Tarea de Inferencia Bayesiana

Fecha de entrega: Lunes 30 de noviembre de 2020

1. Sean $X_1, \ldots, X_n \sim Uniforme(0, \theta)$. Sea $f(\theta) \propto 1/\theta$. Calcule la densidad posteriori.

2. Sean $X_1, \ldots, X_n$ Normal$(\mu, 1)$

   a) Simule un conjunto de datos (use $\mu = 5$) de $n = 100$ observaciones.

   b) Tome $f(\mu) = 1$ y halle la densidad posteriori. Grafique la densidad.

   c) Simule 1000 observaciones de la posteriori. Grafique un histograma y compare con la densidad del punto anterior.

   d) Sea $\theta = e^{\mu}$. Halle la densidad posteriori para θ de forma analítica y por simulación.

   e) Halle un intervalo posteriori del 95 % para θ.

   f) Halle un intervalo de confianza del 95 % para θ.

3. Sean $X_1, \ldots, X_n \sim Poisson(\lambda)$. Sea $\lambda \sim Gamma(\alpha, \beta)$ la priori. Demuestre que la densidad posteriori es también una Gamma.

4. Suponga que a 50 personas e les da un placebo y a otras 50 un nuevo tratamiento. 30 de los pacientes con placebo muestran mejoría, mientras que 40 pacientes con el tratamiento nuevo muestran mejoría. Sea $\tau = p_2 - p_1$, donde p_2 es la probabilidad de mejorar bajo el tratamiento y p_1 es la probabilidad de mejorar bajo el placebo.

   a) Calcule el EMV de τ. Halle el error estándar y un intervalo de confianza del 90 %.

   b) Sea la priori $f(p_1, p_2) = 1$. Use simulación para hallar la media posterior y un intervalo posterior del 90 % para τ.

   c) Sea
   $$\psi = \log\left(\left(\frac{p_1}{1-p_1}\right) \div \left(\frac{p_2}{1-p_2}\right)\right),$$
   el radio log-odds. Note que $\psi = 0$ si $p_1 = p_2$. Calcule el EMV de ψ.