UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS
DAS5142 - SISTEMAS DINÂMICOS - SEM. 2018-2

Trabalho prático: Análise e Controle de Sistemas Dinâmicos Não-lineares

Prof. Daniel J. Pagano

Roteiro do trabalho prático:

Escolher um dos seguintes sistemas dinâmicos mecânicos apresentados na Seção (II):

- Manipulador plano com 2 graus de liberdade (2DOF)
- Pêndulo com roda inercial
- Sistema de levitação por ar

Para o sistema escolhido:

- representar o modelo do sistema por equações de estado. Estudar a sua dinâmica (equilíbrios, estabilidade dos equilíbrios, ciclos limites, possíveis bifurcações ao variar algum parâmetro previamente escolhido).
- Simular o sistema em malha aberta e plotar o espaço de estados para as variáveis do sistema.
- Projetar controladores utilizando as técnicas de controle para sistemas não lineares estudadas na teoria.
- Os objetivos de controle assim como as restrições na ação de controle serão definidas para cada caso em particular. Para ambos casos, o seguimento ("tracking") de uma dada referência previamente calculada será um das tarefas a cumprir pelo sistema de controle. Aspectos de robustez do controlador projetado deveram também ser considerados.
- Simular o sistema em malha fechada. Implementar para tal uma interface gráfica utilizando as ferramentas do ambiente Matlab.
- Entregar um relatório sobre o trabalho desenvolvido na forma de artigo técnico (2 colunas, 6 páginas, contendo: introdução, resumo, desenvolvimento do trabalho, resultados, conclusões)

Uma breve introdução teórica sobre a obtenção dos modelos dinâmicos para os sistemas mecânicos estudados é apresentada na Seção (I).

I. EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE

A função Lagrangiana ou Lagrangiano de um sistema mecânico é definida por

$$\pounds = K - V \tag{1}$$

onde K é a energia cinética do sistema e V é a energia potencial do mesmo.

A função Lagrangiana (1) para um sistema mecânico com 2 graus de liberdade (q_1, q_2) e com simetria cinética em relação a q_1, é dado pela seguinte expressão

$$\pounds(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{11}(q_2) & m_{12}(q_2) \\ m_{21}(q_2) & m_{22}(q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - V(q_1, q_2) \tag{2}$$

onde $V(q_1, q_2)$ é a energia potencial do sistema e os termos $m_{11}(q_2), m_{12}(q_2), m_{21}(q_2), m_{22}(q_2)$ formam a matriz de inercia do sistema.

No que se segue, consideraremos que a energia cinética é a soma da energia cinética translacional mais a energia cinética rotacional, i.é. $K = K_t + K_r$, de um dado sistema físico. A energia cinética translacional é dada por

$$K_t = \frac{1}{2} v^T m v \tag{3}$$

onde $v = (v_1 v_2)^T$ é o vetor das velocidades lineares do centro de massa e $m = diag(m_1, m_2)$.

A energia cinética rotacional é

$$K_r = \frac{1}{2}\omega_1^T I_1 \omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2^T I_2 \omega_2 \tag{4}$$

onde w_i representa a velocidade angular e I_i os momentos de inercia rotacionais.

As equações de movimento de Euler-Lagrange são

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \pounds}{\partial \dot{q}}\right) \quad - \frac{\partial \pounds}{\partial q} \quad = \begin{bmatrix} F_1(q) \\ F_2(q) \end{bmatrix} \tau \tag{5}$$

onde $\tau \in \Re$ é a entrada de controle e para todo $q \in Q$, $F_1(q) \neq 0$ ou $F_2(q) \neq 0$. Para os casos especiais onde $F(q) = (1, 0)^T$ ou $F(q) = (0, 1)^T$ o sistema não tem entradas interativas. Em caso contrario, o sistema apresenta entradas acopladas. As equações de movimento (5) podem ser expressas explicitamente como

$$\begin{array}{c} m_{11}(q_2)\ddot{q_1} + m_{12}(q_2)\ddot{q_2} + m'_{11}(q_2)\dot{q_1}\dot{q_2} + m'_{12}(q_2)\dot{q_2}^2 + g_1(q_1, q_2) = F_1(q)\tau \\ m_{21}(q_2)\ddot{q_1} + m_{22}(q_2)\ddot{q_2} - \frac{1}{2}m'_{11}(q_2)\dot{q_1}^2 + \frac{1}{2}m'_{22}(q_2)\dot{q_2}^2 + g_2(q_1, q_2) = F_2(q)\tau \end{array} \tag{6}$$

onde $'$ denota a derivada $\frac{d}{dq_2}$ e os termos de gravidade são dados por

$$g_i(q_1, q_2) = \frac{\partial V(q_1, q_2)}{\partial q_i}$$

com $i = 1, 2$.

