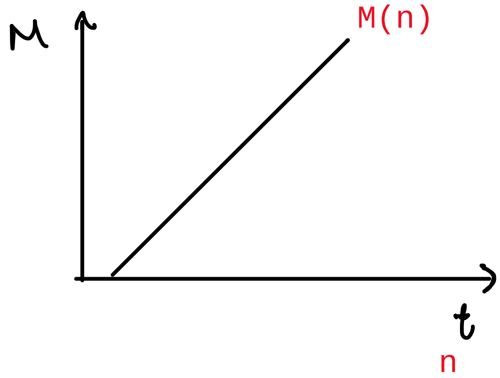
INTERÉS SIMPLE



Recordemos

$$\text{Intereses} = \text{Monto Acumulado} - \text{Capital}$$

$$= M - C$$

Reacomodando:

$M = C + I$ y dado que $I = C * i * n$

$$\Rightarrow M = C + C * i * n$$

$$\Rightarrow \underbrace{M = C(1 + i * n)}_{y = a + bx}$$

Fórmula del interés simple

INTERÉS COMPUESTO

Yo deposito \$400, me ofrecen un pago de interés anual compuesto del 10%

① $400 + 400(10\%) = 400(1 + 0.1) = 440$

Yo dejo este dinero por un año más con el mismo 10% anual

② $440 + 440(10\%) = 440(1 + 0.1) = 484$

$$\Rightarrow 400(1 + 0.1)(1 + 0.1)$$

$$= 400(1 + 0.1)^2$$

Con esta misma lógica, al final del tercer año,

③ $M_3 = 400(1 + 0.1)^3$

Generalizando

$$\boxed{M = C(1+i)^n} \rightarrow \boxed{\text{Interés Compuesto}}$$

Veamos esta otra situación:

Yo deposito \$ 50,000, me ofrecen 12% de interés anual compuesto por mes.

Si mi tasa anual es del 12%, entonces cada mes:

$$\frac{0.12}{12} = 0.01$$

Al final del primer mes

$$M_1 = 50{,}000\,(1 + 0.01) = 50{,}500$$

Al final del segundo mes

$$M_2 = 50{,}000\,(1 + 0.01)^2$$

Al final del tercer mes

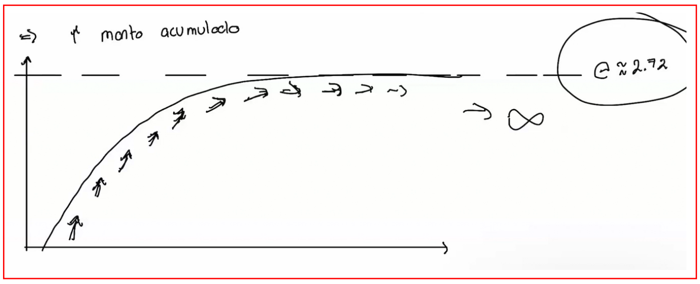
$$M_3 = 50{,}000\,(1 + 0.01)^3$$

¿Cuál será el monto al final de año y medio?

$$M_{18} = 50{,}000\,(1 + 0.01)^{18} = \underbrace{59{,}807.37}$$

¿Qué pasará si la frecuencia de capitalización es más corta?, por ejemplo, capitalización quincenal

¿El monto al cabo de año y medio será más grande o más pequeño?



