Modelagem e Controle de Pêndulo Subatuado (Pendubot)

Enrique T. R. Pinto
CTC-DAS UFSC
Florianópolis, Brasil
enriquetrp@hotmail.com

***Abstract*—Este relatório consiste na descrição do processo e resultados da modelagem e controle de um pêndulo subatuado, popularmente conhecido como *pendubot*. A abordagem utilizada é baseada em um controle PD com realimentação parcialmente-linearizante para o processo de *swing-up* e em controle LQR do sistema linearizado em torno do equilíbrio desejado.**

***Index Terms*—pendubot, controle, modelagem, swing-up, realimentação linearizante, LQR, linearização**

I. Introdução

O *pendubot* consiste de um pêndulo duplo com apenas um atuador, localizado no "ombro" do pêndulo. Por ser um sistema subatuado apresenta possíveis desafios no quesito de controle, pois não se pode controlar arbitrariamente bem todos os estados do sistema, isto é, não se pode colocar o sistema em qualquer trajetória no espaço de estados com precisão arbitrária. Assim é necessário o uso de duas etapas no controle, o swing-up e a estabilização.

O problema em questão envolve levar o sistema descrito para $\theta_1 = \pi/2$ e $\theta_2 = 0$. Além disso é necessário manter o sistema nesse estado com robustez suficiente a perturbações.

II. Modelo

A. Modelo Não-Linear

O sistema a ser modelado está representado graficamente na Fig. 1. Baseado na ilustração, o modelo do pendubot pode ser mais facilmente obtido a partir da solução da equação de Euler-Lagrange para o Lagrangiano do sistema. Estas são padrão na bibliografia e não serão expostas aqui.

Após sucessivas manipulações algébricas, são obtidas as seguintes equações:

$$m_{11}(\theta_2)\ddot{\theta}_1 + m_{21}(\theta_2)\ddot{\theta}_2 + h_1(\theta, \dot{\theta}) = \tau \tag{1}$$

$$m_{21}(\theta_2)\ddot{\theta}_1 + m_{22}(\theta_2)\ddot{\theta}_2 + h_2(\theta, \dot{\theta}) = 0 \tag{2}$$

As expressões para m_{ij} e h_i, bem como o restante das expressões não descritas explicitamente no restante do texto, estão no anexo; além disso as dependências em θ e $\dot{\theta}$ serão omitidas a partir de agora para fins de organização. Manipulando (1) e (2) para obter $\ddot{\theta}_i$ em função apenas dos outros parâmetros, temos:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\tau - h_1 + h_2 \frac{m_{12}}{m_{22}}}{m_{11} - \frac{m_{12} m_{21}}{m_{22}}} = f_1 \tag{3}$$

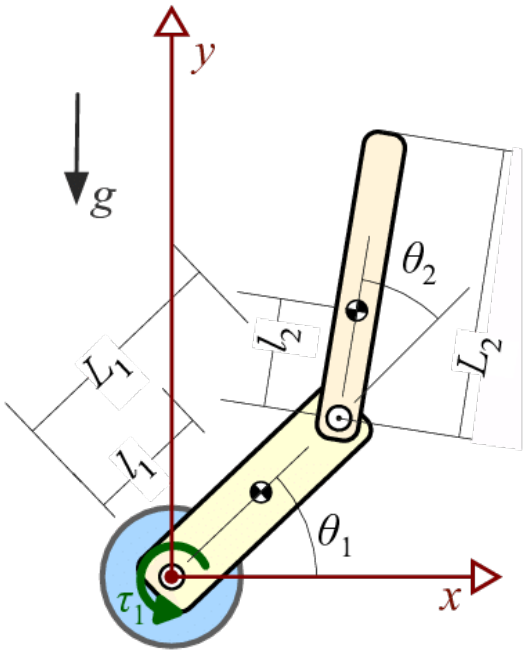

Fig. 1. Modelo do pendubot, onde l_i corresponte à distância da articulação até o centro de massa do segmento.

