

Maestría en Computo Estadístico
Inferencia Estadística
Tarea 3

10 de septiembre de 2020

Enrique Santibáñez Cortés

Repositorio de Git: [Tarea 3, IE](#).

Escriba de manera concisa y clara sus resultados, justificando los pasos necesarios. Serán descontados puntos de los ejercicios mal escritos y que contenga ecuaciones sin una estructura gramatical adecuada. Las conclusiones deben escribirse en el contexto del problema. Todos los programas y simulaciones tienen que realizarse en R.

1. Resuelva lo siguiente:

- a) Sea $X \sim \text{Exponencial}(\beta)$. Encuentre $\mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq k\sigma_X)$ para $k > 1$. Compare esta probabilidad con la que obtiene de la desigualdad de Chebyshev.

RESPUESTA

Cómo $X \sim \text{Exponencial}(\beta)$ entonces $\mu_X = \beta$ y $\sigma_X = \sqrt{\beta^2} = \beta$. Por lo que:

$$\mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq k\sigma_X) = \mathbb{P}(|X - \mu_X|^2 \geq k^2\sigma_X^2)$$

- b) Sean $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$ y $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Usando las desigualdades de Chebyshev y Hoeffding, acote $\mathbb{P}(|\bar{X} - p| > \epsilon)$. Demuestre que para n grande la cota de Hoeffding es más pequeña que la cota de Chebyshev. ¿En qué beneficia esto?

2. Sean $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$.

- a) Sea $\alpha > 0$ fijo y defina

$$\epsilon_n = \sqrt{\frac{1}{2n} \log \left(\frac{2}{\alpha} \right)}.$$

Sea $\hat{p} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Defina $C_n = (\hat{p}_n - \epsilon_n, \hat{p}_n + \epsilon_n)$. Use la desigualdad de Hoeffding para demostrar que

$$\mathbb{P}(C_n \text{ contiene a } p) \neq 1 - \alpha$$

. Diremos que C_n es un $(1 - \alpha)$ -intervalo de confianza para p . En la práctica, se trunca el intervalo de tal manera de que no vaya debajo del 0 o arriba del 1.

- b) Sea $\alpha = 0.05$ y $p = 0.4$. Mediante simulaciones, realice un estudio para ver que tan a menudo el intervalo de confianza contiene a p (la cobertura). Haga esto para $n = 10, 50, 100, 250, 500, 1000, 2500, 5000, 10000$. Grafique la cobertura contra n .
- c) Grafique la longitud del intervalo contra n . Suponga que deseamos que la longitud del intervalo sea menor que 0.05. ¿Qué tan grande debe ser n ?

3. Una partícula se encuentra inicialmente en el origen de la recta real y se mueve en saltos de una unidad. Para cada salto, la probabilidad de que la partícula salte una unidad a la izquierda es p y la probabilidad de que salte una unidad a la derecha es $1 - p$. Denotemos por X_n a la posición de la partícula después de n unidades. Encuentre $\mathbb{E}(X_n)$ y $\text{Var}(X_n)$. Esto se conoce como una caminata aleatoria en una dimensión.

7. Demuestre que la fórmula de la densidad de la Beta integra 1.

Honors problems

1.

- a) Sea X una v.a. discreta con media finita y que toma valores en el conjunto $0, 1, 2, \dots$. Demuestre que

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

- b) Sea X una v.a. continua no-negativa con media finita, función de densidad f y función de distribución F . Demuestre que

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt.$$

- c) ¿Cómo cambia la fórmula del caso anterior cuando el soporte de X es todo \mathbb{R} ?

2. Sea X una v.a. continua con primer momento finito. Demuestre que la función $G(c) = E(|X - c|)$, $c \in \mathbb{R}$, se minimiza en $c = M(X)$ para $M(X)$ la mediana de X .