Álgebra Matricial
Tarea 9

Todos los cálculos deben ser a mano.

1. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
Encuentre una matriz ortogonal P y una diagonal D tal que $A = PDP^t$.

2. Diagonalize ortogonalmente la matriz simétrica
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Encuentre la descomposición espectral de la matriz simétrica
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Diga quién es la matriz de la forma cuadrática
$$x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$$
y encuentre un cambio de variable para que se transforme en una sin productos cruzados.

5. Encuentre los valores singulares de
$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

6. Encuentre una descomposición en valores singulares de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Encuentre una descomposición en valores singulares de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

8. Encuentre la seudoinversa de las matrices de los ejercicios 5,6 y 7.

9. Dado el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 &= 1 \\ x_1 + \ x_2 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 &= 0, \end{aligned}$$

si es consistente, encuentre la única solución que tiene norma mínima; si es inconsistente, encuentre la mejor aproximación a una solución que tenga norma mínima.

10. Sean A, B matrices $n \times n$ semi positivas definidas tales que $A + B = 0$. Demuestre que $A = B = 0$.

11. Sea A una matriz simétrica $n \times n$ y $Q(x)$ la forma cuadrática asociada. Si Q es positiva definida, demuestre que las entradas diagonales de A son positivas.

12. Sea A una matriz $m \times n$. Al aplicar una sucesión de operaciones elementales obtenemos que

$$EAP = \begin{pmatrix} T & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde T es una matriz triangular superior con elementos diagonales no cero, P es una matriz de permutación y B y los bloques de cero tienen los tamaños apropiados (otra forma de ver esto, es recordando la descomposición normal de una matriz). Demuestre que

$$G = P \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E,$$

es una inversa generalizada de A. ¿Cumple G con las propiedades de una inversa de Moore-Penrose? Si es cierto, demuéstrelo, y si no escriba un ejemplo que muestre una de las propiedades que no cumple para serlo. Si A es diagonalizable, ¿puede pensar en una forma para G en este caso y demostrar que es una inversa generalizada?