Informe Transformación 2D

El script para la resolución del problema de la transformación de Helmert bidimensional mediante el Método General se realizó en Matlab.

Los datos iniciales se introdujeron en un archivo de texto en formato ".txt":

Pto./Coord.	x_A	y_A	σ_{x_A}	σ_{y_A}	x_B	y_B	σ_{x_B}	σ_{y_B}
1	50,000	100,000	0,100	0,100	320,392	−67,890	0,060	0,050
2	75,000	80,000	0,110	0,150	320,571	−97,243	0,060	0,050
3	130,000	110,000	0,130	0,200	373,817	−119,309	0,060	0,050
4	145,000	30,000	0,230	0,080	325,399	−176,423	0,060	0,050
5	61,000	25,000	0,100	0,080	273,330	−119,095	0,060	0,050
6	108,000	−10,000	0,110	0,140	275,389	−172,958	0,060	0,050

En este problema se tienen incertidumbre de las coordenadas x, y, x' e y' y los parámetros que se quieren obtener son: **Rotación (α), Escala (L), Desplazamiento en x (Tx') y Desplazamiento en y (Ty')**.

Para la realización del problema se utilizaron las variables transformadas:

- a = Lcos(α)
- b = Lsen(α)

En este caso, se ha de tener en cuenta que se requiere de 2 funciones para obtener el punto de destino.

$$\begin{cases} f_1(a,b,T_{x'},T_{y'}) = a\,x + b\,y + T_{x'} - x' = 0, \\ f_2(a,b,T_{x'},T_{y'}) = a\,y - b\,x + T_{y'} - y' = 0 \end{cases}$$

A continuación, fue necesario formar las matrices del sistema:

- Matriz de diseño

$$\mathrm{J}^{2c\times n} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_0^{(1)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_0^{(1)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial T_{x'}}\right)_0^{(1)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial T_{y'}}\right)_0^{(1)} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial a}\right)_0^{(1)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial b}\right)_0^{(1)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial T_{x'}}\right)_0^{(1)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial T_{y'}}\right)_0^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_0^{(i)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_0^{(i)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial T_{x'}}\right)_0^{(i)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial T_{y'}}\right)_0^{(i)} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial a}\right)_0^{(i)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial b}\right)_0^{(i)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial T_{x'}}\right)_0^{(i)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial T_{y'}}\right)_0^{(i)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\right)_0^{(c)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial b}\right)_0^{(c)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial T_{x'}}\right)_0^{(c)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial T_{y'}}\right)_0^{(c)} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial a}\right)_0^{(c)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial b}\right)_0^{(c)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial T_{x'}}\right)_0^{(c)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial T_{y'}}\right)_0^{(c)} \end{bmatrix}$$

- Matriz de observaciones

$$\mathbf{B}^{2c\times m} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0^{(1)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0^{(1)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x'}\right)_0^{(1)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y'}\right)_0^{(1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0^{(1)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_0^{(1)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x'}\right)_0^{(1)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y'}\right)_0^{(1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0^{(c)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0^{(c)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x'}\right)_0^{(c)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y'}\right)_0^{(c)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0^{(c)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_0^{(c)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x'}\right)_0^{(c)} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y'}\right)_0^{(c)} \end{bmatrix}$$

- Matriz de vector independiente

$$\mathbf{K}^{2c\times 1} = \begin{bmatrix} -f_1(a,b,T_{x'},T_{y'})_0^{(1)} \\ -f_2(a,b,T_{x'},T_{y'})_0^{(1)} \\ \vdots \\ -f_1(a,b,T_{x'},T_{y'})_0^{(i)} \\ -f_2(a,b,T_{x'},T_{y'})_0^{(i)} \\ \vdots \\ -f_1(a,b,T_{x'},T_{y'})_0^{(c)} \\ -f_2(a,b,T_{x'},T_{y'})_0^{(c)} \end{bmatrix}$$

