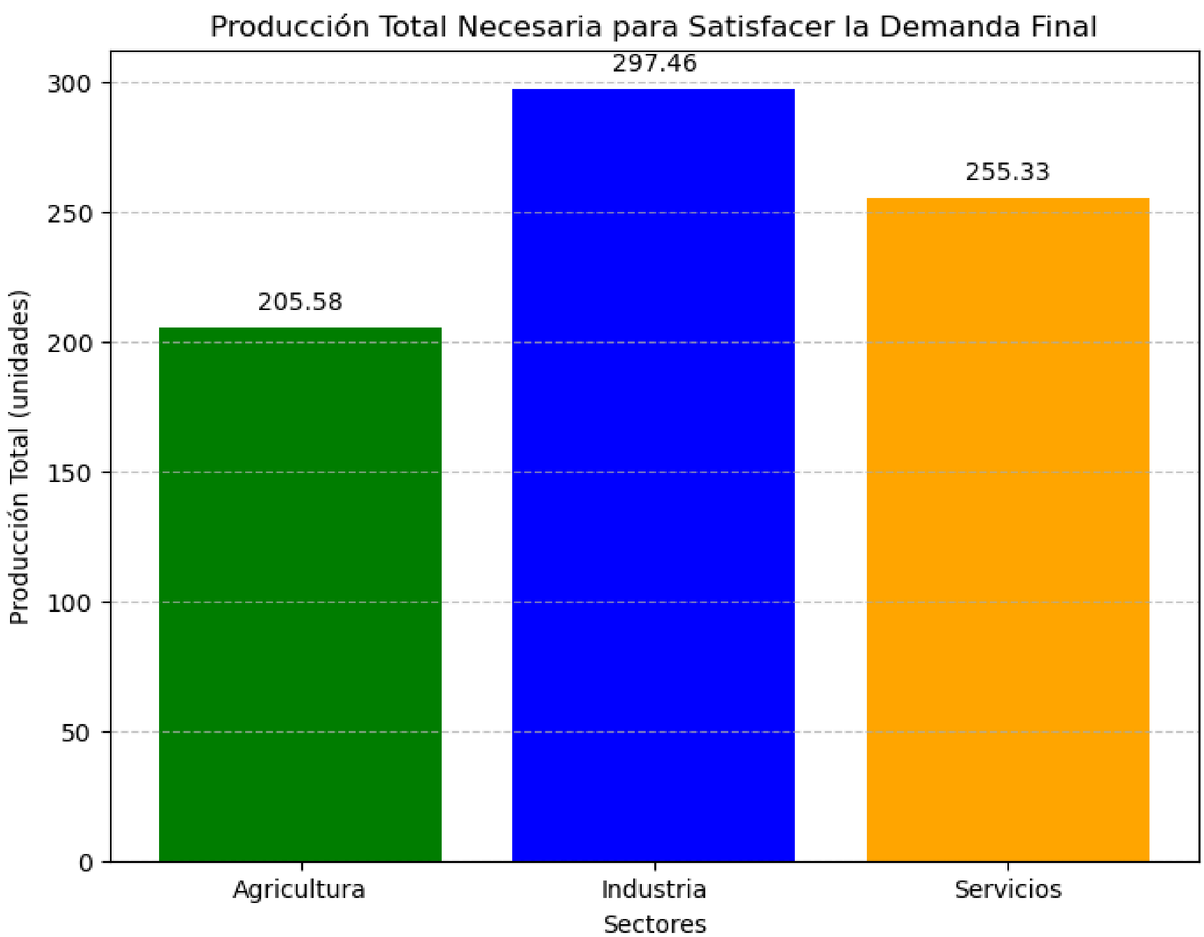
$$X = (I - A)^{-1} \cdot D$$

In [201…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz de insumo-producto (A)
A = np.array([[0.1, 0.2, 0.1],
              [0.2, 0.1, 0.3],
              [0.1, 0.3, 0.1]])

# Matriz identidad (I)
I = np.eye(3)

# Vector de demanda final (D)
D = np.array([[100], [150], [120]])

# Calcular (I - A)
I_minus_A = I - A

# Calcular la inversa de (I - A)
try:
    I_minus_A_inv = np.linalg.inv(I_minus_A)
except np.linalg.LinAlgError:
    print("La matriz no es invertible.")
    I_minus_A_inv = None
```

```
# Calcular el vector de producción total (X)
if I_minus_A_inv is not None:
    X = np.dot(I_minus_A_inv, D)
    print("Vector de producción total (X):")
    print(X)

    # Gráfica de la producción total de cada sector
    sectores = ["Agricultura", "Industria", "Servicios"]
    produccion_total = X.flatten()

    plt.figure(figsize=(8, 6))
    plt.bar(sectores, produccion_total, color=["green", "blue", "orange"])
    plt.title("Producción Total Necesaria para Satisfacer la Demanda Final")
    plt.xlabel("Sectores")
    plt.ylabel("Producción Total (unidades)")
    plt.grid(True, axis="y", linestyle="--", alpha=0.7)

    # Añadir etiquetas de valores en cada barra
    for i, v in enumerate(produccion_total):
        plt.text(i, v + 5, f"{v:.2f}", ha="center", va="bottom")

    plt.show()
```

```
Vector de producción total (X):
[[205.58375635]
 [297.46192893]
 [255.32994924]]
```



Ejercicio 64: Modelo de Markov para Análisis de Transición entre Estados

Un investigador en ciencias sociales desea estudiar el comportamiento de personas que cambian entre tres estados diferentes de preferencia de consumo: **Marca A**, **Marca B**, y **Marca C**. Las probabilidades de transición mensuales entre estos estados se representan mediante la siguiente **matriz de transición** P:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

donde:

- La primera fila representa las probabilidades de que un individuo en **Marca A** cambie a cualquiera de las otras marcas en el próximo mes.
- La segunda fila representa las probabilidades de cambio para **Marca B**.
- La tercera fila representa las probabilidades de cambio para **Marca C**.

Actualmente, la **distribución inicial** de personas en cada estado es:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$$

donde:

- 500 personas prefieren **Marca A**,
- 300 personas prefieren **Marca B**,
- 200 personas prefieren **Marca C**.

Tareas

1. **Calcula la distribución de personas en cada marca** después de un mes y dos meses usando el modelo de Markov.
2. **Interpreta los resultados** para entender cómo cambian las preferencias de los consumidores con el tiempo.
3. **Grafica** la evolución de las preferencias para cada marca a lo largo de los meses.

Fórmula para el Cálculo de la Distribución en el Modelo de Markov

La distribución después de t pasos se calcula mediante la fórmula:

$$X_t = P^t \cdot X_0$$

donde:

- P es la matriz de transición,
- X_0 es la distribución inicial.

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo de la Distribución Después de 1 Mes

La distribución después de 1 mes, X_1, se calcula como:

$$X_1 = P \cdot X_0$$

Sustituyendo P y X_0:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Cálculo de la Distribución Después de 2 Meses

La distribución después de 2 meses, X_2, se calcula como:

$$X_2 = P^2 \cdot X_0$$

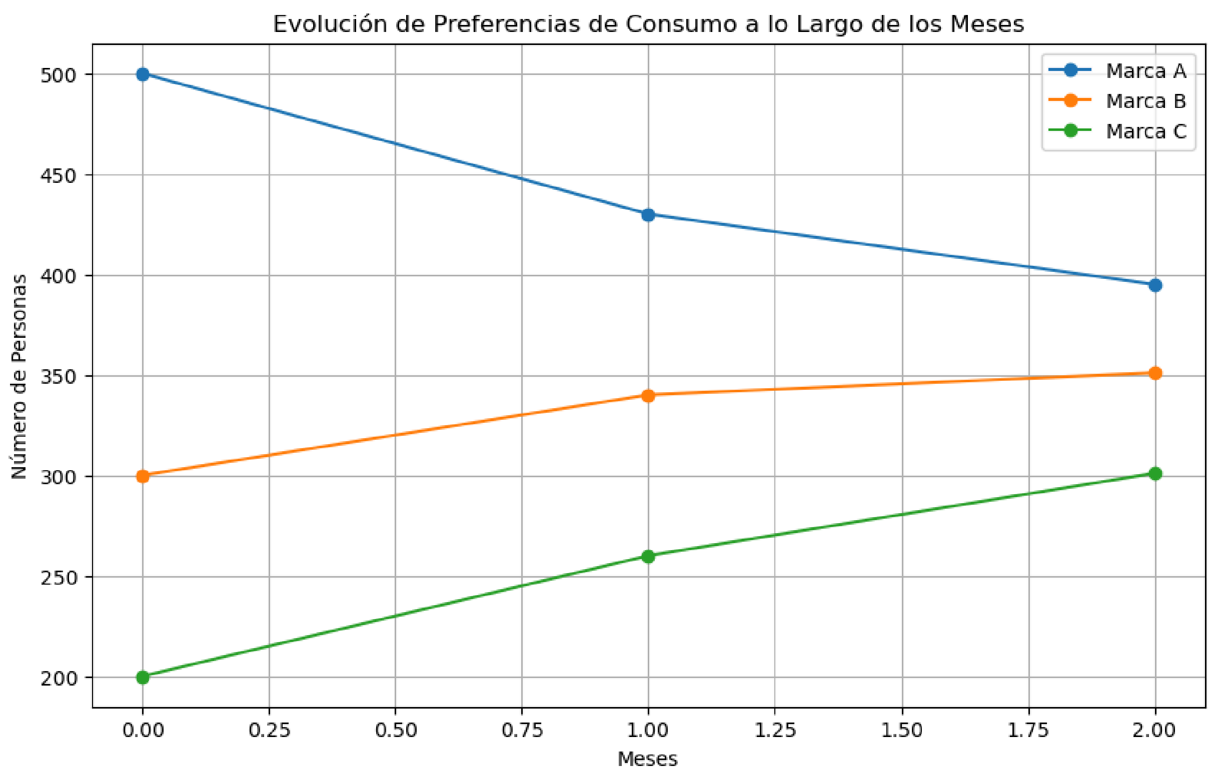
donde P^2 es la multiplicación de la matriz P por sí misma.

In [204…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz de transición (P)
P = np.array([[0.7, 0.2, 0.1],
              [0.3, 0.5, 0.2],
              [0.1, 0.3, 0.6]])

# Distribución inicial (X0)
X0 = np.array([[500], [300], [200]])

# Distribución después de 1 mes
X1 = np.dot(P, X0)

# Distribución después de 2 meses (P^2 * X0)
P2 = np.dot(P, P)
X2 = np.dot(P2, X0)

# Resultados
print("Distribución después de 1 mes:")
print(X1)
print("Distribución después de 2 meses:")
print(X2)
```

```
# Evolución de las preferencias a lo largo de los meses
meses = [0, 1, 2]
marca_A = [X0[0, 0], X1[0, 0], X2[0, 0]]
marca_B = [X0[1, 0], X1[1, 0], X2[1, 0]]
marca_C = [X0[2, 0], X1[2, 0], X2[2, 0]]

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(meses, marca_A, marker='o', label="Marca A")
plt.plot(meses, marca_B, marker='o', label="Marca B")
plt.plot(meses, marca_C, marker='o', label="Marca C")
plt.title("Evolución de Preferencias de Consumo a lo Largo de los Meses")
plt.xlabel("Meses")
plt.ylabel("Número de Personas")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Distribución después de 1 mes:
[[430.]
 [340.]
 [260.]]
Distribución después de 2 meses:
[[395.]
 [351.]
 [301.]]
```



Ejercicio 65: Análisis de Equilibrio de Precios en un Mercado usando Matrices

Resolución Matemática

Paso 1: Definición del Sistema de Ecuaciones

El sistema de ecuaciones lineales para el equilibrio de precios está dado por:

$$M \cdot P = B$$

donde:

- M es la matriz de coeficientes de interdependencia de precios:

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.2 & -0.1 \\ -0.3 & 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & -0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

- B es el vector de precios de equilibrio:

$$B = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Inversa de la Matriz M

Calculamos M^{-1} para resolver el sistema de ecuaciones:

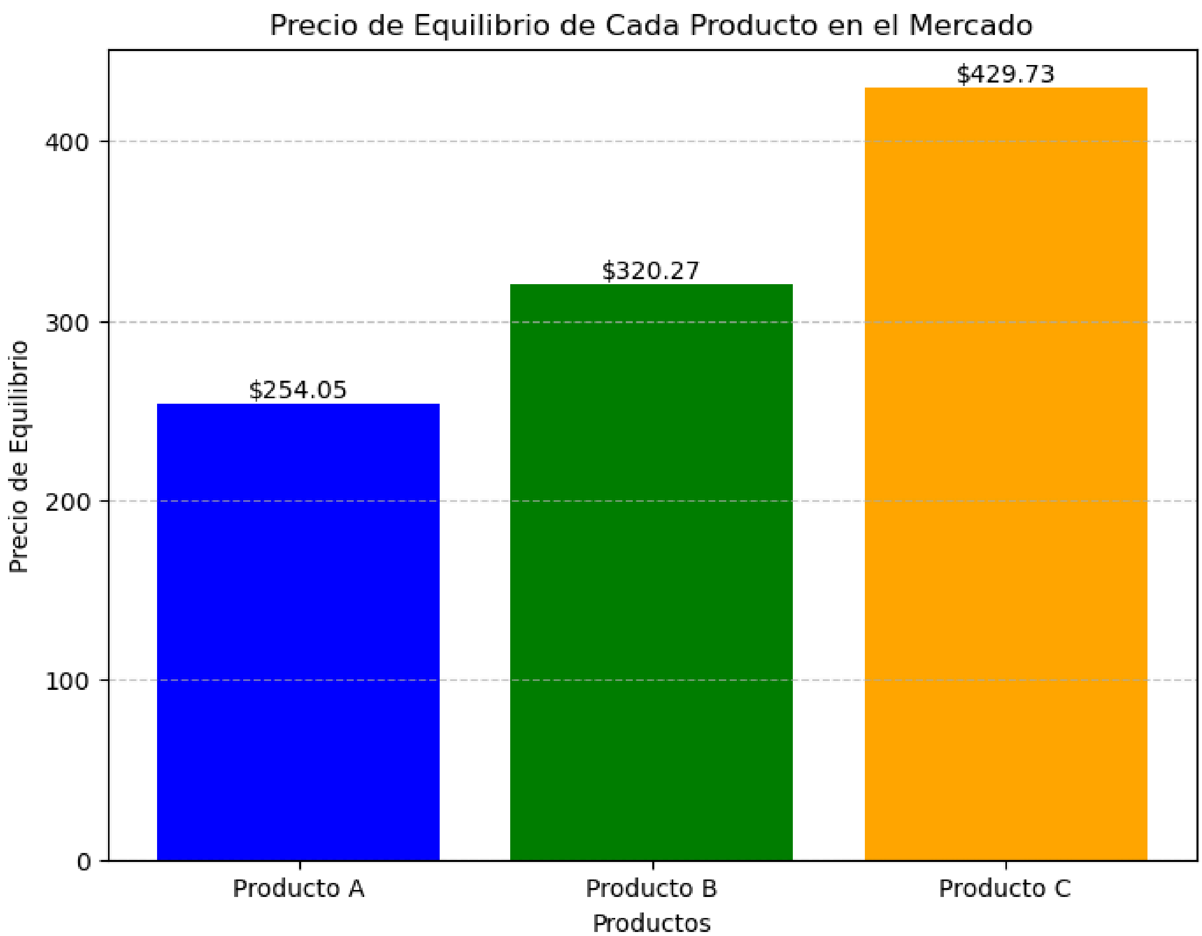
$$P = M^{-1} \cdot B$$

In [207…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz de coeficientes de interdependencia (M)
M = np.array([[0.5, -0.2, -0.1],
              [-0.3, 0.6, -0.2],
              [-0.2, -0.3, 0.4]])

# Vector de precios de equilibrio (B)
B = np.array([[20], [30], [25]])

# Cálculo del precio de equilibrio (P) usando la inversa de M
try:
    M_inv = np.linalg.inv(M)
    P = np.dot(M_inv, B)
    print("Precio de equilibrio de cada producto (P):")
    print(P)
except np.linalg.LinAlgError:
    print("La matriz M no es invertible.")

# Gráfica del precio de equilibrio de cada producto
productos = ["Producto A", "Producto B", "Producto C"]
precios_equilibrio = P.flatten()
```

```
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.bar(productos, precios_equilibrio, color=['blue', 'green', 'orange'])
plt.title("Precio de Equilibrio de Cada Producto en el Mercado")
plt.xlabel("Productos")
plt.ylabel("Precio de Equilibrio")
plt.grid(True, axis='y', linestyle='--', alpha=0.7)

# Añadir etiquetas de valores en cada barra
for i, precio in enumerate(precios_equilibrio):
    plt.text(i, precio + 0.5, f"${precio:.2f}", ha='center', va='bottom')

plt.show()
```

```
Precio de equilibrio de cada producto (P):
[[254.05405405]
 [320.27027027]
 [429.72972973]]
```



Ejercicio 66: Cálculo de Rendimiento Esperado de un Portafolio usando Matrices

Un inversor tiene un portafolio diversificado con tres activos: **Activo X**, **Activo Y**, y **Activo Z**. Los rendimientos históricos de estos activos, en diferentes períodos, están dados por la siguiente **matriz de rendimientos** R (en porcentaje):

$$R = \begin{pmatrix} 0.08 & 0.12 & 0.10 \\ 0.10 & 0.14 & 0.09 \\ 0.07 & 0.11 & 0.12 \\ 0.09 & 0.13 & 0.11 \end{pmatrix}$$

Cada fila representa los rendimientos de los activos en un período de tiempo.

El inversor ha decidido asignar los siguientes pesos a cada activo en el portafolio:

$$W = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.35 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

donde:

- 40% del portafolio se invierte en el **Activo X**,
- 35% en el **Activo Y**,
- 25% en el **Activo Z**.

Tareas

1. **Calcula el rendimiento esperado de cada activo** usando el promedio de los rendimientos históricos.
2. **Calcula el rendimiento esperado del portafolio** mediante la combinación de los rendimientos esperados de los activos y la matriz de pesos.
3. **Grafica** el rendimiento esperado de cada activo y el rendimiento del portafolio.

Fórmula para el Rendimiento Esperado del Portafolio

El rendimiento esperado del portafolio $E(R_P)$ se calcula como:

$$E(R_P) = W^T \cdot E(R)$$

donde:

- $E(R)$ es el vector de rendimiento esperado de cada activo,
- W^T es la transpuesta de la matriz de pesos.

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del Rendimiento Esperado de Cada Activo

El rendimiento esperado de cada activo se calcula como el promedio de sus rendimientos históricos. Si R_i representa el rendimiento de un activo i en cada período, el rendimiento esperado $E(R_i)$ se define como:

$$E(R_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} R_{ij}$$

donde n es el número de períodos.

Paso 2: Cálculo del Rendimiento Esperado del Portafolio

El rendimiento esperado del portafolio, $E(R_P)$, se calcula mediante:

$$E(R_P) = W^T \cdot E(R)$$

donde:

- W es el vector de pesos:

$$W = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.35 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

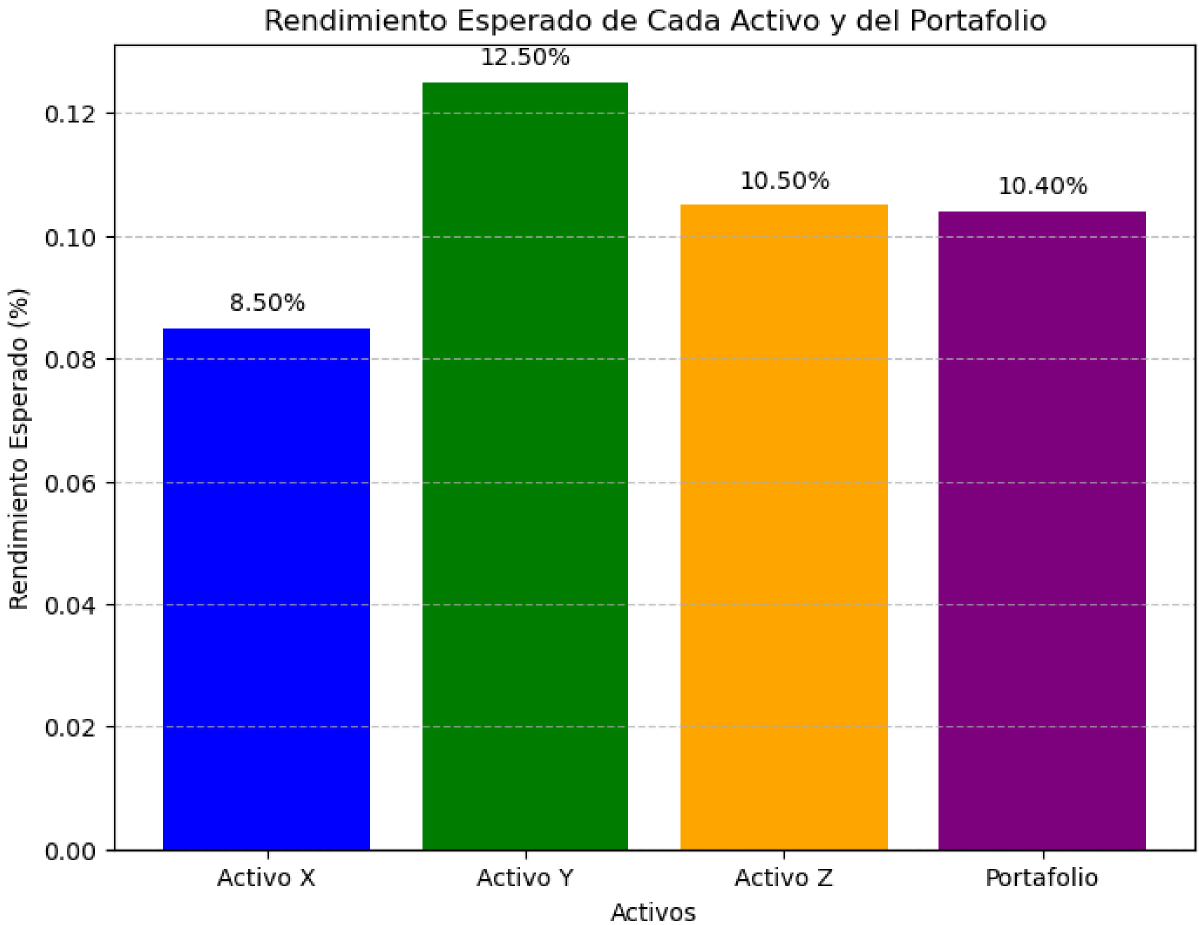
- $E(R)$ es el vector de rendimientos esperados de cada activo.

In [210…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz de rendimientos históricos (R)
R = np.array([[0.08, 0.12, 0.10],
              [0.10, 0.14, 0.09],
              [0.07, 0.11, 0.12],
              [0.09, 0.13, 0.11]])

# Vector de pesos del portafolio (W)
W = np.array([0.4, 0.35, 0.25])

# Cálculo del rendimiento esperado de cada activo (promedio de cada columna)
rendimientos_esperados = np.mean(R, axis=0)
print("Rendimiento esperado de cada activo:", rendimientos_esperados)

# Cálculo del rendimiento esperado del portafolio
rendimiento_portafolio = np.dot(W, rendimientos_esperados)
print("Rendimiento esperado del portafolio:", rendimiento_portafolio)

# Gráfica de los rendimientos esperados
activos = ["Activo X", "Activo Y", "Activo Z", "Portafolio"]
rendimientos = np.append(rendimientos_esperados, rendimiento_portafolio)

plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.bar(activos, rendimientos, color=["blue", "green", "orange", "purple"])
plt.title("Rendimiento Esperado de Cada Activo y del Portafolio")
plt.xlabel("Activos")
plt.ylabel("Rendimiento Esperado (%)")
plt.grid(True, axis="y", linestyle="--", alpha=0.7)
```

```
# Añadir etiquetas de valores en cada barra
for i, rendimiento in enumerate(rendimientos):
    plt.text(i, rendimiento + 0.002, f"{rendimiento:.2%}", ha='center', va='bottom'

plt.show()
```

```
Rendimiento esperado de cada activo: [0.085 0.125 0.105]
Rendimiento esperado del portafolio: 0.10399999999999998
```



Ejercicio 67: Optimización de Costos de Transporte usando Matrices

Una empresa tiene dos plantas de producción (Planta A y Planta B) y tres centros de distribución (Centro 1, Centro 2 y Centro 3). El costo de transporte por unidad de producto entre cada planta y cada centro se muestra en la **matriz de costos de transporte** C:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

donde:

- La **Planta A** tiene costos de transporte de 6, 8, y 10 unidades monetarias para el Centro 1, Centro 2, y Centro 3, respectivamente.

- La **Planta B** tiene costos de transporte de 9, 7, y 4 unidades monetarias para los mismos centros.

Cada planta tiene un **límite de producción** y cada centro tiene una **demanda** específica:

- **Límites de Producción**:
  - Planta A: 100 unidades
  - Planta B: 150 unidades
- **Demanda en Centros de Distribución**:
  - Centro 1: 80 unidades
  - Centro 2: 120 unidades
  - Centro 3: 50 unidades

Tareas

1. **Formule el problema de minimización de costos** para cumplir con la demanda en cada centro de distribución sin exceder el límite de producción de cada planta.
2. **Calcule la asignación óptima** de envíos desde cada planta a cada centro para minimizar los costos totales.
3. **Grafique la asignación de envíos** desde cada planta a cada centro para visualizar la solución.

Formulación del Problema

Este problema se puede formular como un problema de programación lineal en el que buscamos minimizar el costo total de transporte:

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a:

- Restricciones de producción para cada planta,
- Restricciones de demanda para cada centro.

donde:

- c_{ij} es el costo de transporte desde la planta i al centro j,
- x_{ij} es el número de unidades enviadas desde la planta i al centro j.

Resolución Matemática

Paso 1: Definir las Variables de Decisión

Sean x_{A1}, x_{A2}, x_{A3} las unidades enviadas desde la Planta A a los Centros 1, 2, y 3 respectivamente, y x_{B1}, x_{B2}, x_{B3} las unidades enviadas desde la Planta B a los mismos centros.

Paso 2: Función Objetivo

La función objetivo de costo total es:

$$Z = 6x_{A1} + 8x_{A2} + 10x_{A3} + 9x_{B1} + 7x_{B2} + 4x_{B3}$$

Paso 3: Restricciones

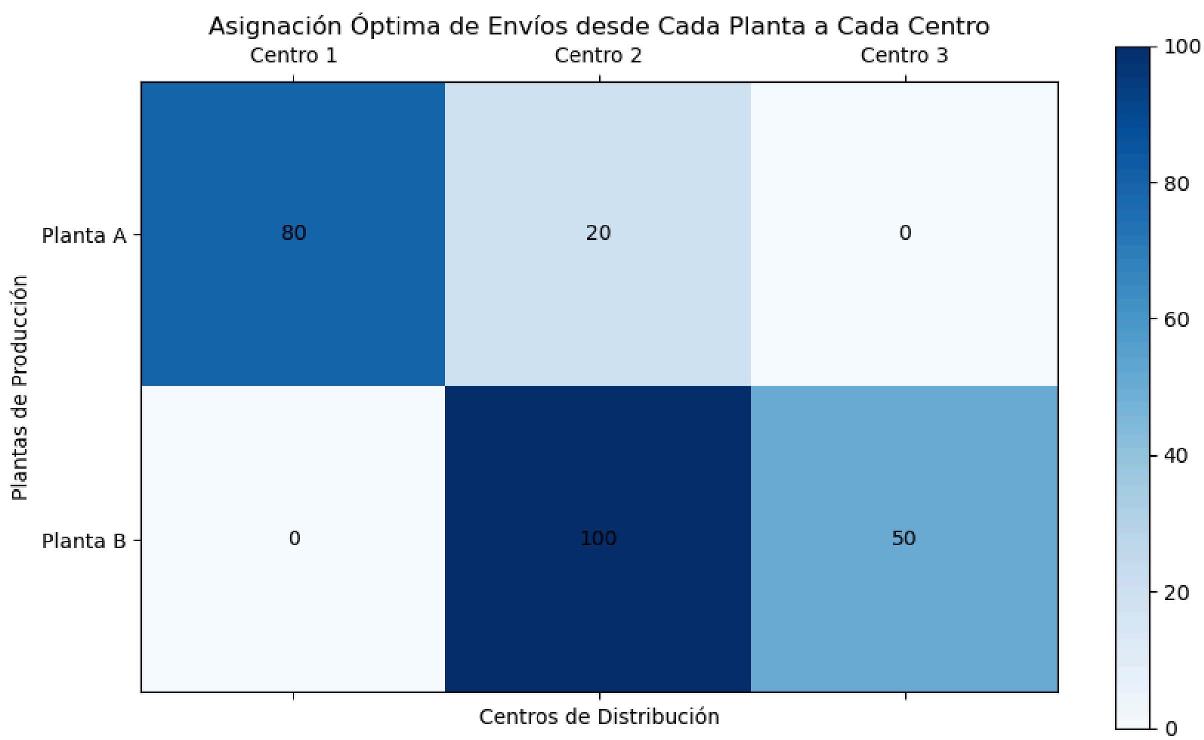
1. **Restricciones de Producción**:
   - Planta A: $x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} \leq 100$
   - Planta B: $x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 150$
2. **Restricciones de Demanda**:
   - Centro 1: $x_{A1} + x_{B1} = 80$
   - Centro 2: $x_{A2} + x_{B2} = 120$
   - Centro 3: $x_{A3} + x_{B3} = 50$
3. **Restricciones de No Negatividad**:
   - $x_{ij} \geq 0$ para todos los i, j.

In [213…

```
from scipy.optimize import linprog
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Costos de transporte por unidad (en orden [x_A1, x_A2, x_A3, x_B1, x_B2, x_B3])
costos = [6, 8, 10, 9, 7, 4]

# Coeficientes de las restricciones de producción y demanda
A_eq = [
    [1, 1, 1, 0, 0, 0],  # Restricción de producción en Planta A
    [0, 0, 0, 1, 1, 1],  # Restricción de producción en Planta B
    [1, 0, 0, 1, 0, 0],  # Demanda en Centro 1
    [0, 1, 0, 0, 1, 0],  # Demanda en Centro 2
    [0, 0, 1, 0, 0, 1]   # Demanda en Centro 3
]

# Lados derechos de las restricciones (producción y demanda)
b_eq = [100, 150, 80, 120, 50]

# Resolver el problema de optimización
resultado = linprog(costos, A_eq=A_eq, b_eq=b_eq, bounds=(0, None), method='highs')
asignaciones = resultado.x

# Reshape para visualizar mejor las asignaciones en matriz
asignaciones_matriz = asignaciones.reshape((2, 3))
```

```python
# Mostrar resultados
print("Asignación óptima de envíos desde cada planta a cada centro de distribución:
print(asignaciones_matriz)
print(f"\nCosto mínimo de transporte: {resultado.fun:.2f} unidades monetarias")

# Gráfica de la asignación de envíos
plantas = ["Planta A", "Planta B"]
centros = ["Centro 1", "Centro 2", "Centro 3"]

fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))
c = ax.matshow(asignaciones_matriz, cmap="Blues")
fig.colorbar(c)

# Añadir etiquetas
for (i, j), valor in np.ndenumerate(asignaciones_matriz):
    ax.text(j, i, f"{valor:.0f}", ha="center", va="center", color="black")

ax.set_xticks(range(len(centros)))
ax.set_yticks(range(len(plantas)))
ax.set_xticklabels(centros)
ax.set_yticklabels(plantas)
ax.set_title("Asignación Óptima de Envíos desde Cada Planta a Cada Centro")
plt.xlabel("Centros de Distribución")
plt.ylabel("Plantas de Producción")
plt.show()
```

```
Asignación óptima de envíos desde cada planta a cada centro de distribución:
[[ 80.  20.   0.]
 [  0. 100.  50.]]

Costo mínimo de transporte: 1540.00 unidades monetarias
```



Ejercicio 68: Modelo de Encuestas de Opinión Pública usando Matrices de Transición

Un grupo de investigadores desea estudiar cómo cambian las opiniones de los ciudadanos en tres categorías de preferencia política: **Partido X**, **Partido Y**, y **Partido Z**. Cada mes, se realiza una encuesta para observar cómo se mueven los individuos entre estos grupos de preferencia.

La **matriz de transición de preferencias** P muestra la probabilidad de que una persona cambie de preferencia de un mes a otro:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

donde:

- La primera fila representa la probabilidad de que una persona que prefiere el **Partido X** cambie o permanezca en el mismo grupo el mes siguiente.
- La segunda fila representa las probabilidades de cambio para el **Partido Y**.
- La tercera fila representa las probabilidades de cambio para el **Partido Z**.

La **distribución inicial de preferencias** entre los ciudadanos es:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$$

donde:

- 300 personas prefieren el **Partido X**,
- 400 personas prefieren el **Partido Y**,
- 300 personas prefieren el **Partido Z**.

Tareas

1. **Calcula la distribución de preferencias** después de 1, 2, y 3 meses usando la matriz de transición.
2. **Interpreta los resultados** para entender cómo cambian las opiniones de los ciudadanos con el tiempo.
3. **Grafica** la evolución de las preferencias para cada partido a lo largo de los meses.

Fórmula para el Cálculo de la Distribución en el Modelo de Encuestas de Opinión

La distribución de preferencias después de t pasos se calcula mediante:

$$X_t = P^t \cdot X_0$$

donde:

- P es la matriz de transición,
- X_0 es la distribución inicial de preferencias.

