~~Examen~~

→ Segundo Parcial: Inferencia Estadística
→ Maestría en Computo Estadístico.
→ Enrique Santibáñez Cortes.

Ejercicio 1.

Tenemos que $X_1 \dots X_n \sim Gamma(\alpha, \beta)$.

Recordemos que para una v.a $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$.

$$E[X] = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{y} \quad Var(x) = \frac{\alpha}{\beta^2}, \Rightarrow E[X^2] = \frac{\alpha}{\beta^2} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$$

$$E[X^2] = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha(1+\alpha)}{\beta^2}$$

Con lo anterior, tenemos que por el método de momento:

$$E[X] = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ldots (1) \quad \text{y} \quad E[X^2] = \frac{\alpha(1+\alpha)}{\beta^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ldots (2)$$

Despejando y resolviendo el sistema tenemos que:

$$\alpha = \frac{\beta}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{, sustituyendo en } (2), \Rightarrow \frac{\beta\bar{x}(1+\beta\bar{x})}{\beta^2} = \frac{1}{n}\sum x_i^2$$

Para simplificar la notación $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$

$$\Rightarrow \bar{x}(1+\beta\bar{x}) = \frac{\beta}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\bar{x} + \beta(\bar{x})^2 = \frac{\beta}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\beta(\bar{x})^2 - \frac{\beta}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = -\bar{x}$$

$$\beta\left(\bar{x}^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = -\bar{x}$$

$\Rightarrow$ Un estimador por el método de momentos para β es:

$$\hat{\beta} = \frac{-\bar{X}}{\bar{X}^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} = \frac{-\bar{X}}{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

$$= \frac{\bar{X}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\bar{X}}{S_n^2}$$

Y un estimador por el método de momentos para α es

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta}\,\bar{X} = \frac{\bar{X}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

$$= \frac{\bar{X}^2}{S_n^2}$$

Es decir, los estimadores de β y α están en función de la media muestral y la varianza muestral.

Ejercicio 2.

$\boxed{\text{Enrique Santibañez Cortés}}$

Para validar que $f(x)$ es una función de densidad, observemos que $f(x) > 0$ y que la función $f(x)$ integre 1 en el intervalo que esta definida (α, ∞).

- Es trivia ver que $f(x) > 0$, (por como esta construida).
- Ahora validemos que integra 1:

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}}\, dx = \frac{1}{\beta}\int_{\alpha}^{\infty} e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}}\, dx \qquad m = \frac{-x+\alpha}{\beta}, \quad dm = -\frac{1}{\beta}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta}\int e^{m}(-\beta)\, dm$$

$$= -e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}} \Big|_{x=\alpha}^{\lim_{x\to\infty}}$$

$$= -\lim_{x\to\infty} e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}} + e^{\frac{-\alpha+\alpha}{\beta}}$$

$$= 0 + e^{\frac{0}{\beta}} = 1$$

$\therefore$ $f(x)$ del ejercicio si es una función de densidad.

Ahora encontremos la verosimilitud:

$$L(\Theta) = L((\alpha,\beta); x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{-x_i+\alpha}{\beta}}}{\beta} = \frac{1}{\beta^n} e^{\frac{-\sum x_i}{\beta}} \cdot e^{\frac{n\alpha}{\beta}}$$

$$\Rightarrow \log(L(\Theta)) = -n\log(\beta) + \frac{n\alpha}{\beta} - \frac{\sum x_i}{\beta}$$

Ahora encontremos la verosimilitud de $f(x)$.

$$L(\theta) = L((\alpha,\beta); x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-x_i + \alpha}}{\beta} 1_{[\alpha,\infty)}(x_i)$$

$$= \frac{1}{\beta^n} e^{-\frac{\sum x_i}{\beta}} \cdot e^{\frac{n\alpha}{\beta}} 1_{(\alpha,\infty)}(x_{(n)}) \cdot 1_{(\alpha,\infty)}(x_{(1)})$$

donde $x_{(n)}$, $x_{(1)}$ son los estadísticos de orden. Ahora calculemos el $\log(L(\theta))$

$$\log(L(\theta)) = -n\log(\beta) + \frac{n\alpha}{\beta} - \frac{\sum x_i}{\beta}. \quad \forall_c \begin{array}{l} \alpha < x_{(1)} \dots < \infty \\ -\infty < \alpha < \infty \\ \alpha < \beta. \end{array}$$