II. Sistemas Mecânicos

A. *Manipulador plano com 2 graus de liberdade*

Um manipulador plano com dois graus de liberdade (2-DOF: *Two Degrees of Freedom*) (vide Fig. 1), sendo os ângulos das articulações definidos por θ_1, θ_2, tem uma matriz de inércia dada por

$$\begin{array}{rcl} m_{11}(\theta_2) & = & I_1 + I_2 + m_1 l_1^2 + (m_2 + m_p)L_1^2 + m_2(l_2^2 + L_2^2) + 2L_1(m_2 l_2 + m_p L_2)\cos\theta_2 \\ m_{12}(\theta_2) & = & I_2 + m_2 l_2^2 + m_p L_2^2 + L_1(m_2 l_2 + m_p L_2)\cos\theta_2 \\ m_{22} & = & I_2 + m_2 l_2^2 + m_p L_2^2 \end{array} \tag{7}$$

e $m_{21}(\theta_2) = m_{12}(\theta_2)$. A massa, momento de inércia, comprimento e comprimento do centro de massa denota-se por m_i, I_i, L_i, l_i respectivamente. A energia potencial do sistema em relação ao plano vertical é

$$V(\theta_1, \theta_2) = (m_1 l_1 + (m_2 + m_p)L_1)g\sin(\theta_1) + (m_2 l_2 + m_p L_1)g\sin(\theta_1 + \theta_2) \tag{8}$$

De (6) podemos obter as equações de movimento para o sistema 2-DOF como

$$\begin{array}{c} m_{11}(\theta_2)\ddot{\theta}_1 + m_{12}(\theta_2)\ddot{\theta}_2 + h_1(\theta, \dot{\theta}) = \tau_1 \\ m_{21}(\theta_2)\ddot{\theta}_1 + m_{22}(\theta_2)\ddot{\theta}_2 + h_2(\theta, \dot{\theta}) = \tau_2 \end{array} \tag{9}$$

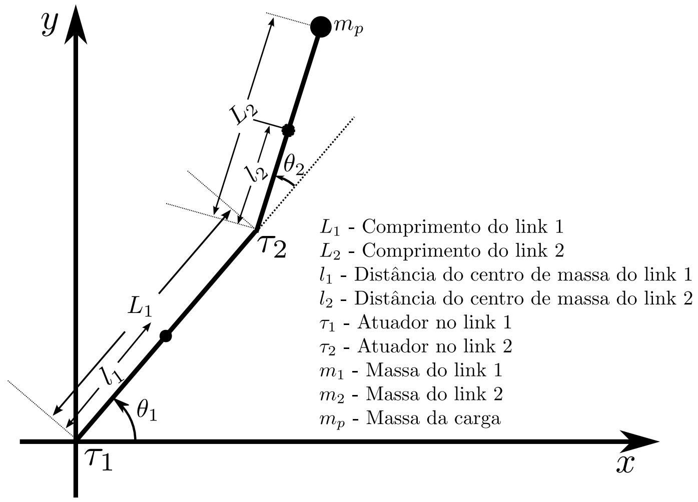


Fig. 1: Manipulador plano com dois graus de liberdade.

onde

$$\begin{array}{rcl} h_1(\theta,\dot{\theta}) & = & -L_1(m_2 l_2 + m_p L_2)\sin(\theta_2)(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + g_1(\theta_1,\theta_2) \\ h_2(\theta,\dot{\theta}) & = & L_1(m_2 l_2 + m_p L_2)\sin(\theta_2)\dot{\theta}_1^2 + g_2(\theta_1,\theta_2) \\ g_1(\theta_1,\theta_2) & = & (m_1 l_1 + (m_2+m_p)L_1)g\cos(\theta_1) + (m_2 l_2 + m_p L_1)g\cos(\theta_1+\theta_2) \\ g_2(\theta_1,\theta_2) & = & (m_2 l_2 + m_p L_1)g\cos(\theta_1+\theta_2) \end{array} \tag{10}$$

A ação de controle pode ser aplicada através dos torques $[\tau_1, \tau_2]$ sobre θ_1 ou θ_2 para seguir uma dada trajetória de referência. Porém, em sistemas de laboratório, se atuamos somente sobre θ_1 com $(\tau_1, \tau_2) = (1, 0)$ em (9) o sistema 2-DOF denomina-se PENDUBOT . No caso contrario, atuando somente sobre θ_2 com $(\tau_1, \tau_2) = (0, 1)$ em (9), denomina-se ACROBOT. Além pode ser considerado atrito dinâmico F_{At} representado por:

$$F_{At}(\dot{\theta}) = \left[At_1\dot{\theta}_1 At_2\dot{\theta}_2 \right]^T \tag{11}$$

onde $At_{1,2}$ é o coeficiente de atrito dinâmico; a equação (11) vai complemetar a equação dinâmica em (9).