Resolución Matemática

Paso 1: Definición del Modelo de Encuestas de Opinión

La distribución de preferencias después de 1 mes, X_1, se calcula mediante:

$$X_1 = P \cdot X_0$$

Para 2 meses y 3 meses, la distribución se calcula multiplicando iterativamente la matriz de transición P por el vector de preferencias anterior:

$$X_2 = P^2 \cdot X_0$$

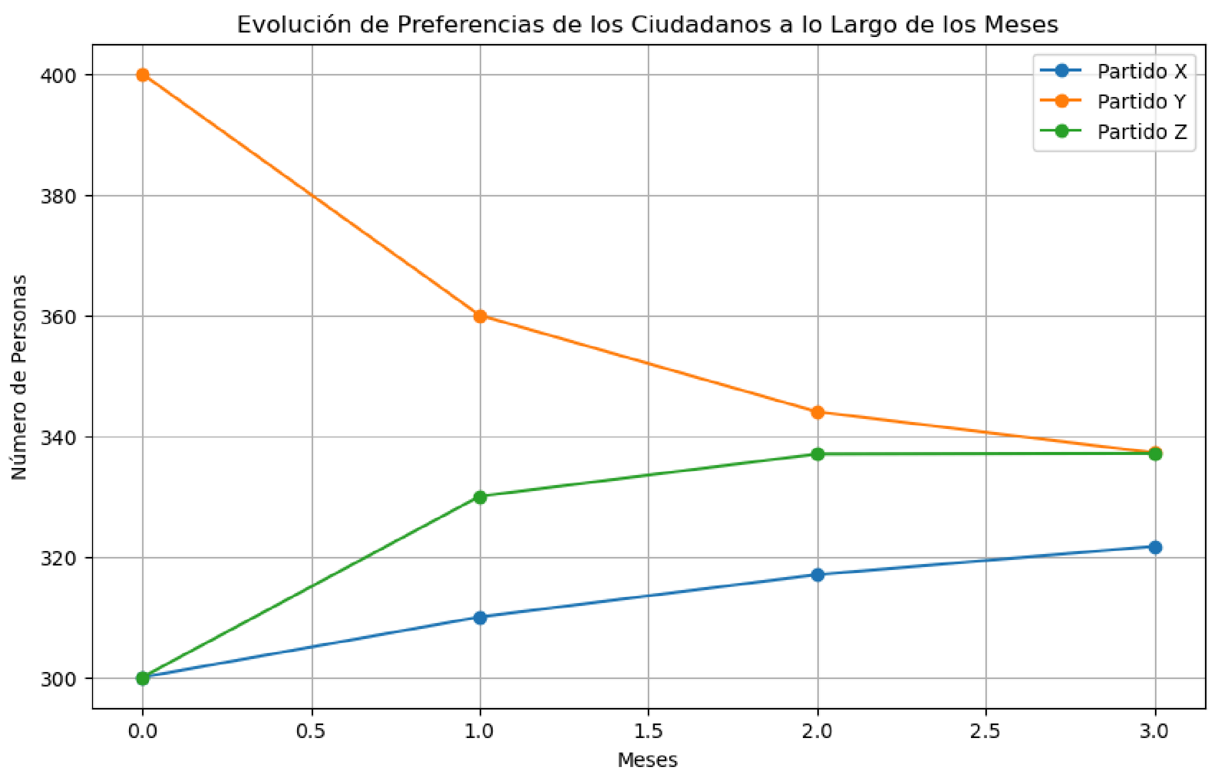
$$X_3 = P^3 \cdot X_0$$

In [216…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz de transición de preferencias (P)
P = np.array([[0.8, 0.1, 0.1],
              [0.2, 0.6, 0.2],
              [0.1, 0.3, 0.6]])

# Distribución inicial de preferencias (X0)
X0 = np.array([[300], [400], [300]])

# Cálculo de la distribución después de 1, 2 y 3 meses
X1 = np.dot(P, X0)
X2 = np.dot(P, X1)
X3 = np.dot(P, X2)

# Resultados
print("Distribución después de 1 mes:")
print(X1)
print("Distribución después de 2 meses:")
print(X2)
print("Distribución después de 3 meses:")
print(X3)

# Evolución de las preferencias a lo largo de los meses
meses = [0, 1, 2, 3]
partido_X = [X0[0, 0], X1[0, 0], X2[0, 0], X3[0, 0]]
```

```python
partido_Y = [X0[1, 0], X1[1, 0], X2[1, 0], X3[1, 0]]
partido_Z = [X0[2, 0], X1[2, 0], X2[2, 0], X3[2, 0]]

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(meses, partido_X, marker='o', label="Partido X")
plt.plot(meses, partido_Y, marker='o', label="Partido Y")
plt.plot(meses, partido_Z, marker='o', label="Partido Z")
plt.title("Evolución de Preferencias de los Ciudadanos a lo Largo de los Meses")
plt.xlabel("Meses")
plt.ylabel("Número de Personas")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Distribución después de 1 mes:
[[310.]
 [360.]
 [330.]]
Distribución después de 2 meses:
[[317.]
 [344.]
 [337.]]
Distribución después de 3 meses:
[[321.7]
 [337.2]
 [337.1]]
```



Ejercicio 69: Modelo de Equilibrio de Mercado usando Matrices de Demanda y Oferta

Una economía tiene tres productos interdependientes: **Producto A**, **Producto B**, y **Producto C**. Los precios de equilibrio de estos productos dependen de las relaciones de demanda y oferta entre ellos, que se representan en la **matriz de influencia de precios** M:

$$M = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.3 & -0.1 \\ -0.2 & 1.1 & -0.4 \\ -0.1 & -0.2 & 1.3 \end{pmatrix}$$

Cada valor en la matriz M indica cómo el precio de un producto afecta a los precios de los otros productos. Actualmente, las demandas en el mercado establecen un **precio de referencia** para cada producto, dado por el vector P_0:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}$$

donde:

- 100 es el precio de referencia para el **Producto A**.
- 150 es el precio de referencia para el **Producto B**.
- 120 es el precio de referencia para el **Producto C**.

Tareas

1. **Calcule el vector de precios de equilibrio** para cada producto resolviendo el sistema de ecuaciones lineales $M \cdot P = P_0$.
2. **Interprete los resultados** para entender cómo cada precio de equilibrio responde a la demanda en el mercado.
3. **Grafique los precios de equilibrio** de cada producto para visualizar la distribución de precios en el mercado.

Resolución del Sistema de Equilibrio de Precios

La ecuación para encontrar el precio de equilibrio P se define como:

$$P = M^{-1} \cdot P_0$$

donde:

- M es la matriz de influencia de precios,
- P_0 es el vector de precios de referencia.

Resolución Matemática

Paso 1: Definición del Sistema de Ecuaciones

El sistema de ecuaciones de equilibrio de precios se define mediante la ecuación:

$$M \cdot P = P_0$$

donde:

- M es la matriz de influencia de precios:

$$M = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.3 & -0.1 \\ -0.2 & 1.1 & -0.4 \\ -0.1 & -0.2 & 1.3 \end{pmatrix}$$

- P_0 es el vector de precios de referencia:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Inversa de la Matriz M

Para resolver el sistema, calculamos la inversa de M:

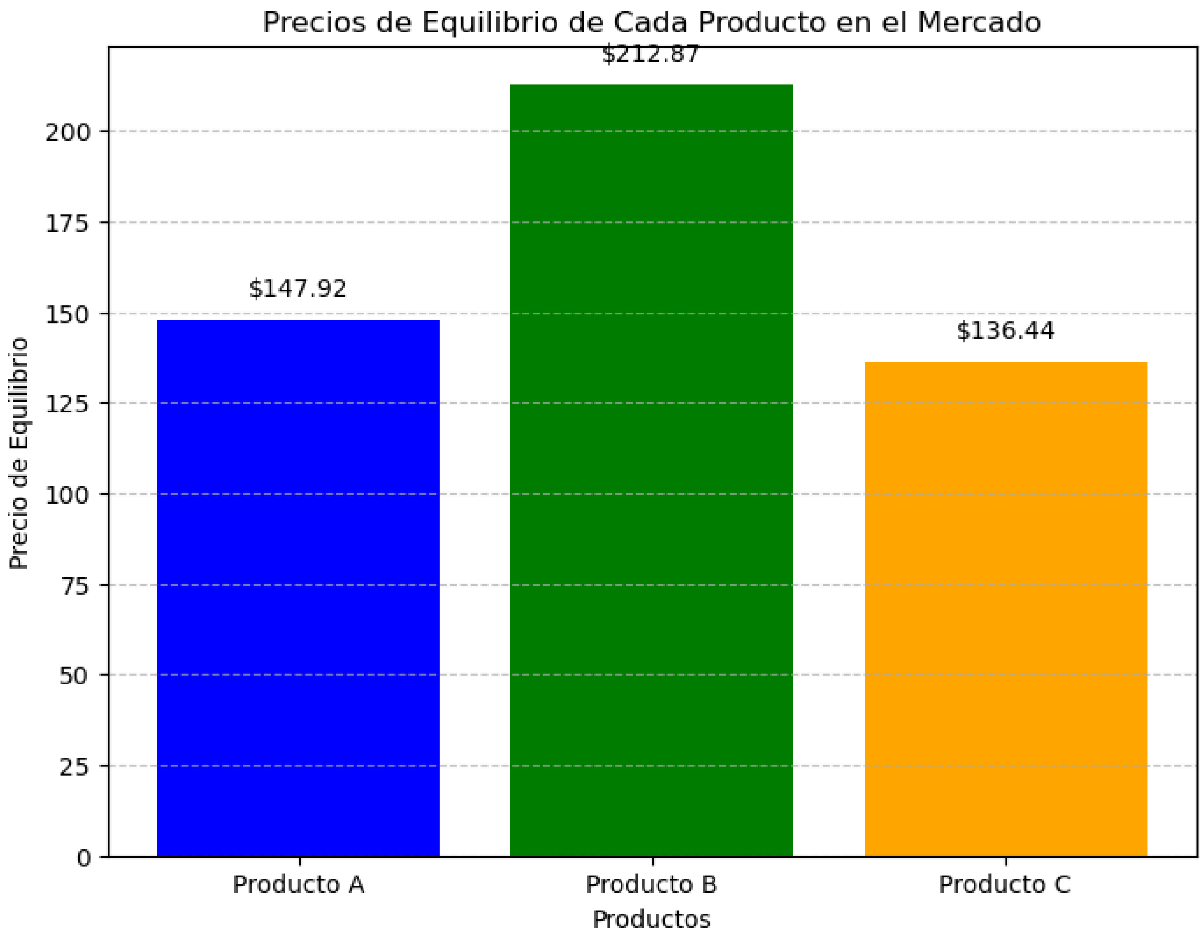
$$P = M^{-1} \cdot P_0$$

In [219…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz de influencia de precios (M)
M = np.array([[1.2, -0.3, -0.1],
              [-0.2, 1.1, -0.4],
              [-0.1, -0.2, 1.3]])

# Vector de precios de referencia (P0)
P0 = np.array([[100], [150], [120]])

# Calcular el precio de equilibrio (P) usando la inversa de M
try:
    M_inv = np.linalg.inv(M)
    P = np.dot(M_inv, P0)
    print("Precios de equilibrio de cada producto (P):")
    print(P)
except np.linalg.LinAlgError:
    print("La matriz M no es invertible.")

# Gráfica de los precios de equilibrio
productos = ["Producto A", "Producto B", "Producto C"]
precios_equilibrio = P.flatten()

plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.bar(productos, precios_equilibrio, color=['blue', 'green', 'orange'])
plt.title("Precios de Equilibrio de Cada Producto en el Mercado")
plt.xlabel("Productos")
plt.ylabel("Precio de Equilibrio")
```

```
plt.grid(True, axis='y', linestyle='--', alpha=0.7)

# Añadir etiquetas de valores en cada barra
for i, precio in enumerate(precios_equilibrio):
    plt.text(i, precio + 5, f"${precio:.2f}", ha='center', va='bottom')

plt.show()
```

```
Precios de equilibrio de cada producto (P):
[[147.92079208]
 [212.87128713]
 [136.43564356]]
```



Ejercicio 70: Cálculo del Riesgo Total de un Portafolio usando Matrices de Covarianza

Un inversor ha construido un portafolio diversificado que contiene tres activos: **Activo X**, **Activo Y**, y **Activo Z**. La **matriz de covarianza** de los rendimientos de estos activos, en términos de porcentajes de riesgo (volatilidad), se presenta de la siguiente forma:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.02 & 0.01 \\ 0.02 & 0.05 & 0.015 \\ 0.01 & 0.015 & 0.03 \end{pmatrix}$$

Cada valor en la matriz representa la covarianza entre los activos. El inversor ha asignado los siguientes **pesos de inversión** en cada activo:

$$W = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

donde:

- 50% del capital está invertido en el **Activo X**,
- 30% en el **Activo Y**,
- 20% en el **Activo Z**.

Tareas

1. **Calcula el riesgo total del portafolio** usando la matriz de covarianza y el vector de pesos.
2. **Interpreta los resultados** para entender la contribución de cada activo al riesgo total del portafolio.
3. **Grafica** la contribución de cada activo al riesgo total del portafolio.

Fórmula para el Cálculo del Riesgo Total del Portafolio

El riesgo total (desviación estándar) del portafolio σ_P se calcula mediante:

$$\sigma_P = \sqrt{W^T \cdot \Sigma \cdot W}$$

donde:

- W es el vector de pesos del portafolio,
- Σ es la matriz de covarianza de los activos.

Resolución Matemática

Paso 1: Definición de la Matriz de Pesos y Matriz de Covarianza

La matriz de pesos W y la matriz de covarianza Σ son:

$$W = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.02 & 0.01 \\ 0.02 & 0.05 & 0.015 \\ 0.01 & 0.015 & 0.03 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Cálculo del Riesgo Total del Portafolio

Para calcular el riesgo total del portafolio, utilizamos la fórmula:

$$\sigma_P = \sqrt{W^T \cdot \Sigma \cdot W}$$

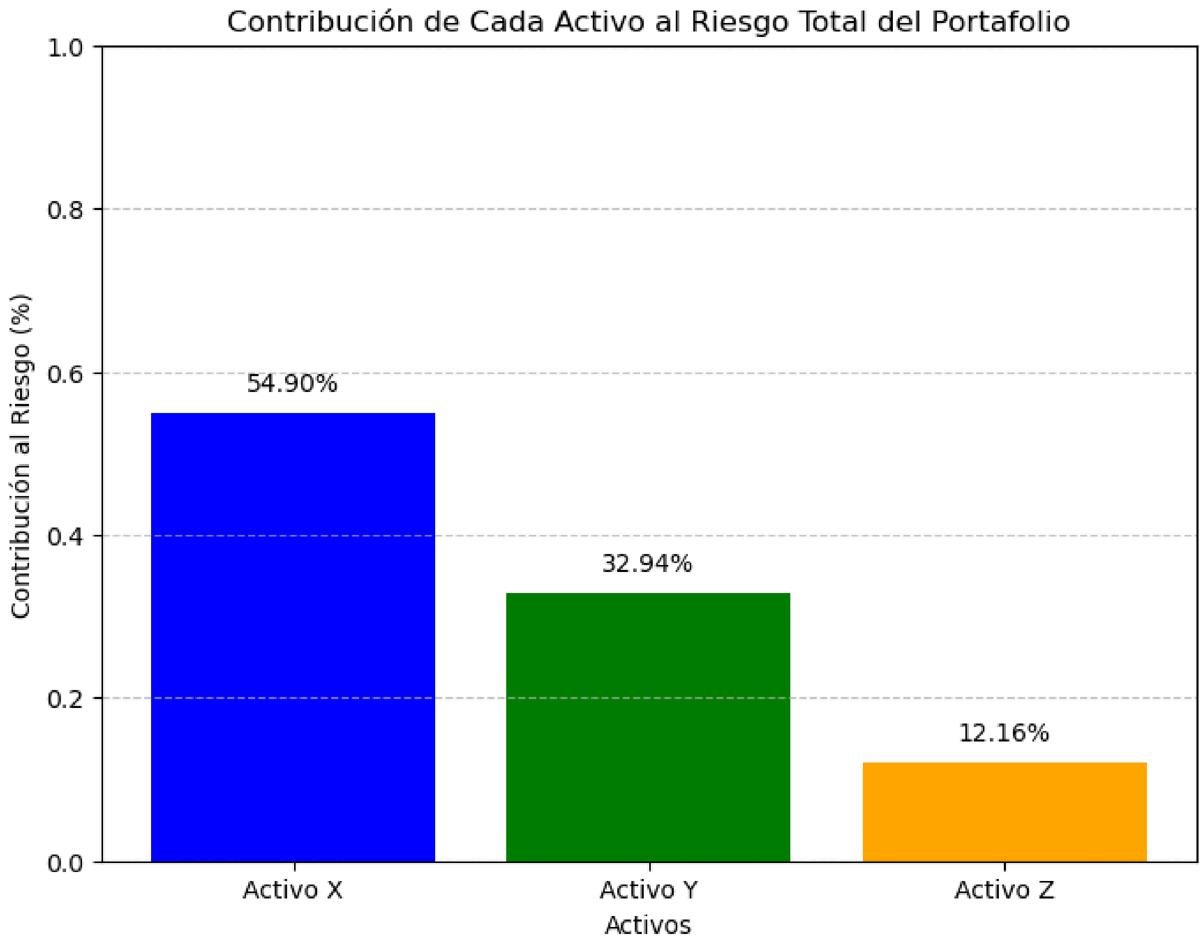
donde:

- W^T es la transpuesta de W.
- Multiplicamos $W^T \cdot \Sigma \cdot W$ para obtener la varianza del portafolio y luego tomamos la raíz cuadrada para obtener el riesgo total (σ_P).

In [222…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz de covarianza (Sigma)
Sigma = np.array([[0.04, 0.02, 0.01],
                  [0.02, 0.05, 0.015],
                  [0.01, 0.015, 0.03]])

# Vector de pesos (W)
W = np.array([[0.5], [0.3], [0.2]])

# Cálculo de la varianza del portafolio (sigma_P^2)
varianza_portafolio = np.dot(W.T, np.dot(Sigma, W))[0, 0]
riesgo_portafolio = np.sqrt(varianza_portafolio)

print(f"Varianza del portafolio: {varianza_portafolio:.4f}")
print(f"Riesgo total del portafolio (desviación estándar): {riesgo_portafolio:.4%}"

# Contribución de cada activo al riesgo total
contribucion_riesgo = np.dot(Sigma, W).flatten() * W.flatten() / varianza_portafoli
nombres_activos = ['Activo X', 'Activo Y', 'Activo Z']

# Gráfica de la contribución al riesgo de cada activo
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.bar(nombres_activos, contribucion_riesgo, color=['blue', 'green', 'orange'])
plt.title("Contribución de Cada Activo al Riesgo Total del Portafolio")
plt.xlabel("Activos")
plt.ylabel("Contribución al Riesgo (%)")
plt.ylim(0, 1)
plt.grid(True, axis='y', linestyle='--', alpha=0.7)

# Añadir etiquetas en cada barra
for i, contribucion in enumerate(contribucion_riesgo):
    plt.text(i, contribucion + 0.02, f"{contribucion * 100:.2f}%", ha='center', va=

plt.show()
```

```
Varianza del portafolio: 0.0255
Riesgo total del portafolio (desviación estándar): 15.9687%
```



Capítulo 8: Optimización: Maximizando Beneficios y Minimización de Costos

VIII.1 Fundamentos de la Optimización

La optimización es una rama de las matemáticas y la ciencia de datos que busca encontrar la mejor solución (máxima o mínima) para un problema determinado, sujeto a restricciones o condiciones específicas. Esta técnica es fundamental en diversas disciplinas, desde la administración y las finanzas hasta la ingeniería y la logística.

En un problema de optimización, buscamos encontrar el valor de las variables que maximice o minimice una **función objetivo**. Los componentes esenciales de un problema de optimización son:

- **Función Objetivo**: La función que queremos maximizar o minimizar. Por ejemplo, en finanzas, la función objetivo podría ser maximizar el retorno de una inversión o minimizar el riesgo.
- **Restricciones**: Condiciones que las soluciones deben cumplir. Estas restricciones pueden ser de capacidad, presupuesto o limitaciones de tiempo.

- **Variables de Decisión**: Las variables cuyo valor modificaremos para optimizar la función objetivo.

Ejemplo Básico de Optimización

Supongamos que tenemos una función objetivo de la forma:

$$f(x) = -x^2 + 5x + 20$$

y queremos maximizar el valor de $f(x)$. Podemos resolver este problema de optimización encontrando el punto en el que la derivada de $f(x)$ respecto a x es cero, lo que nos da el punto máximo de la función.

VIII.2 Aplicaciones de la Optimización en Finanzas, Economía y Administración

La optimización tiene aplicaciones fundamentales en diversas áreas, y a continuación se presentan algunas aplicaciones destacadas en el contexto de finanzas, economía y administración.

1. Finanzas: Optimización de Portafolios

En finanzas, la optimización se usa ampliamente para construir portafolios de inversión que maximizan el rendimiento y minimizan el riesgo. Esto se logra mediante la **optimización de la combinación de activos** en función de su rendimiento esperado, el riesgo y la correlación entre ellos.

Ejemplo: La famosa **teoría de portafolios de Markowitz** utiliza la optimización para encontrar la combinación óptima de activos que ofrece el mejor equilibrio entre el riesgo y el rendimiento.

2. Economía: Equilibrio de Producción y Demanda

En economía, la optimización se aplica para analizar el equilibrio entre oferta y demanda y encontrar la combinación óptima de recursos para maximizar la producción o minimizar los costos. Esto ayuda a los productores y empresas a tomar decisiones informadas para gestionar recursos limitados de manera eficiente.

Ejemplo: Una empresa busca minimizar los costos de producción de varios productos, optimizando la asignación de insumos en función de la demanda y los precios.

3. Administración: Asignación de Recursos

En administración, la optimización ayuda a asignar recursos limitados (como el tiempo, el dinero y el personal) para maximizar la eficiencia de los procesos. Esta aplicación es clave en la planificación y programación, especialmente en contextos como la cadena de suministro y la producción.

Ejemplo: En logística, el **problema de transporte** usa la optimización para determinar la asignación de envíos desde múltiples almacenes a distintos centros de distribución, minimizando los costos de transporte y cumpliendo con la demanda de cada centro.

Matemáticas y Herramientas de Optimización

Para resolver problemas de optimización, se utilizan métodos matemáticos como:

- **Programación lineal y no lineal**: Técnicas para resolver problemas donde la función objetivo y las restricciones son lineales o no lineales.
- **Método de Lagrange**: Técnica utilizada para optimizar funciones con restricciones.
- **Programación cuadrática**: Método de optimización donde la función objetivo es cuadrática y las restricciones son lineales.

Además, existen diversas herramientas computacionales para resolver estos problemas, como:

- **Python**: Bibliotecas como `scipy.optimize` y `cvxpy` para implementar soluciones de optimización en aplicaciones reales.
- **Excel Solver**: Para problemas de optimización básicos en negocios y finanzas.

Estas herramientas permiten a los profesionales analizar, modelar y optimizar sistemas complejos para obtener soluciones prácticas y eficientes en sus respectivos campos.

VIII.3 Ejercicios de Aplicaciones y Soluciones (MathPY)

Ejercicio 71: Optimización de Portafolio de Inversión para Maximizar Rendimiento y Minimizar Riesgo

Un inversor quiere construir un portafolio óptimo utilizando tres activos: **Activo A**, **Activo B**, y **Activo C**. Los rendimientos esperados y las covarianzas de estos activos son los siguientes:

- **Rendimientos Esperados**:
  - Activo A: 10%

- Activo B: 15%
- Activo C: 12%

- **Matriz de Covarianza** de los Activos (en términos de riesgo):

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.09 & 0.015 \\ 0.02 & 0.015 & 0.06 \end{pmatrix}$$

El inversor desea:

1. **Maximizar el rendimiento esperado del portafolio**.
2. **Minimizar el riesgo total del portafolio**, medido por la varianza del portafolio.

Tareas

1. **Plantee el problema de optimización** para maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo.
2. **Calcule la combinación óptima de pesos** de cada activo en el portafolio.
3. **Grafique la frontera eficiente** que muestra el equilibrio entre riesgo y rendimiento.

Ecuaciones para la Optimización del Portafolio

Para maximizar el rendimiento del portafolio $E(R_P)$ y minimizar el riesgo, usamos la fórmula de rendimiento esperado:

$$E(R_P) = W^T \cdot E$$

donde:

- W es el vector de pesos de los activos en el portafolio,
- E es el vector de rendimientos esperados de los activos.

El riesgo (varianza) del portafolio se calcula como:

$$\sigma_P^2 = W^T \cdot \Sigma \cdot W$$

donde:

- Σ es la matriz de covarianza de los activos.

Resolución Matemática

Paso 1: Definir las Variables de Decisión y la Función Objetivo

Queremos maximizar el rendimiento esperado del portafolio, sujeto a una minimización del riesgo (varianza) y a las restricciones de los pesos.

Función Objetivo para el Rendimiento Esperado:

$$\text{Maximizar} \quad E(R_P) = W^T \cdot E$$

donde:

- $E = \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.15 \\ 0.12 \end{pmatrix}$

Función Objetivo para el Riesgo (Varianza del Portafolio):

$$\text{Minimizar} \quad \sigma_P^2 = W^T \cdot \Sigma \cdot W$$

donde:

- $\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.09 & 0.015 \\ 0.02 & 0.015 & 0.06 \end{pmatrix}$

Restricciones:

1. Suma de pesos igual a 1:

$$W_A + W_B + W_C = 1$$

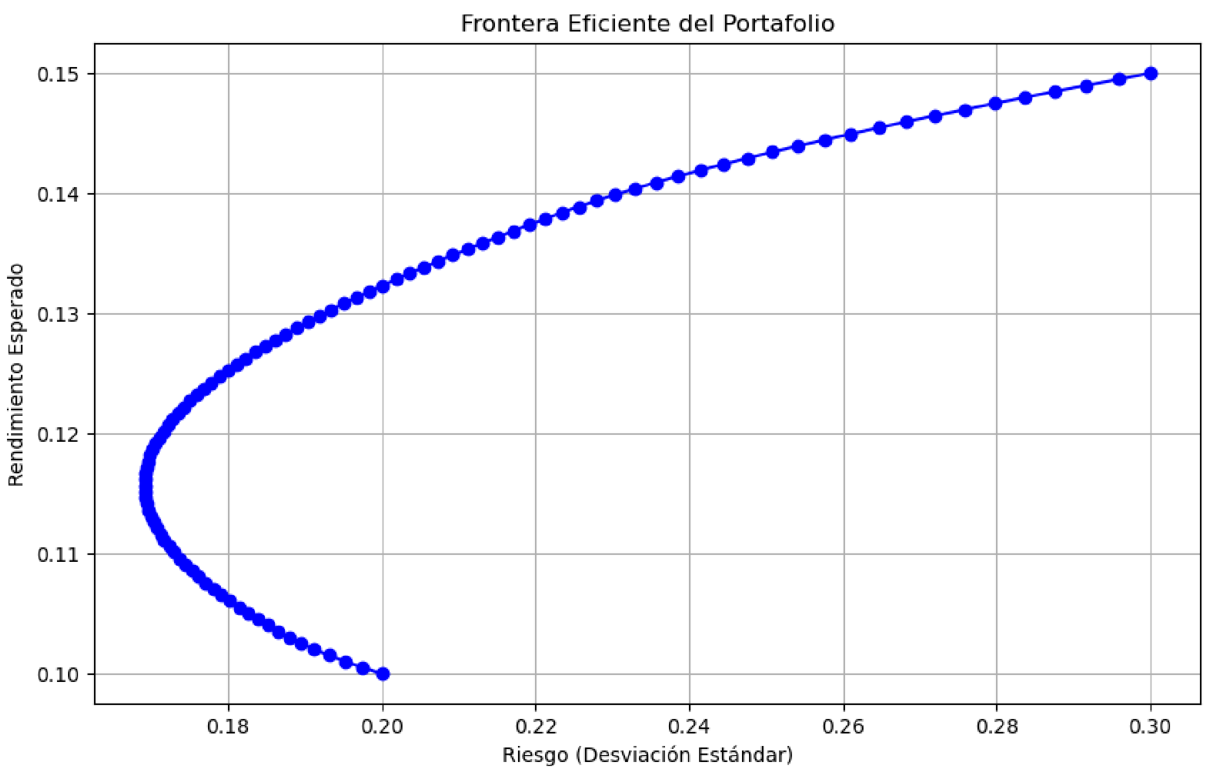
2. Pesos no negativos:

$$W_A, W_B, W_C \geq 0$$

In [227…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import minimize

# Datos de los activos
rendimientos_esperados = np.array([0.10, 0.15, 0.12])
Sigma = np.array([[0.04, 0.01, 0.02],
                  [0.01, 0.09, 0.015],
                  [0.02, 0.015, 0.06]])

# Función para calcular el rendimiento del portafolio
def rendimiento_portafolio(W):
    return np.dot(W, rendimientos_esperados)

# Función para calcular el riesgo (varianza) del portafolio
def riesgo_portafolio(W):
    return np.dot(W.T, np.dot(Sigma, W))

# Restricciones: suma de pesos igual a 1 y no negatividad de los pesos
restricciones = ({'type': 'eq', 'fun': lambda W: np.sum(W) - 1})
fronteras = [(0, 1) for _ in range(3)]

# Optimización para distintos niveles de riesgo
```

```
rendimientos_optimos = []
riesgos_optimos = []

for r in np.linspace(0.10, 0.15, 100):
    objetivo = lambda W: riesgo_portafolio(W)  # Minimizar riesgo
    restricciones = [{'type': 'eq', 'fun': lambda W: np.sum(W) - 1},
                     {'type': 'eq', 'fun': lambda W: rendimiento_portafolio(W) - r}
    resultado = minimize(objetivo, [1/3, 1/3, 1/3], bounds=fronteras, constraints=r

    if resultado.success:
        rendimientos_optimos.append(r)
        riesgos_optimos.append(np.sqrt(riesgo_portafolio(resultado.x)))

# Gráfica de la frontera eficiente
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(riesgos_optimos, rendimientos_optimos, marker='o', linestyle='-', color='b
plt.title("Frontera Eficiente del Portafolio")
plt.xlabel("Riesgo (Desviación Estándar)")
plt.ylabel("Rendimiento Esperado")
plt.grid(True)
plt.show()
```



Ejercicio 72: Optimización de Asignación de Personal para Minimizar Costos Operativos

Una empresa necesita asignar a tres trabajadores (Trabajador 1, Trabajador 2, y Trabajador 3) a tres tareas (Tarea A, Tarea B, y Tarea C). Cada trabajador tiene un costo diferente dependiendo de la tarea a la que sea asignado. La empresa busca minimizar el costo total de asignación.

Los costos de asignación de cada trabajador a cada tarea están dados por la **matriz de costos** C:

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 30 \\ 28 & 18 & 24 \\ 26 & 30 & 22 \end{pmatrix}$$

donde:

- La fila representa cada trabajador (Trabajador 1, Trabajador 2, Trabajador 3).
- La columna representa cada tarea (Tarea A, Tarea B, Tarea C).

El objetivo es asignar cada trabajador a una tarea de tal manera que minimice el costo total, asegurando que cada trabajador esté asignado a solo una tarea y que cada tarea sea realizada por solo un trabajador.

Tareas

1. **Formule el problema de optimización** para minimizar el costo total de asignación de personal.
2. **Calcule la asignación óptima** de cada trabajador a cada tarea.
3. **Grafique la asignación de personal** y muestre el costo mínimo obtenido.

Formulación del Problema de Asignación

El problema puede formularse como un problema de optimización lineal en el que buscamos minimizar el costo total de asignación:

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

sujeto a:

- Cada trabajador realiza una tarea única.
- Cada tarea es asignada a solo un trabajador.

Resolución Matemática

Paso 1: Definición de Variables de Decisión

Sea x_{ij} la variable binaria que toma el valor 1 si el Trabajador i es asignado a la Tarea j, y 0 en caso contrario.

Paso 2: Función Objetivo

La función objetivo que minimiza el costo total de asignación es:

$$Z = 20x_{11} + 25x_{12} + 30x_{13} + 28x_{21} + 18x_{22} + 24x_{23} + 26x_{31} + 30x_{32} + 22x_{33}$$

Paso 3: Restricciones

1. **Restricciones de Asignación por Trabajador**:

   - Cada trabajador debe ser asignado a solo una tarea:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

2. **Restricciones de Asignación por Tarea**:

   - Cada tarea debe ser realizada por solo un trabajador:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

3. **Restricciones de No Negatividad y Binaridad**:

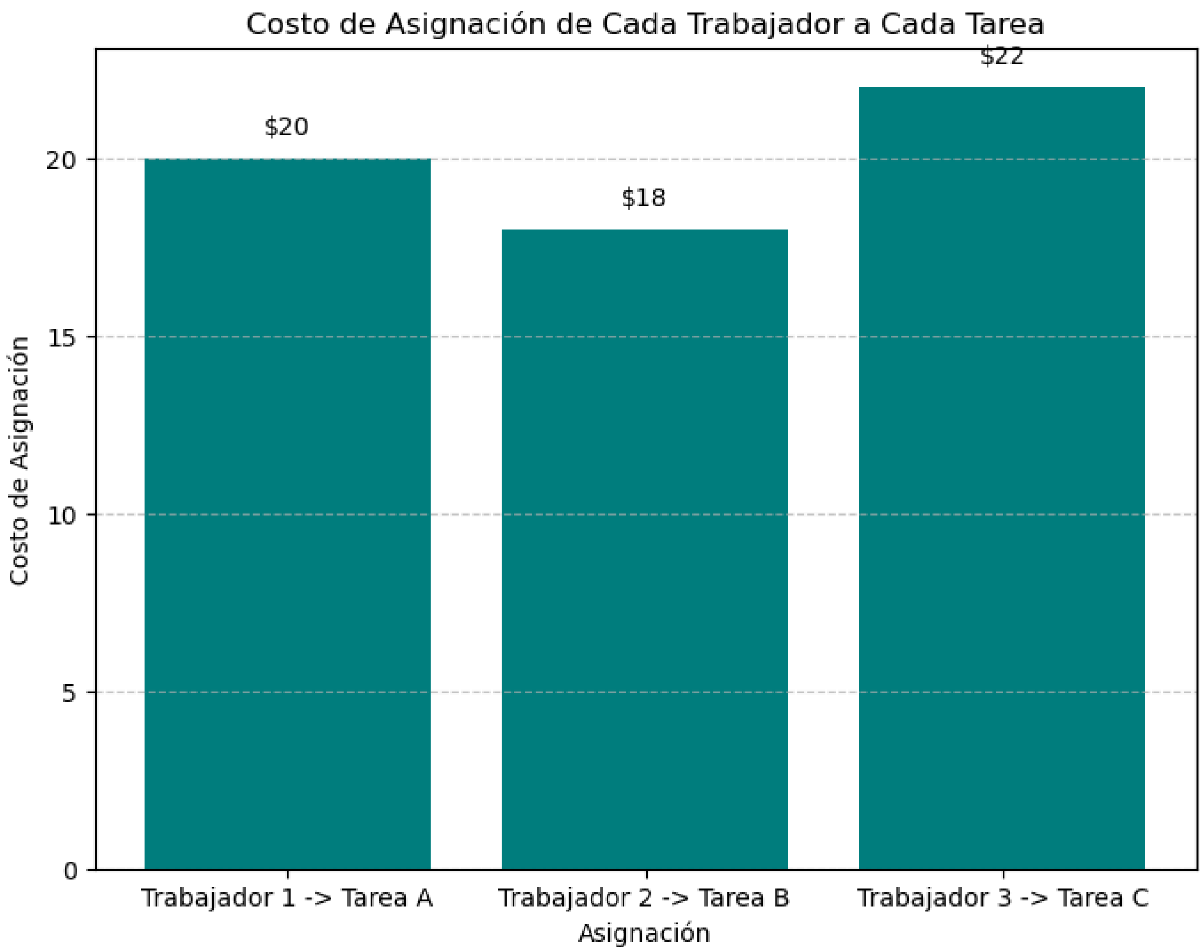
   - $x_{ij} \in \{0, 1\}$, para cada i, j.

In [230…

```
import numpy as np
from scipy.optimize import linear_sum_assignment
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz de costos (C)
C = np.array([[20, 25, 30],
              [28, 18, 24],
              [26, 30, 22]])

# Resolución del problema de asignación óptima
fila_indices, columna_indices = linear_sum_assignment(C)

# Cálculo del costo mínimo
costo_minimo = C[fila_indices, columna_indices].sum()
asignaciones = list(zip(fila_indices, columna_indices))

print("Asignación óptima (trabajador -> tarea):")
for trabajador, tarea in asignaciones:
    print(f"Trabajador {trabajador + 1} -> Tarea {chr(65 + tarea)}")

print(f"\nCosto mínimo de asignación: {costo_minimo} unidades monetarias")

# Gráfica de asignación y costos
tareas = ["Tarea A", "Tarea B", "Tarea C"]
trabajadores = ["Trabajador 1", "Trabajador 2", "Trabajador 3"]
```

```python
costos_asignacion = [C[trabajador, tarea] for trabajador, tarea in asignaciones]

plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.bar([f"{trabajadores[trabajador]} -> {tareas[tarea]}" for trabajador, tarea in
plt.title("Costo de Asignación de Cada Trabajador a Cada Tarea")
plt.xlabel("Asignación")
plt.ylabel("Costo de Asignación")
plt.grid(True, axis="y", linestyle="--", alpha=0.7)

# Añadir etiquetas de costo en cada barra
for i, costo in enumerate(costos_asignacion):
    plt.text(i, costo + 0.5, f"${costo}", ha="center", va="bottom")

plt.show()
```

```
Asignación óptima (trabajador -> tarea):
Trabajador 1 -> Tarea A
Trabajador 2 -> Tarea B
Trabajador 3 -> Tarea C

Costo mínimo de asignación: 60 unidades monetarias
```



Ejercicio 73: Optimización de Producción con Limitación de Recursos

Una empresa produce dos productos, **Producto X** y **Producto Y**, utilizando dos recursos limitados: **mano de obra** y **materia prima**. La empresa busca maximizar la producción total, medida en unidades de ambos productos, dadas las limitaciones de recursos disponibles.

Los requisitos de recursos por unidad de producto y los recursos disponibles se detallan a continuación:

- **Requisitos de Recursos**:
  - Cada unidad de **Producto X** requiere 3 horas de mano de obra y 2 kg de materia prima.
  - Cada unidad de **Producto Y** requiere 4 horas de mano de obra y 1 kg de materia prima.
- **Recursos Disponibles**:
  - La empresa dispone de 240 horas de mano de obra y 100 kg de materia prima.

Tareas

1. **Formule el problema de optimización** para maximizar la producción total de los productos.
2. **Calcule la cantidad óptima** de unidades de cada producto que maximiza la producción sin exceder los recursos disponibles.
3. **Grafique el área factible de producción** y la solución óptima.

Función Objetivo y Restricciones

La empresa desea maximizar la función de producción:

$$\text{Maximizar} \quad Z = x + y$$

sujeto a las restricciones de recursos:

1. Restricción de mano de obra:

$$3x + 4y \leq 240$$

2. Restricción de materia prima:

$$2x + y \leq 100$$

3. Restricciones de no negatividad:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

donde:

- x es el número de unidades de **Producto X**,
- y es el número de unidades de **Producto Y**.

