Matemáticas Financieras

Con Python

Act. Rodrigo Cruz

AGENDA

01 Introducción a Python

02 TVOM y tasas de interés

03 Anualidades

04 Tablas de amortización

PONENTE

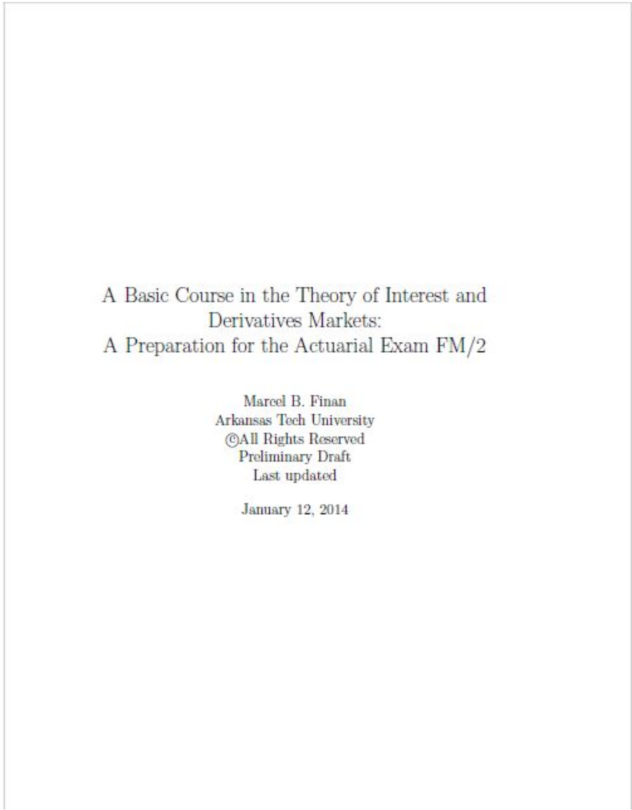
Act. Rodrigo Cruz

Egresado de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Advisor Actuary en HSBC México y cofundador de AxMéxico.

Con experiencia en el área de Seguros, desarrollando funciones enfocadas a la implementación de modelos actuariales para el cálculo y reporteo de reservas bajo la normativa IFRS17.

BIBLIOGRAFÍA

Finan, M. (2014). *"A Basic Course in the Theory of Interest and Derivatives Markets: A Preparation for the Actuarial Exam FM/2"*. Arkansas Tech University.



A Basic Course in the Theory of Interest and
Derivatives Markets:
A Preparation for the Actuarial Exam FM/2

Marcel B. Finan
Arkansas Tech University
©All Rights Reserved
Preliminary Draft
Last updated

January 12, 2014

INTRODUCCIÓN A PYTHON

¿QUÉ ES LA PROGRAMACIÓN?

Construir y proporcionar una serie de instrucciones a nuestra computadora para ejecutar un conjunto personalizado de acciones.

¿QUÉ ES PYTHON?

Es un lenguaje de programación orientada a objetos potente y fácil de aprender, es de software libre y abierto.

Es uno de los lenguajes de programación más populares en la actualidad.

¿POR QUÉ APRENDER PYTHON?

01

Gratuito y de código abierto

02

Fácil de aprender

03

Amplia oportunidad laboral

04

Python es versátil

05

Popular entre la comunidad

Fuente:
McKinsey

VARIABLES

Las variables son uno de los conceptos básicos de la programación. Éstas se utilizan para almacenar información, representan nuestra entrada de datos.

Podemos almacenar:

- Números
- Texto
- Booleanos

OPERACIONES ARITMÉTICAS

Con Python podemos realizar operaciones matemáticas por medio de operadores aritméticos.

+ -	Suma y resta
* /	Multiplicación y división
%	Residuo de una división
* *	Potencia de un número

ASIGNAR VALORES A VARIABLES

En Python, asignamos valores a las variables por medio del signo de igual "=".

Es importante comprender que en la programación, el signo de "=" representa una asignación de valor y no una comparación lógica o una ecuación.