- Matriz de pesos

$$\mathbf{P}^{m\times m} = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{x_1}^2} & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{y_1}^2} & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{x_1'}^2} & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{y_1'}^2} & \cdots & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{x_c}^2} & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{y_c}^2} & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{x_c'}^2} & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{y_c'}^2} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1}$$

Como criterio de parada de los parámetros [α, L, Tx’, Ty’] se utilizaron los valores:

$$[7{,}8448 \cdot 10^{-7} \quad 9{,}6216 \cdot 10^{-8} \quad 0{,}0001 \quad 0{,}0001]$$

Como resultados del script se obtiene:

```
VALORES INICIALES [α, L, Tx, Ty]:
Rotación: 51.0115
Escala: 0.9195
Desplazamiento en x: 220.0522
Desplazamiento en y: -90.0103
```

```
--------------------------------------------
RESULTADOS [α, L, Tx, Ty]:
Varianza de la unidad de peso:
vtpv: 3.5991
s02: 0.4499

Valores de Chi2:
Límite inferior Chi2: 2.1797
Valor Chi2: 3.5991
Límite superior Chi2: 17.5345

Se acepta H0. Se da por bueno el modelo

nº de iteraciones: 3

Parametros del modelo ajustados [α, L, Tx, Ty]:
Rotación: 51.0291
Escala: 0.9192
Desplazamiento en x: 220.0825
Desplazamiento en y: -89.9733
```

Los valores iniciales de los parámetros se obtuvieron mediante el Método de Ecuaciones de Observación y luego se usaron como residuos en la primera iteración del Método General. Los objetivos de esta práctica son:

- Obtener los parámetros de un modelo que permita realizar una transformación en dos dimensiones entre dos sistemas de referencia dados.
- Validar el modelo realizando un contraste de hipótesis.
- Estimar la matriz de varianzas y covarianzas.

En la iteración número 3, cuando se cumplieron las condiciones de ajuste, se obtuvieron los siguientes parámetros:

- $\alpha = 51.0291$ º
- $L = 0.9192$
- $Tx' = 220.0825$ m
- $Ty' = -89.9733$ m

Estos resultados son significativamente diferentes de los valores iniciales y requirieron un gran número de iteraciones para que la solución convergiera.

Además, el contraste de hipótesis se realizó con un nivel de confianza de 0.95, en el cual:

- H0: $\sigma 1 = \sigma 2$
- H1: $\sigma 1 \neq \sigma 2$

Si el ajuste pasa la prueba de bondad, significa que la desviación a priori es similar a la desviación a posteriori, y el modelo es válido. De lo contrario, no lo es, y será necesario aumentar el número de observaciones y aplicar Métodos Robustos para identificar posibles errores groseros.

En este caso, utilizando los datos del archivo “dataTransform2D.txt”, el modelo pasó el contraste de hipótesis, situándose dentro del intervalo de confianza de la distribución Chi-cuadrado.

Finalmente, en la matriz de covarianzas, las desviaciones típicas de los parámetros [α, L, Tx’, Ty’] se encuentran en la diagonal, mientras que el resto de la matriz está compuesto por las covarianzas. Se observa una mayor varianza *a posteriori* en el desplazamiento en x que en el desplazamiento en y.

```
Matriz de varianzas y covarianzas:

Exx =

    0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000
   -0.0000    0.0000   -0.0001   -0.0000
    0.0000   -0.0001    0.0052    0.0000
    0.0000   -0.0000    0.0000    0.0045

Desviaciones típicas:
De la rotación: 125.0470
De la escala: 993.3633
De la traslación en X: 71.9190
De la traslación en Y: 67.3210
```

Las desviaciones típicas observadas están medidas en segundos [“], partes por millón [ppm], milímetros [mm] y milímetros [mm] respectivamente, observándose valores de desviación muy bajos de **Rotación (α), Escala (L), Desplazamiento en x (Tx’) y Desplazamiento en y (Ty’).**