Resolución Matemática

Paso 1: Definir las Variables de Decisión

Las variables de decisión son:

- x: cantidad de unidades de Producto X producidas.
- y: cantidad de unidades de Producto Y producidas.

Paso 2: Función Objetivo

La empresa desea maximizar la producción total:

$$Z = x + y$$

Paso 3: Restricciones de Recursos

1. Restricción de mano de obra:

$$3x + 4y \leq 240$$

2. Restricción de materia prima:

$$2x + y \leq 100$$

3. Restricciones de No Negatividad:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

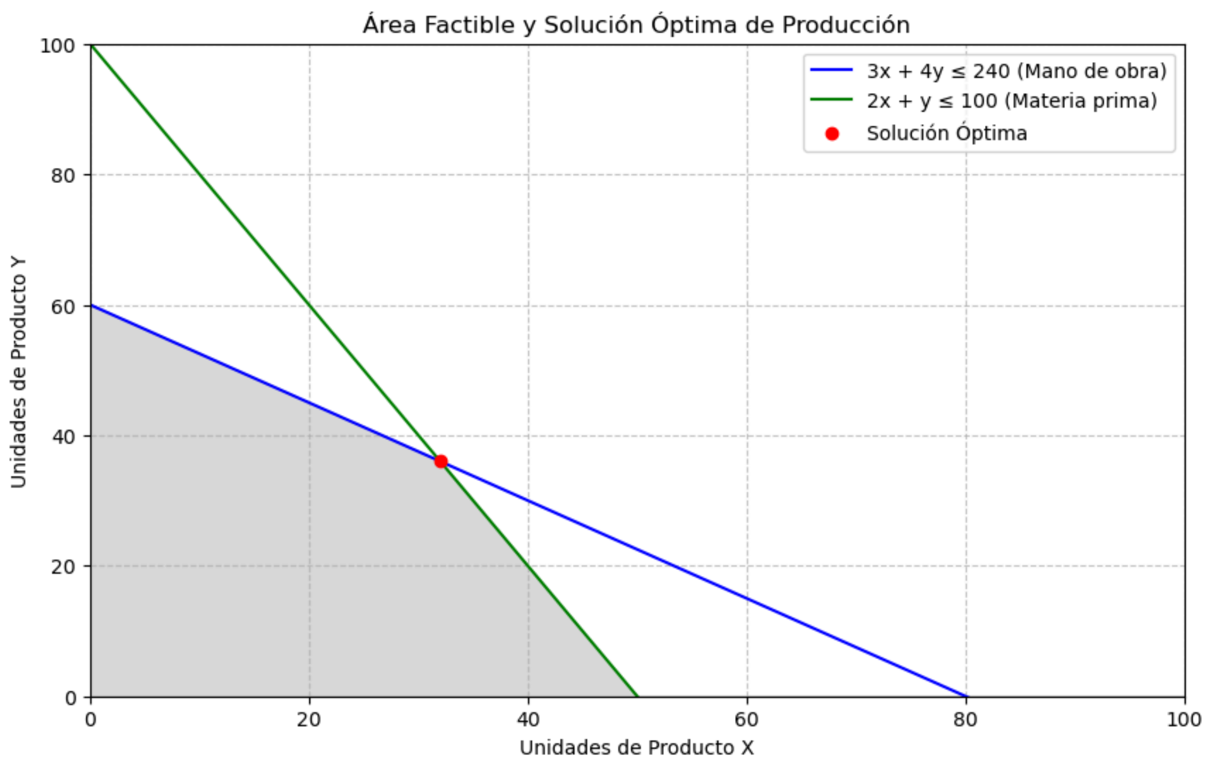
Este sistema de ecuaciones define el área factible donde se puede maximizar la función objetivo sin exceder los recursos disponibles.

In [233…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import linprog

# Coeficientes de la función objetivo (maximizar x + y)
c = [-1, -1]  # Negativos porque linprog minimiza por defecto

# Coeficientes de las restricciones
A = [[3, 4],  # Restricción de mano de obra
     [2, 1]]  # Restricción de materia prima
b = [240, 100]

# Resolver el problema de optimización
resultado = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b, bounds=(0, None), method='highs')
x_opt, y_opt = resultado.x

# Resultados
print(f"Producción óptima de Producto X: {x_opt:.2f} unidades")
```

```python
print(f"Producción óptima de Producto Y: {y_opt:.2f} unidades")
print(f"Producción total maximizada: {x_opt + y_opt:.2f} unidades")

# Gráfica del área factible y la solución óptima
x_vals = np.linspace(0, 100, 500)
y1_vals = (240 - 3 * x_vals) / 4  # De la restricción de mano de obra
y2_vals = 100 - 2 * x_vals        # De la restricción de materia prima

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(x_vals, y1_vals, label="3x + 4y ≤ 240 (Mano de obra)", color="blue")
plt.plot(x_vals, y2_vals, label="2x + y ≤ 100 (Materia prima)", color="green")
plt.fill_between(x_vals, 0, np.minimum(y1_vals, y2_vals), color="gray", alpha=0.3)

# Marcar la solución óptima
plt.plot(x_opt, y_opt, 'ro', label="Solución Óptima")
plt.title("Área Factible y Solución Óptima de Producción")
plt.xlabel("Unidades de Producto X")
plt.ylabel("Unidades de Producto Y")
plt.xlim((0, max(x_vals)))
plt.ylim((0, max(y1_vals.max(), y2_vals.max())))
plt.legend()
plt.grid(True, linestyle="--", alpha=0.7)
plt.show()
```

```
Producción óptima de Producto X: 32.00 unidades
Producción óptima de Producto Y: 36.00 unidades
Producción total maximizada: 68.00 unidades
```



Ejercicio 74: Optimización de Costos de Distribución en Logística

Una empresa cuenta con dos almacenes (Almacén 1 y Almacén 2) y debe enviar productos a tres tiendas (Tienda A, Tienda B, y Tienda C). Cada almacén tiene una cantidad limitada de productos, y cada tienda tiene una demanda específica. La empresa busca minimizar los costos de transporte al cubrir la demanda en cada tienda.

Los costos de transporte por unidad de producto entre cada almacén y cada tienda están dados por la **matriz de costos** C:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

donde:

- La fila representa cada almacén (Almacén 1 y Almacén 2).
- La columna representa cada tienda (Tienda A, Tienda B, y Tienda C).

Disponibilidad de Productos en los Almacenes:

- Almacén 1: 200 unidades
- Almacén 2: 150 unidades

Demanda de Productos en las Tiendas:

- Tienda A: 100 unidades
- Tienda B: 150 unidades
- Tienda C: 100 unidades

Tareas

1. **Formule el problema de optimización** para minimizar el costo total de distribución.
2. **Calcule la asignación óptima** de productos desde cada almacén a cada tienda para cubrir la demanda al menor costo posible.
3. **Grafique la asignación óptima** y muestre el costo total mínimo obtenido.

Formulación del Problema de Optimización

Este problema puede formularse como un problema de programación lineal en el que buscamos minimizar el costo total de transporte:

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

sujeto a:

- Restricciones de disponibilidad en cada almacén,
- Restricciones de demanda en cada tienda.

donde:

- c_{ij} es el costo de transporte desde el almacén i a la tienda j,
- x_{ij} es la cantidad de unidades enviadas desde el almacén i a la tienda j.

Resolución Matemática

Paso 1: Definición de Variables de Decisión

Sea x_{ij} la cantidad de unidades enviadas desde el Almacén i a la Tienda j.

Paso 2: Función Objetivo

La función objetivo que minimiza el costo total de transporte es:

$$Z = 4x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 3x_{21} + 7x_{22} + 4x_{23}$$

Paso 3: Restricciones

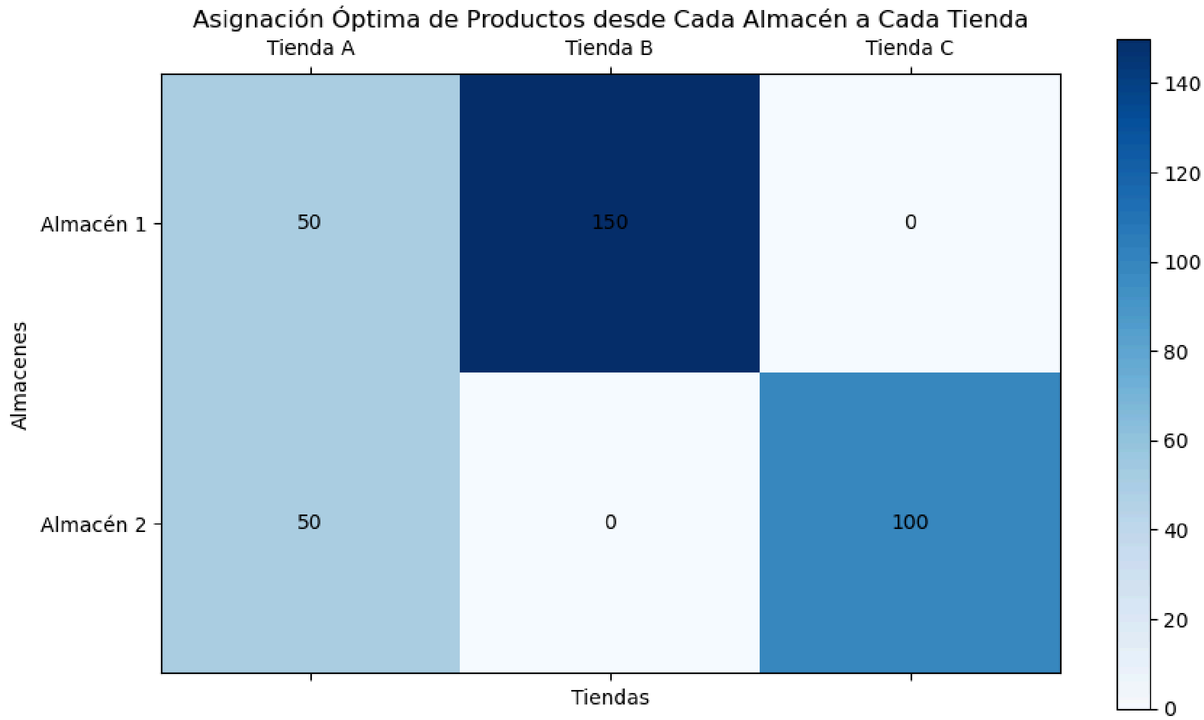
1. **Restricciones de Disponibilidad en los Almacenes**:
   - Almacén 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 200$
   - Almacén 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 150$
2. **Restricciones de Demanda en las Tiendas**:
   - Tienda A: $x_{11} + x_{21} = 100$
   - Tienda B: $x_{12} + x_{22} = 150$
   - Tienda C: $x_{13} + x_{23} = 100$
3. **Restricciones de No Negatividad**:
   - $x_{ij} \geq 0$ para todos los i, j.

In [236…

```
import numpy as np
from scipy.optimize import linprog
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz de costos (C)
costos = [4, 5, 6, 3, 7, 4]  # Costos en orden [x_11, x_12, x_13, x_21, x_22, x_23]

# Coeficientes de las restricciones de disponibilidad y demanda
A_eq = [
    [1, 1, 1, 0, 0, 0],  # Disponibilidad Almacén 1
    [0, 0, 0, 1, 1, 1],  # Disponibilidad Almacén 2
    [1, 0, 0, 1, 0, 0],  # Demanda Tienda A
    [0, 1, 0, 0, 1, 0],  # Demanda Tienda B
    [0, 0, 1, 0, 0, 1]   # Demanda Tienda C
]

# Lados derechos de las restricciones (disponibilidad y demanda)
b_eq = [200, 150, 100, 150, 100]
```

```python
# Resolver el problema de optimización
resultado = linprog(costos, A_eq=A_eq, b_eq=b_eq, bounds=(0, None), method='highs')
asignaciones = resultado.x

# Mostrar resultados
asignaciones_matriz = asignaciones.reshape((2, 3))
print("Asignación óptima de productos (Almacén -> Tienda):")
print(asignaciones_matriz)
print(f"\nCosto mínimo total de transporte: {resultado.fun:.2f} unidades monetarias

# Gráfica de la asignación de productos
almacenes = ["Almacén 1", "Almacén 2"]
tiendas = ["Tienda A", "Tienda B", "Tienda C"]

fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))
c = ax.matshow(asignaciones_matriz, cmap="Blues")
fig.colorbar(c)

# Añadir etiquetas
for (i, j), valor in np.ndenumerate(asignaciones_matriz):
    ax.text(j, i, f"{valor:.0f}", ha="center", va="center", color="black")

ax.set_xticks(range(len(tiendas)))
ax.set_yticks(range(len(almacenes)))
ax.set_xticklabels(tiendas)
ax.set_yticklabels(almacenes)
ax.set_title("Asignación Óptima de Productos desde Cada Almacén a Cada Tienda")
plt.xlabel("Tiendas")
plt.ylabel("Almacenes")
plt.show()
```

```
Asignación óptima de productos (Almacén -> Tienda):
[[ 50. 150.   0.]
 [ 50.   0. 100.]]

Costo mínimo total de transporte: 1500.00 unidades monetarias
```



Ejercicio 75: Optimización de Plan de Pago de Deuda para Minimizar Costos de Interés

Un cliente ha contraído un préstamo de **$50,000** con un plazo de **5 años** a una **tasa de interés anual del 8%**. La entidad financiera ofrece dos opciones de pago:

- **Opción 1**: Pago mensual constante (incluye interés y principal) a lo largo del plazo.
- **Opción 2**: Pago mensual constante de interés y amortización variable del principal.

El objetivo del cliente es minimizar el costo total de interés a lo largo del plazo del préstamo, manteniendo pagos mensuales accesibles.

Datos

1. **Monto del préstamo**: $50,000
2. **Tasa de interés anual**: 8% (mensual: $i = \frac{0.08}{12} = 0.00667$)
3. **Plazo**: 5 años (60 meses)

Tareas

1. **Calcule el pago mensual** bajo ambas opciones para cada mes y determine cuál es más ventajosa en términos de costo total de interés.
2. **Calcule el costo total de interés** bajo cada opción y compárelo.
3. **Grafique los pagos mensuales y el saldo restante** bajo ambas opciones para visualizar la evolución del saldo y los pagos en cada mes.

Fórmulas para el Cálculo de Pagos

Para **Opción 1** (pago constante de principal e interés): El pago mensual (P) se calcula como:

$$P = \frac{P_0 \cdot i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

donde:

- P_0 es el monto del préstamo,
- i es la tasa de interés mensual,
- n es el número total de pagos.

Para **Opción 2** (pago de interés constante y amortización variable):

- Intereses mensuales: $I_t = i \cdot \text{Saldo restante en el mes } t$
- Pago de capital variable para amortizar el saldo restante.

Resolución Matemática

Paso 1: Calcular el Pago Mensual para Opción 1 (pago constante de principal e interés)

La fórmula del pago mensual P es:

$$P = \frac{P_0 \cdot i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

donde:

- $P_0 = 50000$ es el monto del préstamo,
- $i = 0.00667$ es la tasa de interés mensual,
- $n = 60$ es el número total de pagos.

Paso 2: Calcular el Pago Mensual y el Interés para Opción 2 (pago de interés constante)

Cada mes, el interés I_t se calcula como:

$$I_t = i \cdot \text{Saldo restante en el mes } t$$

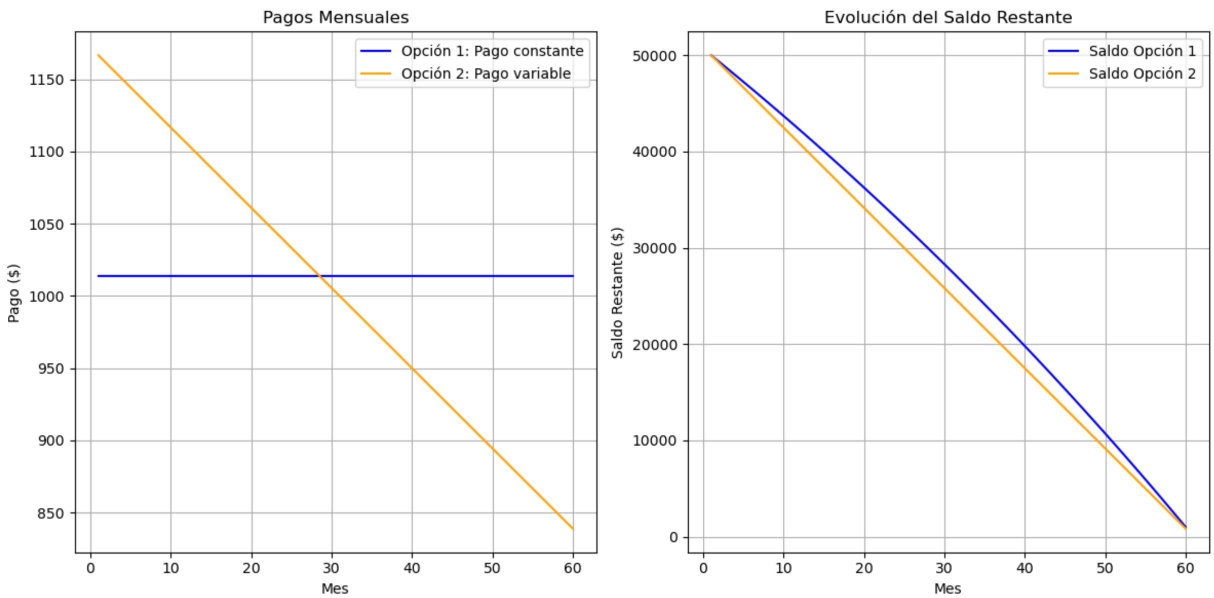
El pago total mensual se ajusta cada mes, sumando el interés correspondiente y la amortización del saldo restante.

In [239…
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
# Parámetros del préstamo
P0 = 50000       # Monto del préstamo
tasa_anual = 0.08
n_meses = 60
i_mensual = tasa_anual / 12

# Opción 1: Pago constante de principal e interés
P_opcion1 = P0 * i_mensual * (1 + i_mensual)**n_meses / ((1 + i_mensual)**n_meses -
pagos_opcion1 = [P_opcion1] * n_meses
saldo_opcion1 = [P0]
intereses_totales_opcion1 = 0

for _ in range(n_meses):
    interes_mes = saldo_opcion1[-1] * i_mensual
    principal = P_opcion1 - interes_mes
    saldo_opcion1.append(saldo_opcion1[-1] - principal)
    intereses_totales_opcion1 += interes_mes

saldo_opcion1.pop()  # Ajuste para eliminar el último saldo negativo

# Opción 2: Pago de interés constante y amortización variable
saldo_opcion2 = [P0]
pagos_opcion2 = []
intereses_totales_opcion2 = 0

for _ in range(n_meses):
    interes_mes = saldo_opcion2[-1] * i_mensual
    principal = (P0 / n_meses)
    pago_total = interes_mes + principal
    pagos_opcion2.append(pago_total)
    saldo_opcion2.append(saldo_opcion2[-1] - principal)
    intereses_totales_opcion2 += interes_mes

saldo_opcion2.pop()  # Ajuste para eliminar el último saldo negativo

# Comparación de costos de interés
print(f"Costo total de interés - Opción 1: ${intereses_totales_opcion1:.2f}")
print(f"Costo total de interés - Opción 2: ${intereses_totales_opcion2:.2f}")

# Gráfica de pagos y saldo restante
meses = np.arange(1, n_meses + 1)

plt.figure(figsize=(12, 6))

# Grafica de los pagos mensuales
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(meses, pagos_opcion1, label="Opción 1: Pago constante", color="blue")
plt.plot(meses, pagos_opcion2, label="Opción 2: Pago variable", color="orange")
plt.title("Pagos Mensuales")
plt.xlabel("Mes")
plt.ylabel("Pago ($)")
plt.legend()
plt.grid(True)

# Grafica del saldo restante
plt.subplot(1, 2, 2)
```

```
plt.plot(meses, saldo_opcion1, label="Saldo Opción 1", color="blue")
plt.plot(meses, saldo_opcion2, label="Saldo Opción 2", color="orange")
plt.title("Evolución del Saldo Restante")
plt.xlabel("Mes")
plt.ylabel("Saldo Restante ($)")
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
Costo total de interés - Opción 1: $10829.18
Costo total de interés - Opción 2: $10166.67
```



Ejercicio 76: Optimización de Producción y Costos en una Fábrica

Una fábrica produce dos productos, **Producto A** y **Producto B**, utilizando dos recursos limitados: **tiempo de máquina** y **mano de obra**. La empresa tiene como objetivo minimizar los costos de producción mientras satisface la demanda de ambos productos.

Datos:

1. **Requisitos de Producción**:
    - Cada unidad de **Producto A** requiere 4 horas de máquina y 3 horas de mano de obra.
    - Cada unidad de **Producto B** requiere 5 horas de máquina y 2 horas de mano de obra.
2. **Recursos Disponibles**:

- Tiempo de máquina disponible: 300 horas
- Tiempo de mano de obra disponible: 240 horas

3. **Costos de Producción**:
   - El costo de producir una unidad de **Producto A** es de $20.
   - El costo de producir una unidad de **Producto B** es de $25.
4. **Demanda Mínima**:
   - Se deben producir al menos 30 unidades de **Producto A** y 20 unidades de **Producto B** para satisfacer la demanda.

Tareas

1. **Formule el problema de optimización** para minimizar los costos de producción.
2. **Calcule la cantidad óptima** de unidades de cada producto que minimiza los costos, respetando las restricciones de recursos y demanda.
3. **Grafique el área factible** y la solución óptima para visualizar las restricciones y el punto de producción óptima.

Formulación del Problema de Optimización

El problema de optimización para minimizar los costos se formula de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar} \quad Z = 20x + 25y$$

sujeto a las restricciones:

1. Restricción de tiempo de máquina:

$$4x + 5y \leq 300$$

2. Restricción de tiempo de mano de obra:

$$3x + 2y \leq 240$$

3. Restricciones de demanda mínima:

$$x \geq 30$$

$$y \geq 20$$

donde:

- x es el número de unidades de **Producto A**,
- y es el número de unidades de **Producto B**.

Resolución Matemática

Paso 1: Definir las Variables de Decisión

Las variables de decisión son:

- x: cantidad de unidades de Producto A producidas.
- y: cantidad de unidades de Producto B producidas.

Paso 2: Función Objetivo

El objetivo es minimizar los costos de producción:

$$Z = 20x + 25y$$

Paso 3: Restricciones de Recursos

1. Restricción de tiempo de máquina:

$$4x + 5y \leq 300$$

2. Restricción de tiempo de mano de obra:

$$3x + 2y \leq 240$$

Paso 4: Restricciones de Demanda Mínima

1. Se deben producir al menos 30 unidades de Producto A:

$$x \geq 30$$

2. Se deben producir al menos 20 unidades de Producto B:

$$y \geq 20$$

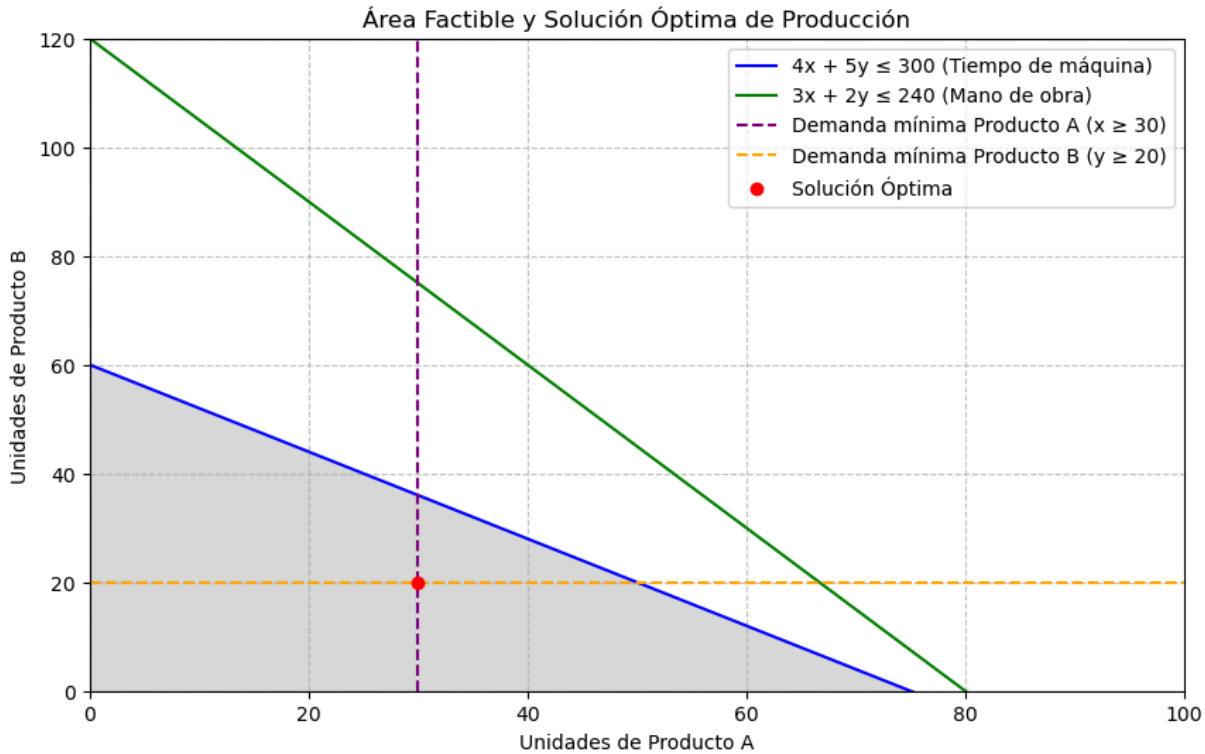
Este sistema de ecuaciones define el área factible para la minimización de costos sin violar las restricciones de recursos y demanda.

In [242…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import linprog

# Coeficientes de la función objetivo (minimizar costos)
c = [20, 25]

# Coeficientes de las restricciones
A = [[4, 5],   # Tiempo de máquina
     [3, 2],   # Mano de obra
     [-1, 0],  # Demanda mínima para Producto A
     [0, -1]]  # Demanda mínima para Producto B
b = [300, 240, -30, -20]

# Resolver el problema de optimización
```

```
resultado = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b, bounds=(0, None), method='highs')
x_opt, y_opt = resultado.x

# Resultados
print(f"Producción óptima de Producto A: {x_opt:.2f} unidades")
print(f"Producción óptima de Producto B: {y_opt:.2f} unidades")
print(f"Costo mínimo total de producción: ${resultado.fun:.2f}")

# Gráfica del área factible y la solución óptima
x_vals = np.linspace(0, 100, 500)
y1_vals = (300 - 4 * x_vals) / 5  # Restricción de tiempo de máquina
y2_vals = (240 - 3 * x_vals) / 2  # Restricción de tiempo de mano de obra

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(x_vals, y1_vals, label="4x + 5y ≤ 300 (Tiempo de máquina)", color="blue")
plt.plot(x_vals, y2_vals, label="3x + 2y ≤ 240 (Mano de obra)", color="green")
plt.fill_between(x_vals, 0, np.minimum(y1_vals, y2_vals), color="gray", alpha=0.3)

# Marcar las restricciones de demanda mínima
plt.axvline(x=30, linestyle="--", color="purple", label="Demanda mínima Producto A
plt.axhline(y=20, linestyle="--", color="orange", label="Demanda mínima Producto B

# Marcar la solución óptima
plt.plot(x_opt, y_opt, 'ro', label="Solución Óptima")
plt.title("Área Factible y Solución Óptima de Producción")
plt.xlabel("Unidades de Producto A")
plt.ylabel("Unidades de Producto B")
plt.xlim((0, max(x_vals)))
plt.ylim((0, max(y1_vals.max(), y2_vals.max())))
plt.legend()
plt.grid(True, linestyle="--", alpha=0.7)
plt.show()
```

```
Producción óptima de Producto A: 30.00 unidades
Producción óptima de Producto B: 20.00 unidades
Costo mínimo total de producción: $1100.00
```



Ejercicio 77: Optimización de Costos de Envío en Logística

Una empresa necesita enviar productos desde dos centros de distribución (Centro 1 y Centro 2) a tres destinos (Destino A, Destino B, y Destino C). Cada centro de distribución tiene una capacidad limitada de productos, y cada destino tiene una demanda específica. El objetivo de la empresa es minimizar los costos totales de envío.

Los **costos de envío** por unidad de producto desde cada centro de distribución hasta cada destino están dados en la siguiente matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 9 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

donde:

- Las filas representan cada centro de distribución (Centro 1 y Centro 2).
- Las columnas representan cada destino (Destino A, Destino B, y Destino C).

Capacidad de los Centros de Distribución:

- Centro 1: 250 unidades
- Centro 2: 150 unidades

Demanda en los Destinos:

- Destino A: 120 unidades
- Destino B: 180 unidades
- Destino C: 100 unidades

Tareas

1. **Formule el problema de optimización** para minimizar los costos totales de envío.
2. **Calcule la cantidad óptima** de productos que deben enviarse desde cada centro a cada destino para satisfacer la demanda al menor costo posible.
3. **Grafique la asignación óptima** y muestre el costo mínimo total obtenido.

Formulación del Problema de Optimización

Este problema puede formularse como un problema de programación lineal en el que buscamos minimizar el costo total de transporte:

$$\text{Minimizar} \quad Z = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

sujeto a:

- Restricciones de capacidad en cada centro,
- Restricciones de demanda en cada destino.

donde:

- c_{ij} es el costo de envío desde el centro de distribución i al destino j,
- x_{ij} es la cantidad de unidades enviadas desde el centro de distribución i al destino j.

Resolución Matemática

Paso 1: Definición de Variables de Decisión

Sea x_{ij} la cantidad de unidades enviadas desde el Centro i al Destino j.

Paso 2: Función Objetivo

La función objetivo que minimiza el costo total de envío es:

$$Z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{21} + 12x_{22} + 5x_{23}$$

Paso 3: Restricciones

1. **Restricciones de Capacidad en los Centros**:

   - Centro 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 250$

- Centro 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 150$

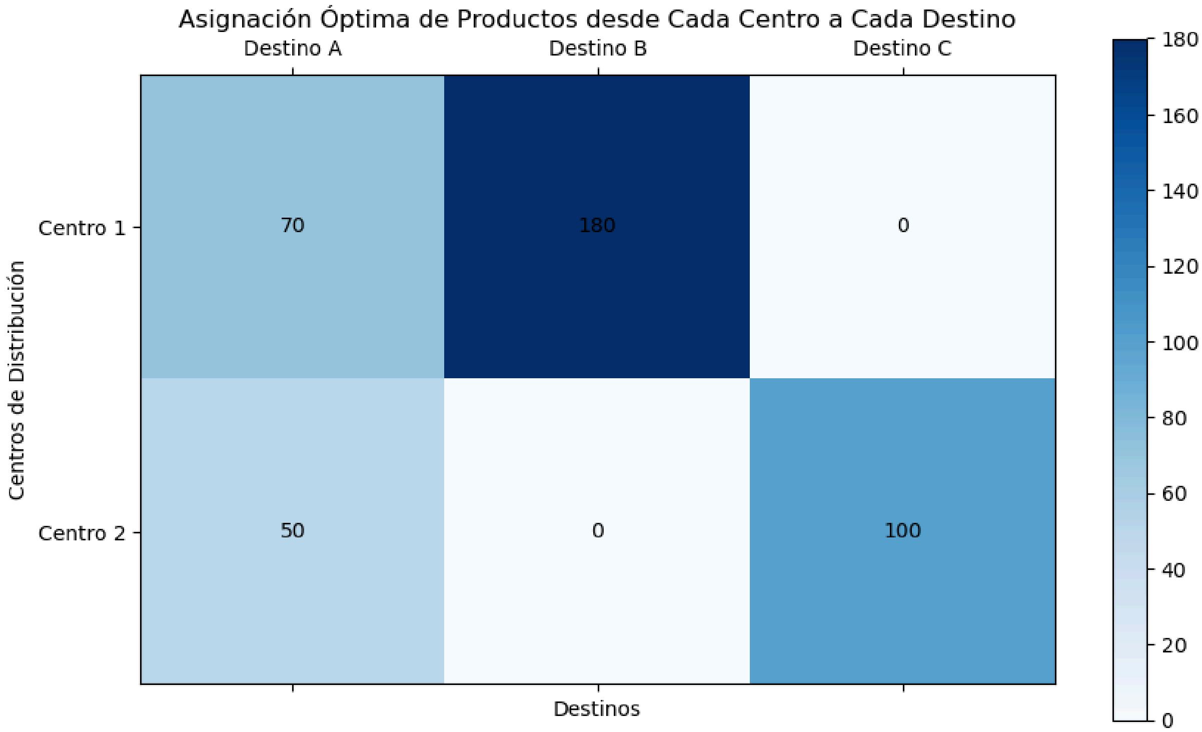
2. **Restricciones de Demanda en los Destinos**:
   - Destino A: $x_{11} + x_{21} = 120$
   - Destino B: $x_{12} + x_{22} = 180$
   - Destino C: $x_{13} + x_{23} = 100$
3. **Restricciones de No Negatividad**:
   - $x_{ij} \geq 0$ para todos los i, j.

In [245…

```
import numpy as np
from scipy.optimize import linprog
import matplotlib.pyplot as plt

# Matriz de costos (C)
costos = [8, 6, 10, 9, 12, 5]  # Costos en orden [x_11, x_12, x_13, x_21, x_22, x_2

# Coeficientes de las restricciones de capacidad y demanda
A_eq = [
    [1, 1, 1, 0, 0, 0],  # Capacidad Centro 1
    [0, 0, 0, 1, 1, 1],  # Capacidad Centro 2
    [1, 0, 0, 1, 0, 0],  # Demanda Destino A
    [0, 1, 0, 0, 1, 0],  # Demanda Destino B
    [0, 0, 1, 0, 0, 1]   # Demanda Destino C
]

# Lados derechos de las restricciones (capacidad y demanda)
b_eq = [250, 150, 120, 180, 100]

# Resolver el problema de optimización
resultado = linprog(costos, A_eq=A_eq, b_eq=b_eq, bounds=(0, None), method='highs')
asignaciones = resultado.x

# Mostrar resultados
asignaciones_matriz = asignaciones.reshape((2, 3))
print("Asignación óptima de productos (Centro -> Destino):")
print(asignaciones_matriz)
print(f"\nCosto mínimo total de envío: ${resultado.fun:.2f}")

# Gráfica de la asignación de productos
centros = ["Centro 1", "Centro 2"]
destinos = ["Destino A", "Destino B", "Destino C"]

fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))
c = ax.matshow(asignaciones_matriz, cmap="Blues")
fig.colorbar(c)

# Añadir etiquetas
for (i, j), valor in np.ndenumerate(asignaciones_matriz):
    ax.text(j, i, f"{valor:.0f}", ha="center", va="center", color="black")

ax.set_xticks(range(len(destinos)))
ax.set_yticks(range(len(centros)))
ax.set_xticklabels(destinos)
```

```
ax.set_yticklabels(centros)
ax.set_title("Asignación Óptima de Productos desde Cada Centro a Cada Destino")
plt.xlabel("Destinos")
plt.ylabel("Centros de Distribución")
plt.show()
```

```
Asignación óptima de productos (Centro -> Destino):
[[ 70. 180.   0.]
 [ 50.   0. 100.]]

