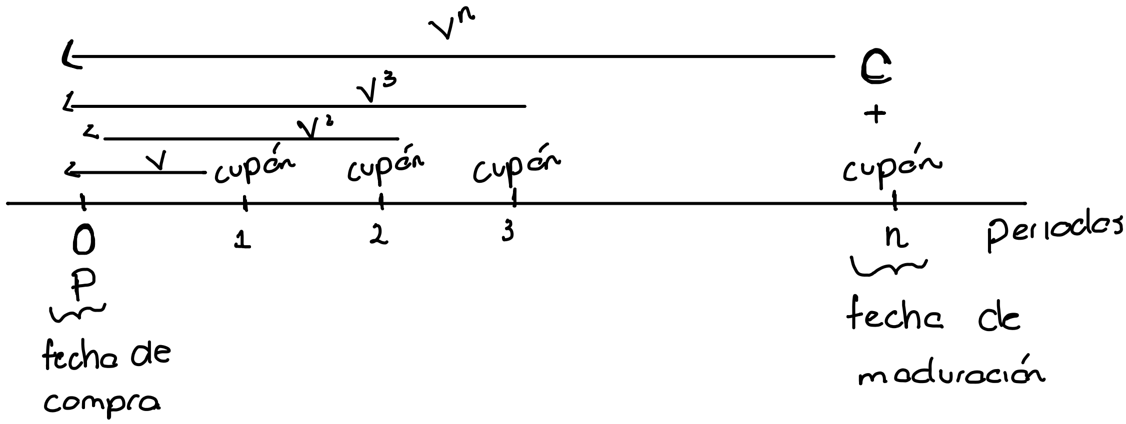
Considere el precio de un bono bajo los siguientes supuestos:

- Todos las obligaciones que se pagan son realizadas en fechas específicas, no asumimos probabilidad de default.
- El bono tiene fecha de maduración
- El precio del bono se determina en la fecha en la que se emite.

Se utiliza la siguente notación:

- ✓ P: precio del bono
- ✓ F: valor nominal (face value)
- ✓ C: valor de redención
- ✓ r: tasa de cupones
- ✓ $F \cdot r$: monto del cupón
- ✓ g: tasa de cupón modificada $\qquad g = \frac{F \cdot r}{C}$
- ✓ i: tasa de interés del bono
- ✓ n: número de pagos de cupones
- ✓ K: el valor presente de C, $\qquad K = C v^n$
- ✓ G: cantidad base $\qquad G = \frac{F \cdot r}{i}$



$$P = \text{cupón} \cdot v + \text{cupón} \cdot v^2 + \ldots + \text{cupón}\ v^n + C \cdot v^n$$

$$P = \text{cupón} \cdot [v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n] + C \cdot v^n$$

$$P = F \cdot r \cdot a_{\overline{n}|} + C \cdot v^n \longrightarrow \text{fórmula básica}$$

Nota 1: $0 \leq C \leq P \cdot (1+i)^n$

Formula Prima - descuento

$$P = Fr\, a_{\overline{n}|} + C\, v^n$$

$$= Fr\, a_{\overline{n}|} + C\,(1 - i\, a_{\overline{n}|})$$

$$= Fr\, a_{\overline{n}|} + C - C \cdot i\, a_{\overline{n}|}$$

$$= C + (Fr - Ci)\, a_{\overline{n}|}$$

↳ prima de amortización

$1 - i\, a_{\overline{n}|}$

↳ $1 - i\left(\frac{1 - v^n}{i}\right)$

↳ $1 - (1 - v^n)$

↳ v^n

Fórmula Cantidad base

$$P = Fr \cdot a_{\overline{n|}} + Cv^n$$

$$= G \cdot i \cdot a_{\overline{n|}} + Cv^n$$

$$= G \cdot (1 - v^n) + Cv^n$$

$$= G - Gv^n + Cv^n$$

$$= G + (C - G)v^n$$

Formula de Makeham

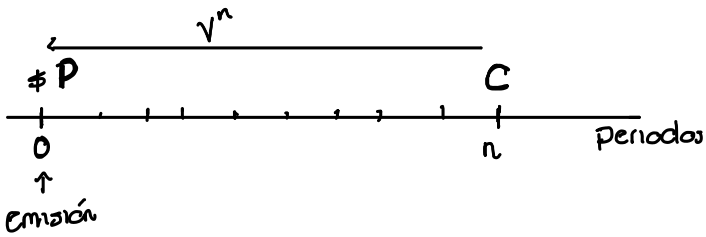
$$P = Fr \cdot a_{\overline{n|}} + Cv^n$$

