La Transformada de Fourier y sus Aplicaciones. Resumen

I.- Series de Fourier

Producto escalar entre funciones de $L^2([a,b])$: $(f,g) \coloneqq \int_a^b f(x)g(x)dx$

Módulo de un vector $\vec{v}$: $|\vec{v}| = \sqrt{(\vec{v},\vec{v})}$

Base ortonormal: $\mathcal{B}_0 = \{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ (vectores ortogonales y de módulo 1)

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n (\vec{v},\vec{e}_i)\,\vec{e}_i$$

vs

Base ortogonal: $\mathcal{B} = \{\vec{a}_i\}_{i=1}^n$ (vectores ortogonales y de módulo ≠ 1)

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \frac{(\vec{v},\vec{a}_i)}{|\vec{a}_i|^2}\,\vec{a}_i$$

Dos funciones se dirán que son ortogonales cuando se producto escalar sea nulo.

Si se elige la base $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}[-p,p] = \left\{\varphi_0^1(x) = 1,\ \varphi_n^1(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{p}\right),\ \varphi_n^2(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{p}\right)\right\}$, al desarrollo en serie de esa base se le conoce como **desarrollo en serie de Fourier**:

Serie de Fourier

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{p}\right)$$

Serie compleja de Fourier

$$S_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\pi x/p}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(x)dx \\ a_n = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{p}\right)dx \\ b_n = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{p}\right)dx \end{cases} \xRightarrow[\begin{cases} \frac{a_0}{2}=c_0 \longleftrightarrow c_0=\frac{a_0}{2} \\ \begin{cases} a_n=c_n+c_{-n} \\ b_n=i(c_n-c_{-n}) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n) \\ c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n) \end{cases} \end{cases}]{} c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-in\pi x/p}dx$$

Casos especiales:

Funciones pares (serie de cosenos)

$$f(-x) = f(x)$$

$$\begin{cases} \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^p f(x)dx \\ a_n = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^p f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{p}\right)dx \\ b_n = 0 \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{p}\right)dx$$

Funciones impares (serie de senos)

$$f(-x) = -f(x)$$

$$\begin{cases} \dfrac{a_0}{2} = 0 \\ a_n = 0 \\ b_n = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^p f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{p}\right)dx \end{cases}$$

$$c_n = -\frac{i}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{p}\right)dx$$

Nota: Los coeficientes a_1 y b_1 se conocen como las componentes del armónico fundamental.

La serie converge a la función en todo punto excepto en los puntos de discontinuidad en los que converge a la media entre los valores a la izquierda y a la derecha de dicho punto.

II.- Transformada de Fourier

Directa

$$\mathcal{F}[f(t)](\nu) = F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}dt$$

Inversa

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\nu)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu$$

Tiempo	Espacio
$t \longrightarrow$	x
$T \longrightarrow$	λ
$\nu = \dfrac{1}{T} \longrightarrow$	$\alpha = \dfrac{1}{\lambda}$
$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \longrightarrow$	$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\alpha$

Propiedades:

1) Linealidad: $af(t) + bg(t) \Leftrightarrow aF(\nu) + bG(\nu)$
2) Simetría: $f(t) \Leftrightarrow F(\nu),\ F(t) \Leftrightarrow f(-\nu)$
3) Escalado: $f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\nu}{a}\right)$ (Se contrae en el tiempo y se dilata en la frecuencia)
4) Traslación en tiempo: $f(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-i2\pi\nu t_0}F(\nu)$
5) Traslación en frecuencia: $f(t)e^{i2\pi\nu_0 t} \Leftrightarrow F(\nu-\nu_0)$
6) Diferenciación: $\frac{d^n f(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (i2\pi\nu)^n F(\nu),\ (-i2\pi t)^n f(t) \Leftrightarrow \frac{d^n F(\nu)}{d\nu^n}$
7) Convolución: $f(t) * g(t) \Leftrightarrow F(\nu)G(\nu),\ f(t)g(t) \Leftrightarrow F(\nu) * G(\nu)$

   Definición de convolución: $f(t) * g(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

Nota: Las propiedades se demuestran aplicando la definición y haciendo el cambio de variable: "lo de dentro de f" $= u$

Funciones útiles:

- Delta de Dirac: $\delta(t)$ Propiedades: $\begin{cases} \langle\delta(t), f(t)\rangle = f(0) \\ \langle\delta(t-t_0), f(t)\rangle = f(t_0) \end{cases}$
- Función pulso rectangular: $H \cdot \sqcap\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$
- Función pulso triangular: $H \cdot \wedge\left(\frac{t-t_0}{a/2}\right)$

