COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

17 - septiembre - 2025

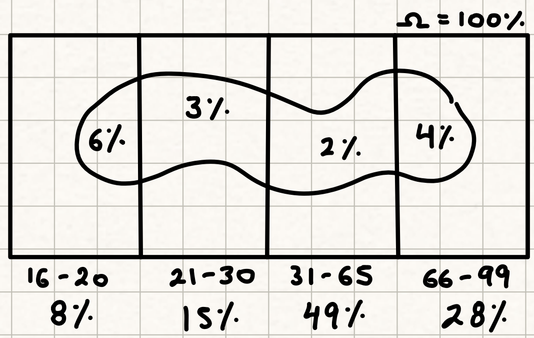
An auto insurance company insures drivers of all ages. An actuary compiled the following statistics on the company's insured drivers:

Age of Driver	Probability of Accident	Portion of Company's Insured Drivers
16-20	0.06	0.08
21-30	0.03	0.15
31-65	0.02	0.49
66-99	0.04	0.28

A randomly selected driver that the company insures has an accident.

Calculate the probability that the driver was age 16-20.

solución:



Sea A el evento en el que un conductor seleccionado al azar tiene un accidente.

¿ $\mathbb{P}(16\text{-}20 \mid A)$?

$$\mathbb{P}(16\text{-}20 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(16\text{-}20 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid 16\text{-}20)\,\mathbb{P}(16\text{-}20)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(16\text{-}20)\,\mathbb{P}(A \mid 16\text{-}20) + \mathbb{P}(21\text{-}30)\,\mathbb{P}(A \mid 21\text{-}30) \\
&\quad + \mathbb{P}(31\text{-}65)\,\mathbb{P}(A \mid 31\text{-}65) + \mathbb{P}(66\text{-}99)\,\mathbb{P}(A \mid 66\text{-}99) \\
&= (.08)(.06) + (.15)(.03) + (.49)(.02) + (.28)(.04) \\
&= 0.0303
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\mathbb{P}(16\text{-}20 \mid A) = \frac{(.06)(.08)}{(.0303)} = 0.1584}$$

ĀxM
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

1.4 Eventos independientes

Si sabemos que dos eventos no guardan ninguna relación entonces condicionar la probabilidad de uno a la ocurrencia de otro no hace ningún cambio:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \quad \& \quad \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

$$\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \quad \& \quad \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$$

Así, si dos eventos A y B cumplen que $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$ diremos que se trata de eventos independientes (**independent**) o estocásticamente independientes (**stochastically independent**) o estadísticamente independientes (**statiscally independent**).

si $A \perp B$ ent.
$A' \perp B$ y
$A \perp B'$ y
$A' \perp B'$!!!

<u>NOTA</u>: Independencia no implica mutuamente excluyentes, ni viceversa. Por ejemplo,

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $A = \{2\}$ $B = \{1,3,5\}$ $C = \{1,2\}$

Tenemos que $A\cap B = \emptyset$ pero $\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{12}$

por lo que $\mathbb{P}(A\cap B) = 0 \neq \frac{1}{12} = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$, i.e.,

A y B son mutuamente excluyentes pero NO independientes.

Por otro lado, $B\cap C = \{1\} \Rightarrow \mathbb{P}(B\cap C) = \frac{1}{6}$

y $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{2}{6}$ $\Rightarrow \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

Así, concluimos que B y C son independientes

pero NO son mutuamente excluyentes.

A, B, C serán eventos MUTUAMENTE INDEPENDIENTES si y sólo si

*) $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$
*) $\mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C)$
*) $\mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)$
*) $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

Si no tenemos información acerca de si hay o no independencia entonces usamos la regla del producto (**multiplication rule**)

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)$$

AxM
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

An insurance company pays hospital claims. The number of claims that include emergency room or operating room charges is 85% of the total number of claims. The number of claims that do not include emergency room charges is 25% of the total number of claims. The occurrence of emergency room charges is independent of the occurrence of operating room charges on hospital claims.

Calculate the probability that a claim submitted to the insurance company includes operating room charges.