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\tau - h_1 + h_2 \frac{m_{11}}{m_21}}{m_{12} - \frac{m_{22} m_{11}}{m_{21}}} = f_2 \tag{4}$$

B. Modelo Linearizado

A partir de (3) e (4), definindo os estados do sistema como:

$$x_1 = \theta_1;\ x_2 = \theta_2;\ x_3 = \dot{\theta}_1;\ x_4 = \dot{\theta}_2 \tag{5}$$

Definimos então a dinâmica do sistema, onde 'x' é o vetor de estados, como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Linearizando esse sistema em torno de um equilíbrio, obtemos as matrizes **A** (jacobiano) e **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_1}{dx_3} & \frac{df_1}{dx_4} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \frac{df_2}{dx_3} & \frac{df_2}{dx_4} \end{bmatrix} \; e \; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{df_1}{d\tau} \\ \frac{df_2}{d\tau} \end{bmatrix} \tag{7}$$

As derivadas, por serem razoavelmente extensas e tediosas de serem calculadas (além de serem propensas a erros durante o cálculo manual), foram determinadas utilizando o Wolfram Mathematica. O código utilizado encontra-se no anexo, haja vista que as expressões são muito extensas. Avaliando **A** e **B** no equilíbrio $x = (\pi/2,\ 0,\ 0,\ 0)^T$ consegue-se:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 39.107 & -24.353 & 0 & 0 \\ -7.717 & 159.355 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; e \; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 522.69 \\ -1376.07 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Este modelo será utilizado para a obtenção de uma lei de controle que estabiliza o sistema no estado desejado.

III. Controle

Já tendo um modelo linearizado do sistema, podemos iniciar então o procedimento do projeto de um controlador que estabilize o sistema em $x = (\pi/2,\ 0,\ 0,\ 0)^T$.

Antes de tentar projetar o controle é necessário verificar a controlabilidade do sistema linearizado, que nos intui sobre a controlabilidade do sistema não-linear numa vizinhança suficientemente próxima do ponto de linearização. A matriz de controlabilidade obtida é:

$$\Phi = 10^5 \begin{bmatrix} 0 & 0.0052 & 0 & 0.5395 \\ 0 & -0.0138 & 0 & -2.2332 \\ 0.0052 & 0 & 0.5395 & 0 \\ -0.0138 & 0 & -2.2332 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Que claramente possui posto 4 e é, portanto controlável. Assim partimos para obter uma lei de controle que estabilize o sistema numa vizinhança do ponto de linearização.

A. Controle Estabilizador

A abordagem utilizada é baseada no problema do Regulador Linear Quadrático (LQR). O projeto envolve encontrar o vetor **K**, tal que a lei de controle seja $u = -K\Delta x$, e que minimize o funcional definido em (10).

$$\Lambda = \int_{t_0}^{\infty} \Delta x^T Q \Delta x + u^T R u \; dt \tag{10}$$

A solução deste problema envolve obter a solução para a Equação de Riccati Algébrica Contínua (CARE):

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = -Q \tag{11}$$

Onde:

$$K = R^{-1}B^T P \tag{12}$$

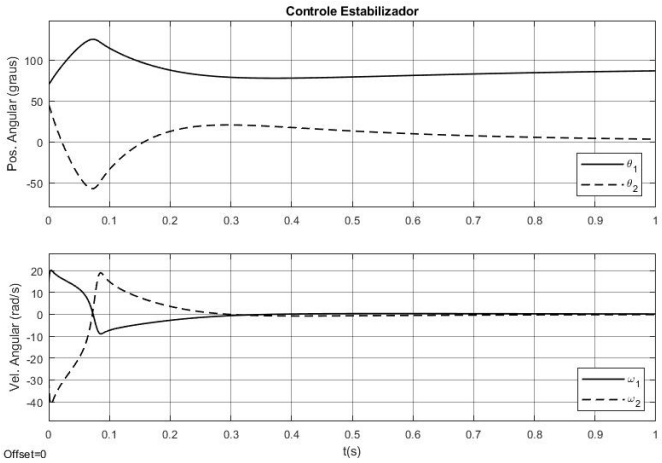

Fig. 2. Resposta dos estados do sistema sob a ação do controle estabilizador para $x_0 = [7\pi/18,\ \pi/4,\ 15,\ -30]$

Após extensivos testes, foram definidas as seguintes matrizes **Q** e **R**:

$$Q = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; e \; R = 3 \tag{13}$$

Resolvendo a CARE no Matlab se obtém **K**:

$$K = \begin{bmatrix} -30.416 & -26.454 & -5.202 & -2.748 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Esta lei de controle obtida será, a partir de agora, referenciada como "controle estabilizador".

