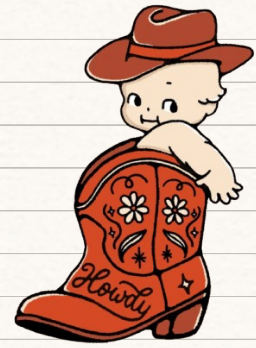
AxM
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

29 - septiembre - 2025



The number of tornadoes in a given year has the following probability mass function,

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!},$$

with $\lambda = 3$, for $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbb{E}(N) = \lambda$
$Var(N) = \lambda$

La clase pasada probamos que

Calculate the variance of the number of tornadoes in a given year that at least one tornado occurs.

solución:

$$Var(N \mid N \geq 1) = Var(N \mid N > 0) = \mathbb{E}(N^2 \mid N > 0) - \mathbb{E}(N \mid N > 0)^2$$

$Var(x) = \mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(x)^2$

$\rightarrow \mathbb{E}(x^2) = Var(x) + \mathbb{E}(x)^2$

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(N \mid N > 0)\, \mathbb{P}(N > 0) + \cancel{\mathbb{E}(N \mid N = 0)}^{\,0}\, \mathbb{P}(N = 0)$$

$$\rightarrow \mathbb{E}(N \mid N > 0) = \frac{\mathbb{E}(N)}{\mathbb{P}(N > 0)} = \frac{3}{1 - \mathbb{P}(N = 0)} = \frac{3}{1 - \frac{3^0 e^{-3}}{0!}}$$

$$\rightarrow \mathbb{E}(N \mid N > 0) = \frac{3}{1 - e^{-3}} \approx 3.1571$$

$$\mathbb{E}(N^2) = \mathbb{E}(N^2 \mid N > 0)\, \mathbb{P}(N > 0) + \cancel{\mathbb{E}(N^2 \mid N = 0)}^{\,0}\, \mathbb{P}(N = 0)$$

$$\rightarrow \mathbb{E}(N^2 \mid N > 0) = \frac{\mathbb{E}(N^2)}{\mathbb{P}(N > 0)} = \frac{3 + 3^2}{1 - e^{-3}} = \frac{12}{1 - e^{-3}}$$

$$\rightarrow \mathbb{E}(N^2 \mid N > 0) \approx 12.6287$$

$$\boxed{Var(N \mid N > 0) = 12.6287 - (3.1571)^2 = 2.66}$$

2.8 Percentiles, mediana y moda

Dada una v.a. X, si $0 < p < 1$ entonces el $100\%\cdot p$ percentil (**100 p-th percentile**) de la distribución de X será el número c_p que cumpla

$$\mathbb{P}(X \leq c_p) \geq p \quad \& \quad \mathbb{P}(X \geq c_p) \geq 1-p$$

NOTAS:

*) Para v.a. continuas bastará que c_p cumpla

$$\mathbb{P}(X \leq c_p) = p$$

*) El término general es cuantil (**quantile**) pero usamos éste para valores de p expresados entre $(0,1)$.

*) A los cuantiles cuyo valor es $p = 0.25$, 0.50 o 0.75 se les llamará cuartiles (**quartiles**):

$Q_1 = C_{0.25}$
$Q_2 = C_{0.5}$
$Q_3 = C_{0.75}$

*) Al segundo cuartil se le conoce como la mediana (**median**) de la distribución.

*) Si X tiene una distribución simétrica en un punto x_1 entonces la media (μ) y la mediana ($C_{0.50}$) serán iguales a x_1.

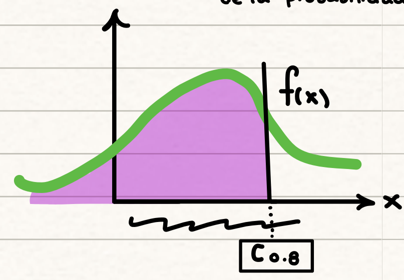
*) Los percentiles pueden no ser únicos.

La moda (**mode**) de una distribución será el punto m en el que la probabilidad o la función de densidad se maximiza.

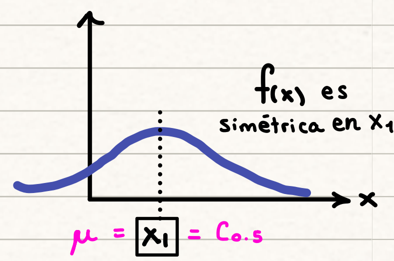
Para v.a. DISCRETAS, evaluamos los valores posibles de X e identificamos el más alto.

