Fourier Ev. Continua 2011

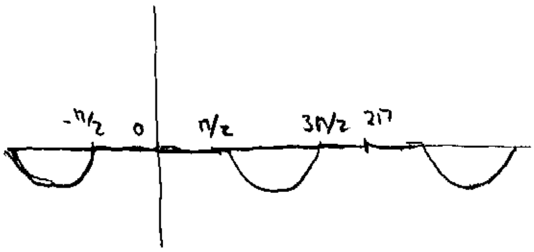
APELLIDOS: **NOMBRE:**

1. Demuestre que si el elemento $f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ es ortogonal a todas las combinaciones lineales del tipo $\sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k$ entonces $\alpha_k = c_k$, $\forall k$, siendo c_k el coeficiente k-simo de Fourier de f. *(2 puntos)*

$$0 = \langle f - \sum_{K=1}^{n} \alpha_K \varphi_K , \sum_{K=1}^{n} \beta_K \varphi_K \rangle = \langle f, \sum \beta_K \varphi_K \rangle - \langle \sum \alpha_K \varphi_K , \sum \beta_K \varphi_K \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum \beta_K \underbrace{\langle f, \varphi_K \rangle}_{c_K} = \sum \alpha_K \beta_K \Rightarrow c_K = \alpha_K \quad \forall K$$

2. Determine los coeficientes del armónico fundamental de la serie trigonométrica de Fourier de la función $f(x) = \inf[\cos x, 0]$. *(5 puntos)*



$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 x\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}^{\,0} \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1-\cos^2 x)\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot x \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} - \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2 x\, dx}_{a_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{a_1 = 1/2}$$

(Otra forma: $a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2\pi}\left[x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{1}{2}$)

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = 0$$

$\boxed{b_1 = 0}$ (función par)

APELLIDOS: **NOMBRE:**

3. *a*) Calcule la transformada de Fourier de $\delta(t-t_0)$ a partir de su definición.

   b) Calcule la transformada de Fourier de $\delta(t-t_0)$ a partir de la definición de $\delta(t)$ y aplicando las propiedades de la transformada.

   c) Indique módulo, argumento, parte real y parte imaginaria de dicha transformada.

   d) Emplee el resultado para calcular la transformada de Fourier de una señal senoidal de 50 Hz de frecuencia. *(5 puntos)*

a) $\langle \delta(t-T_0), f(t) \rangle = f(t_0)$

$$\mathcal{F}(\delta(t-T_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-2\pi i \nu t}\, dT = e^{-2\pi i \nu t_0}$$

b) $\langle \delta(t), f(t) \rangle = f(0)$ $\quad \mathcal{F}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-2\pi i \nu t}\, dt = e^{0} = 1$

$$\mathcal{F}(f(t-t_0)) = e^{-2\pi i \nu t_0} \cdot \mathcal{F}(f(t)) \Rightarrow \mathcal{F}(\delta(t-t_0)) = e^{-2\pi i \nu t_0}\, 1$$

c) Módulo: 1 Argumento: $-2\pi\nu t_0$

$$e^{-2\pi i \nu t_0} = \cos 2\pi\nu t_0 - i \operatorname{sen} 2\pi\nu t_0 \rightarrow \text{Parte real} = \cos 2\pi\nu t_0$$

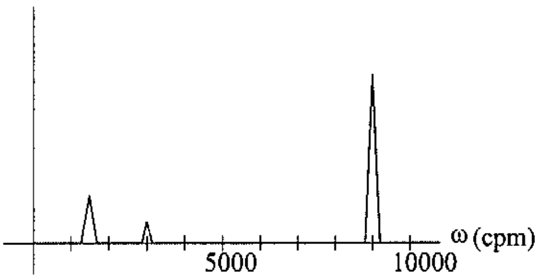
Parte imag $= -\operatorname{sen} 2\pi\nu t_0$

d) $$\mathcal{F}(\operatorname{sen} 2\pi \cdot 50 t) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{2\pi 50 t i} - e^{-2\pi i 50 t}}{2i} \right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\mathcal{F}(e^{2\pi 50 t i}) - \mathcal{F}(e^{-2\pi 50 t i}) \right] = \frac{1}{2i}\left[\delta(\nu-50) - \delta(\nu+50) \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\delta(\nu+50) - \delta(\nu-50) \right] i$$

4. La frecuencia natural del eje de un motor es de 150 Hz. El motor está funcionando a 1500 rpm (revoluciones por minuto) y su espectro de vibración (con ω en ciclos por minuto) es el indicado en la figura. Los picos reflejan problemas mecánicos a múltiplos de la velocidad de giro del motor. Los ingenieros están preocupados por la vibración del motor y la recomendación ha sido subir la velocidad de giro del motor a 1800 rpm. El riesgo parece mayor, pero en este caso no es así, ¿por qué? *(2 puntos)*



Frecuencia natural: 150 Hz = 9000 cpm.

El pico $6 \times 1500 = 9000$ cpm coincide con la frecuencia natural ⇒ resonancia.

Al pasar la velocidad a 1800 rpm, $6 \times 1800 = 10800$ cpm se aleja de la frecuencia natural y disminuirá su amplitud.

Los otros dos picos (1x, 2x) estarán a 1800 cpm y 3600 cpm, lejos de la frecuencia natural.

APELLIDOS: **NOMBRE:**

5. La ecuación diferencial de un circuito LC es $L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = f(t)$ con $i = \frac{dq}{dt}$. Determine la respuesta en frecuencia del circuito. *(2 puntos)*

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = f(t) \quad ; \quad L(i\omega)^2 Q(\omega) + \frac{1}{C} Q(\omega) = F(\omega)$$

$$\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right) Q(\omega) = F(\omega) \quad ; \quad H(\omega) = \frac{Q(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{-L\omega^2 + 1/C}$$

6. Dispone de una señal que contiene frecuencias de 3, 3.1 y 50 kHz. Determine el intervalo de muestreo y el tiempo de registro que se deben utilizar para detectar las tres frecuencias separadamente. Indique claramente si los valores calculados son mínimos o máximos. *(2 puntos)*

$F_{max} = 50$ KHz $\quad F_{muestreo} = 100$ KHz $\quad \Delta t = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$ s

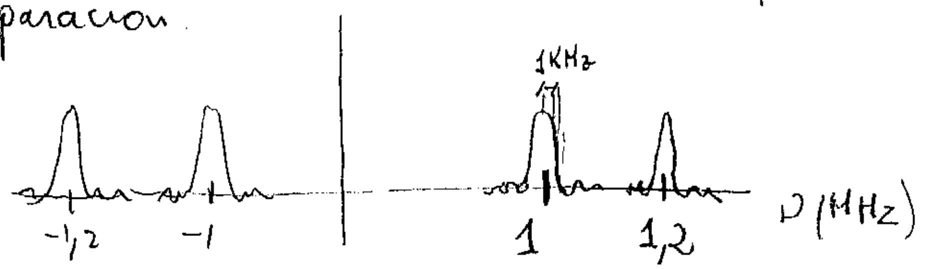
$\Delta\nu = 0{,}1$ KHz $= 100$ Hz $\quad T = \frac{1}{100} = 10^{-2}$ s

Debe muestrearse por debajo de 10^{-5} s y registrando como mínimo 10^{-2} s.

7. Se denomina **modulación en amplitud** a multiplicar una cierta señal $f(t)$ por una función coseno de una cierta frecuencia ν_0. Sean dos pulsos rectangulares de 1 ms de ancho, modulados con dos frecuencias distintas (por ejemplo 1 y 1.2 MHz), que transmitimos simultáneamente. Utilice la transformada de Fourier para explicar por qué tendríamos cada pulso en una posición diferente del dial de una radio, sin que se mezclen. Si lo necesita, ayúdese del dibujo del espectro para explicarlo. *(2 puntos)*

$$f(t)\cdot\cos 2\pi\nu_0 t \iff F(\nu) * \frac{1}{2}\left[\delta(\nu-\nu_0) + \delta(\nu+\nu_0)\right]$$

La transformada de la función es convolucionada con una δ desplazada a $\pm\nu_0$, lo que equivale a desplazar $F(\nu)$ a esas posiciones. En el caso de los pulsos tendríamos funciones sinc, unas centradas en ± 1 MHz y otras en $\pm 1{,}2$ MHz. La anchura del pulso es 1 ms, luego el primer cero de la sinc está en 1 KHz, anchura mucho menor que 0,2 MHz que es la separación.



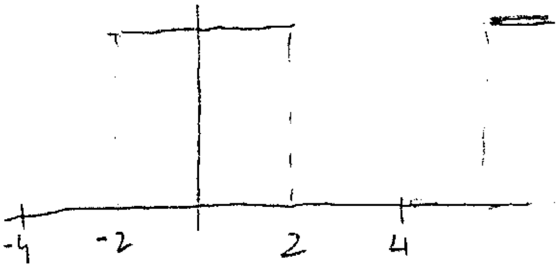
APELLIDOS: NOMBRE:

ECUACIONES DIFERENCIALES. BLOQUE 4. **ENERO 2012.**

1. Desarrolle en serie compleja de Fourier la función de periodo 8 definida por

$$f(t) = 5 \quad \text{si} \quad -2 < t < 2$$
$$f(t) = 0 \quad \text{si} \quad -4 < t < -2 \text{ y } 2 < t < 4$$

expresando los coeficientes en forma de función sinc. *(6 puntos)*



$$S_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i n \frac{2\pi}{T} t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i n \frac{\pi}{4} t}$$

$$c_n = \frac{1}{8}\int_{-4}^{4} f(t)\, e^{-i n \cdot \frac{2\pi}{8} t}\, dt \quad \text{Función par}$$

$$c_n = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} 5 \cos n\frac{\pi}{4} t \, dt = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{n\pi} \cdot \operatorname{sen} n\frac{\pi}{4} t \Big|_{-2}^{2} = \frac{5}{2n\pi}\left[\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(-n\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{5}{n\pi} \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\,\frac{\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}}{n\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{2} \operatorname{sinc} n/2$$

$$S_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{5}{2} \operatorname{sinc} \frac{n}{2} \cdot e^{i n \frac{\pi}{4} t}$$

2. Si la transformada de Fourier de una función $f(t)$ es $F(\nu)$ demuestre, partiendo de su definición, cuánto vale la transformada de Fourier de $f(a(t-t_0))$, siendo a y t_0 dos constantes positivas. Utilice el resultado para calcular la transformada de Fourier de un pulso rectangular de altura unidad, anchura 4 y centrado en el punto 3, a partir de la transformada de Fourier del pulso rectangular unidad. *(6 puntos)*

$$\mathcal{F}(f(a(t-t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a(t-t_0))\, e^{-i2\pi\nu t} dt =$$

$$y = a(t-t_0) \qquad dy = a\,dt$$
$$t = y/a + t_0 \qquad dt = dy/a$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot e^{-i2\pi\nu(y/a + t_0)} \cdot dy/a = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t_0} f(y)\cdot e^{-i2\pi\frac{\nu}{a}y} \frac{dy}{a} =$$

$$= \frac{1}{a}\cdot e^{-i2\pi\nu t_0} \cdot F(\nu/a)$$

$$\Pi\left(\frac{t-3}{4}\right) = 4\cdot e^{-i2\pi\nu\cdot 3} \cdot \operatorname{sinc}(4\nu)$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

3. Dada la ecuación en derivadas parciales de la elástica $y(t,x)$ de una viga de longitud L,

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

con c una constante, aplicar la transformada de Fourier para obtener el problema equivalente en el dominio de la frecuencia temporal ν, para el caso de viga biempotrada ($y = 0$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ en los extremos), siendo $Y(\nu, x)$ la transformada de Fourier de $y(t,x)$ en dicho dominio. *(5 puntos)*

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right) = -\frac{1}{c^2}\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = -\frac{1}{c^2}\cdot(2\pi i\nu)^2\cdot Y(\nu,x) = \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2}\cdot Y(\nu,x)$$

$$\parallel$$

$$\frac{d^4 Y(\nu,x)}{dx^4} \quad\Rightarrow\quad \frac{d^4 Y}{dx^4} = \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2}\cdot Y$$

Condiciones:

$$\mathcal{F}(y(0,t)=0) \Rightarrow Y(0,\nu)=0$$

$$\mathcal{F}(y(L,t)=0) \Rightarrow Y(L,\nu)=0$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial y}{\partial x}(0,t)=0\right) \Rightarrow \frac{dY}{dx}(0,\nu)=0$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial y}{\partial x}(L,t)=0\right) \Rightarrow \frac{dY}{dx}(L,\nu)=0$$

4. Una cierta señal de 2 s de duración es muestreada con un intervalo de muestreo de 2 μs. Al hacer la transformada discreta de Fourier, determine la frecuencia de Nyquist y la resolución en frecuencia del espectro. Explique brevemente qué ocurriría en el espectro si la señal temporal contuviese una componente de frecuencia de 1 MHz, indicando cómo se denomina este fenómeno. *(3 puntos)*

Nyquist. $\nu_{max} = \frac{\nu_{muestreo}}{2} = \frac{1/2\times10^{-6}}{2} = \frac{10^6}{4} = 250000$ Hz

Resolución: $\Delta\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ Hz

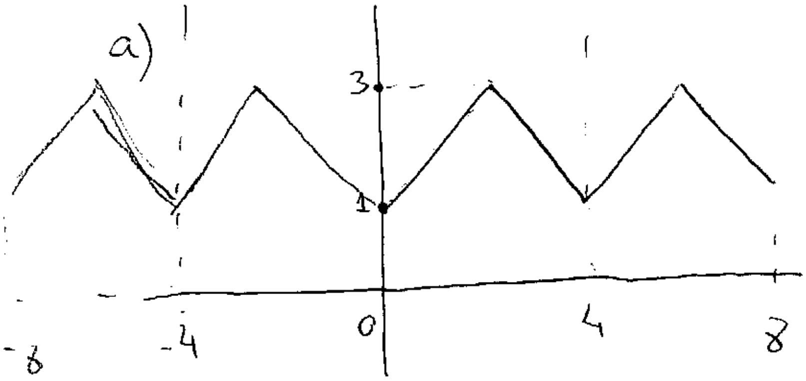
La componente de 1 MHz, fuera del rango de frecuencias, aparecería dentro del espectro, mostrando una frecuencia errónea: aliasing.

APELLIDOS: **NOMBRE:**

ECUACIONES DIFERENCIALES. BLOQUE 4. **JULIO 2012.**

1. Dada la función de periodo 4, par, definida por $f(t) = t + 1$ si $0 \leq t < 2$:
   a) Dibuje la función en el intervalo $[-8, 8]$.
   b) Obtenga los coeficientes de Fourier del armónico fundamental. *(10 puntos)*

a)



b) Función par. $b_n = 0$ $\quad (b_1 = 0)$

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos wt\,dt$$

$$T = 4 \qquad w = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_1 = \frac{2}{4}\cdot 2\int_0^2 (t+1)\cos\frac{\pi}{2}t\,dt = \left. t\cdot\frac{2}{\pi}\cancel{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t}^{\,0}\right|_0^2 -$$

$$- \int_0^2 \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t\,dt + \left.\frac{2}{\pi}\cancel{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t}^{\,0}\right|_0^2 = \left.\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}t\right|_0^2 =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{-8}{\pi^2}$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

2. Si la transformada de Fourier de una función $f(t)$ es $F(\nu)$ demuestre cuánto vale la transformada de Fourier de $f(t-t_0)$, con t_0 una constante. Utilice el resultado para calcular la transformada de Fourier de una delta de Dirac centrada en el punto $t=3$, a partir de la definición de la delta de Dirac centrada en el origen. *(6 puntos)*

$$\mathcal{F}(f(t-t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\cdot e^{-2\pi i\nu t}\,dt \underset{\substack{t-t_0=u\\ dt=du}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot e^{-2\pi i\nu(t_0+u)}\,du =$$

$$= e^{-2\pi i\nu t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot e^{-i2\pi\nu u}\,du = e^{-i2\pi\nu t_0}\cdot F(\nu)$$

$$\langle \delta(t), f(t)\rangle = f(0) \qquad \mathcal{F}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\cdot e^{-2\pi i\nu t}\,dt = e^0 = 1$$

$$\mathcal{F}(\delta(t-3)) = e^{-i2\pi\nu\cdot 3}\,\mathcal{F}(\delta(t)) = e^{-6\pi i\nu}$$

3. Dispone de una señal que contiene frecuencias de 15, 20, 100 y 500 kHz. Determine el intervalo de muestreo máximo y el tiempo de registro mínimo que se deben utilizar para detectar las cuatro frecuencias separadamente. *(4 puntos)*

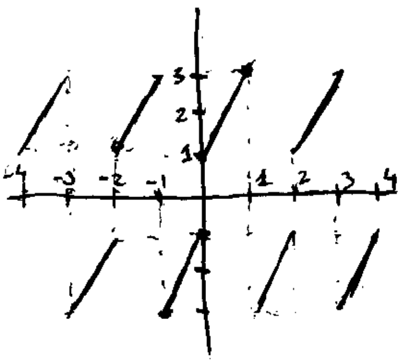
$$\nu_{max} = 500\ \text{kHz} \Rightarrow \nu_{muestreo} = 1\ \text{MHz} = 10^6\ \text{Hz}$$

$$T_{muestreo} = \frac{1}{\nu_{muestreo}} = 10^{-6}\ \text{s}$$

$$\Delta\nu_{min} = 5\ \text{kHz} = 5000\ \text{Hz} \Rightarrow T_{registro} = \frac{1}{5000} = 2\cdot 10^{-4}\ \text{s}$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**
ECUACIONES DIFERENCIALES. **TEMA 5. TRANSFORMADA DE FOURIER.**

1. Dada la función de periodo 2, impar, definida por $f(t) = 2t + 1$ si $0 \leq t < 1$, con t en segundos
   a) Dibuje la función en el intervalo $[-4, 4]$.
   b) Obtenga la expresión de la serie de Fourier.
   c) Dibuje aproximadamente los tres primeros coeficientes en función de la frecuencia ν en Hz.
   (10 puntos)



Impar: $a_n = 0$

$$w = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,\text{sen}\, n\pi t\, dt = 2\int_0^1 \underbrace{(2t+1)}_{u}\underbrace{\text{sen}\, n\pi t\, dt}_{dv}$$

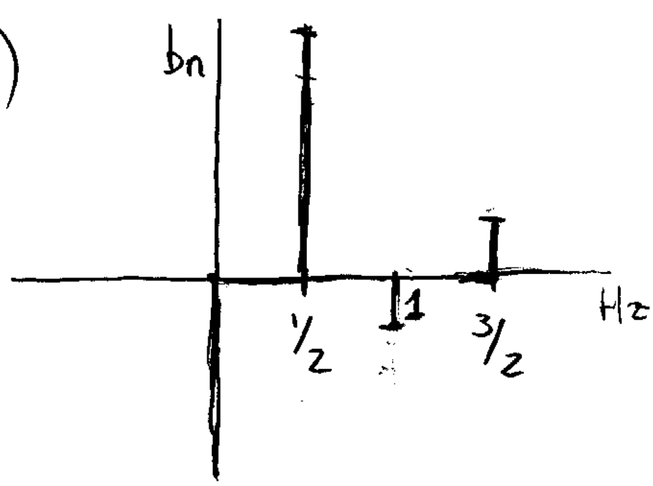
$$= 2\cdot\left[-(2t+1)\cdot\frac{\cos n\pi t}{n\pi}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \cancelto{0}{\frac{\cos n\pi t}{n\pi}}\, dt\right] =$$

$$= 2\cdot\left[\frac{-3\cos n\pi t + 1}{n\pi}\right] = \frac{-6\cos n\pi t + 2}{n\pi}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{-6\cos n\pi + 2}{n\pi} = \frac{-6(-1)^n + 2}{n\pi}$$

b) $$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-6\cos n\pi + 2}{n\pi}\cdot \text{sen}\, n\pi t$$

c)



$T = 2$, $\nu_1 = \frac{1}{2}$ $\nu_2 = 2$ $\nu_3 = \frac{3}{2}$

$$b_1 = \frac{-6\cos\pi + 2}{\pi} = \frac{8}{\pi}$$

$$b_2 = \frac{-6\cos 2\pi + 2}{2\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

$$b_3 = \frac{-6\cos 3\pi + 2}{3\pi} = \frac{8}{3\pi}$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

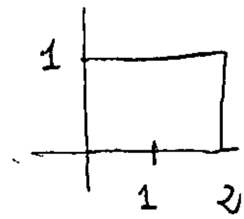
2. **a)** Demuestre cuánto vale la transformada de Fourier de una función $f(\frac{t-t_0}{a})$, con $a > 0$, en función de la transformada de la función $f(t)$.
b) Aplique el resultado anterior para calcular la transformada de un pulso rectangular de altura 1 y anchura 2 s, que empieza en $t = 0$, si se conoce la transformada del pulso unidad. Dibuje su módulo.
c) Calcule, a partir de la definición, la transformada inversa de $\delta(\nu - \nu_0)$.
d) Utilice el resultado anterior para calcular la transformada de Fourier de una señal cosenoidal de 10 Hz de frecuencia. Exprese sólo la transformada de frecuencias positivas y dibújela.
e) Utilice los resultados anteriores para obtener la transformada de Fourier de una señal cosenoidal de 10 Hz de frecuencia, registrada durante 2 segundos desde su instante inicial. Dibuje su módulo.
Nota importante: Dibuje aproximadamente los resultados, indicando los valores significativos.
(20 puntos)

a) $\mathcal{F}\left(f\left(\frac{t-t_0}{a}\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t-t_0}{a}\right) e^{-i2\pi\nu t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\cdot e^{-i2\pi\nu(at'+t_0)}\,a\,dt'$