(A) 0.10
(B) 0.20
(C) 0.25
(D) 0.40
(E) 0.80

solución:

$$85\% = 0.85 = \frac{n(E \cup O)}{n(\Omega)} = \mathbb{P}(E \cup O)$$

$$\mathbb{P}(E \cup O) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(O) - \mathbb{P}(E \cap O)$$

$$25\% = 0.25 = \frac{n(E')}{n(\Omega)} = \mathbb{P}(E') = 1 - \mathbb{P}(E)$$

$$\rightarrow \quad 0.25 = 1 - \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E) = 1 - 0.25 = 0.75$$

Si $E \perp O$ entonces $\mathbb{P}(E \cap O) = \mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(O)$

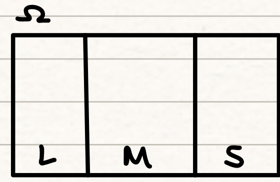
$$\rightarrow \quad 0.85 = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(O) - \mathbb{P}(E \cap O)$$

$$= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(O) - \mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(O)$$

$$\rightarrow 0.85 - \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(O)\,[1 - \mathbb{P}(E)]$$

$$\rightarrow \quad \mathbb{P}(O) = \frac{0.85 - \mathbb{P}(E)}{1 - \mathbb{P}(E)} = \frac{0.85 - 0.75}{1 - 0.75} = \frac{0.1}{0.25}$$

$$\rightarrow \boxed{\mathbb{P}(O) = 0.4}$$



Workplace accidents are categorized in three groups: minor, moderate and severe. The probability that a given accident is minor is 0.5, that it is moderate is 0.4 and that it is severe is 0.1. Two accidents occur independently in one month. Calculate the probability that neither accident is severe and that at most one is moderate.

$\Omega = \{L, M, S\}$

solución:

$\mathbb{P}(\text{leve}) = 0.5$

$\mathbb{P}(\text{moderado}) = 0.4$

$\mathbb{P}(\text{severo}) = 0.1$

L L ~~L L~~

L M M L

Sea R el evento en el que ningún accidente es severo y a lo más, uno es moderado.

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(L \cap L) + \mathbb{P}(M \cap L) + \mathbb{P}(L \cap M)$$

$$\mathbb{P}(L \cap L) = \mathbb{P}(L) \cdot \mathbb{P}(L) = (0.5)^2 = 0.25$$

$$\mathbb{P}(L \cap M) = \mathbb{P}(L) \cdot \mathbb{P}(M) = (0.5)(0.4) = 0.2$$

$$\mathbb{P}(M \cap L) = \mathbb{P}(M) \cdot \mathbb{P}(L) = (0.4)(0.5) = 0.2$$

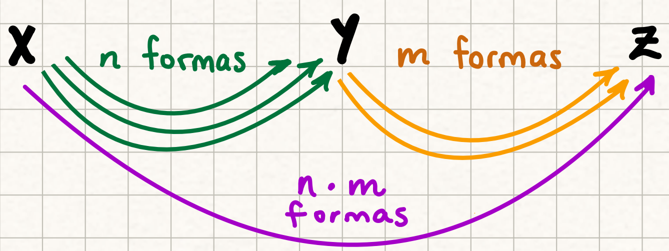
$$\boxed{\mathbb{P}(R) = 0.25 + 2(0.2) = 0.65 = 65\%}$$

1.5 Combinatoria / técnicas de conteo

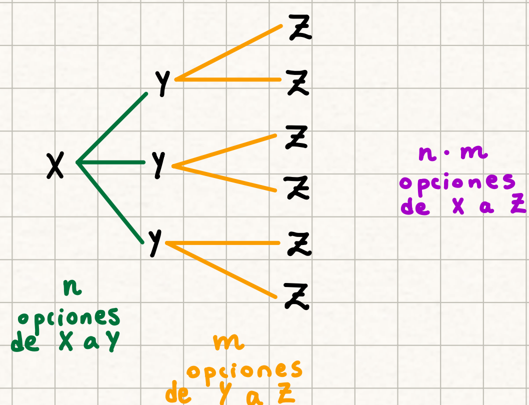
El entendimiento y uso de algunas fórmulas nos ayudará a la hora de contar qué tantos elementos componen a un conjunto, para luego calcular su probabilidad de ocurrencia.

