

## Definición

Sea  $A$  una matriz de tamaño  $m \times n$ . Se dice que  $A$  es una matriz particionada o por bloques si se puede escribir como una matriz

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

donde cada una de las entradas  $A_{ij}$  es a su vez una matriz de tamaño  $m_i \times n_j$  y  $\sum_{i=1}^p m_i = m$ ,  $\sum_{j=1}^q n_j = n$ .

## Proposición

$$A^t = \begin{pmatrix} A_{11}^t & A_{21}^t & \cdots & A_{p1}^t \\ A_{12}^t & A_{22}^t & \cdots & A_{p2}^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1q}^t & A_{2q}^t & \cdots & A_{pq}^t \end{pmatrix}_{n \times m}$$

Sumar y multiplicar matrices por bloques para que los bloques sean tratados como si fueran elementos requiere condiciones adicionales a las que ya se tienen.

## Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{n \times m}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 3 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}_{n \times m}$$

Sea  $A$  una matriz cuadrada de tamaño  $m \times n$  y  $x$  un vector  $n \times 1$ .  
Si  $A$  está dada por bloques columna por

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n),$$

es decir  $a_i$  es un vector columna  $m \times 1$  y

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} Ax &= (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n \end{aligned}$$

Una combinación lineal de matrices es una suma del tipo

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k$$

donde las  $A_i$  son matrices y los  $\alpha_i$  números reales.

$Ax$  es una combinación lineal de las columnas de  $A$

Análogamente sea  $A$  una matriz cuadrada de tamaño  $m \times n$  y  $y$  un vector horizontal  $1 \times m$ . Si  $A$  está dada por bloques renglón por

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix},$$

es decir  $u_i$  es un vector renglón  $1 \times n$  y

$$y = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m),$$

entonces

$$\begin{aligned} yA &= (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \\ &= y_1 u_1 + y_2 u_2 + \cdots + y_m u_m \end{aligned}$$

Luego,  $yA$  es una combinación lineal de los renglones de  $A$ .

En general, un producto matricial puede escribirse como

$$AB = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_p) = \begin{pmatrix} u_1 b_1 & u_1 b_2 & \cdots & u_1 b_p \\ u_2 b_1 & u_2 b_2 & \cdots & u_2 b_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

donde  $A$  tiene bloques de vectores renglón y  $B$  tiene bloques de vectores columna.

Si ahora  $A$  tiene bloques de vectores columna y  $B$  tiene bloques de vectores renglón, entonces el producto está dado por la suma de matrices dadas por el producto exterior

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum a_i v_i$$



## Definición

Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz cuadrada de tamaño  $n$ . La traza de  $A$  es

$$\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

## Proposición

Sean  $A, B$  matrices cuadradas de tamaño  $n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- i)  $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^t)$
- ii)  $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$
- iii)  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

## Proposición

Sean  $A_{m \times n}$ ,  $B_{n \times m}$  matrices. Entonces  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ ,

## Proposición

Sean  $u, v$  vectores  $m \times 1$ . Entonces  $\text{tr}(uv^t) = u^t v = v^t u$ .

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA)$$

## Ejemplo

Sea  $A$  una matriz cuadrada. Encuentre una matriz cuadrada  $X$  tal que  $AX - XA = I$

## Definición

*$P$  es una matriz de permutación de tamaño  $n$  si se obtiene de permutar las columnas o renglones de la matriz identidad  $I_n$ .*

Equivalentemente:

## Definición

*Una matriz de permutación de tamaño  $n$  es una matriz cuadrada tal que cada columna cada renglón contiene exactamente un 1 y 0 en los demás lados.*

Si  $e_i$  es el vector canónico y

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

por bloques renglón y columna respectivamente y  $P$  es una matriz de permutación, entonces

$$PA = \begin{pmatrix} e_{i1}^t \\ e_{i2}^t \\ \vdots \\ e_{im}^t \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e_{i1}^t A \\ e_{i2}^t A \\ \vdots \\ e_{im}^t A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{im} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AQ &= A(e_{j1} \quad e_{j2} \quad \cdots \quad e_{jn}) = (Ae_{j1} \quad Ae_{j2} \quad \cdots \quad Ae_{jn}) \\ &= (a_{j1} \quad a_{j2} \quad \cdots \quad a_{jn}) \end{aligned}$$