Costo mínimo total de envío: $2590.00
```



Ejercicio 78: Optimización de Inventario para Minimizar Costos Totales de Pedido y Almacenamiento

Una tienda minorista vende un producto de alta demanda y desea optimizar sus pedidos para minimizar los costos totales de inventario. La tienda compra este producto a un proveedor y enfrenta dos tipos de costos:

1. **Costo de pedido**: Cada vez que realiza un pedido, incurre en un costo fijo de $200.

2. **Costo de almacenamiento**: Cada unidad de producto en inventario tiene un costo de almacenamiento de $2 por mes.

La tienda estima que necesita **12,000 unidades** del producto al año. La tasa de demanda es constante y el producto se agota uniformemente. El objetivo es determinar la **cantidad óptima de pedido (Q)** que minimiza los costos totales de inventario.

Datos

1. **Demanda anual** (D): 12,000 unidades

2. **Costo de pedido** (C_p): $200 por pedido

3. **Costo de almacenamiento por unidad** (C_h): $2 por unidad al mes

Tareas

1. **Determine la cantidad óptima de pedido** (Q) usando el modelo de cantidad económica de pedido (EOQ).

2. **Calcule el número de pedidos necesarios al año** y el tiempo entre pedidos.

3. **Calcule el costo total anual de pedido** y el costo total anual de almacenamiento.

4. **Grafique los costos totales de inventario en función de diferentes valores de Q** para visualizar el punto de costo mínimo.

Fórmulas para la Optimización de Inventario

Para determinar la cantidad económica de pedido (EOQ), usamos la fórmula:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot C_p}{C_h}}$$

donde:

- D es la demanda anual,
- C_p es el costo de pedido,
- C_h es el costo de almacenamiento anual por unidad.

El número de pedidos al año (N) se calcula como:

$$N = \frac{D}{Q}$$

y el tiempo entre pedidos (T) es:

$$T = \frac{N}{12}$$

Resolución Matemática

Paso 1: Calcular la Cantidad Óptima de Pedido (EOQ)

Usamos la fórmula de EOQ para obtener el valor óptimo de Q:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot C_p}{C_h}}$$

donde:

- $D = 12000$ unidades,
- $C_p = 200$,
- $C_h = 2 \cdot 12 = 24$ (anual).

Paso 2: Calcular el Número de Pedidos al Año y el Tiempo entre Pedidos

El número de pedidos anuales (N) y el tiempo entre pedidos (T) son:

$$N = \frac{D}{Q}$$

$$T = \frac{12}{N}$$

Paso 3: Calcular los Costos Totales Anuales

1. **Costo Total de Pedido**:

$$\text{Costo total de pedido} = N \cdot C_p$$

2. **Costo Total de Almacenamiento**:

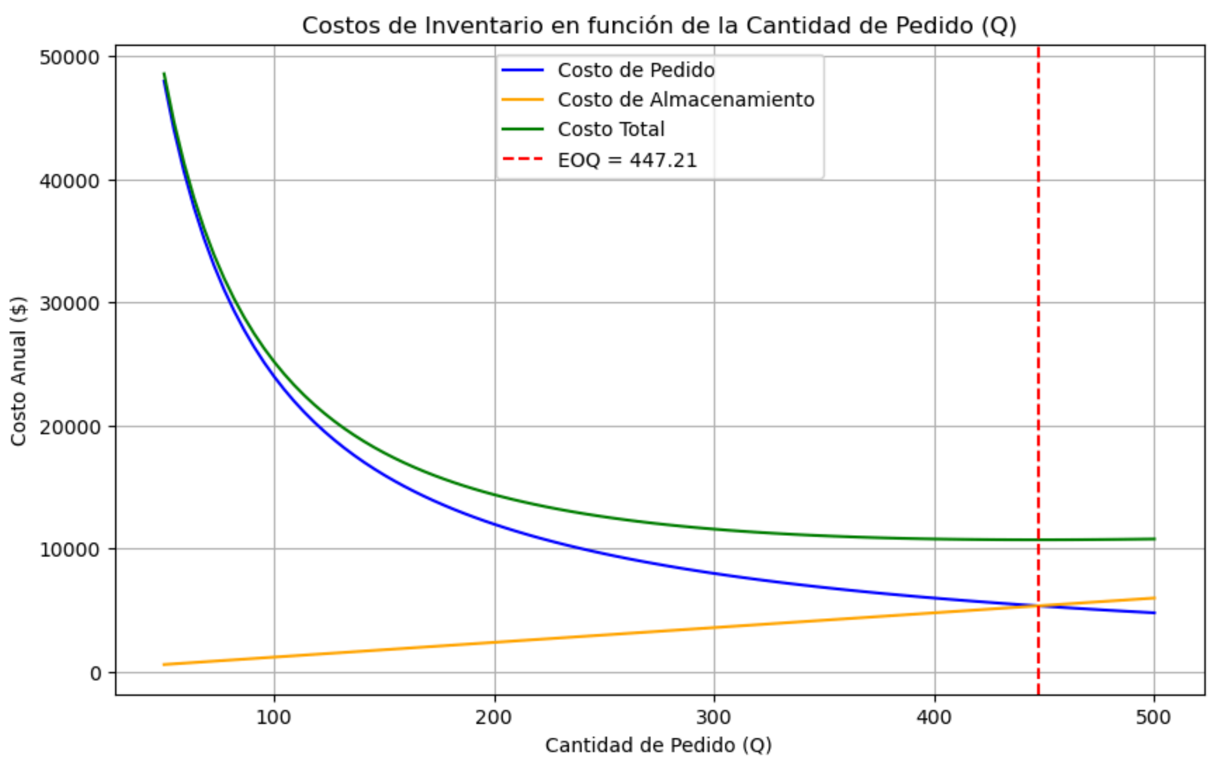
$$\text{Costo total de almacenamiento} = \frac{Q}{2} \cdot C_h$$

In [248…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
D = 12000  # Demanda anual
C_p = 200  # Costo de pedido
C_h = 24   # Costo de almacenamiento anual por unidad

# Cantidad óptima de pedido (EOQ)
Q_opt = np.sqrt((2 * D * C_p) / C_h)

# Número de pedidos al año y tiempo entre pedidos
N_opt = D / Q_opt
T_opt = 12 / N_opt

# Cálculo de costos totales
costo_pedido_total = N_opt * C_p
costo_almacenamiento_total = (Q_opt / 2) * C_h

print(f"Cantidad óptima de pedido (Q): {Q_opt:.2f} unidades")
```

```
print(f"Número de pedidos al año: {N_opt:.2f}")
print(f"Tiempo entre pedidos: {T_opt:.2f} meses")
print(f"Costo total anual de pedido: ${costo_pedido_total:.2f}")
print(f"Costo total anual de almacenamiento: ${costo_almacenamiento_total:.2f}")

# Gráfica de los costos en función de diferentes valores de Q
Q_values = np.linspace(50, 500, 100)
costo_pedido_values = (D / Q_values) * C_p
costo_almacenamiento_values = (Q_values / 2) * C_h
costo_total_values = costo_pedido_values + costo_almacenamiento_values

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(Q_values, costo_pedido_values, label="Costo de Pedido", color="blue")
plt.plot(Q_values, costo_almacenamiento_values, label="Costo de Almacenamiento", co
plt.plot(Q_values, costo_total_values, label="Costo Total", color="green")
plt.axvline(Q_opt, color="red", linestyle="--", label=f"EOQ = {Q_opt:.2f}")
plt.title("Costos de Inventario en función de la Cantidad de Pedido (Q)")
plt.xlabel("Cantidad de Pedido (Q)")
plt.ylabel("Costo Anual ($)")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Cantidad óptima de pedido (Q): 447.21 unidades
Número de pedidos al año: 26.83
Tiempo entre pedidos: 0.45 meses
Costo total anual de pedido: $5366.56
Costo total anual de almacenamiento: $5366.56
```



Ejercicio 79: Optimización de Costo de Aseguramiento Basado en Probabilidades

de Siniestro

Una compañía de seguros quiere optimizar el costo de las primas de seguros para tres grupos de clientes, basándose en las probabilidades estimadas de que cada grupo sufra un siniestro. La compañía quiere calcular el costo óptimo de aseguramiento de cada grupo para cubrir el riesgo total.

Los datos de los grupos son los siguientes:

1. **Grupo A**:
    - Tamaño del grupo: 200 personas
    - Probabilidad de siniestro: 0.01
    - Costo promedio de siniestro: $10,000
2. **Grupo B**:
    - Tamaño del grupo: 150 personas
    - Probabilidad de siniestro: 0.02
    - Costo promedio de siniestro: $12,000
3. **Grupo C**:
    - Tamaño del grupo: 100 personas
    - Probabilidad de siniestro: 0.03
    - Costo promedio de siniestro: $15,000

Tareas

1. **Calcule el costo esperado de siniestro para cada grupo**, multiplicando el tamaño del grupo, la probabilidad de siniestro y el costo promedio del siniestro.
2. **Calcule el costo total esperado de siniestros** para la compañía.
3. **Determine la prima de seguro óptima por persona** en cada grupo si la compañía quiere cubrir el costo esperado de siniestros.
4. **Grafique el costo esperado de siniestro y la prima óptima por persona para cada grupo**.

Fórmulas para el Cálculo del Costo Esperado

El costo esperado de siniestro (C_E) para cada grupo se calcula como:

$$C_E = \text{Tamaño del Grupo} \times \text{Probabilidad de Siniestro} \times \text{Costo Promedio de Siniestro}$$

La prima óptima por persona (P) en cada grupo es el costo esperado dividido por el tamaño del grupo:

$$P = \frac{C_E}{\text{Tamaño del Grupo}}$$

Resolución Matemática

Paso 1: Calcular el Costo Esperado de Siniestro para Cada Grupo

Usamos la fórmula de costo esperado de siniestro:

$$C_{E_A} = 200 \times 0.01 \times 10000 = 20000$$

$$C_{E_B} = 150 \times 0.02 \times 12000 = 36000$$

$$C_{E_C} = 100 \times 0.03 \times 15000 = 45000$$

Paso 2: Calcular el Costo Total Esperado de Siniestros para la Compañía

La suma de los costos esperados de siniestro para cada grupo es:

$$C_{E_{\text{total}}} = C_{E_A} + C_{E_B} + C_{E_C} = 20000 + 36000 + 45000 = 101000$$

Paso 3: Calcular la Prima de Seguro Óptima por Persona para Cada Grupo

La prima óptima por persona en cada grupo es:

$$P_A = \frac{C_{E_A}}{200} = \frac{20000}{200} = 100$$

$$P_B = \frac{C_{E_B}}{150} = \frac{36000}{150} = 240$$

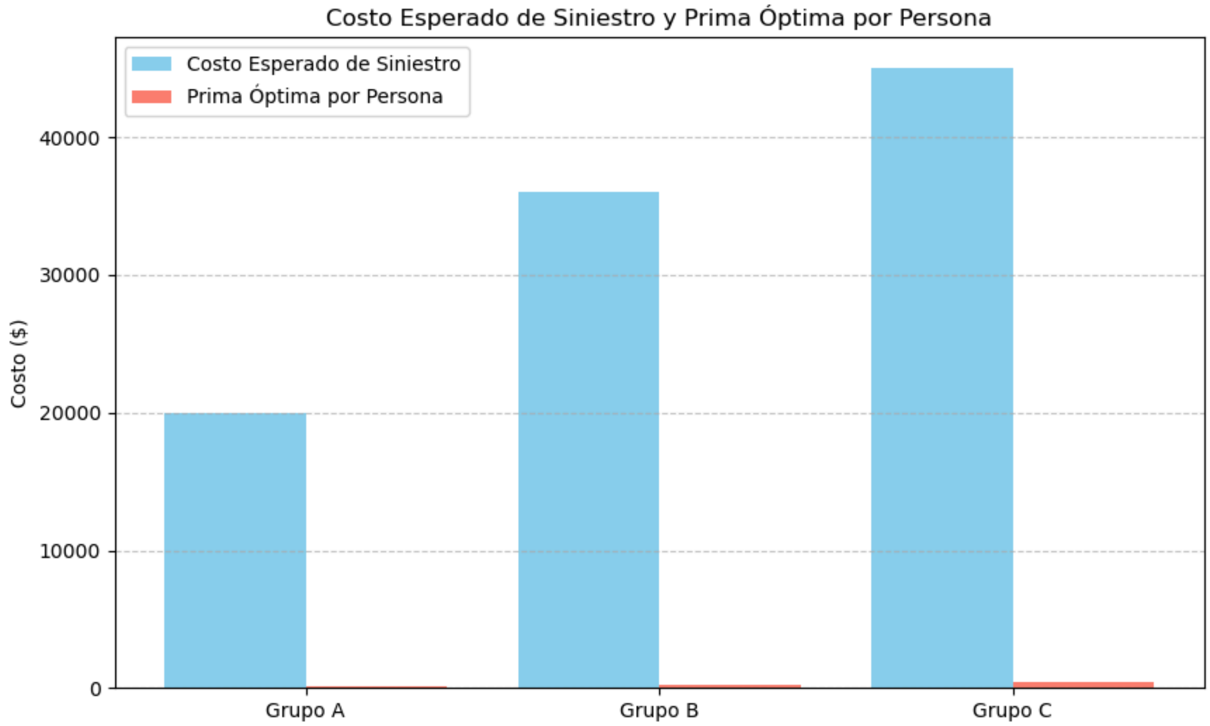
$$P_C = \frac{C_{E_C}}{100} = \frac{45000}{100} = 450$$

In [251…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos de los grupos
grupos = ["Grupo A", "Grupo B", "Grupo C"]
tamano_grupo = [200, 150, 100]
prob_siniestro = [0.01, 0.02, 0.03]
costo_prom_siniestro = [10000, 12000, 15000]

# Calcular costos esperados de siniestro y primas óptimas por persona
costo_esperado = [tamano_grupo[i] * prob_siniestro[i] * costo_prom_siniestro[i] for
prima_optima = [costo_esperado[i] / tamano_grupo[i] for i in range(3)]

# Costo total esperado para la compañía
costo_total_esperado = sum(costo_esperado)
```

```python
# Resultados
print("Costo esperado de siniestro por grupo:")
for i, grupo in enumerate(grupos):
    print(f"{grupo}: ${costo_esperado[i]:.2f}")
print(f"\nCosto total esperado de siniestros para la compañía: ${costo_total_espera

print("\nPrima óptima por persona por grupo:")
for i, grupo in enumerate(grupos):
    print(f"{grupo}: ${prima_optima[i]:.2f}")

# Gráfica de costos esperados y primas óptimas por persona
x = np.arange(len(grupos))

fig, ax1 = plt.subplots(figsize=(10, 6))

# Barras de costo esperado
ax1.bar(x - 0.2, costo_esperado, width=0.4, label="Costo Esperado de Siniestro", co
# Barras de prima óptima
ax1.bar(x + 0.2, prima_optima, width=0.4, label="Prima Óptima por Persona", color="

# Configuración de la gráfica
ax1.set_xticks(x)
ax1.set_xticklabels(grupos)
ax1.set_ylabel("Costo ($)")
ax1.set_title("Costo Esperado de Siniestro y Prima Óptima por Persona")
ax1.legend()
plt.grid(axis="y", linestyle="--", alpha=0.7)
plt.show()
```

```
Costo esperado de siniestro por grupo:
Grupo A: $20000.00
Grupo B: $36000.00
Grupo C: $45000.00

Costo total esperado de siniestros para la compañía: $101000.00

Prima óptima por persona por grupo:
Grupo A: $100.00
Grupo B: $240.00
Grupo C: $450.00
```



Ejercicio 80: Optimización de Portafolio para Maximizar Retorno Esperado

Un inversionista desea distribuir su capital entre tres activos financieros: **acciones**, **bonos**, y **fondos de inversión**. Cada activo tiene un retorno esperado y un nivel de riesgo (desviación estándar) asociado. El objetivo es maximizar el retorno total esperado del portafolio, manteniendo una inversión balanceada y controlando el riesgo.

Datos de los Activos:

1. **Acciones**:
    - Retorno esperado: 12%
    - Desviación estándar (riesgo): 20%
2. **Bonos**:
    - Retorno esperado: 5%
    - Desviación estándar (riesgo): 8%
3. **Fondos de Inversión**:
    - Retorno esperado: 7%
    - Desviación estándar (riesgo): 10%

Restricciones:

1. La inversión total en el portafolio debe ser $100,000.

2. No más del 50% del capital debe destinarse a acciones para controlar el riesgo.
3. Al menos el 20% del capital debe invertirse en bonos para asegurar estabilidad en la inversión.

Tareas

1. **Formule el problema de optimización** para maximizar el retorno esperado del portafolio.
2. **Calcule la cantidad óptima de inversión** en cada activo que maximiza el retorno esperado bajo las restricciones dadas.
3. **Calcule el retorno total esperado** y el riesgo total del portafolio.
4. **Grafique la asignación de inversión** y muestre el retorno y riesgo del portafolio.

Formulación del Problema de Optimización

Sea:

- x la cantidad invertida en acciones,
- y la cantidad invertida en bonos,
- z la cantidad invertida en fondos de inversión.

La función objetivo es maximizar el retorno total esperado:

$$\text{Maximizar} \quad R = 0.12x + 0.05y + 0.07z$$

sujeto a las restricciones:

1. Restricción de inversión total:

$$x + y + z = 100000$$

2. Restricción de riesgo en acciones:

$$x \leq 0.5 \times 100000 = 50000$$

3. Restricción mínima en bonos:

$$y \geq 0.2 \times 100000 = 20000$$

Resolución Matemática

Paso 1: Definición de Variables de Decisión

Las variables de decisión son:

- x: cantidad invertida en acciones,
- y: cantidad invertida en bonos,
- z: cantidad invertida en fondos de inversión.

Paso 2: Función Objetivo

Maximizar el retorno esperado:

$$R = 0.12x + 0.05y + 0.07z$$

Paso 3: Restricciones

1. **Inversión Total**:

$$x + y + z = 100000$$

2. **Límite de Inversión en Acciones**:

$$x \leq 50000$$

3. **Inversión Mínima en Bonos**:

$$y \geq 20000$$

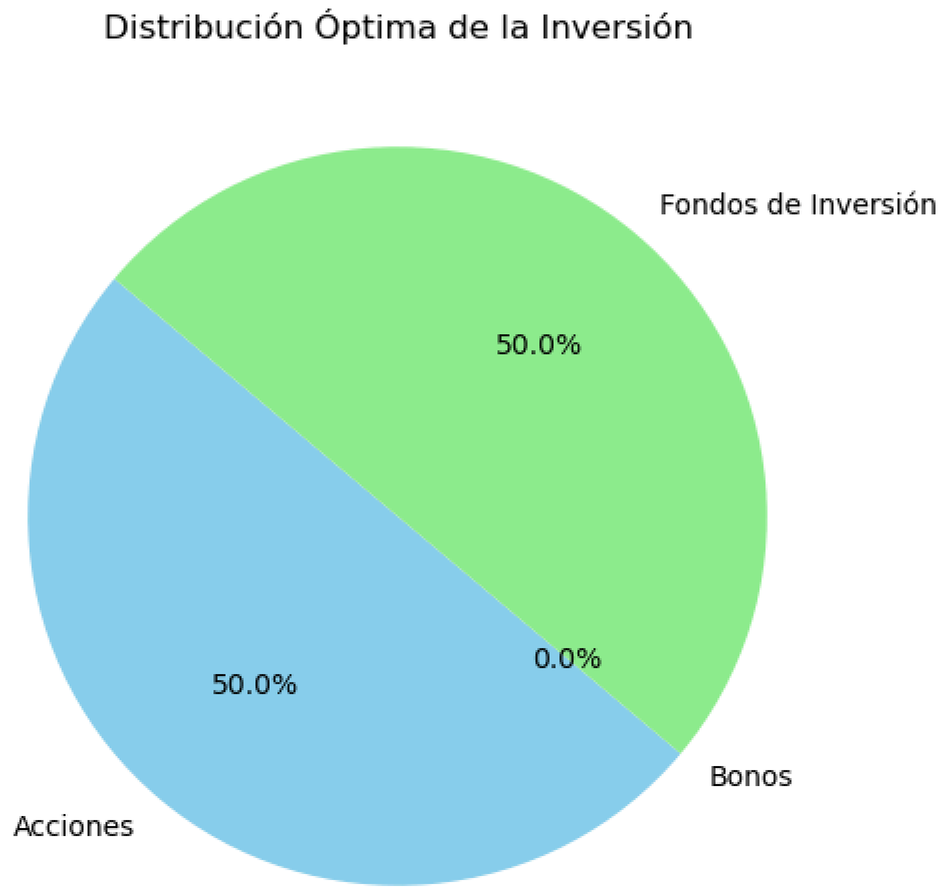
Estas restricciones aseguran que el capital esté distribuido de manera balanceada entre los activos.

In [254…

```
import numpy as np
from scipy.optimize import linprog
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos del problema
# Coeficientes de la función objetivo (maximizar retorno)
c = [-0.12, -0.05, -0.07]  # Negativos porque linprog minimiza por defecto

# Coeficientes de las restricciones de igualdad y desigualdad
A_eq = [[1, 1, 1]]          # Restricción de inversión total
b_eq = [100000]

A_ub = [[1, 0, 0], [-1, 0, 0], [0, -1, 0]]  # Restricciones de inversión en accione
b_ub = [50000, -20000, 0]

# Resolver el problema de optimización
resultado = linprog(c, A_ub=A_ub, b_ub=b_ub, A_eq=A_eq, b_eq=b_eq, bounds=(0, None)

# Variables óptimas
x_opt, y_opt, z_opt = resultado.x
retorno_esperado = -resultado.fun  # El retorno esperado total del portafolio (posi

# Mostrar resultados
print(f"Inversión óptima en acciones: ${x_opt:.2f}")
print(f"Inversión óptima en bonos: ${y_opt:.2f}")
print(f"Inversión óptima en fondos de inversión: ${z_opt:.2f}")
print(f"Retorno esperado total del portafolio: ${retorno_esperado:.2f}")

# Gráfica de la asignación de inversión
labels = ['Acciones', 'Bonos', 'Fondos de Inversión']
```

```
inversiones = [x_opt, y_opt, z_opt]

plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.pie(inversiones, labels=labels, autopct='%1.1f%%', startangle=140, colors=["sky
plt.title("Distribución Óptima de la Inversión")
plt.show()
```

```
Inversión óptima en acciones: $50000.00
Inversión óptima en bonos: $0.00
Inversión óptima en fondos de inversión: $50000.00
Retorno esperado total del portafolio: $9500.00
```



Capítulo 9: Cálculo Financiero: Herramientas para Tomar Decisiones Inteligentes

IX.1 Fundamentos del Cálculo Financiero

El cálculo financiero es una rama de las matemáticas aplicadas que permite analizar y gestionar el valor del dinero en el tiempo, aspectos de interés, inversión y financiamiento.

Este campo es esencial para la toma de decisiones en áreas como la banca, la administración de empresas, y la economía, entre otras.

Los conceptos fundamentales incluyen:

- **Valor Presente (VP)** y **Valor Futuro (VF)**: Permiten determinar el valor de una suma de dinero en el tiempo, considerando factores como la inflación o el interés.
  - El **Valor Presente** calcula cuánto valdría en el presente una cantidad futura de dinero.
  - El **Valor Futuro** calcula cuánto valdrá en el futuro una cantidad de dinero en el presente.

  Las fórmulas más comunes son:

$$VF = VP \cdot (1+i)^n$$

$$VP = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

  donde:

  - VP es el valor presente,
  - VF es el valor futuro,
  - i es la tasa de interés,
  - n es el número de periodos.
- **Interés Simple y Compuesto**:
  - **Interés Simple**: Se calcula sobre el monto inicial, y el interés generado no se reinvierte. La fórmula es:

$$I_{\text{simple}} = P \cdot i \cdot n$$

  - **Interés Compuesto**: Se calcula sobre el monto inicial más los intereses generados previamente, generando un crecimiento exponencial. Su fórmula es:

$$VF = P \cdot (1+i)^n$$

    donde:

    - I_{simple} es el interés simple,
    - P es el monto principal,
    - i es la tasa de interés,
    - n es el número de periodos.

Importancia del Cálculo Financiero en la Vida Cotidiana

El cálculo financiero tiene aplicaciones prácticas en la vida diaria, desde calcular el costo total de un préstamo hasta planificar una inversión a largo plazo. Este conocimiento ayuda a tomar decisiones informadas en temas como:

- **Préstamos**: Evaluar el costo total de una hipoteca o préstamo personal.
- **Inversiones**: Comparar distintas oportunidades de inversión y sus retornos.
- **Ahorros**: Determinar cuánto se necesita ahorrar hoy para alcanzar una meta financiera futura.

A través de estos fundamentos, el cálculo financiero permite una mejor comprensión del valor del dinero en el tiempo y ayuda a optimizar la toma de decisiones financieras.

IX.2 Aplicaciones del Cálculo Financiero en Inversiones y Gestión de Presupuestos

El cálculo financiero se aplica en diversas áreas, especialmente en la administración de inversiones y la gestión de presupuestos. A continuación, se describen algunas aplicaciones clave en estos campos.

1. Valoración de Inversiones

La valoración de inversiones es una de las aplicaciones principales del cálculo financiero. Herramientas como el valor presente neto (VPN) y la tasa interna de retorno (TIR) se utilizan para analizar la rentabilidad de proyectos y tomar decisiones de inversión.

- **Valor Presente Neto (VPN)**: Evalúa la rentabilidad de una inversión descontando sus flujos de efectivo futuros al presente.

  $$VPN = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t} - C_0$$

  donde:

  - C_t es el flujo de efectivo en el periodo t,
  - i es la tasa de descuento,
  - n es el número de periodos,
  - C_0 es la inversión inicial.
- **Tasa Interna de Retorno (TIR)**: Es la tasa de descuento que hace que el VPN sea igual a cero, permitiendo comparar la rentabilidad de diferentes proyectos.

2. Préstamos y Amortizaciones

El cálculo financiero permite diseñar planes de pago para préstamos mediante métodos como la amortización. Esto es útil en hipotecas, préstamos estudiantiles y financiamientos empresariales.

- **Cuota de Amortización**: Permite calcular pagos mensuales iguales para cubrir tanto el capital como el interés de un préstamo. La fórmula es:

$$A = \frac{P \cdot i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

donde:

  - A es la cuota de amortización,
  - P es el monto del préstamo,
  - i es la tasa de interés por periodo,
  - n es el número de periodos.

3. Planificación de Ahorros

El cálculo financiero también se aplica en la planificación de ahorros, permitiendo determinar cuánto se debe ahorrar hoy para alcanzar una meta financiera futura. Con el valor presente y el interés compuesto, se pueden calcular los aportes necesarios.

4. Análisis de Presupuestos y Flujos de Caja

El análisis de flujo de caja ayuda a prever el saldo de una cuenta en el futuro en función de entradas y salidas programadas, lo cual es esencial en la planificación de presupuestos tanto a nivel personal como empresarial.

Ejemplo Práctico de Aplicación en Inversiones

Imaginemos que una persona quiere invertir $50,000 en un proyecto con una tasa de retorno esperada de 8% anual. Si espera obtener un valor futuro en 5 años, podría calcular el valor presente necesario para alcanzar esta meta y decidir si la inversión es viable. Este cálculo es importante para evaluar diferentes oportunidades y planificar a largo plazo.

Estas aplicaciones del cálculo financiero son herramientas esenciales para una gestión eficiente de las finanzas, ya sea a nivel personal o corporativo. Los ejercicios en esta sección permitirán a los lectores practicar y aplicar estos conceptos a situaciones de la vida real.

IX.3 Ejercicios de Aplicaciones y Soluciones (MathPY)

Ejercicio 81: Cálculo de Interés Simple y Compuesto en una Cuenta de Ahorros

Un inversor deposita $5,000 en una cuenta de ahorros que ofrece una tasa de interés del 6% anual. Este inversor quiere conocer cuánto tendrá en su cuenta después de 5 años bajo dos opciones de interés: **interés simple** e **interés compuesto**.

Tareas

1. **Calcule el valor futuro usando interés simple** al cabo de 5 años.
2. **Calcule el valor futuro usando interés compuesto** al cabo de 5 años.
3. Compare ambos resultados y determine cuánto más ganaría el inversor con interés compuesto.
4. **Grafique el crecimiento de la inversión** año a año bajo ambos tipos de interés para visualizar la diferencia.

Fórmulas para los Cálculos Financieros

1. **Interés Simple**:

$$VF_{\text{simple}} = P \cdot (1 + i \cdot n)$$

2. **Interés Compuesto**:

$$VF_{\text{compuesto}} = P \cdot (1 + i)^n$$

donde:

- P es el monto inicial de la inversión (5,000),
- i es la tasa de interés anual (0.06),
- n es el número de años (5).

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del Valor Futuro con Interés Simple

Usamos la fórmula del interés simple para obtener el valor futuro (VF_{simple}):

$$VF_{\text{simple}} = P \cdot (1 + i \cdot n)$$

donde:

- $P = 5000$,
- $i = 0.06$,
- $n = 5$.

Sustituyendo:

$$VF_{\text{simple}} = 5000 \cdot (1 + 0.06 \cdot 5) = 5000 \cdot 1.3 = 6500$$

Paso 2: Cálculo del Valor Futuro con Interés Compuesto

Usamos la fórmula del interés compuesto para obtener el valor futuro ($VF_{\text{compuesto}}$):

$$VF_{\text{compuesto}} = P \cdot (1+i)^n$$

Sustituyendo:

$$VF_{\text{compuesto}} = 5000 \cdot (1+0.06)^5 = 5000 \cdot 1.3382 \approx 6691$$

Paso 3: Comparación de Resultados

La diferencia entre ambos valores futuros es:

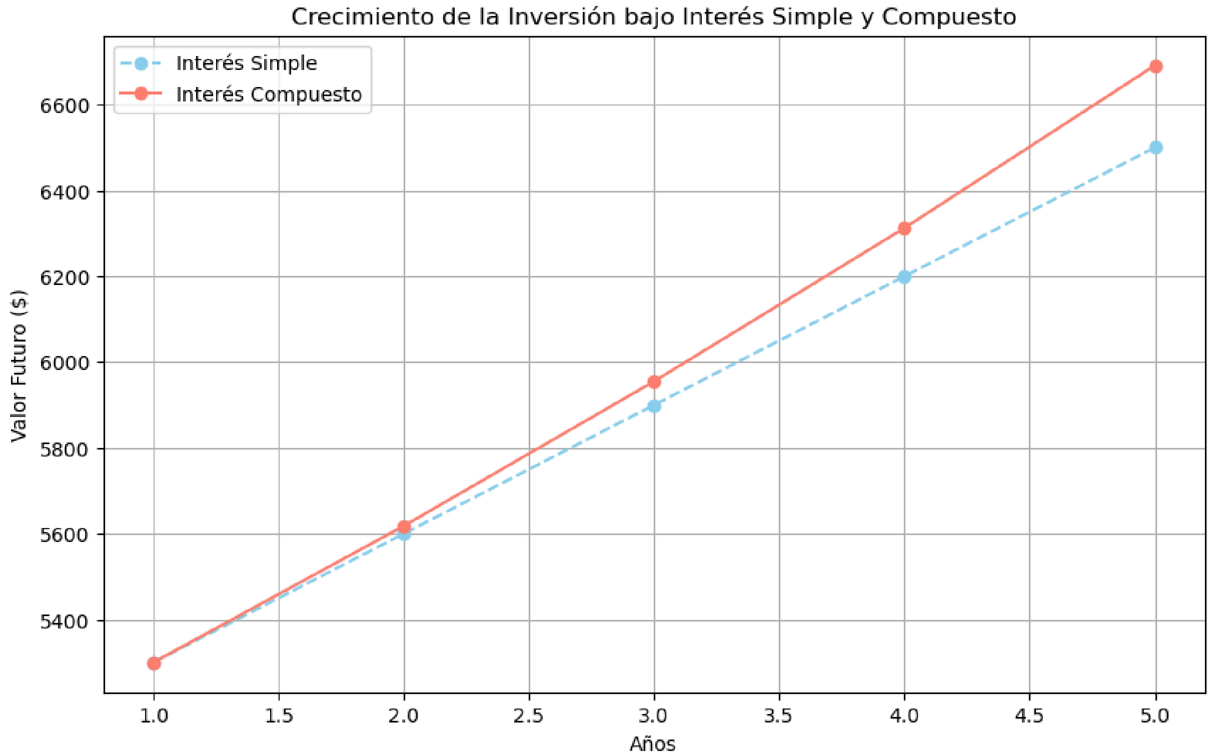
$$\text{Diferencia} = VF_{\text{compuesto}} - VF_{\text{simple}} = 6691 - 6500 = 191$$

Esto muestra que el interés compuesto genera $191 adicionales en comparación con el interés simple en 5 años.

In [259…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
P = 5000  # Monto inicial
i = 0.06  # Tasa de interés anual
n = 5     # Número de años

# Cálculo del valor futuro con interés simple
VF_simple = P * (1 + i * n)

# Cálculo del valor futuro con interés compuesto
VF_compuesto = P * (1 + i)**n

# Mostrar resultados
print(f"Valor futuro con interés simple después de {n} años: ${VF_simple:.2f}")
print(f"Valor futuro con interés compuesto después de {n} años: ${VF_compuesto:.2f}
print(f"Diferencia a favor del interés compuesto: ${VF_compuesto - VF_simple:.2f}")

# Gráfica del crecimiento año a año
anios = np.arange(1, n + 1)
vf_simple_anual = [P * (1 + i * t) for t in anios]
vf_compuesto_anual = [P * (1 + i)**t for t in anios]

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(anios, vf_simple_anual, label="Interés Simple", marker="o", linestyle="--"
plt.plot(anios, vf_compuesto_anual, label="Interés Compuesto", marker="o", color="s
plt.title("Crecimiento de la Inversión bajo Interés Simple y Compuesto")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Valor Futuro ($)")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Valor futuro con interés simple después de 5 años: $6500.00
Valor futuro con interés compuesto después de 5 años: $6691.13
Diferencia a favor del interés compuesto: $191.13
```



Ejercicio 82: Evaluación de Inversiones con VPN y TIR

Un inversor está considerando realizar una inversión de $15,000 en un proyecto que generará flujos de efectivo durante los próximos 5 años. Los flujos de efectivo proyectados son los siguientes:

- Año 1: $3,000
- Año 2: $4,500
- Año 3: $6,000
- Año 4: $3,500
- Año 5: $2,500

El inversor quiere determinar si el proyecto es viable usando dos métricas:

1. **Valor Presente Neto (VPN)**, con una tasa de descuento del 8%.
2. **Tasa Interna de Retorno (TIR)**, la cual es la tasa que iguala el VPN a cero.

Tareas

1. **Calcule el VPN** del proyecto usando una tasa de descuento del 8%.
2. **Calcule la TIR** del proyecto y determine si es mayor que la tasa de descuento.

3. Compare el VPN y la TIR para evaluar si el proyecto es financieramente viable.
4. **Grafique los flujos de efectivo** en el tiempo para visualizar los ingresos del proyecto.

Fórmulas para el Cálculo Financiero

1. **Valor Presente Neto (VPN)**:

$$VPN = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t} - C_0$$

   donde:

   - C_t es el flujo de efectivo en el año t,
   - i es la tasa de descuento (0.08),
   - C_0 es la inversión inicial ($-15,000$).
2. **Tasa Interna de Retorno (TIR)**: La TIR es la tasa de descuento que hace que el VPN sea igual a cero.

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del VPN

Usamos la fórmula del valor presente neto (VPN):

$$VPN = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t} - C_0$$

donde:

- $C_0 = -15000$ (inversión inicial),
- $i = 0.08$ (tasa de descuento),
- Flujos de efectivo: $C_1 = 3000$, $C_2 = 4500$, $C_3 = 6000$, $C_4 = 3500$, $C_5 = 2500$.