A trajetória de referência desejada em coordenadas cartesianas a ser seguida pelo manipulador é especificada na Fig. 2.

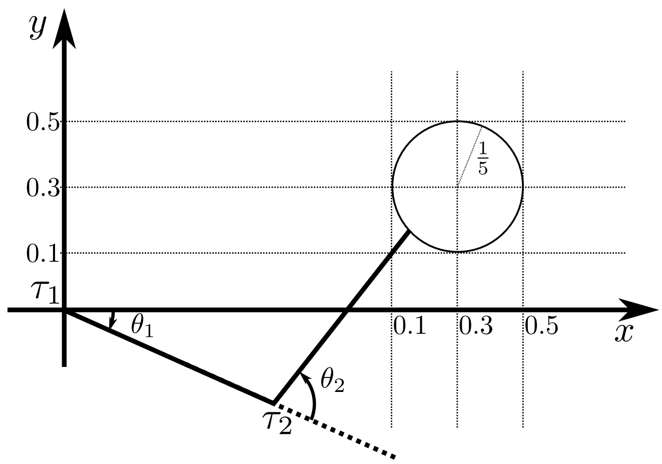


Fig. 2: Referência para o manipulador com dois graus de liberdade. Note que θ_1 tem um sentido negativo.

1) Equilíbrios do sistema: Para que sistema permaneça em equilíbrio, é necessário que a taxa de variação dos estados seja nula. Na ocorrência desse evento, o sistema fica reduzido às seguintes equações:

$$\begin{aligned} A_1 \cos[\theta_1] + A_2 \cos[\theta_1 + \theta_2] &= \tau_1 && (12) \\ A_2 \cos[\theta_1 + \theta_2] &= \tau_2 && (13) \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} A_1 &= (m_1 l_1 + (m_2 + m_p) L_1) g && (14) \\ A_2 &= (m_2 l_2 + m_p L_1) g && (15) \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema com as equações 14 e 15, encontramos os ângulos dos equilíbrios para qualquer conjunto de torques.

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \pm \text{ArcCos}\left[\frac{A_1 A_2 (\tau_1 - \tau_2) \tau_2 \pm \sqrt{A_1^2 A_2^2 (A_1^2 - (\tau_1 - \tau_2)^2)(A_2^2 - \tau_2^2)}}{A_1^2 A_2^2}\right] && (16) \\ \theta_1 &= \pm \text{ArcCos}\left[\frac{\tau_1 - \tau_2}{A_1}\right] && (17) \end{aligned}$$

Quando os torques τ_1 e τ_2 são nulos, os pontos de equilíbrio são independentes das massas do sistema, são eles:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= 0, \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \text{(estável)} && (18) \\ \theta_2 &= 0, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{(instável)} && (19) \\ \theta_2 &= \pi, \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \text{(instável)} && (20) \\ \theta_2 &= \pi, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{(instável)} && (21) \end{aligned}$$

B. Sistema pêndulo com roda inercial

O sistema pêndulo com roda inercial consiste em um pêndulo invertido plano com uma roda que gira colocada na extremidade do mesmo (vide Fig. 3). A velocidade de giro da roda é controlado mediante uma entrada de controle. A base do pêndulo não é atuada.

O Lagrangiano do sistema é

$$\pounds(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M \dot{\theta} - V(\theta_1) \qquad (22)$$

onde $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T \in \Re^2$ denota as variáveis de estado do sistema e M é a matriz de inércia com

