UNIVERSIDAD NACIONAL SAN CRISTOBAL DE HUAMANGA

FACULTAD DE ING. DE MINAS, GEOLOGIA Y CIVIL

ESCUELA PROFESIONAL INGENIERIA DE SISTEMAS



DISTRIBUCION MUESTRAL DE LA MEDIA

ASIGNATURA : ESTADISTICA II (ES - 244)

SERIE : 200

CREDITO : 4

 $\mathbf{SEMESTRE} \qquad : 2019\text{-II}$

INTEGRANTES:

- 1 QUISPE CUCHURI, Enrique
- 2 BARZOLA YUPANQUI, Mardonio
- 3 VERA PALOMINO, Sirlhey
- 4 LIZANA GUEVARA, Raquel

DOCENTE: ROMERO PLASENCIA, Jackson M'coy

Ayacucho -2019

1

 $^{^{1}}$ Ingeniería de Sistemas // \LaTeX

RESOLUCION DE EJERCICIOS

Ejercicio 01.

Un taller tiene 5 empleados. Los salarios diarios en dolares de cada uno de ellos son: 5,7,8,10,10.

- a.Determinar la media y la varianza de la poblacion.
- b. Halle la distribucion muestral de las medias para muestras de tamaño 2 escogidas (sin sustitucion) de esta poblacion.
- c. Determine la media y la varianza de la distribucion muestral de las medidas de tamaño 2.
- d. Compare la media de las medias muestras con la media de la poblacion. Tambien compare la dispersion de las medias de las muestras con la dispersion de la poblacion.

SOLUCION DATOS

Taller con 5 empleados salario diario c/u 5, 7, 8, 10, 10

A) Media Poblacional
$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$\frac{5+7+8+10+10}{5} = 8$$

$$\mu = 8$$

$$\therefore \mu = 8$$

Varianza poblacional
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2}{N}$$

tomamos el promedio de las distancias al cuadrado

$$\sigma^2 = \frac{(5-8)^2 + (7-8)^2 + (8-8)^2 + (10-8)^2 + (10-8)^2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{9+1+0+4+4}{5} = 3,6$$

$$\sigma^2 == 3.6$$

$$\sigma^2 = 3.6$$

B)Posibles muestras de tamaño dos extraidos de una poblacion finita de tamaño cinco.

- (5,7), (5,8), (5,10), (5,10)
- $4 \quad muestras$
- (7,8), (7,10), (7,10)
- $3 \quad muestras$

$$(8,10), (8,10)$$
 2 muestras $(10,10)$ 1 muestra

Aplicando la Formula de combinacion se tiene el mismo resultado

$$nCr = n!/r!(n-r)!$$

$$\frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5x4x3!}{2!x3!} = 10$$

MUESTRA	VALOR	SUMA	MEDIA MUESTRAL
1	5,7	12	6
2	5,8	13	6.5
3	5,10	15	7.5
4	5,10	15	7.5
5	7,8	15	7.5
6	7,10	17	8.5
7	7,10	17	8.5
8	8,10	18	9
9	8,10	18	9
10	10,10	20	10

MEDIA MUESTRAL	MUESTRALES	PROBABILIDAD DE LA MEDIA MUESTRAL
6	1	1/10
6.5	1	1/10
7.5	3	3/10
8.5	2	2/10
9	2	2/10
10	1	1/10
TOTAL	10	1

D)Media aritmetica de la distribucion muestral de la media:

$$\mu=\mu_{\overline{x}}$$

$$\mu_{\overline{x}}=8$$

Desviacion estandar de la distribucion de la media $\theta_{\overline{x}}^2=\frac{\theta^2}{\sqrt{2}}x\sqrt{\frac{N-2}{N-1}}$

$$\theta_{\bar{x}}^2 = \frac{3.6}{\sqrt{2}} x \sqrt{\frac{5-2}{5-1}} = 1.349999$$

Ejercicio 02.

De la historia sacada de los registros de a universidad sea determinado que las calificaciones del curso de MATE1 y de FILO1 se distribuyen normalmente con las medidas respectivas 12 y 15 y con varianzas homogeneas igual a 4. ¿Cual es la probabilidad de que la media de las notas de un alumno que llevo tales cursos esta entre 13 y 16?