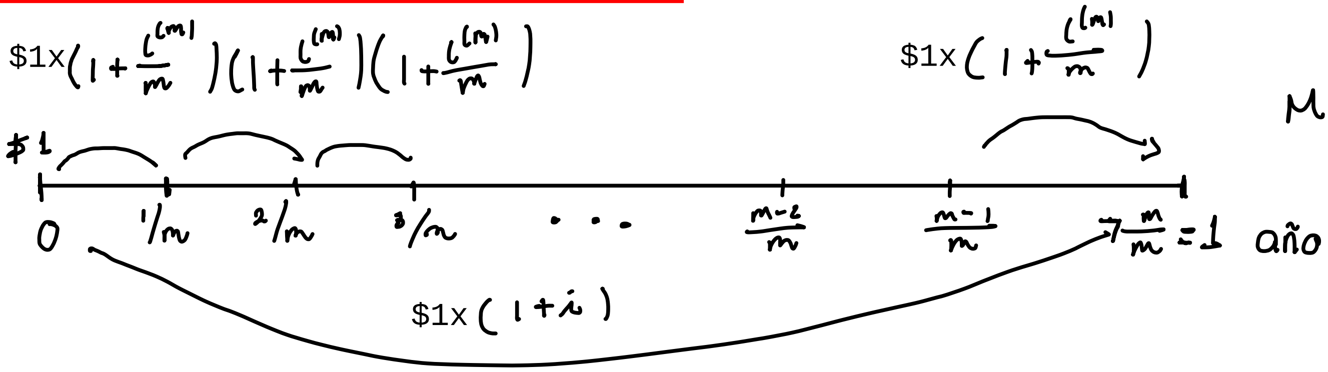
$$i = \frac{0.12}{24} = 0.005$$

$$M_{36} = 50{,}000 * (1.005)^{36} = 59{,}834.03$$

Respuesta: el monto seria mayor

TASA NOMINAL

o tasa efectiva de cada 1/m periodos



Si i es la tasa de interés compuesta anual

Si $i^{(m)}$ es la tasa nominal que capitaliza cada $1/m$ periodo

$$\boxed{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} = (1+i)}$$

Frecuencia unitaria

$$i^{(m)} = \left[(1+i)^{1/m} - 1\right] * m$$

↳ conversión de tasa

Conversion entre dos frecuencias:

Sean p, m frecuencias de conversión

$$\left(1+\frac{i^{(p)}}{p}\right)^{p} = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}$$

Tasa de Descuento

Descuento Simple:

C = M(1-d)
= M - D

D = M - C
(Descuento = Monto - Capital)

d = D / M
tasa de descuento d

C: Capital (PV)
M: Monto Acumulado (FV)
d: tasa de descuento
D: Descuento
n: numero de periodos

$$V = \frac{1}{1+i}$$

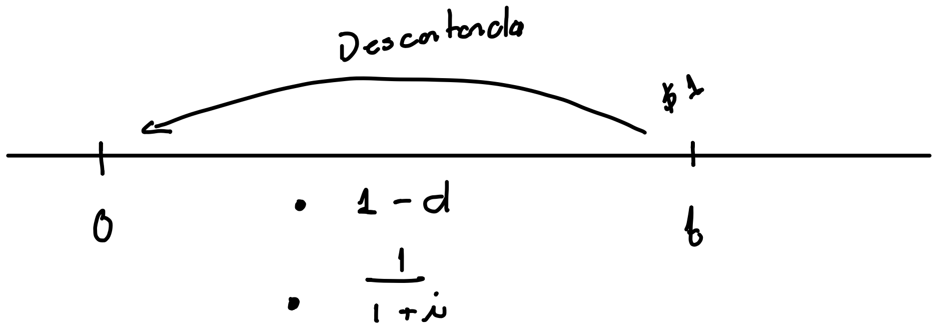
Descuento Compuesto:

$$C = M(1-d)^{n}$$

Nota:

expresar la tasa de interés en términos de la tasa de descuento

$$\boxed{i = \frac{d}{1-d}, \qquad d = \frac{i}{1+i}}$$

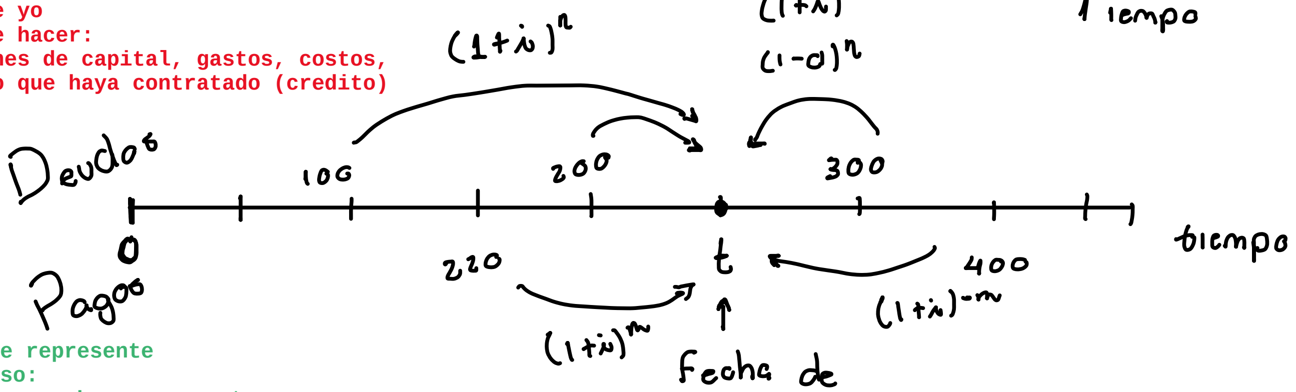


ECUACIÓN DE VALOR

factor de descuento

Diagrama de Tiempo

Pagos que yo tengo que hacer:
Inyecciones de capital, gastos, costos, un pasivo que haya contratado (credito)



Fecha de Valuación

Lo que me represente un ingreso:
Cuentas por cobrar, preventa flujo de dividendo, rendimiento de una unversion

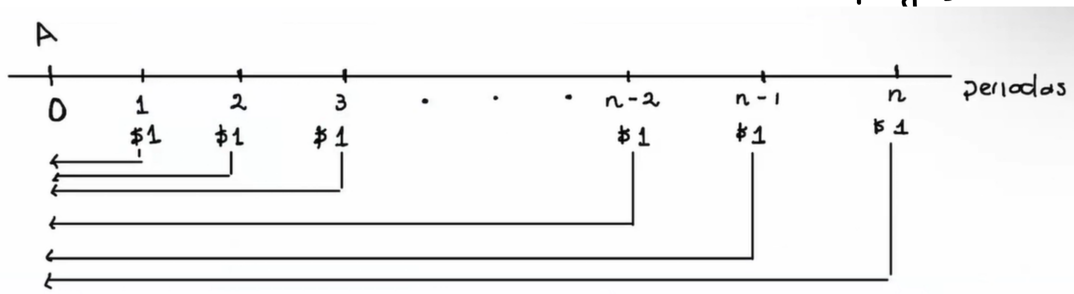
Aunque lo normal es evaular el proyecto en el tiempo t = 0

$$\sum \text{Deudos} = \sum \text{Pagos}$$

ANUALIDADES

Considere el caso en que una persona realiza pagos de \$1 al final de cada periodo durante n periodos.

Deseamos conocer el VP de dichos pagos



$\boxed{\text{Deuda} = A}$

$\text{Pago}_1 = \$1 * \left(\frac{1}{1+i}\right) = V$

$\text{Pago}_2 = V^2$

$\text{Pago}_3 = V^3$

$\vdots$

$\text{Pago}_n = V^n$

Nota:

$$\frac{1}{1+i} = V$$

$$\left(\frac{1}{1+i}\right)^n = V^n$$

Entonces,

$$A = v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1} + v^n \quad \dots \quad (1)$$

por otro lado,

$$vA = v^2 + v^3 + v^4 + \dots + v^n + v^{n+1} \quad \dots \quad (2)$$

restando (2) de (1)

$$A - vA = (v + v^2 + \dots + v^n) - (v^2 + v^3 + \dots + v^{n+1})$$

$$\Rightarrow (1-v)A = v - v^{n+1}$$

$$\Rightarrow A = \frac{v - v^{n+1}}{1-v} = \frac{\boxed{v}(1-v^n)}{\boxed{1-v}}$$

y como

$$\boxed{\frac{v}{1-v}} = \frac{\frac{1}{1+i}}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{\frac{1}{1+i}}{\frac{1+i-1}{1+i}} = \boxed{\frac{1}{i}}$$