A resposta do sistema para $x_0 = [7\pi/18,\ \pi/4,\ 15,\ -30]$, que corresponde a uma configuração de estados típica logo ao fim do processo de *swing-up*, está na Fig. 2. Percebe-se que o controle foi capaz de estabilizar o sistema, trazendo os estados para $[\pi/2,\ 0,\ 0,\ 0]$. Resta agora definir o controle que levará o sistema para a faixa de estados onde o controle estabilizador funciona corretamente.

B. Swing-up

Além do controle estabilizador, é necessária outra lei de controle para levar o sistema para estados onde o controle linearizado é capaz de estabilizar o sistema. Esta outra lei de controle, denominada de *swing-up*, foi implementada neste projeto por um controlador PD aliado à realimentação linearizante em $\ddot{\theta}_1$. Partindo de (3) e definindo:

$$\alpha = -h_1 + h_2 \frac{m_{11}}{m_{21}} \tag{15}$$

$$\beta = m_{11} - \frac{m_{12}m_{21}}{m_{22}} \tag{16}$$

é possível reescrever (3) como:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\tau + \alpha}{\beta} \tag{17}$$

Definindo τ como:

$$\tau = v\beta - \alpha \tag{18}$$

Temos que:

$$\ddot{\theta}_1 = v \tag{19}$$

Ou seja, $\ddot{\theta}_1$ é linear em v. Agora podemos utilizar um controle PD para o *swing-up*.

Antes de expor os resultados obtidos, é importante descrever os critérios utilizados e o contexto do problema. Deseja-se levar o sistema para um estado estabilizável através do *swing-up* e então chavear o controle para o controle estabilizador. Para projetar o *swing-up* foram escolhidos K_p e K_d que trouxessem θ_1 próximo de $\pi/2$ (em torno de 70^o) com $\dot{\theta_2}$ o menor possível. Definimos então o controle:

$$v = K_p(\theta_{1ref} - \theta_1) - K_d\dot{\theta_1} \ ; \ \text{com} \ \theta_{1ref} = \pi/2 \tag{20}$$

Com $\theta_{1ref} = \pi/2$ Após extensivos testes, concluiu-se que os parâmetros $K_p = 90$ e $K_d = 12$ satisfazem as condições necessárias, atingido estados muito próximos aos utilizados na simulação do controle estabilizador da Fig. 2. Na realidade, as condições iniciais da simulação da Fig 2 foram obtidas a partir dos valores aproximados dos estados da simulação do *swing-up* quando θ_1 atinge 70^o pela primeira vez.

Abordagens alternativas para o *swing-up*, envolvendo funções de Lyapunov foram consideradas por serem possivelmente mais robustas ao controle PD descrito, porém a limitação de tempo e a sua complexidade maior de implementação inclinou o projetista a escolher o controle aqui demonstrado.

C. Sistema Chaveado

Uma vez iniciado o *swing-up* e atingindo estados propícios para o controle estabilizador, é necessário chavear a lei de controle do sistema. Assim são definidos limiares para θ_1 que ditam qual lei de controle age naquele ângulo. Os limiares estão descritos em (21)

$$\begin{cases} ||\theta_1 - \pi/2|| < \frac{22}{180}\pi & \rightarrow \text{Controle PD} \\ \frac{22}{180}\pi \leq ||\theta_1 - \pi/2|| < \frac{23}{180}\pi & \rightarrow \tau = 0 \\ ||\theta_1 - \pi/2|| \geq \frac{23}{180}\pi & \rightarrow \text{Controle Estabilizador} \end{cases} \tag{21}$$

Percebe-se a existência de uma pequena faixa de ângulos na qual $\tau = 0$, esta foi a solução encontrada para evitar que o "overshoot" excessivo em θ_1 pudesse tirar o sistema da região do controle estabilizador e levá-lo para a região do PD, que com certeza não estabiliza o sistema no ponto desejado. Soluções mais robustas e inteligentes são recomendadas, entretanto a limitação de tempo levou à solução em questão.

