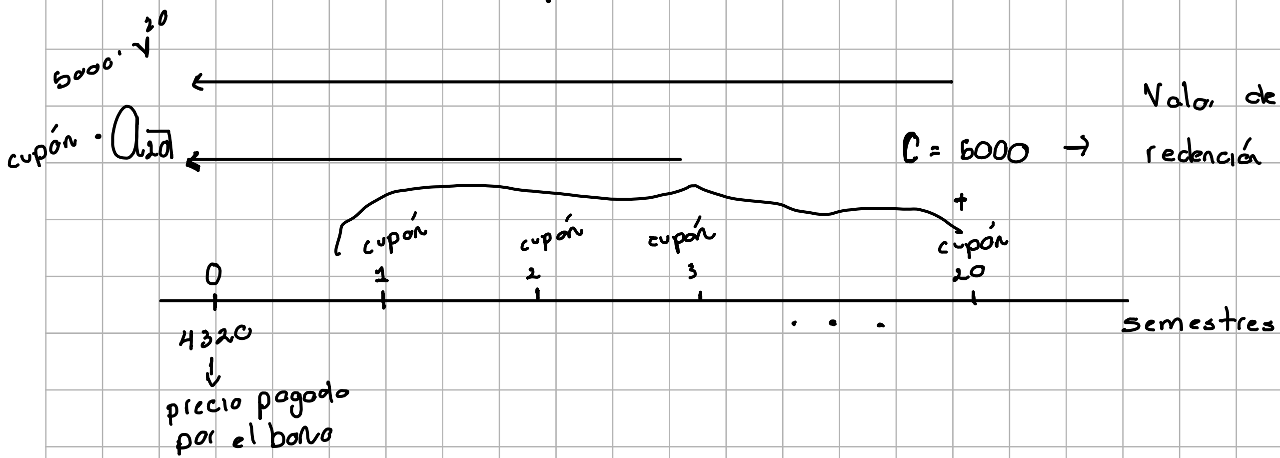
Ejercicios

1. Un bono tiene fecha de maduración en 10 años, tiene un valor nominal de $5,000. El precio del bono es de $4,320, a una tasa de interés convertible semestral del 8%.

Determine la tasa de cupones convertible semestral.

$$v = \frac{1}{1+i}$$



F: valor nominal

Cupón = F * r

r: tasa de cupones

Nota: Si no se especifica un valor de redención, entonces C = F

$\Rightarrow$ Cupón = 5000 * r

Entonces:

$$4320 = \text{cupón} \cdot a_{\overline{20}|} + 5000 \cdot v^{20}$$

$$4320 = \text{cupón}\left(\frac{1-(1.04)^{-20}}{0.04}\right) + 5000 \cdot (1.04)^{-20}$$

$$4320 = \text{cupón} \cdot (13.59) + 2281.93$$

$$\text{cupón} = \frac{4320 - 2281.93}{13.59} \approx 150$$

entonces,

$$150 = 5000 * r \quad , \quad r = \frac{150}{5000} = 0.03$$

$$\Rightarrow \underline{r^{(2)} = 6\%}$$

2. Un bono a 10 años tiene una tasa de cupones de 10% convertible semestralmente, el valor nominal es de $100 y se redime a $105. **Determine el precio del bono, a una tasa del 8% convertible semestralmente.**

$P = ?$ $\quad F = 100$ $\quad C = 105$ $\quad r = 0.05$

$F \cdot r = 100(0.05) = 5$ $\quad g = \frac{5}{105} = \frac{1}{21}$

$i = 0.04$ $\quad n = 10$ años $= 20$ semestres

$K = 105 * (1.04)^{-20} = 47.92$

$G = \frac{5}{0.04} = 125$

- Fórmula básica:

$$P = 5\, a_{\overline{20|}} + 47.92 = \$\,115.87$$

- Fórmula prima-descuento

$$P = 105 + (5 - 4.2)\, a_{\overline{20|}} = \$\,115.87$$

- Fórmula cantidad base

$$P = 125 + (105 - 125)(1.04)^{-20} = \$\,115.87$$

- Fórmula de Makehom

$$P = 47.92 + \frac{1/21}{0.04}(105 - 47.92) = \$\,115.87$$

3. Para el bono del ejemplo anterior, determine:

a) El rendimiento nomial basado en el valor nominal

b) El rendimiento nominal basado en el valor de redención

c) El rendimiento actual

d) El rendimiento a la madurez

a) valor anualizado del cupón $\rightarrow$ $2 \cdot Fr = (2)(5) = 10$

$$\frac{2 \cdot Fr}{F} = \frac{10}{100} = 10\%$$

b) $\dfrac{2 \cdot Fr}{C} = \dfrac{10}{105} = 9.52\% \longrightarrow 2 \cdot 9$

c) $\dfrac{2 \cdot Fr}{P} = \dfrac{10}{115.87} = 8.63\%$

d) $i = 8\%$

4. Un bono a 20 años con valor nomial de $10,000 tiene valor de redención de $10,500 y tasa de cupones convertible semestral del 8%.

a) Determine el precio del bono a una tasa $i^{(2)} = 6\%$ pagada por Andrew.

b) Luego de 5 años, Andrew decide vender el bono a una tasa de interés $i^{(2)} = 9\%$. ¿En qué precio vendió Andrew el bono?

