Estadística Multivariada: Tarea 2.

Nota: Subirla a la plataforma en un zip que contenga el código y el archivo pdf con los resultados.

Ejercicio 1. Demuestre la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x_i}-\mu)(\mathbf{x_i}-\mu)' = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i-\bar{\mathbf{x}})' + n(\bar{\mathbf{x}}_i-\mu)(\bar{\mathbf{x}}_i-\mu)', \tag{1}$$

donde $\mathbf{x_i} \sim N_p(\mu, \mathbf{\Sigma})$, $i = 1, \ldots, n$.

Ejercicio 2. Para el resultado:
Para una matriz $\mathbf{B}$ $(p \times p)$*, simétrica y positiva definida y un escalar* $b > 0$*, se sigue que*

$$\frac{1}{|\mathbf{\Sigma}|^b} e^{-tr\left(\mathbf{\Sigma^{-1}}\boldsymbol{B}\right)/2} \leq \frac{1}{|\mathbf{B}|^b}(2b)^{pb}e^{-pb}$$

para toda $\mathbf{\Sigma}$ *positiva definida de dimensión* $p \times p$;

compruebe que la igualdad se sostiene únicamente para

$$\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{2b}\mathbf{B}$$

Ejercicio 3. Justifique el siguiente resultado para $p = 2$:
Los contornos

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\mathbf{\Sigma^{-1}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{c^2}$$

forman elipsoides concéntricos centrados en μ *y la longitud de los ejes esta dada por* $\pm c\sqrt{\lambda_i}e_i$, *donde* $\Sigma e_i = \lambda_i e_i$ *para* $i = 1, \ldots, p$.

Ejercicio 4. En climas nórdicos, las carreteras debe ser limpiadas de la nieve rápidamente después de una tormenta. Una de las medidas de la severidad de la tormenta es $x_1 =$ *duración en horas*, mientras que la efectividad de la limpieza de la nieve se puede cuantificar por $x_2 =$ *horas de trabajo* para limpiar la nieve. En la tabla inferior se muestran los resultados de 25 incidentes en Wisconsin.

(a) Detecte cualquier posible dato atípico mediante el diagrama de dispersión de las variables originales.

x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
12.5	13.7	9.0	24.4	3.5	26.1
14.5	16.5	6.5	18.2	8.0	14.5
8.0	17.4	10.5	22.0	17.5	42.3
9.0	11.0	10.0	32.5	10.5	17.5
19.5	23.6	4.5	18.7	12.0	21.8
8.0	13.2	7.0	15.8	6.0	10.4
9.0	32.1	8.5	15.6	13.0	25.6
7.0	12.3	6.5	12.0		
7.0	11.8	8.0	12.8		

(b) Determine la potencia de la transformación $\hat{\lambda}_1$ que convierte los valores de x_1 aproximadamente a normales. Construya el *Q-Q plot* de las observaciones transformadas.

(c) Determine la potencia de la transformación $\hat{\lambda}_2$ que convierte los valores de x_2 aproximadamente a normales. Construya el *Q-Q plot* de las observaciones transformadas.

(d) Determine la potencia de la transformación que convierte las observaciones bivariadas en aproximadamente normales.

Ejercicio 5. Para p y n fijos, genérese una muestra de tamaño N de una ley $T_2(p, n)$ de Hotelling. Para esto construya una función que tome como entradas los valores de n, p, N, y utilice un generador de números aleatorios gaussianos. Represénte los resultados mediante un histograma, y haga pruebas para diferentes valores de entrada.