Maestría en Computo Estadístico
Álgebra Matricial
Tarea 1
31 de agosto de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: Tarea 1, IE.

1. Si A es una matriz $m \times n$ dada por bloques de vectores columna como

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots a_n)$$

y B es una matriz $n \times p$ dada por bloques de vectores renglón como

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Demuestre que

$$AB = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

RESPUESTA
Como A es una matriz $m \times n$ dada por bloques columnas, como

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots a_n)$$

donde a_i es un vector columna

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo podemos decir que B esta constituida por b_i vectores renglón:

$$v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} & v_{i2} & \cdots & v_{in} \end{pmatrix}.$$

Entonces ocupando lo anterior

$$AB = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right) \left(\begin{matrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \end{matrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \blacksquare.$$

2. Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden. Demuestre que $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ si y solo si $AB=BA$.

RESPUESTA

$\Rightarrow$) Si $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ entonces:

$$\begin{array}{rcc} A^2-B^2 &=& (A-B)(A+B) \\ \\ &=& AA-BA+AB-BB \\ \\ &=& A^2-BA+AB-B^2 \\ \\ BA &=& AB. \end{array}$$

$\Leftarrow$) Si $AB=AB$ entonces:

$$(A-B)(A+B)=AA-BA+AB-BB=A^2-B^2.$$

Por lo tanto, queda demostrado que $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ si y solo si $AB=BA$. $\blacksquare$.

3. Sean A y B matrices $n\times n$, $A\neq 0,\ B\neq 0$, tales que $AB=BA$. Demuestre que $A^pB^q=B^qA^p$ para cualesquiera $p,q\in\mathbb{N}$.

RESPUESTA

Multiplicado por A^{p-1} (donde $p\in\mathbb{N}$) por la izquierda a $AB=BA$ tenemos

$$\begin{array}{rcc} A^{p-1}AB &=& A^{p-1}BA \\ &=& A^{p-2}(AB)A=A^{p-2}(BA)A \\ &=& A^{p-3}(AB)A^2=A^{p-3}(BA)A^2 \\ &=& \vdots \\ &=& (AB)A^{p-1}=(BA)A^{p-1}. \end{array}$$

Simplificando de ambos lados, tenemos que $A^pB=BA^p$. Ahora multiplicamos al resultado obtenido por la matriz B^{q-1} (donde $q\in\mathbb{N}$) por la derecha tenemos

$$\begin{array}{rcc} A^pBB^{q-1} &=& BA^pB^{q-1} \\ &=& BA^{p-1}(AB)B^{q-2}=BA^{p-1}(BA)B^{q-2} \\ &=& BA^{p-2}(AB)AB^{q-2}=BA^{p-2}(BA)AB^{q-2} \\ &=& BA^{p-3}(AB)A^2B^{q-2}=BA^{p-3}(BA)A^2B^{q-2} \\ & \vdots & \\ &=& B(AB)A^{p-1}B^{q-2}=B(BA)A^{p-1}B^{q-2} \\ &=& B^2A^pB^{q-2} \\ &=& B^2A^{p-1}(AB)B^{q-3}=B^2A^{p-1}(BA)B^{q-3} \\ &=& B^2A^{p-2}(AB)AB^{q-3}=B^2A^{p-2}(BA)AB^{q-3} \\ &=& B^2A^{p-3}(AB)A^2B^{q-3}=B^2A^{p-3}(BA)A^2B^{q-3} \\ & \vdots & \\ &=& B^2(AB)A^{p-1}B^{q-3}=B^2(BA)A^{p-1}B^{q-3} \\ &=& B^3A^pB^{q-3} \\ & \vdots & \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots \\
&= B^{q-1}A^{p-1}(AB) = B^{q-1}A^{p-1}(BA) \\
&= B^{q-1}A^{p-2}(AB)A = B^{q-1}A^{p-2}(BA)A \\
&= B^{q-1}A^{p-3}(AB)A^2 = B^{q-1}A^{p-3}(BA)A^2 \\
&\vdots \\
&= B^{q-1}(AB)A^{p-1} = B^{q-1}(BA)A^{p-1} \\
&= B^qA^p.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, queda demostrado que si $AB = BA$ y para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$ se cumple que $A^pB^q = B^qA^p \quad \blacksquare$.