$P = ?$

$F = 10000$

$C = 10\,500$

$r = 0.04$

$n = 20$ años $= 40$ semestres

cupón $= F \cdot r = 10000 \cdot (0.04) = 400$

a) $i = 0.03$

$$P = Fr \cdot a_{\overline{n|}} + C v^n = 400 \cdot \left(\frac{1 - (1.03)^{-40}}{0.03} \right) + 10\,500 \cdot (1.03)^{-40}$$

$P = 12,464.75$

b) $i = 0.045$

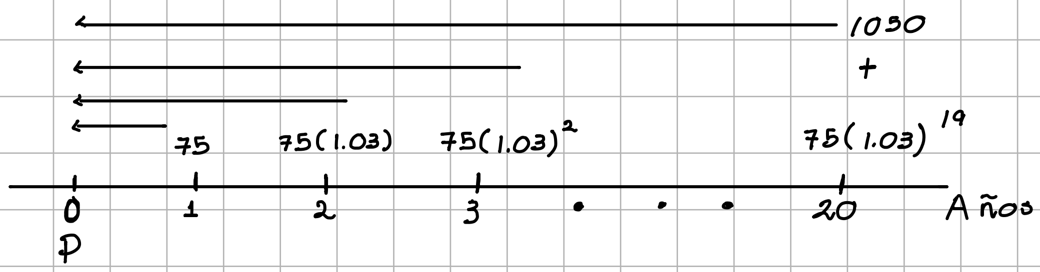
$$P = 400\, a_{\overline{30|}} + 10500\, v^{30} = 400 \left(\frac{1 - (1.045)^{-30}}{0.045} \right) + 10500 \cdot (1.045)^{-30}$$

venta en mercado secundario

$$= \underline{9319.055}$$

5. El valor nominal de un bono a 20 años es de \$1,000 con una tasa anual del 8.25%. Se compra a un precio P y se redime a \$1,050. El bono ofrece cupones anuales crecientes en progresión geométrica a una tasa anual del 3%, el primero de ellos es de 75.

Determine P.



$$P = 75 \cdot v + 75(1.03)\, v^2 + \dots + 75(1.03)^{19}\, v^{20} + 1050\, v^{20}$$

$$P = 75 \left(\frac{1 - \left(\frac{1.03}{1.0825}\right)^{20}}{0.0825 - 0.03} \right) + 1050\, (1.0825)^{-20}$$

$$\underline{\underline{P = 1,115.114}}$$

6. Determine el precio de un bono con valor nominal de $1,000 redimible a la par en 10 años. Se pagan cupones $r^{(2)} = 8\%$ y se compra a una tasa $i^{(4)} = 6\%$.

$F = C$

$k = 2$

$m = 4$

$n = 10$

$C = F = 1000$

• Forma 1:

$$\frac{i^{(2)}}{2} = \left(1 + \frac{i^{(4)}}{4}\right)^{4/2} - 1 = \left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^{2} - 1 = 0.030225$$

$$\text{Cupón} = 1000 \cdot \left(\frac{0.08}{2}\right) = 40$$

$$P = 40 \cdot a_{\overline{20|}\,\frac{i^{(2)}}{2}} + 1000\left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^{-20}$$

$$P = 40 \cdot \left(\frac{1-(1.030225)^{-20}}{0.030225}\right) + 1000 \cdot (1.030225)^{-20}$$

$$\underline{P = 1,145.12}$$

• Forma 2:

$$P = 40 \cdot \frac{a_{\overline{40|}\,1.5\%}}{s_{\overline{2|}\,1.5\%}} + 1000\,(1.015)^{-40}$$

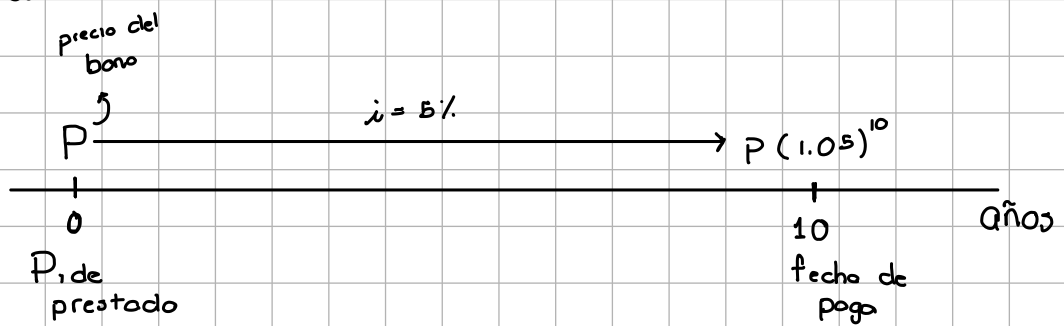
$$P = 40 \cdot \frac{\left(\frac{1-(1.015)^{-40}}{0.015}\right)}{\left(\frac{(1.015)^{2}-1}{0.015}\right)} + 1000 \cdot (1.015)^{-40}$$

