Código de la mesa: | | Tres primeras letras del primer apellido: | | | |

Apellidos y nombre:

Análisis Matemático: Prueba Global/Examen Final

Fecha: 24-01-2022 Duración de esta prueba: 3 horas.

A rellenar por los profesores

Test	Teoría	Prob. 1	Prob. 2	Prob. 3	Prob. 4	Prob. 5	Prob. 6	Prob. 7	Nota

Instrucciones

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Las notas de este examen estarán publicadas el martes 8 de febrero; se comunicará el lugar y hora de la revisión mediante el foro de moodle de la asignatura.

Test (20%)

En cada pregunta de test, una y solo una de las afirmaciones (a), (b) y (c) es cierta.
Calificación: correcta = +1, errónea = −0.5, en blanco = 0.

Dada la sucesión de las sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$, se puede asegurar que:

a) S_n es divergente.
b) S_n converge a 0.
c) S_n converge a un número mayor que 0.

C

Dada una función $f(x)$ que tiene un máximo relativo en el punto $x = c$, se puede asegurar que:

a) $f'(c) = 0$.
b) la función $f(x)$ es continua en $x = c$.
c) $f'(c) = 0$ o no existe $f'(c)$.

C

Dada la sucesión a_n definida de forma recursiva $\begin{cases} a_0 = 8 \\ a_n = 5(n+1)a_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$, su orden de magnitud es:

a) $a_n \sim 5^n n!$
b) $a_n \sim 5^n (n+1)!$
c) $a_n \sim (n+1)!$

B

Dada la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x-2}$, se puede asegurar que $f(x)$ es integrable en:

a) $[0, 1]$. b) $[1, 2]$. c) $[3, 4]$.

C

El polinomio de Taylor de orden 3 de una función $f(x)$ centrado en $x_0 = 0$ viene dada por

a) $f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{6}x^3.$

b) $f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3}x^3.$

c) $f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2 + f'''(0)x^3.$

A

La solución del problema de valor inicial (PVI) $y' = xy, y(0) = 3$ es:

a) $y = 3e^{x^2/2}.$

b) $y = \dfrac{e^{x^2}}{2} + \dfrac{5}{2}.$

c) $y = xe^x.$

A

Sea a_n una sucesión convergente tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L > 0$. Se puede asegurar que:

a) a_n está acotada.

b) a_n es monótona.

c) a_n sólo tiene términos positivos.

A

La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-4)^n}{3^{2n}}$ es convergente y su suma vale:

a) $\dfrac{9}{13}.$ b) $-\dfrac{4}{13}.$ c) $\dfrac{3}{5}.$

A

La solución general de la ecuación diferencial $y' - 4y = 0$ es:

a) $y = e^{-4x+K}$, con $K \in \mathbb{R}$.

b) $y = Ke^{4x}$, con $K \in \mathbb{R}$.

c) $y = e^{4x} + K$, con $K \in \mathbb{R}$.

B

El intervalo de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n3^n}$ es

a) $\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right].$ b) $[-3, 3).$ c) $[-3, 3].$

B

Teoría (10%)

a) *(4 puntos)* Demostrar que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ es divergente si $p<1$.

b) *(3 puntos)* Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con $p<1$, justificar que se verifican las condiciones para aplicar el criterio integral para estudiar su convergencia y utilizar el resultado del apartado **a)** para determinar la misma.

c) *(3 puntos)* Escribir con precisión las definiciones de $a_n \ll b_n$ y $a_n \in O(b_n)$ y dar un ejemplo de sucesión a_n tal que $a_n \in O(n^2)$ pero no verifique que $a_n \ll n^2$.

SOLUCIÓN:

a) Basta recordar que si $p \neq 1$ entonces $\displaystyle\int \frac{1}{x^p}\,dx = \int x^{-p}\,dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1^{-p+1}}{-p+1}\right) \\
&= \frac{1}{-p+1}\cdot \lim_{b\to\infty}\left(b^{-p+1}-1\right) \underset{-p+1>0}{=\!=\!=} \frac{1}{-p+1}\cdot(\infty-1) = \infty
\end{aligned}$$

Luego la integral impropia diverge para todo $p<1$.

b) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ con $p<1$. Esta función es continua, positiva y monótona en el intervalo $[1,\infty)$ (creciente si $p \leq 0$ y decreciente si $0 \leq p < 1$). Luego por el criterio integral la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ tiene el mismo carácter que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ y, por tanto, ambas son divergentes.

c) Esos conceptos se definen de la siguiente manera:

- $a_n \ll b_n$ si y solo si $\lim \left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| = 0$.
- $a_n \in O(b_n)$ si y solo si existen dos constantes: $C \in \mathbb{R}^+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que se verifica la desigualdad $|a_n| \leq C|b_n|$ para todo $n \geq n_0$.