## Definición

*Una matriz cuadrada  $A = (a_{ij})$  es triangular superior si  $a_{ij} = 0$ ,  $i > j$ .  $A$  es triangular inferior si  $a_{ij} = 0$ ,  $j > i$ .  $A$  es triangular si es triangular inferior o superior*

## Proposición

*Sean  $A, B$  matrices cuadradas de tamaño  $n$ .*

- i) Si  $A$  es triangular superior (inferior) entonces  $A^t$  es triangular inferior(superior).*
- ii) Si  $A$  y  $B$  son triangulares superiores (inferiores) entonces  $AB$  es triangular superior(inferior).*

## Definición

*Sea  $A$  una matriz cuadrada. Si existe un entero positivo  $k$  tal que  $A^k = 0$ , se dice que  $A$  es nilpotente.*

## Proposición

*Sean  $A_{n \times n}$  una matriz triangular con entradas diagonales cero. Entonces  $A$  es nilpotente. De hecho,  $A^n = 0$ .*

## Definición

*Una matriz cuadrada  $A = (a_{ij})$  es Hessenberg superior si  $a_{ij} = 0$ ,  $i > j + 1$ .  $A$  es Hessenberg inferior si  $a_{ij} = 0$ ,  $j > i + 1$ .  $A$  es Hessenberg si es Hessenberg inferior o superior.*

Si  $H$  es Hessenberg superior (inferior) entonces  $A^t$  es Hessenberg inferior(superior).

Si  $H$  es Hessenberg y simétrica, se le llama tridiagonal.

Se pueden definir bidiagonal superior e inferior a partir de una tridiagonal.

Una matriz diagonal es Hessenberg.

El producto de matrices Hessenberg no necesariamente resulta del mismo tipo.

### Proposición

*Sean  $H$  una matriz Hessenberg superior (inferior) triangular superior (inferior). Entonces  $TH$  y  $HT$  son ambas Hessenberg superiores (inferiores).*

Una matriz es sparse, si la mayoría de sus entradas son cero. Es densa si la mayoría de sus entradas es distinta de cero.



## Definición

*Una matriz cuadrada  $A = (a_{ij})$  es una matriz banda si existen enteros  $p_1, p_2 \geq 0$  tales que  $a_{ij} = 0$  cuando  $i > j + p_1$  o  $j > i + p_2$ .  $p_1$  y  $p_2$  se llaman el ancho de banda inferior y superior respectivamente; El ancho de banda de la matriz es  $p_1 + p_2 + 1$*

# Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales de  $m$  ecuaciones y  $n$  variables es un sistema del tipo

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots = \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Los  $a_{ij}$  son escalares fijos llamados coeficientes y las  $x_i$  son las variables. Si  $m = n$  el sistema se llama cuadrado y rectangular de otra manera.

Una solución es una  $n$ -eada  $(s_1, \cdots, s_n)$  que hace que las ecuaciones sean ciertas al mismo tiempo.

# Representación matricial de un sistema lineal

Todo sistema se puede representar por una ecuación matricial del tipo  $Ax = b$ .

La matriz de coeficientes del sistema  $A$  está dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

En representación matricial, una solución es un vector

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

que satisface

$$As = b$$

Un sistema  $Ax = b$  puede tener

- i) Solución única
- ii) Un número infinito de soluciones
- iii) No solución

## Proposición

*Si un sistema  $Ax = b$  tiene más de una solución entonces tiene un número infinito de soluciones.*

## Definición

*Un sistema  $Ax = b$  es consistente si tiene al menos una solución e inconsistente si no.*

## Definición

*Dada una matriz, una operación elemental por renglones es una de las siguientes:*

- i) Tipo I: intercambiar dos renglones de la matriz*
- ii) Tipo II: multiplicar un renglón por un escalar distinto de cero.*
- iii) Tipo III: reemplazar un renglón por la suma de ese renglón con el múltiplo escalar otro renglón*

## Proposición

*Si se aplica las mismas operaciones por renglón a  $A$  y  $b$  en el sistema  $Ax = b$ , la solución del sistema sigue siendo la misma.*

La matriz de coeficientes aumentada del sistema está dada por

$$\left( \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)_{m \times n}$$

De esta forma aplicar operaciones por renglones a la matriz aumentada  $(A|b)$  es equivalente a aplicarlas en ambos lados de la ecuación  $Ax = b$ .

