Código de la mesa: [ ] Tres primeras letras del primer apellido: [ ] [ ] [ ]

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: Examen Parcial 2 (Temas 3, 4 y 5)

Fecha: 24-01-2022 Duración de esta prueba: 120 minutos.

A rellenar por los profesores

Test	Teoría	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Nota Total

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Las notas de este examen estarán publicadas el martes 8 de febrero; se comunicará el lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (25%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.
Calificación: correcta $= +1$, errónea $= -0.5$, en blanco $= 0$.

Dada una serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, con $\lim a_n = 0$:

a) se puede asegurar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge.

b) se puede asegurar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge.

c) no se puede asegurar nada sobre la convergencia o divergencia de $\sum_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$.

A

Si las sucesiones (a_n) y (b_n) verifican $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 800$, entonces:

a) $a_n \sim b_n$.

b) $a_n \ll b_n$.

c) $a_n \in \Theta(b_n)$ pero $a_n \not\sim b_n$.

A

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{3^{2n}}$ es convergente y su suma vale:

a) $\frac{9}{13}$. b) $-\frac{4}{13}$. c) $\frac{3}{5}$.

A

La igualdad $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ si $x \in (-\infty, \infty)$ es el desarrollo en serie de potencias de la función:

a) $f(x) = e^x$ b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ c) $f(x) = \cos(x)$

A

Dada la sucesión de las sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$, se puede asegurar que:

a) S_n es divergente.

b) S_n converge a 0.

c) S_n converge a un número mayor que 0.

$\boxed{\textbf{C}}$

El polinomio de Taylor de orden 3 de una función $f(x)$ centrado en $x_0 = 0$ viene dada por

a) $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$.

b) $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3}x^3$.

c) $f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2 + f'''(0)x^3$.

$\boxed{\textbf{A}}$

La expresión explícita (término general) de la sucesión $\begin{cases} a_0 = 8 \\ a_n = 5(n+1)a_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$ es:

a) $5^{n+1}(n+1)! \cdot 8$.

b) $5^{n+1}n! \cdot 8$.

c) $5^n(n+1)! \cdot 8$.

$\boxed{\textbf{C}}$

Dada $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, su derivada viene dada por

a) $S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$.   b) $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$.   c) $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n^3+n^2}$.

$\boxed{\textbf{B}}$

La sucesión de las sumas parciales $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$ es del mismo orden que:

a) $\ln n$ b) $\ln(\ln n)$ c) $\frac{1}{n \ln n}$

$\boxed{\textbf{B}}$

El intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$ es

a) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.   b) $[-3, 3)$.   c) $[-3, 3]$.

$\boxed{\textbf{B}}$

Teoría (10%)

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

a) *(3 puntos)* Dar la definición de serie convergente.

b) *(3 puntos)* Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente entonces $\lim a_n = 0$.

c) *(4 puntos)* Demostrar que el recíproco del resultado del apartado **b)** no es cierto dando un contraejemplo y justificando la no convergencia de la serie.

Solución:

a) La serie es convergente si es convergente su sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Es decir, converge si

$$\lim S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S \in \mathbb{R}$$

b) Como $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n = S_{n-1} + a_n$ entonces $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Si la serie converge entonces, tal y como se ha visto en el apartado **a)**, $\lim S_n = S \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim a_n = \lim \big(S_n - S_{n-1}\big) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$$

c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ verifica que su término general $a_n = \frac{1}{n}$ converge a 0 pero la serie es divergente ya que es armónica con $p = 1$.

O si se prefiere, aplicando el criterio integral: como $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$, la serie tiene el mismo carácter que la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ y por tanto es divergente ya que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \ln(b) = \infty \quad \text{es divergente.}$$

Problema 1 (18 %)

Se pide responder a los siguientes apartados **justificando** los resultados obtenidos:

a) *(2 puntos)* Hallar el orden de magnitud de la sucesión $a_n = \dfrac{2^n + (-3)^n}{3n^3}$.