Sea $a_n = 3n^2$. Obviamente $a_n \in O(n^2)$ ya que $|a_n| \leq 3n^2$ para todo $n \geq 0$. Sin embargo, $\lim \left|\dfrac{a_n}{n^2}\right| = 3 \neq 0$ luego $a_n \sim n^2$ pero $a_n \not\ll n^2$.

Problema 1 (7 %)

Calcular el gradiente de la función $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-y}$ en los puntos $(1,0)$ y $(0,-2)$. Representar gráficamente los gradientes junto con las curvas de nivel de f correspondientes a dichos puntos. ¿Qué relación hay entre gradiente y curva de nivel?

SOLUCIÓN: El gradiente de f es el vector $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Como $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-2x}{(x^2-y)^2} \quad$ y $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{(x^2-y)^2}, \quad$ en los puntos dados se tiene que:

$$\nabla f(1,0) = \left(\frac{-2\cdot 1}{(1^2-0)^2}, \frac{1}{(1^2-0)^2}\right) = (-2,1)$$

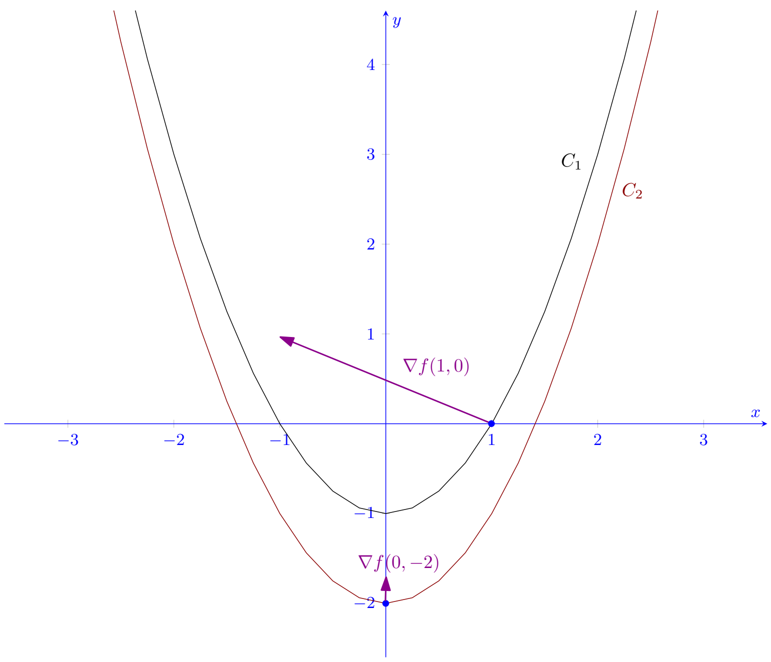
$$\nabla f(0,-2) = \left(\frac{-2\cdot 0}{(0^2-(-2))^2}, \frac{1}{(0^2-(-2))^2}\right) = (0,\tfrac{1}{4})$$

Las curvas de nivel que pasan por los puntos $(1,0)$ y $(0,-2)$ respectivamente son:

$$C_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y) = f(1,0)\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \frac{1}{x^2-y} = 1\} \equiv x^2-y = 1 \equiv \boxed{y = x^2-1}$$

$$C_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y) = f(0,-2)\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \frac{1}{x^2-y} = \frac{1}{2}\} \equiv x^2-y = 2 \equiv \boxed{y = x^2-2}$$

Son dos parábolas cuya representación gráfica aparece a continuación junto con los puntos dados y los gradientes de f en dichos puntos.



El gradiente de la función en un punto (a,b) es un vector perpendicular a la tangente a la curva de nivel de la función en ese punto.

Problema 2 (7 %)

Una industria química emplea dos tipos de sustancias para fabricar un producto. El coste de producción viene dado por $P(x,y) = 2x^2 + y^2 + 8(1 - x - y)$, siendo x la cantidad empleada de una de las sustancias e y la cantidad empleada de la otra. El coste ambiental asociado al ciclo de vida del producto fabricado también depende de las cantidades empleadas de cada sustancia y su cuantificación viene dada por la función $M(x,y) = 2xy + x(1 - x - y)$. Considerando que las funciones P y M miden el coste en las mismas unidades, se pide determinar qué cantidades de cada sustancia habría que emplear para que el coste total sea mínimo. Explicar el proceso seguido para hallarlas y justificar adecuadamente que con esas cantidades se alcanza el valor mínimo.