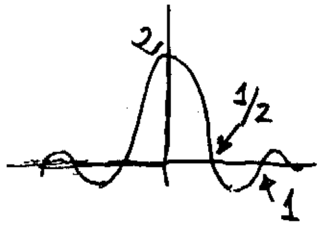
$(t-t_0)/a = t'$,, $dt = a\,dt'$

$= a\cdot e^{-i2\pi\nu t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\cdot e^{-i2\pi(a\nu)t'}\,dt' = a\cdot e^{-i2\pi\nu t_0}F(a\nu)$

b)



$\mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)\right) = 2\cdot e^{-i2\pi\nu\cdot 1}\cdot \mathrm{sinc}(2\nu)$



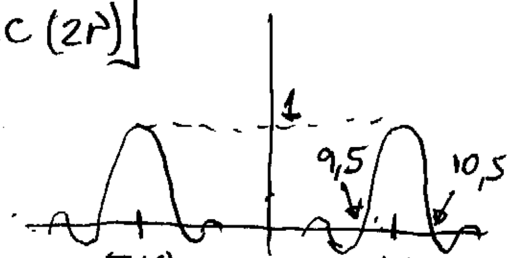
c) $\mathcal{F}^{-1}\left(\delta(\nu-\nu_0)\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\nu-\nu_0)\cdot e^{i2\pi\nu t}\,d\nu = e^{i2\pi\nu_0 t}$

d) $\mathcal{F}(\cos 2\pi 10t) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{i2\pi 10t}+e^{-i2\pi 10t}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\delta(\nu-10)+\delta(\nu+10)\right]$

Frec. positivas: $\frac{1}{2}\delta(\nu-10)$

e) $\mathcal{F}\left(\cos 2\pi 10t\cdot\Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)\right) = \mathcal{F}(\cos 2\pi 10t) * \mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)\right) =$

$= \left[\delta(\nu-10)+\delta(\nu+10)\right] * \left[e^{-i2\pi\nu}\cdot\mathrm{sinc}(2\nu)\right]$



APELLIDOS: **NOMBRE:**

3. La ecuación diferencial de un circuito RLC es $L\dfrac{di}{dt} + Ri + \dfrac{q}{C} = f(t)$ con $i = \dfrac{dq}{dt}$.
   a) Utilice la transformada de Fourier para determinar la respuesta en frecuencia del circuito.
   b) Justifique a partir del resultado qué función de entrada debe ser $f(t)$ para que la transformada de la carga $Q(\nu)$ coincida con la respuesta en frecuencia del sistema. *(6 puntos)*

$$\mathcal{F}\left(L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}\right) = \mathcal{F}(f(t));$$

$$\left[L(i2\pi\nu)^2 + R(i2\pi\nu) + \frac{1}{C}\right]Q(\nu) = F(\nu)$$

Respuesta en frecuencia: $H(\nu) = \dfrac{Q(\nu)}{F(\nu)} = \dfrac{1}{(-2\pi\nu)^2 \cdot L + (i2\pi\nu)R + 1/C}$

b) Si $F(\nu) = 1$, $H(\nu) = Q(\nu)$

Por tanto $f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) = \mathcal{F}^{-1}(1) = \delta(t)$

4. Una cierta señal es muestreada cada 2 ms hasta obtener un total de 1000 muestras. Al hacer la transformada discreta de Fourier, determine la frecuencia de Nyquist y la resolución en frecuencia del espectro. Explique brevemente qué ocurriría en el espectro si la señal temporal contuviese una componente de frecuencia de 700 Hz. *(4 puntos)*

$\Delta t = 2\,ms$ $\quad T = n\Delta t = 2000\,ms = 2s$

$\Delta\nu = \dfrac{1}{2s} = 0,5\ Hz$: resolución en frecuencia

$F_{max}\ (\text{Nyquist}) = \dfrac{1}{2\Delta t} = \dfrac{1}{4\times10^{-3}\,s} = 250\ Hz$

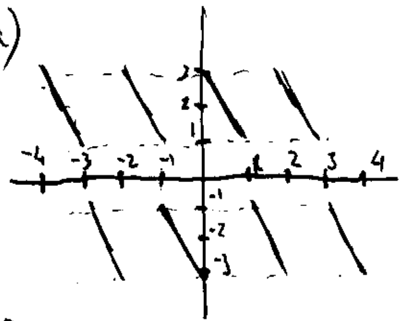
La frecuencia de 700 Hz está por encima de la frecuencia de Nyquist, por lo que aparecerá en el espectro a una frecuencia equivocada (aliasing).

APELLIDOS: NOMBRE:

ECUACIONES DIFERENCIALES. TEMA 5. TRANSFORMADA DE FOURIER (GIE1).

1. Dada la función de periodo 2, impar, definida por $f(t) = -2t - 3$ si $-1 \leq t < 0$, con t en segundos:
   a) Dibuje la función en el intervalo $[-4, 4]$.
   b) Obtenga la expresión de la serie de Fourier.
   c) Dibuje aproximadamente los tres primeros coeficientes en función de la frecuencia ω en rad/s.
   (10 puntos)

a)



Impar $a_n = 0$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

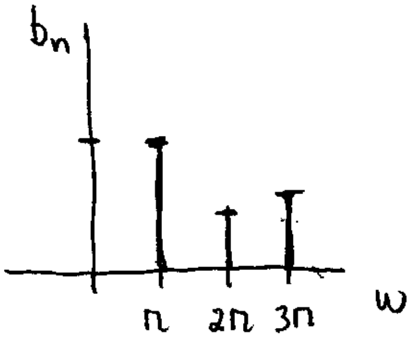
b) $$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\,\text{sen}\,n\omega t\,dt = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,\text{sen}\,n\pi t\,dt =$$

$$= 2\cdot\frac{2}{2}\int_{-1}^{0}\underbrace{(-2t-3)}_{u}\,\underbrace{\text{sen}\,n\pi t\,dt}_{dv} = -2\cdot\left.\frac{(-2t-3)\cos n\pi t}{n\pi}\right|_{-1}^{0} -$$

$$-2\int_{-1}^{0} 2\cdot\cancel{\frac{\cos n\pi t}{n\pi}}\Big|^{0} dt = \frac{6}{n\pi} - \frac{2\cos(-n\pi)}{n\pi} = \frac{6-2\cos n\pi}{n\pi}$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6-2\cos n\pi}{n\pi}\cdot\text{sen}\,n\pi t = \frac{6-2(-1)^n}{n\pi}\cdot\text{sen}\,n\pi t$$

c)



$\omega_1 = \pi$ $\omega_2 = 2\pi$ $\omega_3 = 3\pi$

$$b_1 = \frac{6-2\cos\pi}{\pi} = \frac{8}{\pi}$$

$$b_2 = \frac{6-2\cos 2\pi}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$$

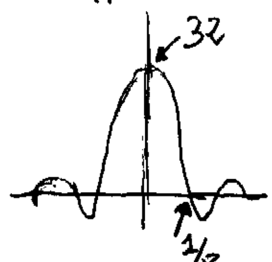
$$b_3 = \frac{6-2\cos 3\pi}{3\pi} = \frac{8}{3\pi}$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

2. **a)** Calcule directamente la transformada de Fourier de un pulso rectangular de altura 4 y anchura 8 s, centrado en el origen. Dibuje el resultado, indicando los valores significativos.
b) Demuestre, a partir de la definición, cuánto vale la transformada de Fourier de una función f centrada en un punto $-a$ en función de la transformada de la función centrada en el origen.
c) Aplique los apartados anteriores para calcular la transformada del pulso rectangular de altura 4 y anchura 8 s, pero que acaba en el instante $t = 0$. Dibuje el módulo de las funciones en tiempo y frecuencia.
d) Calcule, a partir de sus definiciones, la transformada de Fourier de la delta de Dirac centrada en el punto $t = -4$ s.
e) Dibuje la convolución de las funciones dadas en los apartados a) y d) y calcule y dibuje el módulo de su transformada. *(20 puntos)*

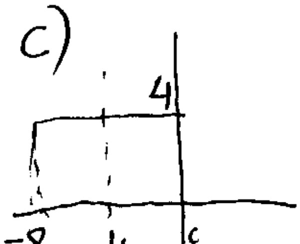
a) $\mathcal{F}\left(4\Pi\left(\frac{t}{8}\right)\right) = \int_{-4}^{4} 4 \cdot e^{-i2\pi\nu t}\, dt = \frac{-4}{\pi\nu} \cdot \left.\frac{e^{-i2\pi\nu t}}{2i}\right|_{-4}^{4} =$

$= \frac{+4}{\pi\nu} \cdot \frac{e^{i2\pi 4\nu} - e^{-i2\pi 4\nu}}{2i} = 4 \cdot 8\, \frac{\text{sen}\, 8\pi\nu}{8\pi\nu} = \boxed{32 \cdot \text{sinc}\, 8\nu}$



b) $\mathcal{F}(f(t+a)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+a) \cdot e^{-i2\pi\nu t}\, dt \underset{t+a=t'}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cdot e^{-i2\pi\nu(t'-a)}\, dt' =$

$= e^{i2\pi\nu a} \cdot \mathcal{F}(f(t))$

c) 

$-a = -4$

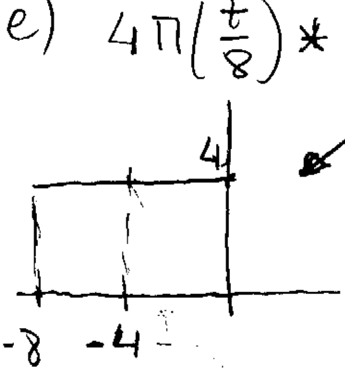
$\mathcal{F}\left(4\Pi\left(\frac{t+4}{8}\right)\right) = e^{i8\pi\nu} \cdot 32\, \text{sinc}\, 8\nu$

(Mismo dibujo que el apartado a))

d) $\mathcal{F}(\delta(t+4)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+4) \cdot e^{-i2\pi\nu t}\, dt = e^{i8\pi\nu}$

$\{\delta(t-a), f\} = f(a)$

e) $4\Pi\left(\frac{t}{8}\right) * \delta(t+4) \longrightarrow \mathcal{F}\left(4\Pi\left(\frac{t}{8}\right)\right) \cdot \mathcal{F}(\delta(t+4)) =$



$= 32\, \text{sinc}\, 8\nu \cdot e^{i8\pi\nu}$

Módulo: $32\, \text{sinc}\, 8\nu$ (Dibujo a))

APELLIDOS: **NOMBRE:**

3. Dada la ecuación de ondas $\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0$, con la condición inicial $u(x,0)=u_0(x)$, aplicar la transformada de Fourier para reducirlo a un problema en ecuaciones diferenciales ordinarias. Detalle claramente la transformada de Fourier aplicada y todos los pasos hasta llegar a la solución, indicando en el resultado la función y las variables del problema final. *(6 puntos)*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}\cdot e^{-i2\pi\alpha x}dx + c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}\cdot e^{-i2\pi\alpha x}dx = 0$$

$$\frac{d}{dt}\cdot U(\alpha,t) + c\cdot(i2\pi\alpha)\cdot U(\alpha,t) = 0$$

Condición inicial: $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\cdot e^{-i2\pi\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\, e^{-i2\pi\alpha x}dx$

$$\Downarrow$$

$$U(\alpha,0) = \mathcal{F}(u_0(x))$$

4. Se desea muestrear una señal de manera que se pueda detectar una frecuencia de 200 Hz, pero pudiendo distinguir separadamente las frecuencias cada 0,5 Hz. Determine cada cuánto y durante cuánto tiempo debe tomar muestras, así como el número de muestras que debe tomar. *(4 puntos)*

$F_{Nyquist} = 200\ Hz \Rightarrow F_{muestreo} = 400\ Hz \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{400} = 2{,}5\ ms$

Se debe muestrear cada 2,5 ms

$\Delta P = 0{,}5\ Hz \Rightarrow T_f = \frac{1}{0{,}5}\ s = 2s$

Se debe muestrear durante 2s.

Número de muestras: $\frac{T_f}{\Delta t} = \frac{2000}{2{,}5} = 800$ muestras.

APELLIDOS: NOMBRE:

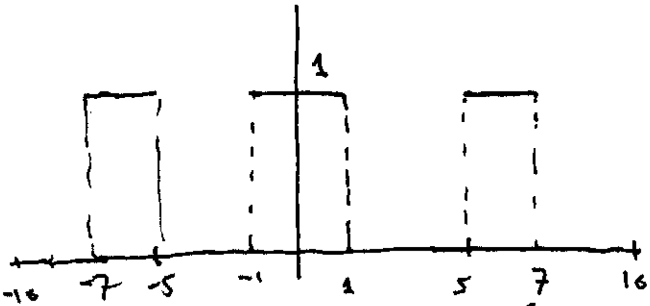
ECUACIONES DIFERENCIALES. ENERO 2012-13. BLOQUE 3.

1. Demuestre si el conjunto de funciones $\{x^n\}$ con $n = 0, 1, 2 \ldots n \ldots$ constituye un sistema ortogonal en el espacio $L_2[-1, 1]$ con el producto escalar $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. *(4 puntos)*

$$(x^n, x^m) = \int_{-1}^{1} x^n \cdot x^m \, dx = \left. \frac{x^{n+m+1}}{n+m+1} \right|_{-1}^{1} = \frac{1}{n+m+1} \cdot \left[1 - (-1)^{n+m+1} \right]$$

Si $n+m+1$ es impar, $(x^n, x^m) \neq 0$. No es ortogonal.

2. Un láser emite durante todo el intervalo de tiempos, pulsos de amplitud unidad, de $2\,\mu s$ de duración, con un espaciado entre pulsos de $4\,\mu s$, tiempo durante el cual el láser no emite energía. Se elige una escala de tiempo en μs, de manera que uno de los pulsos queda centrado en $t = 0$. Dibuje la función en el intervalo $[-10, 10]$ y obtenga el desarrollo en serie de Fourier de la función, dibujando las amplitudes y frecuencias de los tres primeros armónicos. *(10 puntos)*



Función par. Periodo $T = 6 \mu s$

$b_n = 0 \quad w = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3 \times 10^{-6}}$ rad/s

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{6 \times 10^{-6}} \int_{-3\times 10^{-6}}^{3 \times 10^{-6}} f(t)\, dt = \frac{2}{6 \times 10^{-6}} \int_0^{1 \times 10^{-6}} dt = \frac{1}{3 \times 10^{-6}} \cdot t \Big|_0^{1 \times 10^{-6}} = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{6 \times 10^{-6}} \int_{-3 \times 10^{-6}}^{3 \times 10^{-6}} f(t) \cdot \cos \frac{2n\pi}{6 \times 10^{-6}} t \, dt = \frac{4}{6 \times 10^{-6}} \int_0^{1 \times 10^{-6}} \cos \frac{n\pi}{3 \times 10^{-6}} t \, dt =$$

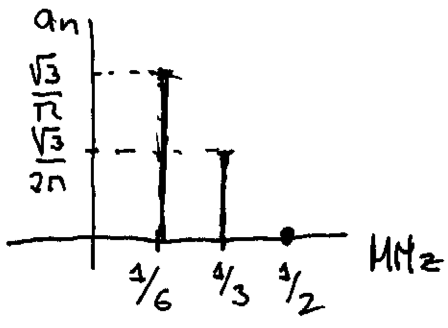
$$= \frac{2}{3 \times 10^{-6}} \cdot \frac{3 \times 10^{-6}}{n\pi} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3 \times 10^{-6}} t \Big|_0^{1 \times 10^{-6}} = \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}$$

$$S_n(t) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \cdot \cos \frac{n\pi}{3 \times 10^{-6}} t$$

$a_1 = \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \qquad \nu_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{6 \times 10^{-6}} = \frac{1}{6}$ MHz

$a_2 = \frac{2}{2\pi} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \qquad \nu_2 = 2\nu_1 = \frac{1}{3}$ MHz

$a_3 = \frac{2}{3\pi} \cdot \operatorname{sen} \pi = 0 \qquad \nu_3 = 3\nu_1 = \frac{1}{2}$ MHz



APELLIDOS: **NOMBRE:**

3. Hallar la transformada de la función $4e^{-3t}$ con $t > 0$, expresándola en forma compleja (parte real e imaginaria) y en forma de módulo y fase. *(8 puntos)*

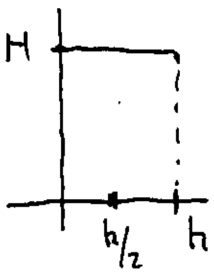
$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt = \int_0^{\infty} 4\, e^{-3t}\cdot e^{-i\omega t}dt = 4\int_0^{\infty} e^{-(3+i\omega)t}dt =$$

$$= \frac{-4}{3+i\omega}\cdot e^{-(3+i\omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{4}{3+i\omega} = \frac{4(3-i\omega)}{9+\omega^2} = \underbrace{\frac{12}{9+\omega^2}}_{Re} - \underbrace{\frac{4\omega}{9+\omega^2}}_{Im}\, i$$

Módulo: $\sqrt{\dfrac{4^2(3^2+\omega^2)}{(9+\omega^2)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{9+\omega^2}} = \dfrac{4\sqrt{9+\omega^2}}{9+\omega^2}$

Fase: $\operatorname{tg}\phi = \dfrac{-4\omega/9+\omega^2}{12/9+\omega^2} = -\dfrac{\omega}{3}$

4. Usando la definición de transformada de Fourier y suponiendo conocida la transformada de Fourier de la función pulso rectangular unidad $\Pi(t)$, demuestre cuánto vale la transformada de un pulso rectangular de altura H y anchura h, que empieza en $t = 0$ y utilice el resultado para determinar qué duración debe tener un pulso si deseamos que la amplitud de su transformada se anule por primera vez a una frecuencia de 1 kHz. *(7 puntos)*



$$\mathcal{F}\left(H\cdot\Pi\left(\frac{t-h/2}{h}\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} H\cdot\Pi\left(\frac{t-h/2}{h}\right)\cdot e^{-i2\pi\nu t}dt =$$

$$\left(\text{Cambio: } \frac{t-h/2}{h} = t' \quad dt = h\,dt'\right)$$

$$= H\cdot h\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(t')\cdot e^{-i2\pi\nu(ht'+h/2)}dt' =$$

$$= Hh\cdot e^{-i\pi\nu h}\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(t')\cdot e^{-i2\pi(h\nu)t'}dt' = Hh\cdot e^{-i\pi\nu h}\cdot \operatorname{sinc}(h\nu)$$

Primer cero de la función sinc: $h\nu = 1 \Rightarrow \nu = 1/h$

$\nu = 1000\text{ Hz} = 1/h \Rightarrow h = \dfrac{1}{1000}\text{ s} \Rightarrow$ Duración: 1 ms

APELLIDOS:

NOMBRE:

5. Dada la ecuación diferencial $A\frac{d^2u}{dt^2} + B\frac{du}{dt} + Cu = 10\delta(t-4)$ con A, B, C constantes, obtenga el valor de $U(\nu)$, siendo U la transformada de Fourier de u.
Nota: Para cualquier transformada que se realice debe indicarse cómo se obtiene. *(7 puntos)*

$$(\delta(t-4), f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-4) f(t)\, dt = f(4)$$

$$\mathcal{F}(\delta(t-4)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-4) \cdot e^{-i2\pi\nu t} dt = e^{-i8\pi\nu}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n u}{dt^n}\right) = (i \cdot 2\pi\nu)^n \cdot \mathcal{F}(u) = (i2\pi\nu)^n \cdot U(\nu)$$

Aplicándolo a la ecuación, teniendo en cuenta la linealidad:

$$A(i2\pi\nu)^2 U(\nu) + B(i2\pi\nu) \cdot U(\nu) + C \cdot U(\nu) = 10 \cdot e^{-i8\pi\nu}$$

$$U(\nu) = \frac{10 \cdot e^{-i8\pi\nu}}{-A4\pi^2\nu^2 + Bi2\pi\nu + C}$$

6. Una cierta señal que es muestreada cada $10\,\mu s$, contiene componentes en las frecuencias de 1000 y 1500 Hz que desean detectarse separadamente. Determine el mínimo número de muestras que deben recogerse para lograrlo. *(4 puntos)*