Sea  $U$  la matriz dada por bloques renglón o columna

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Una matriz  $U$  tiene forma escalonada por renglones si se cumple:

- ▶ Si el primer elemento no cero en un renglón  $u_i$  está en la posición  $j$ , entonces todas las entradas abajo de la posición  $i$  en las columnas  $v_1, \dots, v_j$  son cero.
- ▶ Si el renglón  $u_i$  es cero, entonces todos los renglones abajo de él son vectores de ceros.

Los pivotes son las primeras entradas no cero en cada renglón.



El método de Gauss o de eliminación Gaussiana consiste en llevar una matriz aumentada correspondiente a un sistema  $Ax = b$  a una forma escalonada por renglones.

En una matriz cuadrada  $A_{n \times n}$ , correspondiente al sistema  $Ax = b$ , obtenemos un nuevo sistema  $Ux = b'$  con matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & b'_1 \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} & b'_n \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Las soluciones del sistema cuadrado están dadas entonces por: 1.

$$x_n = b'_n / u_{nn}.$$

2. Recursivamente:

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right)$$

para  $i = n, n-1, \dots, 2, 1$ .

Si el sistema es rectangular  $n > m$ , el sistema reducido tendrá mas incógnitas que ecuaciones por lo que se deben seleccionar algunas variables que se llamaran básicas y las restantes serán libres.

Usualmente se escogen los pivotes como básicas y las restantes como libres. Una vez seleccionadas se hace sustitución hacia atrás y se encuentra una solución general.

Por medio de eliminación Gaussiana podemos saber si un sistema es inconsistente o no: Un sistema es inconsistente si y solo si al reducirlo se encuentra un renglón (en la matriz aumentada) del tipo  $(0 \dots 0, \alpha)$

## Teorema

*Sea  $A$  una matriz y sean  $U_1$ ,  $U_2$  dos formas escalonadas por renglones de  $A$  distintas (i.e. se emplearon dos sucesiones distintas de operaciones elementales). Entonces el número de pivotes de  $U_1$  y  $U_2$  es el mismo.*

De esta manera, no importa que sucesión de operaciones elementales usemos, el número de pivotes permanece constante, y en consecuencia en las mismas posiciones. Por lo tanto el número de pivotes es un invariante de  $A$ .

El número de pivotes cuenta el número de variables básicas por lo que estás son siempre el mismo número y similarmente para las libres.

Sea  $U$  cualquier matriz en forma reducida por renglones obtenida de  $A$ , entonces:

$$\begin{aligned}\text{Número de pivotes de } A &= \text{Número de pivotes de } U \\ &= \text{Número de renglones no cero de } U \\ &= \text{Número de columnas básicas de } U\end{aligned}$$

### Definición

*El rango de  $A$  es el número de pivotes de  $A$ .*

Una matriz  $E$  tiene forma escalonada reducida por renglones si se cumple:

- ▶  $E$  Está en forma escalonada por renglones
- ▶ El primer elemento no cero en cada renglón es 1.
- ▶ Todas las entradas arriba de cada pivote son 0.

El método de Gauss-Jordan o de eliminación Gauss-Jordan consiste en llevar una matriz aumentada correspondiente a un sistema  $Ax = b$  a una forma escalonada por renglones.

Las columnas básicas de  $E_{m \times n}$  son  $r$  vectores canónicos en  $R^m$ .

Siempre podemos encontrar una matriz de permutación  $P$  tal que

$$EP = \begin{pmatrix} I_r & J \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Definición

Una matriz elemental de orden  $n \times n$  es una matriz cuadrada del tipo  $I_n + uv^t$  donde  $u, v$  son vectores  $n \times 1$  tales que  $v^t u \neq -1$ .

## Definición

i) Una matriz elemental de tipo I es una del tipo

$$E_{ij} = I - (e_j - e_i)(e_j - e_i)^t$$

ii) Una matriz elemental de tipo II es una del tipo

$$E_i(\alpha) = I + (\alpha - 1)e_i e_i^t$$

iii) Una matriz elemental de tipo III es una del tipo

$$E_{ij}(\beta) = I + \beta e_j e_i^t$$

con  $i \neq j$

## Proposición

*Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Hacer una operación elemental por renglones en  $A$  es lo mismo que multiplicar  $A$  por la izquierda por la correspondiente matriz elemental.*



## Definición

*Dada una matriz, una operación elemental por columnas es una de las siguientes:*