Solución:

Se pide hacer mínimo el coste total, que dependerá de las variables x e y, y se calculará sumando el coste de producción y el coste ambiental asociado al ciclo de vida del producto:

$$C(x,y) = P(x,y) + M(x,y).$$

Desarrollando las expresiones de P y M, y simplicando, se obtiene:

$$C(x,y) = (2x^2 + y^2 + 8 - 8x - 8y) + (2xy + x - x^2 - xy) = x^2 + y^2 + xy - 7x - 8y + 8$$

Aplicamos a dicha función el método para hallar los extremos de una función de dos variables.

- Hallamos las derivadas parciales de C:

$$\frac{\delta C}{\delta x} = 2x + y - 7, \qquad \frac{\delta C}{\delta y} = 2y + x - 8$$

- Hallamos los puntos críticos resolviendo el sistema $\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ 2y + x - 8 = 0 \end{cases}$, por el método de sustitución:

$$\begin{cases} y = 7 - 2x \\ 2(7 - 2x) + x - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ -3x + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

  Por tanto, el único punto crítico es $(2,3)$.

- Hallamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\delta^2 C}{\delta x^2} = 2, \qquad \frac{\delta^2 C}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 C}{\delta y \delta x} = 1, \qquad \frac{\delta^2 C}{\delta y^2} = 2$$

- Estudiamos los valores de la matriz hessiana y el hessiano en el punto $(2,3)$:

  La matriz hessiana de C en el punto es $(2,3)$ es $H(2,3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

  Como el hessiano es $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$, se sabe que en $(2,3)$ hay un extremo local.

  Como $A = 2 > 0$ se sabe que dicho extremo es un **mínimo** local de C.

  Por tanto, el coste mínimo se alcanza con las cantidades $\boxed{x = 2,\ y = 3}$.

Problema 3 (14 %)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x\,\mathrm{sen}(x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$, se define $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$.

a) *(2.5 puntos)* Estudiar la continuidad de $f(x)$.

SOLUCIÓN:

La función $f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)$, por ser una función polinómica, y es continua en $(0, +\infty)$, por ser producto y composición de funciones continuas. Sin embargo, $f(x)$ no es continua en $x = 0$ ya que los límites laterales no coinciden:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-1)^2 = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 3x\,\mathrm{sen}(x^2) = 0$$

Por tanto, $\boxed{\text{la función } f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{0\}}$.

b) *(2.5 puntos)* Estudiar la continuidad y derivabilidad de $F(x)$. Hallar $F'(x)$ donde exista.

SOLUCIÓN:

Estudiamos las propiedades de $F(x)$ a partir de las propiedades de $f(x)$.

- $f(x)$ es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$ ya que es continua salvo en un número finito de puntos y está acotada porque solo tiene discontinuidades de salto finito. Por tanto se tiene que $\boxed{F(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}}$.
- Al ser $f(x)$ continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, el Teorema Fundamental de Cálculo nos asegura que $\boxed{F(x) \text{ es derivable en } \mathbb{R} - \{0\} \text{ y que en dichos puntos } F'(x) = f(x)}$. En $x = 0$ no es derivable ya que $F'(0^-) = 1 \neq 0 = F'(0^+)$.

c) *(5 puntos)* Hallar $F(0)$ y la expresión explícita de $F(x)$.

SOLUCIÓN:

$$F(0) = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt = \int_{-1}^{0} (t-1)^2\,dt = \left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_{-1}^{0} = \frac{-1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

Para hallar la forma explícita de $F(x)$, hay que distinguir dos casos:

- Si $x \leq 0$ es $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} (t-1)^2\,dt = \left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_{-1}^{x} = \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{8}{3}.$
- Si $x > 0$ es $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto} \quad F(x) &= F(0) + \int_0^x 3t\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt = \frac{7}{3} + \frac{3}{2}\left[-\cos(t^2)\right]_0^x \\ &= \frac{7}{3} + \frac{3}{2}\left(-\cos(x^2) + \cos(0)\right) = \frac{7}{3} - \frac{3}{2}\cos(x^2) + \frac{3}{2}\cdot 1 \\ &= \frac{23}{6} - \frac{3}{2}\cos(x^2). \end{aligned}$$

Así pues queda:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^3}{3} + \dfrac{8}{3} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{23}{6} - \dfrac{3}{2}\cos(x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Problema 4 (14 %)

Dadas las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{2^n + (-3)^n}{3n^3}, \qquad b_n = \frac{2^n (n+2)!}{2^{n+2} + n!}, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 + \log(k^4 + 4k^2)}{\sqrt{k^5}},$$

se pide responder a los siguientes apartados **justificando los resultados obtenidos**:

a) *(7 puntos)* Hallar el orden de magnitud de las tres sucesiones.