INDEXAR ELEMENTOS

Podemos hacer extracciones de elementos de un objeto dentro del código. Para indexar el código y hacer una sustracción, usamos los corchetes o square brackets.

NOTA: Python comienza a contar elementos desde la posición 0, por lo que un objeto con 10 elementos tendrá su primer elemento en la posición 0 y su último elemento en la posición 9.

OPERADORES DE COMPARACIÓN

Con Python podemos realizar operaciones de comparación entre dos objetos, esta acción nos devolverá un valor de tipo Booleano.

= =	Es igual a
! =	Es diferente a
< , <=	Menor, menor que
> , >=	Mayor, mayor que

OPERADORES LÓGICOS

Los operadores lógicos en Python comparan declaraciones y devuelven un valor de True o False, estos también se conocen como operadores booleanos.

- NOT
- AND
- OR

NOTA: Python evaluará estos operadores en este orden.

OPERADORES DE IDENTIDAD

Son operadores que se utilizan para realizar una evaluación de identidad y funcionan de manera similar a los operadores al "==" y al "!=".

IS	Es igual a
IS NOT	Es diferente a

CONDICIONALES

Dentro de la programación, los condicionales le permite a nuestros códigos ejecutar una acción cuando se cumplen condiciones establecidas.

Condicional IF

```
if condition:
   conditional code
elif condition_2:
   condition code_2
else:
   else code
```

FUNCIONES

Una función es un conjunto de líneas de código (instrucciones) cuya finalidad es realizar una tarea específica y devolver un resultado.

```
def name_function(parameters):
        instrucciones
```

LISTAS

Una lista es una “secuencia” de datos ya sean números, cadenas de texto, etc.
Se definen por medio de corchetes []

TUPLES

Otro tipo de objeto que almacena una serie de valores (secuencia). A diferencia de las listas, las tuples no se pueden modificar, no se pueden eliminar ni agregar elementos. Se definen por medio de paréntesis ()

DICCIONARIOS

Son otra manera de almacenar data. Cada valor almacenado dentro del diccionario estará relacionado con una llave. Una llave y su valor forman una pareja “key-value”. Los diccionarios trabajan con llaves {}

ITERADORES (BUCLES)

Es un bloque de código fundamental en la programación, tiene la capacidad de ejecutar una instrucción de manera repetitiva. El iterador más conocido es el ciclo For.

Iterador FOR

```
for n in object:
      instructions
```

MÓDULOS (LIBRERIAS)

Un módulo en Python es un paquete o grupo de programas que fueron desarrollados por otros usuarios con fines específicos.

A día de hoy existen más de 90 mil módulos en Python, muchos de ellos dedicados al análisis financiero.

NUMPY

Librería especializada en cálculos numéricos y análisis de datos, especialmente en grandes cantidades de datos.

SCIPY

Librería especializada en algoritmos matemáticos para hacer optimización, interpolaciones, ecuaciones, estadística, etc.

MATPLOTLIB

Módulo para crear visualizaciones estáticas y animadas.

PANDAS

Quizá el módulo más importante para la manipulación de datos.
Librería especializada en el manejo y estructuración de datos

MÓDULOS RELACIONADOS CON FINANZAS

YFINANCE	Módulo para hacer extracción de activos de Yahoo! Fiance
pandas_datareader	Extrae data de Google, Yahoo! Finance,FRED
Numpy.lib.financial	Contiene algunas funciones para finanzas corporativas y administración financiera
Statsmodel	Permite construir modelos econométricos como las regresiones y series de tiempo

INTERÉS Y VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

¿QUÉ ES EL INTERÉS?

El interés es la compensación que un deudor de capital paga al prestamista de dicho capital para compensar la pérdida de uso del mismo durante el tiempo de la deuda.