- i) Tipo I: intercambiar dos columnas de la matriz*
- ii) Tipo II: multiplicar una columna por un escalar distinto de cero.*
- iii) Tipo III: reemplazar una columna por la suma de esa columna con el múltiplo escalar otra columna*

## Proposición

*Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Hacer una operación elemental por columnas en  $A$  es lo mismo que multiplicar  $A$  por la derecha por la correspondiente matriz elemental.*

## Proposición

*Sea  $E$  una matriz elemental que multiplicada con  $A$  por la izquierda de  $A$  ejecuta una operación elemental por renglón. Entonces  $E^t$  es la matriz tal que  $AE^t$  ejecuta la operación correspondiente por columna.*

Tipo I por columna:  $E_{ij}^t$

Tipo II por columna:  $E_i(\alpha)^t$

Tipo II por columna:  $E_{ij}(\beta)^t$

## Sistemas lineales homogéneos

### Definición

*Un sistema lineal  $Ax = 0$  se llama un sistema lineal homogéneo*

Siempre tiene la solución trivial  $x = 0$  por lo que es consistente.

Dados  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vectores, una combinación lineal es una expresión del tipo

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

donde los  $\alpha_i$  son escalares.

La solución general de un sistema homogéneo es una combinación lineal de las soluciones particulares que se obtienen al hacer una variable libre igual a 1 y 0 en las demás, tomando las variables libres como coeficientes.

### Proposición

*Si  $A$  es  $m \times n$  y  $n > m$ , entonces  $Ax = 0$  tiene soluciones no triviales.*

En general, si  $A$  es  $m \times n$  la solución general del sistema homogéneo es

$$x = x_{f_1} h_1 + x_{f_2} h_2 + \dots + x_{f_{n-r}} h_{n-r}$$

Para el sistema  $Ax = b$ , la solución general es del tipo

$$x = x_p + x_h$$

donde  $x_h$  es la solución general del sistema homogéneo asociado y  $x_p$  es una solución particular que se obtiene haciendo todas las variables libres igual a cero.

## Definición

*Sea  $A$  una matriz cuadrada  $n \times n$ . Se dice que  $A$  es invertible o no singular si existe una matriz  $B$  tal que  $AB = I_n$ ,  $BA = I_n$ .  $B$  es una inversa de  $A$ .*

Si  $A$  no es invertible se le llama singular.

## Proposición

*Si  $A$  es invertible, la matriz inversa es única.*

La inversa de  $A$  se denota por  $A^{-1}$ .

Si una matriz es invertible, entonces la solución del sistema  $Ax = b$  esta dada por  $x = A^{-1}b$ .

El sistema se llama sistema no singular cuando  $A$  es no singular.

### Proposición

*Sen  $A, B$  matrices  $n \times n$ . Entonces  $AB = I$  si y solo si  $BA = I$ .*

Si  $A$  es una matriz  $m \times n$ , una inversa izquierda de  $A$  es una matriz  $C$ ,  $n \times m$  tal que  $CA = I_n$ . Una inversa derecha es una matriz  $B$ ,  $m \times n$  tal que  $AB = I_m$ .

Una matriz rectangular puede tener inversa por un lado, pero no del otro y no tienen por que coincidir.



## Proposición

Sean  $A$  una matriz  $n \times n$ . Entonces

- i)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- ii)  $(A^{-1})^{-1} = A$
- iii)  $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Para encontrar  $A^{-1}$ , tenemos la ecuación  $AX = I$  que puede verse como un conjunto de sistemas de ecuaciones  $Ax_i = e_i$  donde  $x_i$  son las columnas de  $X$ .

Luego con el método de Gauss, si es posible resolver cada uno de estos sistemas con solución  $x_i$ , encontramos la inversa de  $A$  dada por  $X = (x_1 \dots x_n)$ . Usando Gauss Jordan

$$L(A|I) = (LA|LI) = (I|L)$$

implica que  $L = A^{-1}$

## Proposición

*A es invertible si y solo si el sistema homogéneo asociado solo tiene la solución  $x = 0$ .*

## Proposición

*Sea  $A = I_n + uv^t$  una matriz elemental. Entonces A es invertible con inversa dada por*

$$A^{-1} = I - \frac{uv^t}{1 + v^t u}$$

*Más aún, si E es elemental del tipo I, II ó III, entonces  $E^{-1}$  es elemental del mismo tipo que E.*