

Maestría en Computo Estadístico
Álgebra Matricial
Tarea 1

1 de septiembre de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: [Tarea 1, IE](#).

1. Si A es una matriz $m \times n$ dada por bloques de vectores columna como

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots a_n)$$

y B es una matriz $n \times p$ dada por bloques de vectores renglón como

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Demuestre que

$$AB = \sum_{i=1}^n a_i v_i.$$

RESPUESTA

Como A es una matriz $m \times n$ dada por bloques columnas, como

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots a_n)$$

donde a_i es un vector columna

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo podemos decir que B esta constituida por b_i vectores renglón:

$$v_i = (v_{i1} \ v_{i2} \ \cdots \ v_{in}).$$

Entonces ocupando lo anterior

$$\begin{aligned} AB &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \\ &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = \sum_{i=1}^n a_i v_i \quad \blacksquare. \end{aligned}$$

2. Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden. Demuestre que $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ si y solo si $AB = BA$.

RESPUESTA

\Rightarrow) Si $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ entonces:

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= (A - B)(A + B) \\ &= AA - BA + AB - BB \\ &= A^2 - BA + AB - B^2 \\ BA &= AB. \end{aligned}$$

\Leftarrow) Si $AB = BA$ entonces:

$$(A - B)(A + B) = AA - BA + AB - BB = A^2 - B^2.$$

Por lo tanto, queda demostrado que $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ si y solo si $AB = BA$. ■.

3. Sean A y B matrices $n \times n$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, tales que $AB = BA$. Demuestre que $A^p B^q = B^q A^p$ para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$.

RESPUESTA

Multiplicado por A^{p-1} (donde $p \in \mathbb{N}$) por la izquierda a $AB = BA$ tenemos

$$\begin{aligned} A^{p-1}AB &= A^{p-1}BA \\ &= A^{p-2}(AB)A = A^{p-2}(BA)A \\ &= A^{p-3}(AB)A^2 = A^{p-3}(BA)A^2 \\ &= \vdots \\ &= (AB)A^{p-1} = (BA)A^{p-1}. \end{aligned}$$

Simplificando de ambos lados, tenemos que $A^p B = B A^p$. Ahora multiplicamos al resultado obtenido por la matriz B^{q-1} (donde $q \in \mathbb{N}$) por la derecha tenemos

$$\begin{aligned} A^p B B^{q-1} &= B A^p B^{q-1} \\ &= B A^{p-1}(AB)B^{q-2} = B A^{p-1}(BA)B^{q-2} \\ &= B A^{p-2}(AB)AB^{q-2} = B A^{p-2}(BA)AB^{q-2} \\ &= B A^{p-3}(AB)A^2 B^{q-2} = B A^{p-3}(BA)A^2 B^{q-2} \\ &= \vdots \\ &= B(AB)A^{p-1}B^{q-2} = B(BA)A^{p-1}B^{q-2} \\ &= B^2 A^p B^{q-2} \\ &= B^2 A^{p-1}(AB)B^{q-3} = B^2 A^{p-1}(BA)B^{q-3} \\ &= B^2 A^{p-2}(AB)AB^{q-3} = B^2 A^{p-2}(BA)AB^{q-3} \\ &= B^2 A^{p-3}(AB)A^2 B^{q-3} = B^2 A^{p-3}(BA)A^2 B^{q-3} \\ &= \vdots \\ &= B^2(AB)A^{p-1}B^{q-3} = B^2(BA)A^{p-1}B^{q-3} \\ &= B^3 A^p B^{q-3} \\ &= \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
& = B^{q-1}A^{p-1}(AB) = B^{q-1}A^{p-1}(BA) \\
& = B^{q-1}A^{p-2}(AB)A = B^{q-1}A^{p-2}(BA)A \\
& = B^{q-1}A^{p-3}(AB)A^2 = B^{q-1}A^{p-3}(BA)A^2 \\
& \vdots \\
& = B^{q-1}(AB)A^{p-1} = B^{q-1}(BA)A^{p-1} \\
& = B^q A^p.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que si $AB = BA$ y para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$ se cumple que $A^p B^q = B^q A^p$ ■.

4. Se dice que una matriz cuadrada A es antisimétrica si $A = -A^t$. Demuestre que $A - A^t$ es antisimétrica.

RESPUESTA

Sea $B = A - A^t$, entonces:

$$B^t = (A - A^t)^t = A^t - A.$$

y

$$-B^t = -(A^t - A) = A - A^t.$$

Como $B = -B^t$ y como $B = A - A^t$ (por definición), podemos concluir que $A - A^t$ es antisimétrica. ■.