CAPITAL

La cantidad inicial de dinero para ser invertida es llamada Capital

MONTO ACUMULADO

La cantidad recibida después de un periodo de tiempo a una tasa de interés es llamada Monto Acumulado

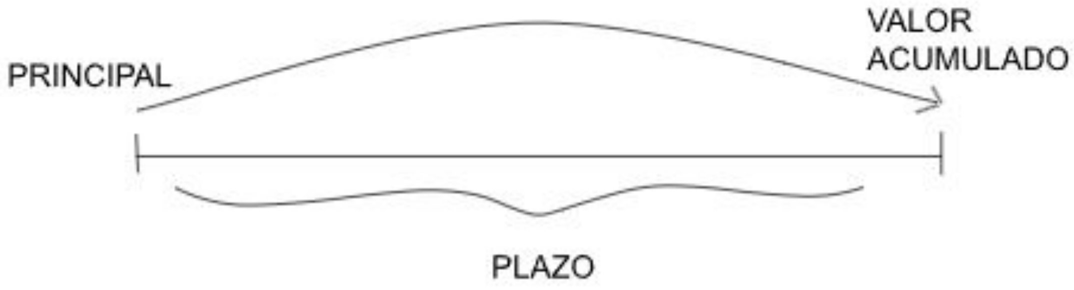
INTERÉS

La diferencia entre el Monto Acumulado y el principal es denominada interés.

$$INTERÉS = MONTO\ ACUMULADO - CAPITAL$$

PLAZO

La cantidad inicial de dinero para ser invertida es llamada Capital
El número de días (u otra unidad de tiempo) que transcurren entre las fechas inicial y final en una operación financiera se le conoce como plazo o tiempo



TASA DE INTERÉS

Una tasa de interés efectiva es la cantidad que una unidad invertida al principio del periodo generará durante el periodo cuando el interés es pagado al final del plazo.

La tasa de interés es la división del interés generado durante el periodo **(I)** entre la cantidad de dinero invertida al principio del periodo **(C)**

$$i = \frac{I}{C}$$

INTERÉS SIMPLE

El interés simple es aquel que genera una cantidad constante de interés cada periodo. En otras palabras, el interés simple es cuando solo el Principal gana intereses.

$$i = \frac{I}{C} \Rightarrow I = C * i$$

Los intereses que produce un capital C a una tasa de interés simple anual i durante n años están dados por:

$$I = C * i * n$$

FÓRMULA DEL INTERÉS SIMPLE

La fórmula para el valor acumulado M de un capital C que devenga intereses con la tasa de interés simple anual , i, al final de n periodos anuales es:

$$M = C(1 + i * n)$$

INTERÉS COMPUESTO

El interés compuesto es aquello que al final de cada periodo se capitaliza, es decir, se agrega al capital.

Esto significa que el capital va aumentando por la adición de los intereses vencidos al final de cada uno de los periodos de tiempo a que se refiere la tasa.

FÓRMULA DEL INTERÉS COMPUESTO

La fórmula para el valor acumulado M de un capital C que devenga intereses con la tasa de interés compuesta anual , i, al final de n periodos anuales es:

$$\boxed{M = C(1 + i)^n}$$

Tasa anual capitalizable
anualmente (1 vez al anio)

TASA NOMINAL

Cuando la tasa de interés i capitaliza más de una vez al año, la tasa recibe el nombre de tasa nominal y se denota como $i^{(p)}$

donde p es el número de partes en que se divide el año.

$\boxed{i^{(p)}}$ es la tasa de interés anual convertible cada $\frac{1}{p}$ de año.

$\boxed{\frac{i^{(p)}}{p}}$ es la tasa de interés efectiva de cada $\frac{1}{p}$ de año

Tendremos la siguiente relación de equivalencia:

$$\boxed{\left(1+\frac{i^{(p)}}{p}\right)^{p}=1+i}$$

TASA NOMINAL

La **tasa de interes** es la tasa de interés que sirve para conocer el valor de una cantidad C en el futuro denominada como M.
El Capital C es invertido hoy se paga en el futuro en p periodos.

La fórmula para el valor acumulado M de un capital C que devenga intereses con una tasa capitalizable cada p periodos durante n años es:

$$\boxed{M = C\left(1 + \frac{i^{(p)}}{p}\right)^{n*p}}$$

C: Capital (PV)
M: Monto Acumulado (FV)
i: tasa de interes
n: numero de anios
p: numero de periodos

donde:
n es el plazo en años
np es el número de periodos
i es a tasa de interés anual capitalizable cada p períodos

TASA DE DESCUENTO

Será la tasa que nos servirá para conocer hoy el valor de una cantidad que se recibirá o pagará en un futuro.