  $\begin{cases} H = altura \\ t_0 = dónde\ está\ centrado\ el\ pulso \\ a = anchura \end{cases}$

- Función sinc: $\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ Sus ceros resultan de igualar el argumento del sinc a n

Transformadas útiles:

$$\delta(t) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow \delta(\nu)$$

$$\sqcap(t) \longrightarrow \mathrm{sinc}(\nu)$$

$$\wedge(t) \longrightarrow \mathrm{sinc}^2(\nu)$$

$$\sin(2\pi\nu_0 t) \longrightarrow \frac{1}{2i}[\delta(\nu-\nu_0) - \delta(\nu+\nu_0)]$$

$$\cos(2\pi\nu_0 t) \longrightarrow \frac{1}{2}[\delta(\nu-\nu_0)+\delta(\nu+\nu_0)]$$

$$\sin(\omega_0 t) \longrightarrow \frac{1}{2i}\left[\delta\left(\nu-\frac{\omega_0}{2\pi}\right)-\delta\left(\nu+\frac{\omega_0}{2\pi}\right)\right]$$

$$\cos(\omega_0 t) \longrightarrow \frac{1}{2}\left[\delta\left(\nu-\frac{\omega_0}{2\pi}\right)+\delta\left(\nu+\frac{\omega_0}{2\pi}\right)\right]$$

$$Peine\ de\ deltas\!: \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\Delta t) \longrightarrow \nu_m\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\nu-n\nu_m)\ , \qquad \nu_m=\frac{1}{\Delta t}$$

$$Modulación\ en\ amplitud\!:\ f(t)\cos(2\pi\nu_0 t) \longrightarrow F(\nu) * \frac{1}{2}[\delta(\nu-\nu_0)+\delta(\nu+\nu_0)]$$

Notas:

· Cuando se convoluciona con una delta, esta desplaza la función la magnitud indicada en la delta.
· Acotar una función en un intervalo equivale a multiplicar dicha función por un pulso rectangular.

III.- Transformada discreta de Fourier (DTF)

Directa

$$F_n=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi nk/N}\ , \qquad n=0,1,\dots,N-1$$

Inversa

$$f_k=\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi nk/N}\ , \qquad k=0,1,\dots,N-1$$

siendo $f_k=f(t_0+k\Delta t)$, $k=0,1,\dots,N-1$ una función muestreada

Parámetros de la transformada discreta de Fourier:

- Longitud de muestreo: T (¿Durante cuánto tiempo se muestrea?)
- Intervalo de muestreo: Δt (¿Cada cuánto tiempo se toma una muestra?)
- Resolución en frecuencia: $\Delta\nu=\frac{1}{T}$ (Separación en frecuencia entre dos muestras consecutivas)
- Frecuencia de muestreo: $\nu_m=\frac{1}{\Delta t}$ (Número de muestras tomadas por segundo)
- Número de muestras: $N=\frac{T}{\Delta t}=\frac{\nu_m}{\Delta\nu}$
- Frecuencia de Nyquist: $\nu_{max}=\frac{\nu_m}{2}$

Toda componente fuera del rango de frecuencias delimitado por la frecuencia Nyquist aparecerá dentro del espectro mostrando una frecuencia errónea: **ALIASING**

Transformada rápida de Fourier (FFT): Algoritmo de resolución de la DFT. Necesita un número de muestras potencia de 2.

IV.- Sistemas lineales.

$$Y(\omega)=H(\omega)\,X(\omega)$$

Salida / respuesta

Entrada / Excitación

Respuesta en frecuencia del sistema

Para hacer nula la salida, los ceros de la transformada de la entrada $X(\omega)$ deben coincidir con las frecuencias del sistema $H(\omega)$

Aplicación: Resolución de ecuaciones
- Problemas de valor inicial: Aplicar transformadas en x
- Problemas de contorno: Aplicar transformadas en t

RECORDAR:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \quad ; \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x \implies \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) \\ \sin x = \dfrac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}) \end{cases}$$

$$e^{(2n+1)\pi i} = cos\ (2n+1)\pi = e^{(1-2n)\pi i} = cos\ (1-2n)\pi = -1$$

$$e^{2n\pi i} = \cos 2n\pi = 1$$

$$\cos n\pi = (-1)^n$$