5. Demuestre que dada cualquier matriz cuadrada A , esta se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

RESPUESTA

Demostremos que sea A una matriz cuadrada entonces $A + A^t$ es simétrica. Sea $B = A + A^t$ entonces:

$$B^t = (A + A^t)^t = A^t + A = B.$$

Como $B = B^t$ y como $B = A + A^t$, podemos concluir que $A + A^t$ es simétrica.

Ahora,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A \\
&= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^t + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^t \\
&= \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t).
\end{aligned} \tag{1}$$

Y como ya se demostró que $A + A^t$ es simétrica y $A - A^t$ es antisimétrica para cualquier matriz cuadrada A y además como se conoce que si una matriz simétrica(antisimétrica) se multiplica por un escalar el resultado es otra matriz simétrica(antisimétrica), entonces podemos concluir que dada cualquier matriz cuadrada A se puede escribir como suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica, y estas matrices son de la forma que se muestra en (1). ■.

6. Se dice que una matriz cuadrada P es idempotente si $P^2 = P$. Si

$$A = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

y si P es idempotente, encuentre A^{500} .

RESPUESTA

Encontremos una formula para encontrar a A^n . Primero veamos que pasa cuando $n = 2, 3$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + 0 & IP + P^2 \\ 0 + 0 & 0 + P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + 0 & IP + 2P^2 \\ 0 + 0 & 0 + P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 3P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

De lo anterior y considerando $n \in \mathbb{N}$ podemos suponer que se cumple que :

$$A^n = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Demostremos lo anterior de forma inductiva:

Paso 1. Mostrar que se cumple para $n = 2, 3$ o para algún n . Por construcción se cumple este paso.

Paso 2. Suponer que se cumple para n .

Paso 3. Demostrar que se cumple para $n + 1$. Considerando el paso 2, tenemos que:

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + 0 & IP + nP^2 \\ 0 + 0 & 0 + P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & (n+1)P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Queda demostrado que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$A^n = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, utilizando la formula encontrada podemos concluir que

$$A^{500} = \begin{pmatrix} I & 500P \\ 0 & P \end{pmatrix} \quad \blacksquare.$$

7. Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$. Demuestre que $\text{tr}(AB^t) = \text{tr}(A^t B)$.

RESPUESTA

Sea $A_{m \times n}, B_{n \times m}$ matrices. Entonces se cumple que (*se demostraron en clase*):

- $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^t)$.
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Ocupando las dos propiedades de la traza anteriores tenemos que:

$$\text{tr}(AB^t) = \text{tr}((AB^t)^t) = \text{tr}(BA^t) = \text{tr}(A^t B). \quad \blacksquare.$$

8. Encuentre matrices A, B y C tales que $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$.

RESPUESTA

Por convicción definamos a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y ahora sea $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.

Entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{pmatrix}.$$

Observemos que la primera multiplicación representa a un cambio de renglones y la segunda a un cambio de columnas. Ahora multipliquemos de lado izquierdo lo anterior por la matriz C pero solo concentrarnos en los resultados de la diagonal.

$$ABC = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & \gamma_1 \\ \gamma_2 & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \end{pmatrix},$$

$$BAC = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} & \gamma_3 \\ \gamma_4 & b_{22}c_{12} + b_{21}c_{22} \end{pmatrix},$$

donde γ_i no son relevantes para este problema. Por lo que la traza de esos producto de matrices es:

$$\text{tr}(ABC) = b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \quad \text{y} \quad \text{tr}(BAC) = b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} + b_{22}c_{12} + b_{21}c_{22}.$$

De lo anterior podemos observar que si $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$,

$$\begin{aligned} b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} &\neq b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} + b_{22}c_{12} + b_{21}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} - b_{12}c_{11} - b_{11}c_{21} - b_{22}c_{12} - b_{21}c_{22} &\neq 0 \\ c_{11}(b_{21} - b_{12}) + c_{21}(b_{22} - b_{11}) + c_{12}(b_{11} - b_{22}) + c_{22}(b_{12} - b_{21}) &\neq 0 \\ (b_{21} - b_{12})(c_{11} - c_{22}) + (b_{22} - b_{11})(c_{21} - c_{12}) &\neq 0. \end{aligned}$$

Entonces de lo anterior podemos encontrar un conjunto de elementos de las matrices B y C :

$$\begin{aligned} c_{11} &> c_{22} \quad , \quad b_{21} > b_{12} \\ c_{21} &> c_{12} \quad , \quad b_{22} > b_{11} \end{aligned}$$

tal que $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Entonces una tripleta de matrices que cumple que $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$, son: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculemos la trazas para mostrar que efectivamente se cumple.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculemos la multiplicación con la matriz C :

$$\begin{aligned} ABC &= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 + 15 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 7 \end{pmatrix}, \\ BAC &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + 6 & \gamma_3 \\ \gamma_4 & 10 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & \gamma_3 \\ \gamma_4 & 14 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde γ_i no son relevantes para este problema. Por lo que la traza de esos producto de matrices es:

$$\text{tr}(ABC) = 29 + 7 = 36 \quad \text{y} \quad \text{tr}(BAC) = 18 + 14 = 32.$$

Por lo que se cumple que $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$ para las matrices propuestas. ■.