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1 + I_2 \\ m_{12} &= m_{21} = m_{22} = I_2 \end{aligned} \qquad (23)$$

onde l_1 é a distância desde o pivô até o centro de massa do pêndulo e L_1 é a distância desde o pivô até o centro de massa do rotor. A energia potencial é

$$V(\theta_1) = (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \cos(\theta_1) = m_0 g \cos(\theta_1) \qquad (24)$$

$$m_0 = (m_1 l_1 + m_2 L_1) \qquad (25)$$

e as equações de Euler-Lagrange são dadas por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \pounds}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \pounds}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \qquad (26)$$

ou

$$\begin{array}{rcl} m_{11}\ddot{\theta}_1 + m_{12}\ddot{\theta}_2 & = & g_1(\theta_1) \\ m_{21}\ddot{\theta}_1 + m_{22}\ddot{\theta}_2 & = & \tau \end{array} \tag{27}$$

onde $g_1(\theta_1) = m_0 g \sin(\theta_1)$. Em (27) pode ser considerado atrito dinâmico F_{At} representado por:

$$F_{At}(\dot{\theta}) = \left[At\,_1\dot{\theta}_1 At_2\dot{\theta}_2 \right]^T \tag{28}$$

onde $At_{1,2}$ é o coeficiente de atrito dinâmico

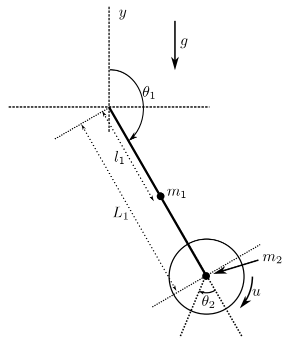


Fig. 3: Pêndulo com roda inercial.

O controle deve alcançar dois objetivos distintos:

1) Manter o pêndulo na posição vertical (invertido ver Fig. 4).
2) Fazê-lo oscilar na posição vertical em ângulos laterais de $\theta_{ref} = 15°$ (ver Fig. 5).

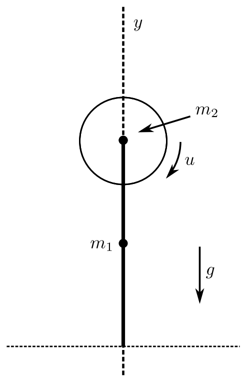


Fig. 4: Pêndulo com roda inercial (referência para pêndulo invertido).

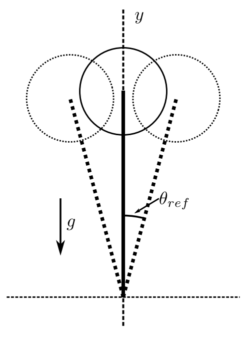


Fig. 5: Pêndulo com roda inercial (trajetória oscilante).

C. Sistema de levitação por ar

O modelo simplificado da dinâmica vertical de um sistema de levitação por ar, cujo esquema é representado na figura 6, é dado por

$$\ddot{z} = \alpha \left[\dot{z} - \frac{k}{z} u(t) \right]^2 - \frac{\rho_a k^2}{\rho_b z^3} u(t)^2 - g \tag{29}$$

com

$$\alpha = \frac{3\rho_a}{4a\rho_b} \tag{30}$$

onde $z(t) \geq 0$ é altura do corpo levitado (variável de estado do sistema) medida desde a base do tubo de acrílico, $a = 0.035m$ é o radio da esfera (corpo levitado), $\rho_a = 1.22\frac{Kg}{m^2}$ é a densidade do ar, $\rho_b = 80\frac{kg}{m^2}$ a densidade da esfera, $k = 1$ é uma constante que relaciona a ação de controle $u(t) \geq 0$ com o fluxo de ar gerado pelo ventilador, $g = 9.8\frac{m}{s^2}$ é a aceleração da gravidade.