Para v.a. CONTINUAS, usamos el criterio de la 2^{da} derivada.

Objetivo: barrer el 80% de la probabilidad



¡Este es el punto en el que se logra!



X es una v.a. continua con DISTRIBUCIÓN SIMÉTRICA alrededor del punto $x = c$ si y sólo si
$$f(c+t) = f(c-t) \quad \forall\, t > 0$$

— o —

Criterio de la 2^{da} derivada

Dada f una función (2 veces derivable) aplicamos estos pasos para hallar el valor en el que se maximiza:

1. Calcular $f'(x)$
2. $f'(x) = 0$ y despejar a x.
   Estos serán los puntos críticos de f.
3. Calcular $f''(x)$ y verificar que las evaluaciones en los puntos críticos sean negativas.

An insurer's annual weather-related loss, X, is a random variable with density function

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2.5(200)^{2.5}}{x^{3.5}}, & x > 200 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Calculate the difference between the 30th and 70th percentiles of X.

solución:

$$\mathbb{P}(X \leq C_{0.3}) = 0.3 = F_X(C_{0.3})$$

$$F_X(C_{0.3}) = \int_{200}^{C_{0.3}} f_X(x)\,dx = \int_{200}^{C_{0.3}} \frac{2.5(200)^{2.5}}{x^{3.5}}\,dx = 2.5(200)^{2.5}\int_{200}^{C_{0.3}} x^{-3.5}\,dx$$

$$= (\cancel{2.5})(200)^{2.5}\, \frac{x^{-2.5}}{\cancel{-2.5}}\Bigg|_{200}^{C_{0.3}} = (200)^{2.5} \cdot x^{-2.5}\Big|_{C_{0.3}}^{200}$$

$$= (200)^{2.5}\left[(200)^{-2.5} - (C_{0.3})^{-2.5}\right] = 1 - (200)^{2.5}(C_{0.3})^{-2.5}$$

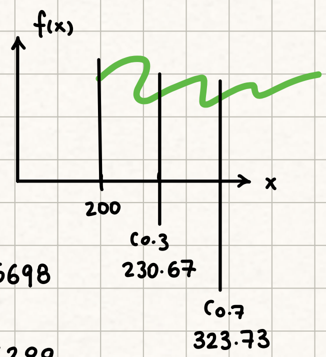
$$\rightarrow \quad 1 - (200)^{2.5}(C_{0.3})^{-2.5} = 0.3$$

$$\rightarrow \quad (200)^{2.5}(C_{0.3})^{-2.5} = (1-0.3)$$

$$\rightarrow \quad (C_{0.3})^{-2.5} = (1-0.3)(200)^{-2.5}$$

$$\rightarrow \quad C_{0.3} = \left[(1-0.3)(200)^{-2.5}\right]^{-\frac{1}{2.5}} = 230.6698$$

$$\rightarrow \quad C_{0.7} = \left[(1-0.7)(200)^{-2.5}\right]^{-\frac{1}{2.5}} = 323.7289$$



$$\boxed{|C_{0.7} - C_{0.3}| = C_{0.7} - C_{0.3} = 323.7289 - 230.6698 = 93.0590}$$

A random variable X has

$$f(x) = \beta e^{-\beta x}$$

for $x > 0$, with 40^{th} percentile equal to $4\ln\left(\frac{5}{3}\right)$.

Calculate the median of X.

percentil 50%

(A) $5\ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 2.55$

(B) $4\ln(2) \approx 2.7725$

(C) $5\ln\left(\frac{25}{12}\right)$

(D) ~~4~~

(E) ~~5~~

Percentil 40%

$$\mathbb{P}(X \leq 4\ln(5/3)) = 40\%$$

$$F_X(4\ln(5/3)) = 0.4$$

solución:

$u = -\beta x$

$du = -\beta dx \rightarrow -du = \beta dx$

si $x = 0 \rightarrow u = 0$

si $x = x_0 \rightarrow u = -\beta x_0$

$$F_X(x_0) = \mathbb{P}(X \leq x_0) = \int_0^{x_0} f_X(x)\,dx = \int_0^{x_0} \beta e^{-\beta x}\,dx$$

$$= -\int_0^{-\beta x_0} e^u\,du = \int_{-\beta x_0}^{0} e^u\,du = e^u \Big|_{-\beta x_0}^{0}$$

$$= 1 - e^{-\beta x_0}$$

$$0.4 = F_X(4\ln(5/3)) = 1 - e^{-\beta(4\ln(5/3))}$$

$$\rightarrow \cancel{e}^{\cancel{\ln}[(5/3)^{-4\beta}]} = 1 - 0.4 \rightarrow (5/3)^{-4\beta} = 0.6$$