Se denota como d.

La fórmula del descuento compuesto es:

```
Descuento Compuesto
 PV = FV(1-d)^n
```

$$\boxed{C = M(1-d)^n}$$

```
C: Capital (PV)
M: Monto Acumulado (FV)
d: tasa de descuento
n: numero de periodos
```

La **tasa de descuento** es la tasa de interés que sirve para calcular el valor que tienen hoy una serie de ingresos que serán recibidos más adelante, es decir, nos permite conocer el valor presente del dinero. Los inversionistas utilizan este método para evaluar diferentes proyectos.

The **discount rate** is the interest rate used to calculate the present value of future cash flows from a project or investment. It makes it possible to estimate how much the project's future cash flows would be worth in the present.

Dos formas de calcular la tasa de descuento son:

- **WACC**
- **Adjusted Present Value (APV)**

NPV calculations typically use the weighted average cost of capital (**WACC**) as the discount rate.

APV, meanwhile, uses the cost of equity as the discount rate for the base case (all-equity) valuation and then separately accounts for debt effects.

WACC Formula and Calculation

WACC is found by determining the proportions of debt and equity financing that a company uses to determine the total cost of capital. The equation is:

$$\mathrm{WACC} = \left(\frac{E}{V} \times Re\right) + \left(\frac{D}{V} \times Rd \times (1 - Tc)\right)$$

where:

$E =$ Market value of the firm's equity
$D =$ Market value of the firm's debt
$V = E + D$
$Re =$ Cost of equity
$Rd =$ Cost of debt
$Tc =$ Corporate tax rate

(link)

How To Calculate Adjusted Present Value (APV)

$$\text{Adjusted Present Value} = \text{Unlevered Firm Value} + \text{NE}$$

where:

NE = Net effect of debt

(link)

ECUACIÓN DE VALOR

Consiste en dos series de flujos (obligaciones) vinculadas por un signo de igualdad y valuadas en una misma fecha que recibe el nombre de fecha de valuación.

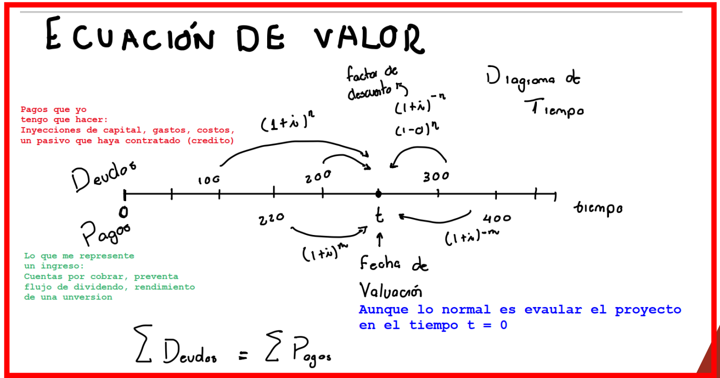
$$\boxed{\Sigma\, deudas = \Sigma\, pagos}$$

En una ecuación de valor, se desconocen uno o más pagos.

ECUACIÓN DE VALOR

Para plantear una ecuación de valor, se realiza el siguiente procedimiento:

(ver notas)



- Dibujar una línea de tiempo (diagrama)

- Completar la gráfica de tiempo y valor:
  - En la parte superior las deudas
  - En la parte inferior los pagos

- Calcular el valor de cada deuda y cada pago en la fecha de valuación dada

- Plantear la ecuación de valor $\Sigma\, deudas = \Sigma\, pagos$

VALOR PRESENTE

El valor presente de una cantidad M que se dará en un tiempo futuro, sea n, a una tasa de interés compuesta anual i esta dado por:

$$\boxed{VP = M * (1 + i)^{-n}}$$

En actuaria se define el **Factor de Descuento** como:

$$V^n = (1+i)^{-n} = 1/(1+i)^n$$

VALOR PRESENTE NETO

El valor presente Neto es una métrica financiera que busca capturar el valor total de una inversión o una operación financiera.

$$VPN = VP_{Beneficios} - VP_{costos}$$

Una observación sobre el VPN es que este está negativamente correlacionado con la tasa de interés.