9. Sea L una matriz triangular inferior $n \times n$. Demuestre que $L = L_1 L_2 \cdots L_n$ donde L_i es la matriz $n \times n$ que se obtiene reemplazando la i -ésima columna de I_n por la i -ésima columna de L . Demuestre un resultado análogo para matrices triangulares superiores.

RESPUESTA

Sea L la matriz triangular inferior $n \times n$:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Entonces L_i están definidas como:

$$L_1 = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \dots, L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Considerando la siguiente partición por bloques de L_1 y L_2

$$L_1 = \left(\begin{array}{c|cccc} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} N_1 & \mathbf{0} \\ M_1 & I_{n-1} \end{pmatrix} \text{ y } L_2 = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

Entonces la multiplicación de L_1 y L_2 es:

$$\begin{aligned} L_1 L_2 &= \begin{pmatrix} N_1 & \mathbf{0} \\ M_1 & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 I_1 & N_1 \mathbf{0} + \mathbf{0} A_{n-1} \\ M_1 I_1 & M_1 \mathbf{0} + I_{n-1} A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & \mathbf{0} \\ M_1 & A_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora considerando la partición por bloques de $L_1 L_2$ y L_3

$$L_1 L_2 = \left(\begin{array}{cc|ccc} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} N_2 & \mathbf{0} \\ M_2 & I_{n-2} \end{pmatrix} \text{ y } L_3 = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & l_{n3} & \cdots & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Por lo que

$$(L_1 L_2) L_3 = \begin{pmatrix} N_2 & \mathbf{0} \\ M_2 & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_2 I_2 & N_2 \mathbf{0} + \mathbf{0} A_{n-2} \\ M_2 I_2 + I_{n-2} \mathbf{0} & M_2 \mathbf{0} + I_{n-2} A_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_2 & \mathbf{0} \\ M_2 & A_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Como las matrices L_i por definición provienen de la construcción de una matriz triangular inferior podemos decir que L_i igual es una matriz triangular inferior. Entonces como todas las matrices tienen la misma estructura, podemos hacer el proceso iterativo que se utilizó para calcular la multiplicación de $L_1 L_2$ y $(L_1 L_2) L_3$, para la $n - 1$ iteración que es multiplicar $L_1 L_2 \cdots L_{n-1}$ y L_n .

Particionamos la matriz $L_1 L_2 \cdots L_{n-1}$ y L_n

$$L_1 L_2 \cdots L_{n-1} = \left(\begin{array}{ccccc|c} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1\ 1} & l_{n-1\ 2} & l_{n-1\ 3} & \cdots & l_{n-1\ n-1} & 0 \\ \hline l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n\ n-1} & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} N_{n-1} & \mathbf{0} \\ M_{n-1} & I_1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$L_n = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix}.$$

Por lo que

$$(L_1 L_2 \cdots L_{n-1}) L_n = \begin{pmatrix} N_{n-1} & \mathbf{0} \\ M_{n-1} & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{n-1} I_{n-1} & N_{n-1} \mathbf{0} + \mathbf{0} A_1 \\ M_{n-1} I_{n-1} + I_1 \mathbf{0} & M_{n-1} \mathbf{0} + I_1 A_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} N_{n-1} & \mathbf{0} \\ M_{n-1} & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1\ 1} & l_{n-1\ 2} & l_{n-1\ 3} & \cdots & l_{n-1\ n-1} & 0 \\ \hline l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n\ n-1} & l_{nn} \end{pmatrix} = L.$$

Por lo tanto, queda demostrado que $L = L_1 L_2 \cdots L_n$ donde L_i es la matriz $n \times n$ que se obtiene reemplazando la i -ésima columna de I_n por la i -ésima columna de L . ■.

Ahora un resultado análogo para matrices triangulares superiores sería: Sea U una matriz triangular superior $n \times n$, entonces $U = U_n U_{n-1} \cdots U_1$ donde U_i es la matriz $n \times n$ que se obtiene reemplazando el i -ésimo renglón de I_n por el i -ésimo renglón de U .

