Mercado de Derivados

Profesor. Jorge Luis Reyes García

Contacto.
jorgeluis.reyes@ciencias.unam.mx

Arboles binomiales

Existen diversos métodos para la valuación del precio de una opción, pero existe un modelo que fue desarrollada por Cox, Ross y Rubinstein en el año de 1979. Siendo una técnica más comprensible e ilustrativa, ya que visualmente es plasmada en arboles binomiales e intuitiva para la valuación. El método binomial es un modelo discreto, cuyo valor puede converger con el resultado de Black-Scholes si se agregan la cantidad suficiente de ramificaciones para su aproximación (más de 30).

Supuestos del modelo

El principal supuesto financiero de estos modelos es la neutralidad al riesgo, esto es, que no consideran el riesgo relativo de los instrumentos. Esto implica que el valor esperado del rendimiento de las acciones, activo subyacente, es igual a la tasa de interés libre de riesgo.

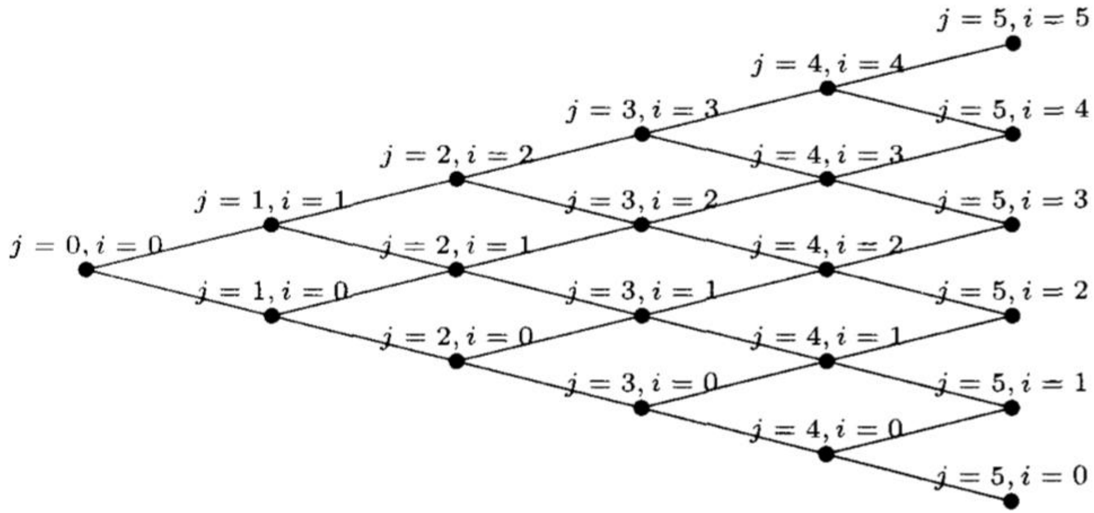
Entre los supuestos matemáticos debemos considerar que la evolución del precio de las acciones responden a un proceso de Markov, esto es, que siguen procesos estocásticos donde el valor presente del activo es la única variable relevante para predecir su comportamiento futuro. Algunos autores describen el comportamiento de la variabilidad del rendimiento de las acciones comparándola con el comportamiento de un derrame de fluidos. Estos supuestos nos permiten llegar a la conclusión de que la varianza del rendimiento de una acción es proporcional al tiempo de análisis y que su desvío estándar es proporcional a la raíz cuadrada de la variación proporcional del tiempo.

Otro supuesto importante es el comportamiento del rendimiento de las acciones es lognormal, lo que significa un comportamiento normal de los logaritmos naturales de las variables.

Arboles binomiales

El precio de los activos en un árbol binomial puede incrementarse para un tiempo Δt en un monto fijo u con una probabilidad p o disminuir en un monto fijo d con una probabilidad 1 - p. El número de pasos de tiempo es n.