VALOR PRESENTE NETO

La regla del Valor Presente Neto para una inversión o proyecto es la siguiente:

$$\begin{cases} \text{Si VPN} > 0 & \text{aceptar} \\ \text{Si VPN} < 0 & \text{rechazar} \end{cases}$$

TASA INTERNA DE RETORNO
(TIR)

La tasa interna de retorno es una métrica utilizada en el análisis financiero y se define como la tasa de interés con la cual el VPN de un proyecto es igual a cero.

Es Anualizada

Se utiliza para estimar la rentabilidad de una potencial inversión.

TASA INTERNA DE RETORNO

La regla para la TIR (sin costo de capital) será la siguiente:

(Sin costo de capital)

$$\begin{cases} \text{Si TIR} > 0 & \text{proyecto aceptable} \\ \text{Si TIR} < 0 & \text{proyecto se rechaza} \\ \text{Si TIR} = 0 & \text{indiferente} \end{cases}$$

Para proyectos que requieren financiamiento (costo de capital), sea este **k**:

Con costo de capital a una tasa **k**

$$\begin{cases} \text{Si TIR} > k & \text{proyecto aceptable} \\ \text{Si TIR} < k & \text{proyecto se rechaza} \\ \text{Si TIR} = k & \text{indiferente} \end{cases}$$

ANUALIDADES (Vencidas)

Una anualidad está definida como una serie de pagos realizados a intervalos de tiempos iguales descontados a una fecha de valuación.

$$\boxed{VP = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

R: Cantidad de Pago en cada periodo (en Valor Futuro)

VP: **Anualidad Cierta.** Es el Valor Presente de esa serie de pagos **R** por **n** anios a una tasa de interes ***i***

Notación actuarial:

$$\boxed{a_{\overline{n}|}}$$

Anualidad en **n** periodos

Nota: En actuaria existe la Anualidad Contingente que incluye la probabilidad de que una persona ya no pueda pagar.

[Ejercicios 15, 16]

VALOR ACUMULADO

El Valor Acumulado está definido como una serie de pagos realizados a intervalos de tiempos iguales llevados a un tiempo futuro.

$$\boxed{VF = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

[Ejercicio 17]

Notación Actuarial:

$$\boxed{s_{\overline{n|}i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

si los pagos son por un monto R :

$$VF = R * s_{\overline{n|}i}$$

Nota:

Vamos a tener la siguiente igualdad:

$$s_{\overline{n|}i} = (1+i)^n\, a_{\overline{n|}i}$$

$$a_{\overline{n|}i} \xrightarrow{(1+i)^n} s_{\overline{n|}i}$$

0 Hoy

n Tiempo futuro

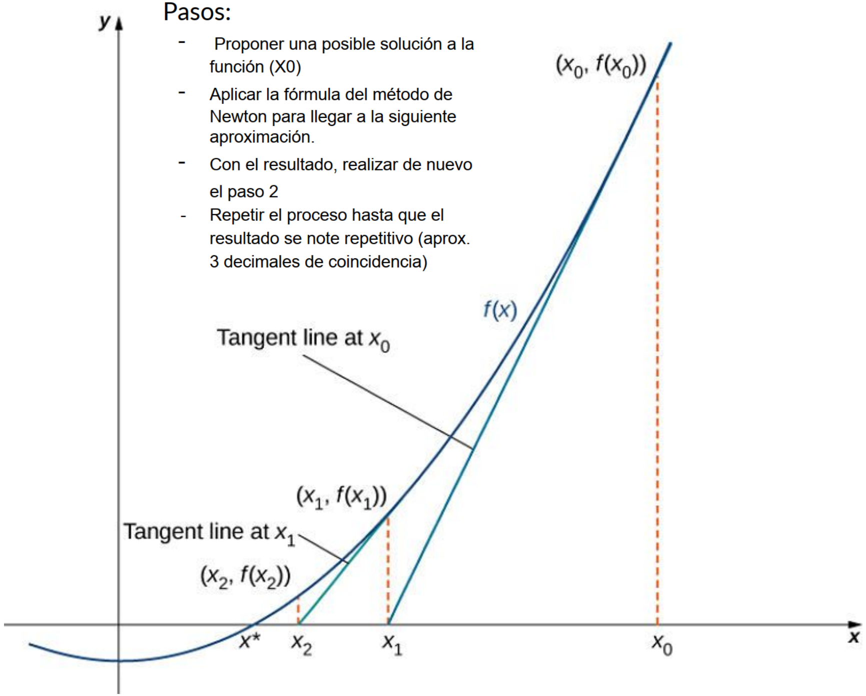
MÉTODO DE NEWTON

Para calcular tasas de interes i

Algoritmo con el cual se encuentran aproximaciones a raíces o "ceros" de funciones diferenciables y continuas basando su fórmula en un proceso iterativo.

Pasos:

- Proponer una posible solución a la función (X0)
- Aplicar la fórmula del método de Newton para llegar a la siguiente aproximación.
- Con el resultado, realizar de nuevo el paso 2
- Repetir el proceso hasta que el resultado se note repetitivo (aprox. 3 decimales de coincidencia)



Sabemos que

$VP = R * a_{\bar{n}|i}$ donde VP es un valor conocido

entonces,

$$0 = R * a_{\bar{n}|i} - VP$$

definimos la siguiente función:

$$\boxed{f(i) = R * a_{\bar{n}|i} - VP = R\left(\frac{1-v^n}{i}\right) - VP} \quad (1)$$

derivando se obtiene:

$$\boxed{f'(i) = \frac{R*i*n*(1+i)^{-n-1} + R(1+i)^{-n} - R}{i^2}} \quad (2)$$

entonces, puedo estimar i utilizando el Método de Newton

$$\boxed{i_{n+1} = i_n - \frac{f(i_n)}{f'(i_n)}} \quad \frac{(1)}{(2)}$$

ANUALIDADES ANTICIPADAS

Son un conjunto de pagos iguales a intervalos de tiempo iguales que se realizan al inicio del periodo.

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - \nu^n}{d}}$$

d: Tasa de Descuento.
En las Anualidades Vencidas era la tasa de interes ***i***

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1 + i)a_{\overline{n}|}}$$

[Ejercicio 18]

ANUALIDADES DIFERIDAS

Es una generalizacion de las Anualidades

Una anualidad está diferida si el primer pago se efectúa en el periodo m+1 después de la firma del convenio.

$$\boxed{VP = R * \nu^m a_{\overline{n}|}}$$

V-m es el factor de descuento durante m periodos que es el tiempo transcurrido hasta el primer pago

anualidad diferida

Se va a cumplir que:

$$\boxed{a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|} = \nu^m a_{\overline{n}|}}$$

Se puede calcular por medio de dos anualidades Vencidas

[Ejercicio 19]

$$\boxed{VP = V^m * R * a_{\overline{n}|}}$$

Se va a cumplir que:

Anualidad Diferida = Anualidades Vencidas

$$\boxed{V^m a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{m+n}|i} - a_{\overline{m}|i}}$$

i: tasa de interes

$$\boxed{V = \frac{1}{(1+i)}}$$

descuento

Demostracion:

$$\boxed{a_{\overline{m+n}|i} - a_{\overline{m}|i}} = \frac{1-V^{m+n}}{i} - \frac{1-V^m}{i} = \frac{V^m - V^{m+n}}{i}$$

$$= V^m \frac{1-V^n}{i} = \boxed{V^m a_{\overline{n}|i}}$$

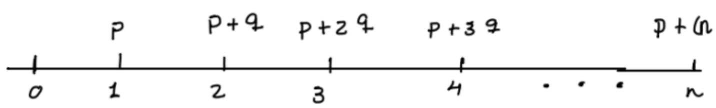
ANUALIDADES CRECIENTES

Progresion Aritmetica

Progresion Aritmetica

- Los pagos NO son constantes
- Pago inicial **p**
- Crecimiento **constante** a razon **q** cada periodo
- q puede ser negativa; anualidad decreciente