entonces,

$$\boxed{a_{\overline{n}|i} = A = \frac{1-v^n}{i}}$$

si cada periodo se realizan pagos de cantidad R, entonces:

$$\boxed{VP = R * a_{\overline{n}|i}}$$

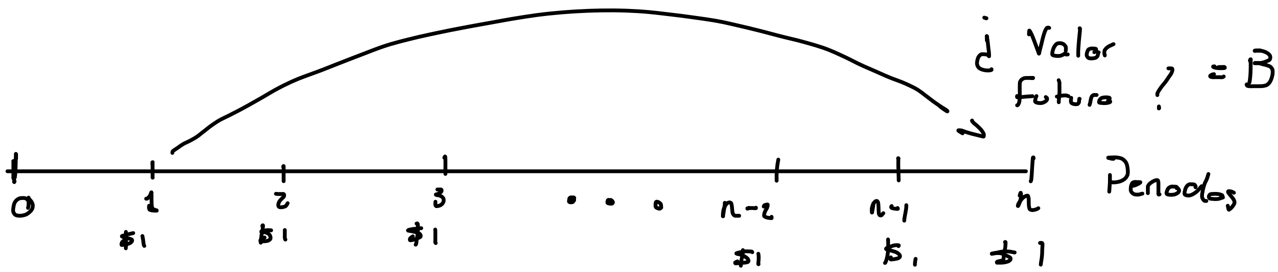
$$\boxed{VP = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

[Ejercicios 15, 16]

VALOR ACUMULADO

Considere el caso en que una persona decide ahorrar \$1 al final de cada periodo, durante n periodos.

¿Cuál es el valor acumulado de dichos pagos?



$$\text{Monto Acumulado} = B$$

$$\text{Pago}_1 = (1+i)^{n-1}$$

$$\text{Pago}_2 = (1+i)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\text{Pago}_{n-1} = (1+i)^1$$

$$\text{Pago}_n = \$1$$

Entonces,

$$B = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i) + 1 \quad \dots (1)$$

y también,

$$(1+i)B = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \dots + (1+i)^2 + (1+i) \quad \dots (2)$$

restando (2) de (1)

$$B - (1+i)B = \left[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + 1\right] - \left[(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \dots + (1+i)\right]$$

$$\Rightarrow -iB = 1 - (1+i)^n$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Notación Actuarial:

$$\boxed{s_{\overline{n|}i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

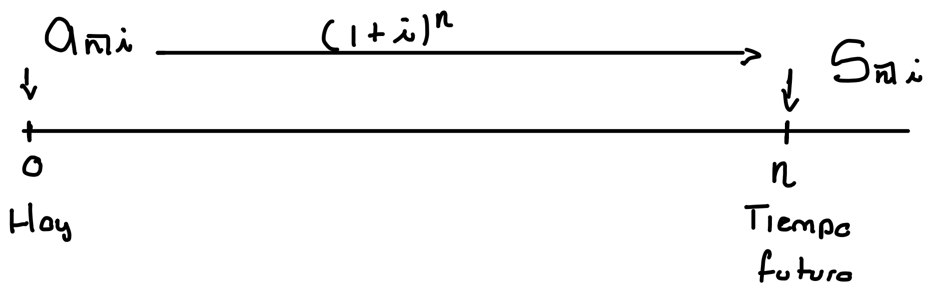
si los pagos son por un monto R :