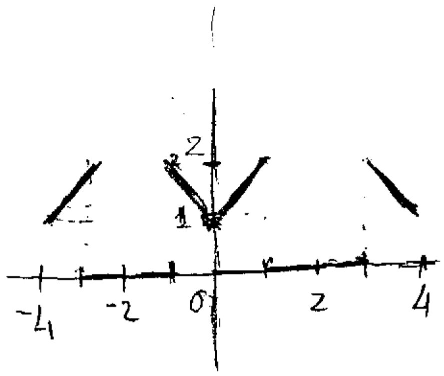
$$\Delta\nu = 500\text{ Hz} \Rightarrow T = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{1}{500} = 2\text{ ms}$$

$$T = N \cdot \Delta t \Rightarrow N = \frac{T}{\Delta t} = \frac{2 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-6}} = 200 \text{ muestras}$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

ECUACIONES DIFERENCIALES. BLOQUE 3. **JULIO 2013.**

1. Dada la función de periodo 4, par, definida por $f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \le t < 2 \end{cases}$, con t en segundos, dibuje la función en el intervalo $[-4, 4]$, obtenga la expresión de su serie de Fourier y dibuje aproximadamente (con el espacio de frecuencias en Hz) sus tres primeros coeficientes. *(8 puntos)*



a) $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt = \frac{1}{4}\cdot 2\int_0^1 (t+1)\,dt =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}+t\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}+1\right] = \frac{3}{4}$

$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos n\omega t\,dt = 2\cdot\frac{2}{4}\int_0^1 \underbrace{(t+1)}_{u}\underbrace{\cos n\frac{\pi}{2}t\,dt}_{dv} =$

$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

($b_n = 0$, par)

$= \frac{2}{n\pi}(t+1)\cdot \text{sen}\, n\frac{\pi}{2}t\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \text{sen}\, n\frac{\pi}{2}t\,dt =$

$= \frac{4}{n\pi}\cdot \text{sen}\, n\frac{\pi}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cdot \cos\frac{n\pi t}{2}\Big|_0^1 =$

$= \frac{4}{n\pi}\cdot \text{sen}\, n\frac{\pi}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)$

$S_n = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n\pi}\,\text{sen}\, n\frac{\pi}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)\right]\cos n\frac{\pi}{2}t$

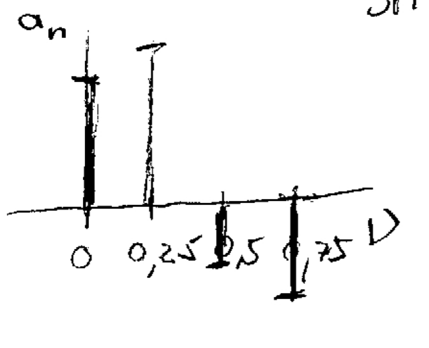
b) $\nu_0 = 0$ $\quad \frac{a_0}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$\nu_1 = \frac{1}{4}\,\text{Hz}$ $\quad a_1 = \frac{4}{\pi}\cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(\cos\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} = 0{,}87$

$\nu_2 = \frac{1}{2}\,\text{Hz}$ $\quad a_2 = \frac{4}{2\pi}\cancel{\text{sen}\,\pi}^{0} + \left(\frac{2}{2\pi}\right)^2(\cos\pi - 1) = -\frac{2}{\pi^2} = -0{,}20$

$\nu_3 = \frac{3}{4}\,\text{Hz}$ $\quad a_3 = \frac{4}{3\pi}\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} + \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2\left(\cancel{\cos\frac{3\pi}{2}}^{0} - 1\right) = -\frac{4}{3\pi} - \frac{4}{9\pi^2} =$

$= -0{,}47$



APELLIDOS: **NOMBRE:**

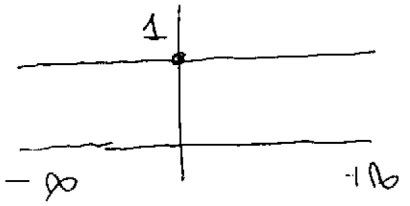
2. **a) Explique brevemente** cómo a partir de la definición de la delta de Dirac centrada en el origen, se obtiene su transformada de Fourier y utilice la propiedad de la nota adjunta para calcular la transformada de Fourier de una delta de Dirac centrada en el instante de tiempo $t = 3\,\mathrm{s}$. Dibuje el módulo de esta última transformada.
b) Conociendo cuál es la transformada de un pulso rectangular unidad, utilice la propiedad de la nota adjunta para calcular la transformada de Fourier de un pulso rectangular que comienza en el instante inicial y dura 2 ms. Dibuje su módulo, indicando su máxima amplitud y para qué frecuencias se anula. ¿Cuánto debería durar el pulso si desease que la frecuencia de 250 Hz no se excitara?
c) Para medir en el laboratorio el pulso rectangular de 2 ms se toman 1000 muestras, una cada $20\,\mu\mathrm{s}$. Obtenga la separación que hay entre cada punto de la transformada y justifique si podríamos detectar correctamente la componente de frecuencia de 30 kHz. *(12 puntos)*

Nota: $f(\frac{t-t_0}{a}) \Leftrightarrow a \cdot e^{-i2\pi\nu t_0} F(a\nu)$

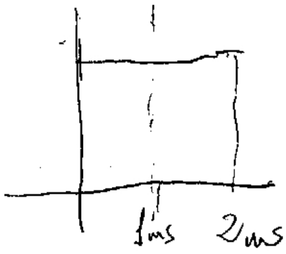
a) $\langle \delta, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\, dt = f(0)$ ← Da el valor de la función a la que se aplica en $t=0$

$F(\nu) = TF(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i2\pi\nu t} dt = e^{-i2\pi\nu \cdot 0} = 1$

$= TF(\delta(t-3)) = e^{-i\cdot 2\pi\nu\cdot 3} F(\nu) = e^{-i6\pi\nu} \Rightarrow |\;| = 1$



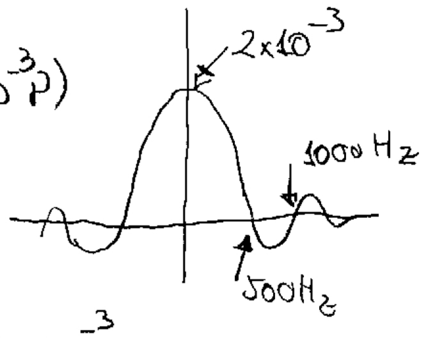
b) $TF(\Pi(t)) = \mathrm{sinc}(\nu) = F(\nu)$



$TF\left(\Pi\left(\frac{t-1\times10^{-3}}{2\times10^{-3}}\right)\right) = 2\times10^{-3} \cdot e^{-i2\pi\nu\times10^{-3}} \cdot \mathrm{sinc}(2\times10^{-3}\nu)$

$|TF| = 2\times10^{-3}\, \mathrm{sinc}(2\times10^{-3}\nu)$

Ceros: $\frac{n\times1}{2\times10^{-3}} = 500\,\mathrm{Hz} \times n$



Cero en 250 Hz → Pulso 4ms.

c) $\Delta t = 20\times10^{-6}$ $N = 1000$ $T_f = 20\times10^{-3}$

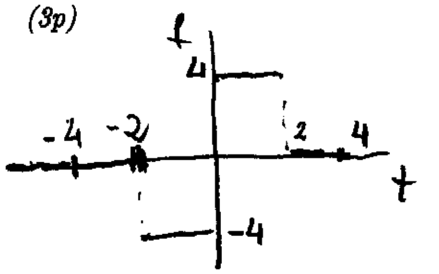
$\Delta\nu = \frac{1}{20\times10^{-3}} = 50\,\mathrm{Hz}$ ← separación

$F_{max} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{N}{2}\Delta\nu = 25000\,\mathrm{Hz}$. No se detecta 30 kHz.

APELLIDOS: **NOMBRE:**

ECUACIONES DIFERENCIALES. **TEMA 5. TRANSFORMADA DE FOURIER. (GIE1)**

1. Se quiere aproximar mediante serie de Fourier la función $f(t)$, impar, definida en el intervalo $[-4,0]$ por $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -4 \leq t < -2 \\ -4 & \text{si} \quad -2 \leq t \leq 0 \end{cases}$, con t en segundos. Estudie la convergencia de la serie a la función en todo punto del intervalo y obtenga la amplitud y frecuencia (en rad/s) del segundo armónico de la serie. *(3p)*



La serie converge a f en todo punto excepto en $t=0$ que converge a 0 y en $t=-2$ que converge a -2. En $t=2$ converge a 2.

$$T = 8 \qquad w = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \qquad 2w = \frac{2\pi}{4} = \pi/2$$

Impar: $a_2 = 0$

$$b_2 = \frac{2}{T}\int_T f(t)\,\text{sen}\,2wt\,dt = 2\cdot\frac{2}{8}\int_{-2}^{0} -4\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}t\,dt =$$

$$= +2\cdot\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}t\Big|_{-2}^{0} = \frac{4}{\pi}\left(\cos 0 - \cos(-\pi)\right) = 8/\pi$$

Amplitud: $8/\pi$	Frecuencia: $\pi/2$

2. **a)** Demuestre cuánto vale la transformada de Fourier de una función $f(bt)$, con $b > 0$, en función de la transformada de la función $f(t)$. *(0.5p)*

$$\mathcal{F}(f(bt)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(bt)\cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt \;\overset{bt=u}{=\!=\!=}\; \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-i2\pi\frac{\nu}{b}u}\cdot\frac{du}{b} =$$

$$= \frac{1}{b}F\left(\frac{\nu}{b}\right)$$

b) Calcule, a partir de su definición, la transformada inversa de Fourier de $\delta(\nu - a)$. *(0.5p)*

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(\nu-a)) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\nu-a)\,e^{i2\pi\nu t}\,d\nu = e^{i\cdot 2\pi a t} \qquad \left((\delta(a), f) = f(a)\right)$$

c) A partir de los apartados anteriores y utilizando la propiedad de convolución, demuestre que la transformada inversa de Fourier de una función $F(\frac{\nu-a}{b})$, con $b > 0$, es $be^{i2\pi at}f(bt)$. *(0.5p)*

$$F\left(\frac{\nu-a}{b}\right) = F\left(\frac{\nu}{b}\right) * \delta(\nu-a)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(F\left(\frac{\nu-a}{b}\right)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(F\left(\frac{\nu}{b}\right)\right)\cdot\mathcal{F}^{-1}(\delta(\nu-a)) =$$

$$= b\cdot f(bt)\cdot e^{i2\pi at}$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

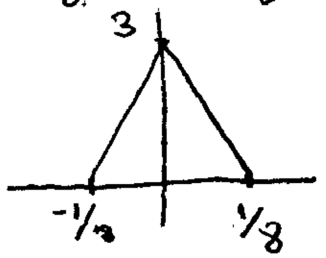
d) Deduzca para qué valores de frecuencia se anula la función $\text{sinc}^2(\nu/b)$, siendo $b > 0$ una constante. *(0.5p)*

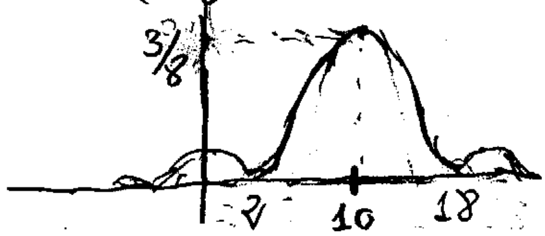
$$\text{sinc}^2\left(\frac{\nu}{b}\right) = \frac{\text{sen}^2\, \pi\nu/b}{(\pi\nu/b)^2} \quad , \quad \text{sen}^2 \frac{\pi\nu}{b} = 0 \Rightarrow \frac{\pi\nu}{b} = n\pi \Rightarrow \nu = nb$$

e) Sabiendo que la transformada de Fourier de la función triángulo unidad (altura 1 y <u>anchura 2</u>) $\Lambda(t)$ es $\text{sinc}^2(\nu)$, aplique los resultados anteriores para calcular la transformada de una función Λ de altura 3 y anchura $\frac{1}{4}$ s, multiplicada por la función $e^{i20\pi t}$. Dibuje de manera aproximada los módulos de la función y la transformada, indicando los valores significativos. *(1.5p)*

$$\mathcal{F}\left(3\Lambda\left(\frac{t}{1/8}\right)\cdot e^{i20\pi t}\right) = \mathcal{F}\left(3\Lambda(8t)\cdot e^{i2\pi\cdot 10t}\right) = \left\{\begin{matrix} a=10 \\ b=8 \end{matrix}\right\}$$

$$= 3\,\frac{1}{8}\,\text{sinc}^2\left(\frac{\nu}{8}\right) * \delta(\nu-10) = \frac{3}{8}\,\text{sinc}^2\left(\frac{\nu-10}{8}\right)$$





f) Desarrollamos un experimento con una función Λ para el que se llegan a detectar las frecuencias inferiores al 80 % del primer cero. ¿Cuál debe ser la duración de la función para poder detectar hasta la frecuencia de 2 kHz? *(1p)*

Cero en $1/b$ ⇒ ancho del triángulo $2b$

$$2000\text{ Hz} = \frac{80}{100}\,\frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{80}{2\times 10^5} = 4\cdot 10^{-4} \Rightarrow \boxed{2b = 0{,}8\text{ ms}}$$

3. Dada la ecuación diferencial $4\dfrac{dy}{dt} + 3y = \delta(t)$, aplique la transformada de Fourier para obtener la solución $Y(\nu)$ de la ecuación en el dominio de la frecuencia, indicando su módulo y argumento. *(1.5p)*

$$4\,(i2\pi\nu)\,Y(\nu) + 3\,Y(\nu) = 1 \Rightarrow Y(\nu) = \frac{1}{3+8\pi\nu i}$$

$$Y(\nu) = \frac{3-8\pi\nu i}{(3+8\pi\nu i)(3-8\pi\nu i)} = \frac{3}{9+64\pi^2\nu^2} - \frac{8\pi\nu}{9+64\pi^2\nu^2}\,i$$

$$|Y(\nu)| = \sqrt{\frac{3^2+(8\pi\nu)^2}{[3^2+(8\pi\nu)^2]^2}} = \frac{1}{\sqrt{3^2+(8\pi\nu)^2}} \qquad \text{tg}\,\varphi = \frac{-8\pi\nu}{3}$$

4. Cierta señal que contiene frecuencias de hasta 1,5 kHz es muestreada cada 0,5 ms. ¿Se detectaría correctamente la señal en frecuencia? ¿Cuántas muestras deberían tomarse para obtener una resolución en frecuencia de 2 Hz? *(1p)*

$$\Delta t = 0{,}5\text{ ms} \Rightarrow \nu_m = \frac{1}{0{,}5\cdot 10^{-3}} = 2\text{ kHz}$$

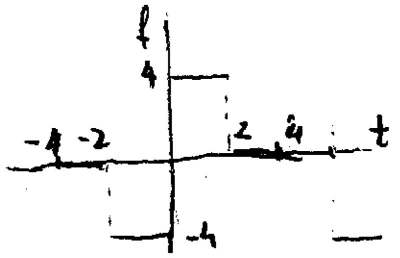
$\nu_{max} = 1$ kHz ⇒ No se detectan las frecuencias entre 1 y 1,5 kHz.

$N\cdot\Delta\nu = \nu_m \qquad N\cdot 2 = 2000 \Rightarrow N = 1000$ muestras.

APELLIDOS: **NOMBRE:**

ECUACIONES DIFERENCIALES. TEMA 5. TRANSFORMADA DE FOURIER. (GIE2)

1. Se quiere aproximar mediante serie de senos la función $f(t)$ definida en el intervalo $[0,4]$ por $f(t) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad 0 \le t < 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 \le t \le 4 \end{cases}$, con t en segundos. Estudie la convergencia de la serie a la función en todo punto del intervalo y obtenga la amplitud y frecuencia (en rad/s) del tercer armónico de la serie. *(3p)*



La serie converge a f en todo punto excepto en $t=0$, que converge a 0 y en $t=2$ que converge a 2 (Puntos medios)

$T = 8 \quad w = 2\pi/8 = \pi/4 \quad w_3 = \frac{3\pi}{4}$

$$b_3 = \frac{2}{T}\int_T f(t)\,\text{sen}\,3wt\,dt = 2\cdot\frac{2}{8}\int_0^2 4\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}t\,dt =$$

$$= -2\cdot\frac{4}{3\pi}\cos\frac{3\pi t}{4}\Big|_0^2 = -\frac{8}{3\pi}\left[\cos\frac{3\pi}{2} - \cos 0\right] = \frac{8}{3\pi}$$

Amplitud: $8/3\pi$	Frecuencia: $3\pi/4$

2. **a)** Demuestre cuánto vale la transformada de Fourier de una función $f(\frac{t}{b})$, con $b > 0$, en función de la transformada de la función $f(t)$. *(0.5p)*

$$\mathcal{F}\left(f\left(\frac{t}{b}\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{b}\right) e^{-i2\pi\nu t}\,dt \overset{\frac{t}{b}=u}{=\!=} b\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i2\pi(\nu b)u}\,du$$

$$= b\,F(b\nu)$$

b) Calcule, a partir de su definición, la transformada de Fourier de $\delta(t-a)$. *(0.5p)*

$$\mathcal{F}(\delta(t-a)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, e^{-i2\pi\nu t}\,dt = e^{-i2\pi a\nu} \qquad ((\delta(a), f) = f(a))$$

c) A partir de los apartados anteriores y utilizando la propiedad de convolución, demuestre que la transformada de Fourier de una función $f(\frac{t-a}{b})$, con $b > 0$, es $be^{-i2\pi a\nu}F(b\nu)$. *(0.5p)*

$$f\left(\frac{t-a}{b}\right) = f\left(\frac{t}{b}\right) * \delta(t-a)$$

$$\mathcal{F}\left(f\left(\frac{t-a}{b}\right)\right) = \mathcal{F}\left(f\left(\frac{t}{b}\right)\right)\cdot\mathcal{F}(\delta(t-a)) = b\cdot e^{-i2\pi a\nu}\cdot F(b\nu)$$

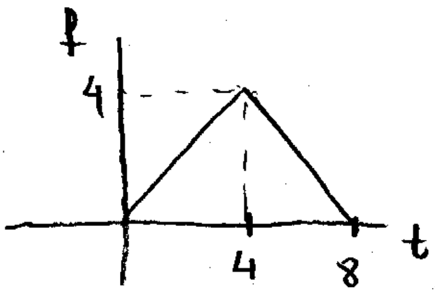
APELLIDOS: **NOMBRE:**

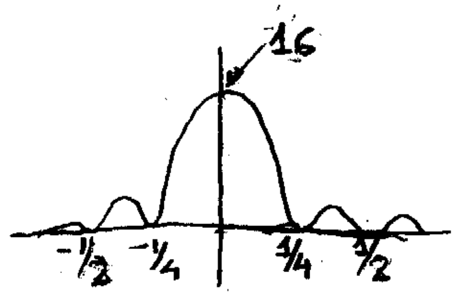
d) Deduzca para qué valores de frecuencia se anula la función $\mathrm{sinc}^2(b\nu)$, siendo $b > 0$ una constante. *(0.5p)*

$$\mathrm{sinc}^2 b\nu = \frac{\mathrm{sen}^2 b\pi\nu}{(b\pi\nu)^2} \qquad \mathrm{sen}^2 b\pi\nu = 0 \Rightarrow b\pi\nu = n\pi \Rightarrow \nu = \frac{n}{b}$$

e) Sabiendo que la transformada de Fourier de la función triángulo unidad (altura 1 y <u>anchura 2</u>) $\Lambda(t)$ es $\mathrm{sinc}^2(\nu)$, aplique los resultados anteriores para calcular la transformada de una función Λ de altura 4 y anchura 8 s, que empieza a tomar valores no nulos en $t = 0$. Dibuje de manera aproximada los módulos de la función y la transformada, indicando los valores significativos. *(1.5p)*

$$\mathcal{F}\left(4\Lambda\left(\frac{t-4}{4}\right)\right) = 4\cdot 4\, e^{-i2\pi\cdot 4\nu}\cdot \mathrm{sinc}^2(4\nu) = 16\, e^{-i8\pi\nu}\, \mathrm{sinc}^2(4\nu)$$





f) Desarrollamos un experimento con una función Λ para el que se llegan a detectar las frecuencias inferiores al 80 % del primer cero. ¿Cuál debe ser la duración de la función para poder detectar hasta la frecuencia de 1 kHz? Cero en $1/b$ $\Rightarrow$ ancho del triángulo $2b$. *(1p)*

$$1000\ \mathrm{Hz} = \frac{80}{100}\cdot\frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{80}{10^5} = 8\cdot 10^{-4} \Rightarrow \boxed{2b = 1{,}6\ \mathrm{ms}}$$

3. Dada la ecuación diferencial $4\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3y = \delta(t+4)$, aplique la transformada de Fourier para obtener la solución $Y(\nu)$ de la ecuación en el dominio de la frecuencia, indicando su módulo y argumento. *(1.5p)*

$$4(i2\pi\nu)^2\cdot Y(\nu) + 3Y(\nu) = e^{i2\pi\cdot 4\nu}$$

$$(-16\pi^2\nu^2+3)Y(\nu) = e^{i8\pi\nu} \Rightarrow \boxed{Y(\nu) = \frac{e^{i8\pi\nu}}{-16\pi^2\nu^2+3}}$$

$$Y(\nu) = \frac{\cos 8\pi\nu}{3-16\pi^2\nu^2} + i\,\frac{\mathrm{sen}\, 8\pi\nu}{3-16\pi^2\nu}$$

$$|Y(\nu)| = \left|\frac{1}{3-16\pi^2\nu^2}\right| \qquad \text{Fase} = 8\pi\nu \quad \left(\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{sen}\, 8\pi\nu}{\cos 8\pi\nu}\right)$$

4. Cierta señal que contiene frecuencias de hasta 1,5 kHz es muestreada con una frecuencia de 2 kHz hasta obtener un total de 1000 muestras. ¿Se detectaría correctamente la señal en frecuencia?¿Qué resolución tendríamos en el espectro? *(1p)*

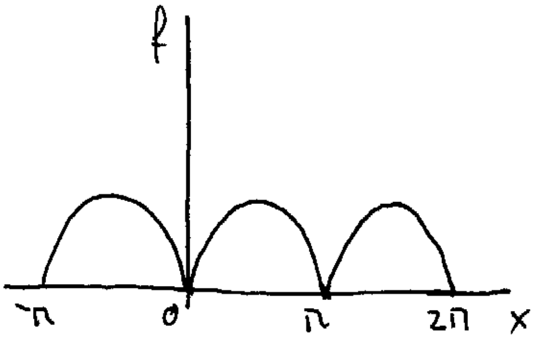
$\nu_m = 2\ \mathrm{KHz} \Rightarrow \nu_{max} = 1\ \mathrm{KHz} \Rightarrow$ No se detectan correctamente las frecuencias entre 1 y 1,5 KHz.