SOLUCION

media de la muestra $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

$$\frac{12+15}{2} = 13,5$$

variacion de la muestra $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}$

$$\sigma^2 = \frac{(12-13,5)^2 + (15-13,5)^2}{2}$$

$$\sigma^2 = 2,25$$

$$\sigma = \sqrt{2,25} = 1,5$$

$$P(13 < \overline{X} < 16)$$

$$P(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} < Z < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma})$$

$$P(\frac{13-13,5}{1,5} < Z < \frac{16-16,5}{1,5})$$

$$P(-0.333 < Z < 1.666)$$

$$= P(Z < 1,666) - P(Z < -0.333)$$

$$= 0.95154 - [1 - 0.62930]$$

= 0.58084

∴ 0,58084

Ejercicio 03.

- Si \overline{X} denota una media de la muestra aleatoria $X_1, X_2, X_3, ..., X_9$ de tamño 9 escogida de la poblacion (X) normal $N(6, 6^2)$.
 - A). Halle el percentil 80 de la distribución de la distribución de \overline{X} .
 - B). Si Y = 3X 5, calcular $P\left[\overline{Y} > 28\right]$.

SOLUCION

$$n=9; X \longrightarrow N(6,6^2)$$

A).
$$P_{80} = ?$$

$$P(X \le k) = 0.80$$

$$P(\frac{X-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \frac{k-6}{\frac{6}{\sqrt{9}}}) = 0.80$$

$$P(Z \le \frac{k-6}{2}) = 0.80$$

$$F(z) \Longrightarrow 0.85$$

$$\frac{k-6}{2} = 0.85 \Longrightarrow k = 7.7$$

$\therefore k = 7,7$

B).
$$y = 3x - 5$$

$$E(y) = E(3x - 5)$$

$$= 3E(x) - E(5)$$

$$=3\mu-5=3(6)-5=13$$

$$E(y) = 13$$

$$Var(y) = Var(3x - 5)$$
$$= 9Var(x) + 0$$

$$=9(36)=324$$

$$Var(y) = 324$$

$$P(Y > 28) = 1 - P(\frac{Y - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \frac{28 - 13}{\frac{18}{\sqrt{n}}})$$

$$=1-P(Z \le 2.5)$$

$$= 1 - 0.99379$$

= 0.00621

.: 0,00621

Ejercicio 05.

La demanda diaria de un producto puede ser :0,1,2,3,4 con probabilidades respectivas: 0.3,0.3,0.2,0.1,0.1. A). Describa el modelo de probabilidad de la demanda promedio de 36 dias. B).¿Que probabilidad hay de que la demanda promedio de 36 dias este entre 1 y2 inclusive?.

SOLUCION

 $X: \ Demanda \ diaria \ de \ un \ producto$ a) n=36

$$\mu_x = E(x) = \sum xp(x) = 0(0.3) + 1(0.3) + 2(0.2) + 3(0.1) + 4(0.1)$$

$$\mu_x = 1,4$$

$$E(x^2) = \sum x^2 p(x) = 0^2(0,3) + 1^2(0,3) + 2^2(0,2) + 3^2(0,1) + 4^2(0,1)$$

$$E(x^2) = 3,6$$

$$VAR(x) = E(x^2) - \mu^2$$

$$\sigma_x^2 = 3,2 - 1,4^2$$

$$\sigma_x = 0,045$$

$$b)P(-1 \le x \le Z) = \phi \left(\frac{2-1,4}{0,21343}\right) - \phi \left(\frac{1-1,4}{0,21343}\right)$$

$$= \phi \left(2,81\right) - \phi \left(-1,87\right)$$

$$= \phi \left(2,81\right) - \left[1 - \phi \left(1,87\right)\right]$$

$$= 0,9668$$

Ejercicio 06.

Una empresa comercializadora de cafe sabe que el consumo mensual en kilogramos de café por casa esta normalmente distribuida con una media desconocida μ y la desviacion estandar de 0.30. Si se toma una muestra aleatoria de 36 casas y se registra su consumo de cafe durante un mes. ¿Cual es ña probabilidad de que la media de la muestra este entre los valores $\mu - 1$ y $\mu + 1$?

SOLUCION

$$\begin{split} \mu = ? \quad , \quad \sigma = 0.30 \quad , \quad n = 36 \\ P(\mu - 0.1 < \overline{X} < \mu + 0.1) \\ P(\frac{\mu - 0.1 - \mu}{\frac{0.30}{\sqrt{36}}} < Z < \frac{\mu + 0.1 - \mu}{\frac{0.30}{\sqrt{36}}}) \\ P(-2 < Z < 2) \\ P(Z < 2) - P(Z < -2) = 0.97725 - [1 - 0.97725] \\ = 0.9545 \end{split}$$

∴ 0,9545

Ejercicio 07.