RESULTADOS

O modelo do sistema utilizado não considera o atrito, entretanto esta dinâmica não modelada afetou significativamente o desempenho do controle estabilizador, ao ponto deste, para coeficientes de atrito $\mu_1 = 0.007$ e $\mu_2 = 0.002$ (especificação do sistema, onde μ_i é o coeficiente de atrito da 'i'ésima articulação), não ser capaz de estabilizar o sistema partindo de estados iniciais relevantes na prática. Assim se pode recomendar que, em futuros desenvolvimentos desta abordagem no controle do *pendubot*, leve-se em conta a dinâmica de atrito

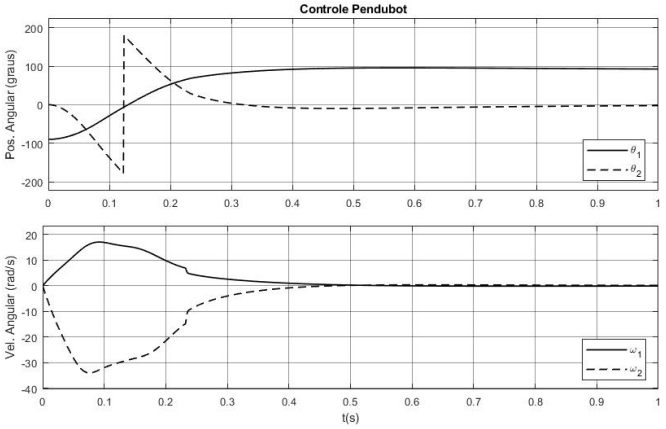

Fig. 3. Controle final para o *pendubot*

.

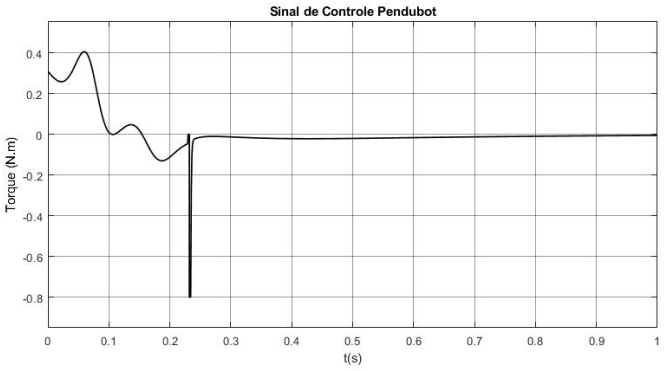

Fig. 4. Sinal de controle para o *pendubot*

.

no modelo para obter melhor perfomance no controle estabilizador. Por enquanto, todas as simulações foram realizadas com atrito nulo.

Partindo do estado $x_0 = [-\pi/2, \ 0, \ 0, \ 0]$, o equilíbrio estável do sistema, obtemos o resultado da Fig. 3

O "salto" de θ_2 na Fig. 3 ocorre pois os ângulos foram manipulados para serem representados sempre como o ângulo equivalente de menor valor absoluto, ou seja: $||\theta_i|| \leq \pi$.

O sistema foi inicialmente projetado despresando a saturação da entrada de controle, entretanto, após considerada a saturação de τ em $0.8N \cdot m$, o resultado obtido não foi substancialmente diferente. Os gráficos da Fig. 3 já incluem a saturação no controle e o sinal de controle no tempo está na Fig. 4.

CONCLUSÕES

Analisando as curvas obtidas é possível dizer que o objetivo primário do projeto foi atingido, entretanto algumas ressalvas devem ser feitas.

O modelo do sistema não considera atrito e portanto, com quase total certeza, não terá desempenho suficiente em uma realização prática devido à sensibilidade do sistema. As análises feitas em simulação do controle estabilizador

concluem que ele é incapaz de estabilizar o sistema partindo de $\theta_1 = \pi/2$ e θ_2 pouco maior que zero, estes resultados motivam a modelar a dinâmica do atrito e incluí-la em futuras versões deste projeto.

O controle de *swing-up* é aparentemente pouco robusto à variações paramétricas (é recomendado, para cada aplicação individual, ajustar o PD para o sistema em questão) e só funciona partindo do estado $x_0 = [-\pi/2,\ 0,\ 0,\ 0]$, soluções por funções de Lyapunov aparentam ser mais elegantes e robustas, porém mais complexas.