Resolución: $\dfrac{\nu_m}{N} = \dfrac{2000}{1000} = 2\ \mathrm{Hz}$ (también $T = 1000\cdot\dfrac{1}{2000} = 0{,}5\ \mathrm{s}$, $\Delta\nu = \dfrac{1}{0{,}5} = 2\ \mathrm{Hz}$)

APELLIDOS: NOMBRE:

ECUACIONES DIFERENCIALES. ENERO 2013-14. BLOQUE 3.

1. Desarrolle en serie de Fourier la función $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$ y represente la amplitud de los tres primeros armónicos en función de la frecuencia. *(3 puntos)*



$T = \pi$ par $b_n = 0$

$f(x) = \operatorname{sen} x \quad 0 < x < \pi$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_T f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(x)\cos n\omega x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos 2nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(2n+1)x + \operatorname{sen}(1-2n)x\right]dx =$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}\left[\cos(2n+1)x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{1-2n}\cdot\left[\cos(1-2n)x\right]\Big|_0^{\pi}\right] =$$

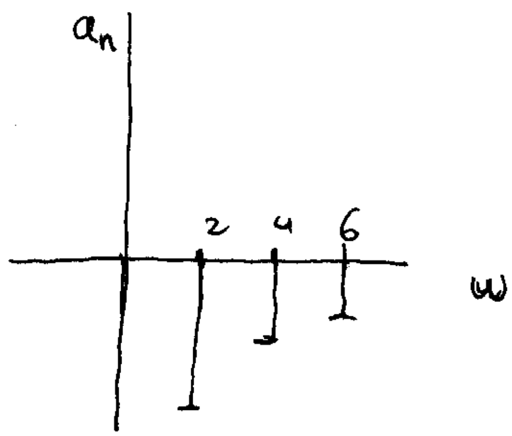
$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}\Big(\underbrace{\cos(2n+1)\pi}_{-1} - 1\Big) + \frac{1}{1-2n}\Big[\underbrace{\cos(1-2n)\pi}_{-1} - 1\Big]\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{1-2n}\right]$$

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{1-2n}\right)\cos 2nx$$

$\omega = 2 \quad a_1 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{1}\right] = -\frac{4}{3\pi}$

$\omega = 4 \quad a_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right] = \frac{-4}{15\pi}$

$\omega = 6 \quad a_3 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{7} - \frac{2}{5}\right] = \frac{-4}{35\pi}$

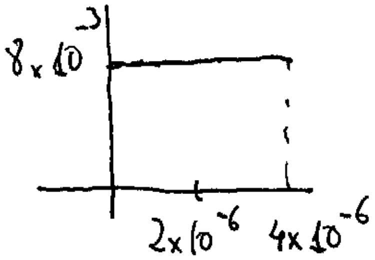


APELLIDOS: **NOMBRE:**

2. Demuestre que la transformada de Fourier de un pulso rectangular unidad es una función sinc. Aplique el resultado y las propiedades de la transformada para determinar cuánto vale la transformada de Fourier de un pulso rectangular de altura 8 mV y anchura 4 μs, que comienza en el instante inicial. Determine el módulo y la fase de su transformada, así como los valores de frecuencia para los que se anula. Determine cuánto debería durar el pulso si queremos que el segundo cero de la transformada se produzca a 250 kHz. ¿Con qué intervalo de tiempo máximo deberíamos muestrear la señal para llegar a detectar este valor? *(5 puntos)*

$$\mathcal{F}(\Pi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t)\cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi\nu t}\,dt = \frac{1}{-2\pi\nu i}\, e^{-i2\pi\nu t}\Big|_{-1/2}^{1/2} =$$

$$= \frac{e^{-i\pi\nu} - e^{i\pi\nu}}{-2\pi\nu i} = \frac{1}{\pi\nu}\,\frac{e^{i\pi\nu} - e^{-i\pi\nu}}{2i} = \frac{\operatorname{sen}\pi\nu}{\pi\nu} = \operatorname{sinc}\nu$$



$$f(t) = 8\times10^{-3}\cdot\Pi\left(\frac{t-2\times10^{-6}}{4\times10^{-6}}\right) \qquad a = \frac{1}{4\times10^{-6}} \qquad t_0 = 2\times10^{-6}$$

$$f(at) = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

$$f(t-t_0) = e^{-i2\pi\nu t_0}F(\nu)$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = 8\times10^{-3}\cdot e^{-i4\pi10^{-6}\nu}\cdot\operatorname{sinc}(4\times10^{-6}\nu)\cdot4\times10^{-6}$$

<u>Módulo</u>: $32\times10^{-6}\operatorname{sinc}(4\times10^{-6}\nu)$ <u>Fase</u>: $-4\pi10^{-6}\nu$

<u>Ceros</u>: $\operatorname{sinc} 4\times10^{-6}\nu = \frac{\operatorname{sen} 4\pi\cdot10^{-6}\nu}{\pi\cdot4\,10^{-6}\nu} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 4\pi10^{-6}\nu = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4\pi10^{-6}\nu = n\pi \Rightarrow \nu = \frac{n}{4\times10^{-6}}\,\text{Hz} = 0{,}25\cdot10^{6}\,n \begin{cases} 250\ \text{KHz} \\ 500\ \text{KHz} \\ \ldots \end{cases}$$

Segundo cero a 250 KHz $\Rightarrow$ Transformada de anchura mitad de la anterior $\Rightarrow$ pulso de anchura doble: 8 μs

(también: $\nu = \frac{n}{b}$,, $\frac{2}{b} = 250$ KHz $\Rightarrow b = \frac{2}{250000} = 8\,\mu$s)

Muestreo: $F_{max} = 250$ KHz $\Rightarrow F_{muestreo} = 500$ KHz

$$t_{muestreo} = \frac{1}{F_{muestreo}} = 2\,\mu s$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

3. La vibración $y(x,t)$ de una cuerda viene dada por la ecuación en derivadas parciales $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, siendo ρ, densidad lineal de la cuerda, y T, tensión sobre la cuerda, dos constantes conocidas. Considere una cuerda de longitud L, fija en sus extremos. Aplique la transformada de Fourier para obtener el problema equivalente en el dominio de la frecuencia temporal ν. Detalle y explique todos los pasos, indicando en el resultado la función y las variables del problema final. *(2 puntos)*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \left.\begin{array}{ll} y=0, & x=0 \\ y=0, & x=L \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y(0,t)=0 \\ y(L,t)=0 \end{array}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt = \frac{\rho}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt$$

(Aplico transformada de Fourier en el dominio del Tiempo).

$$\frac{d^2 Y(x,\nu)}{dx^2} = \frac{\rho}{T}(i2\pi\nu)^2\cdot Y(x,\nu)$$

(La derivada respecto a x sale fuera de la integral; en la derivada respecto de t aplicamos la propiedad de la transformada de la derivada de una función).

$$\frac{d^2 Y(x,\nu)}{dx^2} + \frac{\rho}{T}4\pi^2\nu^2\cdot Y(x,\nu) = 0$$

Condiciones de contorno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(0,t)\cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt = 0 \Rightarrow Y(0,\nu)=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(L,t)\cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt = 0 \Rightarrow Y(L,\nu)=0$$

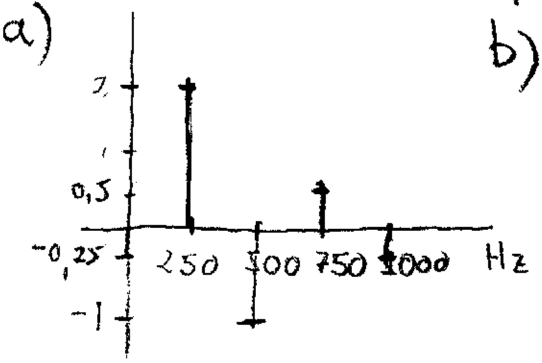
APELLIDOS: **NOMBRE:**

ECUACIONES DIFERENCIALES. JULIO 2013-14. **BLOQUE 3.**

1. Los cuatro primeros coeficientes de la serie de Fourier de cierta función impar $f(t)$, de periodo 4 ms, tienen como valores 2, -1, 0.5 y -0.25 respectivamente.
   a) Dibuje el espectro de Fourier en Hz de dicha función.
   b) Exprese la suma parcial de la serie de Fourier de $f(t)$ para los cuatro primeros coeficientes.
   (2 puntos)

$$T = 4\times10^{-3}\,s \Rightarrow \nu_1 = \frac{1}{T} = 0{,}25\times10^{3}\,Hz = 250\,Hz \qquad \omega = 2\pi\nu = 500\pi\ rad/s$$

a)



b) $$S_4(t) = \sum_{n=1}^{4} b_n \operatorname{sen} n\frac{2\pi}{T}\cdot t = \quad (\text{Impar})$$

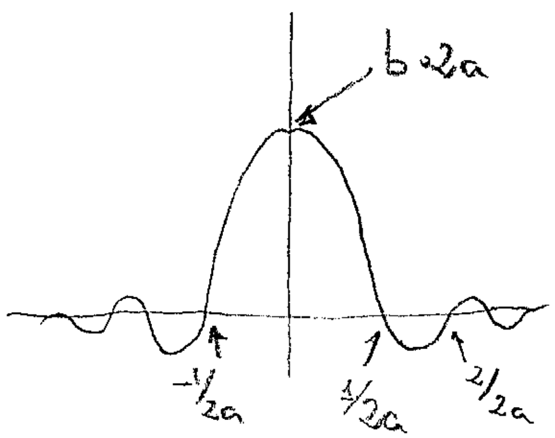
$$= 2\operatorname{sen}500\pi t - 1\operatorname{sen}1000\pi t + 0{,}5\operatorname{sen}1500\pi t - 0{,}25\operatorname{sen}2000\pi t$$

2. Calcule, a partir de su definición, la transformada de Fourier de un pulso rectangular centrado en el origen, de altura b y anchura $2a$. Exprese el resultado en forma de función **sinc** y dibújela de forma aproximada, indicando sus valores más significativos (altura en el origen y los valores para los que se anula).
   (3 puntos)

$$\mathcal{F}\left(b\,\Pi\left(\frac{t}{2a}\right)\right) = \int_{-a}^{a} b\cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt = b\cdot\left.\frac{e^{-i2\pi\nu t}}{-i2\pi\nu}\right|_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{b}{-i2\pi\nu}\left[e^{-i2\pi\nu a} - e^{+i2\pi\nu a}\right] = \frac{b}{\pi\nu}\,\frac{e^{2\pi\nu a i} - e^{-2\pi\nu a i}}{2i} =$$

$$= \frac{b}{\pi\nu}\operatorname{sen}2\pi\nu a = b\cdot2a\,\frac{\operatorname{sen}2\pi\nu a}{2\pi\nu a} = b\cdot2a\cdot\operatorname{sinc}(2a\nu)$$



$$\operatorname{sen}2\pi\nu a = 0 \Rightarrow$$
$$2\pi\nu a = n\pi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \nu = n\cdot\frac{1}{2a} \quad (\text{Ceros})$$

APELLIDOS:

NOMBRE:

3. Calcule, a partir de su definición, la transformada inversa de Fourier de $\delta(\nu-\nu_0)$, siendo ν_0 una constante. Utilice el resultado para calcular la transformada de Fourier de la función $f(t) = \operatorname{sen} 4\pi t$. *(2.5 puntos)*

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(\nu-\nu_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu-\nu_0)\cdot e^{i2\pi\nu t}\,d\nu = e^{i2\pi\nu_0 t}$$

$$\mathcal{F}(\operatorname{sen} 4\pi t) = \mathcal{F}\left[\frac{e^{4\pi t i} - e^{-4\pi t i}}{2i}\right] \underset{=}{\overset{(\nu_0=2)}{=}} \frac{\delta(\nu-2)-\delta(\nu+2)}{2i} =$$

$$= \frac{\delta(\nu+2)-\delta(\nu-2)}{2}\, i$$

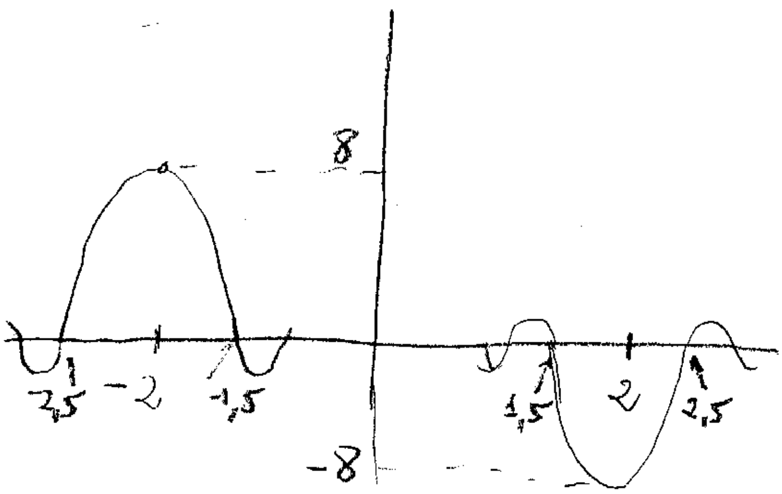
4. Considere la función $f(t)$ definida por $8 \operatorname{sen} 4\pi t$, en el intervalo [-1,1], siendo nula en el resto de valores de t. Utilice los resultados de los problemas anteriores y el teorema de convolución para obtener la transformada de Fourier de dicha función. Dibuje ~~la función y el módulo de~~ la transformada, indicando sus valores más significativos. *(2.5 puntos)*

$$f(t) = 8 \operatorname{sen} 4\pi t \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \mathcal{F}(\operatorname{sen} 4\pi t) * \mathcal{F}\left(8\,\Pi\left(\frac{t}{2}\right)\right) =$$

$$= \left[\frac{\delta(\nu+2)-\delta(\nu-2)}{2}\right] i * 16 \cdot \operatorname{sinc}(2\nu) =$$

$$= 8i \operatorname{sinc} 2\nu * [\delta(\nu+2)-\delta(\nu-2)]$$



Sinc de altura 8 y anchura 1/2, desplazadas a 2 Hz y -2 Hz

(Eje Imaginario)

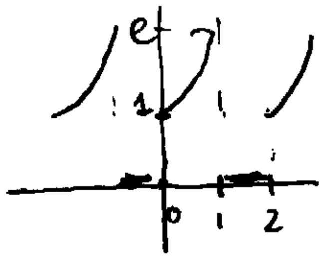
ν (Hz)

APELLIDOS: **NOMBRE:**

ECUACIONES DIFERENCIALES 2014-15. **TRANSFORMADA DE FOURIER. (GIE1)**

1. Aproxime mediante serie compleja de Fourier en el intervalo $[0,2]$ la función $f(t)$ definida en dicho intervalo por
$f(t)=\begin{cases} e^t & \text{si} \quad 0\le t<1 \\ 0 & \text{si} \quad 1\le t\le 2 \end{cases}$, con t en segundos. Indique cuáles son las frecuencias en Hz que aparecen en el espectro. Estudie la convergencia de la serie a la función en todo punto del intervalo. *(3p)*

$T=2 \quad f=\frac{1}{2}$ Frecuencias: $\dots -\frac{n}{2} \dots -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \dots \frac{n}{2} \dots$ (Hz)



La serie converge a la función en todo punto excepto en los puntos de discontinuidad, que converge al punto medio:

$S_n(0)=0{,}5 \quad S_n(1)=\frac{e}{2} \quad S_n(2)=0{,}5$

$$S_n=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot e^{i\cdot n\cdot\frac{2\pi}{T}t}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 e^t e^{-in\pi t}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{(1-in\pi)t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-in\pi}\left(e^{(1-in\pi)t}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2(1-in\pi)}\left(e^{(1-in\pi)}-1\right)=\frac{1+in\pi}{2(1+n^2\pi^2)}\left(e^{1-in\pi}-1\right)$$

$$e^{1-in\pi}=e(\cos n\pi-i\sin n\pi)=e(-1)^n \qquad S_n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e(-1)^n-1\right]\frac{1+in\pi}{2(1+n^2\pi^2)}\cdot e^{in\pi t}$$

2. Demuestre, a partir de la definición, cuánto vale la transformada inversa de Fourier de la función $F(-\nu)$ en función de la transformada inversa de la función $F(\nu)$. *(1p)*

$$\mathcal{F}^{-1}(F(-\nu))=\int_{-\infty}^{\infty}F(-\nu)\cdot e^{2\pi i\nu t}d\nu \underset{\nu'=-\nu}{=} \int_{\infty}^{-\infty}-F(\nu')\cdot e^{2\pi i(-\nu')t}d\nu'=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}F(\nu')\cdot e^{2\pi i\nu'(-t)}d\nu'=f(-t) \qquad \text{con } f(t)=\mathcal{F}^{-1}(F(\nu))$$

3. Dada la ecuación diferencial $3\ddot{x}(t)-4\dot{x}(t)+x(t)=4$, obtenga, aplicando la transformada de Fourier y sus propiedades, la expresión de dicha ecuación en el dominio de la frecuencia. *(1p)*

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^nx}{dt^n}\right)=(i2\pi\nu)^n\cdot\mathcal{F}(x)=(i\cdot 2\pi\nu)^n\cdot X(\nu) \qquad \mathcal{F}(4)=4\delta(\nu)$$

$$3(i2\pi\nu)^2X(\nu)-4(i2\pi\nu)X(\nu)+X(\nu)=4\delta(\nu)$$

$$(-12\pi^2\nu^2-8\pi\nu i+1)X(\nu)=4\delta(\nu)$$

con $X(\nu)=\mathcal{F}(x(t))$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

4. Calcule a partir de su definición, la transformada de Fourier de $\delta(t-a)$, con a una constante. Utilizando **el resultado y la propiedad de linealidad**, calcule la transformada inversa de Fourier de la función $F(\nu) = \operatorname{sen}(4\pi(\nu-2))$. Dibuje las partes real e imaginaria de la función resultante. *(3.5p)*

$$\mathcal{F}(\delta(t-a)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt = e^{-i2\pi\nu a} \qquad \left(\langle \delta(t-a), f(t)\rangle = f(a)\right)$$

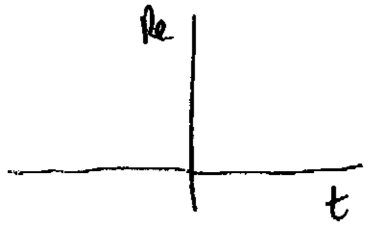
$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\operatorname{sen} 4\pi(\nu-2)) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{e^{i4\pi(\nu-2)} - e^{-i4\pi(\nu-2)}}{2i}\right] =$$

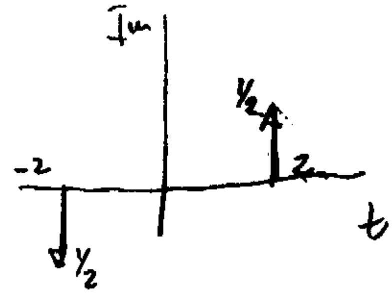
$$= \frac{1}{2i}\left[e^{-8\pi i}\mathcal{F}^{-1}(e^{4\pi\nu i}) - e^{8\pi i}\mathcal{F}^{-1}(e^{-4\pi\nu i})\right] =$$

$$\left(e^{8\pi i} = \cos 8\pi + i\operatorname{sen} 8\pi = 1 \qquad e^{-8\pi i} = \cos(-8\pi) + i\operatorname{sen}(-8\pi) = 1\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\delta(t+2) - \delta(t-2)\right] = \frac{1}{2}\left[\delta(t-2) - \delta(t+2)\right] i$$

$$\operatorname{Re}(f(t)) = 0 \qquad \operatorname{Im}(f(t)) = \frac{1}{2}\left[\delta(t-2) - \delta(t+2)\right]$$