4. Se dice que una matriz cuadrada A es antisimétrica si $A = -A^t$. Demuestre que $A - A^t$ es antisimétrica.

   RESPUESTA
   Sea $B = A - A^t$, entonces:
   $$B^t = (A - A^t)^t = A^t - A.$$
   y
   $$-B^t = -(A^t - A) = A - A^t.$$
   Como $B = -B^t$ y como $B = A - A^t$ (por definición), podemos concluir que $A - A^t$ es antisimétrica. $\blacksquare$.

5. Demuestre que dada cualquier matriz cuadrada A, esta se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

   RESPUESTA
   Es sencillo

6. Se dice que una matriz cuadrada P es idempotente si $P^2 = P$. Si
   $$A = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix}$$
   y si P es idempotente, encuentre A^{500}.

   RESPUESTA
   Encontremos una formula para encontrar a A^n. Primero veamos que pasa cuando $n = 2, 3$:
   $$A^2 = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + 0 & IP + P^2 \\ 0 + 0 & 0 + P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$
   $$A^3 = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + 0 & IP + 2P^2 \\ 0 + 0 & 0 + P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 3P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$
   De lo anterior y considerando $n \in \mathbb{N}$ podemos suponer que se cumple que :
   $$A^n = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$
   Demostremos lo anterior de forma inductiva:
   Paso 1. Mostrar que se cumple para $n = 2, 3$ o para algún n. Por construcción se cumple este paso.

Paso 2. Suponer que se cumple para n.
Paso 3. Demostrar que se cumple para $n+1$. Considerando el paso 2, tenemos que:

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2+0 & IP+nP^2 \\ 0+0 & 0+P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & (n+1)P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Queda demostrado que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$A^n = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, utilizando la formula encontrada podemos concluir que

$$A^{500} = \begin{pmatrix} I & 500P \\ 0 & P \end{pmatrix} \quad \blacksquare.$$

7. Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$. Demuestre que $\mathrm{tr}(AB^t) = \mathrm{tr}(A^tB)$.

   RESPUESTA
   Sea $A_{m\times n}, B_{n\times m}$ matrices. Entonces se cumple que (*se demostraron en clase*):

   - $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^t)$.
   - $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

   Ocupando las dos propiedades de la traza anteriores tenemos que:

   $$\mathrm{tr}(AB^t) = \mathrm{tr}((AB^t)^t) = \mathrm{tr}(BA^t) = \mathrm{tr}(A^tB). \quad \blacksquare.$$

8. Encuentre matrices A, B y C tales que $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(BAC)$.

   RESPUESTA
   Por convicción definamos a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y ahora sea $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.
   Entonces

   $$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{pmatrix}.$$

   Observemos que la primera multiplicación representa a un cambio de renglones y la segunda a un cambio de columnas. Ahora multipliquemos de lado izquierdo lo anterior por la matriz C pero solo concentrarnos en los resultados de la diagonal.

   $$ABC = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & \gamma_1 \\ \gamma_2 & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \end{pmatrix},$$

   $$BAC = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} & \gamma_3 \\ \gamma_4 & b_{22}c_{12} + b_{21}c_{22} \end{pmatrix},$$

   donde γ_i no son relevantes para este problema. Por lo que la traza de esos producto de matrices es:

   $$\mathrm{tr}(ABC) = b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \;\; \text{y} \;\; \mathrm{tr}(BAC) = b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} + b_{22}c_{12} + b_{21}c_{22}.$$

De lo anterior podemos observar que si tr(ABC) $\neq$tr(BAC) ,

$$\begin{gathered}
b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}+b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22}\neq b_{12}c_{11}+b_{11}c_{21}+b_{22}c_{12}+b_{21}c_{22}\\
b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}+b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22}-b_{12}c_{11}-b_{11}c_{21}-b_{22}c_{12}-b_{21}c_{22}\neq 0\\
c_{11}(b_{21}-b_{12})+c_{21}(b_{22}-b_{11})+c_{12}(b_{11}-b_{22})+c_{22}(b_{12}-b_{21})\neq 0\\
(b_{21}-b_{12})(c_{11}-c_{22})+(b_{22}-b_{11})(c_{21}-c_{12})\neq 0.
\end{gathered}$$