$$\boxed{VF = R * s_{\overline{n|}i}}$$

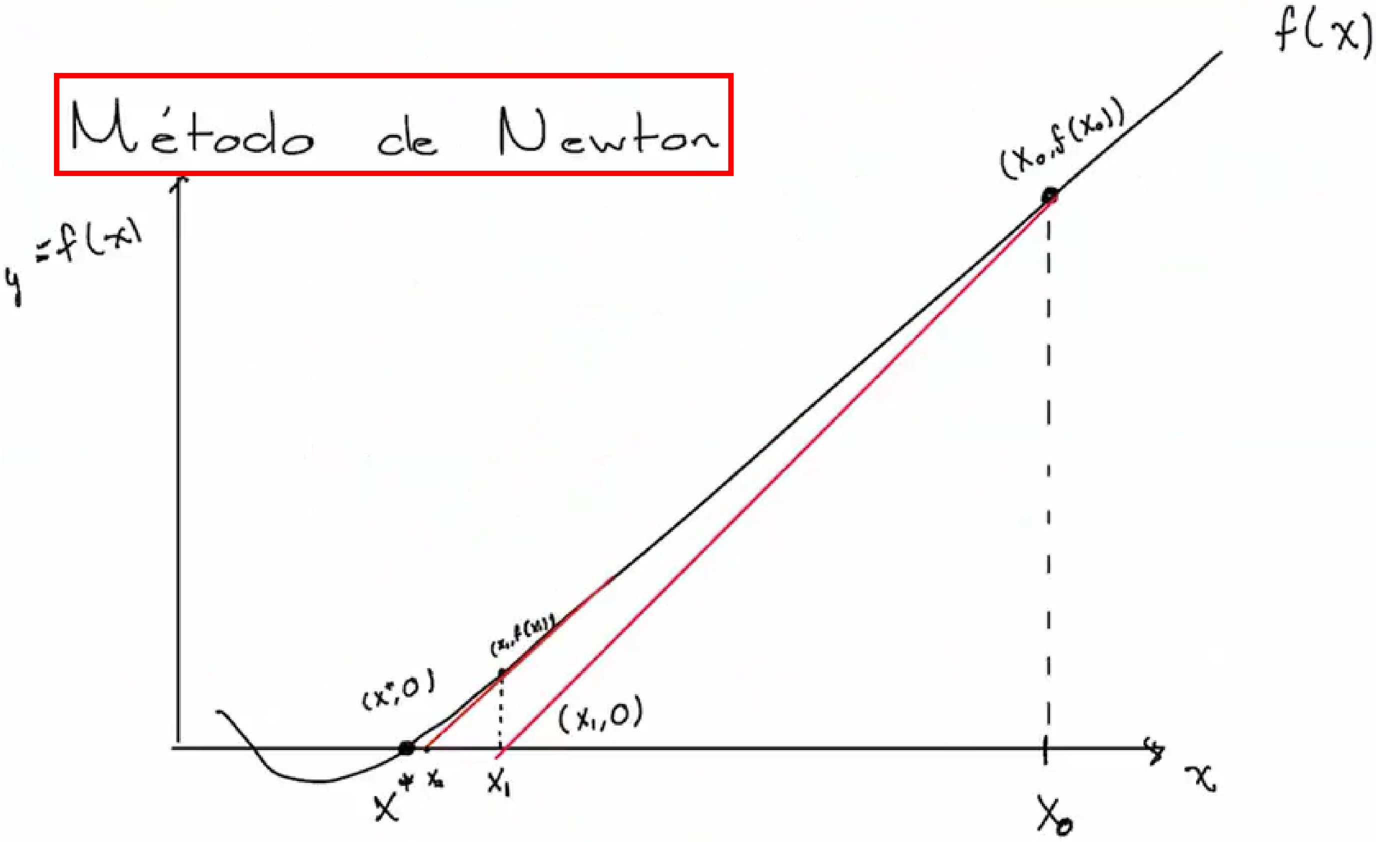
Nota:

Vamos a tener la siguiente igualdad:

$$\boxed{s_{\overline{n|}i} = (1+i)^n \, a_{\overline{n|}i}}$$



Método de Newton



$$f'(x_0) = m = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ecuación recta (punto tangente)

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$$\Rightarrow \quad x_1 - x_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 + \frac{0 - f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

de manera generalizada:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Método de Newton

¿Cómo aplicamos el Método para estimar la tasa de interés?