SOLUCIÓN:
$a_n = \dfrac{2^n + (-3)^n}{3n^3} \sim \dfrac{3^n}{n^3}$, ya que
$3n^3 \sim n^3$ y
$(-3)^n \sim 3^n$, $3^n \gg 2^n$ por la jerarquía de infinitos, por lo que la suma del numerador es del orden del mayor: 3^n.

Y ya no se puede simplificar más. Por tanto, $\boxed{a_n \sim \dfrac{3^n}{n^3}}$.

b) *(4 puntos)* Hallar el orden de magnitud de la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2 + \log(k^4 + 4k^2)}{\sqrt{k^5 + 2k^3 + 7}}$.

SOLUCIÓN: Para estudiar el orden de magnitud de S_n se estudia primero el orden de la sucesión que estamos sumando:

$$\frac{k^2 + \log(k^4 + 4k^2)}{\sqrt{k^5}} \sim \frac{k^2}{k^{5/2}} = \frac{1}{k^{1/2}}$$

pues $\log(k^4 + 4k^2) \sim \log(k)$ (el logaritmo de un polinomio es del orden de $\log(k)$), $k^2 \gg \log(k)$ por la jerarquía de infinitos, y la suma del numerador es del orden del mayor: k^2. Luego, basta simplificar las potencias de k.

Como estamos trabajando con sucesiones de términos positivos, el criterio de comparación nos asegura que $S_n \sim \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/2}}$.

Como $f(x) = \dfrac{1}{x^{1/2}} \geq 0$, continua y decreciente en $[1, +\infty)$, el criterio integral nos asegura que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/2}} \sim \int_1^n x^{-1/2} = \left[2x^{1/2}\right]_1^n = 2(n^{1/2} - 1) \sim n^{1/2}.$$

Por tanto, $\boxed{S_n \sim n^{1/2} = \sqrt{n}}$.

c) *(2 puntos)* Ordenarlas según dicho orden de magnitud.

SOLUCIÓN: Se verifica que $S_n \ll a_n$ ya que

$$\lim \frac{n^{1/2}}{\frac{3^n}{n^3}} = \lim \frac{n^{1/2} \cdot n^3}{3^n} = \lim \frac{n^{7/2}}{3^n} = 0$$

pues la jerarquía de infinitos asegura que $3^n \gg n^{7/2}$.

d) *(2 puntos)* Justificar cuáles de ellas están en $O(2^n)$ y cuáles en $\Omega(2^n)$.

SOLUCIÓN: Utilizamos los siguientes resultados:

- $x_n \ll 2^n \Rightarrow x_n \in O(2^n)$.
- $x_n \gg 2^n \Rightarrow x_n \in \Omega(2^n)$.

Por tanto, estudiaremos la relación de orden de las anteriores sucesiones con 2^n.

- Como $S_n \sim n^{1/2} \ll 2^n$ (por jerarquía de infinitos), se tiene que $S_n \in O(2^n)$.
- Se verifica que $a_n \gg 2^n$ ya que

$$\lim \frac{\left(\frac{3^n}{n^3}\right)}{2^n} = \lim \frac{3^n}{2^n\, n^3} = \lim \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n^3} = \infty$$

pues la jerarquía de infinitos asegura que $\left(\frac{3}{2}\right)^n \gg n^3$, ya que $\frac{3}{2} > 1$.

Por tanto, se tiene que $a_n \in \Omega(2^n)$.

Problema 2 (9 %)

El *método de inserción* es un algoritmo recursivo que se utiliza para ordenar una lista de elementos. Si la lista tiene un solo elemento, obviamente ya es un conjunto ordenado. Cuando hay n elementos, en el paso recursivo se realizan una serie de comparaciones para insertar en la lista ya ordenada de los $n-1$ primeros elementos el elemento n-ésimo. Se quiere estimar el número de comparaciones que requiere dicho algoritmo para ordenar n elementos.

a) (3 puntos) El "mejor caso" se da cuando en cada paso recursivo solamente hay que realizar una comparación para realizar la inserción. Si M_n es el número de comparaciones que realiza el *método de inserción* al tratar este caso, dicha sucesión verifica la relación recursiva $M_n = M_{n-1} + 1$. Hallar el término general de M_n y su orden de magnitud.