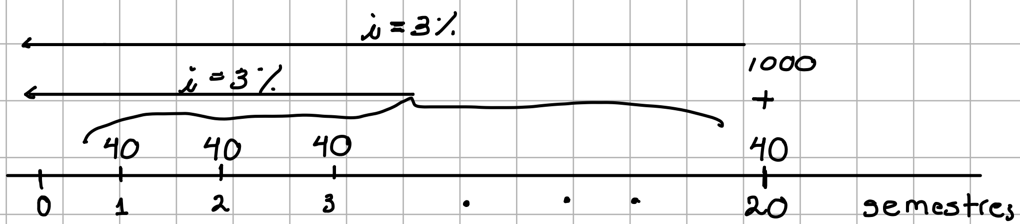
$$\underline{\underline{P = 1,145.12}}$$

7.

- Un inversionista pide prestado una cantidad de dinero a una tasa anual efectiva del 5% y lo pagará con todo e intereses al final el plazo de 10 años.
- El inversionista usa el dinero para comprar un bono con valor nominal de $1,000 que se redime a la par luego de 10 años con cupones semestrales.
- La tasa de cupones convertible semestralmente es del 8% y la tasa de interés convertible semestralmente es del 6%.
- El dinero que recibe de los cupones los reinvierte a una tasa del 4% convertible semestralmente.

Calcule la ganancia del inversionista cuando pague su deuda en 10 años.



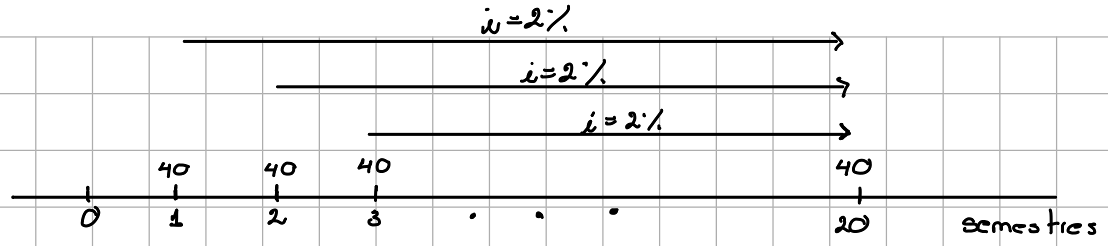


$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i}$$

$$\text{Cupón} = (F)(r) = (1000)(0.04) = 40$$

$$P = 40\, a_{\overline{20}|3\%} + 1000\,(1.03)^{-20} = 1148.77 \longrightarrow \text{cantidad que pide prestado}$$

Valor acumulado de la deuda luego de 10 años $= 1148.77\,(1.05)^{10} = 1871.23$



Valor Acumulado de los cupones reinvertidos $= 40\, S_{\overline{20}|2\%} = 40\left(\dfrac{(1.02)^{20}-1}{0.02}\right) = 971.89$

$$\text{Ganancia}_{(t=10)} = 1000 + 971.89 - 1871.23 = \underline{100.66}$$

8. Un bono de $10,000 a 2 años redimible a la par paga cupones semestrales a una tasa convertible semestralmente del 8%.
Construya el calendrario de amortización de bonos usando una tasa convertible semestral del 6%.

$$\text{Precio Bono} = B_0 = \underbrace{(10\,000)}_{F}\,\underbrace{(0.04)}_{r}\, a_{\overline{4}|3\%} + \underbrace{10000}_{C}\,(1.03)^{-4}$$

$$= 400\left(\frac{1-v^4}{0.03}\right) + 10000\,(1.03)^{-4} = 10371.71$$

Periodos	Cupón	Intereses	Principal	Valor en Libros
0	–	–	–	10371.71
1	400	10371.71 · 0.03 311.15	400 − 311.15 88.85	10371.71 − 88.85 10282.86
2	400	10282.86 · 0.03 308.48	400 − 308.48 91.52	10282.86 − 91.52 10191.34
3	400	10191.34 · 0.03 305.74	400 − 305.74 94.25	10191.34 − 94.26 10097.09
4	400	10097.09 · 0.03 302.91	400 − 302.91 97.09	10097.09 − 97.09 10 000

↑
371.709 → Prima

9. El valor nomial de un bono a 20 años es de 1000 con tasa de interés anual del 8.25% redime a 1050, cupones son anuales crecientes en progresión geométrica a una tasa del 3% anual, el primero de ellos es de 75.

Se cálculo previamente que el precio del bono es de 1115.

a) use el calendario de amortización de bonos para determinar el precio del bono luego de 5 años.

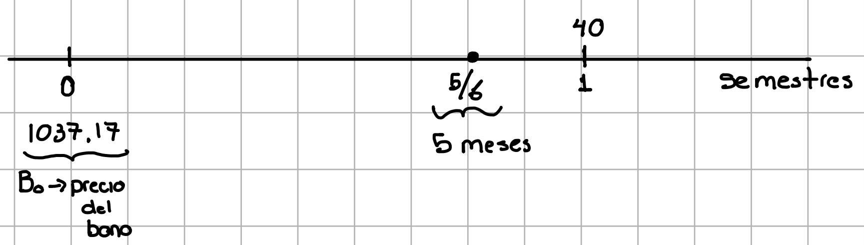
b) calcule directamente el precio del bono luego de 5 años.