Sabemos que

$$VP = R * a_{\overline{n}|i}$$ donde VP es un valor conocido

entonces,

$$0 = R * a_{\overline{n}|i} - VP$$

definimos la siguiente función:

$$\boxed{f(i) = R * a_{\overline{n}|i} - VP = R\left(\frac{1-v^n}{i}\right) - VP} \quad (1)$$

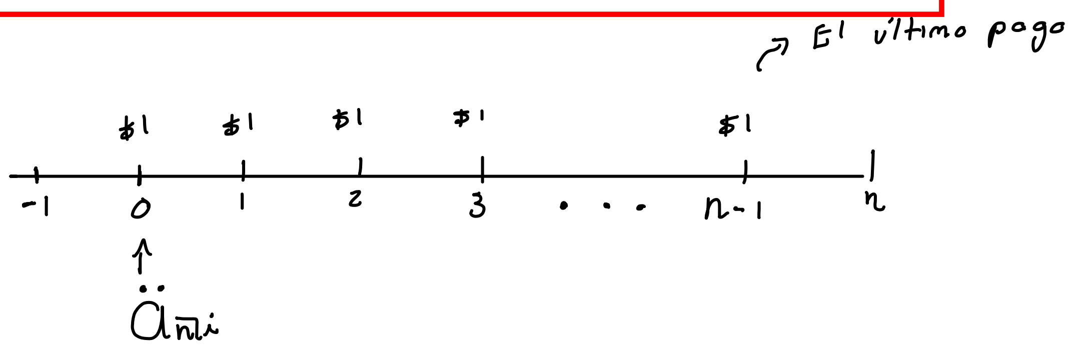
derivando se obtiene:

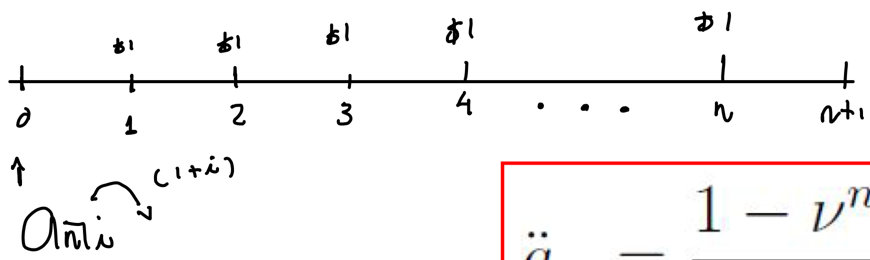
$$\boxed{f'(i) = \frac{R * i * n * (1+i)^{-n-1} + R(1+i)^{-n} - R}{i^2}} \quad (2)$$

entonces, puedo estimar i utilizando el Método de Newton

$$\boxed{i_{n+1} = i_n - \frac{f(i_n)}{f'(i_n)}} \quad \frac{(1)}{(2)}$$

ANUALIDADES ANTICIPADAS





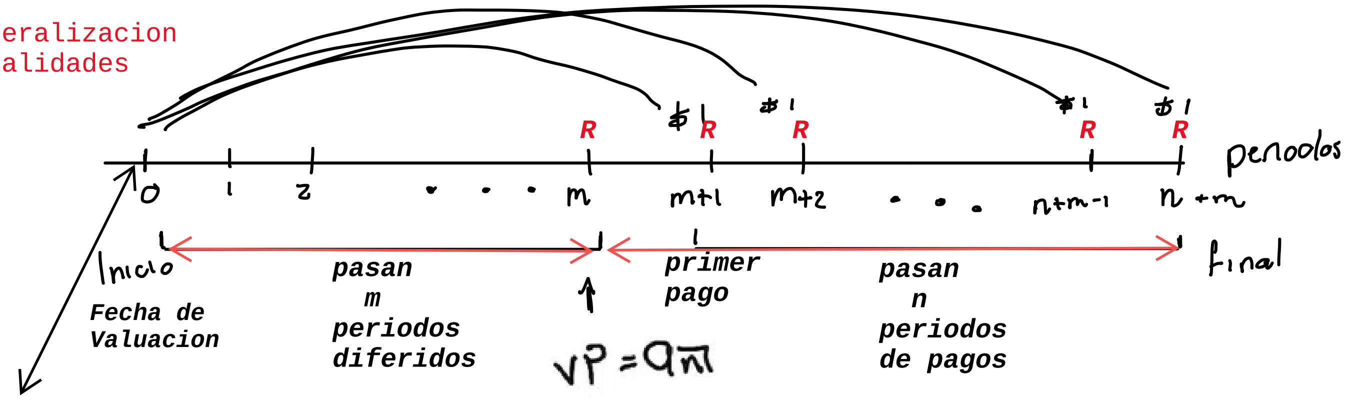
$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-\nu^n}{d}}$$