Sustituyendo los valores:

$$VPN = \frac{3000}{(1+0.08)^1} + \frac{4500}{(1+0.08)^2} + \frac{6000}{(1+0.08)^3} + \frac{3500}{(1+0.08)^4} + \frac{2500}{(1+0.08)^5} - 1500($$

Realizando los cálculos:

$$VPN \approx 2778 + 3858 + 4762 + 2577 + 1703 - 15000 \approx 1678$$

Paso 2: Cálculo de la TIR

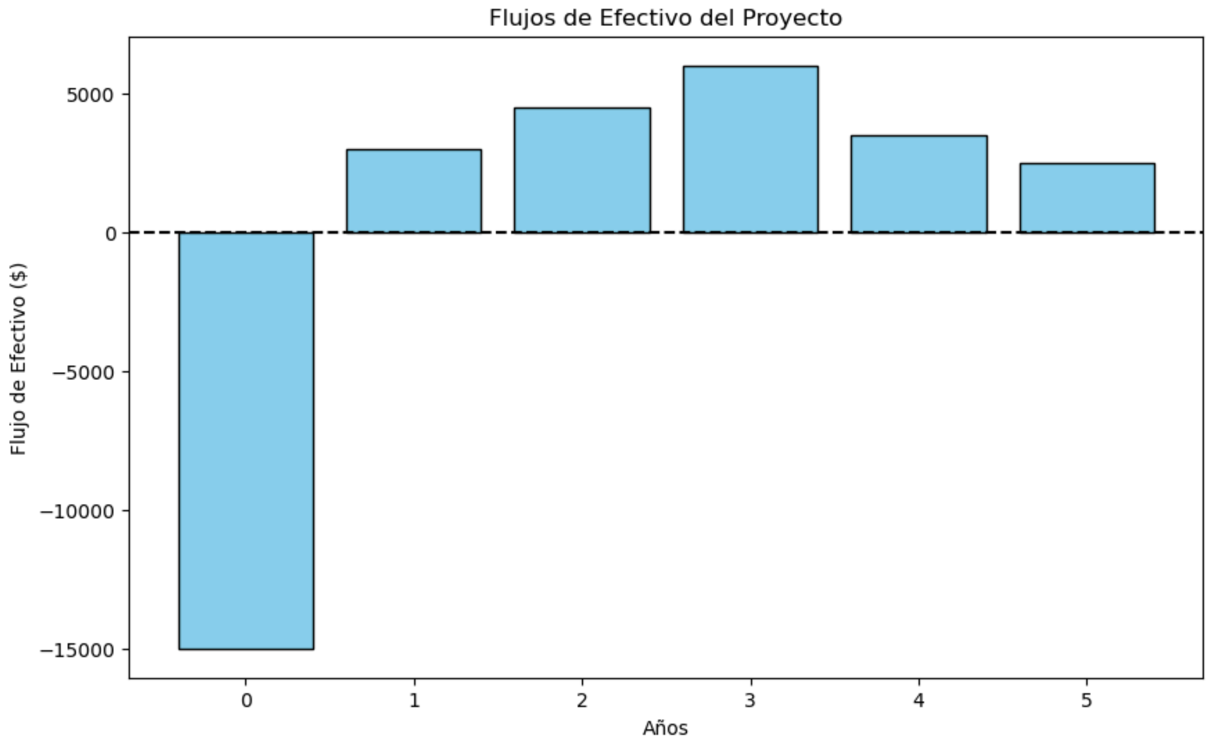
La **TIR** es la tasa que hace que el **VPN** sea cero. Para este cálculo, usaremos programación para resolver la tasa en Python.

In [262…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
inversion_inicial = -15000
flujos_efectivo = [3000, 4500, 6000, 3500, 2500]
tasa_descuento = 0.08

# Función para calcular VPN dado un conjunto de flujos de efectivo y una tasa de de
def calcular_vpn(tasa, flujos):
    vpn = sum([flujo / (1 + tasa)**i for i, flujo in enumerate(flujos)])
    return vpn

# Cálculo del VPN usando la tasa de descuento
flujos_totales = [inversion_inicial] + flujos_efectivo
vpn = calcular_vpn(tasa_descuento, flujos_totales)

# Función para calcular la TIR mediante el método de bisección
def calcular_tir(flujos, tol=1e-6, max_iter=1000):
```

```
    tasa_baja = 0.0
    tasa_alta = 1.0
    iteraciones = 0

    while iteraciones < max_iter:
        tasa_media = (tasa_baja + tasa_alta) / 2
        vpn_media = calcular_vpn(tasa_media, flujos)

        if abs(vpn_media) < tol:
            return tasa_media  # TIR encontrada
        elif vpn_media > 0:
            tasa_baja = tasa_media
        else:
            tasa_alta = tasa_media

        iteraciones += 1

    return tasa_media  # Retorna la mejor aproximación si no se cumple la toleranci

# Cálculo de la TIR
tir = calcular_tir(flujos_totales)

# Mostrar resultados
print(f"Valor Presente Neto (VPN) del proyecto: ${vpn:.2f}")
print(f"Tasa Interna de Retorno (TIR) del proyecto: {tir * 100:.2f}%")

# Interpretación de la TIR
if tir > tasa_descuento:
    print("La TIR es mayor que la tasa de descuento; el proyecto es viable financie
else:
    print("La TIR es menor que la tasa de descuento; el proyecto no es viable finan

# Gráfica de flujos de efectivo
anios = np.arange(0, len(flujos_efectivo) + 1)
flujos_graficar = [inversion_inicial] + flujos_efectivo

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.bar(anios, flujos_graficar, color="skyblue", edgecolor="black")
plt.axhline(0, color="black", linestyle="--")
plt.title("Flujos de Efectivo del Proyecto")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Flujo de Efectivo ($)")
plt.xticks(anios)
plt.show()
```

```
Valor Presente Neto (VPN) del proyecto: $672.86
Tasa Interna de Retorno (TIR) del proyecto: 9.73%
La TIR es mayor que la tasa de descuento; el proyecto es viable financieramente.
```



Ejercicio 83: Cálculo de la Cuota Mensual de un Préstamo con Amortización

Una persona está considerando tomar un préstamo de $30,000 para la compra de un automóvil. El banco ofrece una tasa de interés anual del 5%, y el préstamo debe ser pagado en un plazo de 5 años mediante pagos mensuales iguales. La persona quiere saber cuánto deberá pagar cada mes para liquidar el préstamo al final del periodo.

Tareas

1. **Calcule la cuota mensual** requerida para pagar el préstamo en 5 años con una tasa de interés anual del 5%.
2. **Calcule el monto total pagado al final del plazo**.
3. **Calcule el interés total pagado** a lo largo del periodo de 5 años.
4. **Grafique el saldo pendiente del préstamo** después de cada año para visualizar cómo disminuye la deuda con el tiempo.

Fórmulas para el Cálculo Financiero

1. **Cálculo de la Cuota de Amortización (A)**:

$$A = \frac{P \cdot i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

donde:

- A es la cuota mensual,
- P es el monto del préstamo ($30,000$),
- i es la tasa de interés mensual (anual / 12),
- n es el número total de pagos (meses).

2. **Saldo Pendiente**: Calcularemos el saldo pendiente del préstamo en cada año para observar la disminución de la deuda.

Resolución Matemática

Paso 1: Calcular la Cuota Mensual

Dado:

- Monto del préstamo ($P = 30000$),
- Tasa de interés anual ($i_{\text{anual}} = 0.05$),
- Plazo del préstamo en años ($\text{años} = 5$).

Convertimos la tasa de interés anual a mensual y el plazo de años a meses:

$$i_{\text{mensual}} = \frac{i_{\text{anual}}}{12} = \frac{0.05}{12} \approx 0.004167$$

$$n = 5 \text{ años} \times 12 \text{ meses por año} = 60 \text{ meses}$$

Usamos la fórmula de amortización para calcular la cuota mensual (A):

$$A = \frac{P \cdot i_{\text{mensual}} \cdot (1 + i_{\text{mensual}})^n}{(1 + i_{\text{mensual}})^n - 1}$$

Sustituyendo los valores:

$$A = \frac{30000 \cdot 0.004167 \cdot (1 + 0.004167)^{60}}{(1 + 0.004167)^{60} - 1} \approx 566.14$$

Paso 2: Cálculo del Monto Total Pagado y el Interés Total Pagado

- **Monto Total Pagado**:

$$\text{Monto Total Pagado} = A \cdot n = 566.14 \cdot 60 \approx 33968.40$$

- **Interés Total Pagado**:

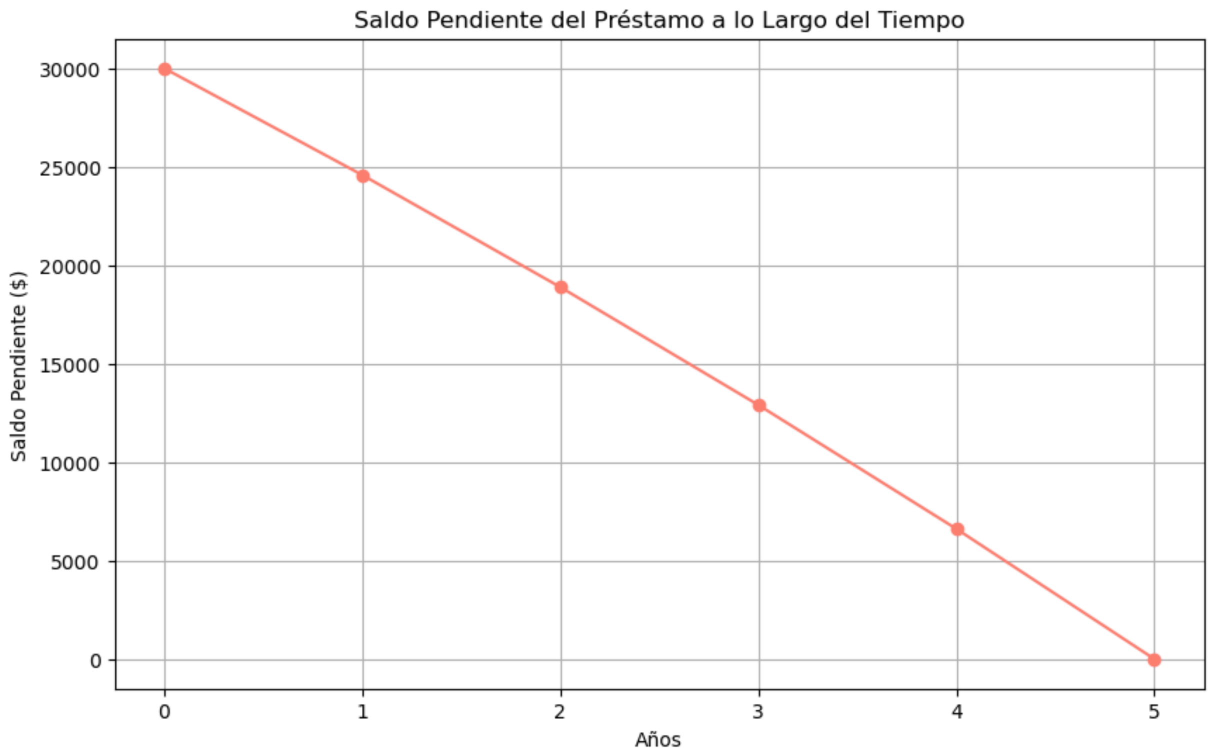
$$\text{Interés Total} = \text{Monto Total Pagado} - P = 33968.40 - 30000 \approx 3968.40$$

Esto significa que el interés total pagado será aproximadamente $3,968.40 a lo largo de los 5 años.

In [265…

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
P = 30000            # Monto del préstamo
tasa_anual = 0.05    # Tasa de interés anual
plazo_anios = 5      # Plazo en años

# Convertimos la tasa anual a mensual y el plazo a meses
i_mensual = tasa_anual / 12
n = plazo_anios * 12

# Cálculo de la cuota mensual
A = P * i_mensual * (1 + i_mensual)**n / ((1 + i_mensual)**n - 1)

# Cálculo del monto total pagado y el interés total pagado
monto_total_pagado = A * n
interes_total_pagado = monto_total_pagado - P

# Mostrar resultados
print(f"Cuota mensual: ${A:.2f}")
print(f"Monto total pagado al final del plazo: ${monto_total_pagado:.2f}")
print(f"Interés total pagado: ${interes_total_pagado:.2f}")

# Cálculo del saldo pendiente después de cada año
saldos = [P]
saldo_actual = P
for mes in range(1, n + 1):
    interes_mensual = saldo_actual * i_mensual
    amortizacion_mensual = A - interes_mensual
    saldo_actual -= amortizacion_mensual
    if mes % 12 == 0:  # Almacena el saldo al final de cada año
        saldos.append(saldo_actual)

# Gráfica del saldo pendiente
anios = np.arange(0, plazo_anios + 1)
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(anios, saldos, marker="o", color="salmon")
plt.title("Saldo Pendiente del Préstamo a lo Largo del Tiempo")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Saldo Pendiente ($)")
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Cuota mensual: $566.14
Monto total pagado al final del plazo: $33968.22
Interés total pagado: $3968.22
```



Ejercicio 84: Análisis del Valor Presente y Valor Futuro de una Inversión

Un inversionista está considerando una inversión de $20,000 en un proyecto que generará los siguientes flujos de efectivo durante 6 años:

- Año 1: $4,000
- Año 2: $5,000
- Año 3: $3,500
- Año 4: $4,500
- Año 5: $6,000
- Año 6: $7,000

La tasa de descuento es del 7% anual, y el inversionista desea calcular:

1. **El Valor Presente Neto (VPN)** del proyecto para evaluar su rentabilidad.
2. **El Valor Futuro (VF)** del proyecto al final del año 6, suponiendo que todos los flujos de efectivo se reinvierten anualmente a una tasa del 7%.
3. **El retorno total de la inversión** considerando el valor presente y el valor futuro.
4. **Grafique los flujos de efectivo acumulados** para visualizar el crecimiento de la inversión.

Fórmulas para el Cálculo Financiero

1. **Valor Presente Neto (VPN)**:

$$VPN = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t} - C_0$$

donde:

- C_t es el flujo de efectivo en el año t,
- i es la tasa de descuento (0.07),
- C_0 es la inversión inicial ($-20,000$).

2. **Valor Futuro (VF)**:

$$VF = \sum_{t=1}^{n} C_t \cdot (1+i)^{n-t}$$

donde:

- C_t es el flujo de efectivo en el año t,
- i es la tasa de reinversión (0.07),
- n es el año final.

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del Valor Presente Neto (VPN)

Usamos la fórmula del valor presente neto (VPN):

$$VPN = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t} - C_0$$

donde:

- $C_0 = -20000$ (inversión inicial),
- $i = 0.07$ (tasa de descuento),
- Flujos de efectivo: $C_1 = 4000$, $C_2 = 5000$, $C_3 = 3500$, $C_4 = 4500$, $C_5 = 6000$, $C_6 = 7000$.

Paso 2: Cálculo del Valor Futuro (VF)

Para el cálculo del valor futuro de los flujos de efectivo, usamos la fórmula:

$$VF = \sum_{t=1}^{n} C_t \cdot (1+i)^{n-t}$$

donde:

- $i = 0.07$ (tasa de reinversión anual),
- $n = 6$ (año final).

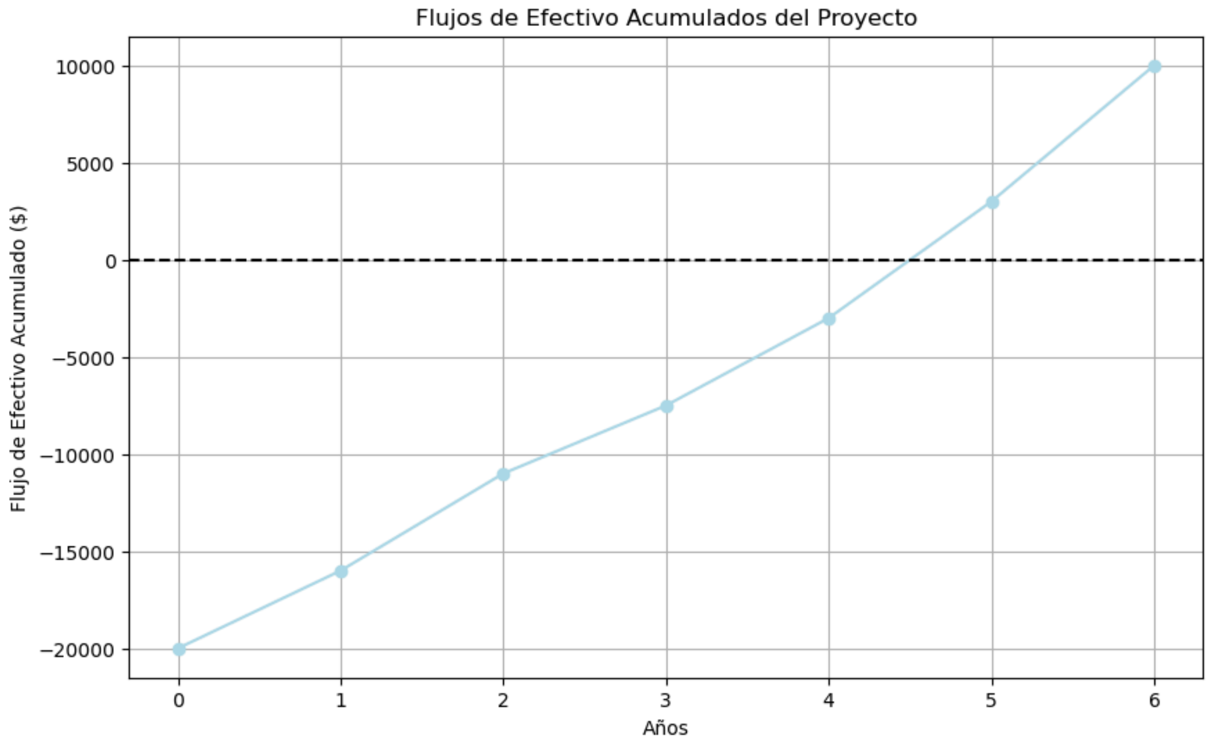
Paso 3: Retorno Total de la Inversión

El retorno total de la inversión se obtiene comparando el valor futuro de los flujos de efectivo con el valor presente neto.

In [268…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
inversion_inicial = -20000
flujos_efectivo = [4000, 5000, 3500, 4500, 6000, 7000]
tasa_descuento = 0.07
n = len(flujos_efectivo)  # Número de años

# Cálculo del VPN
def calcular_vpn(tasa, inversion_inicial, flujos):
    vpn = inversion_inicial + sum([flujo / (1 + tasa)**(t + 1) for t, flujo in enum
    return vpn

vpn = calcular_vpn(tasa_descuento, inversion_inicial, flujos_efectivo)

# Cálculo del Valor Futuro (VF)
def calcular_vf(tasa, flujos):
    vf = sum([flujo * (1 + tasa)**(n - t - 1) for t, flujo in enumerate(flujos)])
    return vf

vf = calcular_vf(tasa_descuento, flujos_efectivo)

# Mostrar resultados
print(f"Valor Presente Neto (VPN) del proyecto: ${vpn:.2f}")
print(f"Valor Futuro (VF) del proyecto al final del año 6: ${vf:.2f}")
print(f"Retorno total de la inversión considerando el VF: ${vf - abs(inversion_inic

# Cálculo de flujos de efectivo acumulados
flujos_acumulados = np.cumsum([inversion_inicial] + flujos_efectivo)

# Gráfica de los flujos de efectivo acumulados
anios = np.arange(0, n + 1)
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(anios, flujos_acumulados, marker="o", color="lightblue")
plt.axhline(0, color="black", linestyle="--")
plt.title("Flujos de Efectivo Acumulados del Proyecto")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Flujo de Efectivo Acumulado ($)")
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Valor Presente Neto (VPN) del proyecto: $3337.90
Valor Futuro (VF) del proyecto al final del año 6: $35023.89
Retorno total de la inversión considerando el VF: $15023.89
```



Ejercicio 85: Análisis de Riesgo de una Inversión Mediante la Desviación Estándar y la Varianza

Un inversionista desea evaluar el riesgo de una inversión en acciones. A continuación, se presentan los retornos anuales (en porcentaje) de la acción durante los últimos 6 años:

- Año 1: 8%
- Año 2: 12%
- Año 3: -3%
- Año 4: 5%
- Año 5: 10%
- Año 6: 7%

El objetivo es analizar la volatilidad de los retornos para determinar el nivel de riesgo de la inversión.

Tareas

1. **Calcule la media de los retornos** de la acción en el periodo de 6 años.
2. **Calcule la varianza y la desviación estándar** de los retornos para evaluar la volatilidad.
3. Interprete los resultados en términos de riesgo de la inversión.
4. **Grafique los retornos anuales** para visualizar la variabilidad a lo largo del tiempo.

Fórmulas para el Cálculo Financiero

1. **Media de los Retornos ($\bar{R}$)**:

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} R_t$$

2. **Varianza (σ^2)**:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (R_t - \bar{R})^2$$

3. **Desviación Estándar (σ)**:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

donde:

- R_t es el retorno en el año t,
- n es el número de años (6 en este caso).

Resolución Matemática

Paso 1: Calcular la Media de los Retornos

Dados los retornos anuales:

- $R_1 = 8\%$, $R_2 = 12\%$, $R_3 = -3\%$, $R_4 = 5\%$, $R_5 = 10\%$, $R_6 = 7\%$

Calculamos la media ($\bar{R}$):

$$\bar{R} = \frac{1}{6} \sum_{t=1}^{6} R_t = \frac{8 + 12 + (-3) + 5 + 10 + 7}{6} = \frac{39}{6} \approx 6.5\%$$

Paso 2: Calcular la Varianza

Usamos la fórmula de la varianza para evaluar la dispersión de los retornos alrededor de la media:

$$\sigma^2 = \frac{1}{6} \sum_{t=1}^{6} (R_t - \bar{R})^2$$

Calculamos cada término:

- $(R_1 - \bar{R})^2 = (8 - 6.5)^2 = 2.25$
- $(R_2 - \bar{R})^2 = (12 - 6.5)^2 = 30.25$
- $(R_3 - \bar{R})^2 = (-3 - 6.5)^2 = 90.25$

- $(R_4 - \bar{R})^2 = (5 - 6.5)^2 = 2.25$
- $(R_5 - \bar{R})^2 = (10 - 6.5)^2 = 12.25$
- $(R_6 - \bar{R})^2 = (7 - 6.5)^2 = 0.25$

Sustituyendo:

$$\sigma^2 = \frac{2.25 + 30.25 + 90.25 + 2.25 + 12.25 + 0.25}{6} = \frac{137.5}{6} \approx 22.92$$

Paso 3: Calcular la Desviación Estándar

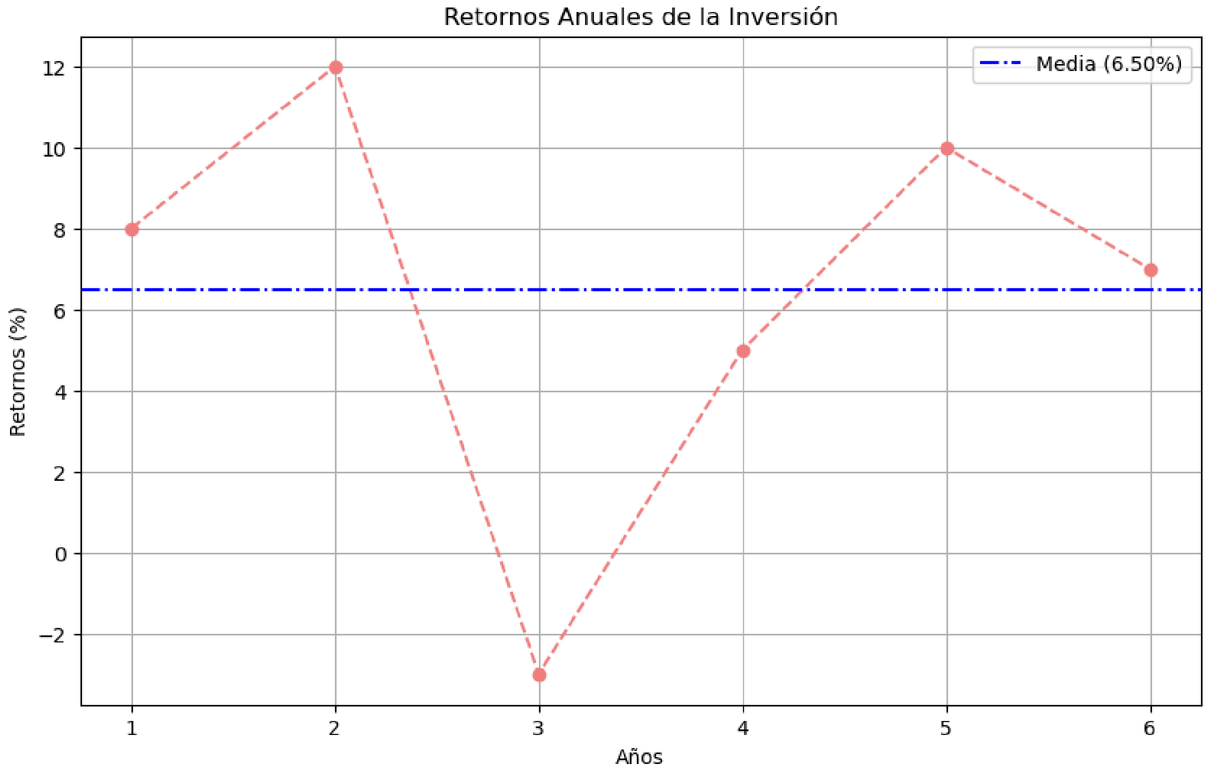
La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{22.92} \approx 4.79\%$$

In [271…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
retornos = [8, 12, -3, 5, 10, 7]  # Retornos en porcentaje

# Cálculo de la media
media_retornos = np.mean(retornos)

# Cálculo de la varianza y la desviación estándar
varianza = np.var(retornos)
desviacion_estandar = np.sqrt(varianza)

# Mostrar resultados
print(f"Media de los retornos: {media_retornos:.2f}%")
print(f"Varianza de los retornos: {varianza:.2f}")
print(f"Desviación estándar de los retornos: {desviacion_estandar:.2f}%")

# Interpretación
if desviacion_estandar > 5:
    print("La desviación estándar es relativamente alta, lo que indica un mayor rie
else:
    print("La desviación estándar es moderada, lo que sugiere un riesgo aceptable e

# Gráfica de los retornos anuales
anios = np.arange(1, len(retornos) + 1)
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(anios, retornos, marker="o", color="lightcoral", linestyle="--")
plt.axhline(y=media_retornos, color="blue", linestyle="-.", label=f"Media ({media_r
plt.title("Retornos Anuales de la Inversión")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Retornos (%)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

```
Media de los retornos: 6.50%
Varianza de los retornos: 22.92
Desviación estándar de los retornos: 4.79%
La desviación estándar es moderada, lo que sugiere un riesgo aceptable en la inversi
ón.
```



Ejercicio 86: Cálculo del Valor en Riesgo (VaR) de una Inversión

Un inversionista posee un portafolio de $100,000 que sigue una distribución normal con una rentabilidad media anual del 8% y una desviación estándar anual del 15%. El inversionista quiere calcular el valor en riesgo (VaR) para un periodo de un año con un nivel de confianza del 95%, es decir, la pérdida máxima esperada en el 5% de los peores escenarios.

Tareas

1. **Calcule el valor en riesgo (VaR)** para el portafolio de $100,000 con un nivel de confianza del 95%.
2. **Interprete el VaR** en términos de pérdida potencial para el inversionista.
3. **Calcule el VaR para diferentes niveles de confianza** (90%, 95%, y 99%) y compare los resultados.
4. **Grafique la distribución de probabilidad** de los retornos, destacando el VaR en los diferentes niveles de confianza.

Fórmula para el Cálculo del Valor en Riesgo (VaR)

El valor en riesgo (VaR) se puede calcular usando la fórmula:

$$VaR = \mu - Z \cdot \sigma$$

donde:

- μ es la media de la rentabilidad del portafolio (0.08),
- σ es la desviación estándar de la rentabilidad del portafolio (0.15),
- Z es el valor crítico de la distribución normal para el nivel de confianza deseado.

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del Valor en Riesgo (VaR) al 95%

Para calcular el VaR al 95% con una inversión de $100,000, tenemos:

- $\mu = 8\% = 0.08$
- $\sigma = 15\% = 0.15$
- Valor crítico Z para el nivel de confianza del 95%: $Z_{0.95} \approx 1.645$

Usamos la fórmula del VaR:

$$VaR = \mu - Z \cdot \sigma$$

Calculamos el VaR en términos de la rentabilidad esperada y luego convertimos el resultado en dólares:

$$VaR_{95\%} = 0.08 - (1.645 \cdot 0.15) = 0.08 - 0.24675 = -0.16675$$

Esto representa una pérdida del 16.675%. Para obtener el valor en dólares:

$$VaR_{95\%}(\text{en dólares}) = 100000 \cdot 0.16675 = 16675$$

Esto significa que, con un 95% de confianza, el inversionista podría perder hasta **$16,675** en un año.

Paso 2: Cálculo del VaR para Diferentes Niveles de Confianza

Para los otros niveles de confianza, usamos valores críticos diferentes (Z):

- 90%: $Z \approx 1.28$
- 99%: $Z \approx 2.33$

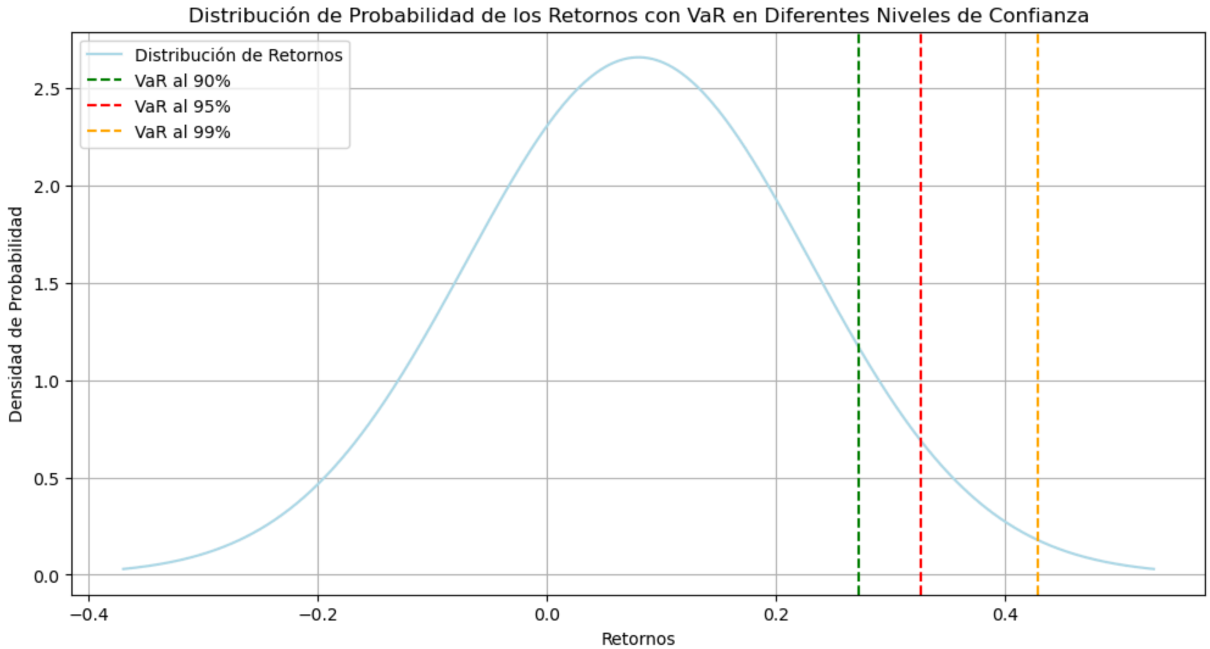
Usamos la misma fórmula para cada nivel de confianza.

In [274…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm
```

```python
# Datos
inversion = 100000            # Monto de la inversión en dólares
mu = 0.08                     # Media de la rentabilidad anual (8%)
sigma = 0.15                  # Desviación estándar anual (15%)
niveles_confianza = [0.90, 0.95, 0.99]

# Cálculo del VaR para diferentes niveles de confianza
vars = {}
for nivel in niveles_confianza:
    Z = norm.ppf(1 - nivel)  # Valor crítico para el nivel de confianza
    var_percentual = mu - Z * sigma
    var_dolares = inversion * abs(var_percentual)
    vars[nivel] = var_dolares
    print(f"VaR al {int(nivel * 100)}% de confianza: ${var_dolares:.2f}")

# Interpretación de los resultados
print("\nInterpretación:")
for nivel, valor in vars.items():
    print(f"Con un nivel de confianza del {int(nivel * 100)}%, se espera una pérdid

# Gráfica de la distribución de probabilidad de los retornos
x = np.linspace(mu - 3*sigma, mu + 3*sigma, 1000)
y = norm.pdf(x, mu, sigma)

plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(x, y, label="Distribución de Retornos", color="lightblue")
for nivel in niveles_confianza:
    Z = norm.ppf(1 - nivel)
    var_valor = mu - Z * sigma
    plt.axvline(x=var_valor, linestyle="--", label=f"VaR al {int(nivel * 100)}%", c
plt.title("Distribución de Probabilidad de los Retornos con VaR en Diferentes Nivel
plt.xlabel("Retornos")
plt.ylabel("Densidad de Probabilidad")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
VaR al 90% de confianza: $27223.27
VaR al 95% de confianza: $32672.80
VaR al 99% de confianza: $42895.22

Interpretación:
Con un nivel de confianza del 90%, se espera una pérdida máxima de $27223.27 en el
5% de los peores escenarios.
Con un nivel de confianza del 95%, se espera una pérdida máxima de $32672.80 en el
5% de los peores escenarios.
Con un nivel de confianza del 99%, se espera una pérdida máxima de $42895.22 en el
5% de los peores escenarios.
```



Ejercicio 87: Análisis de Riesgo y Diversificación de una Cartera de Dos Activos

Un inversionista está considerando una cartera compuesta por dos activos, A y B, con las siguientes características:

- Activo A: rentabilidad esperada de 12% y desviación estándar de 20%
- Activo B: rentabilidad esperada de 8% y desviación estándar de 15%
- Correlación entre los activos A y B: 0.3
- El inversionista desea asignar el 60% de su inversión en el Activo A y el 40% en el Activo B.

Tareas

1. **Calcule la rentabilidad esperada de la cartera** en función de los pesos de los activos.
2. **Calcule la desviación estándar de la cartera** considerando la correlación entre los activos.
3. Interprete el riesgo total de la cartera y compare con los riesgos individuales de los activos.
4. **Grafique el riesgo de la cartera** para diferentes valores de correlación, variando desde -1 hasta 1.

Fórmulas para el Cálculo Financiero

1. **Rentabilidad Esperada de la Cartera (R_P)**:

$$R_P = w_A \cdot R_A + w_B \cdot R_B$$

donde:

- w_A y w_B son los pesos de los activos A y B en la cartera,
- R_A y R_B son las rentabilidades esperadas de los activos A y B.

2. **Desviación Estándar de la Cartera (σ_P)**:

$$\sigma_P = \sqrt{(w_A \cdot \sigma_A)^2 + (w_B \cdot \sigma_B)^2 + 2 \cdot w_A \cdot w_B \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{A,B}}$$

donde:

- σ_A y σ_B son las desviaciones estándar de los activos A y B,
- $\rho_{A,B}$ es el coeficiente de correlación entre A y B.

Resolución Matemática

Paso 1: Calcular la Rentabilidad Esperada de la Cartera

Dado:

- Rentabilidad esperada del Activo A, $R_A = 0.12$
- Rentabilidad esperada del Activo B, $R_B = 0.08$
- Peso del Activo A, $w_A = 0.6$
- Peso del Activo B, $w_B = 0.4$

Usamos la fórmula de rentabilidad esperada de la cartera:

$$R_P = w_A \cdot R_A + w_B \cdot R_B$$

Sustituyendo los valores:

$$R_P = (0.6 \cdot 0.12) + (0.4 \cdot 0.08) = 0.072 + 0.032 = 0.104$$

La rentabilidad esperada de la cartera es **10.4%**.