Para demostrar lo anterior ocupemos lo demostrado con las matrices triangulares inferiores. Como ya se demostró que si L matriz triangular inferior se puede escribir como producto de matrices $L_1 L_2 \cdots L_n$ donde L_i es la matriz $n \times n$ que se obtiene reemplazando la i -ésima columna de I_n por la i -ésima columna de L . Entonces ocupando este hecho podemos ver que

$$\begin{aligned} L^t &= (L_1 L_2 \cdots L_n)^t \\ &= L_n^t L_{n-1}^t \cdots L_1^t. \end{aligned}$$

Por las propiedades de matrices inferiores/superiores (vistas en clase) sabemos que si L es inferior esto implica que L^t sea una matriz superior con

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad L^t = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & \cdots & l_{n2} \\ 0 & 0 & l_{33} & \cdots & l_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ahora si observamos a

$$L_i^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{ii} & l_{i+1\ i} & \cdots & l_{ni} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

podemos observar que L_i^t representa a la matriz $n \times n$ que se obtiene reemplazando el i -ésimo renglón de I_n por el i -ésimo renglón de L^t . Por lo que queda demostrado que si U es una matriz triangular superior $n \times n$, entonces $U = U_n U_{n-1} \cdots U_1$ donde U_i es la matriz $n \times n$ que se obtiene reemplazando el i -ésimo renglón de I_n por el i -ésimo renglón de U . ■.

10. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño n , triangular superior tal que $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \dots, n$. Demuestre que para $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, \min(n, i+p-1)$ se cumple que $b_{ij} = 0$ donde $A^p = (b_{ij})$ y p es un entero positivo.

RESPUESTA

Para hacer más sencilla la demostración cambiemos la notación de i, j . Consideremos dos casos posibles para el valor de p , cuando $p + k = n$ donde $k \in \mathbb{N}$ es decir $p < n$ y el otro caso cuando $p \geq n$. Caso 1, cuando $p + k = n$ donde $k \in \mathbb{N}$, observemos que si $i \leq k$ esto implica que $j = 1, \dots, i + p - 1$, y si $i > k$ implica que $j = 1, \dots, n$. Ahora busquemos $\max(j - i)$, cuando $i \leq k \Rightarrow \max(j - i) = i + p - 1 - i = p - 1$, ahora si $i > k \Rightarrow \max(j - i) = n - (k + 1) = n - (n - p + 1) = p - 1$, por lo que observemos que sin importar i el $\max(j - i) = p - 1 < p$. Caso 2, si $p \geq n$, tenemos que $\min(n, i + p - 1) = n$ para $i = 1, \dots, n$, por lo que el $\max(j - i) = n - i < n \leq p$. Por lo que podemos decir $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, \min(n, i + p - 1)$ es equivalente a decir que $j - i < p$.

Entonces demostremos que si A es una matriz cuadrada de tamaño n , triangular superior tal que $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \dots, n$, entonces se cumple que $b_{ij} = 0$ para $j - i < p$ donde $A^p = (b_{ij})$ y p un entero positivo. Para ello ocuparemos inducción matemática.

Paso 1. Mostrar que se cumple para $p = 2, 3$ o para algún p . Si tomamos a $p = 1$, tenemos que $A^1 = (b_{ij}) = (a_{ij}) = A$, pero como A una matriz cuadrada de tamaño n , triangular superior tal que $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \dots, n$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

entonces es sencillo ver que se cumple que para cuando $j - i < 1$ se cumple que $b_{ij} = 0$.

Paso 2. Suponer que se cumple para $p - 1$. Es decir, suponer que para $p - 1$ se cumple que $(b_{ij}) = 0$ para $j - i < p - 1$ donde $A^{p-1} = (b_{ij})$.

Paso 3. Demostrar que se cumple para p . Por definición de multiplicación de matrices tenemos que:

$$A_{ij}^p = (AA^{p-1})_{ij} = \sum_{r=1}^n A_{ir}A_{rj}^{p-1} = \sum_{r=1}^i A_{ir}A_{rj}^{p-1} + \sum_{r=i+1}^n A_{ir}A_{rj}^{p-1}.$$

Observemos que en la primera suma como $r \leq i$ y como A_{ij} una matriz superior podemos concluir que $A_{ir} = 0$.

$$A_{ij}^p = \sum_{r=1}^i 0A_{rj}^{p-1} + \sum_{r=i+1}^n A_{ir}A_{rj}^{p-1} = \sum_{r=i+1}^n A_{ir}A_{rj}^{p-1}.$$

Ahora si consideramos todos los elementos de la matriz que cumple que $j - i < p$ en lo anterior, tenemos que $r = i + 1 > j - p + 1 = j - (p - 1)$ por lo que implica que $A_{rj}^{p-1} = 0$ debido a que $j - r < j - j - (p - 1) = p - 1$ por el paso dos de la inducción. Por lo que para $j - i < p$ queda demostrado que

$$A_{ij}^p = 0. \quad \blacksquare.$$

Por lo que concluimos que si A matriz cuadrada triangular superior tal que $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \dots, n$. entonces se cumple que $b_{ij} = 0$ para $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, \min(n, i + p - 1)$ donde $A^p = (b_{ij})$ y p es un entero positivo.