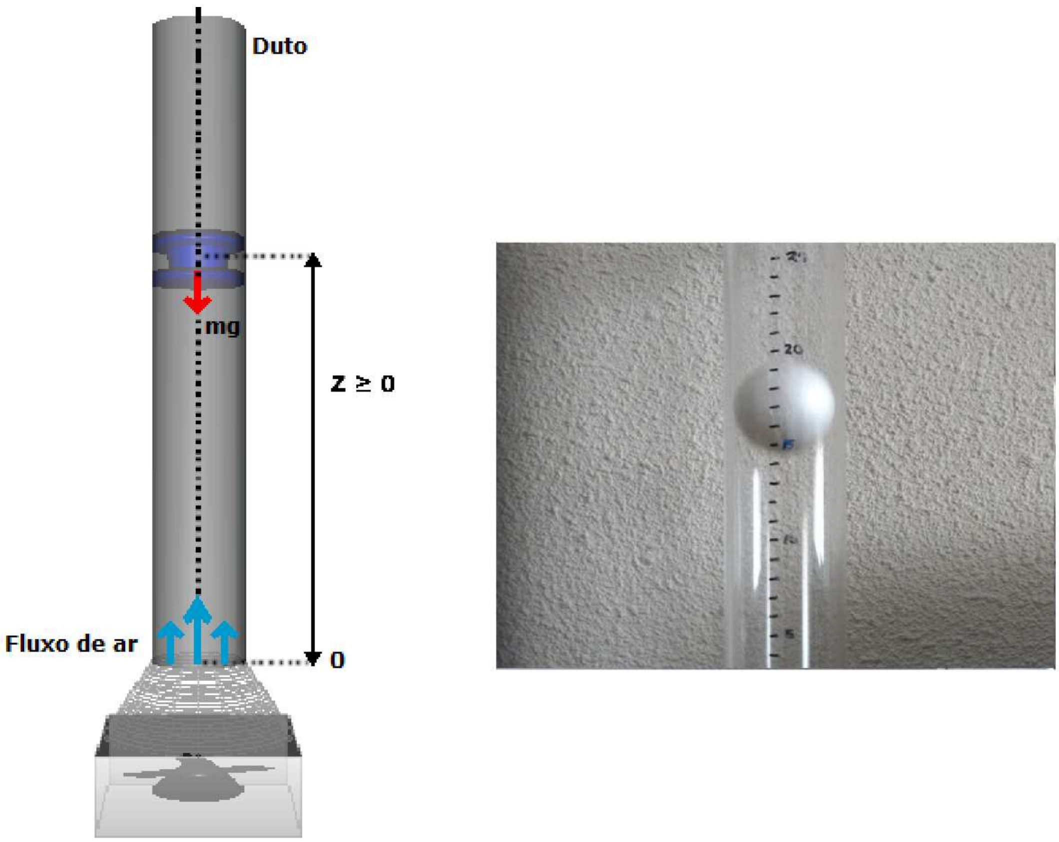


Fig. 6: Sistema de levitação por ar. O fluxo de ar vertical é gerado por um ventilador de computador e o corpo levitado é uma bola esférica que se movimenta dentro de um tubo de acrílico.

Objetivos de controle:

1) controlar o corpo levitado em uma dada altura de referência (pode ser a metade do tubo).
2) Fazê-lo oscilar em torno a uma dada posição vertical.

III. Anexos

A. *Valores numéricos*

The numeric values of the virtual pendulums are depicted below

Tabela I: Valores de parâmetros do Acrobot

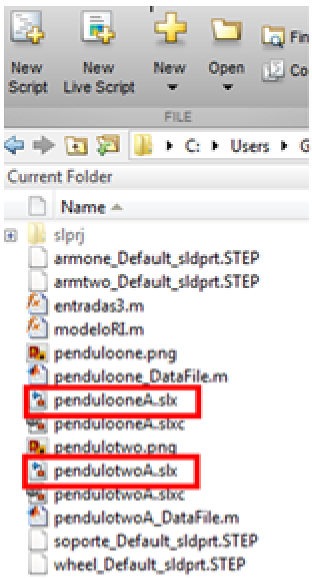
Parâmetro símbolo	**Valor** valor(unit)	**Parâmetro** símbolo	**Valor** valor(unit)
m_1	55.5 g	I_1	1.97e-4
m_2	41.6 g	I_2	9.58e-5
L_1	0.168 m	A_{t1}	0.007
L_2	0.14 m	A_{t2}	0.001
l_1	0.0973 m	g	9.8 m/s^2
l_2	0.07 m	τ_{max}	0.8

Tabela II: Valores de parâmetros do pendulo com roda inercial

Parâmetro símbolo	**Valor** valor(unit)	**Parâmetro** símbolo	**Valor** valor(unit)
m_1	55.5 g	I_1	1.97e-4
m_2	141 g	I_2	3.968e-5
L_1	0.168 m	A_{t1}	0.007
l_1	0.0973 m	A_{t2}	0.00001
τ_{max}	0.95	g	9.8 m/s^2