$$\rightarrow -4\beta\ln(5/3) = \ln(0.6) \rightarrow \beta = \frac{\ln(0.6)}{-4\ln(5/3)} = 0.25 = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow f_X(x) = \frac{1}{4}e^{-x/4} \quad \text{para } x > 0$$

$$0.5 = F_X(C_{0.5}) = 1 - e^{-\frac{1}{4}C_{0.5}} \rightarrow e^{-C_{0.5}/4} = 1 - 0.5$$

$$\rightarrow e^{-C_{0.5}/4} = 0.5 \rightarrow \ln(e^{-C_{0.5}/4}) = \ln(0.5)$$

$$\rightarrow C_{0.5} = -4\ln(0.5) = -4\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -4\ln(2^{-1}) = -4(-1)\ln(2)$$

$$\rightarrow \boxed{C_{0.5} = 4\ln(2) \ \text{(B)}}$$

ĀxM
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

The loss amount, X, for a medical insurance policy has the following cumulative distribution function:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{9}\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right), & 0 \le x \le 3 \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Calculate the mode of the distribution.

solución:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{9}\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right] \quad \text{si } 0 \le x < 3$$

$$= \frac{1}{9}\left(4x - \frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}x^2\right)$$

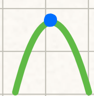
$$= \frac{1}{9}(4x - x^2)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(4x - x^2) & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{9}(4x - x^2)\right) = \frac{1}{9}(4 - 2x)$$

$f'(x) = 0 \to \frac{1}{9}(4 - 2x) = 0 \to 2x = 4 \to \boxed{x = 2}$ Punto crítico de f

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{9}(4 - 2x)\right) = \frac{1}{9}(-2) = -\frac{2}{9} < 0$$



$\to x = 2$ es un máximo

$\boxed{\text{Moda de } X \text{ está en } x = 2}$

The annual number of accidents for a driver is modeled by the following probability mass function

$$P(Z = z) = \frac{2.5^z e^{-2.5}}{z!},$$

for $z \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Calculate the mode of the annual number of accidents

solución:

$$y = \frac{2.5^x e^{-2.5}}{x!}$$

$\mathbb{P}(Z=0) = 0.082084$ — $\mathbb{P}(Z=0) < \mathbb{P}(Z=1)$

$\mathbb{P}(Z=1) = 0.205212$ — $\mathbb{P}(Z=1) < \mathbb{P}(Z=2)$ ← $\boxed{\text{La moda está } z = 2}$

$\mathbb{P}(Z=2) = 0.256515$ — $\mathbb{P}(Z=2) > \mathbb{P}(Z=3)$

$\mathbb{P}(Z=3) = 0.213776$

TRUQUITO :)

table

Definimos a la función en términos de x

[y =] n/d → $2.5^x \times e^{-2.5}$

→ x prob → 3

factorial

Start = 0, Step = 1, Auto, ok

enter, ↓ ó enter, ↓ ó enter, ↓ ó enter, enter

Para salir del modo table

2nd mode (quit)

Para limpiar la tabla usamos

on + clear , clear

Al mismo tiempo

2.9 Distribuciones discretas

Una variable aleatoria discreta es aquella que sólo puede tomar valores de un conjunto contable. Para modelar situaciones en las que el componente aleatorio se describe mediante este tipo de variable, utilizamos distribuciones discretas (**discrete distributions**), cada una con su propia fórmula y aplicación. Conocer estas distribuciones nos permite entender, modelar y predecir mejor diversos fenómenos reales.

Uniforme discreta (**discrete uniform**)

en los enteros de 1 a N

Si $X \sim \text{Unif}\{1, 2, \dots, N\}$ entonces

*) X modela un valor elegido al azar entre los valores $\{1, \dots, N\}$ donde todos tienen la misma proba de ocurrir.

*) $$\boxed{\mathbb{P}[X = x] = \begin{cases} 1/N & \text{si} \quad x \in \{1, 2, \dots, N\} \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}}$$

*) $$\mathbb{E}[X] = \frac{N+1}{2}$$

*) $$\text{Var}[X] = \frac{N^2 - 1}{12}$$

The number of days required for a damage control team to locate and repair a leak in the hull of a ship is modeled by a discrete random variable, N. N is uniformly distributed on $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

casco

The cost of locating and repairing a leak is $N^2 + N + 1$.