SOLUCIÓN:

- $a_n = \dfrac{2^n + (-3)^n}{3n^3} \sim \dfrac{3^n}{n^3}$, ya que

  $3n^3 \sim n^3$ y

  $(-3)^n \sim 3^n$, $3^n \gg 2^n$ por la jerarquía de infinitos, por lo que la suma del numerador es del orden del mayor: 3^n.

  Y ya no se puede simplificar más.

  Por tanto, $\boxed{a_n \sim \dfrac{3^n}{n^3}}$.

- $b_n = \dfrac{2^n (n+2)!}{2^{n+2} + n!} \sim \dfrac{2^n (n+2)!}{n!}$ ya que

  $2^{n+2} = 2^n \cdot 2^2 \sim 2^n$, $2^n \ll n!$ por la jerarquía de infinitos, por lo que la suma del denominador es del orden del mayor: $n!$.

  Pero el cociente se puede simplificar más, ya que:

  $\dfrac{2^n (n+2)!}{n!} = \dfrac{2^n (n+2) \cdot (n+1) \cdot n!}{n!} = 2^n (n+2)(n+1) \sim 2^n\, n^2$

  pues $(n+2)(n+1) \sim n^2$.

  Y ya no se puede simplificar más.

  Por tanto, $\boxed{b_n \sim 2^n\, n^2}$.

- Para estudiar el orden de magnitud de S_n se estudia primero el orden de la sucesión que estamos sumando:

  $\dfrac{k^2 + \log(k^4 + 4k^2)}{\sqrt{k^5}} \sim \dfrac{k^2}{k^{5/2}} = \dfrac{1}{k^{1/2}}$

  pues $\log(k^4 + 4k^2) \sim \log(k)$ (el logaritmo de un polinomio es del orden de $\log(k)$), $k^2 \gg \log(k)$ por la jerarquía de infinitos, y la suma del numerador es del orden del mayor: k^2. Luego, basta simplificar las potencias de k.

  Como estamos trabajando con sucesiones de términos positivos, el criterio de comparación nos asegura que $S_n \sim \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/2}}$.

  Como $f(x) = \dfrac{1}{x^{1/2}} \geq 0$, continua y decreciente en $[1, +\infty)$, el criterio integral nos asegura que:

  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1/2}} \sim \int_1^n x^{-1/2} = \left[2x^{1/2}\right]_1^n = 2(n^{1/2} - 1) \sim n^{1/2}.$$

  Por tanto, $\boxed{S_n \sim n^{1/2} = \sqrt{n}}$.

b) *(2 puntos)* Ordenarlas según dicho orden.

Solución:

- Se verifica que $S_n \ll b_n$ ya que $\lim \dfrac{n^{1/2}}{2^n n^2} = \lim \dfrac{1}{2^n n^{3/2}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$.

  También se puede argumentar de otra forma:

  - $1 \ll 2^n \Rightarrow n^2 \ll 2^n n^2$,
  - $n^{1/2} \ll n^2$ (jerarquía de infinitos),

  por lo que $n^{1/2} \ll 2^n n^2$.

- Se verifica que $b_n \ll a_n$ ya que

$$\lim \frac{\left(\frac{3^n}{n^3}\right)}{2^n n^2} = \lim \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n^5} = \infty$$

  pues la jerarquía de infinitos asegura que $\left(\frac{3}{2}\right)^n \gg n^5$, ya que $\frac{3}{2} > 1$.

Por tanto, $\boxed{S_n \ll b_n \ll a_n}$.

c) *(1 puntos)* Justificar cuáles de ellas están en $O(2^n)$ y cuáles en $\Omega(2^n)$.

Solución:

Utilizamos los siguientes resultados:

- $x_n \ll 2^n \Rightarrow x_n \in O(2^n)$.
- $x_n \gg 2^n \Rightarrow x_n \in \Omega(2^n)$.

Por tanto, estudiaremos la relación de orden de las anteriores sucesiones con 2^n.