B. *Manual do usuario do Virtual pendulum*

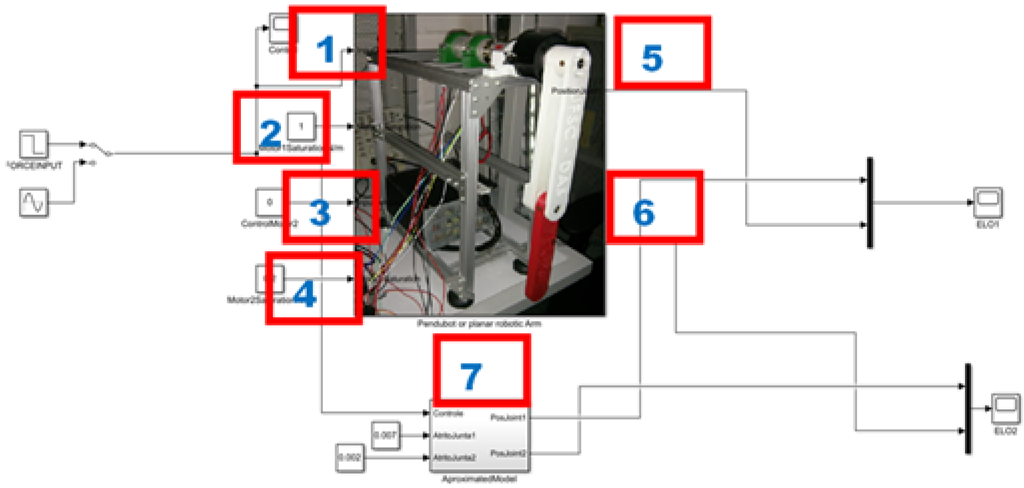
Firstly set the folder VirtualPendul in the path of Matlab. Then as depicted in the figure bellow open penduloneA.slx to Acrobot or pendulotwoA.slx to Inertial wheel based pendulum.



1) *Input-output description of virtual acrobot:*

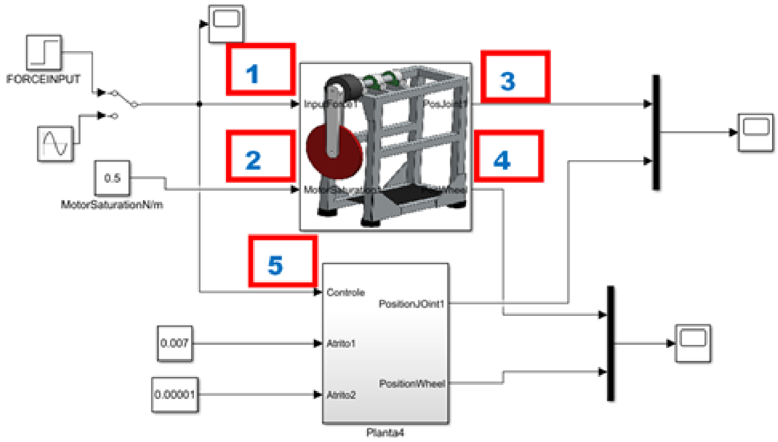
1) Control input (torque) to actuate motor of joint 1
2) Saturation limit of motor working on joint 1
3) Control input (torque) to actuate motor of joint 2. Note that in the case of Acrobot it must be equal to zero
4) Saturation limit of motor working on joint 2

5) Position output (degrees) of arm 1
6) Position output (degrees) of arm 2
7) Approached model representing dynamics of Acrobot



2) Input-output description of inertial wheel virtual pendulum:

1) Control input (torque) to actuate motor of inertial wheel
2) Saturation limit of motor working on inertial wheel
3) Position output (degrees) of arm 1
4) Position output (degrees) of inertial wheel
5) Approached model block representing dynamics of inertial wheel pendulum



3) Modify initial conditions: To change initial conditions open the files $penduloneA_DataFile.m$ to Acrobot or $pendulotwoA_DataFile.m$ to inertial wheel pendulum, then modify the values in degrees as depicted in the figure below.

```
%============= Joint =============%
%X Revolute Primitive (Rx) %Y Revolute Primitive (Ry) %Z Revolute Primitive (Rz)
%X Prismatic Primitive (Px) %Y Prismatic Primitive (Py) %Z Prismatic Primitive (Pz) %Spherical Primitive (S)
%Constant Velocity Primitive (CV) %Lead Screw Primitive (LS)
%Position Target (Pos)

%Initialize the RevoluteJoint structure array by filling in null values.
smiData.RevoluteJoint(2).Rz.Pos = 0.0;
smiData.RevoluteJoint(2).ID = '';

smiData.RevoluteJoint(1).Rz.Pos = -90;  % deg
smiData.RevoluteJoint(1).ID = '[soporte-1:-:armone-1]';%%CHANGE INITIAL CONDITIONS JOINT1

smiData.RevoluteJoint(2).Rz.Pos = 0;  % deg
smiData.RevoluteJoint(2).ID = '[armone-1:-:armtwo-1]';%%CHANGE INITIAL CONDITIONS JOINT2
```