Calculate the expected cost of locating and repairing a leak in the hull of the ship.

solución:

N = 5

$N \sim \text{Unif}\{1,2,3,4,5\}$

$\mathbb{E}(N) = \frac{5+1}{2} = 3$

$\mathbb{E}(N^2) = \frac{5^2-1}{12} + 3^2 = 11$

$\mathbb{E}(N^2 + N + 1) = \mathbb{E}(N^2) + \mathbb{E}(N) + 1$

$= 11 + 3 + 1 = 15$

$$\boxed{\mathbb{E}(N^2 + N + 1) = 15}$$

$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$\rightarrow \mathbb{E}(X^2) = \text{Var}(X) + \mathbb{E}(X)^2$

Binomial (binomial)

con parámetros $n \geq 1$ y $0 \leq p \leq 1$

Si $X \sim \text{Bin}(n, p)$ entonces

*) X cuenta el número de éxitos con proba p en n repeticiones independientes de un exp.

*) $$\mathbb{P}[X = x] = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

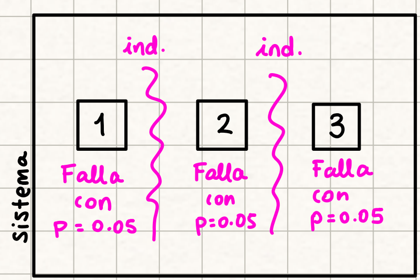
*) $\mathbb{E}[X] = np$

*) $\text{Var}[X] = np(1-p)$

An electronic system contains three cooling components that operate independently. The probability of each component's failure is 0.05. The system will overheat if and only if at least two components fail.

Calculate the probability that the system will overheat.

solución:



Sea X la v.a. que cuenta el número de componentes que fallan entre los tres que conforman el sistema.

$P_{fallo} = 0.05 = 5\% \rightarrow X \sim \text{Bin}(n=3, p=0.05)$ → 0, 1, 2, 3

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3)$$

$$= \binom{3}{2}(.05)^2(.95) + \binom{3}{3}(0.05)^3(0.95)^0$$

$$= 3(0.05)^2(0.95) + (0.05)^3 = 0.00725$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq 2) = 0.725\%}$$

A life insurance company has found there is a 3% probability that a randomly selected application contains an error. Assume applications are mutually independent in this respect.

An auditor randomly selects 100 applications.

Calculate the probability that 95% or less of the selected applications are error-free.

solución:

95% de las solicitudes → 95% (100) = 95 solicitudes

95 sin errores → 5 con errores
94 sin error → 6 con errores
93 s.e. → 7 con errores
⋮ ⋮

Sea X la v.a. que cuenta el número de solicitudes CON error.

$X \sim Bin(n=100, p=3\%)$

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X < 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4)$$

0 1 2 3 4

$$= 1 - [\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4)]$$

$$= 1 - [\binom{100}{0}(.03)^0(.97)^{100} + \binom{100}{1}(.03)^1(0.97)^{99} + \binom{100}{2}(.03)^2(.97)^{98} + \binom{100}{3}(.03)^3(.97)^{97} + \binom{100}{4}(.03)^4(.97)^{96}]$$

$$= 1 - 0.81785481 = 0.182145194$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq 5) = 18.2145\%}$$

Otra solución propone a la v.a. Y tal que ésta cuente el número de solicitudes SIN error.

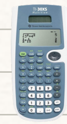
$Y \sim Bin(n=100, p=(1-0.03))$

$$\mathbb{P}(Y \leq 95) = 1 - \mathbb{P}(Y > 95) = 1 - \mathbb{P}(Y \geq 96)$$

96 97 98 99 100

$$= 1 - [\mathbb{P}(Y=96) + \mathbb{P}(Y=97) + \mathbb{P}(Y=98) + \mathbb{P}(Y=99) + \mathbb{P}(Y=100)]$$

Los valores marcados en amarillo son los que habría que ingresar en data L1. Verificar que se llega a 18.21% !



TRUQUITO :)

data

[L1]

0
1
2
3
4

data → L2 ⋮ data

→ FORMULA 1 ó enter

combinaciones

(100 prob → 2 L1) × (.03^L1) × (.97^(100−L1))

enter

stat

2nd data 1-Var Stats enter

Data : L2 ↓ ó enter
FRQ : ONE ↓ ó enter

↓ 4 veces hasta Σx

Para salir del modo data

quit

2nd mode

Para recuperar las estadísticas obtenidas para realizar cálculos

stat

2nd data 3-Var Stats enter

↓ 4 veces hasta Σx enter

Para limpiar la tabla usamos

on + clear , clear

Al mismo tiempo