Paso 2: Calcular la Desviación Estándar de la Cartera

Dado:

- Desviación estándar del Activo A, $\sigma_A = 0.20$
- Desviación estándar del Activo B, $\sigma_B = 0.15$
- Correlación entre A y B, $\rho_{A,B} = 0.3$

Usamos la fórmula de desviación estándar de la cartera:

$$\sigma_P = \sqrt{(w_A \cdot \sigma_A)^2 + (w_B \cdot \sigma_B)^2 + 2 \cdot w_A \cdot w_B \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{A,B}}$$

Sustituyendo los valores:

$$\sigma_P = \sqrt{(0.6 \cdot 0.20)^2 + (0.4 \cdot 0.15)^2 + 2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.20 \cdot 0.15 \cdot 0.3}$$

Calculamos cada componente:

- $(w_A \cdot \sigma_A)^2 = (0.6 \cdot 0.20)^2 = 0.0144$
- $(w_B \cdot \sigma_B)^2 = (0.4 \cdot 0.15)^2 = 0.0036$
- $2 \cdot w_A \cdot w_B \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{A,B} = 2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.20 \cdot 0.15 \cdot 0.3 = 0.0108$

Sustituyendo:

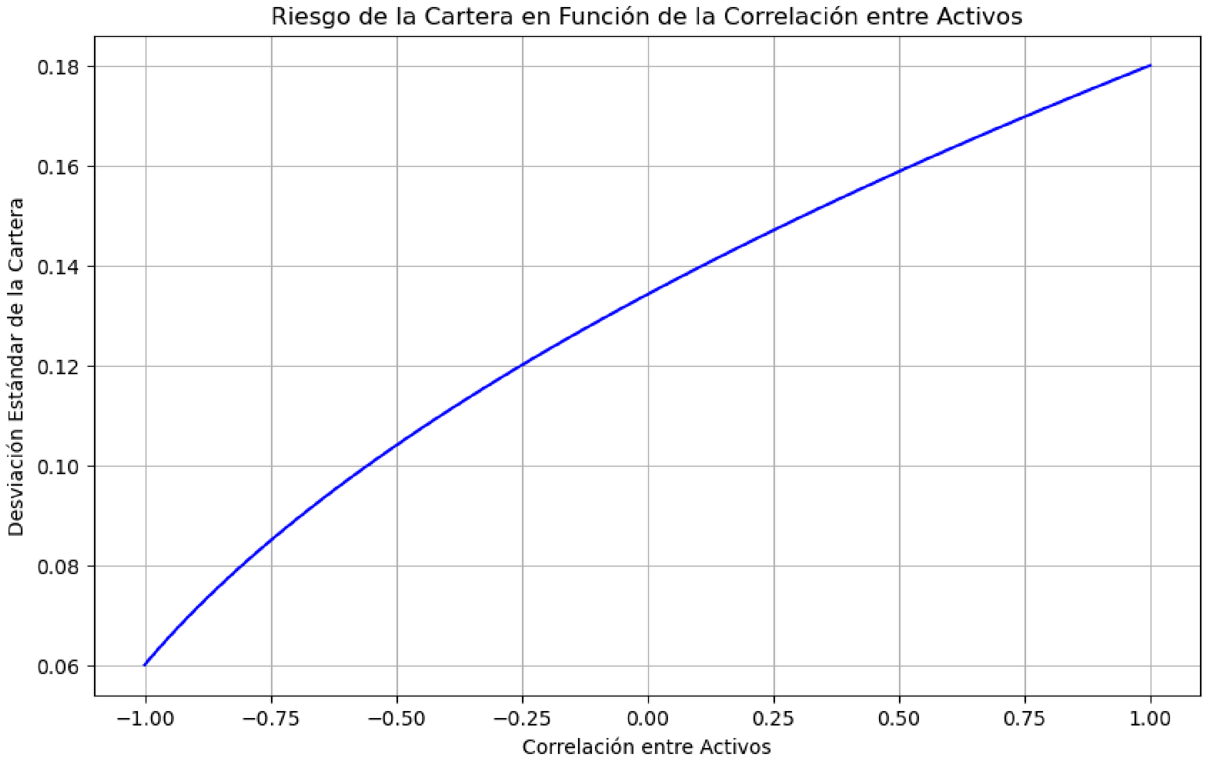
$$\sigma_P = \sqrt{0.0144 + 0.0036 + 0.0108} = \sqrt{0.0288} \approx 0.1697$$

La desviación estándar de la cartera es aproximadamente **16.97%**.

In [277…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
rentabilidad_A = 0.12
rentabilidad_B = 0.08
desviacion_A = 0.20
desviacion_B = 0.15
peso_A = 0.6
peso_B = 0.4
correlacion = 0.3

# Cálculo de la rentabilidad esperada de la cartera
rentabilidad_cartera = peso_A * rentabilidad_A + peso_B * rentabilidad_B

# Cálculo de la desviación estándar de la cartera
def calcular_desviacion_cartera(w_A, w_B, sigma_A, sigma_B, rho):
    return np.sqrt((w_A * sigma_A)**2 + (w_B * sigma_B)**2 + 2 * w_A * w_B * sigma_

desviacion_cartera = calcular_desviacion_cartera(peso_A, peso_B, desviacion_A, desv

# Mostrar resultados
print(f"Rentabilidad esperada de la cartera: {rentabilidad_cartera * 100:.2f}%")
print(f"Desviación estándar de la cartera: {desviacion_cartera * 100:.2f}%")

# Gráfica del riesgo de la cartera en función de diferentes valores de correlación
correlaciones = np.linspace(-1, 1, 100)
desviaciones = [calcular_desviacion_cartera(peso_A, peso_B, desviacion_A, desviacio

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(correlaciones, desviaciones, color="blue")
plt.title("Riesgo de la Cartera en Función de la Correlación entre Activos")
plt.xlabel("Correlación entre Activos")
plt.ylabel("Desviación Estándar de la Cartera")
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Rentabilidad esperada de la cartera: 10.40%
Desviación estándar de la cartera: 14.94%
```



Ejercicio 88: Cálculo del Rendimiento Esperado de un Activo Utilizando el Modelo CAPM

Un inversionista quiere evaluar si una acción está correctamente valorada en función de su riesgo. La acción tiene una beta (β) de 1.2, lo que indica que es más volátil que el mercado. Los datos relevantes para este cálculo son:

- Tasa libre de riesgo: 3%
- Rendimiento esperado del mercado: 10%
- Beta de la acción: 1.2

Utilizando el Modelo de Valoración de Activos Financieros (CAPM), el inversionista desea calcular el rendimiento esperado de la acción.

Tareas

1. **Calcule el rendimiento esperado de la acción** utilizando el modelo CAPM.
2. **Compare el rendimiento esperado de la acción** con el rendimiento esperado del mercado y discuta si la acción ofrece una compensación adecuada por su riesgo.
3. **Calcule el rendimiento esperado de la acción** para diferentes valores de beta (0.5, 1.0, y 1.5) y compare los resultados.

4. **Grafique la relación entre el rendimiento esperado y la beta** para diferentes valores de beta.

Fórmula para el Cálculo Financiero

El modelo CAPM se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$R_i = R_f + \beta_i(R_m - R_f)$$

donde:

- R_i es el rendimiento esperado de la acción,
- R_f es la tasa libre de riesgo,
- β_i es la beta de la acción,
- R_m es el rendimiento esperado del mercado.

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del Rendimiento Esperado de la Acción

Dado:

- Tasa libre de riesgo, $R_f = 0.03$
- Rendimiento esperado del mercado, $R_m = 0.10$
- Beta de la acción, $\beta_i = 1.2$

Aplicamos la fórmula del modelo CAPM:

$$R_i = R_f + \beta_i(R_m - R_f)$$

Sustituyendo los valores:

$$R_i = 0.03 + 1.2 \cdot (0.10 - 0.03)$$

$$R_i = 0.03 + 1.2 \cdot 0.07$$

$$R_i = 0.03 + 0.084 = 0.114$$

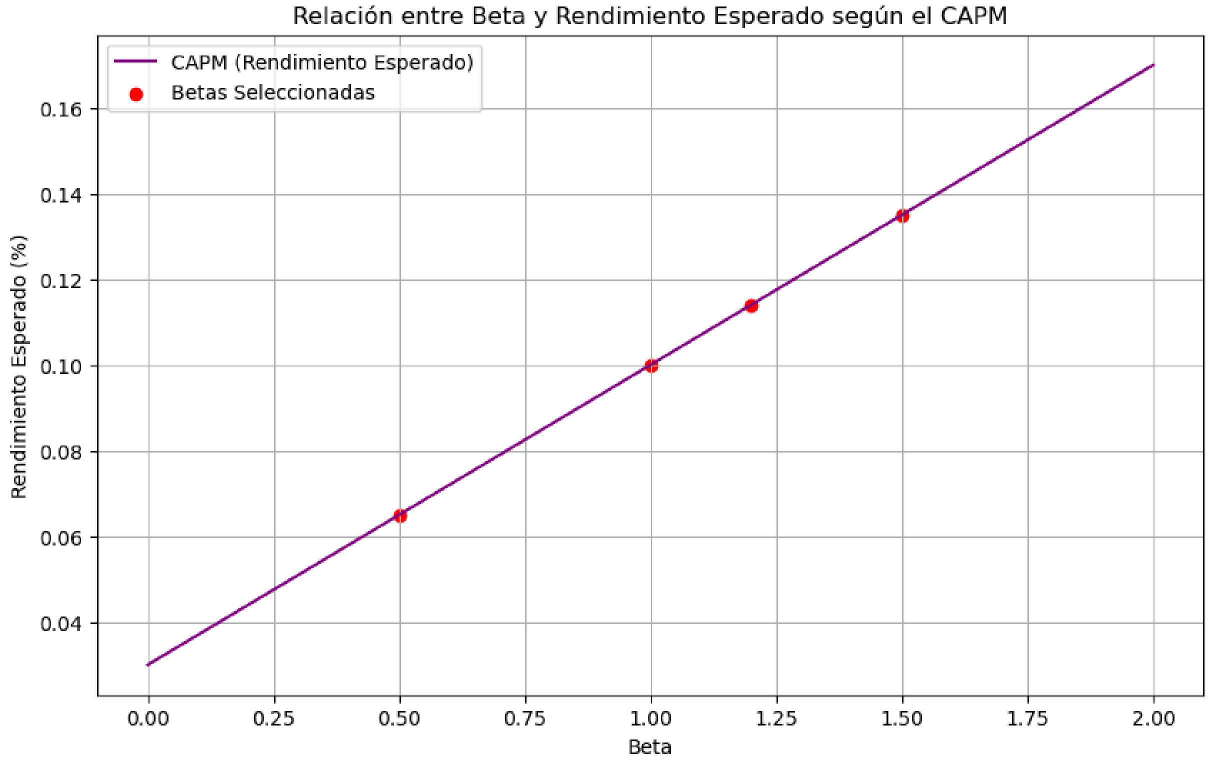
Por lo tanto, el rendimiento esperado de la acción es **11.4%**.

In [280…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
tasa_libre_riesgo = 0.03       # Tasa libre de riesgo (3%)
rendimiento_mercado = 0.10     # Rendimiento esperado del mercado (10%)
beta_acion = 1.2               # Beta de la acción

# Cálculo del rendimiento esperado utilizando CAPM
def calcular_rendimiento_esperado(rf, rm, beta):
```

```
    return rf + beta * (rm - rf)

rendimiento_esperado = calcular_rendimiento_esperado(tasa_libre_riesgo, rendimiento
print(f"Rendimiento esperado de la acción (CAPM) con beta {beta_acion}: {rendimient

# Cálculo del rendimiento esperado para diferentes valores de beta
betas = [0.5, 1.0, 1.2, 1.5]
rendimientos = [calcular_rendimiento_esperado(tasa_libre_riesgo, rendimiento_mercad

# Mostrar resultados para diferentes betas
print("\nRendimiento esperado para diferentes valores de beta:")
for beta, rendimiento in zip(betas, rendimientos):
    print(f"Beta = {beta}: Rendimiento esperado = {rendimiento * 100:.2f}%")

# Gráfica de la relación entre beta y el rendimiento esperado
beta_range = np.linspace(0, 2, 100)
rendimiento_range = calcular_rendimiento_esperado(tasa_libre_riesgo, rendimiento_me

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(beta_range, rendimiento_range, color="purple", label="CAPM (Rendimiento Es
plt.scatter(betas, rendimientos, color="red", marker="o", label="Betas Seleccionada
plt.title("Relación entre Beta y Rendimiento Esperado según el CAPM")
plt.xlabel("Beta")
plt.ylabel("Rendimiento Esperado (%)")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Rendimiento esperado de la acción (CAPM) con beta 1.2: 11.40%

Rendimiento esperado para diferentes valores de beta:
Beta = 0.5: Rendimiento esperado = 6.50%
Beta = 1.0: Rendimiento esperado = 10.00%
Beta = 1.2: Rendimiento esperado = 11.40%
Beta = 1.5: Rendimiento esperado = 13.50%
```



Ejercicio 89: Valoración de una Acción Utilizando el Modelo de Dividendos Descontados

Un inversionista desea calcular el valor justo de una acción que actualmente paga un dividendo anual de $2.00, el cual se espera que crezca a una tasa constante del 4% cada año. La tasa de descuento aplicable (tasa requerida de retorno) es del 10%.

Tareas

1. **Calcule el valor actual de la acción** utilizando el modelo de dividendos descontados (DCF).
2. **Determine el precio justo de la acción** si la tasa de crecimiento de los dividendos cambia a un 5%.
3. **Calcule el valor de la acción** para diferentes tasas de descuento (8%, 10%, y 12%) y compare los resultados.
4. **Grafique la relación entre la tasa de descuento y el precio de la acción** para comprender cómo cambia el valor en función de esta tasa.

Fórmula para el Cálculo Financiero

El valor actual de la acción, según el modelo de dividendos descontados (DCF) de crecimiento constante, se calcula de la siguiente manera:

$$P_0 = \frac{D_0 \cdot (1+g)}{r-g}$$

donde:

- P_0 es el valor actual de la acción,
- D_0 es el dividendo actual,
- g es la tasa de crecimiento de los dividendos,
- r es la tasa de descuento o tasa requerida de retorno.

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del Valor Actual de la Acción

Dado:

- Dividendo actual, $D_0 = 2.00$
- Tasa de crecimiento de los dividendos, $g = 0.04$
- Tasa de descuento, $r = 0.10$

Aplicamos la fórmula del modelo DCF de crecimiento constante:

$$P_0 = \frac{D_0 \cdot (1+g)}{r-g}$$

Sustituyendo los valores:

$$P_0 = \frac{2.00 \cdot (1+0.04)}{0.10-0.04}$$

$$P_0 = \frac{2.00 \cdot 1.04}{0.06}$$

$$P_0 = \frac{2.08}{0.06} \approx 34.67$$

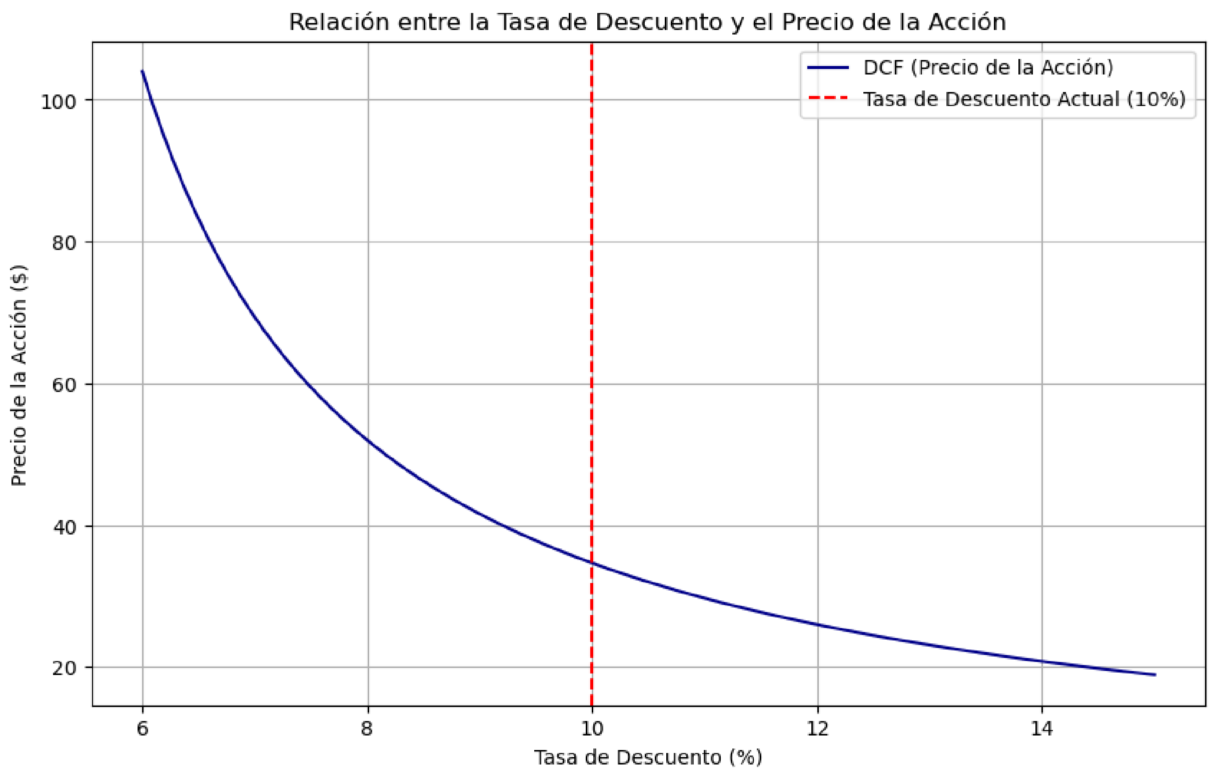
Por lo tanto, el valor actual de la acción es aproximadamente **$34.67**.

In [283…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
dividendo_actual = 2.00         # Dividendo actual ($)
tasa_crecimiento = 0.04         # Tasa de crecimiento de los dividendos (4%)
tasa_descuento = 0.10           # Tasa de descuento (10%)

# Cálculo del valor actual de la acción utilizando el modelo DCF
def calcular_precio_accion(dividendo, crecimiento, descuento):
    return (dividendo * (1 + crecimiento)) / (descuento - crecimiento)
```

```
precio_accion = calcular_precio_accion(dividendo_actual, tasa_crecimiento, tasa_des
print(f"Precio de la acción con una tasa de descuento del {tasa_descuento*100:.0f}%

# Cálculo del precio para diferentes tasas de crecimiento
crecimientos = [0.04, 0.05]  # Tasa de crecimiento del 4% y 5%
precios_crecimiento = [calcular_precio_accion(dividendo_actual, g, tasa_descuento)

# Mostrar resultados para diferentes tasas de crecimiento
print("\nPrecio de la acción para diferentes tasas de crecimiento:")
for g, precio in zip(crecimientos, precios_crecimiento):
    print(f"Tasa de crecimiento = {g*100:.0f}%: Precio de la acción = ${precio:.2f}

# Gráfica de la relación entre la tasa de descuento y el precio de la acción
tasas_descuento = np.linspace(0.06, 0.15, 100)  # Rango de tasas de descuento
precios_descuento = [calcular_precio_accion(dividendo_actual, tasa_crecimiento, r)

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(tasas_descuento * 100, precios_descuento, color="darkblue", label="DCF (Pr
plt.axvline(x=tasa_descuento * 100, color="red", linestyle="--", label=f"Tasa de De
plt.title("Relación entre la Tasa de Descuento y el Precio de la Acción")
plt.xlabel("Tasa de Descuento (%)")
plt.ylabel("Precio de la Acción ($)")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

```
Precio de la acción con una tasa de descuento del 10%: $34.67

Precio de la acción para diferentes tasas de crecimiento:
Tasa de crecimiento = 4%: Precio de la acción = $34.67
Tasa de crecimiento = 5%: Precio de la acción = $42.00
```



Ejercicio 90: Cálculo del Valor Futuro de una Inversión Periódica

Un inversionista está considerando hacer depósitos mensuales de $500 en una cuenta de ahorro que ofrece una tasa de interés anual del 6%, compuesta mensualmente. El inversionista planea hacer estos depósitos durante 10 años.

Tareas

1. **Calcule el valor futuro de la inversión** después de 10 años, con depósitos mensuales de $500.
2. **Determine cuánto fue el capital total invertido** y cuánto es el interés ganado.
3. **Calcule el valor futuro** si el inversionista aumenta sus depósitos mensuales a $600.
4. **Grafique la evolución del saldo de la cuenta** a lo largo de los 10 años.

Fórmulas para el Cálculo Financiero

El valor futuro de una serie de pagos periódicos con interés compuesto se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$FV = P \cdot \frac{(1 + \frac{r}{n})^{n \cdot t} - 1}{\frac{r}{n}}$$

donde:

- FV es el valor futuro de la inversión,
- P es el depósito periódico (en este caso, $500),
- r es la tasa de interés anual (0.06),
- n es el número de periodos de capitalización por año (12 para mensual),
- t es el número de años.

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del Valor Futuro de la Inversión

Dado:

- Depósito mensual, $P = 500$

- Tasa de interés anual, $r = 0.06$
- Periodos de capitalización por año, $n = 12$
- Tiempo, $t = 10$ años

Aplicamos la fórmula del valor futuro:

$$FV = P \cdot \frac{(1 + \frac{r}{n})^{n \cdot t} - 1}{\frac{r}{n}}$$

Sustituyendo los valores:

$$FV = 500 \cdot \frac{(1 + \frac{0.06}{12})^{12 \cdot 10} - 1}{\frac{0.06}{12}}$$

Calculamos cada componente:

1. Tasa de interés por periodo: $\frac{0.06}{12} = 0.005$
2. Número total de periodos: $12 \cdot 10 = 120$
3. Cálculo del valor futuro:

$$FV = 500 \cdot \frac{(1 + 0.005)^{120} - 1}{0.005}$$

$$FV \approx 500 \cdot \frac{1.8194 - 1}{0.005}$$

$$FV \approx 500 \cdot 163.88 = 81940$$

Por lo tanto, el valor futuro de la inversión es aproximadamente **$81,940**.

Paso 2: Determinar el Capital Total Invertido y el Interés Ganado

1. Capital total invertido:

$$\text{Capital total} = P \cdot n \cdot t = 500 \cdot 12 \cdot 10 = 60000$$

2. Interés ganado:

$$\text{Interés ganado} = FV - \text{Capital total} = 81940 - 60000 = 21940$$

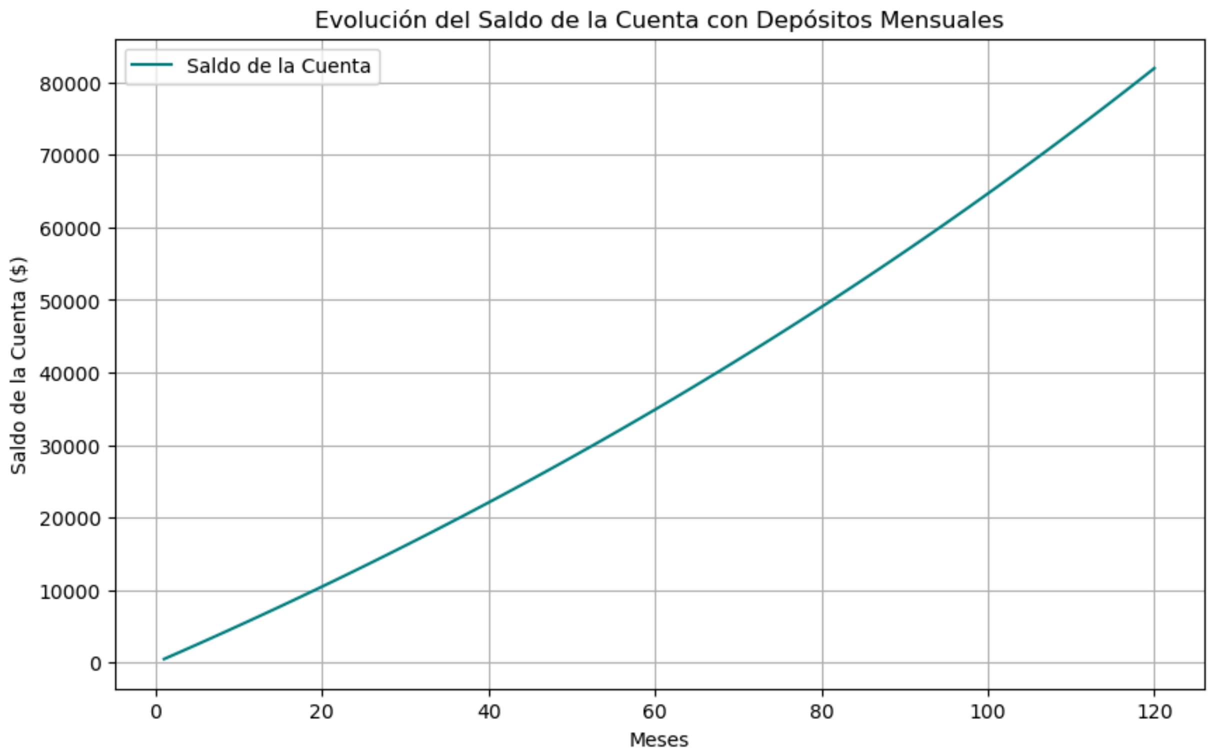
Por lo tanto, el interés ganado es **$21,940**.

In [286…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
deposito_mensual = 500         # Depósito mensual en dólares
```

```
tasa_interes_anual = 0.06      # Tasa de interés anual (6%)
n_periodos_anuales = 12        # Periodos de capitalización por año (mensual)
tiempo_anios = 10              # Duración de la inversión en años

# Cálculo del valor futuro utilizando la fórmula de interés compuesto
def calcular_valor_futuro(deposito, tasa, n, t):
    tasa_periodo = tasa / n
    n_total_periodos = n * t
    return deposito * ((1 + tasa_periodo)**n_total_periodos - 1) / tasa_periodo

valor_futuro = calcular_valor_futuro(deposito_mensual, tasa_interes_anual, n_period
print(f"Valor futuro de la inversión: ${valor_futuro:.2f}")

# Cálculo del capital total invertido y el interés ganado
capital_total_invertido = deposito_mensual * n_periodos_anuales * tiempo_anios
interes_ganado = valor_futuro - capital_total_invertido
print(f"Capital total invertido: ${capital_total_invertido:.2f}")
print(f"Interés ganado: ${interes_ganado:.2f}")

# Gráfica de la evolución del saldo de la cuenta
saldos = [calcular_valor_futuro(deposito_mensual, tasa_interes_anual, n_periodos_an
meses = np.arange(1, tiempo_anios * 12 + 1)

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(meses, saldos, color="teal", label="Saldo de la Cuenta")
plt.title("Evolución del Saldo de la Cuenta con Depósitos Mensuales")
plt.xlabel("Meses")
plt.ylabel("Saldo de la Cuenta ($)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

```
Valor futuro de la inversión: $81939.67
Capital total invertido: $60000.00
Interés ganado: $21939.67
```



Capítulo 10: Series y Progresiones: Crecimiento y Acumulación en el Tiempo

---

X.1 Fundamentos de las Series y Progresiones

En matemáticas, una **serie** es la suma de los términos de una secuencia, y puede ser finita o infinita. Las **progresiones** son un tipo particular de secuencia en las cuales los términos siguen una regla específica de formación. Existen varios tipos de progresiones, entre las más importantes se encuentran:

1. **Progresión Aritmética (PA)**: Es una secuencia en la cual la diferencia entre términos consecutivos es constante.
2. **Progresión Geométrica (PG)**: Es una secuencia en la cual cada término se obtiene multiplicando el término anterior por una constante (razón).

Fórmulas Básicas

1. **Progresión Aritmética (PA)**:

   - **Término General**: Si a es el primer término y d es la diferencia común, el término general a_n se calcula como:

$$a_n = a + (n-1) \cdot d$$

- **Suma de los Primeros n Términos**: La suma S_n de los primeros n términos se calcula como:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a + (n-1) \cdot d)$$

2. **Progresión Geométrica (PG)**:

- **Término General**: Si a es el primer término y r es la razón, el término general a_n se calcula como:

$$a_n = a \cdot r^{n-1}$$

- **Suma de los Primeros n Términos (para $r \neq 1$)**: La suma S_n de los primeros n términos se calcula como:

$$S_n = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Importancia en la Vida Cotidiana

Las series y progresiones tienen aplicaciones prácticas en diversas áreas de la vida cotidiana y los negocios, especialmente en problemas de crecimiento acumulativo, cálculos de interés, y planificación financiera.

X.2 Aplicaciones de las Series y Progresiones en Finanzas y Administración

En el mundo financiero, las series y progresiones son esenciales para modelar situaciones donde los valores se acumulan o crecen a lo largo del tiempo. Algunas de las aplicaciones más comunes incluyen:

1. **Interés Compuesto**: El cálculo del interés compuesto implica una progresión geométrica, donde cada término representa el saldo acumulado en cada periodo, basado en una tasa de interés fija. Esta es una herramienta clave para planificar inversiones y estimar el crecimiento de fondos en el tiempo.

2. **Amortización de Préstamos**: En la amortización de préstamos, cada pago mensual suele calcularse como una progresión geométrica. Esto permite que se cubran tanto el capital inicial como los intereses a lo largo de un número específico de pagos.

3. **Crecimiento Poblacional y Económico**: Los modelos de crecimiento en economía y demografía también se basan en progresiones geométricas, donde el crecimiento porcentual anual se aplica acumulativamente al valor anterior.

4. **Series Financieras para Inversiones**: El valor de una serie de inversiones periódicas (como depósitos mensuales en una cuenta de ahorro) puede calcularse usando una

progresión geométrica, considerando la acumulación de interés sobre cada depósito.

Ejemplos Aplicados

1. **Cálculo del Valor Futuro de una Serie de Depósitos**:

   - Si un inversionista realiza un depósito mensual en una cuenta que paga interés compuesto, se puede usar la progresión geométrica para calcular el valor futuro total de estos depósitos en un periodo dado.

2. **Amortización de un Préstamo Hipotecario**:

   - En la amortización de un préstamo, el pago mensual se distribuye entre capital e intereses, utilizando una progresión geométrica inversa para calcular el saldo restante a lo largo del tiempo.

3. **Crecimiento de una Empresa**:

   - Las proyecciones de crecimiento de ingresos o ganancias de una empresa también pueden modelarse mediante una progresión geométrica, especialmente si se espera un crecimiento constante en el tiempo.

Estas aplicaciones permiten modelar y analizar problemas financieros complejos de forma simplificada, aprovechando las propiedades matemáticas de las series y progresiones.

Con estos fundamentos y aplicaciones, en la siguiente sección (X.3) se presentarán ejercicios prácticos basados en series y progresiones para reforzar la comprensión y aplicación de estos conceptos en situaciones financieras y administrativas.

X.3 Ejercicios de Aplicaciones y Soluciones (MathPY)

Ejercicio 91: Cálculo del Valor Futuro de una Serie de Depósitos Periódicos en una Cuenta de Ahorro

Un inversionista desea depositar $200 al final de cada mes en una cuenta de ahorro que ofrece una tasa de interés anual del 5%, compuesta mensualmente. El inversionista planea hacer estos depósitos durante un periodo de 5 años.

Tareas

1. **Calcule el valor futuro de la serie de depósitos** después de 5 años.

2. **Determine cuánto fue el capital total invertido** por el inversionista y cuánto es el interés ganado.
3. **Calcule el valor futuro** si el inversionista decide aumentar sus depósitos mensuales a \$300.
4. **Grafique la evolución del saldo de la cuenta** a lo largo de los 5 años.

Fórmula para el Cálculo Financiero

Para calcular el valor futuro (FV) de una serie de pagos periódicos con interés compuesto, se utiliza la siguiente fórmula de progresión geométrica:

$$FV = P \cdot \frac{(1 + \frac{r}{n})^{n \cdot t} - 1}{\frac{r}{n}}$$

donde:

- FV es el valor futuro de la inversión,
- P es el depósito periódico (en este caso, \$200),
- r es la tasa de interés anual (0.05),
- n es el número de periodos de capitalización por año (12 para mensual),
- t es el número de años.

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del Valor Futuro de la Serie de Depósitos

Dado:

- Depósito mensual, $P = 200$
- Tasa de interés anual, $r = 0.05$
- Periodos de capitalización por año, $n = 12$
- Tiempo, $t = 5$ años

Aplicamos la fórmula para el valor futuro de una serie de depósitos periódicos:

$$FV = P \cdot \frac{(1 + \frac{r}{n})^{n \cdot t} - 1}{\frac{r}{n}}$$

Sustituyendo los valores:

$$FV = 200 \cdot \frac{(1 + \frac{0.05}{12})^{12 \cdot 5} - 1}{\frac{0.05}{12}}$$

Calculamos cada componente:

1. Tasa de interés por periodo: $\frac{0.05}{12} = 0.004167$

2. Número total de periodos: $12 \cdot 5 = 60$

3. Cálculo del valor futuro:

$$FV = 200 \cdot \frac{(1 + 0.004167)^{60} - 1}{0.004167}$$

$$FV \approx 200 \cdot \frac{1.28368 - 1}{0.004167}$$

$$FV \approx 200 \cdot 68.018 = 13603.6$$

Por lo tanto, el valor futuro de la serie de depósitos es aproximadamente **$13,603.60**.

Paso 2: Determinar el Capital Total Invertido y el Interés Ganado

1. Capital total invertido:

$$\text{Capital total} = P \cdot n \cdot t = 200 \cdot 12 \cdot 5 = 12000$$

2. Interés ganado:

$$\text{Interés ganado} = FV - \text{Capital total} = 13603.6 - 12000 = 1603.6$$

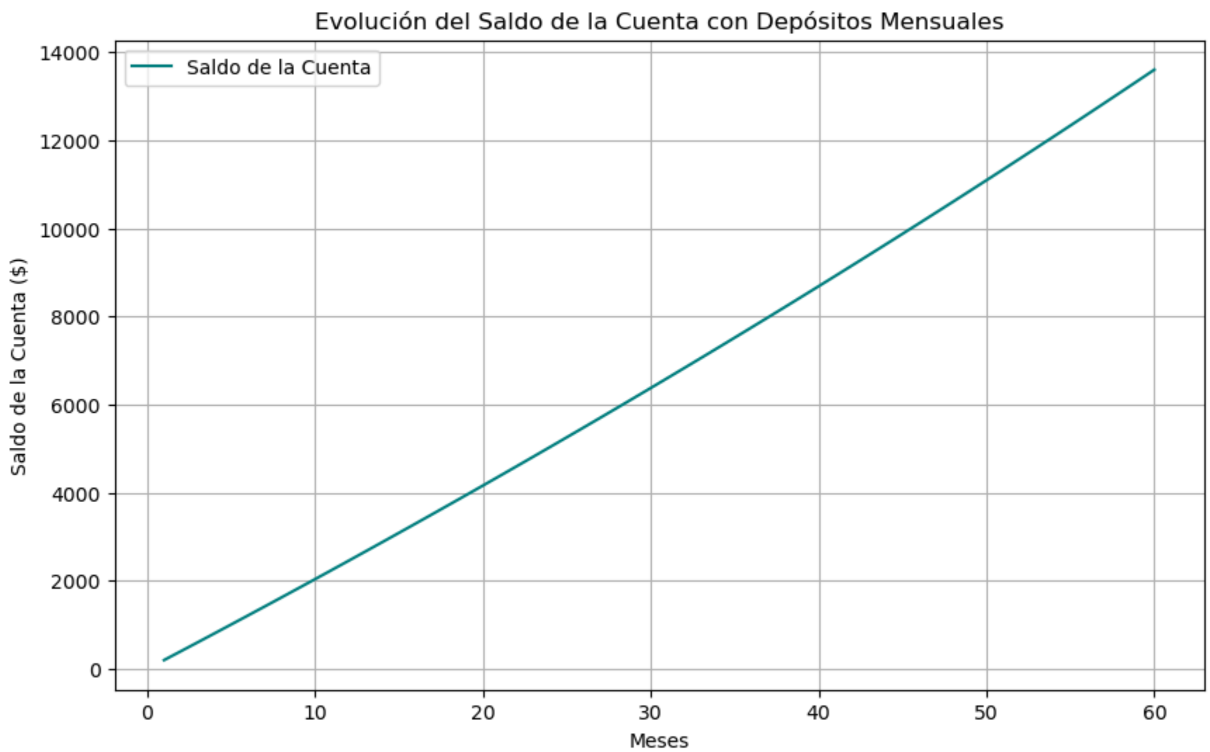
Por lo tanto, el interés ganado es **$1,603.60**.

In [291…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
deposito_mensual = 200          # Depósito mensual en dólares
tasa_interes_anual = 0.05       # Tasa de interés anual (5%)
n_periodos_anuales = 12         # Periodos de capitalización por año (mensual)
tiempo_anios = 5                # Duración de la inversión en años

# Cálculo del valor futuro utilizando la fórmula de interés compuesto
def calcular_valor_futuro(deposito, tasa, n, t):
    tasa_periodo = tasa / n
    n_total_periodos = n * t
    return deposito * ((1 + tasa_periodo)**n_total_periodos - 1) / tasa_periodo

valor_futuro = calcular_valor_futuro(deposito_mensual, tasa_interes_anual, n_period
print(f"Valor futuro de la inversión: ${valor_futuro:.2f}")

# Cálculo del capital total invertido y el interés ganado
capital_total_invertido = deposito_mensual * n_periodos_anuales * tiempo_anios
interes_ganado = valor_futuro - capital_total_invertido
```

```
print(f"Capital total invertido: ${capital_total_invertido:.2f}")
print(f"Interés ganado: ${interes_ganado:.2f}")

# Gráfica de la evolución del saldo de la cuenta
saldos = [calcular_valor_futuro(deposito_mensual, tasa_interes_anual, n_periodos_an
meses = np.arange(1, tiempo_anios * 12 + 1)

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(meses, saldos, color="teal", label="Saldo de la Cuenta")
plt.title("Evolución del Saldo de la Cuenta con Depósitos Mensuales")
plt.xlabel("Meses")
plt.ylabel("Saldo de la Cuenta ($)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

```
Valor futuro de la inversión: $13601.22
Capital total invertido: $12000.00
Interés ganado: $1601.22
```



Ejercicio 92: Amortización de un Préstamo con Pagos de Capital Constantes

Un individuo solicita un préstamo de $12,000 a una tasa de interés anual del 6% para ser pagado en 5 años, con pagos anuales. En este caso, el préstamo se amortiza con pagos de capital constantes, por lo que el monto principal de cada pago es constante y solo el interés varía.

