Mercado de Derivados

Profesor. Jorge Luis Reyes García

Contacto.
jorgeluis.reyes@ciencias.unam.mx

Black-Scholes

El modelo Black-Scholes es una fórmula utilizada para valorar el precio de una opción financiera. Esta fórmula está basada en la teoría de los procesos estocásticos.

El modelo Black-Scholes le debe su nombre a los dos matemáticos que lo desarrollaron, Fisher Black y Myron Scholes. Black-Scholes se utilizó, en un principio, para valorar opciones que no repartían dividendos. O lo que es lo mismo, para intentar calcular cuál debería ser el precio 'justo' de una opción financiera. Más tarde, el cálculo se amplió para todo tipo de opciones. Este modelo recibió el premio Nobel de economía en 1997. De esta manera, se ha convertido en uno de los pilares fundamentales de la teoría financiera moderna. Muchos analistas utilizan este método para valorar cuál debería ser el precio adecuado de una opción financiera.

Supuestos del modelo Black-Scholes

Antes de adentrarnos en la fórmula y en el posterior cálculo, es preciso hacer unas consideraciones sobre el modelo. Unos supuestos de partida que el modelo tiene en cuenta y que enumeraremos a continuación:

- No hay costes de transacción o impuestos.
- La tasa de interés libre de riesgo es constante para todos los vencimientos.
- La acción no paga dividendos.
- La volatilidad se mantiene constante.
- Se permite la venta en corto.
- No hay oportunidades de arbitraje sin riesgo.
- Asume que la distribución de probabilidad de los retornos es una distribución normal.

Black-Scholes – Sin Pago de Dividendos

Fórmula Black-Scholes

La fórmula de valoración de opciones Black-Scholes se expresa como sigue:

- **C =** Precio de compra de la opción hoy
- **T =** periodo hasta vencimiento en años
- **r =** tasa de interés sin riesgo.
- **sigma** = volatilidad.
- **K =** Precio de ejercicio de la opción de compra
- **S =** Precio de la acción en T=0
- **N(d1 y d2) =** Valor de la función de probabilidad acumulada de una distribución normal con media cero y desviación típica uno.

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Black-Scholes – Pago de Dividendos

Fórmula Black-Scholes

La fórmula de valoración de opciones Black-Scholes se expresa como sigue:

- **C =** Precio de compra de la opción
- **T =** periodo hasta vencimiento en años
- **r =** tasa de interés sin riesgo.
- **q** = tasa de pago de dividendos
- **sigma** = volatilidad.
- **K =** Precio de ejercicio de la opción de compra
- **S =** Precio de la acción en T=0
- **N(d1 y d2) =** Valor de la función de probabilidad acumulada de una distribución normal con media cero y desviación típica uno.

$$c = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Black-Scholes – Divisas

Fórmula del Modelo Garman-Kohlhagen

La fórmula de valoración de opciones se expresa como sigue:

- **C =** Precio de compra de la opción
- **T =** periodo hasta vencimiento en años
- **rl =** Tasa de interés local
- **rf =** Tasa de interés foránea.
- **sigma** = volatilidad.
- **K =** Precio de ejercicio de la opción de compra
- **S =** Precio spot del Tipo de cambio en T=0
- **N(d1 y d2) =** Valor de la función de probabilidad acumulada de una distribución normal con media cero y desviación típica uno.

$$c = S_0 e^{-r_f T} N(d_1) - K e^{-r_l T} N(d_2)$$

$$p = K e^{-r_l T} N(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r_l - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r_l - r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Black-Scholes – Black 76

El modelo Black 76 es una variante del modelo de precios de opciones Black – Scholes. Sus aplicaciones principales son las opciones de precios en contratos futuros, opciones de bonos, topes y pisos de tasas de interés y permutas. Fue presentado por primera vez en un artículo escrito por Fischer Black en 1976.

La fórmula de valoración de opciones se expresa como sigue:

- **C =** Precio de compra de la opción
- **T =** periodo hasta vencimiento en años
- **r =** Tasa de interés
- **sigma =** volatilidad.
- **K =** Precio de ejercicio de la opción de compra
- **F0 =** Precio del Futuro a tiempo T=0
- **N(d1 y d2) =** Valor de la función de probabilidad acumulada de una distribución normal con media cero y desviación típica uno.

$$c = F_0 e^{-rT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - F_0 e^{-rT} N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Paridad Put-Call

La relación de paridad put-call es el resultado de comprar una opción call y vender una opción put, ambas con el mismo precio de ejercicio, es el mismo de comprar una acción al precio X.

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0$$

Lo cual permite deducir que:

- Si la opción está in the money, es decir S>X, el precio de la opción call será mayor al de la opción put: C>P;
- Si la opción está out of the money, S<X, el precio de la opción call será menor al de la opción put: C<P;

Paridad put-call con Pago de Dividendos

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 e^{-qT}$$

Paridad put-call para Divisas

$$c + Ke^{-r_l T} = p + S_0 e^{-r_f T}$$

Paridad put-call para Futuros

$$c + Ke^{-rT} = p + F_0 e^{-rT}$$

Jorge Luis Reyes García

Black-Scholes

Limitaciones del modelo Black-Scholes

A pesar de que el modelo Black-Scholes ofrece una solución brillante al problema de calcular un precio adecuado para un opción, tiene algunas limitaciones. Es un modelo, esto es, una adaptación de la realidad. Por lo que, como adaptación a la realidad, no la representa de forma perfecta. Black-Scholes calcula el precio para opciones que solo se pueden ejercer o liquidar a vencimiento.

Sin embargo, las opciones estadounidenses pueden ejercerse antes de vencimiento. Además, asume también que la acción no paga dividendos. Y, que tanto la tasa libre de riesgo como la volatilidad son constantes. Lo cual, tampoco es así en la realidad, ya que muchas acciones pagan dividendos. Por último, la volatilidad y las tasas libre de riesgo cambian a lo largo del tiempo, por lo que este supuesto tampoco es real.

Mercado de Derivados

Profesor. Jorge Luis Reyes García

Contacto.
jorgeluis.reyes@ciencias.unam.mx