Periodo	Cupón	Intereses	Principal	Valor en Libros
0	–	–	–	1115.11
1	75	91.99	-16.99	1132.10
2	75(1.03) 77.25	93.39	-16.14	1148.25
3	$75(1.03)^2$ 79.567	94.73	-15.16	1163.418
4	81.95	95.98	-14.02	1177.44
5	84.413	97.13	-12.72	1190.17

$$B_5 = 75(1.03)^5\left(\frac{1-\left(\frac{1.03}{1.0825}\right)^{15}}{0.0825-0.03}\right) + 1050\cdot(1.0825)^{-15} = 1190.17$$

Cupón Compartido o Intermedio

10. Considere un bono con precio de 1037.17, cupones semestrales de 40 y tasa de interés convertible semestralmente del 6%. Determine el valor del bono luego de 5 meses.



$$B^f_{0+5/6} = 1037.17 \cdot \left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{5/6} = 1063.04$$

$$Fr_{5/6} = 40 \cdot \left(\frac{(1.03)^{5/6}-1}{0.03}\right) = 33.25$$

$$B^m_{0+5/6} = B^f_{0+5/6} - Fr_{5/6} = 1063.04 - 33.25 = \underline{\underline{1029.78}}$$

T-Bill

11. Un inversionista compra un T-bill a 26 semanas con valor nominal de 10,000 a un monto X. Si la tasa de interés anual efectiva es del 4.17%, calcule X.

regla del banquero $\rightarrow \frac{\text{actual}}{360}$

\# días (actual) = (7)(26) = 182 días ⟶ tiempo de inversión

Parte del año de la inversión $= \frac{182}{360}$

$$d = \frac{i}{1+n\cdot i} = \frac{0.0417}{1+\left(\frac{182}{360}\right)0.0417} = 0.04084$$

$$X = 10000 \cdot \left(1 - \left(\frac{182}{360}\right)\cdot 0.04084\right) = \underline{9793.53}$$

CETES

12. El 31 de agosto del 2000 un inversionista compra CETES con las siguientes características:

Valor Nominal=10 pesos

Fecha de colocación: 31 de agosto del 2000

Fecha de vencimiento: 28 de septiembre del 2000

Dias por vencer: 28 dias

Supongamos que dicho inversionista adquiere los títulos a un rendimiento anual del 15.5%

Calcule el precio del bono.

$$\text{tasa descuento} = \frac{i}{1+n\cdot i} = \frac{0.155}{1+\left(\frac{28}{360}\right)\cdot 0.155} = 0.153153$$

$$\text{Precio CETES} = 10\cdot\left(1-\left(\frac{28}{360}\right)\cdot 0.153153\right) = \underline{\underline{9.8808}}$$

"Yield Curves" o Curvas de Rendimiento o Curvas de tasas de Interes

Spot Rates en Bonos

13. Se le dan los siguientes valores de una curva de rendimiento:

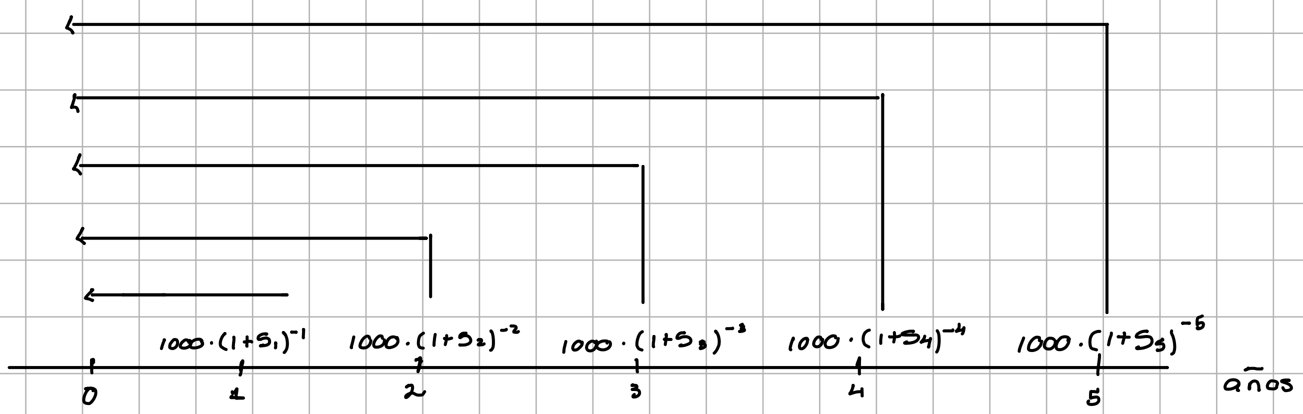
Plazo	$\boxed{\text{Tasa spot}}$ (efectiva anual)
1	7%
2	8%
3	8.75%
4	9.25%
5	9.5%