La distribucion de las notas del examen final de Mat.I resulto ser normal $N(\mu, \sigma^2)$, los cuartiles 1 y 3 iguales a 6.99 y 10.01 respectivamente.

a.-Determine la media y la varianza de la distribucion de las notas.

b.-Halle el intervalo [a,b] centrado en μ tal que $P[a \leq \overline{x} \leq b] = 0,9544$, donde \overline{x} es la media de la muestra x_1, x_2, x_3, x_4 escogida de esa poblacion.

SOLUCION

a).
$$N(\mu, \sigma^2)$$

$$Q_1 = 6.99 = P_{25}$$

$$Q_3 = 11,01 = P_{75}$$

$$Q_2 = \frac{Q_1 + Q_3}{2} = 9$$

$$\Rightarrow \mu_{\overline{x}} = 9$$

$$P\left(\overline{X} \le 6,99\right) = 0.25$$

$$P\left(Z \le \frac{6,99-9}{\sigma}\right) = 0.25$$

$$Z = -0.68 = \frac{6.99 - 9}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \sigma = 3$$

$\sigma = 3$

b).
$$P(a \le \overline{X} \le b) = 0.9544$$

$$P(\overline{X} \le b) - P(\overline{X} \le a) = 0.9544$$

$$P(Z \le \frac{b-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) - P(Z \le \frac{a-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 0.9544$$

$$P(Z \leq \frac{b-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) - \left[1 - P(Z \leq \frac{a-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right]) = 0.9544$$

$$2P(Z \le \frac{b-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) - 1 = 0.9544$$

$$P(Z \leq \frac{b-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{p}}}) = 0.9772$$

$$Z=2=rac{b-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=rac{b-9}{\frac{3}{2}},\quad \Rightarrow \quad b=12 \quad \Longrightarrow \quad rac{a-9}{\frac{3}{2}}=-2 \quad \Longrightarrow \quad a=6$$

$\therefore b = 12 \qquad y \quad a = 6$

Ejercicio 08.

La vida util (en miles de horas) de una bateria es una variable aleatoria con funcion de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x &, & 0 \le x \le 1 \\ 0 &, en el resto \end{cases}$$

Si \overline{X}_{36} es la medida de una muestra aleatoria $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_{36}$ escogida de X.

¿Con que probabilidad \overline{X}_{36} es mayor que 420 horas?

SOLUCION

X: vida util (1000 horas)

$$f(x) = 2 - 2x, \quad 0 < x < 1$$

$$\int_0^1 f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 (2 - 2x) \, dx = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x - x^2 |_0^1 \quad = 2 - 1 = 1$$

$$\sigma^2 = Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$P(\overline{x}_{36} > 420)$$

$$P(\overline{x}_{36} > 0.42)$$

$$*\mu = E(x) = \int_0^1 x (2 - 2x) dx = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{2}{3}x^2|_0^1$$

$$=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}=0.33$$
 \Rightarrow $\therefore \mu = 0.33$

$$*E(x^2) = \int_0^1 x^2 (2-2x) dx = 1 \implies \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^4 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\sigma^2 = Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

$$P(\frac{\overline{x}_{36} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{0,42 - 0,33}{\frac{\sqrt{\frac{1}{18}}}{\sqrt{2c}}})$$

$$P(Z > a) = 1 - P(Z \le a)$$

$$= 1 - P(Z \le 2.21) = 1 - 0.98645$$

= 0.0136

∴ 0,0136

Ejercicio 10.

El tiempo de vida de una bateria es una variable aleatoria X con distribucion exponencial de parametro: $1/\theta$. Se escoge una muestra de n baterias.

- A). Halle el error estandar de la media muestral \overline{X} .
- B). Si la muestra aleatoria es de tamaño n=64, ¿Con que probabilidad diferira \overline{X} del verdadero valor de θ en menos de un error estandar?
- C). ¿Que tamaño de muestra minimo seria necesario para la media muestral \overline{X} tenga un error estandar menor a un 5 por ciento del valor real de θ .?