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO (principio del producto)

Si existen n caminos para llegar de X a Y y por cada uno de esos caminos hay m maneras de llegar de Y a Z, entonces en total hay n · m formas de ir de X a Z.

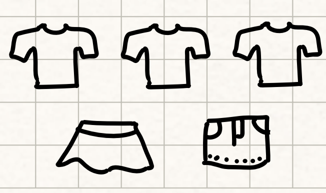


Podemos visualizar este planteamiento con ayuda de un diagrama de árbol (**tree diagram**).



ejemplo:

Si tengo 3 playeras y 2 faldas en mi armario, ¿cuántos outfits puedo armar?



$\boxed{\text{Existen } 3 \times 2 = 6 \text{ opciones distintas de outfit.}}$

AxM
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

PERMUTACIONES

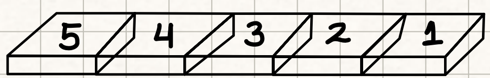
Dados n objetos distintos, el número de maneras distintas en las que podemos ordenarlos (o permutarlos) es

$$n!$$

NOTA: estamos organizando n cosas en n lugares, por lo que nada queda excluído del arreglo.

ejemplo:

Tengo 5 libros y quiero acomodarlos en un librero que tiene exactamente 5 espacios.
¿De cuántas maneras puedo ordenarlos?



$\rightarrow \; 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$

$\boxed{\text{Hay } 5! \text{ maneras.}}$

In a certain area, telephone numbers are 7 digits long and all start with 8, and then 6. The third digit can be 4, 5 or 6. Each of the last four digits can be any number from 0 to 9. There are 18,243 telephone numbers assigned in the area.

Calculate the number of telephone numbers that are still unassigned.

solución:

Dígitos	8	6	4, 5, 6	0, 1, ..., 9	0, 1, ..., 9	0, 1, ..., 9	0, 1, ..., 9
Posición	1	2	3	4	5	6	7
Opciones	↓ 1	↓ 1	↓ 3	$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\downarrow\ 10 \text{ c/u}}$			

Total de números de teléfono a formar: $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 3 \cdot 10^4 = 30,000$

$30,000 - 18,243 = 11,757$

$\boxed{\text{Restan } 11,757 \text{ números por asignar.}}$

Si no todos los n objetos son distintos y hay n_1 de tipo 1, n_2 de tipo 2, ..., n_r de tipo r donde los elementos son idénticos a los de su tipo, tales que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ entonces el número de maneras de ordenarlos es

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!} = \binom{n}{n_1\ n_2 \ldots n_r}$$

ejemplo:

Queremos saber de cuántas formas se pueden acomodar 10 libros en un estante con 10 espacios si:

- •) 3 ejemplares son P y E de Ross
- •) 5 ejemplares son I.P. de Rincón
- •) 2 ejemplares son I.E. de Casella

$$\frac{10!}{3!\,5!\,2!} = \frac{\cancel{10}^{5\cdot\cancel{2}}\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot \cancel{5!}\cdot \cancel{2}} = \frac{5\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1} = \boxed{2{,}520}$$

TRUQUITO :)

$\frac{n}{d}$, 10, prob, 3, ⇩

3, prob, 3,

5, prob, 3,

2, prob, 3, enter

ORDENACIONES SIN REPETICIÓN

Dados n objetos distintos, el número de maneras en las que podemos elegir arreglos ordenados de tamaño K sin repetir elementos es

$$\frac{n!}{(n-K)!} = {}_nP_K = P_{n,K} = P(n,K)$$

NOTA: $K \leq n$

ejemplo:

Si tenemos 6 candidatos para una vacante de becario y podemos aceptar 2 en el año, uno en el 1er semestre y el otro en el 2do sem, ¿cuántas opciones tenemos para seleccionar a los candidatos?