Para algún β fijo, observemos que no es factible derivar en X_c ya que el termino no estaria en función de α.
~~Pero si $L(\theta)$ se hace $1/\beta$ antes del valor $X_{(1)}$ que y sabiendo que $\alpha < x_{(1)}$~~

$L(\theta)$ se máximiza cuando $\alpha = X_{(1)}$. por lo que el estimador de máxima verosimilitud para α es

$\hat{\alpha} = X_{(1)}$, $x_{(1)}$ es el primer estadístico de orden.

Para encontrar un estimador de β derivemos la $\log(L(\theta))$

$$\frac{d}{d\beta}\log(L(\theta)) = \frac{-n}{\beta} - \frac{nX_{(1)}}{\beta^2} + \frac{\sum x_i}{\beta^2},$$

Ahora igualamos a cero para maximizar.

$$\frac{-n}{\beta} - \frac{n X_{(1)}}{\beta^2} + \frac{\sum X_i}{\beta^2} = 0$$

Multiplicamos por β^2

$$-\beta n - n X_{(1)} + \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

$$-\beta n = n X_{(1)} - \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Esto implica que el estimador de máxima verosimilitud para β es:

$$\hat{\beta} = -X_{(1)} + \overline{X}$$

Ejercicio 5. Enrique Santibáñez Cortés

El valor que minimiza $E[(Y-g(x))^2]$ es

$$g(x) = E[Y|X].$$

Para demostrar que minimiza a ~~la forma~~ $E[(Y-g(x))^2]$ veamos que: (por propiedades de la esperanza:)

$$E[(Y-g(x))^2] = E[(Y-g(x)+E[Y|X]-E[Y|X])^2] \quad \text{(sumamos un cero)}$$

$$= E[((Y-E[Y|X])+(E[Y|X]-g(x)))^2] \quad \text{(reagrupamos)}$$

$$= E[(Y-E[Y|X])^2 + 2(Y-E[Y|X])(E[Y|X]-g(x)) + (E[Y|X]-g(x))^2]$$

$$= E[(Y-E[Y|X])^2] + 2E[(Y-E[Y|X])(E[Y|X]-g(x))] + E[(E[Y|X]-g(x))^2], \; *_1$$

Ahora ocupando ~~que~~ la siguiente propiedad de la esperanza:

$$E[E[Y|X]] = E[Y].$$

Para ser más entendible la demostración trabajemos el segundo término de la igualdad por separado.

Es decir,

$$* \quad 2E\left[\left(Y-E[Y|X]\right)\left(E[Y|X]-g(x)\right)\right] = 2E\left[(Y-E[Y|X])\right]E\left[E[Y|X]-g(x)\right]$$

$$= 2\left(E[Y]-E[E[Y|X]]\right)\left(E[E[Y|X]]-E[g(x)]\right)$$

$$= 2\left(E[Y]-E[Y]\right)\left(E[E[Y|X]]-E[g(x)]\right)$$

$$= 0$$

Regresando a $*_1$,

$$E[(Y-g(x))^2] = E[(Y-E[Y|X])^2] + E[(E[Y|X]-g(x))^2].$$

Ahora observemos que el argumento de todas las esperanzas anteriores estan elevadas al cuadrado, esto implica que todas sean ~~positivas~~ mayores o iguales a cero (se puede demostrar sencillo, pero se asume que es trivial).
Entonces como son positivos tenemos que:

$$E[(Y-g(x))^2] = E[(Y-E[Y|X])^2] + E[(E[Y|X]-g(x))^2] \geq E[(Y-E[Y/X])^2].$$

Es decir, lo anterior se interpreta a que $E[(Y-g(x))^2$ tiene un minimo (una cota inferior), y el minimo se alcanza cuando $g(X) = E[Y|X]$. Por lo tanto, queda demostrado que $g(x) = E[Y|X]$ minimiza $E[(Y-g(x))^2]$

Ejercicio 6. Enrique Santibáñez Cortés

Usando el teorema de Box-Müller.