5. La respuesta en frecuencia de un cierto sistema contiene como frecuencias características $\nu = 200\,\text{Hz}$ y sus múltiplos enteros. ¿Qué duración debería tener el pulso triangular con el que vamos a excitar el sistema para que no haya respuesta del sistema a la excitación (salida nula)? Razone la respuesta. *(1p)*

$$X(\nu) \longrightarrow \boxed{H(\nu)} \longrightarrow Y(\nu) \qquad Y(\nu) = H(\nu)\cdot X(\nu) \qquad x(t) = \Lambda\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$X(\nu) = a\cdot \operatorname{sinc}^2(a\nu)$$

Los ceros de la función sinc (o sinc^2) deben coincidir con las frecuencias del sistema para que $Y(\nu) = H(\nu)\cdot X(\nu) = 0$

Función triángulo de anchura a (duración $2a$), ceros de la sinc en:

$$n\cdot\frac{1}{a} = 200\,\text{Hz} \Rightarrow a = \frac{1}{200}\,s = 5\,ms \Rightarrow \text{duración: } 10\,ms$$

6. Se muestrea una señal cada 2 ms y se desea obtener una resolución en frecuencia de 10 Hz. ¿Cuántas muestras deben tomarse para lograrlo? *(0.5p)*

$$\Delta\nu = 10\,\text{Hz} \Rightarrow T = \frac{1}{\Delta\nu} = 0{,}1\,s \qquad \Delta t = 2\times10^{-3}\,s$$

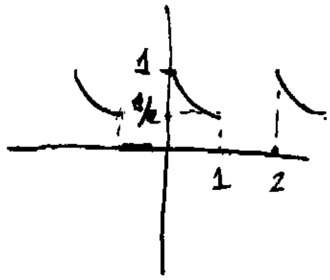
$$T = N\cdot\Delta t \Rightarrow N = \frac{0{,}1}{2\times10^{-3}} = 50 \text{ muestras.}$$

APELLIDOS: NOMBRE:

ECUACIONES DIFERENCIALES 2014-15. TRANSFORMADA DE FOURIER. (GIE2)

1. Aproxime mediante serie compleja de Fourier en el intervalo $[0,2]$ la función $f(t)$ definida en dicho intervalo por
$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \le t \le 2 \end{cases}$, con t en segundos. Indique cuáles son las frecuencias en Hz que aparecen en el espectro. Estudie la convergencia de la serie a la función en todo punto del intervalo. *(3p)*

$T=2 \qquad f=\frac{1}{2} \qquad$ Frecuencias: $-\frac{n}{2} \dots -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1 \dots \frac{n}{2} \dots$ (Hz)



La serie converge a la función en todo punto excepto en los puntos de discontinuidad que converge al punto medio:

$S_n(0)=0{,}5 \qquad S_n(1)=\frac{1}{2e} \qquad S_n(2)=0{,}5$

$$S_n=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{in\cdot\frac{2\pi}{2}t}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t}\cdot e^{-in\pi t}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-(1+in\pi)t}\,dt=$$

$$=\frac{-1}{2(1+n\pi i)}\cdot e^{-(1+n\pi i)t}\Big|_0^1=\frac{1}{2(1+n\pi i)}\left[1-e^{-(1+n\pi i)}\right]=\frac{1-n\pi i}{2(1+n^2\pi^2)}\left(1-e^{-(1+n\pi i)}\right)$$

$$e^{-(1+n\pi i)}=\frac{1}{e}(\cos(-n\pi)+i\,\mathrm{sen}(-n\pi))=\frac{1}{e}(-1)^n \qquad S_n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[1-\frac{1}{e}(-1)^n\right]\cdot\frac{1-n\pi i}{2(1+n^2\pi^2)}\cdot e^{in\pi t}$$

2. Demuestre, a partir de la definición, cuánto vale la transformada de Fourier de la función $f(-t)$ en función de la transformada de la función $f(t)$. *(1p)*

$$\mathcal{F}(f(-t))=\int_{-\infty}^{\infty} f(-t)\cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt \underset{\substack{t'=-t\\ dt'=-dt}}{=} \int_{\infty}^{-\infty} -f(t')\cdot e^{-i2\pi(-\nu)t'}\,dt'=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\cdot e^{-i2\pi(-\nu)t'}\,dt'=F(-\nu) \quad \text{con } \mathcal{F}(f(t))=F(\nu)$$

3. Dada la ecuación diferencial $5\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)-x(t)=2$, obtenga, aplicando la transformada de Fourier y sus propiedades, la expresión de dicha ecuación en el dominio de la frecuencia. *(1p)*

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)=(i2\pi\nu)^n\cdot\mathcal{F}(x)=(i2\pi\nu)^n X(\nu) \qquad \mathcal{F}(2)=2\cdot\delta(\nu)$$

$$5(i2\pi\nu)^2 X(\nu)+2\cdot(i2\pi\nu)X(\nu)-X(\nu)=2\delta(\nu)$$

$$(-20\pi^2\nu^2+4\pi\nu i-1)\,X(\nu)=2\delta(\nu)$$

con $X(\nu)=\mathcal{F}(x(t))$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

4. Calcule a partir de su definición, la transformada inversa de Fourier de $\delta(\nu - a)$, con a una constante. Utilizando **el resultado y la propiedad de linealidad**, calcule la transformada de Fourier de la función $f(t) = \text{sen}(6\pi(t-1))$. Dibuje las partes real e imaginaria de la función resultante. *(3.5p)*

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(\nu-a)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu-a) \cdot e^{+i2\pi\nu t} d\nu = e^{i2\pi a t} \qquad (\langle \delta(\nu-a), F(\nu)\rangle = F(a))$$

$$F(\nu) = \mathcal{F}(\text{sen}(6\pi(t-1))) = \mathcal{F}\left[\frac{e^{i6\pi(t-1)} - e^{-i6\pi(t-1)}}{2i}\right] =$$

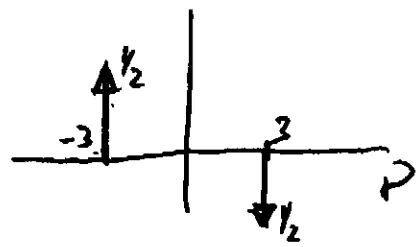
$$= \mathcal{F}\left[\frac{e^{-6\pi i} \cdot e^{6\pi t i} - e^{6\pi i} \cdot e^{-6\pi t i}}{2i}\right] = \frac{1}{2i}\left[e^{-6\pi i}\mathcal{F}(e^{6\pi t i}) - e^{6\pi i}\mathcal{F}(e^{-6\pi t i})\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{-6\pi i}\delta(\nu-3) - e^{6\pi i}\cdot\delta(\nu+3)\right] =$$

$$\left(e^{6\pi i} = \cos 6\pi + i\,\text{sen}\, 6\pi = 1 \qquad e^{-6\pi i} = \cos(-6\pi) + i\,\text{sen}(-6\pi) = 1\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\delta(\nu-3) - \delta(\nu+3)\right] = \frac{1}{2}\left[\delta(\nu+3) - \delta(\nu-3)\right]\cdot i$$

$$\text{Re}(f(t)) = 0 \qquad \text{Im}(f(t)) = 1/2\left[\delta(\nu+3) - \delta(\nu-3)\right]$$



5. La respuesta en frecuencia de un cierto sistema contiene como frecuencias características $\nu = 500\,\text{Hz}$ y sus múltiplos enteros. ¿Qué duración debería tener el pulso rectangular con el que vamos a excitar el sistema para que no haya respuesta del sistema a la excitación (salida nula)? Razone la respuesta. *(1p)*

$$X(\nu) \rightarrow \boxed{H(\nu)} \rightarrow Y(\nu) \qquad Y(\nu) = X(\nu)\cdot H(\nu). \qquad x(t) = \Pi\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$X(\nu) = a \cdot \text{sinc}(a\nu)$$

Los ceros de la función sinc deben coincidir con las frecuencias del sistema ($H(\nu)$) para que $Y(\nu) = X(\nu)\cdot H(\nu) = 0$.

Pulso de anchura a, ceros de la sinc en $n\cdot\frac{1}{a} = n\cdot 500\,\text{Hz} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{500}\,s = 2\,ms$$

6. Cierta señal contiene frecuencias de hasta 2 kHz. ¿Con qué intervalo de tiempo debe muestrearse para ser detectada correctamente? *(0.5p)*

F_m = frecuencia de muestreo $= 2\cdot F_{max} = 4\,\text{kHz}$

$$\Delta t = \frac{1}{F_m} = \frac{1}{4000}\,s = 2{,}5\times 10^{-4}\,s = 250\,\mu s$$

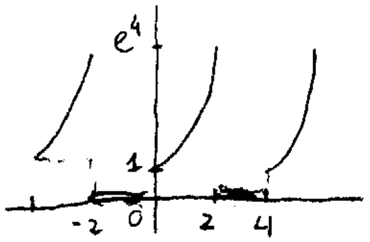
Enero

APELLIDOS: **NOMBRE:**

ECUACIONES DIFERENCIALES 2014-15. **TRANSFORMADA DE FOURIER.**

1. Aproxime mediante serie compleja de Fourier en el intervalo $[0,4]$ la función $f(t)$ definida en dicho intervalo por
$f(t) = \begin{cases} e^{2t} & \text{si} \quad 0 \le t < 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 \le t \le 4 \end{cases}$, con t en segundos. Indique cuáles son las frecuencias en Hz que aparecen en el espectro. Estudie la convergencia de la serie a la función en todo punto del intervalo. *(3p)*

$T=4 \quad f=1/4$ Frecuencias: $\ldots -\frac{n}{4} \ldots -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/4 \cdots n/4 \cdots$ (Hz)



La serie converge a la función en todo punto excepto en los puntos de discontinuidad que converge al punto medio:

$S_n(0) = \frac{1}{2} \quad S_n(2) = \frac{e^4}{2} \quad S_n(4) = 1/2$

$$S_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i n \frac{2\pi t}{T}} \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)\cdot e^{-i\frac{2\pi}{T}nt}dt$$

$$c_n = \frac{1}{4}\int_0^2 e^{2t}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}nt}dt = \frac{1}{4}\int_0^2 e^{(2-i\frac{\pi}{2}n)t}dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(2-\frac{i\pi}{2}n)}\cdot e^{(2-i\frac{\pi}{2}n)t}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{8-2n\pi i}\cdot\left[e^{(4-n\pi i)}-1\right] = \frac{8+2n\pi i}{64+4n^2\pi^2}\left[e^4(-1)^n-1\right]$$

$$e^{(4-n\pi i)} = e^4\cdot e^{-n\pi i} = e^4\cdot[\cos(-n\pi)+i\,\mathrm{sen}(-n\pi)] = e^4\cdot(-1)^n$$

$$S_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{8+2n\pi i}{64+4n^2\pi^2}\cdot\left[e^4(-1)^n-1\right]\cdot e^{i n\frac{\pi}{2}t}$$

2. Dada la ecuación en derivadas parciales $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, con c una constante, aplique la transformada de Fourier en el dominio del tiempo para transformar dicha ecuación en una ecuación diferencial. Detalle claramente la transformada de Fourier aplicada y los pasos hasta llegar a la solución, indicando en el resultado la función y variables de la ecuación final. *(1p)*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot e^{-i2\pi\nu t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} c\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdot e^{-i2\pi\nu t}dt = c\cdot(2\pi i\nu)^2\int y\cdot e^{-i2\pi\nu t}dt$$

$$\parallel$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot e^{-i2\pi\nu t}dt \qquad \left(\mathcal{F}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = (2\pi\nu i)^2\,\mathcal{F}(y)\right)$$

$$\frac{d^2\,Y(x,\nu)}{dx^2} = -c\,4\pi^2\nu^2\cdot Y(x,\nu) \qquad \text{con} \quad Y(x,\nu) = \mathcal{F}(y(x,t))$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

3. Demuestre, a partir de la definición, cuánto vale la transformada inversa de Fourier de la función $F(-2\nu)$ en función de la transformada inversa de la función $F(\nu)$. *(1p)*

$$\mathcal{F}^{-1}(F(-2\nu)) = \int_{-\infty}^{\infty} F(-2\nu)\, e^{2\pi i\nu t}\, d\nu \underset{\substack{\nu'=-2\nu \\ d\nu'=-2d\nu}}{=} \int_{\infty}^{-\infty} -\frac{1}{2} F(\nu') \cdot e^{2\pi i(-\frac{\nu'}{2})t}\, d\nu' =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu')\, e^{2\pi i\nu'(-\frac{t}{2})}\, d\nu' = \frac{1}{2} f\left(-\frac{t}{2}\right) \quad \text{con } f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\nu))$$

4. Calcule a partir de su definición, la transformada de Fourier de $\delta(t-t_0)$, con t_0 una constante. Utilizando **el resultado y la propiedad de linealidad**, calcule la transformada inversa de Fourier de la función $F(\nu) = 4\cos(5\pi(\nu-1))$. Dibuje las partes real e imaginaria de la función resultante. *(3.5p)*

$$\mathcal{F}(\delta(t-t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\cdot e^{-i2\pi\nu t}\, dt = e^{-i2\pi\nu t_0} \quad (\langle\delta(t-t_0), f(t)\rangle = f(t_0))$$

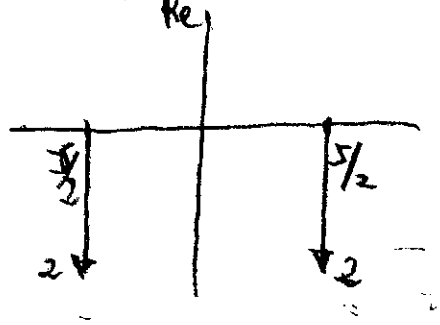
$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(4\cos(5\pi(\nu-1))) = \mathcal{F}^{-1}\left[4\cdot\frac{e^{i5\pi(\nu-1)} + e^{-i5\pi(\nu-1)}}{2}\right] =$$

$$= 2\left[e^{-5\pi i}\,\mathcal{F}^{-1}(e^{i5\pi\nu}) + e^{5\pi i}\,\mathcal{F}^{-1}(e^{-i5\pi\nu})\right] =$$

$$\left(e^{-5\pi i} = \cos 5\pi - i\sin 5\pi = -1 \qquad e^{5\pi i} = \cos 5\pi + i\sin 5\pi = -1\right)$$

$$= -2\left[\mathcal{F}^{-1}(e^{i2\pi\frac{5}{2}\nu}) + \mathcal{F}^{-1}(e^{-i2\pi\frac{5}{2}\nu})\right] = -2\cdot\left[\delta\left(t+\frac{5}{2}\right) + \delta\left(t-\frac{5}{2}\right)\right]$$

La transformada sólo tiene parte real. $Im(f(t)) = 0$



5. Un cierto sistema es excitado mediante la función $f(t) = 4\cos(5\pi(t-1))$. Razone qué frecuencia o frecuencias (positivas) en Hz pueden aparecer en la respuesta del sistema a dicha excitación y discuta si es posible que la respuesta fuera nula. *(1.5p)*

$$F(\nu) \longrightarrow \boxed{H(\nu)} \longrightarrow Y(\nu) \qquad Y(\nu) = H(\nu)F(\nu) \qquad F(\nu) = \mathcal{F}(f(t))$$

$F(\nu) = -2\left[\delta\left(\nu-\frac{5}{2}\right) + \delta\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\right]$ (ejercicio anterior). La única frecuencia que puede aparecer es $\frac{5}{2}$ Hz $= 2{,}5$ Hz.

Si el sistema es tal que a la frecuencia 2,5 Hz su respuesta en frecuencia es nula ($H(2{,}5)=0$), $Y(\nu) = H(\nu)\cdot F(\nu)$ será nula.

APELLIDOS: **NOMBRE:**

ECUACIONES DIFERENCIALES. JULIO 2014-15. **BLOQUE 3.**

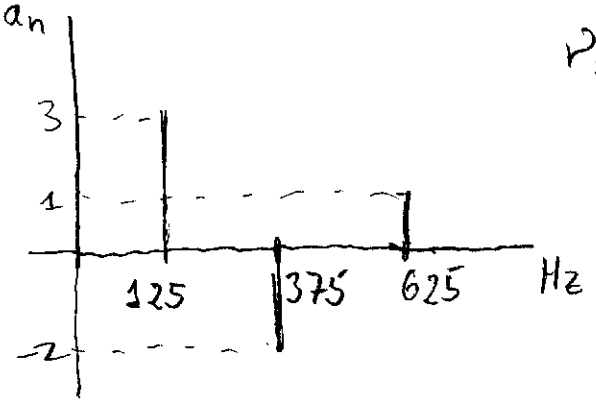
1. Los coeficientes primero, tercero y quinto de la serie de Fourier de cierta función par $f(t)$, de periodo 8 ms, tienen como valores 3, -2 y 1 respectivamente, siendo despreciables el resto de coeficientes.
   a) Exprese el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(t)$.
   b) Dibuje el espectro de Fourier en Hz de dicha función. *(5 puntos)*

$T = 8 \times 10^{-3}\,s \qquad \nu_1 = \frac{1}{T} = 125\,Hz \qquad \omega_1 = 2\pi\nu = 250\pi\ rad/s$

a) Función par: $S_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_n t \Rightarrow$

$S_n = 3\cos 250\pi t - 2\cos 750\pi t + \cos 1250\pi t$

b)



$\nu_1 = 125\,Hz \quad \nu_3 = 375\,Hz \quad \nu_3 = 625\,Hz$

2. La salida $u(t)$ de un cierto sistema como respuesta a una excitación $f(t)$ viene dada por la ecuación diferencial $A\frac{d^2u}{dt^2} + B\frac{du}{dt} + Cu = f(t)$, con A, B, C constantes. Aplique la transformada de Fourier para obtener la respuesta en frecuencia del sistema, tomando como variable la frecuencia ν.
   Nota: debe indicar detalladamente todos los pasos y las propiedades aplicadas para resolverlo. Considere para ello que $TF(u(t)) = U(\nu)$, $TF(f(t)) = F(\nu)$. *(5 puntos)*

Propiedades: linealidad $\mathcal{F}(Af(t) + B \cdot g(t)) = A\mathcal{F}(f(t)) + B\mathcal{F}(g(t))$

Derivación: $\mathcal{F}\left(\frac{d^n u}{dt^n}\right) = (i2\pi\nu)^n \cdot \mathcal{F}(u(t))$

$\mathcal{F}\left(A\frac{d^2u}{dt^2} + B \cdot \frac{du}{dt} + Cu\right) = \mathcal{F}(f(t))$

$A \cdot (i2\pi\nu)^2 \cdot U(\nu) + B \cdot (i2\pi\nu) \cdot U(\nu) + C \cdot U(\nu) = F(\nu)$

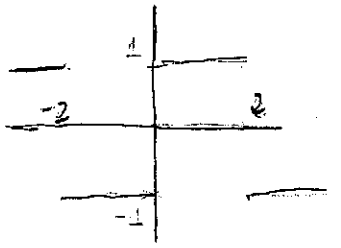
Respuesta en frecuencia: $H(\nu) = U(\nu)/F(\nu)$

$$H(\nu) = \frac{1}{-A \cdot 4\pi^2\nu^2 + B(2\pi\nu i) + C}$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

ECUACIONES DIFERENCIALES 2015-16. **TRANSFORMADA DE FOURIER. (GIE1)**

1. Aproxime mediante serie de Fourier en el intervalo $[-2,2]$ la función definida en dicho intervalo por $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -2 \le t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < t \le 2 \end{cases}$, con t en segundos. Dibuje los tres primeros armónicos en función de la frecuencia en Hz. Estudie la convergencia de la serie a la función en todo punto del intervalo. *(6p)*



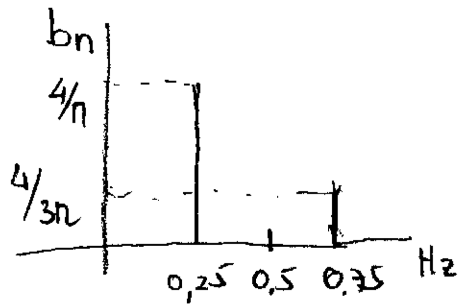
$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ rad/s $\quad \nu = \frac{1}{T} = 0{,}25$ Hz $\quad T = 4$s

Función impar $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\,\text{sen}\, n\omega t\, dt = 2\cdot\frac{2}{4}\int_0^2 1\cdot \text{sen}\, n\frac{\pi}{2}t\,dt =$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\cos n\frac{\pi}{2}t\Big|_0^2 = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right] = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \frac{4}{(2n-1)\pi}$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\, n\omega t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\,\text{sen}\, n\frac{\pi}{2}t$$