Em geral, considerando as limitações presentes, as soluções obtidas aparentam suficientes, resolvendo o problema proposto no início do relatório.

ANEXO

Equações

$$m_{11}(\theta_2) = I_1 + I_2 + m_1 l_1^2 + (m_2 + m_p)L_1^2 + m_2(l_2^2 + L_2^2) + 2L_1(m_2 l_2 + m_p L_2)cos\theta_2$$

$$m_{12}(\theta_2) = m_{21}(\theta_2) = I_2 + m_2 l_2^2 + m_p L_2^2 + L_1(m_2 l_2 + m_p L_2)cos\theta_2$$

$$m_{22} = I_2 + m_2 l_2^2 + m_p L_2^2$$

$$h_1(\theta, \dot{\theta}) = -L_1(m_2 l_2 + m_p L_2)sin(\theta_2)(2\dot{\theta_1}\dot{\theta_2} + \dot{\theta_2^2}) + g_1(\theta, \dot{\theta})$$

$$h_2(\theta, \dot{\theta}) = L_1(m_2 l_2 + m_p L_2)sin(\theta_2)\dot{\theta_1^2} + g_2(\theta, \dot{\theta})$$

$$g_1(\theta, \dot{\theta}) = (m_1 l_1 + (m_2 + m_p)L_1)g\ cos(\theta_1) + (m_2 l_2 + m_p L_1)g\ cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$g_2(\theta, \dot{\theta}) = (m_2 l_2 + m_p L_1)g\ cos(\theta_1 + \theta_2)$$

Parâmetros

Parâmetro	Valor
m_1	55.5g
m_2	41.6g
m_p	0kg
L_1	0.168m
L_2	0.14m
$l1$	0.0973m
l_2	0.07m
I_1	1.97e-4
I_2	9.58e-5
g	$9.8m/s^2$
τ_{max}	$0.8N \cdot m$

Programa em Mathematica para cálculo das derivadas parciais

Remove[Global*];
m1=0.0555;
m2=0.0416;
L1=0.168;
L2=0.14;
l1=0.0973;
l2=0.07;
I1=1.97*10^ − 4;
I2 = 9.58 ∗ 10^ − 5;
$g = 9.8$;
m11[θ2_] = I1 + I2 + m1 ∗ l1^2 + m2 ∗ L1^2 + m2 ∗ (l2^2 + L2^2) + 2L1 ∗ m2 ∗ l2 ∗ Cos[θ2];
m22 = I2 + m2 ∗ l2^2;
m12[θ2_] = I2 + m2 ∗ l2^2 + L1 ∗ m2 ∗ l2 ∗ Cos[θ2];
m21[θ2_] = m12[θ2];
g1[θ1_, θ2_] = (m1l1 + m2L1) ∗ g ∗ Cos[θ1] + m2 ∗ l2 ∗ g ∗ Cos[θ1 + θ2];
g2[θ1_, θ2_] = m2l2 ∗ g ∗ Cos[θ1 + θ2];
h1[dθ1_, dθ2_, θ1_, θ2_] = −L1(m2l2)Sin[θ2](2dθ1dθ2 + dθ2^2) + g1[θ1, θ2];
h2[dθ1_, dθ2_, θ1_, θ2_] = L1m2l2Sin[θ2]dθ1^2 + g2[θ1, θ2];
f1[dθ1_, dθ2_, θ1_, θ2_, T_] = (T − h1[dθ1, dθ2, θ1, θ2] + h2[dθ1, dθ2, θ1, θ2] ∗ (m12[θ2]/m22))/(m11[θ2] − (m12[θ2]^2)/m22);
f2[dθ1_, dθ2_, θ1_, θ2_, T_] = (T − h1[dθ1, dθ2, θ1, θ2] + h2[dθ1, dθ2, θ1, θ2] ∗ (m11[θ2]/m21[θ2]))/(m12[θ2] − (m22m11[θ2])/m21[θ2]);
J31[dθ1_, dθ2_, θ1_, θ2_, T_] = D[f1[dθ1, dθ2, θ1, θ2, T], θ1];
J32[dθ1_, dθ2_, θ1_, θ2_, T_] = D[f1[dθ1, dθ2, θ1, θ2, T], θ2];
J33[dθ1_, dθ2_, θ1_, θ2_, T_] = D[f1[dθ1, dθ2, θ1, θ2, T], dθ1];
J34[dθ1_, dθ2_, θ1_, θ2_, T_] = D[f1[dθ1, dθ2, θ1, θ2, T], dθ2];