Entonces de lo anterior podemos encontrar un conjunto de elementos de las matrices B y C:

$$\begin{array}{ccc}
c_{11}>c_{22} & , & b_{21}>b_{12}\\
c_{21}>c_{12} & , & b_{22}>b_{11}
\end{array}$$

tal que tr(ABC) $\neq$tr(BAC), donde $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

Entonces una tripleta de matrices que cumple que tr(ABC) $\neq$tr(BAC), son: $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}4&2\\3&1\end{pmatrix}$. Calculemos la trazas para mostrar que efectivamente se cumple.

$$AB=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\2&3\end{pmatrix}\quad\text{y}\quad BA=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\5&4\end{pmatrix}.$$

Ahora calculemos la multiplicación con la matriz C:

$$ABC=\begin{pmatrix}4&5\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14+15&\gamma_1\\\gamma_2&4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29&\gamma_1\\\gamma_2&7\end{pmatrix},$$

$$BAC=\begin{pmatrix}3&2\\5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+6&\gamma_3\\\gamma_4&10+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&\gamma_3\\\gamma_4&14\end{pmatrix},$$

donde γ_i no son relevantes para este problema. Por lo que la traza de esos producto de matrices es:

$$\text{tr}(ABC)=29+7=36\ \text{ y }\ \text{tr}(BAC)=18+14=32.$$

Por lo que se cumple que tr(ABC) $\neq$tr(BAC) para las matrices propuestas. $\blacksquare$.

9. Sea L una matriz triangular inferior $n\times n$. Demuestre que $L=L_1L_2\cdots L_n$ donde L_i es la matriz $n\times n$ que se obtiene reemplazando la $i-$ésima columna de I_n por la $i-$ésima columna de L. Demuestre un resultado análogo para matrices triangulares superiores.

RESPUESTA

Sea L la matriz triangular inferir $n\times n$:

$$L=\begin{pmatrix}l_{11}&0&0&\cdots&0\\l_{21}&l_{22}&0&\cdots&0\\l_{31}&l_{32}&l_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\l_{n1}&l_{n2}&l_{n3}&\cdots&l_{nn}\end{pmatrix}.$$

Entonces L_i están definidas como:

$$L_1=\begin{pmatrix}l_{11}&0&0&\cdots&0\\l_{21}&1&0&\cdots&0\\l_{31}&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\l_{n1}&0&0&\cdots&1\end{pmatrix},\ L_2=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&l_{22}&0&\cdots&0\\0&l_{32}&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&l_{n2}&0&\cdots&1\end{pmatrix},\cdots,L_n=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&l_{nn}\end{pmatrix}.$$

Considerando la siguiente partición por bloques de L_1 y L_2

$$L_1 = \left(\begin{array}{c|cccc} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} N_1 & \mathbf{0} \\ M_1 & I_{n-1} \end{pmatrix} \text{ y } L_2 = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

Entonces la multiplicación de L_1 y L_2 es:

$$L_1L_2 = \begin{pmatrix} N_1 & \mathbf{0} \\ M_1 & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1I_1 & N_1\mathbf{0} + \mathbf{0}A_{n-1} \\ M_1I_1 & M_2\mathbf{0} + I_{n-1}A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & \mathbf{0} \\ M_1 & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora considerando la partición por bloques de L_1L_2 y L_3

$$L_1L_2 = \left(\begin{array}{cc|ccc} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} N_2 & \mathbf{0} \\ M_2 & I_{n-2} \end{pmatrix} \text{ y } L_3 = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & l_{n3} & \cdots & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Por lo que