Tareas

1. **Calcule el pago de capital constante** que debe realizar cada año.
2. **Calcule el pago total de cada año**, considerando el interés correspondiente.
3. **Determine el monto total de intereses pagados** al final de los 5 años.
4. **Grafique la evolución del saldo restante del préstamo** después de cada pago anual.

Fórmulas para el Cálculo Financiero

1. **Pago de Capital Constante**: Si L es el monto total del préstamo y N es el número de pagos, el pago de capital constante C se calcula como:

$$C = \frac{L}{N}$$

2. **Pago Total del Año** k: El pago total P_k en el año k incluye el capital constante C y el interés sobre el saldo restante del préstamo. El saldo restante al inicio del año k es $L - (k-1) \cdot C$, y el interés se calcula como:

$$\text{Interés}_k = \text{Saldo restante al inicio del año} \cdot \text{Tasa de interés}$$

Entonces, el pago total del año k es:

$$P_k = C + \text{Interés}_k$$

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del Pago de Capital Constante

Dado:

- Monto del préstamo, $L = 12000$
- Número de pagos, $N = 5$

El pago de capital constante C es:

$$C = \frac{L}{N} = \frac{12000}{5} = 2400$$

Por lo tanto, el pago de capital constante es **$2,400** cada año.

Paso 2: Cálculo del Pago Total de Cada Año

La tasa de interés anual es del 6%, lo que se aplica al saldo restante al inicio de cada año.

1. **Año 1**:

   - Saldo restante al inicio: 12000

- Interés: $12000 \cdot 0.06 = 720$
- Pago total: $2400 + 720 = 3120$

2. **Año 2**:

- Saldo restante al inicio: $12000 - 2400 = 9600$
- Interés: $9600 \cdot 0.06 = 576$
- Pago total: $2400 + 576 = 2976$

3. **Año 3**:

- Saldo restante al inicio: $9600 - 2400 = 7200$
- Interés: $7200 \cdot 0.06 = 432$
- Pago total: $2400 + 432 = 2832$

4. **Año 4**:

- Saldo restante al inicio: $7200 - 2400 = 4800$
- Interés: $4800 \cdot 0.06 = 288$
- Pago total: $2400 + 288 = 2688$

5. **Año 5**:

- Saldo restante al inicio: $4800 - 2400 = 2400$
- Interés: $2400 \cdot 0.06 = 144$
- Pago total: $2400 + 144 = 2544$

Paso 3: Cálculo del Monto Total de Intereses Pagados

La suma de los intereses pagados en cada año es:

$$\text{Interés total} = 720 + 576 + 432 + 288 + 144 = 2160$$

Por lo tanto, el monto total de intereses pagados al final de los 5 años es **$2,160**.

In [294…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
monto_prestamo = 12000       # Monto total del préstamo
tasa_interes_anual = 0.06    # Tasa de interés anual (6%)
num_anios = 5                # Duración del préstamo en años

# Cálculo del pago de capital constante
pago_capital_constante = monto_prestamo / num_anios

# Inicializar listas para los pagos, intereses y saldos
pagos_totales = []
intereses_pagados = []
saldos_restantes = [monto_prestamo]

# Cálculo del pago total de cada año y del saldo restante
saldo = monto_prestamo
```

```
for anio in range(1, num_anios + 1):
    interes = saldo * tasa_interes_anual
    pago_total = pago_capital_constante + interes
    saldo -= pago_capital_constante

    pagos_totales.append(pago_total)
    intereses_pagados.append(interes)
    saldos_restantes.append(saldo)

# Mostrar resultados
for i, (pago, interes, saldo) in enumerate(zip(pagos_totales, intereses_pagados, sa
    print(f"Año {i}: Pago Total = ${pago:.2f}, Interés Pagado = ${interes:.2f}, Sal

# Gráfica de la evolución del saldo restante
anios = np.arange(0, num_anios + 1)
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(anios, saldos_restantes, marker="o", color="brown", label="Saldo Restante"
plt.title("Evolución del Saldo Restante del Préstamo")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Saldo Restante ($)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

```
Año 1: Pago Total = $3120.00, Interés Pagado = $720.00, Saldo Restante = $9600.00
Año 2: Pago Total = $2976.00, Interés Pagado = $576.00, Saldo Restante = $7200.00
Año 3: Pago Total = $2832.00, Interés Pagado = $432.00, Saldo Restante = $4800.00
Año 4: Pago Total = $2688.00, Interés Pagado = $288.00, Saldo Restante = $2400.00
Año 5: Pago Total = $2544.00, Interés Pagado = $144.00, Saldo Restante = $0.00
```

Ejercicio 93: Planificación de Ahorro para la Jubilación con Series Geométricas

Una persona desea acumular fondos para su jubilación haciendo depósitos anuales de \$5,000 en una cuenta de inversión que paga un 7% de interés anual compuesto. Esta persona tiene planeado hacer estos depósitos durante 30 años, sin retirar dinero de la cuenta.

Tareas

1. **Calcule el valor futuro del fondo de jubilación** al final de los 30 años.
2. **Determine el capital total invertido** y el interés total acumulado al final del periodo.
3. **Calcule el valor futuro** si decide incrementar sus depósitos anuales a \$6,000.
4. **Grafique la evolución del saldo de la cuenta** a lo largo de los 30 años.

Fórmula para el Cálculo Financiero

El valor futuro (FV) de una serie de pagos periódicos con interés compuesto se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$FV = P \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

donde:

- FV es el valor futuro del fondo de jubilación,
- P es el depósito anual (en este caso, \$5,000),
- r es la tasa de interés anual (0.07),
- t es el número de años (30).

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del Valor Futuro del Fondo de Jubilación

Dado:

- Depósito anual, $P = 5000$
- Tasa de interés anual, $r = 0.07$
- Tiempo, $t = 30$ años

Aplicamos la fórmula para el valor futuro de una serie de depósitos periódicos:

$$FV = P \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

Sustituyendo los valores:

$$FV = 5000 \cdot \frac{(1 + 0.07)^{30} - 1}{0.07}$$

Calculamos cada componente:

1. Factor de interés: $(1 + 0.07)^{30} \approx 7.612255$

2. Cálculo del valor futuro:

$$FV = 5000 \cdot \frac{7.612255 - 1}{0.07}$$

$$FV = 5000 \cdot \frac{6.612255}{0.07}$$

$$FV \approx 5000 \cdot 94.46079 = 472303.95$$

Por lo tanto, el valor futuro del fondo de jubilación es aproximadamente **$472,303.95**.

Paso 2: Determinar el Capital Total Invertido y el Interés Total Acumulado

1. Capital total invertido:

$$\text{Capital total} = P \cdot t = 5000 \cdot 30 = 150000$$

2. Interés total acumulado:

$$\text{Interés total} = FV - \text{Capital total} = 472303.95 - 150000 = 322303.95$$

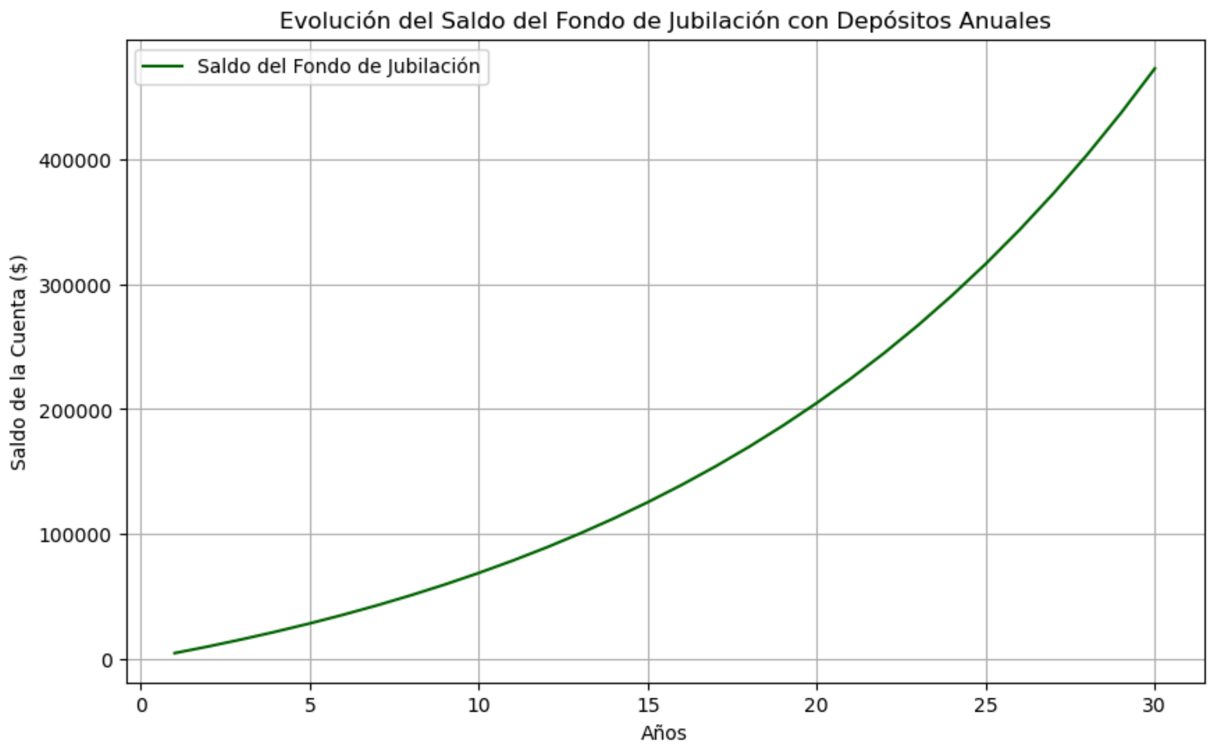
Por lo tanto, el interés total acumulado al final del periodo es **$322,303.95**.

In [297…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
deposito_anual = 5000          # Depósito anual en dólares
tasa_interes_anual = 0.07      # Tasa de interés anual (7%)
num_anios = 30                 # Duración de la inversión en años

# Cálculo del valor futuro utilizando la fórmula de interés compuesto
def calcular_valor_futuro(deposito, tasa, t):
    return deposito * ((1 + tasa)**t - 1) / tasa

valor_futuro = calcular_valor_futuro(deposito_anual, tasa_interes_anual, num_anios)
print(f"Valor futuro del fondo de jubilación: ${valor_futuro:.2f}")

# Cálculo del capital total invertido y el interés total acumulado
capital_total_invertido = deposito_anual * num_anios
interes_total_acumulado = valor_futuro - capital_total_invertido
print(f"Capital total invertido: ${capital_total_invertido:.2f}")
```

```
print(f"Interés total acumulado: ${interes_total_acumulado:.2f}")

# Gráfica de la evolución del saldo de la cuenta
saldos = [calcular_valor_futuro(deposito_anual, tasa_interes_anual, t) for t in ran
anios = np.arange(1, num_anios + 1)

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(anios, saldos, color="darkgreen", label="Saldo del Fondo de Jubilación")
plt.title("Evolución del Saldo del Fondo de Jubilación con Depósitos Anuales")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Saldo de la Cuenta ($)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

```
Valor futuro del fondo de jubilación: $472303.93
Capital total invertido: $150000.00
Interés total acumulado: $322303.93
```



Ejercicio 94: Proyección de Crecimiento de Ventas en una Empresa

Una empresa de tecnología ha registrado ventas de $50,000 en su primer año de operación. La empresa espera que sus ventas crezcan a una tasa del 8% anual durante los próximos 10 años debido a la expansión en nuevos mercados.

Tareas

1. **Calcule las ventas proyectadas** al final de cada año durante los próximos 10 años.

2. **Determine las ventas acumuladas** al final del periodo de 10 años.
3. **Calcule cuánto de las ventas acumuladas** corresponde al crecimiento (incremento respecto al primer año).
4. **Grafique la evolución de las ventas anuales** a lo largo del periodo de 10 años.

Fórmula para el Cálculo Financiero

Para calcular las ventas proyectadas en el año n con una tasa de crecimiento constante, utilizamos la fórmula de la progresión geométrica:

$$S_n = S_0 \cdot (1 + g)^n$$

donde:

- S_n es el monto de ventas en el año n,
- S_0 es el monto de ventas en el primer año ($50,000),
- g es la tasa de crecimiento anual (0.08).

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo de las Ventas Proyectadas para Cada Año

Dado:

- Ventas en el primer año, $S_0 = 50000$
- Tasa de crecimiento anual, $g = 0.08$
- Periodo de proyección, 10 años

Aplicamos la fórmula de crecimiento exponencial para calcular las ventas proyectadas en cada año:

$$S_n = S_0 \cdot (1 + g)^n$$

1. **Año 1**:

$$S_1 = 50000 \cdot (1 + 0.08)^1 = 50000 \cdot 1.08 = 54000$$

2. **Año 2**:

$$S_2 = 50000 \cdot (1.08)^2 \approx 58320$$

...continuar para cada año hasta el **Año 10**...

10. **Año 10**:

$$S_{10} = 50000 \cdot (1.08)^{10} \approx 107946.28$$

Paso 2: Cálculo de las Ventas Acumuladas al Final del Periodo

La suma de una progresión geométrica se calcula con la fórmula:

$$\text{Ventas acumuladas} = S_0 \cdot \frac{(1+g)^{10} - 1}{g}$$

Sustituyendo los valores:

$$\text{Ventas acumuladas} = 50000 \cdot \frac{(1.08)^{10} - 1}{0.08}$$

$$\text{Ventas acumuladas} = 50000 \cdot \frac{2.1589 - 1}{0.08}$$

$$\text{Ventas acumuladas} \approx 50000 \cdot 14.4862 = 724310$$

Por lo tanto, las ventas acumuladas al final de 10 años son aproximadamente **$724,310**.

Paso 3: Cálculo del Crecimiento Total Respecto al Primer Año

Para encontrar cuánto de las ventas acumuladas corresponde al crecimiento, restamos las ventas iniciales multiplicadas por los 10 años:

$$\text{Crecimiento acumulado} = \text{Ventas acumuladas} - (S_0 \times 10)$$

$$\text{Crecimiento acumulado} = 724310 - (50000 \times 10)$$

$$\text{Crecimiento acumulado} = 724310 - 500000 = 224310$$

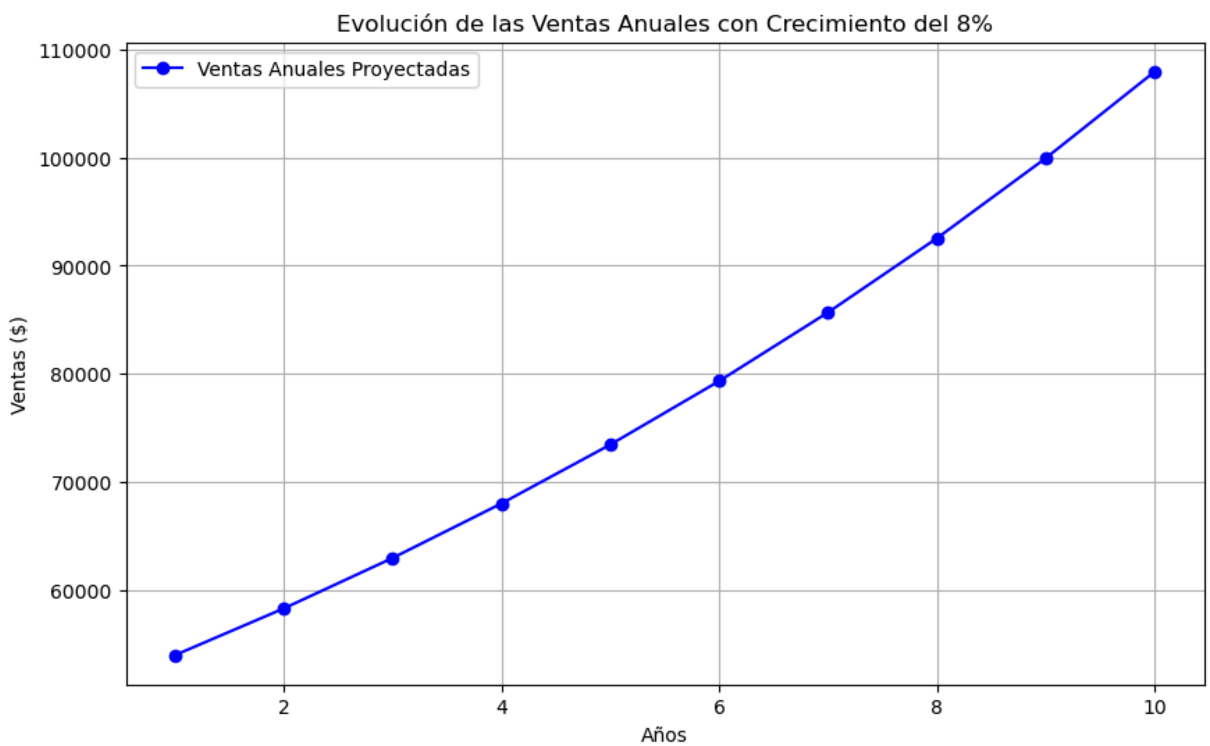
Por lo tanto, el crecimiento total respecto al primer año es aproximadamente **$224,310**.

In [300…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
ventas_iniciales = 50000         # Ventas en el primer año
tasa_crecimiento_anual = 0.08    # Tasa de crecimiento anual (8%)
num_anios = 10                   # Periodo de proyección en años

# Cálculo de las ventas proyectadas cada año
ventas_anuales = [ventas_iniciales * (1 + tasa_crecimiento_anual)**n for n in range
ventas_acumuladas = sum(ventas_anuales)
crecimiento_acumulado = ventas_acumuladas - (ventas_iniciales * num_anios)

# Mostrar resultados
print("Ventas proyectadas por año:")
for i, ventas in enumerate(ventas_anuales, 1):
    print(f"Año {i}: ${ventas:.2f}")

print(f"\nVentas acumuladas al final de 10 años: ${ventas_acumuladas:.2f}")
```

```
print(f"Crecimiento acumulado respecto al primer año: ${crecimiento_acumulado:.2f}"

# Gráfica de la evolución de las ventas anuales
anios = np.arange(1, num_anios + 1)

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(anios, ventas_anuales, color="blue", marker="o", label="Ventas Anuales Pro
plt.title("Evolución de las Ventas Anuales con Crecimiento del 8%")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Ventas ($)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

```
Ventas proyectadas por año:
Año 1: $54000.00
Año 2: $58320.00
Año 3: $62985.60
Año 4: $68024.45
Año 5: $73466.40
Año 6: $79343.72
Año 7: $85691.21
Año 8: $92546.51
Año 9: $99950.23
Año 10: $107946.25

Ventas acumuladas al final de 10 años: $782274.37
Crecimiento acumulado respecto al primer año: $282274.37
```



Ejercicio 95: Valoración de una Empresa con Flujos de Efectivo Variables

Una empresa está proyectando sus flujos de efectivo libres (FCL) para los próximos 6 años de la siguiente manera:

- **Años 1-3**: Los FCL iniciales son de $80,000 y crecerán a una tasa del 12% anual.
- **Años 4-6**: A partir del año 4, el crecimiento anual de los FCL se reducirá a una tasa del 5% debido a la madurez del mercado.

La empresa espera que después del año 6, los FCL crezcan de manera perpetua a una tasa del 2% anual. La tasa de descuento aplicable es del 10%.

Tareas

1. **Calcule los flujos de efectivo proyectados** para los años 1 a 6.
2. **Calcule el valor presente de los flujos de efectivo** de los años 1 a 6.
3. **Calcule el valor terminal al final del año 6** y su valor presente.
4. **Determine el valor total de la empresa** sumando los valores presentes calculados.
5. **Analice el impacto de las diferentes tasas de crecimiento** en la valoración de la empresa.

Fórmulas para el Cálculo Financiero

1. **Flujo de Efectivo en el Año n**:
   - **Para los años 1-3**:
   $$FCL_n = FCL_0 \cdot (1 + g_1)^n$$
   - **Para los años 4-6**:
   $$FCL_n = FCL_3 \cdot (1 + g_2)^{n-3}$$
2. **Valor Terminal al Final del Año 6**:
   $$VT = \frac{FCL_7}{r - g_3}$$
   donde:
   - FCL_7 es el flujo de efectivo en el año 7,
   - g_3 es la tasa de crecimiento perpetuo (2%),
   - r es la tasa de descuento (10%).
3. **Valor Presente**:
   $$VP = \sum_{n=1}^{N} \frac{FCL_n}{(1 + r)^n}$$
4. **Valor Presente del Valor Terminal**:

$$VP_{VT} = \frac{VT}{(1+r)^6}$$

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo de los Flujos de Efectivo Proyectados

Datos:

- FCL inicial, $FCL_0 = 80,000$
- Tasa de crecimiento años 1-3, $g_1 = 12\% = 0.12$
- Tasa de crecimiento años 4-6, $g_2 = 5\% = 0.05$
- Tasa de crecimiento perpetuo después del año 6, $g_3 = 2\% = 0.02$
- Tasa de descuento, $r = 10\% = 0.10$

Cálculo de FCL para años 1-3:

- **Año 1**:

$$FCL_1 = 80,000 \cdot (1+0.12)^1 = 80,000 \cdot 1.12 = 89,600$$

- **Año 2**:

$$FCL_2 = 80,000 \cdot (1.12)^2 = 80,000 \cdot 1.2544 = 100,352$$

- **Año 3**:

$$FCL_3 = 80,000 \cdot (1.12)^3 = 80,000 \cdot 1.4049 = 112,394$$

Cálculo de FCL para años 4-6:

Utilizando FCL_3 como base y $g_2 = 0.05$:

- **Año 4**:

$$FCL_4 = FCL_3 \cdot (1+0.05)^1 = 112,394 \cdot 1.05 = 118,014$$

- **Año 5**:

$$FCL_5 = FCL_3 \cdot (1.05)^2 = 112,394 \cdot 1.1025 = 123,915$$

- **Año 6**:

$$FCL_6 = FCL_3 \cdot (1.05)^3 = 112,394 \cdot 1.1576 = 130,111$$

Paso 2: Cálculo del Valor Presente de los Flujos de Efectivo (Años 1-6)

Calculamos el valor presente de cada flujo:

- **Año 1**:

$$VP_1 = \frac{89,600}{(1+0.10)^1} = \frac{89,600}{1.10} = 81,455$$

- **Año 2**:

$$VP_2 = \frac{100,352}{(1.10)^2} = \frac{100,352}{1.21} = 82,942$$

- **Año 3**:

$$VP_3 = \frac{112,394}{(1.10)^3} = \frac{112,394}{1.331} = 84,470$$

- **Año 4**:

$$VP_4 = \frac{118,014}{(1.10)^4} = \frac{118,014}{1.4641} = 80,592$$

- **Año 5**:

$$VP_5 = \frac{123,915}{(1.10)^5} = \frac{123,915}{1.6105} = 76,912$$

- **Año 6**:

$$VP_6 = \frac{130,111}{(1.10)^6} = \frac{130,111}{1.7716} = 73,440$$

Valor presente total de los FCL (VP_FCL):

$$VP_{\text{FCL}} = VP_1 + VP_2 + VP_3 + VP_4 + VP_5 + VP_6 = 81,455 + 82,942 + 84,470 + 80,59$$

Paso 3: Cálculo del Valor Terminal al Final del Año 6 y su Valor Presente

Cálculo de FCL_7:

$$FCL_7 = FCL_6 \cdot (1 + g_3) = 130,111 \cdot 1.02 = 132,713$$

Cálculo del Valor Terminal (VT):

$$VT = \frac{FCL_7}{r - g_3} = \frac{132,713}{0.10 - 0.02} = \frac{132,713}{0.08} = 1,658,912$$

Valor presente del Valor Terminal (VP_{VT}):

$$VP_{VT} = \frac{VT}{(1+r)^6} = \frac{1,658,912}{1.7716} = 936,578$$

Paso 4: Valor Total de la Empresa

$$VP_{\text{Total}} = VP_{\text{FCL}} + VP_{VT} = 479,811 + 936,578 = 1,416,389$$

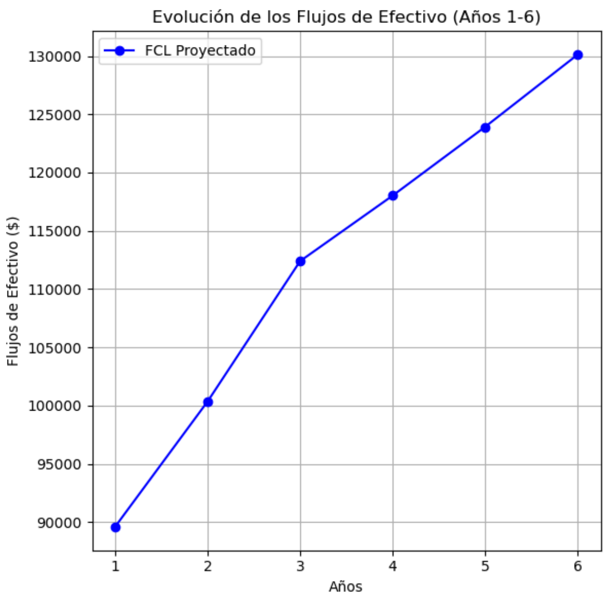
Por lo tanto, el valor total de la empresa es aproximadamente **$1,416,389**.

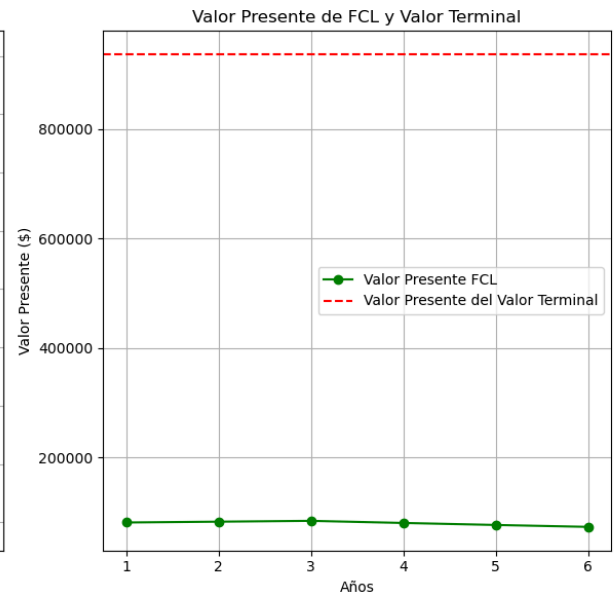
In [303…

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
FCL_0 = 80000                    # FCL inicial ($)
g1 = 0.12                        # Tasa de crecimiento años 1-3 (12%)
g2 = 0.05                        # Tasa de crecimiento años 4-6 (5%)
g3 = 0.02                        # Tasa de crecimiento perpetuo (2%)
r = 0.10                         # Tasa de descuento (10%)
N = 6                            # Número de años de proyección

# Cálculo de FCL proyectados para cada año
FCL = []
for n in range(1, 4):
    flujo = FCL_0 * (1 + g1) ** n  # Crecimiento a 12% para años 1-3
    FCL.append(flujo)

for n in range(4, 7):
    flujo = FCL[2] * (1 + g2) ** (n - 3)  # Crecimiento a 5% para años 4-6
    FCL.append(flujo)

# Cálculo del Valor Presente de los flujos de efectivo (años 1-6)
VP_FCL = sum([FCL[n - 1] / (1 + r) ** n for n in range(1, N + 1)])

# Cálculo del Valor Terminal al final del año 6 y su Valor Presente
FCL_7 = FCL[5] * (1 + g3)  # FCL proyectado para el año 7
VT = FCL_7 / (r - g3)      # Valor Terminal al final del año 6
VP_VT = VT / (1 + r) ** N   # Valor presente del valor terminal

# Valor total de la empresa
VP_Total = VP_FCL + VP_VT

# Mostrar resultados
print(f"Valor Presente de los flujos de efectivo (años 1-6): ${VP_FCL:,.2f}")
print(f"Valor Presente del Valor Terminal: ${VP_VT:,.2f}")
print(f"Valor Total de la Empresa: ${VP_Total:,.2f}")

# Gráfica de la evolución de los flujos de efectivo y el valor terminal
anios = np.arange(1, N + 1)
fcl_presentes = [FCL[n - 1] / (1 + r) ** n for n in range(1, N + 1)]

plt.figure(figsize=(12, 6))
```

```
# Flujos de efectivo proyectados
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(anios, FCL, color="blue", marker="o", label="FCL Proyectado")
plt.title("Evolución de los Flujos de Efectivo (Años 1-6)")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Flujos de Efectivo ($)")
plt.grid(True)
plt.legend()

# Valor presente de los flujos de efectivo y el valor terminal
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(anios, fcl_presentes, color="green", marker="o", label="Valor Presente FCL
plt.axhline(VP_VT, color="red", linestyle="--", label="Valor Presente del Valor Ter
plt.title("Valor Presente de FCL y Valor Terminal")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Valor Presente ($)")
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
Valor Presente de los flujos de efectivo (años 1-6): $479,823.82
Valor Presente del Valor Terminal: $936,409.96
Valor Total de la Empresa: $1,416,233.79
```





Ejercicio 96: Modelo de Ahorro con Incremento Anual de Depósitos

Una persona decide iniciar una cuenta de ahorros realizando un depósito inicial de $1,000 y aumentando su aporte en un 5% anual. Además, el banco ofrece una tasa de interés anual del 6%, que se aplica sobre el saldo acumulado al final de cada año.

Tareas

1. **Calcule el valor del depósito anual** durante los próximos 10 años, considerando el incremento del 5% cada año.
2. **Determine el saldo acumulado al final de cada año**, considerando el interés compuesto anual.
3. **Calcule el valor total acumulado al final de los 10 años**.
4. **Grafique la evolución del saldo de la cuenta** y del valor de los depósitos anuales durante el periodo de 10 años.

Fórmulas para el Cálculo Financiero

1. **Valor del Depósito Anual en el Año n**:

$$D_n = D_0 \cdot (1 + g)^{n-1}$$

donde:

- D_n es el valor del depósito en el año n,
- D_0 es el depósito inicial ($1,000),
- g es la tasa de incremento anual (0.05 o 5%).

2. **Saldo Acumulado con Interés Compuesto**:

Para calcular el saldo acumulado al final de cada año, utilizamos el saldo del año anterior y añadimos el depósito del año n junto con el interés compuesto del 6%.

$$\text{Saldo}_n = (\text{Saldo}_{n-1} + D_n) \cdot (1 + r)$$

donde:

- r es la tasa de interés (6% o 0.06).

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del Depósito Anual para Cada Año

Dado:

- Depósito inicial, $D_0 = 1000$
- Tasa de incremento anual, $g = 0.05$
- Tasa de interés anual, $r = 0.06$
- Periodo de proyección: 10 años

Cálculo de depósitos anuales:

1. **Año 1**: $D_1 = 1000$

2. **Año 2**:

$$D_2 = D_0 \cdot (1 + g) = 1000 \cdot 1.05 = 1050$$

3. **Año 3**:

$$D_3 = D_0 \cdot (1.05)^2 = 1000 \cdot 1.1025 = 1102.5$$

...continuar hasta el año 10...

10. **Año 10**:

$$D_{10} = D_0 \cdot (1.05)^9 \approx 1551.33$$

Paso 2: Cálculo del Saldo Acumulado con Interés Compuesto

Para cada año, aplicamos el interés compuesto al saldo acumulado del año anterior después de añadir el depósito anual:

1. **Año 1**:

$$\text{Saldo}_1 = (0 + 1000) \cdot 1.06 = 1060$$

2. **Año 2**:

$$\text{Saldo}_2 = (\text{Saldo}_1 + D_2) \cdot 1.06 = (1060 + 1050) \cdot 1.06 = 2247.6$$

3. **Año 3**:

$$\text{Saldo}_3 = (\text{Saldo}_2 + D_3) \cdot 1.06 = (2247.6 + 1102.5) \cdot 1.06 \approx 3543.06$$

...continuar hasta el año 10...

Saldo final al final de 10 años:

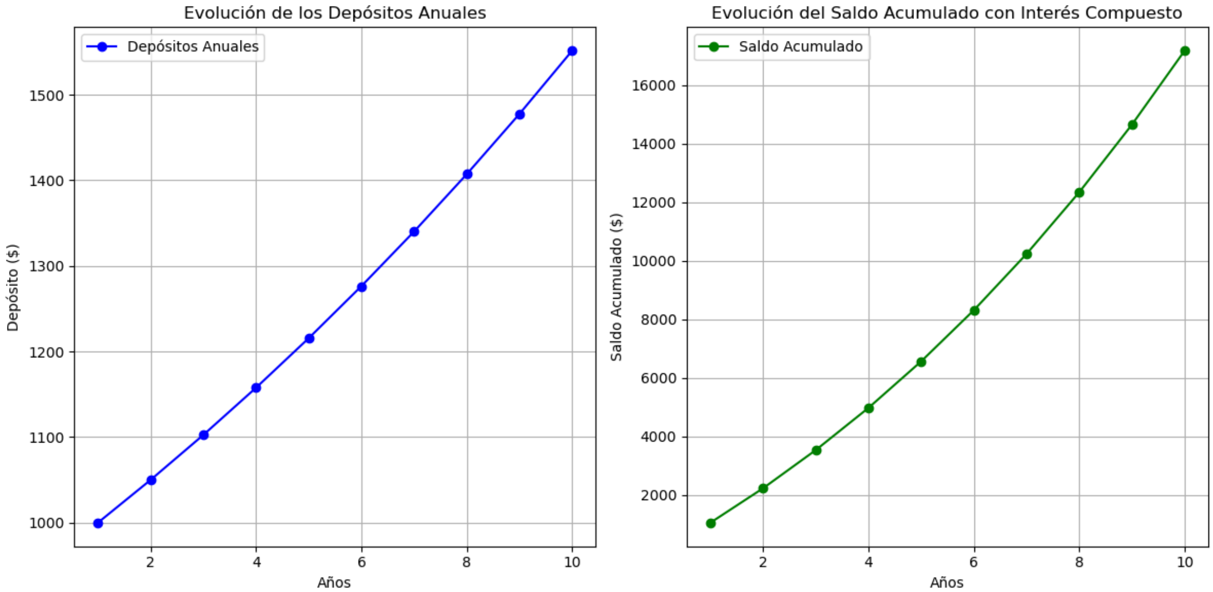
Este saldo se calcula con la fórmula iterativa descrita hasta el año 10.

In [306…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
deposito_inicial = 1000          # Depósito inicial ($)
tasa_incremento_anual = 0.05     # Tasa de incremento anual de depósitos (5%)
tasa_interes_anual = 0.06        # Tasa de interés anual (6%)
num_anios = 10                   # Periodo de proyección en años

# Cálculo de depósitos anuales y saldo acumulado
depositos = []
saldos = []
saldo_acumulado = 0

for n in range(1, num_anios + 1):
```

```
    # Cálculo del depósito en el año n
    deposito_anual = deposito_inicial * (1 + tasa_incremento_anual) ** (n - 1)
    depositos.append(deposito_anual)

    # Cálculo del saldo acumulado al final del año n
    saldo_acumulado = (saldo_acumulado + deposito_anual) * (1 + tasa_interes_anual)
    saldos.append(saldo_acumulado)

# Mostrar resultados
print("Depósitos anuales y saldo acumulado:")
for i, (dep, saldo) in enumerate(zip(depositos, saldos), 1):
    print(f"Año {i}: Depósito = ${dep:.2f}, Saldo Acumulado = ${saldo:.2f}")

# Gráfica de la evolución de los depósitos anuales y saldo acumulado
anios = np.arange(1, num_anios + 1)

plt.figure(figsize=(12, 6))

# Gráfica de depósitos anuales
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(anios, depositos, marker="o", color="blue", label="Depósitos Anuales")
plt.title("Evolución de los Depósitos Anuales")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Depósito ($)")
plt.grid(True)
plt.legend()

# Gráfica de saldo acumulado
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(anios, saldos, marker="o", color="green", label="Saldo Acumulado")
plt.title("Evolución del Saldo Acumulado con Interés Compuesto")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Saldo Acumulado ($)")
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
Depósitos anuales y saldo acumulado:
Año 1: Depósito = $1000.00, Saldo Acumulado = $1060.00
Año 2: Depósito = $1050.00, Saldo Acumulado = $2236.60
Año 3: Depósito = $1102.50, Saldo Acumulado = $3539.45
Año 4: Depósito = $1157.63, Saldo Acumulado = $4978.90
Año 5: Depósito = $1215.51, Saldo Acumulado = $6566.07
Año 6: Depósito = $1276.28, Saldo Acumulado = $8312.89
Año 7: Depósito = $1340.10, Saldo Acumulado = $10232.16
Año 8: Depósito = $1407.10, Saldo Acumulado = $12337.62
Año 9: Depósito = $1477.46, Saldo Acumulado = $14643.98
Año 10: Depósito = $1551.33, Saldo Acumulado = $17167.03
```



Ejercicio 97: Plan de Ahorro con Incremento Mensual para Fondo de Emergencia

Una persona desea crear un fondo de emergencia ahorrando una cantidad inicial de 200 en el primer mes y aumentando su contribución mensual en $20 cada mes. Este plan de ahorro continuará durante 12 meses.