Solución: Como nos dicen que si la lista tiene un solo elemento ($n = 1$) ya es un conjunto ordenado, el número de comparaciones será 0, por lo que $M_1 = 0$. A partir de la relación recursiva obtenemos el resto de términos de la sucesión y podemos inferir el término general:

$$
\begin{aligned}
&M_1 = 0\\
&M_2 = M_1 + 1 = 0 + 1 = 1\\
&M_3 = M_2 + 1 = 1 + 1 = 2\\
&M_4 = M_3 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3\\
&\dots\\
&M_n = M_{n-1} + 1 = \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n-1} = n - 1
\end{aligned}
$$

Por tanto $\boxed{M_n = n - 1 \sim n}$.

b) (5 puntos) El "peor caso" se da cuando en cada paso recursivo hay que realizar $n-1$ comparaciones para insertar el elemento n-ésimo. Dar una expresión recursiva para P_n: número de comparaciones que realiza el *método de inserción* en este peor caso. A partir de ella, hallar su término general y su orden de magnitud.

Solución: Como nos dicen que si la lista tiene un solo elemento ($n = 1$) ya es un conjunto ordenado, el número de comparaciones será 0, por lo que también $P_1 = 0$.
En este caso, nos dicen que "hay que realizar $n-1$ comparaciones para insertar el elemento n-ésimo", por lo que el número total de comparaciones serán $n-1$ más las que se hayan realizado para ordenar los otros $n-1$ elementos de la lista (P_{n-1}). Por tanto, la relación recursiva será $P_n = P_{n-1} + (n-1)$
A partir de la relación recursiva obtenemos el resto de términos de la sucesión y podemos inferir el término general:

$$
\begin{aligned}
&P_1 = 0\\
&P_2 = P_1 + (2-1) = 0 + 1 = 1\\
&P_3 = P_2 + (3-1) = 1 + 2\\
&P_4 = P_3 + (4-1) = 1 + 2 + 3\\
&P_5 = P_4 + (5-1) = 1 + 2 + 3 + 4\\
&\dots\\
&P_n = P_{n-1} + (n-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1)
\end{aligned}
$$

Se tiene la suma de una sucesión aritmética: $P_n = \dfrac{(1 + (n-1))(n-1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n^2 - n}{2}$.

Por tanto, $\boxed{P_n = \dfrac{n^2 - n}{2} \sim n^2}$.

c) (2 puntos) Si G_n mide el número de comparaciones que realiza este algoritmo en un caso general describir su comportamiento asintótico en términos de la notación O grande y Ω.

SOLUCIÓN: Como en los apartados anteriores hemos hallado el "mejor caso" (menor número de comparaciones) y el "peor caso" (mayor número de comparaciones), se verifica que $M_n \leq G_n \leq P_n$ para cualquier valor de n. De esa desigualdad y lo visto en los apratados anteriores se deduce lo siguiente:

- Por la definición de O grande, se tiene que $G_n \in O(P_n)$. Y como $P_n \sim n^2$, se deduce que $\boxed{G_n \in O(n^2)}$.
- Por la definición de Ω, se tiene que $G_n \in \Omega(M_n)$. Y como $M_n \sim n$, se deduce que $\boxed{G_n \in \Omega(n)}$.

Se tiene que el número de comparaciones G_n está minorado por n y mayorado por n^2.

Problema 3 (20 %)

Estudiar la convergencia de cada una de estas tres series justificando adecuadamente los criterios utilizados para cada caso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n^2}{(n+1)!} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n^4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n}}$$

Solución:

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n^2}{(n+1)!}$, es una serie de términos positivos, y como en el término general aparece un factorial, empleamos el criterio del cociente (D'Alembert):

  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{5(n+1)^2}{(n+2)!}}{\frac{5n^2}{(n+1)!}} = \lim \frac{5(n+1)^2(n+1)!}{5n^2(n+2)!} = \lim \frac{5(n+1)^2(n+1)!}{5n^2(n+2)(n+1)!} = \lim \frac{(n+1)^2}{n^2(n+2)} = 0$ (pues el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador).

  Por tanto, $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$ y, por el criterio del cociente, la serie es convergente.