=> Tasas Spot

a) Determine el valor presente neto de pagos de 1000 al final de cada año durante 5 años usando tasas Spot.

b) ¿Cual es la tasa anual efectiva que produce el mismo VPN? **(IRR)**

a)

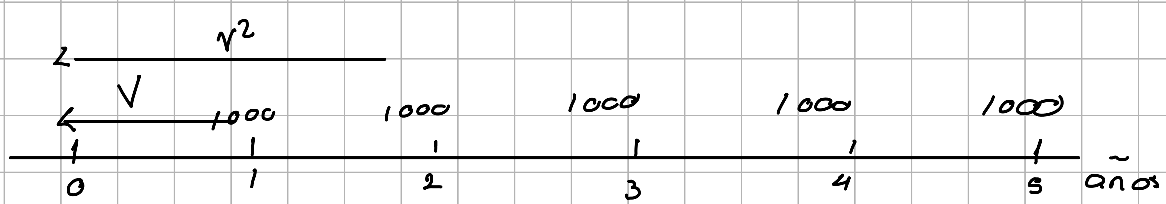


$$VPN = 1000\cdot\left[(1.07)^{-1} + (1.08)^{-2} + (1.0875)^{-3} + (1.0925)^{-4} + (1.095)^{-5}\right]$$

$$\boxed{VPN = \sum_{t=1}^{N} (1+S_t)^{-t}}$$ => Tasas Spot

$$\underline{VPN = 3,906.63}$$

b)



$i = \,?$ **IRR**

$$3906.63 = 1000\cdot a_{\overline{5|}} = 1000\cdot\left(\frac{1-(1+i)^{-5}}{i}\right)$$

$i = 8.83\%$ → Se encontró con Solver

y tambien con Python (ver codigo usando **irr(cash_flows)**)

Spot Rates en Bonos

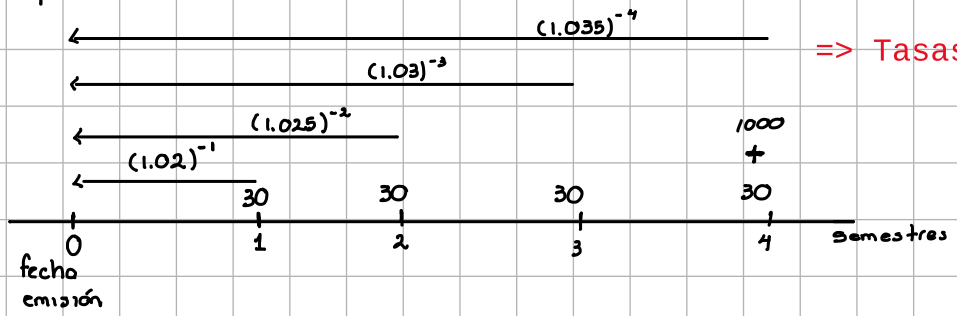
14. Se le dan los siguientes valores de una curva de rendimiento:

Plazo (semestre)	Tasa Spot (efectiva semestral)
1	2%
2	2.5%
3	3%
4	3.5%

=> Tasas Spot

Determine el precio de un bono a 2 años con valor nominal de 1000 redimible a la par, que paga cupones semestrales con tasa r=3% efectiva semestral.

cupón $= Fr = 1000 \cdot (0.03) = 30$



=> Tasas Spot

$$\boxed{P = Fr\cdot\left[(1+S_1)^{-1}+(1+S_2)^{-2}+\dots+(1+S_n)^{-n}\right] + C\cdot(1+S_n)^{-n}}$$

$$P = 30\left[(1.02)^{-1} + (1.025)^{-2} + (1.03)^{-3} + (1.035)^{-4}\right] + 1000\,(1.035)^{-4}$$

$$P = 983.005$$

Spot Rates en Bonos

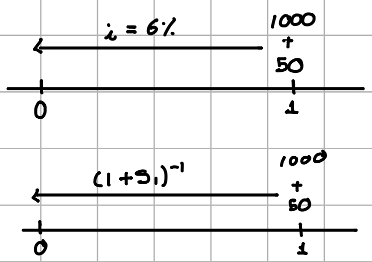
15. Un bono con valor nominal de 1000 redimible a la par tiene cupones anuales del 5%. El plazo del bono puede ser de 1, 2 o 3 años. Las tasas de interés anual aplicables son 6%, 6.5% y 7% por cada uno de esos plazos.

Nota: estas tasas **no son** Spot Rates sino anuales constantes dependiendo del tiempo de madurez del bono que se elija.