$$= C \cdot g \left(\frac{1 - v^n}{i}\right) + Cv^n$$

$$= \frac{g}{i}(C - Cv^n) + Cv^n$$

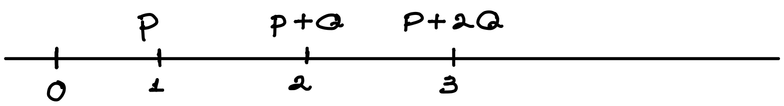
$$= \frac{g}{i}(C - K) + K$$

Bono cupón cero

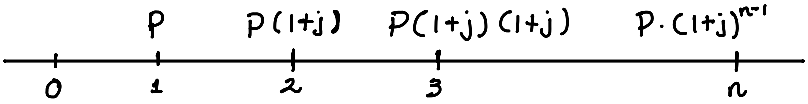


$$P = C\, v^n$$

Pagos Crecientes de Cupones



crecimiento en progresión aritmética



crecimiento en progresión geométrica

Supongamos que el cupón crece a una tasa j cada periodo

El primer cupón es de \$1

$$P = v + (1+j)v^2 + (1+j)^2 v^3 + \dots + (1+j)^{n-1} v^n$$

$$P = \frac{1}{1+j}\left(\frac{1+j}{1+i} + \left(\frac{1+j}{1+i}\right)^2 + \left(\frac{1+j}{1+i}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1+j}{1+i}\right)^n\right) \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{1+i}{1+j} P = \frac{1}{1+j}\left(1 + \frac{1+j}{1+i} + \left(\frac{1+j}{1+i}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1+j}{1+i}\right)^{n-1}\right) \quad \dots \quad (2)$$

restando (2) de (1):

$$P - \frac{1+i}{1+j} P = \frac{1}{1+j}\left(\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^n - 1\right)$$

$$\frac{1+j-1-i}{1+j} P = \frac{1}{1+j}\left(\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^n - 1\right)$$

$$\frac{j-i}{1+j} P = \frac{1}{1+j}\left(\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^n - 1\right)$$

$$\boxed{P = \frac{1 - \left(\frac{1+j}{1+i}\right)^n}{i-j}}$$

En general, para esta clase de bonos

$$P = \text{primer cupón} \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{i-k} \right) + C \cdot v^n$$

¿Qué pasa cuando la tasa cupón y la tasa de interés capitalizan a distintas frecuencias?

K: frecuencia tasa cupón

m: frecuencia tasa interés

① Expresar $i^{(m)}$ por una equivalente $i^{(K)}$

$$(1+i) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{i^{(K)}}{K}\right)^K$$

$$\frac{i^{(K)}}{K} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{\frac{m}{K}} - 1$$

② Entonces:

$$P = \underbrace{F\left(\frac{r^{(K)}}{K}\right)}_{\text{cupón}} \cdot a_{\overline{nK|}\frac{i^{(K)}}{K}} + C \cdot \left(1 + \frac{i^{(K)}}{K}\right)^{-Kn}$$

Otra manera de obtener el precio:

$$P = \text{cupón} \cdot \left(\frac{a_{\overline{n \cdot m|}\frac{i^{(m)}}{m}}}{s_{\overline{m/K|}\frac{i^{(m)}}{m}}} \right) + C \cdot \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mn}$$

$$\boxed{s_{\overline{n|}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

① $C > P$

$$\text{Descuento} = C - P$$
$$= C - (Fr\, a_{\overline{n|}} + C v^n)$$
$$= C - Cv^n - Fr\, a_{\overline{n|}}$$
$$= (1 - v^n)C - Fr\, a_{\overline{n|}}$$
$$= Ci\left(\frac{1-v^n}{i}\right) - Fr\, a_{\overline{n|}}$$
$$= Ci\, a_{\overline{n|}} - Fr\, a_{\overline{n|}}$$
$$\text{Descuento} = (Ci - Fr)\, a_{\overline{n|}}$$