SOLUCION

 $\overline{A). X: tiempo} de vida$

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{\frac{-x}{\theta}}$$

$$\sqrt{var(x)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
 error estandar

$$var(\overline{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\mu = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\theta} e^{\frac{-x}{\theta}} dx$$

$$E(x) = \mu = \theta \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{2-1} e^{\frac{-x}{\theta}} d(\frac{x}{\theta}) \Longrightarrow E(x) = \theta$$

$$E(x^2) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{\frac{-x}{\theta}} d(\frac{x}{\theta}) = \theta^2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta^2} e^{\frac{-x}{\theta}} d(\frac{x}{\theta})$$

$$=\theta^2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{3-1} e^{\frac{-x}{\theta}} d\left(\frac{x}{\theta}\right) \Longrightarrow E(x^2) = 2\theta^2$$

$$\sigma^2$$
: $var(x) = 2\theta^2 - \theta = \theta^2$

donde:
$$var(x) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\theta}{\sqrt{n}}$$



B). Tamaño n = 64

$$P(\overline{X} - \theta \le \sqrt{var(\overline{X})}) = P(\overline{X} - \theta \le \frac{\theta}{64}) = P(\overline{X} - \theta \le \frac{\theta}{8})$$

$$P(\frac{x-8}{\frac{\theta}{0}} \le \frac{\theta/8}{\theta/8}) = P(Z \le 1) = 0.68$$

∴ 0,68

C).
$$\frac{\theta}{\sqrt{n}} < 0.05 \Longrightarrow \frac{1}{0.05} < \sqrt{n} = 20 < \sqrt{n} \Longrightarrow n > 4000$$

$\therefore n > 4000$

Ejercicio 12.

La vida util de cierta marca de llantas radiales es una variable aleatoria X cuya distribucion es normal con $\mu = 38,000Km$ y $\sigma = 3,000Km$.

A). Si la utilidad Y (en Dolares) que produce cada llanta esta dada por la relacion:

y=0,2x+100. ¿Cual es la probabilidad de que la utilidad sea mayor que 8,900 dolares?

B). Determine el numero de tales llantas que debe adquirir una empresa de transporte para conseguir una utilidad media de al menos 7541 dolares con probabilidad 0,996.

SOLUCION

A). Utilidad en dolares

$$y = 0.2x + 100$$

$$E(y) = 0.2E(x) + 100$$

$$E(y) = 0.2(3800) + 100$$

$$E(y) = 7700$$

$$Var(y) = 0.2^2 Var(x)$$

$$\sigma_y = 0.2\sigma_x = 0.2(3000) = 600$$

$$P(y > 8900) = 1 - P(y \le \frac{8900 - 7700}{600})$$

$$=1-P(y\leq 2)$$

$$=1-09772$$

= 0.0228

∴ 0,0228

B).
$$P(y > 7541) = 0,996$$

 $P(y > 7541) = 1 - P(y \le \frac{7541 - 7700}{\frac{600}{\sqrt{n}}})$
 $0,996 = 1 - P(y \le \frac{7541 - 7700}{\frac{600}{\sqrt{n}}})$
 $P(y \le \frac{7541 - 7700}{\frac{600}{\sqrt{n}}}) = 0,004$
 $\frac{7541 - 7700}{\frac{600}{\sqrt{n}}} = -2,65$
 $\Rightarrow n = 100$

$\therefore \quad n = 100$

Ejercicio 13.

Un proceso automático llena bolsas de café cuyo peso neto tiene una media de 250 gramos y una desviación estandar de 3 gramos. Para controlar el proceso, cada hora se pesan 36 bolsas escogidas al azar; si el peso neto medio esta entre 249 y 251 gramos se continua con el proceso aceptando que el peso neto medio es 250 gramos y en caso contrario, se detiene el proceso para reajustar la maquina. A).¿Cual es la probabilidad de detener el proceso cuando el peso neto medio realmente es 250?. B).¿Cual es la probabilidad de aceptar que el peso neto promedio es 250 cuando realmente es de 248 gramos?

$$\begin{array}{c} \textbf{SOLUCION} \\ \textbf{A}).\mu = 250 \quad , \quad \sigma = 3 \quad , \quad n = 36 \\ \\ P(249 < \overline{X}) = \frac{\alpha}{2} \\ P(\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{n}} < \frac{249 - 250}{\sqrt[3]{36}}) = \frac{\alpha}{2} \\ \\ P(Z < -2) = \frac{\alpha}{2} \\ \\ \text{Buscando en la tabla el valor de } f(Z) \\ \\ 0.02275 = \frac{\alpha}{2} \\ \\ \alpha = 0.456 \end{array}$$

B).
$$P(\overline{X} > 251)$$

 $\alpha = 0.456$

$$P(Z > \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})$$

$$P(Z > \frac{251 - 250}{\frac{3}{\sqrt{36}}}) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \le 2)$$

$$= 1 - 0.9772$$

∴ 0,0228

Ejercicio 14.