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n^4}$

  El término general $a_n = \frac{3^n}{n^4}$ verifica que $\lim \frac{3^n}{n^4} = \infty \neq 0$, ya que, de acuerdo a la jerarquía de infinitos, $3^n \gg n^4$.

  Por lo tanto, no se cumple la condición necesaria de convergencia ($\lim a_n = 0$), por lo que la serie es divergente.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n}}$

  Al tratarse de una serie de términos arbitrarios y no alternada se emplea el criterio de convergencia absoluta. Por lo tanto se estudia la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n}} \right|$, donde:

  $$\left| \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+5n}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}.$$

  Dado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente porque se trata de una serie armónica general, cuyo exponente del denominador es $3/2 > 1$, aplicando el criterio de comparación, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n}} \right|$ también será convergente.

  Luego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n}}$ es absolutamente convergente y, por lo tanto, convergente.

Problema 4 (18 %)

Sabiendo que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si y solo si $x \in (-1,1)$ se pide:

a) *(1.5 puntos)* Probar que el desarrollo en serie de potencias de la función $\dfrac{1}{1+x^2}$ es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ especificando su campo de validez.

Solución: Observando que el desarrollo anterior es válido si y solo si $|x| < 1$ se tiene que:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \underbrace{=\!=\!=}_{\text{sii } |-x^2|<1} \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Luego ciertamente esta serie es la serie de potencias de la función centrada en $x_0 = 0$ y es válida si y solo si $|-x^2| < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. Es decir, el campo de validez es $(-1,1)$.

b) *(5 puntos)* Probar que $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ para todo $x \in [-1,1]$.

Solución: Dado que $\arctan(x)$ es una primitiva de la función $\dfrac{1}{1+x^2}$, aplicamos el teorema de integración de series de potencias sobre el desarrollo obtenido en el apartado anterior:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Buscamos el valor de la constante de integración C para que la primitiva sea $\arctan(x)$.

$$\arctan(x) = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad \forall x \in (-1,1)$$

Para ello imponemos que valga lo mismo en $x = 0 \in (-1,1)$:

$$0 = \arctan(0) = C + 0 - \frac{0^3}{3} + \frac{0^5}{5} - \frac{0^7}{7} + \cdots = C$$

Luego, por el teorema de integración de series de potencias se tiene que:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \forall x \in (-1,1)$$

Los extremos del intervalo también van a estar en el campo de validez en virtud del teorema de Abel ya que en esos dos puntos la función es continua ($\arctan(x)$ es continua en $\mathbb{R}$) y la serie es convergente como veremos a continuación:

- Para $x = -1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(-1)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$
- Para $x = 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(1)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

en ambos casos se cumplen las condiciones del criterio de Leibniz: son alternadas y el valor absoluto de su término general es $\dfrac{1}{2n+1}$ que es una sucesión decreciente con límite 0. Por tanto, convergen.

Así pues el campo de validez del desarrollo de $\arctan(x)$ es el intervalo $CV = [-1,1]$.

c) *(1.5 puntos)* Estudiar razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas:

- $\arctan(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
- $\arctan(2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1}$

SOLUCIÓN: Es fácil comprobar que estas series se obtienen al sustituir en el desarrollo del $\arctan(x)$ la x por 1 y 2 respectivamente. Sin embargo mientras que $x = 1$ está en el campo de validez del desarrollo de esta función, y por tanto $\arctan(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $x = 2 \notin CV$ y por tanto $\arctan(2) \neq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1}$.

d) *(2 puntos)* Dar el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $\arctan(x)$ centrado en $x_0 = 0$ y utilizar dicho polinomio para dar una aproximación de $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

SOLUCIÓN: Del apartado **b)** tenemos el desarrollo en serie de Taylor de $\arctan(x)$ centrado en $x_0 = 0$:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Truncando esta serie se tienen distintos polinomios de Taylor. En particular el de orden 2 es el de grado menor o igual a 2, en este caso: $T_2(x) = x$. Este polinomio aproxima a la función en puntos $x \in [-1, 1]$, luego

$$\arctan(0.5) \approx T_2(0.5) = 0.5$$