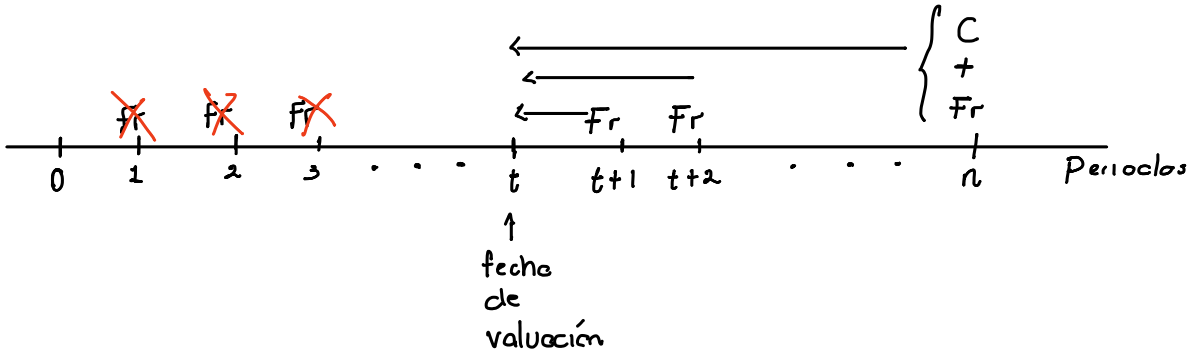
② $P > C$

$$\text{Prima} = P - C$$
$$\text{Prima} = (Fr - Ci)\, a_{\overline{n|}}$$

Definimos el valor en libros como el valor presente de todos los pagos futuros y lo denotamos como B_t

El valor en libros se utiliza para la construcción del calendario de amortización de bonos.

$$\text{Cupón} \begin{cases} \text{Intereses} \\ \text{Principal} \end{cases}$$



$$\underbrace{B_t}_{\text{valor en libros}} \longrightarrow \text{costo del bono en el periodo } t$$

$$B_t = Fr\,v + Fr\,v^2 + \dots + Fr\,v^{n-t} + C\,v^{n-t}$$

$$B_t = Fr\,a_{\overline{n-t|}i} + C\,v^{n-t}$$

$$\text{Intereses}_{t+1} = I_{t+1} = \underbrace{B_t}_{\text{saldo del periodo anterior}} \cdot \underbrace{i}_{\text{tasa de interés}}$$

Prima

$$P_{t+1} = \underbrace{Fr}_{\text{cupón}} - \underbrace{I_{t+1}}_{\text{intereses}} = Fr - B_t \cdot i = Fr - \left[Fr(1-v^{n-t}) + i\,C\,v^{n-t}\right]$$

$$= Fr - \left[Fr - Fr\,v^{n-t} + i\,C\,v^{n-t}\right]$$

$$= Fr - Fr + Fr\,v^{n-t} - i\,C\,v^{n-t}$$

$$= (Fr - iC)\,v^{n-t}$$

Prima de amortización

Otra forma de interpretar a la prima de un bono es que es la suma de todos los P_t (principales)

$$P_{t+1} = (Fr - iC)V^{n-t}$$
$$= (C \cdot g - iC)V^{n-t}$$
$$= C(g-i)V^{n-t}$$

$g = \frac{Fr}{C}$ → tasa modificada de cupones

↳ $Fr = C \cdot g$

$$P_t = C(g-i)V^{n-t+1}$$ → El principal crece en progresión geométrica a razón $1+i$

$$\underbrace{B^f_{t+k}}_{\text{precio fijo}} = \underbrace{B^m_{t+k}}_{\text{valor en el mercado}} + \underbrace{Fr_k}_{\text{fracción cupón}}$$

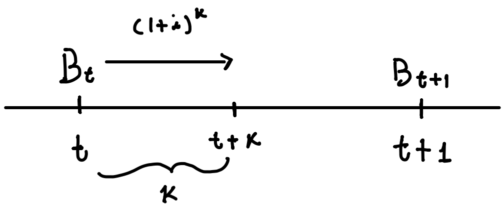
Nota:

Fr_0 : No hay cupón

Fr_1 : Se recibe cupón

Si $0 < k < 1$

$0 < k < 1$



Método teórico

$$B^f_{t+k} = B_t(1+i)^k$$

$$Fr_k = Fr \cdot S_{\overline{k|}} = Fr\left(\frac{(1+i)^k - 1}{i}\right)$$

$$B^m_{t+k} = B_t(1+i)^k - Fr * S_{\overline{k|}}$$

↑
mercado

Relación entre tasa de interés y tasa de descuento

Interés simple

$$VF = VP(1+n\cdot i) \ldots (1)$$

Descuento simple

$$VP = VF(1-n\cdot d) \ldots (2)$$

igualando (1) con (2):

$$\frac{VF}{1+n\cdot i} = VF(1-n\cdot d)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+n\cdot i} = 1-n\cdot d$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+n\cdot i} - 1 = -nd$$

$$\Rightarrow \frac{1-(1+n\cdot i)}{1+n\cdot i} = -nd$$

$$\Rightarrow \frac{-n\cdot i}{1+n\cdot i} = -nd$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{i}{1+n\cdot i}}$$

$$\boxed{i = \frac{d}{1-n\cdot d}}$$

si n=1

caso n=1

$$d = \frac{i}{1+i}$$

si n=1

caso n=1

$$i = \frac{d}{1-d}$$

CETES **Ejercicio 12**

$$P_{CETES} = \text{Valor de redención} \cdot \left(1 - \left(\frac{\text{actual}}{360}\right)\cdot d\right)$$

- Los bonos de tesoreria se redimen a la Par(Valor de Redencion = Face Value)
- Son Bonos con Coupon Cero
- Emitidos a Descuento

T-bill **Ejercicio 11**

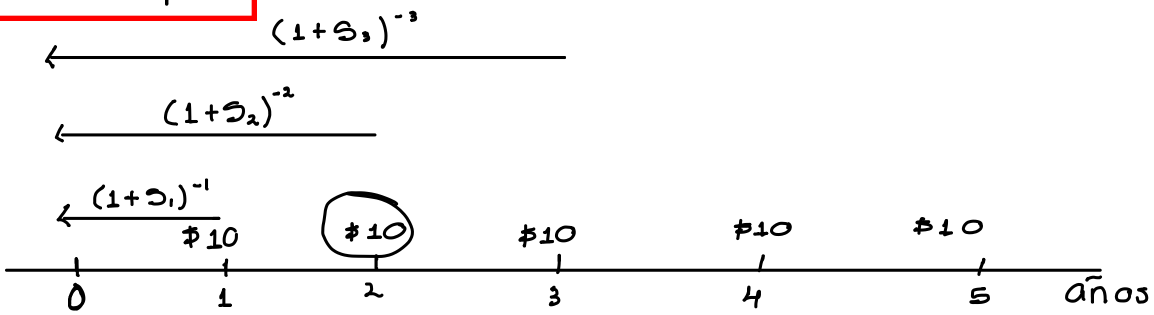
$$P_{T\text{-}Bill} = \text{Valor de redención} \cdot \underbrace{\left(1 - \left(\frac{\text{actual}}{360}\right)\cdot d\right)}_{\text{regla del banquero}}$$

$$\boxed{P = \frac{C}{(1+i\cdot n)}}$$

Nota: Tambien se podria calcular el Precio de un Bono con la **formula de Interes Simple Trayendo a Valor Presente el Valor de Redencion.**
Pero en las hojas tecnicas de los Bonos se usa la **Formula con Descuento** de arriba

Tasas Spot

Yield Curves and Spot Interest Rates



Periodo	Tasa Spot
1	S_1
2	S_2
3	S_3
4	S_4
5	S_5

$$\boxed{VPN = \sum_{t=1}^{N} (1+S_t)^{-t}}$$

Ejercicio 13: usando anualidades

Para un bono

Generalizando el Ejercicio 13 usando anualidades, ahora aplicando lo mismo a un Bono:

$$\boxed{P = Fr \cdot a_{\overline{n}|} + C v^{n}}$$

La formula de siempre para el precio de un bono

Más general, usando tasas spot se tiene que:

$$\boxed{P = Fr \cdot \left[(1+S_1)^{-1} + (1+S_2)^{-2} + \ldots + (1+S_n)^{-n} \right] + C \cdot (1+S_n)^{-n}}$$