- Como $S_n \sim n^{1/2} \ll 2^n$ (por jerarquía de infinitos), se tiene que $S_n \in O(2^n)$.
- Como $2^n \ll 2^n n^2 \sim b_n \ll a_n$, se tiene que $a_n, b_n \in \Omega(2^n)$.

Problema 5 (6 %)

El *método de inserción* es un algoritmo recursivo que se utiliza para ordenar una lista de elementos. Si la lista tiene un solo elemento, obviamente ya es un conjunto ordenado. Cuando hay n elementos, en el paso recursivo se realizan una serie de comparaciones para insertar en la lista ya ordenada de los $n-1$ primeros elementos el elemento n-ésimo. Se quiere estimar el número de comparaciones que requiere dicho algoritmo para ordenar n elementos.

a) (3 puntos) El "mejor caso" se da cuando en cada paso recursivo solamente hay que realizar una comparación para realizar la inserción. Si M_n es el número de comparaciones que realiza el *método de inserción* al tratar este caso, dicha sucesión verifica la relación recursiva $M_n = M_{n-1} + 1$. Hallar el término general de M_n y su orden de magnitud.

SOLUCIÓN: Como nos dicen que si la lista tiene un solo elemento ($n = 1$) ya es un conjunto ordenado, el número de comparaciones será 0, por lo que $M_1 = 0$. A partir de la relación recursiva obtenemos el resto de términos de la sucesión y podemos inferir el término general:

$$
\begin{aligned}
&M_1 = 0\\
&M_2 = M_1 + 1 = 0 + 1 = 1\\
&M_3 = M_2 + 1 = 1 + 1 = 2\\
&M_4 = M_3 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3\\
&\dots\\
&M_n = M_{n-1} + 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n - 1
\end{aligned}
$$

Por tanto $\boxed{M_n = n - 1 \sim n}$.

b) (5 puntos) El "peor caso" se da cuando en cada paso recursivo hay que realizar $n-1$ comparaciones para insertar el elemento n-ésimo. Dar una expresión recursiva para P_n: número de comparaciones que realiza el *método de inserción* en este peor caso. A partir de ella, hallar su término general y su orden de magnitud.

SOLUCIÓN: Como nos dicen que si la lista tiene un solo elemento ($n = 1$) ya es un conjunto ordenado, el número de comparaciones será 0, por lo que también $P_1 = 0$.
En este caso, nos dicen que "hay que realizar $n-1$ comparaciones para insertar el elemento n-ésimo", por lo que el número total de comparaciones serán $n-1$ más las que se hayan realizado para ordenar los otros $n-1$ elementos de la lista (P_{n-1}). Por tanto, la relación recursiva será $P_n = P_{n-1} + (n-1)$
A partir de la relación recursiva obtenemos el resto de términos de la sucesión y podemos inferir el término general:

$$
\begin{aligned}
&P_1 = 0\\
&P_2 = P_1 + (2-1) = 0 + 1 = 1\\
&P_3 = P_2 + (3-1) = 1 + 2\\
&P_4 = P_3 + (4-1) = 1 + 2 + 3\\
&P_5 = P_4 + (5-1) = 1 + 2 + 3 + 4\\
&\dots\\
&P_n = P_{n-1} + (n-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1)
\end{aligned}
$$

Se tiene la suma de una sucesión aritmética: $P_n = \dfrac{(1+(n-1))(n-1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n^2-n}{2}$.

Por tanto, $\boxed{P_n = \dfrac{n^2-n}{2} \sim n^2}$.

c) (2 puntos) Si G_n mide el número de comparaciones que realiza este algoritmo en un caso general describir su comportamiento asintótico en términos de la notación O grande y Ω.

SOLUCIÓN: Como en los apartados anteriores hemos hallado el "mejor caso" (menor número de comparaciones) y el "peor caso" (mayor número de comparaciones), se verifica que $M_n \leq G_n \leq P_n$ para cualquier valor de n. De esa desigualdad y lo visto en los apratados anteriores se deduce lo siguiente:

- Por la definición de O grande, se tiene que $G_n \in O(P_n)$. Y como $P_n \sim n^2$, se deduce que $\boxed{G_n \in O(n^2)}$.
- Por la definición de Ω, se tiene que $G_n \in \Omega(M_n)$. Y como $M_n \sim n$, se deduce que $\boxed{G_n \in \Omega(n)}$.

Se tiene que el número de comparaciones G_n está minorado por n y mayorado por n^2.