Sean una serie de pagos de monto $\boxed{p}$ que incrementan cada periodo:



va a crecer un monto $\boxed{q}$ cada periodo

p: primer pago

q: factor de crecimiento

$$\text{Valor Presente} = p \cdot a_{\overline{n}|} + \frac{q}{i}\left[a_{\overline{n}|} - n v^n\right]$$

"anualidad de n pagos"

Nota:

$$\frac{1}{1+i} = v$$

$$\left(\frac{1}{1+i}\right)^n = v^n$$

[Ejercicio 20]

Progresion Geometrica

Progresion Geometrica

- Los pagos NO son constantes
- Pago inicial **p**
- Crecimiento (no constante)a razon **d**, la cual es una tasa de crecimiento
- q puede ser negativa; anualidad decreciente

$$\text{Valor Presente} = \left(p + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}|} - \frac{nd}{i} v^n$$

Anualidades Perpetuas

Anualidades Perpetuas

$$VP = \frac{R}{i}$$

ejemplo: seguro de vida con pagos hasta que la persona muera

$$\lim_{n \to \infty} R\, a_{\overline{n}|}$$

$$\lim_{n \to \infty} R\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(1+i)^n} \approx 0$$

AMORTIZACIÓN DE UN CRÉDITO

Amortizar una deuda es liquidarla mediante pagos periódicos que incluyen intereses.

El capital que se debe al hacer un pago cualquiera se conoce como **capital vivo de la deuda, deuda viva o saldo insoluto**.

$$\boxed{Abono = Amortización + Intereses}$$

AMORTIZACION GRADUAL (Frances)

Es una aplicación de una anualidad vencida.

Ejemplo: hipotecas y otros creditos.

Los pagos en este sistema **son todos iguales** y puesto que el saldo insoluto disminuye con cada abono, los intereses se reducen y **la amortización se incrementa (el pago a capital aumenta)**.

Si no pago, el saldo va a ir creciendo porque se van generando intereses.

La Amortizacion se denomina gradual, la mayor parte de los pagos al inicio sirve para pagar intereses, posteriormente se invierte, la mayor parte del pago servira para pagar la deuda.

Los pagos que yo de deben ser mayores que el pago de los intereses del primer periodo, de lo contrario no podria ir bajando la deuda porque habria un remanente de intereses que incremen-taria nuevamente a la misma.

Amortización gradual

$$\boxed{C = R \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{-np}}{\frac{i}{p}}}$$

abono = intereses + amortización

donde:

C: la deuda original

R: abono periódico

i: tasa de interés anual capitalizable en p periodos por año

np: el número de abonos

[Ejercicios 21 y Ejercicio 22 Excel: Amortizacion.xlsx (hoja 1) Sesion_6_Sistemas_de_amortización.ipynb]

AMORTIZACION CONSTANTE (Aleman)

En este sistema, la proporción que se **abona a capital** (la **amortización**) es siempre la misma o **constante**, lo cual da paso a que **cada pago sea menor** que el anterior.

Amortización constante

La primer renta

$$\boxed{R_1 = A\left[1 + (np)\left(\frac{i}{p}\right)\right]}$$

La enésima renta

$$\boxed{R_N = R_1 - (N-1) * d}$$

d: diferencia entre dos rentas constantes

A: amortización constante

n: plazo en años

i: tasa interés capitalizable p periodos

d es tal cual la diferencia entre dos rentas consecutivas (ver el Excel)

[Ejercicio 23 Excel: Amortizacion.xlsx (hoja 2) Sesion_6_Sistemas_de_amortización.ipynb]

Sistema de AMORTIZACION AMERICANO

En este sistema **<u>se paga al final el capital.</u>**

Los conceptos de amortización vienen en cero.

Los pagos parciales fueron puros intereses.

Al final doy un pago por el monto total del capital.