$a_1 = 4/\pi \quad \nu_1 = 0{,}25$ Hz

$a_2 = 0 \quad \nu_2 = 0{,}5$ Hz

$a_3 = \frac{4}{3\pi} \quad \nu_3 = 0{,}75$Hz

La serie converge a la función en todo punto del intervalo salvo en $-2, 0, 2$, que vale 0 (punto medio de la discontinuidad)

2. Demuestre, a partir de la definición, cuánto vale la transformada de Fourier de la función $f(t+\pi/4)$ en función de la transformada de la función $f(t)$. *(1p)*

$$\mathcal{F}\left(f\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t+\frac{\pi}{4}\right)e^{-i2\pi\nu t}\,dt \underset{\substack{t' = t+\frac{\pi}{4} \\ dt' = dt}}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\cdot e^{-i2\pi\nu\left(t'-\frac{\pi}{4}\right)}\,dt' =$$

$$= e^{i\frac{\pi^2}{2}\nu}\,\mathcal{F}(f(t))$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

3. Explique brevemente cómo actúa la delta de Dirac al aplicarla a una función $f(t)$ y utilícelo para calcular las transformadas inversas de Fourier de $k\delta(\nu)$ y $\delta(\nu - \nu_0)$, con k y ν_0 constantes. *(2p)*

$\langle \delta(t), f(t) \rangle = f(0)$. Da el valor de la función en $t=0$

$$\mathcal{F}^{-1}(K\delta(\nu)) = \int_{-\infty}^{\infty} K\,\delta(\nu)\cdot e^{i2\pi\nu t}\,d\nu = K\cdot e^{0} = K$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(\nu-\nu_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu-\nu_0)\cdot e^{i2\pi\nu t}\,d\nu \underset{\nu-\nu_0=\nu'}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu')\cdot e^{i2\pi(\nu'+\nu_0)t}\,d\nu' = e^{i2\pi\nu_0 t}$$

4. Utilice los ejercicios 2 y 3 para calcular la transformada de Fourier de la función $f(t) = 4 + \text{sen}(t + \pi/4)$. Obtenga y dibuje el módulo y las partes real e imaginaria de la función resultante. *(6p)*

$$F(\nu) = \mathcal{F}(4+\text{sen}(t+\pi/4)) = \mathcal{F}(4) + \mathcal{F}(\text{sen}(t+\pi/4)) =$$
$$= 4\delta(\nu) + e^{i\frac{\pi^2}{2}\nu}\cdot\mathcal{F}(\text{sen}\,t)$$

$$\mathcal{F}(\text{sen}\,t) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{F}(e^{it}) - \mathcal{F}(e^{-it})\right] =$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right) - \delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right) - \delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right)\right] i$$

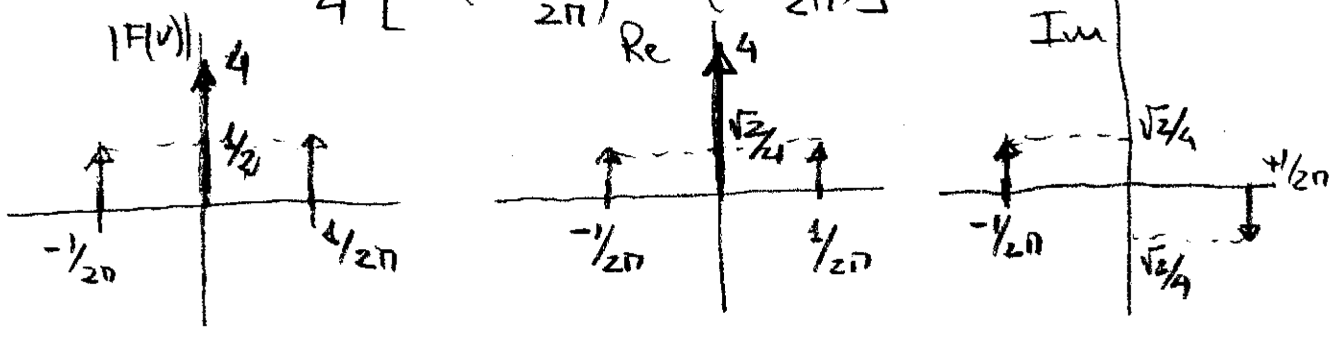
$$F(\nu) = 4\delta(\nu) + e^{i\frac{\pi^2}{2}\nu}\cdot\frac{1}{2}\left[\delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right) - \delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right)\right] i =$$
$$= 4\delta(\nu) + \frac{1}{2}\left[e^{-i\pi/4}\,\delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right) - e^{i\pi/4}\,\delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right)\right] i =$$
$$= 4\delta(\nu) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right)\right] i \Rightarrow$$

$$F(\nu) = 4\delta(\nu) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right)\right]$$

$$|F(\nu)| = 4\delta(\nu) + \frac{1}{2}\left[\delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right)\right]$$

$$\text{Re}(F(\nu)) = 4\delta(\nu) + \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right)\right]$$

$$\text{Im}(F(\nu)) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right) - \delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right)\right]$$



APELLIDOS: **NOMBRE:**

5. Se ha excitado un sistema en el dominio el tiempo con cierto pulso rectangular de manera que, considerando sólo frecuencias positivas, la **tercera vez** que el espectro tiene amplitud nula es a 1500 Hz. Razone, empleando las propiedades de la transformada de Fourier, cuál ha sido la duración del pulso. *(2p)*

Tercer nulo en 1500 Hz. Primer nulo: 500 Hz (sinc)

Escalado: $\mathcal{F}(\Pi(ax)) = \frac{1}{|a|} \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\nu}{a}\right)$

En este caso $a = 500$ Hz. Anchura del pulso: $\frac{1}{a} = \boxed{2\,\mathrm{ms}}$

6. La ecuación diferencial de un cierto sistema es $A\dfrac{d^2x}{dt^2} + Bx = f(t)$, con A y B constantes.
a) Utilice la transformada de Fourier para determinar la respuesta en frecuencia (en Hz) del sistema.
b) Justifique qué función de entrada debe ser $f(t)$ para que la salida en frecuencia del sistema $X(\nu)$ coincida con la respuesta en frecuencia del sistema. *(3p)*

a) $\mathcal{F}\left(A\frac{d^2x}{dt^2} + Bx\right) = \mathcal{F}(f(t))$,, $A(i2\pi\nu)^2 X(\nu) + B \cdot X(\nu) = F(\nu)$

$(-A(2\pi\nu)^2 + B)\, X(\nu) = F(\nu)$

$F(\nu) \to \boxed{H(\nu)} \to X(\nu) = H(\nu)F(\nu)$

$H(\nu) = \dfrac{X(\nu)}{F(\nu)} = \dfrac{1}{-A(2\pi\nu)^2 + B}$

b) Si $H(\nu) = X(\nu) \Rightarrow F(\nu) = 1 \Rightarrow f(t) = \mathcal{F}^{-1}(1) = \delta(t)$

Debe ser una función impulso

7. Se tiene la señal continua en el tiempo de un sismógrafo y se desea conocer si dicho sismograma contiene, en el dominio de la frecuencia, amplitud no nula a 1 kHz. ¿Con qué intervalo máximo se debe muestrear la señal del sismógrafo para poder saberlo? *(1p)*

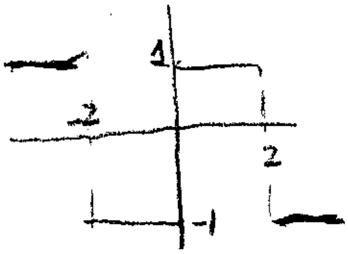
$F_{max} = 1\,\mathrm{kHz} \Rightarrow F_{muestreo} = 2\,\mathrm{kHz}$

$\Delta t = \dfrac{1}{F_m} = \dfrac{1}{2000} = \boxed{0{,}5\,\mathrm{ms}}$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

ECUACIONES DIFERENCIALES 2015-16. **TRANSFORMADA DE FOURIER. (GIE2)**

1. Aproxime mediante serie de Fourier en el intervalo $[-2, 2]$ la función $f(t)$, impar, definida por $\{f(t) = -1 \text{ si } -2 \leq t < 0\}$, con t en segundos. Dibuje los tres primeros armónicos en función de la frecuencia en Hz. Estudie la convergencia de la serie a la función en todo punto del intervalo. *(6p)*



$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ rad/s $\quad \nu = \frac{1}{T} = 0{,}25$ Hz $\quad T = 4$s

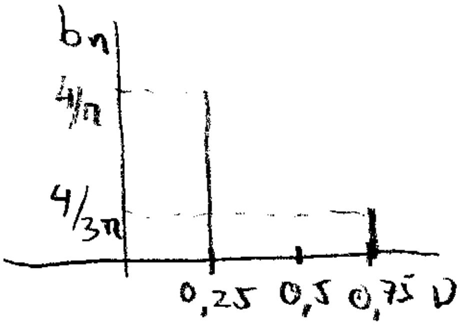
Función impar: $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\,\text{sen}\, n\omega t\, dt = 2\cdot\frac{2}{4}\int_0^2 1\cdot \text{sen}\, n\frac{\pi}{2}t\, dt =$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\cos n\frac{\pi}{2}t\Big|_0^2 = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right] = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) =$$

$$= \frac{4}{(2n-1)\cdot\pi}$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\, n\omega t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi}\,\text{sen}\, n\frac{\pi}{2}t$$



$a_1 = 4/\pi \qquad \nu_1 = 0{,}25$ Hz

$a_2 = 0 \qquad \nu_2 = 0{,}5$ Hz

$a_3 = \frac{4}{3\pi} \qquad \nu_3 = 0{,}75$ Hz

La serie converge a la función en todo punto del intervalo salvo en $-2, 0, 2$ que vale 0 (punto medio de la discontinuidad)

2. Demuestre, a partir de la definición, cuánto vale la transformada de Fourier de la función $f(t + \pi/4)$ en función de la transformada de la función $f(t)$. *(1p)*

$$\mathcal{F}\left(f\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t+\frac{\pi}{4}\right) e^{-i2\pi\nu t}\, dt \underset{\substack{t' = t+\pi/4 \\ dt' = dt}}{=\!=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\cdot e^{-i2\pi\nu(t'-\pi/4)}\, dt' =$$

$$= e^{i\frac{\pi^2}{2}\nu}\,\mathcal{F}\left(f(t)\right)$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

3. Explique brevemente cómo actúa la delta de Dirac al aplicarla a una función $f(t)$ y utilícelo para calcular las transformadas inversas de Fourier de $k\delta(\nu)$ y $\delta(\nu-\nu_0)$, con k y ν_0 constantes. *(2p)*

$\langle \delta(t), f(t)\rangle = f(0)$. Da el valor de la función en $t=0$

$$\mathcal{F}^{-1}(K\delta(\nu)) = \int_{-\infty}^{\infty} K\,\delta(\nu)\,e^{i2\pi\nu t}\,d\nu = K e^{0} = K$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(\nu-\nu_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu-\nu_0)\cdot e^{i2\pi\nu t}\,d\nu \underset{\nu-\nu_0=\nu'}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu')\cdot e^{i2\pi(\nu'+\nu_0)t}\,d\nu' = e^{i2\pi\nu_0 t}$$

4. Utilice los ejercicios 2 y 3 para calcular la transformada de Fourier de la función $f(t) = -2 + \cos(t+\pi/4)$. Obtenga y dibuje el módulo y las partes real e imaginaria de la función resultante. *(6p)*

$$F(\nu) = \mathcal{F}(-2+\cos(t+\pi/4)) = \mathcal{F}(-2) + \mathcal{F}(\cos(t+\pi/4)) =$$

$$= -2\delta(\nu) + e^{i\frac{\pi^2}{2}\nu}\mathcal{F}(\cos t)$$

$$\mathcal{F}(\cos t) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}(e^{it}) + \mathcal{F}(e^{-it})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right)\right]$$

$$F(\nu) = -2\delta(\nu) + \frac{1}{2}\cdot e^{i\frac{\pi^2}{2}\nu}\cdot\left[\delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right)\right] =$$

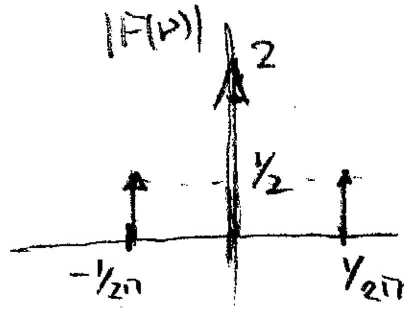
$$= -2\delta(\nu) + \frac{1}{2}\left[e^{i\frac{\pi}{4}}\delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right) + e^{-i\pi/4}\delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right)\right]$$

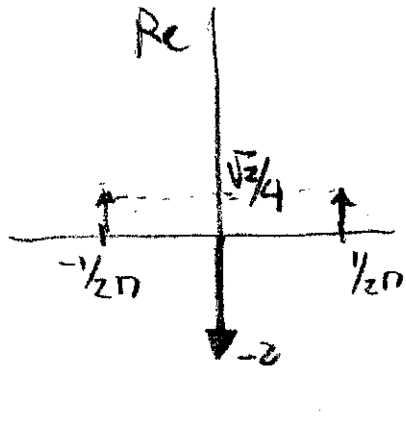
$$F(\nu) = -2\delta(\nu) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right)\right]$$

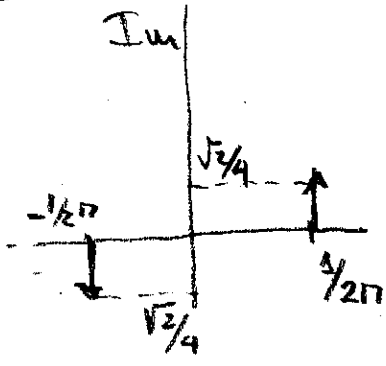
$$|F(\nu)| = 2\delta(\nu) + \frac{1}{2}\left[\delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right)\right]$$

$$Re(F(\nu)) = -2\delta(\nu) + \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right) + \delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right)\right]$$

$$Im(F(\nu)) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\delta\left(\nu-\frac{1}{2\pi}\right) - \delta\left(\nu+\frac{1}{2\pi}\right)\right]$$







APELLIDOS: **NOMBRE:**

5. Se ha excitado un sistema en el dominio el tiempo con cierto pulso rectangular de manera que, considerando sólo frecuencias positivas, la **segunda vez** que el espectro tiene amplitud nula es a 1000 Hz. Razone, empleando las propiedades de la transformada de Fourier, cuál ha sido la duración del pulso. *(2p)*

Segundo nulo en 1000 Hz. Primer nulo en 500 Hz (sinc)

Escalado: $\mathcal{F}(\Pi(ax)) = \frac{1}{|a|} \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\nu}{a}\right)$

En este caso: $a = 500$ Hz. Anchura del pulso: $\frac{1}{a} = \boxed{2\,\mathrm{ms}}$

6. La ecuación diferencial de un cierto sistema es $A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} = f(t)$, con A y B constantes.
a) Utilice la transformada de Fourier para determinar la respuesta en frecuencia (en Hz) del sistema.
b) Justifique qué función de entrada debe ser $f(t)$ para que la salida en frecuencia del sistema $X(\nu)$ coincida con la respuesta en frecuencia del sistema. *(3p)*

a) $\mathcal{F}\left(A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt}\right) = \mathcal{F}(f(t))$

$F(\nu) \rightarrow \boxed{H(\nu)} \rightarrow X(\nu) = H(\nu)F(\nu)$

$A(2\pi i\nu)^2 X(\nu) + B(2\pi i\nu) X(\nu) = F(\nu)$

$[A(2\pi\nu)^2 + B(2\pi i\nu)] X(\nu) = F(\nu)$

$H(\nu) = \frac{X(\nu)}{F(\nu)} = \frac{1}{-A(2\pi\nu)^2 + B(2\pi i\nu)}$

b) Si $H(\nu) = X(\nu) \Rightarrow F(\nu) = 1 \Rightarrow f(t) = \mathcal{F}^{-1}(1) = \delta(t)$

Debe ser una función impulso

7. Se muestrea la señal continua en el tiempo de un sismógrafo con un intervalo de 500 μs, para calcular su DFT. ¿Cuántas muestras deben tomarse para conseguir una resolución en frecuencia de 2 Hz? *(1p)*

$\Delta\nu = 2\,\mathrm{Hz} \Rightarrow T = \frac{1}{2} = 0{,}5\,\mathrm{s} = N \cdot \Delta t = N \cdot 500 \cdot 10^{-6}$

$N = \frac{0{,}5}{500 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{N = 1000 \text{ muestras}}$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

ECUACIONES DIFERENCIALES. ENERO 2015-16. **TRANSFORMADA DE FOURIER.**

1. Los coeficientes de la serie de Fourier de la función $f(t)$, impar, periódica de periodo 5 ms, vienen dados por la expresión $\dfrac{30}{2n-1}$, siendo n el orden del armónico.

   a) Obtenga el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(t)$.

   b) Represente el espectro en Hz de la función, hasta una frecuencia máxima de 700 Hz. *(2p)*

Función impar: $a_0 = a_n = 0$

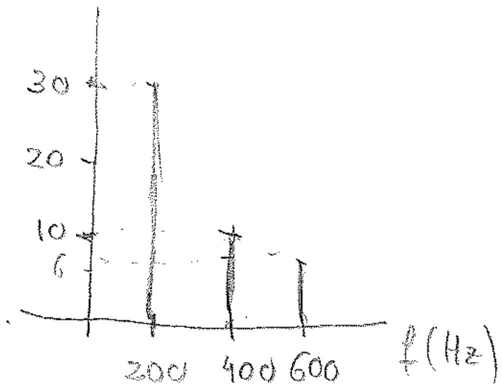
$T = 5 \times 10^{-3}\,s \qquad \omega_1 = \dfrac{2\pi}{T} = 400\pi \text{ rad/s} \qquad f_1 = \dfrac{1}{T} = 200 \text{ Hz}$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{2n-1} \cdot \operatorname{sen} n \cdot 400\pi t$$

$b_1 = \dfrac{30}{1} = 30 \qquad f_1 = 200 \text{ Hz}$

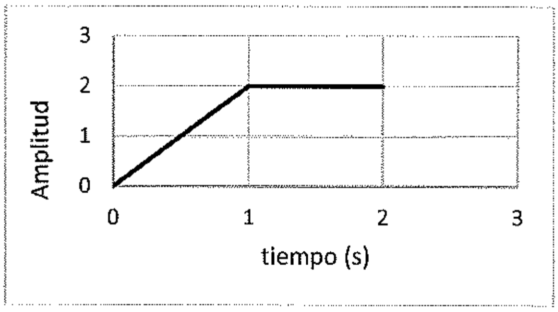
$b_2 = \dfrac{30}{3} = 10 \qquad f_2 = 400 \text{ Hz}$

$b_3 = \dfrac{30}{5} = 6 \qquad f_3 = 600 \text{ Hz}$



APELLIDOS: **NOMBRE:**

2. Calcule la transformada de Fourier de la función de la figura, obteniendo su parte real e imaginaria. *(3p)*



$$f(t) = \begin{cases} 2t & 0 \le t \le 1 \\ 2 & 1 \le t \le 2 \\ 0 & t > 2\ ,\ t < 0 \end{cases}$$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i2\pi\nu t}dt = \int_0^1 2t\cdot e^{-i2\pi\nu t}dt + \int_1^2 2\, e^{-i2\pi\nu t}dt =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = 2t & du = 2dt \\ dv = e^{-i2\pi\nu t}dt & \\ v = \dfrac{e^{-i2\pi\nu t}}{-i2\pi\nu} & \end{array} \right\} = \left. \frac{2t\cdot e^{-i2\pi\nu t}}{-i2\pi\nu} \right|_0^1 + \frac{2}{i2\pi\nu}\int_0^1 e^{-i2\pi\nu t}dt +$$

$$+ \frac{2}{-i2\pi\nu}\cdot \left. e^{-i2\pi\nu t} \right|_1^2 = -\frac{2\cdot e^{-i2\pi\nu}}{i2\pi\nu} + \frac{2}{i2\pi\nu}\left. \frac{e^{-i2\pi\nu t}}{i2\pi\nu\cdot(-i2\pi\nu)} \right|_0^1 - \frac{2e^{-i4\pi\nu}}{i2\pi\nu} + \frac{2e^{-i2\pi\nu}}{i2\pi\nu} =$$

$$= -\frac{e^{-i4\pi\nu}}{i\pi\nu} + \frac{e^{-i2\pi\nu} - 1}{2\pi^2\nu^2} = \frac{2i\pi\nu e^{-i4\pi\nu} + e^{-i2\pi\nu} - 1}{2\pi^2\nu^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2\nu^2}\cdot\left[2i\pi\nu[\cos 4\pi\nu - i \operatorname{sen} 4\pi\nu] + \cos 2\pi\nu - i\operatorname{sen} 2\pi\nu - 1\right]$$

$$Re(F(\nu)) = \frac{1}{2\pi^2\nu^2}\cdot\left[2\pi\nu \operatorname{sen} 4\pi\nu + \cos 2\pi\nu - 1\right]$$

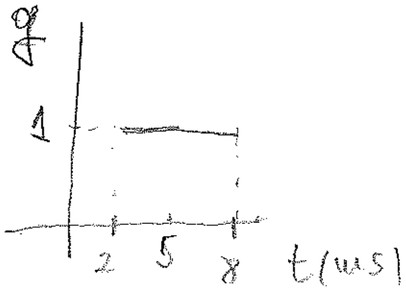
$$Im(F(\nu)) = \frac{1}{2\pi^2\nu^2}\cdot\left[2\pi\nu\cos 4\pi\nu - \operatorname{sen} 2\pi\nu\right]$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

3. La ecuación diferencial de un cierto sistema mecánico es $5\frac{d^2x}{dt^2}+1000x = g(t)$. El sistema es excitado mediante una función ($g(t)$) pulso rectangular de altura unidad, de 6 s de duración y que empieza a los 2 s de iniciarse el registro de datos. Obtenga la respuesta $X(\nu)$ del sistema en el dominio de la frecuencia, determinando su módulo y argumento.