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)a_{\overline{n}|}}$$

ANUALIDADES DIFERIDAS

R: Rentas
V^m: factor de descuento

Es una generalizacion
de las Anualidades



$$\boxed{VP = V^m * R * a_{\overline{n|}}}$$

Se va a cumplir que:

Anualidad Diferida = Anualidades Vencidas

$$\boxed{V^m a_{\overline{n|}i} = a_{\overline{m+n|}i} - a_{\overline{m|}i}}$$

i: tasa de interes

$$\boxed{V = \frac{1}{(1+i)}}$$

descuento

Demostracion:

$$\boxed{a_{\overline{m+n|}i} - a_{\overline{m|}i}} = \frac{1-V^{m+n}}{i} - \frac{1-V^m}{i} = \frac{V^m - V^{m+n}}{i}$$

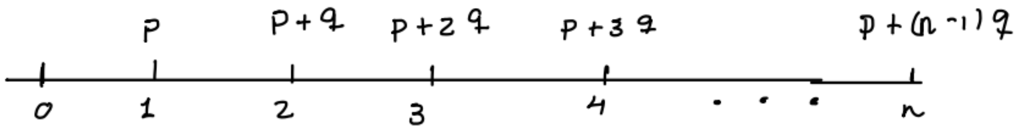
$$= V^m \frac{1-V^n}{i} = \boxed{V^m a_{\overline{n|}i}}$$

ANUALIDADES CRECIENTES

Progresion Aritmetica

- Los pagos NO son constantes
- Pago inicial **p**
- Crecimiento **constante** a razon **q** cada periodo
- q puede ser negativa; anualidad decreciente

Sean una serie de pagos de monto $\boxed{p}$ que incrementan cada periodo:



Va a crecer un monto $\boxed{q}$ cada periodo

q: factor de crecimiento

p: primer pago

$$\text{Valor Presente} = p * a_{\overline{n|}} + \frac{q}{i}\left[a_{\overline{n|}} - n v^n\right]$$

"anualidad de n pagos"

Nota:

$$\frac{1}{1+i} = v$$

$$\left(\frac{1}{1+i}\right)^n = v^n$$

Progresion Geometrica

- Los pagos NO son constantes
- Pago inicial **p**
- Crecimiento (no constante)a razon **d**, la cual es una tasa de crecimiento
- q puede ser negativa; anualidad decreciente

$$\text{Valor Presente} = \left(p + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n|}} - \frac{nd}{i} \, v^n$$

Anualidades Perpetuas

$$VP = \frac{R}{i}$$

ejemplo: seguro de vida con pagos hasta que la persona muera

$$\lim_{n \to \infty} R \, a_{\overline{n|}}$$

$$\lim_{n \to \infty} R\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(1+i)^n} \approx 0$$

Amortización gradual

$$\boxed{C = R\,\frac{1-\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}}{\frac{i}{p}}}$$

abono = intereses + amortización

donde:

C: la deuda original

R: abono periódico

i: tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año

np: el número de abonos

Amortización constante

La prime renta

$$\boxed{R_1 = A\left[1 + (np)\left(\frac{i}{p}\right)\right]}$$

La enésima renta

$$\boxed{R_N = R_1 - (N-1) * d}$$

d: diferencia entre dos rentas constantes

A: amortización constante

n: plazo en años

i: tasa interés capitalizable p periodos