$$(L_1L_2)L3 = \begin{pmatrix} N_2 & \mathbf{0} \\ M_2 & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_2I_2 & N_2\mathbf{0} + \mathbf{0}A_{n-2} \\ M_2I_2 + I_{n-2}\mathbf{0} & M_2\mathbf{0} + I_{n-2}A_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_2 & \mathbf{0} \\ M_2 & A_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Como las matrices L_i por definición provienen de la construcción de una matriz triangular inferior podemos decir que L_i igual es una matriz triangular inferior. Entonces como todas las matrices tienen la misma estructura, podemos hacer el proceso iterativo que se utilizó para calcular la multiplicación de L_1L_2 y $(L_1L_2)L_3$, para la $n-1$ iteración que es multiplicar $L_1L_2\cdots L_{n-1}$ y L_n.
Particionamos la matriz $L_1L_2\cdots L_{n-1}$ y L_n

$$L_1L_2\cdots L_{n-1} = \left(\begin{array}{ccccc|c} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1\ 1} & l_{n-1\ 2} & l_{n-1\ 3} & \cdots & l_{n-1\ n-1} & 0 \\ \hline l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n\ n-1} & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} N_{n-1} & \mathbf{0} \\ M_{n-1} & I_1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$L_n = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix}.$$

Por lo que

$$(L_1L_2\cdots L_{n-1})L_n = \begin{pmatrix} N_{n-1} & \mathbf{0} \\ M_{n-1} & I_{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{n-1}I_{n-1} & N_{n-1}\mathbf{0}+\mathbf{0}A_1 \\ M_{n-1}I_{n-1}+I_1\mathbf{0} & M_{n-1}\mathbf{0}+I_1A_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} N_{n-1} & \mathbf{0} \\ M_{n-1} & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1\ 1} & l_{n-1\ 2} & l_{n-1\ 3} & \cdots & l_{n-1\ n-1} & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n\ n-1} & l_{nn} \end{pmatrix} = L.$$

Por lo tanto, queda demostrado que $L = L_1L_2\cdots L_n$ donde L_i es la matriz $n\times n$ que se obtiene reemplazando la $i-$ésima columna de I_n por la $i-$ésima columna de L. $\blacksquare$.

Ahora un resultado análogo para matrices triangulares superiores sería: Sea U una matriz triangular superior $n\times n$, entonces $U = U_nU_{n-1}\cdots U_1$ donde U_i es la matriz $n\times n$ que se obtiene reemplazando el $i-$ésimo renglón de I_n por el $i-$ésimo renglón de U.

Para demostrar lo anterior ocupemos lo demostrado con las matrices triangulares inferiores. Como ya se demostró que si L matriz triangular inferior se puede escribir como producto de matrices $L_1L_2\cdots L_n$ donde L_i es la matriz $n\times n$ que se obtiene reemplazando la $i-$ésima columna de I_n por la $i-$ésima columna de L. Entonces ocupando este hecho podemos ver que

$$\begin{array}{rcl} L^t & = & (L_1L_2\cdots L_n)^t \\ & = & L_n^tL_{n-1}^t\cdots L_1^t \end{array}.$$

Por las propiedades de matrices inferiores/superiores (vistas en clase) sabemos que si L es inferior esto implica que L^t sea una matriz superior con

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad L^t = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & \cdots & l_{n2} \\ 0 & 0 & l_{33} & \cdots & l_{n3} \\ 0\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ahora si observamos a

$$L_i^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{ii} & l_{i+1\ i} & \cdots & l_{ni} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

podemos observar que L_i^t represenata a la matriz $n\times n$ que se obtiene remplazando el $i-$ésimo renglón de I_n por el $e-$ésiimo renglón de L^t. Por lo que queda demostrado que si U es una matriz triangular superior $n \times n$, entonces $U = U_n U_{n-1} \cdots U_1$ donde U_i es la matriz $n \times n$ que se obtiene reemplazando el $i-$ésimo renglón de I_n por el $i-$ésimo renglón de U. $\blacksquare$.

10. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño n, triangular superior tal que $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \cdots, n$. Demuestre que para $i = 1, \cdots, n$ y $j = 1, \cdots, \text{mín}(n, i+p-1)$ se cumple que $b_{ij} = 0$ donde $A^p = (b_{ij})$ y p es un entero positivo.

RESPUESTA
Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño n, triangular superior tal que $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \cdots, n$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces veamos que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0a_{12} + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$