NOTA: Para obtener el resultado, demuestre previamente el valor de la transformada de Fourier de una función $f(\frac{t-a}{b})$, con a y b constantes positivas, en función de la transformada de Fourier de $f(t)$. *(5p)*

$$5\frac{d^2x}{dt^2} + 1000x = g(t)$$



$$g(t) = \Pi\left(\frac{t-5}{6}\right)$$

$$\mathcal{F}\left(f\left(\frac{t-a}{b}\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t-a}{b}\right)\cdot e^{-j2\pi\nu t}\,dt \;\underset{\frac{t-a}{b}=t'}{=}\; \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\cdot e^{-j2\pi\nu(bt'+a)}\,dt' =$$

$$= b\cdot e^{-j2\pi\nu a}\cdot F(b\nu)$$

con $F(\nu) = \mathcal{F}(f(t)) = \mathcal{F}(\Pi(t)) = \text{sinc}(\nu)$

$$\mathcal{F}(g(t)) = 6\cdot e^{j2\pi\nu\cdot 5}\cdot\text{sinc}(6\nu)$$

$$5\cdot(j2\pi\nu)^2\cdot X(\nu) + 1000\,X(\nu) = 6\,e^{-j10\pi\nu}\cdot\text{sinc}(6\nu)$$

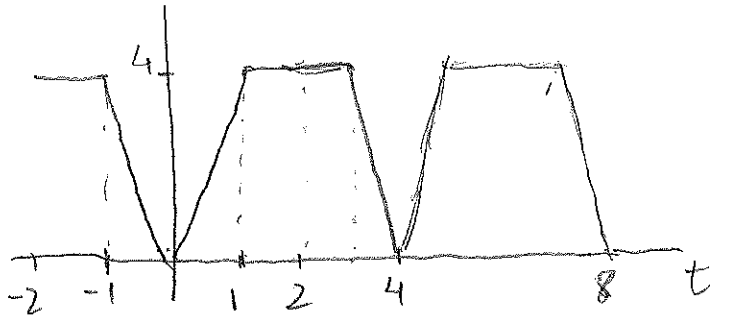
$$X(\nu) = \frac{6\,e^{-10\pi\nu j}\cdot\text{sinc}(6\nu)}{-20\pi^2\nu^2+1000}$$

$$|X(\nu)| = \frac{6\,\text{sinc}(6\nu)}{-20\pi^2\nu^2+1000} \qquad \text{Arg}(X(\nu)) = -10\pi\nu$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

ECUACIONES DIFERENCIALES. JULIO 2015-16. **TRANSFORMADA DE FOURIER.**

1. Aproxime mediante serie de Fourier la función de periodo 4 s, par, definida en el intervalo $[0, 2]$ por
$$f(t) = \begin{cases} 4t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 4 & \text{si} \quad 1 < t \leq 2 \end{cases} \quad \text{con } t \text{ en segundos.}$$
Dibuje la función y estudie la convergencia de la serie en todo punto del intervalo $[0, 8]$. Dibuje (de manera aproximada) los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier hasta el armónico 3, en función de la frecuencia en rad/s. *(4p)*



La serie converge a la función en todo punto, por ser la función continua.

$T = 4s \qquad w = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ rad/s $\qquad S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n w t + \cancel{b_n \operatorname{sen} n w t}^{\,0}$ (par)

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 4t\,dt + \int_1^2 4\,dt\right] = \frac{1}{2}\left[2t^2\Big|_0^1 + 4t\Big|_1^2\right] = 3$$

$$a_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\cos n\frac{2\pi t}{4}\,dt = \int_0^1 \underbrace{4t}_{u}\,\underbrace{\cos \frac{n\pi}{2}t\,dt}_{dv} + \int_1^2 4\cos\frac{n\pi}{2}t\,dt =$$

$$= \frac{2}{n\pi}4t \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}t\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2}\,dt + \frac{2}{n\pi}\cdot 4\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2}\Big|_1^2 =$$

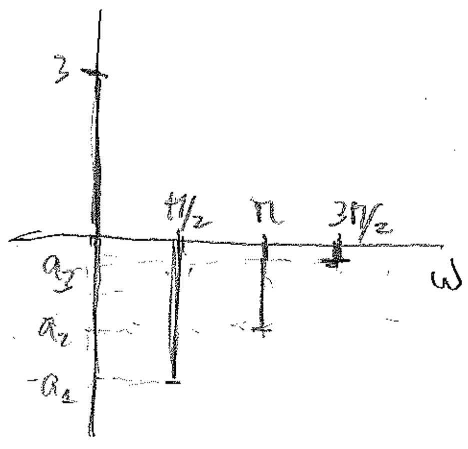
$$= \frac{2}{n\pi}\left(4\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} - 0 + \cancel{4\operatorname{sen} n\pi}^{\,0} - 4\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 4\cos\frac{n\pi t}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{16}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)$$

$$S_n = 3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi t}{2}$$

$a_0 = 3, \quad a_1 = -\frac{16}{\pi^2} \qquad a_2 = -\frac{8}{\pi^2} \qquad a_3 = \frac{-16}{9\pi^2}$

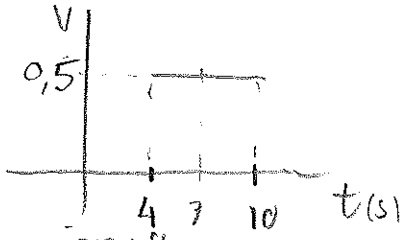
$\omega_1 = \pi/2 \qquad \omega_2 = \pi \qquad \omega_3 = \frac{3\pi}{2}$



APELLIDOS: **NOMBRE:**

2. La ecuación diferencial de un cierto sistema es $2\frac{dx}{dt}+10x=g(t)$. El sistema es excitado mediante una función $(g(t))$ que se observa en un osciloscopio como un pulso rectangular de altura 0,5 V, de 6 s de duración y que empieza a los 4 s de iniciarse el registro de datos. Obtenga la respuesta $X(\nu)$ del sistema en el dominio de la frecuencia, determinando su parte real e imaginaria.
Nota 1: Para obtener el resultado, demuestre previamente el valor de la transformada de Fourier de una función $f(\frac{t-a}{b})$, con a y b constantes positivas, en función de la transformada de Fourier de $f(t)$.
Nota 2: Puede suponer conocida la transformada de Fourier de la función pulso rectangular unidad. *(5p)*

$$2\frac{dx}{dt}+10x=g(t) \qquad g(t)=0{,}5\,\Pi\left(\frac{t-7}{6}\right)$$



$$\mathcal{F}\left(f\left(\frac{t-a}{b}\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t-a}{b}\right)\cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt \overset{\frac{t-a}{b}=y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot e^{-i2\pi\nu(by+a)}\cdot b\,dy=$$

$$= b\cdot e^{-i2\pi\nu a}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot e^{-i2\pi\nu by}\,dy = b\cdot e^{-i2\pi\nu a}\cdot F(b\nu)$$

con $F(\nu)=\mathcal{F}(f(t))=\mathcal{F}(\Pi(t))=\text{sinc}\,\nu$

$$\mathcal{F}(g(t))=0{,}5\cdot 6\cdot e^{-i2\pi\nu\cdot 7}\,\text{sinc}(6\nu)$$

$$2(i2\pi\nu)\cdot X(\nu)+10X(\nu)=3e^{-14\pi\nu i}\,\text{sinc}(6\nu)$$

$$X(\nu)=\frac{3e^{-14\pi\nu i}\,\text{sinc}(6\nu)\cdot[-4\pi\nu i+10]}{[4\pi\nu i+10][-4\pi\nu i+10]}$$

$$Re(X(\nu))=\frac{3\,\text{sinc}\,6\nu}{100+16\pi^2\nu^2}\left[10\cos 14\pi\nu-4\pi\nu\,\text{sen}\,14\pi\nu\right]$$

$$Im(X(\nu))=-\frac{3\,\text{sinc}\,6\nu}{100+16\pi^2\nu^2}\cdot\left[10\,\text{sen}\,14\pi\nu+4\pi\nu\cos 14\pi\nu\right]$$

3. La señal continua en el tiempo de un registrador se muestrea con un intervalo de $2\,\mu$s y se calcula su transformada discreta de Fourier (DFT). ¿Cuál es la frecuencia máxima que se puede detectar?¿Cuántas muestras deben tomarse para conseguir una resolución en frecuencia de 100 Hz? *(1p)*

$$\nu_m=\frac{1}{\Delta t}=\frac{1}{2\times10^{-6}}=5\cdot10^{5}\,Hz \qquad \nu_{max}=\frac{\nu_m}{2}=250\,KHz$$

$$\Delta\nu=100\,Hz \qquad T=\frac{1}{\Delta\nu}=0{,}01\,s \qquad T=N\cdot\Delta t \Rightarrow N=\frac{T}{\Delta t}=5000 \text{ muestras}$$

'ELLIDOS: NOMBRE:

JACIONES DIFERENCIALES 2016-17. TRANSFORMADA DE FOURIER. (GIE1)

1. El conjunto de funciones $\{\varphi_n = \operatorname{sen} n\frac{\pi}{4}t\}$ con $n = 1, 2, \dots, n, \dots$ constituye un sistema ortogonal y completo en $[0, 4]$. Obtenga las expresiones de los coeficientes de Fourier en dicho sistema. *(2p)*

$$c_k = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} \quad " \quad \|\varphi_n\|^2 = \int_0^4 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{4} t\, dt = \int_0^4 \frac{1 - \cos n\pi/2\, t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} t\Big|_0^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n\pi} \cancel{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} t\Big|_0^4} = 2$$

$$c_n = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} t\, dt$$

2. Aproxime mediante serie de Fourier la función impar, de periodo 8 segundos, definida en el intervalo $[0, 4]$ por $f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad 0 \le t < 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 < t \le 4 \end{cases}$, con t en segundos. Dibuje aproximadamente los coeficientes en función de la frecuencia, hasta una frecuencia de 0.5 Hz. *(5p)*

$$T = 8s \qquad w = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}\ \text{rad/s} \qquad \nu = \frac{1}{8}\ \text{Hz} \qquad S_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} t$$

(Impar)

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} t\, dt = \frac{1}{2} \int_0^2 t \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} t\, dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{n\pi} t \cos \frac{n\pi}{4} t \Big|_0^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{n\pi} \int_0^2 \cos \frac{n\pi}{4} t\, dt = -\frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{n\pi}\right)^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} t \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{-4}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$$

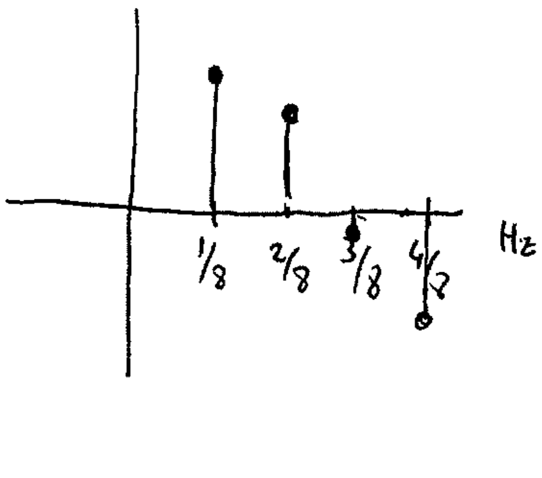
$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{8}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} t$$

$\nu_1 = 1/8\ \text{Hz}$ $\qquad b_1 = \frac{8}{\pi^2}$

$\nu_2 = 2/8\ \text{Hz}$ $\qquad b_2 = \frac{2}{\pi}$

$\nu_3 = 3/8\ \text{Hz}$ $\qquad b_3 = -8/9\pi^2$

$\nu_4 = 4/8\ \text{Hz}$ $\qquad b_4 = -1/\pi$



APELLIDOS: **NOMBRE:**

. Calcule la transformada de la función $f(t) = 8e^{5t}$ con $t < 1$, expresándola en forma compleja (parte real e imaginaria). *(4p)*

$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt = \int_{-\infty}^{1} 8e^{5t}\cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt =$$

$$= 8\int_{-\infty}^{1} e^{(5-i2\pi\nu)t}\,dt = \frac{8}{5-i2\pi\nu}\cdot e^{(5-i2\pi\nu)t}\Big]_{-\infty}^{1} =$$

$$= \frac{8}{5-i2\pi\nu}\cdot e^{(5-i2\pi\nu)} = \frac{8e^{5}\cdot e^{-i2\pi\nu}(5-i2\pi\nu)}{25+(2\pi\nu)^2}$$

$$e^{-i2\pi\nu} = \cos 2\pi\nu - i\,\mathrm{sen}\,2\pi\nu$$

$$R_e(\mathcal{F}(f(t))) = \frac{8e^{5}}{25+(2\pi\nu)^2}\cdot[5\cos 2\pi\nu - 2\pi\nu\cdot\mathrm{sen}\,2\pi\nu]$$

$$I_m(\mathcal{F}(f(t))) = \frac{8e^{5}}{25+(2\pi\nu)^2}[-2\pi\nu\cos 2\pi\nu - 5\,\mathrm{sen}\,2\pi\nu]$$

4. Se muestrea una señal continua con un intervalo de muestreo de 4 ms. Se desea que la resolución en frecuencia de su FFT (transformada rápida de Fourier) sea inferior a 0.5 Hz. ¿Cuántos puntos deben adquirirse como mínimo para conseguirlo?¿Cuál es la frecuencia máxima que se puede observar en el espectro? *(2p)*

$$\Delta t = 4\,ms \qquad \Delta\nu < 0{,}5\,Hz \Rightarrow T_m > \frac{1}{0{,}5} = 2s$$

$$T = N\cdot\Delta t \Rightarrow N > \frac{2}{4\times10^{-3}} = 500 \text{ muestras.}$$

FFT, 2^n muestras $\Rightarrow N = 512$ muestras.

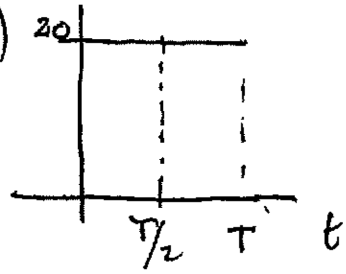
$$\nu_{max} = \frac{\nu_m}{2} \quad ,\quad \nu_m = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{4\times10^{-3}} = 250\,Hz$$

$$\nu_{max} = 125\,Hz.$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

5. Se ha excitado un sistema en el dominio el tiempo con un pulso rectangular. En el osciloscopio se observa que empieza en t=0, tiene una altura de 20 V y dura T segundos. Supuesto que se conoce la transformada de Fourier del pulso rectangular unidad y aplicando propiedades: a) Obtenga la transformada de Fourier del pulso del osciloscopio. b) Dibuje de forma aproximada el módulo de la transformada, indicando su valor máximo y deduciendo dónde se producen los ceros de la función. c) Utilice dicho razonamiento para justificar cuál es la duración del pulso si el **segundo cero** aparece a una frecuencia de 1000 Hz. d) ¿Qué operación debe realizar utilizando una delta de Dirac para que el pulso quede centrado en el origen de tiempos? e) Calcule la transformada de la operación realizada en el apartado d) y verifique que ha razonado correctamente. (Utilice las definiciones para obtener la transformada de la delta utilizada). *(8p)*
NOTA: Escriba todos los pasos en los cálculos, indicando las propiedades que está utilizando en cada paso.

a)



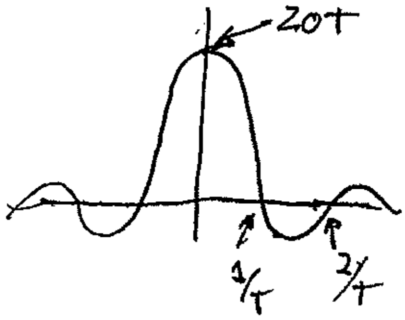
$$f(t) = 20 \cdot \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \mathcal{F}\left(20 \cdot \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)\right) \underset{\text{linealidad}}{=\!=} 20 \cdot \mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)\right) =$$

$$\underset{\text{desplaz. en tiempo}}{=\!=} 20 \cdot e^{-i2\pi \cdot \frac{T}{2}\nu} \mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right) \underset{\text{escalado}}{=\!=} 20 \cdot e^{-i\pi T\nu} \cdot T \cdot \operatorname{sinc}(\nu T)$$

b) ceros: $\operatorname{sen} \pi\nu T = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi\nu T = n\pi \Rightarrow \nu = n/T$



c) $\frac{2}{T} = 1000\,\text{Hz} \Rightarrow T = 2\times10^{-3}\,\text{s}$

d) $\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) * \delta\left(t + \frac{T}{2}\right)$

La delta convolucionada desplaza la función la magnitud indicada en la delta.

e) $\mathcal{F}(\delta(t+T/2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+T/2) \cdot e^{-i2\pi\nu t} dt = e^{+i\cdot 2\pi\nu \cdot T/2}$

(La delta da el valor de la función en cero: $t + T/2 = 0 \Rightarrow$ en $t = -T/2$)

$$\mathcal{F}\left(20\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) * \delta(t+T/2)\right) \underset{\text{convolución}}{=\!=} \mathcal{F}\left(20\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)\right) \cdot \mathcal{F}(\delta(t+T/2)) =$$

$$= 20T \cdot e^{-i\pi T\nu} \operatorname{sinc}(T\nu) \cdot e^{i\pi\nu T} = 20T\operatorname{sinc}(T\nu)$$

La transformada es real $\Rightarrow$ la funcion es par (pulso centrado).