Determine S_1, S_2 y S_3 Determinar las Spor Rates

cupón $= (1000)\,(5\%) = 50$

Plazo 1 año

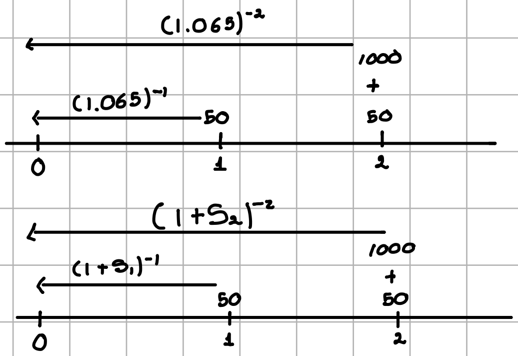


$$Precio_{t=0} = 1050 \cdot (1.06)^{-1} = 990.56$$

$$990.56 = 1050 \cdot (1+S_1)^{-1}$$

$$\underline{S_1 = 6\%}$$

Plazo 2 años

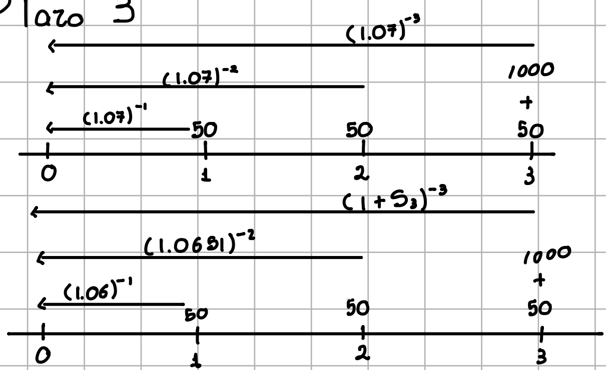


$$Precio = 50(1.065)^{-1} + 1050\,(1.065)^{-2} = 972.69$$

$$972.69 = 50\,(1.06)^{-1} + 1050\,(1+S_2)^{-2}$$

↳ $\underline{S_2 = 6.51\%}$

Plazo 3



$$Precio = 50\, a_{\overline{3|}7\%} + 1000\,(1.07)^{-3} = 947.51$$

$$947.51 = 50\,(1.06)^{-1} + 50(1.0651)^{-2} + 1050\,(1+S_3)^{-3}$$

$$\underline{S_3 = 7.0352\%}$$

Tasa a la Par

16. Considere las siguientes tasas spot.

Plazo	Tasa Spot
1	4%
2	5%
3	6%
4	7%

Determine la tasa a la par.

$$\boxed{r = \frac{1-(1+S_n)^{-n}}{\sum_{t=1}^{n}(1+S_t)^{-t}}}$$

$$r = \frac{1-(1+S_4)^{-4}}{(1+S_1)^{-1}+(1+S_2)^{-2}+(1+S_3)^{-3}+(1+S_4)^{-4}} = \frac{1-(1.07)^{-4}}{(1.04)^{-1}+(1.05)^{-2}+(1.06)^{-3}+(1.07)^{-4}}$$

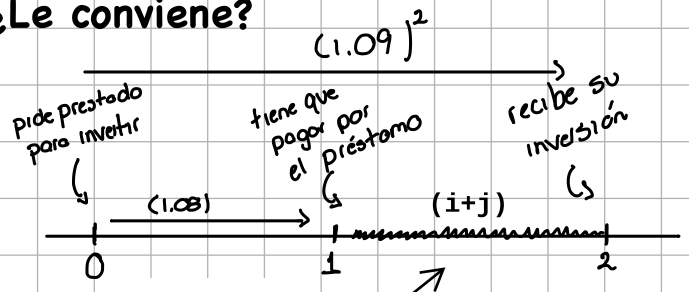
$$\underline{r = 6.83\%}$$

Tasa a la Par

17. Asuma $S_1 = 8\%$ y $S_2 = 9\%$ => Tasas Spot

Una persona quiere invertir en un fondo a un plazo de 2 años, pero tendrá dinero hasta dentro de 1 año. Asi que pide prestado a una tasa S_1, paga al final del año, y espera otro año para recibir sus rendimientos.

¿Le conviene?



j -> tasa spot aplicable del año 1 al 2

$$(1.09)^2 = (1.08)(1+j)$$

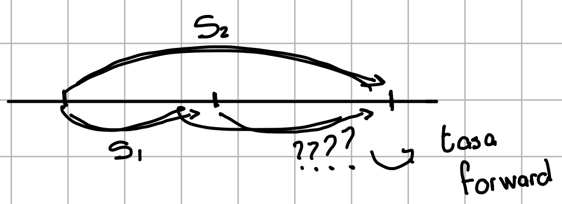
$$(1+j) = \frac{(1.09)^2}{(1.08)}$$

$$j = \frac{(1.09)^2}{(1.08)} - 1$$

$$j = 10.009\%$$

↳ le conviene la inversión

porque el pago 8% (0 a 1) y el resto del periodo (1 a 2) le da una tasa de rendimiento mayor a la que el pago.