$\underset{1°}{\underline{6}}\ \underset{2°}{\underline{5}}\ \Big|\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}$

$$\frac{6!}{4!} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = \boxed{30}$$

TRUQUITO :)

6, prob, 1, 2, enter

A x M
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

ORDENACIONES CON REPETICIÓN

Dados n objetos distintos, el número de maneras en las que podemos elegir arreglos ordenados de tamaño K repitiendo elementos es

$$n^K$$

NOTA: es posible que $K > n$.

ejemplo:

Un cliente puede tener 3 calificaciones crediticias en el mes: A (buena), B (regular) y C (mala). Si analizamos la trayectoria del cliente por 6 meses, ¿cuántas posibles trayectorias encontraremos?

$$\underset{M1}{\underline{3}} \cdot \underset{M2}{\underline{3}} \cdot \underset{M3}{\underline{3}} \cdot \underset{M4}{\underline{3}} \cdot \underset{M5}{\underline{3}} \cdot \underset{M6}{\underline{3}} = 3^6 = \boxed{729 \text{ trayec.}}$$

COMBINACIONES

Si tenemos un conjunto de n elementos, el número de subconjuntos distintos de tamaño K que podemos armar es

$$\binom{n}{K} = \frac{n!}{(n-K)!\,K!} = {}_nC_K = C_{n,K} = C(n,K)$$

$0! = 1$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{K} = \binom{n}{n-K}$$

ejemplo:

Hay 8 candidatos aplicando a una vacante de becario pero sólo podemos aceptar a dos, ¿cuántas posibles alternativas hay para seleccionar a los becarios?

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{(8-2)!\,2!} = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{\overset{\cancel{2}\cdot 4}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot \cancel{2}} = 4\cdot 7 = \boxed{28}$$

TRUQUITO :)

8, prob, 2, 2, enter

AxM
COMUNIDAD DE ESTUDIANTES

An urn contains n white marbles numbered 1 through n, n black marbles numbered 1 through n, n red marbles numbered 1 through n. If two marbles are to be drawn at random without replacement, what is the probability that both marbles will be of the same color or bear the same number?

solución:

Sean C el evento en el que 2 canicas tienen el mismo color y N el evento en el que 2 canicas tengan el mismo núm.

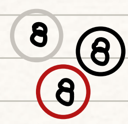
$$\mathbb{P}(C \cup N) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(N) - \cancel{\mathbb{P}(C \cap N)}^{*}$$

* Observamos que $C \cap N = \emptyset \rightarrow \mathbb{P}(C \cap N) = 0$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{\overset{B}{\binom{n}{2}} + \overset{N}{\binom{n}{2}} + \overset{R}{\binom{n}{2}}}{\binom{3n}{2}} = \frac{3\binom{n}{2}}{\binom{3n}{2}}$$

$$= \frac{3 \cdot \dfrac{n!}{(n-2)!\,2!}}{\dfrac{(3n)!}{(3n-2)!\,2!}} = \frac{3 \cdot n! \cdot (3n-2)! \cdot \cancel{2!}}{(3n)!\,(n-2)!\,\cancel{2!}}$$

$$= \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{n}(n-1)\cancel{(n-2)!}\,\cancel{(3n-2)!}}{\cancel{(3n)}(3n-1)\cancel{(3n-2)!}\,\cancel{(n-2)!}} = \frac{n-1}{3n-1}$$



$$\mathbb{P}(N) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{3}{2}}{\binom{3n}{2}} = \frac{n \cdot \cancel{\binom{3}{2}}^{3}}{\binom{3n}{2}}$$

$$= \frac{3n}{\dfrac{(3n)!}{(3n-2)!\,2!}} = \frac{3n \cdot (3n-2)! \cdot 2!}{(3n)!}$$

$$= \frac{\cancel{(3n)}\,\cancel{(3n-2)!} \cdot 2!}{\cancel{(3n)}\,(3n-1)\,\cancel{(3n-2)!}} = \frac{2}{(3n-1)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C \cup N) = \frac{n-1}{3n-1} + \frac{2}{3n-1} = \frac{n+1}{3n-1}}$$