Justificación del programa:

Si $U_1 \sim Unif(0,1)$ & $U_2 \sim Unif(0,1)$ independientes.

$$\Rightarrow X = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2) \sim N(0,1)$$

$$\& \ Y = \sqrt{-2\ln(U_1)}\operatorname{sen}(2\pi U_2) \sim N(0,1).$$

Para demostrar lo anterior, veamos que ~~x~~ podemos probar que $-\beta\ln(U_1) \sim Exp(\beta)$ & $2\pi U_2 \sim Unif(0,2\pi)$:

Para mostrarlo ~~por~~ el método de transformación de variables: Sea

$$M = -\beta\ln(U_1) \quad y \quad L = 2\pi U_2$$

$\Rightarrow$ transformación inversa:

$$U_1 = \exp\left(\frac{-m}{\beta}\right) \quad \& \quad U_2 = \frac{l}{2\pi}$$

Observemos que

$$\mathcal{X} = \{(u_1,u_2) \mid u_1 \in (0,1),\ u_2 \in (0,1)\} \Rightarrow \mathcal{Y} = \{(m,l) \mid m \in \mathbb{R}^+, l \in (0,2\pi)\}$$

Entonces el Jacobiano es:

$$|J| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\beta}\exp\left(\frac{-m}{\beta}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\pi} \end{vmatrix} = \frac{\beta}{2\pi}\exp\left(\frac{-m}{\beta}\right)$$

Entonces como U_1 & U_2 eran independiente

$\Rightarrow$

$$f_{M,L}(m,l) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{m}{\beta}\right)\frac{1}{2\pi} \quad , 0<m<\infty \; , 0<l<2\pi$$

Calculando las marginales de M y L. tenemos que

$$f_M(m) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\beta}\exp\left(\frac{-m}{\beta}\right)\frac{1}{2\pi}\, dl = \frac{1}{\beta}\exp\left(-\frac{m}{\beta}\right), \quad 0<m<\infty$$

$$f_L(l) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta}\exp\left(\frac{-m}{\beta}\right)\frac{1}{2\pi}\, dm = \frac{1}{2\pi} \qquad 0<l<2\pi$$

Con lo anterior podemos decir que efectivamente.

$-\beta \ln(u_1) \sim Exp(\beta)$ & $sen(2\pi u_2) \sim Unif(0, 2\pi)$

independientes.

Ahora demostremos de X & $Y \sim N(0,1)$, para ello denotemos las siguientes transformaciones:

$$M = X^2 + Y^2 \quad \& \quad L = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$\Rightarrow$ las inversas:

$$X = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2) = \sqrt{M}\cos(L)$$

$$Y = \sqrt{-2\ln(U_1)}\, sen(2\pi U_2) = \sqrt{M}\, sen(L)$$

Observemos que son funciones uno a uno, por lo que el Jacobiano es:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\cos(l)}{2\sqrt{m}} & -\sqrt{m}\,\operatorname{sen}(l) \\ \frac{\operatorname{sen}(l)}{2\sqrt{m}} & \sqrt{m}\cos(l) \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{m}}\cos^2(l) + \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{m}}\operatorname{sen}^2(l)$$

$$= \frac{1}{2}$$

Por lo tanto la densidad conjunta ~~es~~ de X y Y es:

$$f_{X,Y}(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\frac{1}{2\pi} \qquad , \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty. \end{matrix}$$

Entonces las maginales de X y Y son:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\frac{1}{2\pi}$$

$$= \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}\,dy}_{\text{Integra } 1}$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \quad , -\infty < x < \infty$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\frac{1}{2\pi}\,dx = \dots =$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \quad , < y < \infty$$

Por lo, tanto X y Y son $N(0,1)$.

Es decir, hemos demostrado que apartir de v.a uniforme podemos generar muestras normales estandar.

Una ves generadas las muestras normales es sencillo generar muestras normales con esperanza y varianza solicitada:

Si X_1 es una observación de una Normal estandar entonces

$h_1 = \mu + \sigma X_1$, será una observación de una $N(\mu, \sigma^2)$