Tasas Forward

18. Considere las siguientes tasas Spot.

Plazo	Tasa Spot
1	7%
2	8%
3	8.95%
4	9.25%
5	9.5%

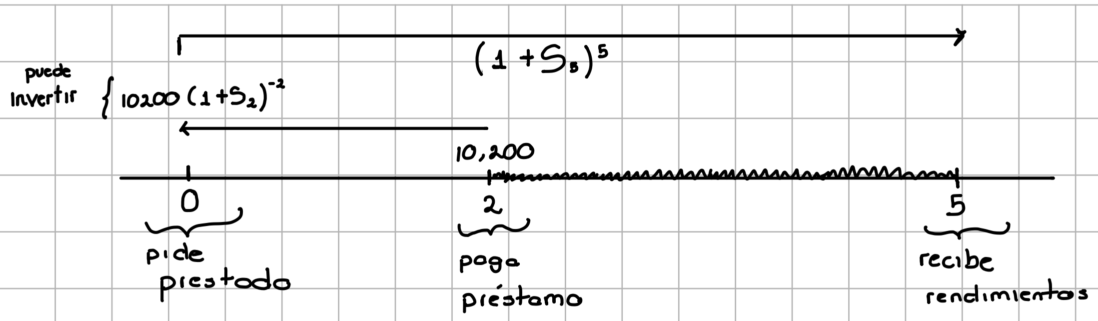
Una persona tendrá 10,200 en 2 años, pero quiere invertirlos hoy en un plazo de 5 años.

a) **¿cuánto pide prestado?**

b) **¿cuánto recibe?**

c) f_2^5

d) **Intereses generados del 2 al 5.**



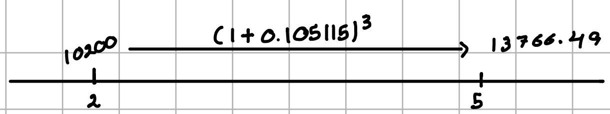
f_2^5

a) Pide prestado $= 10200\,(1.08)^{-2} = 8744.8559$

$$f_n^{n+k} = \left[\frac{(1+S_{n+k})^{n+k}}{(1+S_n)^n}\right]^{1/k} - 1$$

b) Recibe $= 8744.8559\,(1.095)^5 = 13\,766.49$

c) $$f_2^5 = \left[\frac{(1+S_5)^5}{(1+S_2)^2}\right]^{1/3} - 1 = \left[\frac{(1.095)^5}{(1.08)^2}\right]^{1/3} - 1 = 10.5115\%$$



d) $\text{Intereses}_{[2,5]} = 13766.49 - 10200 = 3566.49$

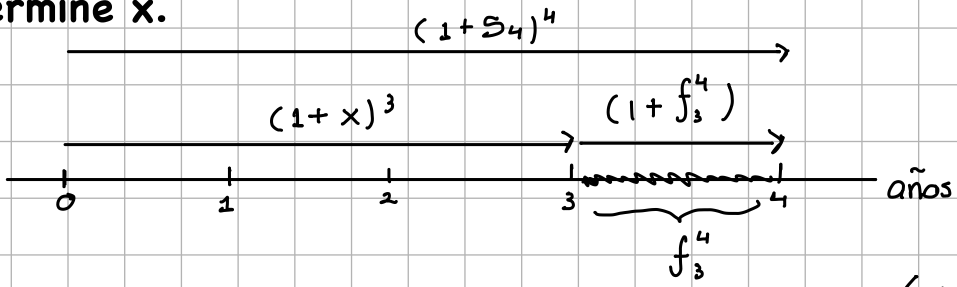
Tasas Forward

19. Considere las siguientes tasas Spot.

Plazo	Tasa Spot
1	4%
2	4.3%
3	x %
4	4.8 %

Se sabe que la tasa forward del cuarto año es de 5.34%.

Determine x.



$$(1+x)^3\,(1+f_3^4) = (1+S_4)^4 \Rightarrow x = \left(\frac{(1.048)^4}{(1.0534)}\right)^{1/3} - 1$$

$$\hookrightarrow (1+x)^3 = \frac{(1.048)^4}{(1.0534)}$$

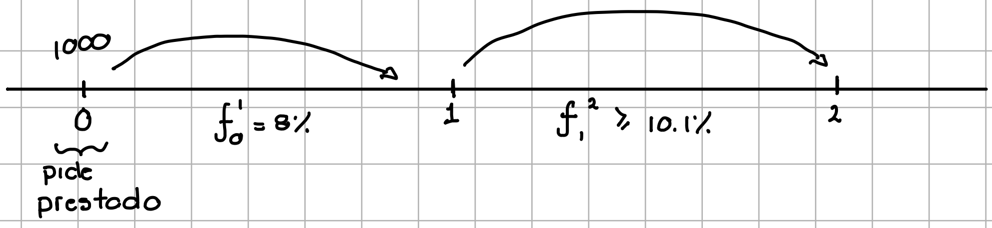
$$\Rightarrow \underline{\underline{x = 4.62\%}}$$

Tasas Forward

20. Se piden prestados 1000 para invertir en un fondo que ofrece una tasa del 8% el primer año y una tasa f_1^2 desconocida pero mayor o igual a 10.1%. El préstamo se debe pagar a una tasa de 9% en 2 años.