1. El conjunto de funciones $\{\varphi_n = \operatorname{sen} n\frac{\pi}{8}t\}$ con $n = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ constituye un sistema ortogonal y completo en $[0, 8]$. Obtenga las expresiones de los coeficientes de Fourier en dicho sistema. *(2p)*

$$\varphi_n = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{8}t \qquad [0,8] \qquad c_K = (f, \varphi_n)/\|\varphi_n\|^2$$

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_0^8 \operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{8}t\,dt = \int_0^8 \left(1-\cos\frac{n\pi}{4}t\right)/2\,dt = \frac{1}{2}t\Big|_0^8 - \cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}t}\Big|_0^8 = 4$$

$$c_n = \frac{1}{4}\int_0^8 f(t)\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi}{8}t\,dt$$

2. Aproxime mediante serie de Fourier la función impar, de periodo 16 segundos, definida en el intervalo $[0, 8]$ por $f(t) = \begin{cases} -t & \text{si} \quad 0 \le t < 4 \\ 0 & \text{si} \quad 4 < t \le 8 \end{cases}$, con t en segundos. Dibuje aproximadamente los coeficientes en función de la frecuencia, hasta una frecuencia máxima de 0.25 Hz. *(5p)*

$$T = 16\,s \qquad \omega = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}\ \mathrm{rad/s} \qquad \nu = \frac{1}{16}\ \mathrm{Hz} \qquad S_n = \sum_{n=1}^{4} b_n\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{8}$$

(Impar)

$$b_n = \frac{1}{4}\int_0^8 f(t)\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi}{8}t\,dt = -\frac{1}{4}\int_0^4 t\operatorname{sen}\frac{n\pi}{8}t\,dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{n\pi}\,t\cdot\cos\frac{n\pi t}{8}\Big|_0^4 -$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{n\pi}\int_0^4 \cos\frac{n\pi}{8}t\,dt = \frac{8}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{8}{n\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{8}\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{8}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{16}{n^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$

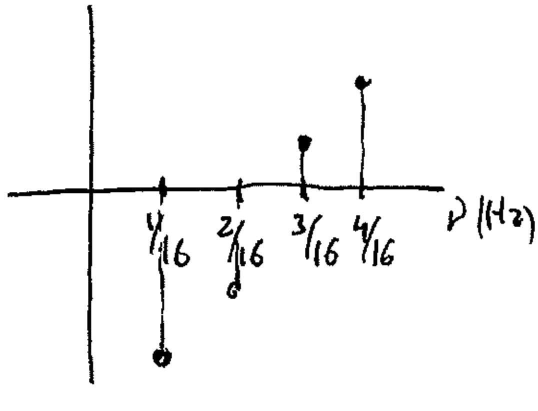
$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{16}{n^2\pi^2}\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{8}$$

$\nu_1 = 1/16 \qquad b_1 = -16/\pi^2$

$\nu_2 = 2/16 \qquad b_2 = -4/\pi$

$\nu_3 = 3/16 \qquad b_3 = 16/9\pi^2$

$\nu_4 = 4/16 \qquad b_4 = 2/\pi$



APELLIDOS: **NOMBRE:**

Calcule la transformada de la función $f(t) = -4e^{2t}$ con $t < 1$, expresándola en forma compleja (parte real e imaginaria). *(4p)*

$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt = \int_{-\infty}^{1} -4\cdot e^{2t}\cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt = -4\int_{-\infty}^{1} e^{(-i2\pi\nu+2)t}\,dt =$$

$$= \frac{-4}{2-i2\pi\nu}\cdot e^{(2-i2\pi\nu)t}\Big|_{-\infty}^{1} = \frac{-4\cdot e^{(2-i2\pi\nu)}}{2-i2\pi\nu} = \frac{-4e^2(2-i2\pi\nu)\cdot e^{-i2\pi\nu}}{4+(2\pi\nu)^2}$$

$$e^{-i2\pi\nu} = \cos 2\pi\nu - i\,\mathrm{sen}\, 2\pi\nu$$

$$\mathrm{Re}(\mathcal{F}(f(t))) = \frac{-4e^2}{4+(2\pi\nu)^2}\cdot\left[2\cos 2\pi\nu - 2\pi\nu\,\mathrm{sen}\,2\pi\nu\right]$$

$$\mathrm{Im}(\mathcal{F}(f(t))) = \frac{4e^2}{4+(2\pi\nu)^2}\left[2\pi\nu\cos 2\pi\nu + 2\,\mathrm{sen}\,2\pi\nu\right]$$

4. Se muestrea una señal continua con un intervalo de muestreo de 2 ms. Se desea que la resolución en frecuencia de su FFT (transformada rápida de Fourier) sea inferior a 0.5 Hz. ¿Cuántos puntos deben adquirirse como mínimo para conseguirlo?¿Cuál es la frecuencia máxima que se puede observar en el espectro? *(2p)*

$\Delta t = 2\,ms \qquad \Delta\nu < 0{,}5\,Hz \Rightarrow T_m > \frac{1}{0{,}5} = 2\,s$

$T = N\Delta t \Rightarrow N > \frac{2}{2\times 10^{-3}} = 1000$ muestras

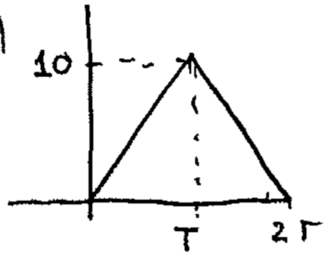
FFT: 2^n muestras $\Rightarrow$ 1024 muestras.

$\nu_{max} = \frac{\nu_m}{2} \qquad \nu_m = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{2\times 10^{-3}} = 500\,Hz \Rightarrow \nu_{max} = 250\,Hz$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

5. Se ha excitado un sistema en el dominio el tiempo con un pulso triangular. En el osciloscopio se observa que empieza en t=0, tiene una altura de 10 V y dura $2T$ segundos. Supuesto que se conoce la transformada de Fourier del pulso rectangular unidad y aplicando propiedades: a) Obtenga la transformada de Fourier del pulso del osciloscopio. b) Dibuje de forma aproximada el módulo de la transformada, indicando su valor máximo y deduciendo dónde se producen los ceros de la función. c) Utilice dicho razonamiento para justificar cuál es la duración del pulso si el **segundo cero** aparece a una frecuencia de 1000 Hz. d) ¿Qué operación debe realizar utilizando una delta de Dirac para que el pulso quede centrado en el origen de tiempos? e) Calcule la transformada de la operación realizada en el apartado d) y verifique que ha razonado correctamente. (Utilice las definiciones para obtener la transformada de la delta utilizada). *(8p)*
NOTA: Escriba todos los pasos en los cálculos, indicando las propiedades que está utilizando en cada paso. Comience por calcular la transformada del pulso triangular unidad.

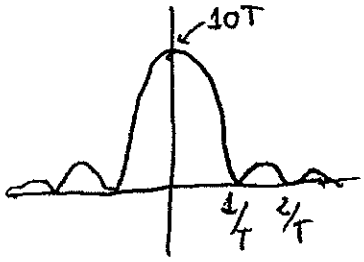
a)



$f(t) = 10\,\Lambda\left(\frac{t-T}{T}\right)$;; $\mathcal{F}(\Lambda(t)) = \mathcal{F}(\Pi(t) * \Pi(t)) =$
$= \mathcal{F}(\Pi(t)) \cdot \mathcal{F}(\Pi(t)) =$
$= \mathrm{sinc}^2 \nu$

$$\mathcal{F}\left(10\,\Lambda\left(\frac{t-T}{T}\right)\right) \underset{\text{linealidad}}{=\!=} 10\,\mathcal{F}\left(\Lambda\left(\frac{t-T}{T}\right)\right) \underset{\text{desplazamiento en tiempo}}{=\!=} 10 \cdot e^{-i2\pi\nu T}\mathcal{F}\left(\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\right) =$$

$$\underset{\text{escalado}}{=\!=} 10 \cdot T \cdot e^{-i2\pi T\nu} \cdot \mathrm{sinc}^2(T\nu)$$



b) ceros: $\operatorname{sen} \pi\nu T = 0 \Rightarrow \pi\nu T = n\pi \Rightarrow \nu = \frac{n}{T}$

c) $\frac{2}{T} = 1000\text{ Hz} \Rightarrow T = 2\times10^{-3}$;; Dura 4×10^{-3} s

d) $\Lambda\left(\frac{t-T}{T}\right) * \delta(t+T)$ La convolución con una delta desplaza la función el valor indicado en la δ $(-T)$.

e) $\mathcal{F}(\delta(t+T)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+T)\cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt = e^{i2\pi\nu T}$

(δ da el valor de la función en cero $\Rightarrow t+T=0 \Rightarrow$ en $t=-T$)

$$\mathcal{F}\left(10\,\Lambda\left(\frac{t-T}{T}\right) * \delta(t+T)\right) \underset{\text{convolución}}{=\!=} \mathcal{F}\left(10\Lambda\left(\frac{t-T}{T}\right)\right)\cdot\mathcal{F}(\delta(t+T)) =$$

$$= 10T\cdot e^{-i2\pi\nu T}\cdot \mathrm{sinc}^2(\nu T)\cdot e^{i2\pi\nu T} = 10T\,\mathrm{sinc}^2(\nu T)$$

Transformada real $\Rightarrow$ función par (pulso centrado)

APELLIDOS: **NOMBRE:**

ECUACIONES DIFERENCIALES. ENERO 2016-17. **TRANSFORMADA DE FOURIER.**

1. Los coeficientes de la serie de Fourier de la función $f(t)$, impar, de periodo 8 ms, vienen dados por la expresión $\left(\frac{-4}{n\pi}\cos n\frac{\pi}{2} + \frac{8}{n\pi^2}\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}\right)$, siendo n el orden del armónico.
   a) Obtenga el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(t)$.
   b) Represente el espectro en Hz de la función, hasta una frecuencia máxima de 500 Hz. *(2p)*

$T = 8\,ms$; $\nu = \frac{1}{8\times10^{-3}} = 125\,Hz$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 250\pi$ rad/s

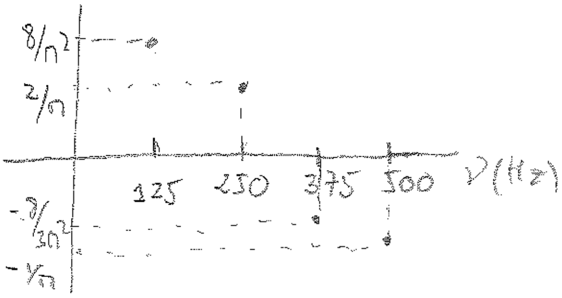
Impar: $a_0 = a_n = 0$ $\quad S_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega t = \left(\frac{-4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{8}{n\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen} 250n\pi t$

$\nu_1 = 125\,Hz$ $\quad b_1 = 8/\pi^2 = 0{,}81$

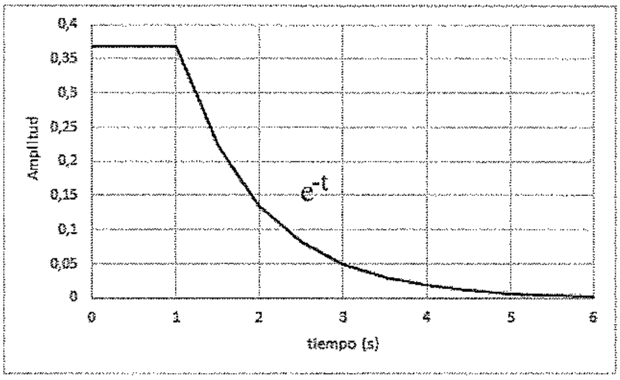
$\nu_2 = 250\,Hz$ $\quad b_2 = 2/\pi = 0{,}64$

$\nu_3 = 375\,Hz$ $\quad b_3 = -8/3\pi^2 = -0{,}27$

$\nu_4 = 500\,Hz$ $\quad b_4 = -1/\pi = -0{,}32$



2. Calcule la transformada de Fourier de la función de la figura, obteniendo su parte real e imaginaria. *(3p)*



$(\omega = 2\pi\nu)$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= \int_0^1 e^{-1} e^{-i\omega t}\,dt + \int_1^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{e^{-1}}{-i\omega}\cdot e^{-i\omega t}\Big|_0^1 - \frac{e^{-(1+i\omega)t}}{1+i\omega}\Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{i\omega}\left[e^{-1-i\omega} - e^{-1}\right] + \frac{e^{-1-i\omega}}{1+i\omega} =$$

$$= \frac{i}{\omega}\left(e^{-1-i\omega} - e^{-1}\right) + \frac{(1-i\omega)}{1+\omega^2}\cdot e^{-1-i\omega} = \frac{i(1+\omega^2)\left[e^{-1-i\omega} - e^{-1}\right] + \omega(1-i\omega)\cdot e^{-1-i\omega}}{\omega(1+\omega^2)} =$$

$$= \frac{e^{-1}e^{-i\omega}(i+\omega) - e^{-1}i(1+\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)} = \frac{1}{e\,\omega(1+\omega^2)}\cdot\left[e^{-i\omega}(i+\omega) - i(1+\omega^2)\right]$$

$$e^{-i\omega} = \cos\omega - i\operatorname{sen}\omega$$

$$\operatorname{Re}(\mathcal{F}(f(t))) = \frac{1}{e\,\omega(1+\omega^2)}\cdot\left[\omega\cos\omega + \operatorname{sen}\omega\right]$$

$$\operatorname{Im}(\mathcal{F}(f(t))) = \frac{1}{e\,\omega(1+\omega^2)}\left[\cos\omega - \omega\operatorname{sen}\omega - (1+\omega^2)\right]$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

3. Explique brevemente cómo actúa la delta de Dirac al aplicarla a una función $f(t)$ y aplíquelo para calcular las transformadas inversas de Fourier de $k\delta(\nu)$ y $\delta(\nu-\nu_0)$, con k y ν_0 constantes. Utilice los resultados para calcular la transformada de Fourier de la función $f(t) = 2 + \sin(6\pi t)$. Dibuje las partes real e imaginaria de la función resultante. *(4p)*

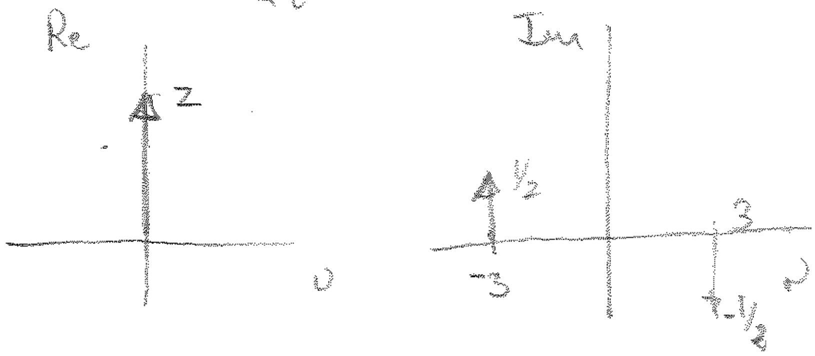
$\delta(t)$ al aplicarla a una función da el valor de la función en $t=0$

$$\mathcal{F}^{-1}(K\delta(\nu)) = \int_{-\infty}^{\infty} K\delta(\nu)\cdot e^{i2\pi\nu t}\,d\nu = Ke^0 = K \quad (\text{En } \nu=0)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(\nu-\nu_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu-\nu_0)\cdot e^{i2\pi\nu t}\,d\nu = e^{i2\pi\nu_0 t} \quad (\text{En } \nu-\nu_0=0 \Rightarrow \nu=\nu_0)$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \mathcal{F}(2+\text{sen}(6\pi t)) = \mathcal{F}(2) + \mathcal{F}\left(\frac{e^{i2\pi 3t} - e^{-i2\pi 3t}}{2i}\right) =$$

$$= 2\delta(\nu) + \frac{1}{2i}\cdot[\delta(\nu-3) - \delta(\nu+3)] = 2\delta(\nu) + \frac{i}{2}\cdot[\delta(\nu+3) - \delta(\nu-3)]$$



4. Se muestrea una señal continua con un intervalo de muestreo de 2 ms, y se calcula una FFT (transformada rápida de Fourier) con 1024 puntos.¿Cuál es la frecuencia de Nyquist?¿Y la resolución en frecuencia? *(1p)*

$\Delta t = 2\,ms \qquad N = 1024 \qquad T = N\cdot\Delta t = 2048\,ms = 2{,}048\,s$

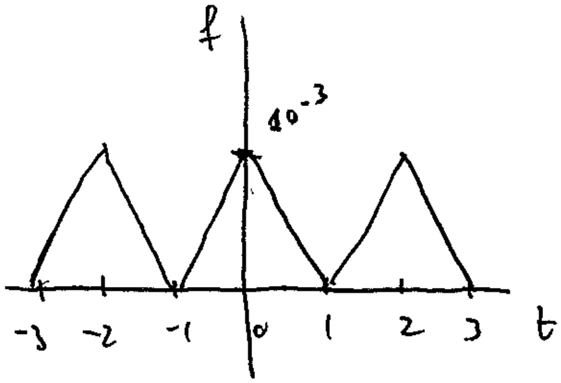
$$F_{max} = \frac{F_m}{2} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{4\times 10^{-3}} = 250\,Hz$$

$$\text{Resolución} = \Delta\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2{,}048} = 0{,}488\,Hz$$

ELLIDOS: **NOMBRE:**

ECUACIONES DIFERENCIALES. JULIO 2016-17. **TRANSFORMADA DE FOURIER.**

1. Obtenga el desarrollo en serie de Fourier de la función de periodo 2 ms, par, definida en el intervalo [0, 1]ms por $f(t) = 10^{-3} - t$, con t en segundos. Dibuje la función en el intervalo $[-3, 3]$ms y los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier hasta el tercer armónico, en función de la frecuencia en Hz. *(5p)*



$f(t) = 10^{-3} - t$ par $T = 2ms$

$f_1 = \frac{1}{2ms} = 500\,Hz$ $\quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 1000\pi\, rad/s$

Par $\Rightarrow b_n = 0$

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\cdot \overbrace{1000\pi}^{\omega} t$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \overset{par}{=} \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \frac{2}{2}\cdot 1000 \int_0^{10^{-3}} (10^{-3} - t)\,dt =$$

$$= 1000\left(10^{-3}t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^{10^{-3}} = 0{,}5\cdot 10^{-3}$$

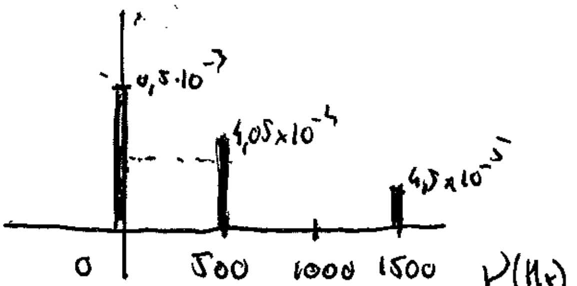
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega t\,dt = 2\cdot\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\cdot 1000\pi t\,dt =$$

$$= 2\cdot\frac{2}{2\cdot 10^{-3}}\int_0^{10^{-3}} \underbrace{(1-t)}_{u}\,\underbrace{\cos n\,1000\pi t\,dt}_{dv} = 2000\left[(1-t)\cdot\frac{\sin n\,1000\pi t}{n\,1000\pi}\Big|_0^{10^{-3}} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{10^{-3}} \frac{\sin n\,1000\pi t}{n\,1000\pi}\,dt\right] = 2000\left[(1-10^{-3})\cancel{\frac{\sin n\pi t}{n\cdot 1000\pi}}^{0} - \cancel{\sin 0} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(n\cdot 1000\pi)^2}\cdot\cos n\,1000\pi t\Big|_0^{10^{-3}}\right] = \frac{2000}{(n\cdot 1000\pi)^2}\cdot[1 - \cos n\pi] = \frac{2000}{(n\cdot 1000\pi)^2}(1 - (-1)^n)$$

$$S_n = 0{,}5\cdot 10^{-3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1000\,n^2\pi^2}\cdot[1 - (-1)^n]\cos n\cdot 1000\pi t$$



$\frac{a_0}{2} = 0{,}5\times 10^{-3}$

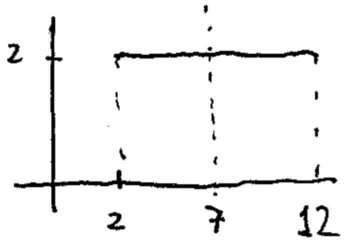
$a_1 = \frac{2}{1000\pi^2}\cdot 2 = 4{,}05\times 10^{-4}$ $\quad f_1 = 500\,Hz$

$a_2 = 0$ $\quad f_2 = 1000\,Hz$

$a_3 = \frac{2}{9000\pi^2}\cdot 2 = 4{,}5\times 10^{-5}$ $\quad f_3 = 1500\,Hz$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

2. La ecuación diferencial de un cierto sistema es $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = g(t)$. El sistema es excitado mediante una función $g(t)$ que se observa en un osciloscopio como un pulso rectangular de altura 2 V, de 10 s de duración y que empieza a los 2 s de iniciarse el registro de datos. Obtenga la respuesta $X(\nu)$ del sistema en el dominio de la frecuencia, determinando su parte real e imaginaria.
Nota 1: Para obtener el resultado, exprese la función $g(t)$ como convolución de un pulso con una delta de Dirac y calcule la transformada haciendo uso de las propiedades dadas en la hoja de instrucciones.
Nota 2: Puede suponer conocida la transformada de Fourier de la función pulso rectangular unidad, pero debe deducirse la transformada de Fourier de una delta de Dirac, a partir de su definición. *(5p)*



$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = g(t)$$

$$g(t) = 2 \cdot \Pi\left(\frac{t-7}{10}\right) = 2\,\Pi\left(\frac{t}{10}\right) * \delta(t-7)$$

$$\mathcal{F}(g(t)) \xlongequal[\text{convolución y linealidad}]{} 2 \cdot \mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{t}{10}\right)\right) \cdot \mathcal{F}(\delta(t-7))$$

$$\mathcal{F}(\delta(t-7)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-7) \cdot e^{-i2\pi\nu t}\,dt \xlongequal[\uparrow]{} e^{-i2\pi\nu\cdot 7}$$

$$(\delta(t-a), f(t)) = f(a)$$

$$\mathcal{F}(\Pi(t)) = \operatorname{sinc}\nu \Rightarrow \mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{t}{10}\right)\right) \xlongequal[\text{Escalado}]{a = 1/10} 10 \operatorname{sinc} 10\nu$$

$$\mathcal{F}(g(t)) = 20 \operatorname{sinc} 10\nu \cdot e^{-i14\pi\nu}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + 4x\right) = \mathcal{F}(g(t))$$

Diferenciación y linealidad: $(i \cdot 2\pi\nu)^2 \cdot X(\nu) + 4 \cdot X(\nu) = 20 \operatorname{sinc} 10\nu\, e^{-i14\pi\nu}$

$$X(\nu) = \frac{20 \operatorname{sinc} 10\nu}{(-4\pi^2\nu^2 + 4)} \cdot (\cos 14\pi\nu - i \operatorname{sen} 14\pi\nu)$$

$$\operatorname{Re}(X(\nu)) = \frac{20 \operatorname{sinc} 10\nu}{(-4\pi^2\nu^2 + 4)} \cdot \cos 14\pi\nu$$

$$\operatorname{Im}(X(\nu)) = -\frac{20 \operatorname{sinc} 10\nu}{-4\pi^2\nu^2 + 4} \cdot \operatorname{sen} 14\pi\nu$$