$$\text{J41}[\text{d}\theta 1\_, \text{d}\theta 2\_, \theta 1\_, \theta 2\_, \text{T}\_] = D[\text{f2}[\text{d}\theta 1, \text{d}\theta 2, \theta 1, \theta 2, T], \theta 1];$$
$$\text{J42}[\text{d}\theta 1\_, \text{d}\theta 2\_, \theta 1\_, \theta 2\_, \text{T}\_] = D[\text{f2}[\text{d}\theta 1, \text{d}\theta 2, \theta 1, \theta 2, T], \theta 2];$$
$$\text{J43}[\text{d}\theta 1\_, \text{d}\theta 2\_, \theta 1\_, \theta 2\_, \text{T}\_] = D[\text{f2}[\text{d}\theta 1, \text{d}\theta 2, \theta 1, \theta 2, T], \text{d}\theta 1];$$
$$\text{J44}[\text{d}\theta 1\_, \text{d}\theta 2\_, \theta 1\_, \theta 2\_, \text{T}\_] = D[\text{f2}[\text{d}\theta 1, \text{d}\theta 2, \theta 1, \theta 2, T], \text{d}\theta 2];$$
$$\text{T1}[\text{d}\theta 1\_, \text{d}\theta 2\_, \theta 1\_, \theta 2\_, \text{T}\_] = D[\text{f1}[\text{d}\theta 1, \text{d}\theta 2, \theta 1, \theta 2, T], T];$$
$$\text{T2}[\text{d}\theta 1\_, \text{d}\theta 2\_, \theta 1\_, \theta 2\_, \text{T}\_] = D[\text{f2}[\text{d}\theta 1, \text{d}\theta 2, \theta 1, \theta 2, T], T];$$
$$\theta 1\text{eq} = \text{Pi}/2;$$
$$\theta 2\text{eq} = 0;$$
$$\text{d}\theta 1\text{eq} = 0;$$
$$\text{d}\theta 2\text{eq} = 0;$$
$$\text{J31eq} = \text{J31}[\text{d}\theta 1\text{eq}, \text{d}\theta 2\text{eq}, \theta 1\text{eq}, \theta 2\text{eq}, 0];$$
$$\text{J32eq} = \text{J32}[\text{d}\theta 1\text{eq}, \text{d}\theta 2\text{eq}, \theta 1\text{eq}, \theta 2\text{eq}, 0];$$
$$\text{J33eq} = \text{J33}[\text{d}\theta 1\text{eq}, \text{d}\theta 2\text{eq}, \theta 1\text{eq}, \theta 2\text{eq}, 0];$$
$$\text{J34eq} = \text{J34}[\text{d}\theta 1\text{eq}, \text{d}\theta 2\text{eq}, \theta 1\text{eq}, \theta 2\text{eq}, 0];$$
$$\text{J41eq} = \text{J41}[\text{d}\theta 1\text{eq}, \text{d}\theta 2\text{eq}, \theta 1\text{eq}, \theta 2\text{eq}, 0];$$
$$\text{J42eq} = \text{J42}[\text{d}\theta 1\text{eq}, \text{d}\theta 2\text{eq}, \theta 1\text{eq}, \theta 2\text{eq}, 0];$$
$$\text{J43eq} = \text{J43}[\text{d}\theta 1\text{eq}, \text{d}\theta 2\text{eq}, \theta 1\text{eq}, \theta 2\text{eq}, 0];$$
$$\text{J44eq} = \text{J44}[\text{d}\theta 1\text{eq}, \text{d}\theta 2\text{eq}, \theta 1\text{eq}, \theta 2\text{eq}, 0];$$
$$\text{T1eq} = \text{T1}[\text{d}\theta 1\text{eq}, \text{d}\theta 2\text{eq}, \theta 1\text{eq}, \theta 2\text{eq}, 0];$$
$$\text{T2eq} = \text{T2}[\text{d}\theta 1\text{eq}, \text{d}\theta 2\text{eq}, \theta 1\text{eq}, \theta 2\text{eq}, 0];$$