El número de pasos de tiempo a un nodo en el árbol lo definimos como j. El número de veces que el precio del activo ha subido para llegar a un nodo lo definiremos como i (paso de precio). Se asignará el primer nodo en el árbol (j = 0, i = 0). Si el precio del activo sube en el segundo nodo, se le asignará (j = 1, i = 1). Si el precio del activo bajó en el primer paso, tenemos (j = 1, i = 0), esto se ilustra mejor en una figura:



Arboles binomiales

El numero de caminos que conduce al nodo (j,i) es

$$\frac{j!}{i!\,(j-i)!}$$

Y la probabilidad correspondiente de alcanzar el nodo (j,i) es

$$\frac{j!}{i!\,(j-i)!}p^{i}(1-p)^{j-i}$$

Para poner precio a las opciones de compra o venta europeas, solo nos preocupan los nodos finales, n, y el modelo binomial se puede expresar como

$$c = e^{-rT}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!\,(n-i)!}p^{i}(1-p)^{n-i}\max\left[Su^{i}d^{n-i}-K,0\right]$$

$$p = e^{-rT}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!\,(n-i)!}p^{i}(1-p)^{n-i}\max\left[K-Su^{i}d^{n-i},0\right]$$

Arboles binomiales

Los factores de salto hacia arriba y hacia abajo y las probabilidades correspondientes se eligen para que coincidan con los dos primeros momentos de la distribución del precio de las acciones (media y varianza). Sin embargo, hay más incógnitas que ecuaciones en este conjunto de restricciones, lo que implica que hay muchas formas de elegir los parámetros y aún así satisfacer las restricciones de momento.

Cox, Ross y Rubinstein (1979) (CRR) establecieron los parámetros arriba y abajo en:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad\qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Donde Δt=T/n es la duración de cada paso de tiempo (tiempo entre movimientos de precios) y n es el número de pasos de tiempo. La probabilidad de que el precio de las acciones aumente en el siguiente paso es :

```
Esperanza de Martin Gala de un proceso markov
```

$$S_0 = e^{-rt}[pS_u + (1-p)S_d]$$

$$\cancel{S_0} = e^{-rt}[p\cancel{S_0}u + (1-p)\cancel{S_0}d]$$

$$1 = e^{-rt}[pu + d - dp]$$

$$e^{rt} - d = p(u-d)$$

$$p = \frac{e^{rt} - d}{u-d}$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

P: Risk Neutral Probability

$$P_u = p$$
$$P_d = 1-p$$

Pu: Probability Up
Pd: Probability Down

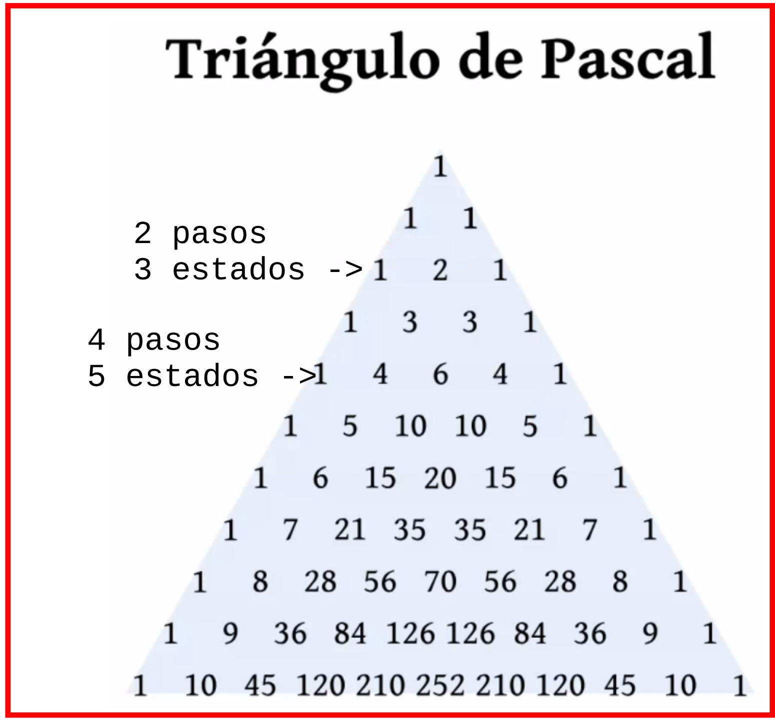
Arboles binomiales

El caso mas generalizado de un modelo binomial europeo se muestra dado

$$c = e^{-rT}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!\,(\,n-i\,)!}p^{i}(1-p)^{n-i}g[S(T),K]$$

$$p = e^{-rT}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!\,(\,n-i\,)!}p^{i}(1-p)^{n-i}g[S(T),K]$$

Donde S(T) = $Su^{i}d^{n-i}$ y g[S(T), X] es cualquier función de payoff dada al vencimiento.



Mercado de Derivados

Profesor. Jorge Luis Reyes García

Contacto.
jorgeluis.reyes@ciencias.unam.mx