La utilidad por la venta de un cierto articulo, en miles de soles, es una variable aleatoria con distribución normal. En el 5porciento de las ventas la utilidad ha sido menos que 6.71 mientras que el 1porciento de las ventas ha sido mayor que 14.66. Si se realizan 16 operaciones de ventas. ¿Cual es la probabilidadde que el promedio de la utilidad por cada operacion este entre 10000 y 11000 dolares?.

SOLUCION

$$\overline{si \ x \ es \ la} \ variable \ aleatoria \ \longrightarrow \ x\epsilon(\mu,\sigma)$$

$$P(x < 6.71) - 0.05$$

$$P(x > 14,66) - 0.01 \longrightarrow P(x \le 14,66) = 0.99$$

la media de las 16 muestras de x

$$N = N = (\mu, \frac{\sigma}{16})$$

$$P(10 < x < 11)$$

si normalizamos

$$P(x < 6.71) - 0.05$$

$$P(x > 14,66) - 0,01$$

 $\Rightarrow Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = P(Z < \frac{6,71-\mu}{\sigma}) = 0,05$

$$P(Z < \frac{14,66-\mu}{\sigma}) = 0.99$$

Ejercicio 16.

En cierta poblacion de matrimonios el peso en kilogramos de esposos y esposos se distribuye normalmente N(80, 100)yN(64, 69) respectivamente y son independientes. Si se eligen 25 matrimonios al azar de esa poblacion calcular la probabilidad de que la media de los pesos sea a lo mas 137 Kg.

SOLUCION

Como es una distribucion normal de peso en kilogramos, entonces la distribucion normal del peso varones y mujeres seria:N(144,169)

De los datos obtenemos: $\mu=144; \sigma^2=169; n=25$

entonces:

$$P(\overline{X} \le 37)$$

$$P(\overline{X} - \mu/\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \le \frac{137 - 144}{\frac{13}{5}})P(Z \le -2.69)$$

Por lo tanto la probabilidad sera: 0,0036

∴ 0,0036

Ejercicio 17.

Una empresa vende bloques de marmol cuyo peso se destribuye normalmente con una media de 200 kilogramos.

a)Calcular la varianza del peso de los bloques, si la probabilidad de que el peso este entre 165 Kg y 235 Kg es 0.9876.

b)¿Que tan grande debe ser la muestra para que haya una probabilidad de 0.9938 de que el peso medio de la muestra sea inferior a 205 Kg?

SOLUCION

Como datos se tienen: $\mu = 200Kg$

A) Resolucion parte a:

$$P(165 < X < 235) = 0.9876$$

$$P(\frac{165-200}{\sigma} < Z < \frac{235-200}{\sigma}) = 0.9876$$

$$P(\frac{-35}{\sigma} < Z < \frac{35}{\sigma}) = 0.9876$$

$$P(Z < \frac{35}{\sigma}) - P(Z < \frac{-35}{\sigma}) = 0.9876$$

$$P(Z < \frac{35}{\sigma}) - (1 - P(Z < \frac{35}{\sigma})) = 0.9876$$

$$2 * P(Z < \frac{35}{\sigma}) = 1,9876$$

$$P(Z<\frac{35}{\sigma})=0,\!9938$$

Como f(Z) = 0.9938, entonces Z = 2.50.

Igualamos
$$\frac{35}{\sigma} = Z = 2,50$$

Luego: $\sigma = 14$

$\sigma = 14$

B) Resolucion parte b:

$$P(X < 205) = 0.9938$$

$$P(\frac{X-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{201-200}{\frac{14}{\sqrt{n}}}) = 0.9938$$

$$P(Z < \frac{5*\sqrt{n}}{14}) = 0.9938$$

Como f(Z) = 0.9938, entonces Z = 2.50.

Igualamos
$$\frac{5*\sqrt{n}}{14} = Z = 2,50$$

Luego: n=49

 $\therefore n = 49$

2

²Ingeniería de Sistemas // IAT_EX

Referencias

[1] Cordova Zamora, Manuel; Quinta Edición.