Ejercicio 14

Ejercicio 15

Tasa a la par

$$P = Fr \cdot \left(\sum_{t=1}^{n} (1+S_t)^{-t} \right) + C \cdot (1+S_n)^{-n}$$

aplicamos la siguiente condición $\longrightarrow$ $\boxed{P = F = C}$

$$1 = r \cdot \left(\sum_{t=1}^{n} (1+S_t)^{-t} \right) + (1+S_n)^{-n}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{1-(1+S_n)^{-n}}{\sum_{t=1}^{n} (1+S_t)^{-t}}}$$

tasa a la par

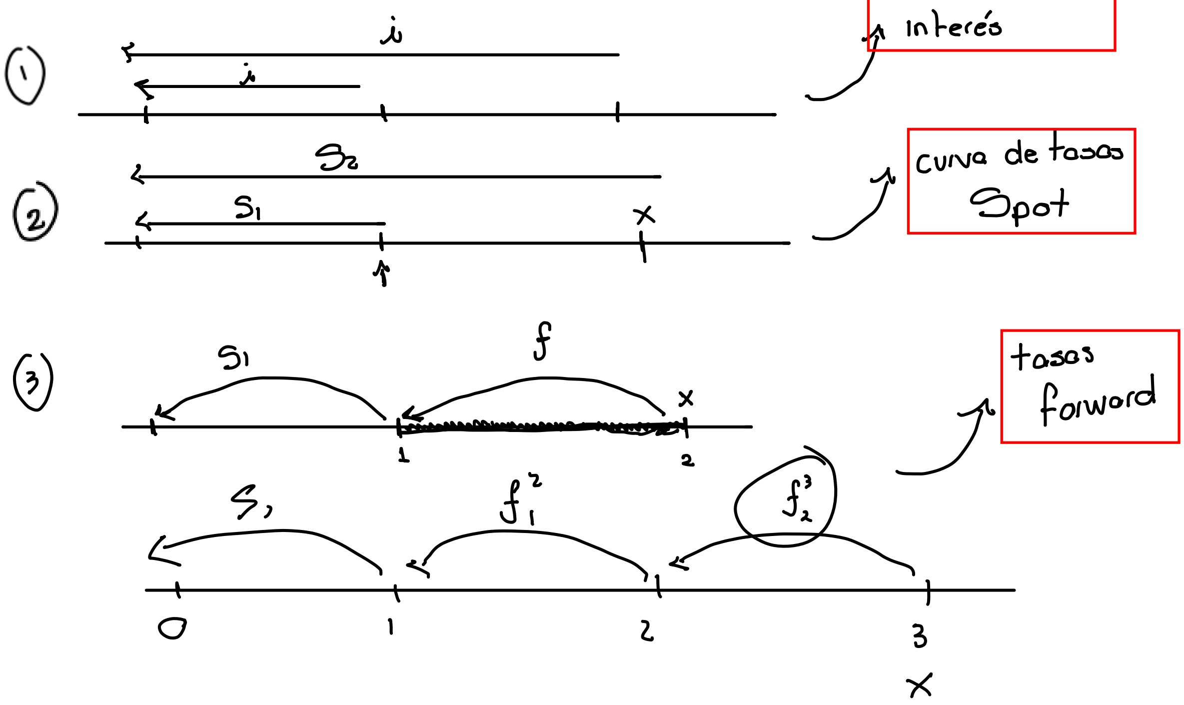
La **Tasa a la Par** es una tasa cupon tal que el Precio del bono (**P**) sea **igual** al Valor nominal o Face Value (**F**) **y** al Valor de Redencion (**C**).