Problema 6 (12 %)

Estudiar la convergencia de cada una de estas tres series justificando adecuadamente los criterios utilizados para cada caso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n^2}{(n+1)!} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n^4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n}}$$

SOLUCIÓN:

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5n^2}{(n+1)!}$, empleamos el criterio del cociente (D'Alembert):

  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{5(n+1)^2}{(n+2)!}}{\frac{5n^2}{(n+1)!}} = \lim \frac{5(n+1)^2(n+1)!}{5n^2(n+2)!} = \lim \frac{5(n+1)^2(n+1)!}{5n^2(n+2)(n+1)!} =$
  $\lim \frac{(n+1)^2}{n^2(n+2)}$;
  Atendiendo al grado de los polinomios de numerador y denominador, ese límite equivale a: $\lim \frac{n^2}{n^3} = 0 < 1$, así que por el criterio del cociente, la serie es convergente.

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n^4}$, el término general $a_n = \frac{3^n}{n^4}$ verifica que $\lim \frac{3^n}{n^4} = \infty \neq 0$, ya que, de acuerdo a la jerarquía de infinitos, $3^n \gg n^4$. Por lo tanto, no se cumple la condición necesaria de convergencia ($\lim a_n = 0$), por lo que la serie es divergente.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n}}$, al tratarse de una serie de términos arbitrarios, se emplea el criterio de convergencia absoluta. Por lo tanto se estudia la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n}}\right|$, donde:

  $$\left|\frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+5n}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}.$$

  Dado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente porque se trata de una serie armónica general, cuyo exponente del denominador es $3/2 > 1$, aplicando el criterio de comparación, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n}}\right|$ también será convergente.

  Luego, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n^3+5n}}$ es absolutamente convergente y por lo tanto, convergente.

Problema 7 (10 %)

Sabiendo que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si y solo si $x \in (-1,1)$ se pide:

a) *(2 puntos)* Probar que el desarrollo en serie de potencias de la función $\dfrac{1}{1+x^2}$ es $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ especificando su campo de validez.

SOLUCIÓN: Observando que el desarrollo anterior es válido si y solo si $|x|<1$ se tiene que:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \underbrace{=\!=\!=}_{\text{sii } |-x^2|<1} \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Luego ciertamente esta serie es la serie de potencias de la función centrada en $x_0 = 0$ y es válida si y solo si $|-x^2| < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. Es decir, el campo de validez es $(-1,1)$.

b) *(6 puntos)* Probar que $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ para todo $x \in [-1,1]$.

SOLUCIÓN: Dado que $\arctan(x)$ es una primitiva de la función $\dfrac{1}{1+x^2}$, aplicamos el teorema de integración de series de potencias sobre el desarrollo obtenido en el apartado anterior:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Buscamos el valor de la constante de integración C para que la primitiva sea $\arctan(x)$.

$$\arctan(x) = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Para ello imponemos que valga lo mismo en $x = 0 \in (-1,1)$:

$$0 = \arctan(0) = C + 0 - \frac{0^3}{3} + \frac{0^5}{5} - \frac{0^7}{7} + \cdots = C$$

Luego, por el teorema de integración de series de potencias se tiene que:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Falta estudiar si los extremos del intervalo están en el campo de validez del desarrollo utilizando el Teorema de Abel:

- Para $x = -1$:

  - $\arctan(x)$ es continua en $x = -1$.
  - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(-1)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ que es convergente por el criterio de Leibniz: es alternada y el valor absoluto de su término general es $\dfrac{1}{2n+1}$, que es una sucesión decreciente con límite 0.

  Por tanto, $x = -1$ está en el campo de validez del desarrollo.

- Para $x = 1$:
  - arctan(x) es continua en $x = 1$.
  - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(1)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ que, igual que en caso anterior, es alternada y converge por el criterio de Leibniz.

  Por tanto, $x = 1$ también está en el campo de validez del desarrollo.

Conclusión, se puede asegurar que el campo de validez del desarrollo de arctan(x) es el intervalo $CV = [-1, 1]$.

c) *(2 puntos)* Estudiar razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas:

- $\displaystyle \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
- $\displaystyle \arctan(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1}$

Solución: Es fácil comprobar que estas series se obtienen al sustituir en el desarrollo del arctan(x) la x por 1 y 2 respectivamente. Sin embargo mientras que $x = 1$ está en el campo de validez del desarrollo de esta función, y por tanto $\displaystyle \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $x = 2 \notin CV$ y por tanto $\displaystyle \arctan(2) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1}$.