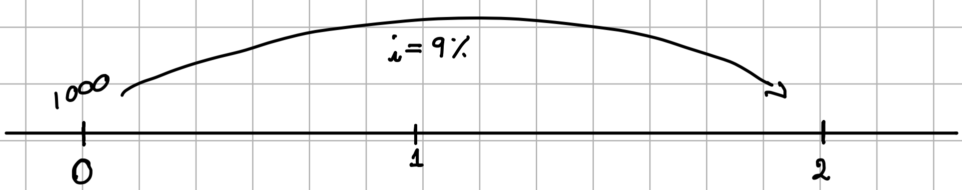
¿Conviene la inversión?

$f_0^1 = S_1$



$$Recibe = 1000\,(1+f_0^1)\,(1+f_1^2) = 1000(1.08)\,(1+f_1^2) \geq 1000\,(1.08)\,(1.101)$$

$$Recibe \geq 1189.08$$



$$Paga = 1000\,(1.09)^2 = 1188.1$$

$$Ganancia = Recibe - Pago \geq 1189.08 - 1188.1$$

$$Ganancia \geq 0.98$$

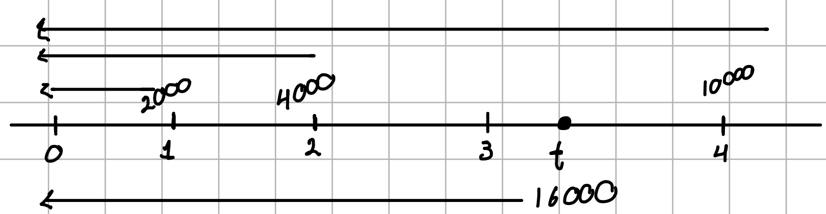
$\therefore$ conviene invertir

21. Se hacen pagos de 2000, 4000 y 10000 en los tiempos 1,2 y 4 a una tasa de interés i = 25%

a) Determine $\bar{t}$

b) Determine $\bar{d}$

c) Determine el tiempo equivalente de forma exacta



a) $$\bar{t} = \frac{R_1 + 2R_2 + 3R_3 + 4R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{2000 + (2)\,4000 + (4)\,(10000)}{2000 + 4000 + 10000} = \frac{50000}{16000} = 3.125$$

b) $$\bar{d} = \frac{R_1 v + 2R_2 v^2 + 3R_3 v^3 + 4R_4 v^4}{R_1 v + R_2 v^2 + R_3 v^3 + R_4 v^4} = \frac{2000v + 2(4000)v^2 + 4(10000)v^4}{2000v + 4000v^2 + 10000v^4} = 2.7984$$

c) $$2000\,v + 4000\,v^2 + 10000\,v^4 = 16000\,v^t$$

$$v^t = \frac{8256}{16000} \Rightarrow t = \frac{-\ln\left(\frac{8256}{16000}\right)}{\ln(1.25)}$$

$$\ln(1+i)^{-t}$$

$$-t\,\ln(1+i)$$

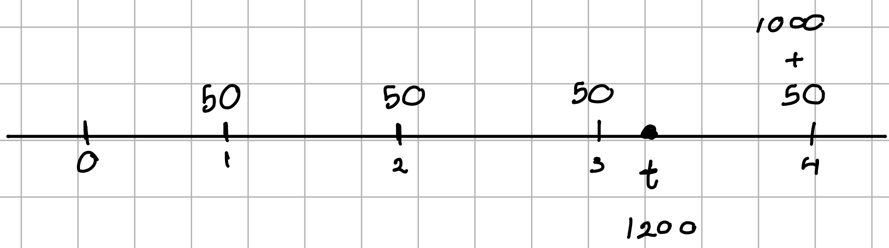
$$\underline{t = 2.96513}$$

22. Considere un bono de 1000 redimible a la par con tasa de cupones anual del 5% y tasa de interés anual del 3.5%. Si el plazo es de 4 años:

a) Determine $\bar{t}$

b) Determine $\bar{d}$

$$Fr = 1000 \cdot (0.05) = 50$$



$$\bar{t} = \frac{50 + 2(50) + 3(50) + 4(1050)}{1200} = 3.75$$

$$\bar{d} = \frac{50v + 2(50)v^2 + 3(50)v^3 + 4(1050)v^4}{50 + 50v^2 + 50v^3 + 1050v^4} = 3.731421$$

Nota: el denominador contiene el precio del bono

23. Considere un bono con valor nominal de 1000, redimible a la par en 5 años. Tiene tasa cupones de r = 0.025.

Determine la duración del bono usando una tasa del 3.5%

24. Para un bono a 10 años con valor nominal de 1000, redimible a la par, con tasa de cupones del 8% y tasa de interés del 7%, se tiene una volatilidad de 6.8659 años.

¿Cuánto vale si la tasa de interés cambia a 7.5%?

$$P(0.07) = 80\, a_{\overline{10}|7\%} + 1000\,(1.07)^{-10}$$

$$= 80\left(\frac{1-(1.07)^{-10}}{0.07}\right) + 1000\,(1.07)^{-10} = 1070.24$$

$$P(0.07+0.005) \approx P(0.07)\,\big(1-(0.005)(6.8659)\big)$$

$$\approx 1070.24\,\big(1-(0.005)(6.8659)\big)$$

$$\approx 1033.5$$