Optimización

Maestría en Cómputo Estadístico

Fecha de entrega: 28 de abril de 2021

1. Dadas las siguientes funciones:

   - $f(\vec{x}) = 10\left(x_2 - x_1^2\right)^2 + (1 - x_1)^2$
   - $f(\vec{x}) = 30 + \sum_{i=1}^{3}\left(x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i)\right)$
   - $f(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 - 7)^2 + (2x_1 + x_2 - 5)^2$
   - $f(\vec{x}) = 0.25\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 0.5(x_1 x_2)$

   Resuelva considerando el punto inicial $\vec{x}^{(0)} = (0, 0)$ y:

   (a) Gradiente descendente con un tamaño de paso de 0.1.

   (b) Método de Newton.

   (c) Gradiente descendente con diferencias finitas, considerando un tamaño de paso de 0.1 y una diferencia de ± 0.05.

2. Utilizando la condición de optimalidad de primer orden para problemas de optimización con restricciones, encuentre la solución óptima de los siguientes problemas:

   (a) $f(\vec{x}) = (1 - x_1)^2 + 100\left(x_2 - x_1^2\right)^2$, sujeto a $(x_1 - 1)^3 - x_2 \leq 0$ y $x_1 + x_2 - 2 \leq 0$

   (b) $f(\vec{x}) = (1 - x_1)^2 + 100\left(x_2 - x_1^2\right)^2$, sujeto a $x_1^2 + x_2^2 \leq 2$

3. Dado la descomposición del problema de optimización de la SVM:

$$\begin{aligned} \min\ & \frac{1}{2}\vec{\alpha_B}^T \mathbf{Q_{BB}} \vec{\alpha_B} - \left(\vec{e_B}^T - \vec{\alpha_N}\mathbf{Q_{NB}}\right)\vec{\alpha_B} + \left(\frac{1}{2}\vec{\alpha_N}^T \mathbf{Q_{NN}} \vec{\alpha_N} - \vec{e_N}^T \vec{\alpha_N}\right) \\ \text{subect to: } & \vec{\alpha_B}^T \vec{y_B} = z \end{aligned} \tag{1}$$

   donde $z = -\vec{\alpha_N}^T \vec{y_N}$ y B y N representan el subconjunto de variables básicas y no básicas.

   Considere el algoritmo de SMO, que selecciona las variables básicas i y j. Demuestre que el gradiente de α_i de la Ecuación (1) es equivalente a:

$$\nabla_{\hat{\alpha}_i} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_i \alpha_k Q_{i,k} + \alpha_j \alpha_k Q_{j,k}\right) - 2 & \text{si } y_i = y_j \\ \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_i \alpha_k Q_{i,k} - \alpha_j \alpha_k Q_{j,k}\right) & \text{si } y_i \neq y_j \end{cases} \tag{2}$$

4. Formule el problema de regresión con regularización como un problema de programación cuadrática e implemente una función en Python que reciba los datos y determine los coeficientes. TIP: Use los multiplicadores de Lagrange.