[Ejercicio 16]

[Ejercicio 17]

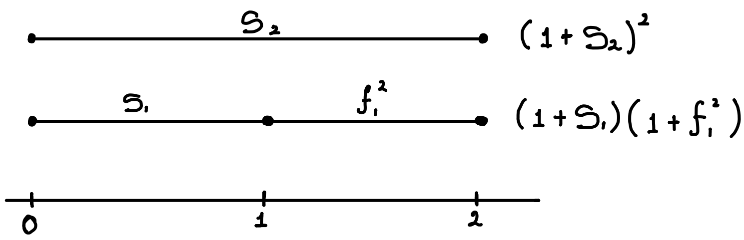
[**Ejercicio en Excel: "4-Valuación de bonos.xlsx"** para terminar el tema de valuacion de Bonos con Tasa Fija y tasa Variable]

Tasas Forward



¿Cómo se determinan las tasas Forward?

f_n^{n+k} : tasa forward efectiva de n a $n+k$



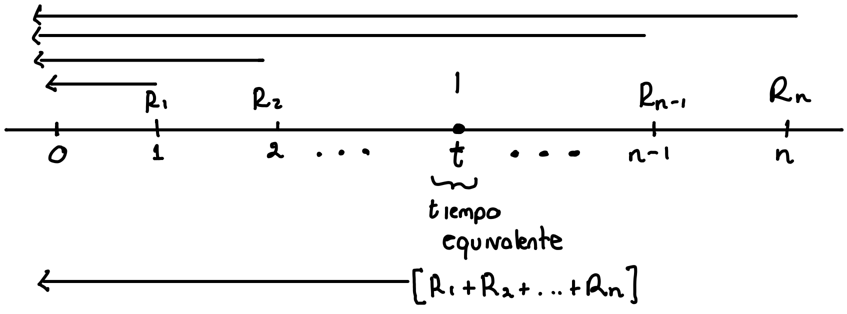
$$(1+S_n)^n \cdot \left(1+f_n^{n+k}\right)^k = (1+S_{n+k})^{n+k}$$

$$\hookrightarrow \quad \left(1+f_n^{n+k}\right)^k = \frac{(1+S_{n+k})^{n+k}}{(1+S_n)^n}$$

$$\hookrightarrow \quad \boxed{f_n^{n+k} = \left[\frac{(1+S_{n+k})^{n+k}}{(1+S_n)^n}\right]^{1/k} - 1}$$

[Ejercicio 18]
[Ejercicio 19]
[Ejercicio 20]

Tiempo equivalente



Aproximar

$$(1+i)^{K} \approx 1+iK$$

$$R_1 v + R_2 v^2 + \ldots + R_n v^n = [R_1 + R_2 + \ldots + R_n]\, v^t$$

aproximamos $(1+i)^{-K} \approx 1 - iK$

$\hookrightarrow R_1(1-i) + R_2(1-2i) + \ldots + R_n(1-in) = [R_1 + R_2 + \ldots + R_n](1-it)$

$$-i[R_1 + 2R_2 + \ldots + nR_n] = -it[R_1 + R_2 + \ldots + R_n]$$

$$\bar{t} = \frac{R_1 + 2R_2 + \ldots + nR_n}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n} \rightarrow \text{tiempo equivalente}$$

Duración

$\hookrightarrow R_1 v + R_2 v^2 + \ldots + R_n v^n = [R_1 + R_2 + \ldots + R_n]\, v^{\bar{d}}$

aproximamos $(1+i)^{K} \approx (1+iK)$

$$[R_1 v + R_2 v^2 + \ldots + R_n v^n](1 + i\bar{d}) = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

$$(R_1 v + R_2 v^2 + \ldots + R_n v^n) + i\bar{d}(R_1 v + R_2 v^2 + \ldots + R_n v^n) = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

$$i\bar{d}(R_1 v + R_2 v^2 + \ldots + R_n v^n) = (R_1 + R_2 + \ldots + R_n) - (R_1 v + R_2 v^2 + \ldots + R_n v^n)$$

$$i\bar{d}(R_1 v + R_2 v^2 + \ldots + R_n v^n) = (1-v)R_1 + (1-v^2)R_2 + \ldots + (1-v^n)R_n$$