Tareas

1. **Calcule la contribución de ahorro para cada mes** durante el año.
2. **Determine el total ahorrado al final del año**.
3. **Calcule cuánto representa el incremento mensual acumulado** en el total ahorrado.
4. **Grafique la evolución de los ahorros mensuales** y del saldo acumulado durante el año.

Fórmulas para el Cálculo

1. **Ahorro en el Mes n**:

$$A_n = A_1 + (n-1) \cdot d$$

donde:

- A_n es el monto de ahorro en el mes n,
- A_1 es el ahorro inicial ($200),

- d es el incremento mensual ($20).

2. **Total Ahorrado al Final del Año**:

   La suma de una serie aritmética se calcula con la fórmula:

$$\text{Total Ahorrado} = \frac{N}{2} \cdot (2A_1 + (N-1) \cdot d)$$

   donde:

   - N es el número de términos (12 meses).

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del Ahorro Mensual para Cada Mes

Dado:

- Ahorro inicial, $A_1 = 200$
- Incremento mensual, $d = 20$
- Número de meses, $N = 12$

Cálculo de los ahorros mensuales:

1. **Mes 1**:

$$A_1 = 200$$

2. **Mes 2**:

$$A_2 = A_1 + (2-1) \cdot d = 200 + 1 \cdot 20 = 220$$

3. **Mes 3**:

$$A_3 = A_1 + (3-1) \cdot d = 200 + 2 \cdot 20 = 240$$

...continuar hasta el mes 12...

12. **Mes 12**:

$$A_{12} = A_1 + (12-1) \cdot d = 200 + 11 \cdot 20 = 420$$

Paso 2: Cálculo del Total Ahorrado al Final del Año

La suma de la serie aritmética para los 12 meses es:

$$\text{Total Ahorrado} = \frac{N}{2} \cdot (2A_1 + (N-1) \cdot d)$$

Sustituyendo los valores:

$$\text{Total Ahorrado} = \frac{12}{2} \cdot (2 \cdot 200 + (12 - 1) \cdot 20)$$

$$= 6 \cdot (400 + 220) = 6 \cdot 620 = 3720$$

Por lo tanto, el total ahorrado al final del año es **$3,720**.

Paso 3: Cálculo del Incremento Acumulado

El incremento acumulado se calcula restando el ahorro inicial fijo (sin el incremento) al total ahorrado:

1. **Ahorro sin Incremento**:

   Si el ahorro mensual hubiera sido fijo ($200 cada mes):

   $$\text{Ahorro sin Incremento} = 12 \cdot 200 = 2400$$

2. **Incremento Acumulado**:

   $$\text{Incremento Acumulado} = \text{Total Ahorrado} - \text{Ahorro sin Incremento} = 3720 - 2400$$

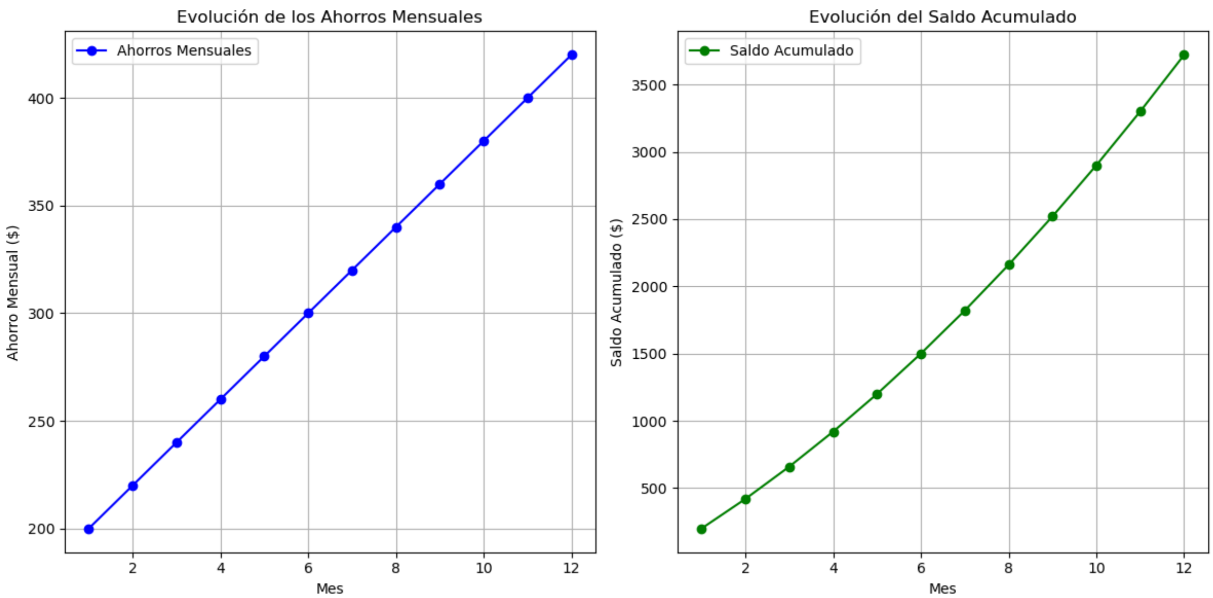
Por lo tanto, el incremento acumulado al final del año es **$1,320**.

In [309…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
ahorro_inicial = 200              # Ahorro inicial ($)
incremento_mensual = 20           # Incremento mensual en el ahorro ($)
num_meses = 12                    # Periodo de ahorro en meses

# Cálculo de los ahorros mensuales y saldo acumulado
ahorros_mensuales = []
saldos_acumulados = []
saldo_total = 0

for n in range(1, num_meses + 1):
    # Cálculo del ahorro en el mes n
    ahorro_mensual = ahorro_inicial + (n - 1) * incremento_mensual
    ahorros_mensuales.append(ahorro_mensual)

    # Cálculo del saldo acumulado al final del mes
    saldo_total += ahorro_mensual
    saldos_acumulados.append(saldo_total)

# Mostrar resultados
print("Ahorros mensuales y saldo acumulado:")
for i, (ahorro, saldo) in enumerate(zip(ahorros_mensuales, saldos_acumulados), 1):
    print(f"Mes {i}: Ahorro Mensual = ${ahorro:.2f}, Saldo Acumulado = ${saldo:.2f}
```

```
# Gráfica de la evolución de los ahorros mensuales y saldo acumulado
meses = np.arange(1, num_meses + 1)

plt.figure(figsize=(12, 6))

# Gráfica de ahorros mensuales
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(meses, ahorros_mensuales, marker="o", color="blue", label="Ahorros Mensual
plt.title("Evolución de los Ahorros Mensuales")
plt.xlabel("Mes")
plt.ylabel("Ahorro Mensual ($)")
plt.grid(True)
plt.legend()

# Gráfica de saldo acumulado
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(meses, saldos_acumulados, marker="o", color="green", label="Saldo Acumulad
plt.title("Evolución del Saldo Acumulado")
plt.xlabel("Mes")
plt.ylabel("Saldo Acumulado ($)")
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
Ahorros mensuales y saldo acumulado:
Mes 1: Ahorro Mensual = $200.00, Saldo Acumulado = $200.00
Mes 2: Ahorro Mensual = $220.00, Saldo Acumulado = $420.00
Mes 3: Ahorro Mensual = $240.00, Saldo Acumulado = $660.00
Mes 4: Ahorro Mensual = $260.00, Saldo Acumulado = $920.00
Mes 5: Ahorro Mensual = $280.00, Saldo Acumulado = $1200.00
Mes 6: Ahorro Mensual = $300.00, Saldo Acumulado = $1500.00
Mes 7: Ahorro Mensual = $320.00, Saldo Acumulado = $1820.00
Mes 8: Ahorro Mensual = $340.00, Saldo Acumulado = $2160.00
Mes 9: Ahorro Mensual = $360.00, Saldo Acumulado = $2520.00
Mes 10: Ahorro Mensual = $380.00, Saldo Acumulado = $2900.00
Mes 11: Ahorro Mensual = $400.00, Saldo Acumulado = $3300.00
Mes 12: Ahorro Mensual = $420.00, Saldo Acumulado = $3720.00
```



Ejercicio 98: Cálculo de la Depreciación de un Automóvil

Un automóvil nuevo cuesta $30,000 y se deprecia a una tasa anual del 15%. Queremos calcular el valor del automóvil al final de cada año durante los próximos 10 años, así como el valor acumulado de la depreciación.

Tareas

1. **Calcule el valor del automóvil al final de cada año** durante un periodo de 10 años.
2. **Determine el total de la depreciación acumulada** al final de los 10 años.
3. **Calcule el valor de mercado después de los 10 años** y compárelo con el precio inicial.
4. **Grafique la evolución del valor del automóvil** y de la depreciación acumulada durante los 10 años.

Fórmulas para el Cálculo Financiero

1. **Valor del Automóvil al Final del Año n**:

$$V_n = V_0 \cdot (1 - d)^n$$

donde:

- V_n es el valor del automóvil al final del año n,
- V_0 es el valor inicial del automóvil ($30,000),
- d es la tasa de depreciación anual (15% o 0.15).

2. **Depreciación Acumulada**:

La depreciación acumulada al final de cada año se puede calcular como:

$$\text{Depreciación Acumulada}_n = V_0 - V_n$$

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del Valor del Automóvil para Cada Año

Dado:

- Valor inicial del automóvil, $V_0 = 30000$
- Tasa de depreciación anual, $d = 0.15$
- Periodo de depreciación, 10 años

Cálculo del valor al final de cada año:

1. **Año 1**:

$$V_1 = V_0 \cdot (1-d)^1 = 30000 \cdot (1-0.15) = 30000 \cdot 0.85 = 25500$$

2. **Año 2**:

$$V_2 = V_0 \cdot (1-0.15)^2 = 30000 \cdot (0.85)^2 = 30000 \cdot 0.7225 = 21675$$

3. **Año 3**:

$$V_3 = 30000 \cdot (0.85)^3 \approx 18423.75$$

...continuar hasta el año 10...

10. **Año 10**:

$$V_{10} = 30000 \cdot (0.85)^{10} \approx 7396.37$$

Paso 2: Cálculo de la Depreciación Acumulada al Final de Cada Año

La depreciación acumulada al final de cada año es:

1. **Año 1**:

$$\text{Depreciación Acumulada}_1 = V_0 - V_1 = 30000 - 25500 = 4500$$

2. **Año 2**:

$$\text{Depreciación Acumulada}_2 = V_0 - V_2 = 30000 - 21675 = 8325$$

3. **Año 3**:

$$\text{Depreciación Acumulada}_3 = V_0 - V_3 = 30000 - 18423.75 \approx 11576.25$$

...continuar hasta el año 10...

Depreciación acumulada al final de los 10 años:

$$\text{Depreciación Acumulada}_{10} = V_0 - V_{10} = 30000 - 7396.37 \approx 22603.63$$

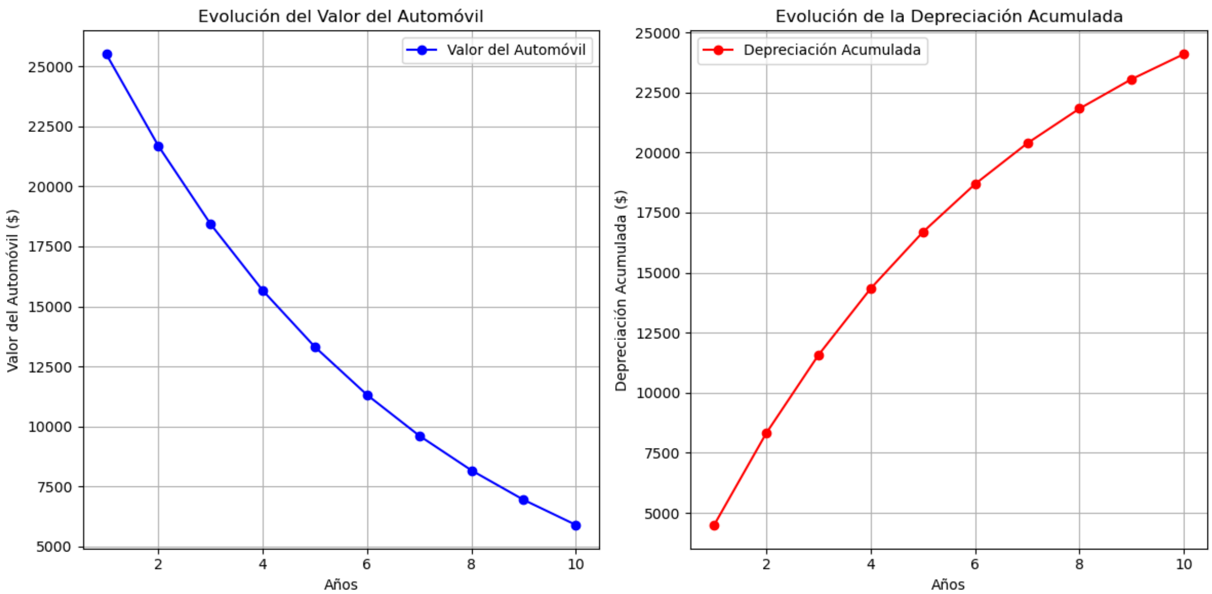
Por lo tanto, la depreciación acumulada al final de los 10 años es aproximadamente **$22,603.63**.

In [312…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
valor_inicial = 30000            # Valor inicial del automóvil ($)
tasa_depreciacion = 0.15         # Tasa de depreciación anual (15%)
num_anios = 10                   # Periodo de depreciación en años

# Cálculo del valor anual del automóvil y la depreciación acumulada
valores_automovil = []
depreciacion_acumulada = []

for n in range(1, num_anios + 1):
    # Cálculo del valor del automóvil al final del año n
    valor_anual = valor_inicial * (1 - tasa_depreciacion) ** n
    valores_automovil.append(valor_anual)

    # Cálculo de la depreciación acumulada al final del año n
    depreciacion = valor_inicial - valor_anual
    depreciacion_acumulada.append(depreciacion)

# Mostrar resultados
print("Valor del automóvil y depreciación acumulada cada año:")
for i, (valor, dep_acum) in enumerate(zip(valores_automovil, depreciacion_acumulada
    print(f"Año {i}: Valor = ${valor:.2f}, Depreciación Acumulada = ${dep_acum:.2f}

# Gráfica de la evolución del valor del automóvil y depreciación acumulada
anios = np.arange(1, num_anios + 1)

plt.figure(figsize=(12, 6))

# Gráfica del valor del automóvil
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(anios, valores_automovil, marker="o", color="blue", label="Valor del Autom
plt.title("Evolución del Valor del Automóvil")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Valor del Automóvil ($)")
plt.grid(True)
plt.legend()

# Gráfica de la depreciación acumulada
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(anios, depreciacion_acumulada, marker="o", color="red", label="Depreciació
```

```
plt.title("Evolución de la Depreciación Acumulada")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Depreciación Acumulada ($)")
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
Valor del automóvil y depreciación acumulada cada año:
Año 1: Valor = $25500.00, Depreciación Acumulada = $4500.00
Año 2: Valor = $21675.00, Depreciación Acumulada = $8325.00
Año 3: Valor = $18423.75, Depreciación Acumulada = $11576.25
Año 4: Valor = $15660.19, Depreciación Acumulada = $14339.81
Año 5: Valor = $13311.16, Depreciación Acumulada = $16688.84
Año 6: Valor = $11314.49, Depreciación Acumulada = $18685.51
Año 7: Valor = $9617.31, Depreciación Acumulada = $20382.69
Año 8: Valor = $8174.72, Depreciación Acumulada = $21825.28
Año 9: Valor = $6948.51, Depreciación Acumulada = $23051.49
Año 10: Valor = $5906.23, Depreciación Acumulada = $24093.77
```



Ejercicio 99: Proyección de Crecimiento de Población en una Ciudad

Una ciudad tiene actualmente una población de 500,000 habitantes y se espera que crezca a una tasa del 3% anual. Queremos proyectar el crecimiento de la población en los próximos 15 años.

Tareas

1. **Calcule la población proyectada para cada año** durante los próximos 15 años.
2. **Determine el crecimiento poblacional acumulado** al final de los 15 años.
3. **Calcule el porcentaje de crecimiento total respecto a la población inicial**.

4. **Grafique la evolución de la población** a lo largo del periodo de 15 años.

Fórmulas para el Cálculo

1. **Población Proyectada en el Año n**:

$$P_n = P_0 \cdot (1 + r)^n$$

donde:

- P_n es la población proyectada en el año n,
- P_0 es la población inicial (500,000 habitantes),
- r es la tasa de crecimiento anual (3% o 0.03).

2. **Crecimiento Acumulado de la Población**:

El crecimiento acumulado de la población al final de cada año se puede calcular como:

$$\text{Crecimiento Acumulado}_n = P_n - P_0$$

3. **Porcentaje de Crecimiento Total**:

Al final del periodo de 15 años, el porcentaje de crecimiento total respecto a la población inicial se calcula como:

$$\text{Porcentaje de Crecimiento Total} = \left(\frac{P_{15} - P_0}{P_0}\right) \times 100$$

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo de la Población Proyectada para Cada Año

Dado:

- Población inicial, $P_0 = 500,000$
- Tasa de crecimiento anual, $r = 0.03$
- Periodo de proyección: 15 años

Cálculo de la población proyectada:

1. **Año 1**:

$$P_1 = P_0 \cdot (1 + r)^1 = 500000 \cdot 1.03 = 515000$$

2. **Año 2**:

$$P_2 = P_0 \cdot (1.03)^2 = 500000 \cdot 1.0609 = 530450$$

3. **Año 3**:

$$P_3 = 500000 \cdot (1.03)^3 \approx 546363.5$$

...continuar hasta el año 15...

15. **Año 15**:

$$P_{15} = 500000 \cdot (1.03)^{15} \approx 779026$$

Paso 2: Cálculo del Crecimiento Acumulado al Final de Cada Año

La diferencia entre la población proyectada y la población inicial da el crecimiento acumulado:

1. **Año 1**:

$$\text{Crecimiento Acumulado}_1 = P_1 - P_0 = 515000 - 500000 = 15000$$

2. **Año 2**:

$$\text{Crecimiento Acumulado}_2 = P_2 - P_0 = 530450 - 500000 = 30450$$

...continuar hasta el año 15...

15. **Año 15**:

$$\text{Crecimiento Acumulado}_{15} = P_{15} - P_0 = 779026 - 500000 = 279026$$

Paso 3: Cálculo del Porcentaje de Crecimiento Total

$$\text{Porcentaje de Crecimiento Total} = \left(\frac{P_{15} - P_0}{P_0}\right) \times 100$$

Sustituyendo los valores:

$$\text{Porcentaje de Crecimiento Total} = \left(\frac{779026 - 500000}{500000}\right) \times 100 \approx 55.81\%$$

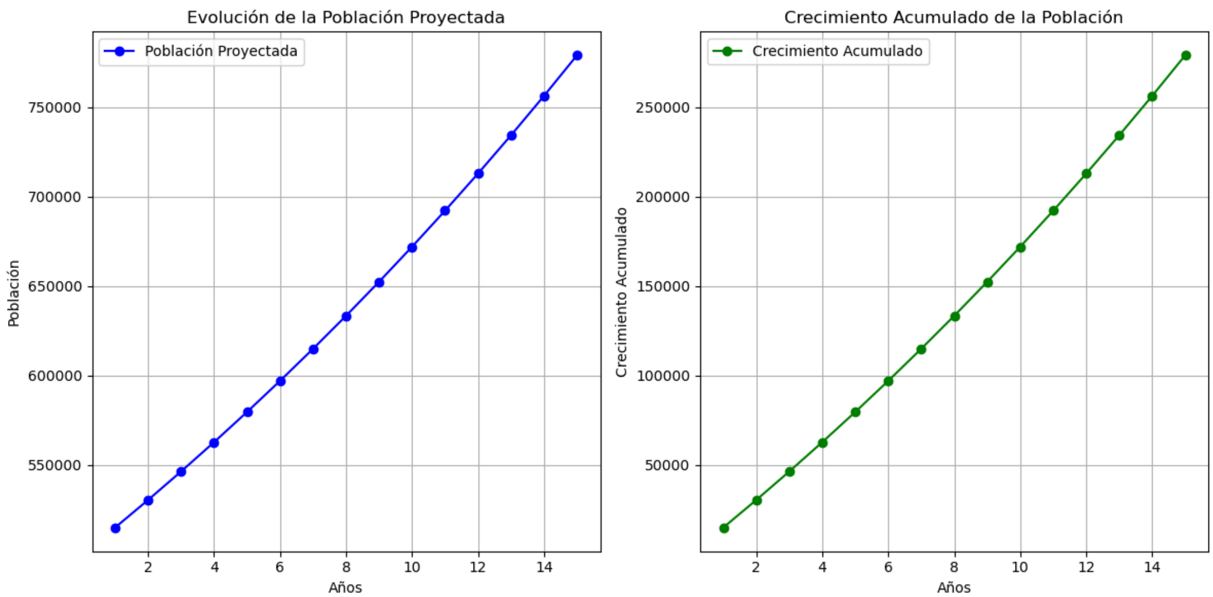
Por lo tanto, el porcentaje de crecimiento total en 15 años es aproximadamente **55.81%**.

In [315…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
poblacion_inicial = 500000          # Población inicial
tasa_crecimiento = 0.03             # Tasa de crecimiento anual (3%)
num_anios = 15                      # Periodo de proyección en años

# Cálculo de la población anual y crecimiento acumulado
poblaciones = []
```

```
crecimiento_acumulado = []

for n in range(1, num_anios + 1):
    # Cálculo de la población proyectada al final del año n
    poblacion_anual = poblacion_inicial * (1 + tasa_crecimiento) ** n
    poblaciones.append(poblacion_anual)

    # Cálculo del crecimiento acumulado al final del año n
    crecimiento = poblacion_anual - poblacion_inicial
    crecimiento_acumulado.append(crecimiento)

# Mostrar resultados
print("Población proyectada y crecimiento acumulado cada año:")
for i, (poblacion, crecimiento) in enumerate(zip(poblaciones, crecimiento_acumulado
    print(f"Año {i}: Población = {poblacion:.2f}, Crecimiento Acumulado = {crecimie

# Gráfica de la evolución de la población y crecimiento acumulado
anios = np.arange(1, num_anios + 1)

plt.figure(figsize=(12, 6))

# Gráfica de la población proyectada
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(anios, poblaciones, marker="o", color="blue", label="Población Proyectada"
plt.title("Evolución de la Población Proyectada")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Población")
plt.grid(True)
plt.legend()

# Gráfica del crecimiento acumulado
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(anios, crecimiento_acumulado, marker="o", color="green", label="Crecimient
plt.title("Crecimiento Acumulado de la Población")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Crecimiento Acumulado")
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
Población proyectada y crecimiento acumulado cada año:
Año 1: Población = 515000.00, Crecimiento Acumulado = 15000.00
Año 2: Población = 530450.00, Crecimiento Acumulado = 30450.00
Año 3: Población = 546363.50, Crecimiento Acumulado = 46363.50
Año 4: Población = 562754.41, Crecimiento Acumulado = 62754.41
Año 5: Población = 579637.04, Crecimiento Acumulado = 79637.04
Año 6: Población = 597026.15, Crecimiento Acumulado = 97026.15
Año 7: Población = 614936.93, Crecimiento Acumulado = 114936.93
Año 8: Población = 633385.04, Crecimiento Acumulado = 133385.04
Año 9: Población = 652386.59, Crecimiento Acumulado = 152386.59
Año 10: Población = 671958.19, Crecimiento Acumulado = 171958.19
Año 11: Población = 692116.94, Crecimiento Acumulado = 192116.94
Año 12: Población = 712880.44, Crecimiento Acumulado = 212880.44
Año 13: Población = 734266.86, Crecimiento Acumulado = 234266.86
Año 14: Población = 756294.86, Crecimiento Acumulado = 256294.86
Año 15: Población = 778983.71, Crecimiento Acumulado = 278983.71
```



Ejercicio 100: Amortización de Deuda con Pagos Variables

Una persona contrata un préstamo de $10,000 a una tasa de interés anual del 5$1,000 en el primer año.

Tareas

1. **Calcule el pago anual para cada uno de los próximos 10 años**, considerando el incremento del 3% anual.
2. **Determine el saldo de la deuda al final de cada año** después de aplicar los pagos.
3. **Calcule el interés total pagado al final de los 10 años**.

4. **Grafique la evolución del saldo de la deuda y el pago anual** durante el periodo de amortización.

Fórmulas para el Cálculo Financiero

1. **Pago Anual en el Año n**:

$$P_n = P_0 \cdot (1 + g)^{n-1}$$

donde:

- P_n es el pago en el año n,
- P_0 es el pago inicial ($1,000),
- g es la tasa de crecimiento de los pagos (3% o 0.03).

2. **Saldo de la Deuda al Final del Año n**:

La deuda se reduce cada año por el pago aplicado, mientras que el interés anual aumenta el saldo restante. El saldo de la deuda en el año n se calcula como:

$$\text{Saldo}_n = (\text{Saldo}_{n-1} - P_n) \cdot (1 + r)$$

donde:

- r es la tasa de interés anual (5% o 0.05),
- Saldo_{n-1} es el saldo de la deuda del año anterior después de restar el pago del año.

Resolución Matemática

Paso 1: Cálculo del Pago Anual para Cada Año

Dado:

- Pago inicial, $P_0 = 1000$
- Tasa de crecimiento de los pagos, $g = 0.03$
- Tasa de interés anual, $r = 0.05$
- Monto inicial de la deuda, $D_0 = 10000$
- Periodo de amortización: 10 años

Cálculo de los pagos anuales:

1. **Año 1**:

$$P_1 = P_0 = 1000$$

2. **Año 2**:

$$P_2 = P_0 \cdot (1+g) = 1000 \cdot 1.03 = 1030$$

3. **Año 3**:

$$P_3 = P_0 \cdot (1.03)^2 = 1000 \cdot 1.0609 = 1060.9$$

...continuar hasta el año 10...

10. **Año 10**:

$$P_{10} = P_0 \cdot (1.03)^9 \approx 1304.77$$

Paso 2: Cálculo del Saldo de la Deuda al Final de Cada Año

La deuda se reduce cada año por el pago menos el interés generado:

1. **Año 1**:

$$\text{Saldo}_1 = (D_0 - P_1) \cdot (1+r) = (10000 - 1000) \cdot 1.05 = 9450$$

2. **Año 2**:

$$\text{Saldo}_2 = (\text{Saldo}_1 - P_2) \cdot (1+r) = (9450 - 1030) \cdot 1.05 = 8863.5$$

3. **Año 3**:

$$\text{Saldo}_3 = (\text{Saldo}_2 - P_3) \cdot 1.05 \approx 8234.89$$

...continuar hasta el año 10...

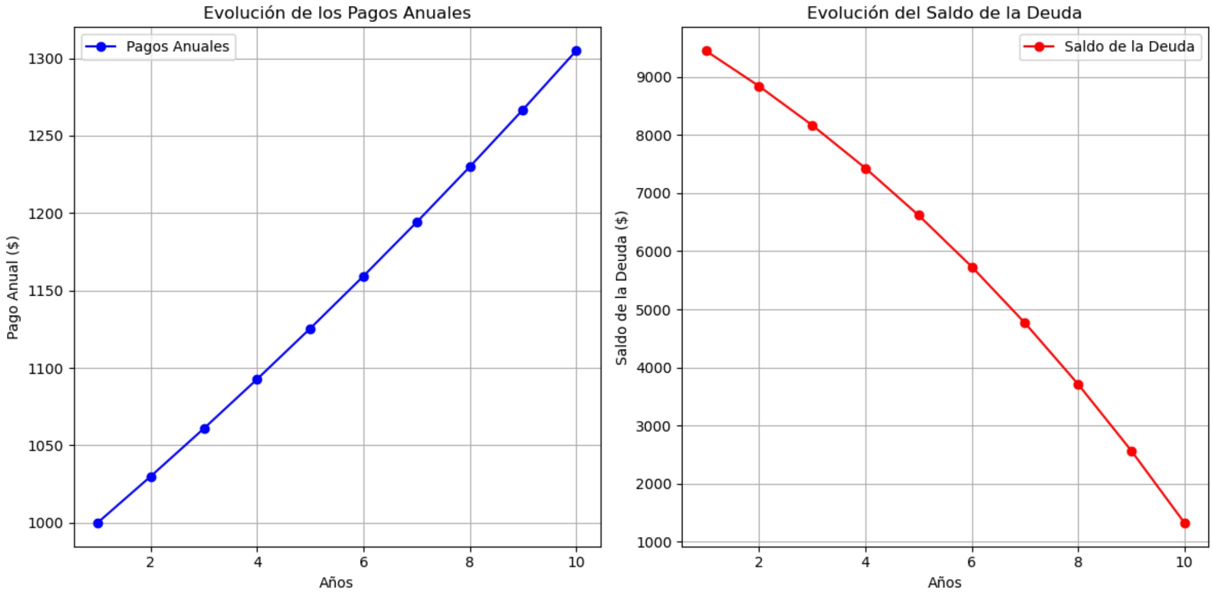
Saldo final al final del año 10: Este saldo se calcula iterativamente utilizando la misma fórmula hasta que la deuda se amortice completamente o se reduzca al saldo final.

In [318...

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Datos
deuda_inicial = 10000                  # Monto inicial de la deuda ($)
pago_inicial = 1000                    # Pago inicial ($)
tasa_crecimiento_pago = 0.03           # Tasa de crecimiento de los pagos (3%)
tasa_interes_anual = 0.05              # Tasa de interés anual (5%)
num_anios = 10                         # Periodo de amortización en años

# Cálculo de los pagos anuales y saldo de la deuda
pagos_anuales = []
saldos_deuda = [deuda_inicial]

for n in range(1, num_anios + 1):
    # Cálculo del pago en el año n
    pago_anual = pago_inicial * (1 + tasa_crecimiento_pago) ** (n - 1)
```

```
    pagos_anuales.append(pago_anual)

    # Cálculo del saldo de la deuda después del pago y del interés anual
    saldo_anterior = saldos_deuda[-1]
    saldo_nuevo = (saldo_anterior - pago_anual) * (1 + tasa_interes_anual)
    saldos_deuda.append(saldo_nuevo)

# Mostrar resultados
print("Pagos anuales y saldo de la deuda cada año:")
for i, (pago, saldo) in enumerate(zip(pagos_anuales, saldos_deuda[1:]), 1):
    print(f"Año {i}: Pago = ${pago:.2f}, Saldo de la Deuda = ${saldo:.2f}")

# Gráfica de la evolución de los pagos anuales y saldo de la deuda
anios = np.arange(1, num_anios + 1)

plt.figure(figsize=(12, 6))

# Gráfica de pagos anuales
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(anios, pagos_anuales, marker="o", color="blue", label="Pagos Anuales")
plt.title("Evolución de los Pagos Anuales")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Pago Anual ($)")
plt.grid(True)
plt.legend()

# Gráfica del saldo de la deuda
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(anios, saldos_deuda[1:], marker="o", color="red", label="Saldo de la Deuda
plt.title("Evolución del Saldo de la Deuda")
plt.xlabel("Años")
plt.ylabel("Saldo de la Deuda ($)")
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
Pagos anuales y saldo de la deuda cada año:
Año 1: Pago = $1000.00, Saldo de la Deuda = $9450.00
Año 2: Pago = $1030.00, Saldo de la Deuda = $8841.00
Año 3: Pago = $1060.90, Saldo de la Deuda = $8169.11
Año 4: Pago = $1092.73, Saldo de la Deuda = $7430.20
Año 5: Pago = $1125.51, Saldo de la Deuda = $6619.92
Año 6: Pago = $1159.27, Saldo de la Deuda = $5733.68
Año 7: Pago = $1194.05, Saldo de la Deuda = $4766.61
Año 8: Pago = $1229.87, Saldo de la Deuda = $3713.57
Año 9: Pago = $1266.77, Saldo de la Deuda = $2569.14
Año 10: Pago = $1304.77, Saldo de la Deuda = $1327.59
```



Conclusiones

1. Matemáticas como Herramienta de Resolución de Problemas Reales

Este ebook demuestra cómo las matemáticas pueden aplicarse de forma práctica para resolver problemas cotidianos en áreas como finanzas, economía, administración, y ciencias sociales. Los conceptos abordados, desde álgebra y funciones hasta ecuaciones diferenciales y series, muestran cómo los principios matemáticos no solo existen en teoría, sino que también son esenciales para analizar y tomar decisiones fundamentadas.

2. Programación en Python para Visualización y Optimización

La integración de Python en cada capítulo ha permitido que los lectores no solo comprendan las soluciones matemáticas, sino también implementen estas soluciones de manera práctica. Python, con sus capacidades para cálculos numéricos y visualización de datos, ha sido un complemento ideal, ayudando a ilustrar conceptos y mejorar la comprensión de los problemas resueltos.

3. Desarrollo de Habilidades en Modelación y Análisis

Al estructurar el contenido con problemas aplicados a diferentes escenarios, los lectores han tenido la oportunidad de ver cómo las matemáticas pueden modelar situaciones reales y cómo el análisis matemático puede descomponer estos escenarios para comprenderlos en profundidad. Esto fomenta habilidades de modelación y análisis, esenciales en un mundo impulsado por datos.

4. Variedad y Profundidad en la Aplicación de Temas Matemáticos

El ebook explora una variedad de temas matemáticos, cada uno aplicado a contextos diversos, como ahorro, inversión, amortización de deuda, proyección de población, entre otros. Esta diversidad de aplicaciones muestra la flexibilidad y el poder de las matemáticas, permitiendo que el lector vea el valor de cada tema en diferentes contextos. Al aumentar gradualmente la complejidad de los ejercicios, el ebook también ha dado espacio para un aprendizaje progresivo.

5. Relevancia en Finanzas, Economía y Ciencias Sociales

Cada ejercicio ha sido cuidadosamente diseñado para reflejar problemas comunes en finanzas, economía y ciencias sociales. Este enfoque interdisciplinario es valioso en la formación de lectores que no solo dominen las matemáticas, sino que también puedan aplicar estos conocimientos en disciplinas prácticas y en su vida personal, profesional o académica.

6. Preparación para Retos Académicos y Profesionales

Al incluir soluciones matemáticas detalladas y ejemplos prácticos con Python, el ebook prepara a los lectores para enfrentar problemas de alta relevancia tanto en el ámbito académico como en el profesional. La estructura consistente, que comienza con fundamentos y va avanzando hacia aplicaciones y problemas complejos, permite que los lectores desarrollen confianza en su comprensión y habilidad para aplicar estos conceptos.

Reflexión Final

Este ebook es una guía integral que conecta las matemáticas con su aplicación en la vida real, alentando a los lectores a ver los números y ecuaciones como herramientas vivas. Más allá de los cálculos, el conocimiento adquirido aquí ofrece un enfoque lógico y estructurado para resolver problemas, algo que puede aplicarse a múltiples áreas de la vida y el trabajo. La combinación de teoría, práctica y programación lo convierte en un recurso valioso para aquellos que desean profundizar en el uso de las matemáticas en contextos reales.

Este ebook es solo el comienzo de un camino en el cual las matemáticas se vuelven un aliado clave para resolver problemas, visualizar datos y tomar decisiones informadas. ¡Que este sea el primero de muchos pasos en una exploración continua del poder de las matemáticas en el mundo moderno!