Estadística Multivariada: Tarea 1.

Ejercicio 1. Demuestre que la matriz de centrado $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}'$ cumple las siguientes propiedades:

- Tiene rango $(n-1)$, es decir, tiene $n-1$ columnas o renglones linealmente independientes
- Sus valores propios son 1 o 0.

Ejercicio 2. Dado los siguientes datos:

Promotora	X_1 =Duración media hipoteca (años)	X_2 =Precio medio (millones euros)	X_3 =Superficie media (m^2) de cocina
1	8.7	0.3	3.1
2	14.3	0.9	7.4
3	18.9	1.8	9.0
4	19.0	0.8	9.4
5	20.5	0.9	8.3
6	14.7	1.1	7.6
7	18.8	2.5	12.6
8	37.3	2.7	18.1
9	12.6	1.3	5.9
10	25.7	3.4	15.9

(a) Dibújese el diagrama de dispersión múltiple y coméntese el aspecto del gráfico.

(b) Para X_1 y X_2 calcúlense, respectivamente, las medias muestrales $\bar{x_1}$ y $\bar{x_2}$, las varianzas muestrales s_{11} y s_{22}, la covarianza entre X_1 y X_2 , s_{12}, y la correlación entre ambas, r_12 . Interprétese el valor obtenido de r_{12}.

(c) Utilizando la matriz de datos $\mathbf{X}$ y la de centrado $\mathbf{P}$, calcúlense el vector de medias muestrales $\bar{\mathbf{x}}$ y la matriz de covarianzas muestrales $\mathbf{S}$. A partir de ésta obténgase la matriz de correlaciones $\mathbf{R}$.

Ejercicio 3. Considérese la muestra $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ de vectores de $\mathbb{R}^p$. Pruébese que la matriz de covarianzas $\mathbf{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})'$, se puede expresar como $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i' - \bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}'$.

Ejercicio 4. Considere una población normal bivariada con $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$, $\sigma_{11} = 2$, $\sigma_{22} = 1$, y $\sigma_{12} = 5$.

(a) Escriba la densidad normal bivariada explicitamente

(b) Escriba la expresión de distancia cuadrada generalizada $(\mathbf{x} - \mu)'\mathbf{\Sigma^{-1}}(\mathbf{x} - \mu)$ como función de x_1 y x_2

(c) Determine y grafique el contorno de densidad constante que contiene el 50 % de la probabilidad.

(d) Especifique la distribución condicional de X_1 dado que $X_2 = x_2$.

Ejercicio 5. Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio de distribución normal con media $\mu = (-1, 1, 0)'$ y matriz de covarianzas

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Hállese la distribución de $X_1 + 2X_2 - 3X_3$.

(b) Hállese un vector $\mathbf{a}_{(2\times1)}$ tal que las variables X_1 y $X_1 - \mathbf{a}' \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ sean independientes

(c) Calcúlese la distribución de X_3 condicionada a $X_1 = x_1$ y $X_2 = x_2$.