$$\bar{d}(R_1 v + R_2 v^2 + \ldots + R_n v^n) = R_1\left[\frac{1-v}{i}\right] + R_2\left[\frac{1-v^2}{i}\right] + \ldots + R_n\left[\frac{1-v^n}{i}\right]$$

nota:

$$\frac{1-v^K}{i} = \sum_{j=1}^{K} v^j \geq \sum_{j=1}^{K} v^K = K v^K$$

$$\bar{d}(R_1 v + R_2 v^2 + \ldots + R_n v^n) = R_1 v + R_2 2v^2 + \ldots + R_n \cdot n v^n$$

$$\bar{d} = \frac{R_1 v + 2R_2 v^2 + \ldots + nR_n v^n}{R_1 v + R_2 v^2 + \ldots + R_n v^n}$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{j=1}^{n} j R_j v^j}{\sum_{j=1}^{n} R_j v^j} \rightarrow \text{duración}$$

Tiempo equivalente en Bonos

$$R_j = Fr \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$R_j = Fr + C \qquad j = n$$

$$\bar{t} = \frac{\sum_{j=1}^{n} j R_j}{\sum_{j=1}^{n} R_j} = \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} j\,Fr\right] + C \cdot n}{\left[\sum_{j=1}^{n} Fr\right] + C} = \frac{Fr\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + Cn}{Fr \cdot n + C}$$

en el ejemplo

$n = 4$

$Fr = 50$

$C = 1000$

$$\bar{t} = \frac{(50)\left(\frac{4(5)}{2}\right) + (1000)(4)}{(50)(4) + 1000} = \frac{4500}{1200} = 3.75$$

Duración en Bonos

$$\bar{d} = \frac{\sum_{j=1}^{n} j R_j v^j}{\sum_{j=1}^{n} R_j v^j} = \frac{Fr\left[\sum_{j=1}^{n} j v^j\right] + C \cdot n \cdot v^n}{Fr\left[\sum_{j=1}^{n} v^j\right] + C v^n}$$

$$= \frac{Fr\left(a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i}\right) + C \cdot n \cdot v^n}{Fr\, a_{\overline{n}|} + C v^n}$$

recordemos:

anualidad creciente en progresión aritmética

$$vp = R a_{\overline{n}|} + \frac{Q}{i}\left(a_{\overline{n}|} - nv^n\right)$$

$$i\, a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i}$$

$$= \frac{i\, a_{\overline{n}|} + a_{\overline{n}|} - nv^n}{i}$$

$$= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i}$$

$$\bar{d} = \frac{Fr\left(\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i}\right) + C \cdot n \cdot v^n}{Fr\, a_{\overline{n}|} + Cv^n}$$

$(1+i)a_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}$

Volatilidad

$$\bar{V} = \frac{-P'(i)}{P(i)}$$

$P(i) \rightarrow$ precio de bono a una cierta tasa i

Sabemos que:

$$P(i) = \sum_{t=1}^{n} R_t V^t$$

$$v^t = (1+i)^{-t}$$

$$\frac{dv^t}{di} = -t\,(1+i)^{-t-1} = -t\, v^{t+1}$$

luego

$$P'(i) = \frac{d\,P(i)}{di} = \frac{d}{di}\left(\sum_{t=1}^{n} R_t v^t\right) = -\sum_{t=1}^{n} t R_t V^{t+1}$$

$$= -v \sum_{t=1}^{n} t R_t V^t$$

entonces

$$\bar{V} = \frac{v\left(\sum_{t=1}^{n} t R_t v^t\right)}{\sum_{t=1}^{n} R_t v^t} = \frac{\bar{d}}{1+i} \rightarrow$$ volatilidad o duración modificada

Realizamos la siguiente aproximación

$$P(i+\varepsilon) \approx P(i) + \varepsilon\, P'(i)$$

y como

$$\bar{v} = -\frac{P'(i)}{P(i)} \Rightarrow P'(i) = -\bar{V}\, P(i)$$

entonces:

$$P(i+\varepsilon) \approx P(i) + \varepsilon\left[-\bar{\nu}\, P(i)\right]$$

$$P(i+\varepsilon) \approx P(i)\left(1 - \varepsilon \bar{\nu}\right)$$