Intervalos de confianza simultáneos para los componentes del vector de medias μ

- La región de confianza

$$n(\overline{\mathbf{x}}-\mu)'\mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{x}}-\mu)\leq c^2$$

para una constante c,evalúa correctamente el comportamiento conjunto de los valores plausibles de μ.

- Sin embargo, también es de interés obtener intervalos de confianza sobre las medias de los componentes individuales.
- Al hacerlo, se asume o desearía que todas las afirmaciones de confianza sobre los componentes individuales del vector de medias μ se mantendrán *simultáneamente* con un nivel de confianza razonable. Estos intervalos se denominan *Intervalos de Confianza Simultáneos*.
- Un enfoque para construir estos intervalos es relacionarlos con la región de confianza conjunta basada en el estadístico T^2.

Supongamos $\boldsymbol{x} \sim N_p(\mu, \boldsymbol{\Sigma})$ y sus componentes forman la combinación lineal

$$z = a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i = \mathbf{a}' \mathbf{x}$$

De resultados anteriores sabemos que

$$\mu_z = E(z) = a_1 \mu_1 + \cdots + a_p \mu_p = \sum_{i=1}^{p} a_i \mu_i = \boldsymbol{a}' \mu$$

y

$$\sigma_z^2 = Var(z) = \boldsymbol{a}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{a}$$

y

$$z \sim N(\mu_z, \sigma_z^2) = N(\boldsymbol{a}' \mu, \boldsymbol{a}' \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{a})$$

Ahora, si tomamos una muestra $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ de la población $N_p(\mu, \mathbf{\Sigma})$ y construimos una muestra correspondiente de $z^{'}s$, obtenidas como combinaciones lineales de cada $\mathbf{x}_j$

$$z_j = a_1 x_{j1} + \cdots + a_p x_{jp} = \sum_{i=1}^{p} a_i x_{ji} = \boldsymbol{a}' \boldsymbol{x_j}$$

La media y la varianza muestral de los valores observados $z_1, ..., z_n$ son

$$\overline{z} = a_1 \overline{x}_1 + \cdots + a_p \overline{x}_p = \sum_{i=1}^{p} a_i \overline{x}_i = \boldsymbol{a}' \overline{\boldsymbol{x}}$$

y

$$s_z^2 = \boldsymbol{a}' \boldsymbol{S} \boldsymbol{a}$$

donde $\overline{\boldsymbol{x}}$ y $\boldsymbol{S}$ son el vector de medias muestrales y la matriz de covarianza muestral de las $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}}^{'}\boldsymbol{s}$

Relaciones de Confianza Simultáneas

Podemos desarrollar intervalos de confianza simultáneos para $\boldsymbol{a}'\mu$ mediante elecciones adecuadas de $\boldsymbol{a}$. Para un $\boldsymbol{a}$ fijo y σ_z^2 desconocida, un intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para $\mu_z = \boldsymbol{a}'\mu$ basado en el cociente t de student está dado por

$$t = \frac{\bar{z} - \mu_z}{s_z/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\boldsymbol{a}'\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a}'\mu)}{\sqrt{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}}$$

lo cual nos lleva a que

$$\bar{z} - t_{n-1}(\alpha/2)\frac{s_z}{\sqrt{n}} \leq \mu_z \leq \bar{z} + t_{n-1}(\alpha/2)\frac{s_z}{\sqrt{n}}$$

que se puede reescribir como

$$\boldsymbol{a}'\bar{\boldsymbol{x}} - t_{n-1}(\alpha/2)\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}}{\sqrt{n}} \leq \mu_z \leq \boldsymbol{a}'\bar{\boldsymbol{x}} + t_{n-1}(\alpha/2)\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}}{\sqrt{n}}$$

Relaciones de Confianza Simultáneas

- Note que la desigualdad

$$\boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} - t_{n-1}(\alpha/2)\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}}{\sqrt{n}} \leq \mu_z \leq \boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} + t_{n-1}(\alpha/2)\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}}{\sqrt{n}}$$

- Puede interpretarse como un intervalo de confianza sobre los componentes de μ. Por ejemplo, tomando $\boldsymbol{a}$ a ser 1 en la i-ésima posición y ceros en las demás posiciones, dará el intervalo de confianza habitual sobre μ_i. En este caso $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a} = s_{ii}$
- De esta forma eligiendo diferentes vectores de coeficientes $\boldsymbol{a}$ se pueden construir varios intervalos de confianza sobre los componentes de μ, cada uno asociado con un nivel de confianza de $1 - \alpha$

Relaciones de Confianza Simultáneas

- Sin embargo, si tomamos todos los intervalos para μ_i, $i = 1, \ldots, p$, cada uno con un nivel de confianza $1-\alpha$ fijo, la confianza de todas los intervalos tomados en conjunto o simultáneamente ¡no es $1-\alpha$!
- Intuitivamente, sería deseable asociar un coeficiente de confianza *colectivo* de $1-\alpha$ con los intervalos de confianza y que pueda generarse para todas las elecciones de **a**.
- Sin embargo, se debe pagar un precio por la conveniencia de considerar un número grande de coeficientes de confianza simultáneamente: intervalos más anchos (menos precisos) que los intervalos obtenidos para un valor especifico de **a**, los cuales está dados por:

$$\boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} - t_{n-1}(\alpha/2)\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}}{\sqrt{n}} \leq \boldsymbol{a}'\mu \leq \boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} + t_{n-1}(\alpha/2)\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}}{\sqrt{n}}$$

Relaciones de Confianza Simultáneas

- Dado un conjunto de datos $(\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n})$ y un $\boldsymbol{a}$ particular, el intervalo de confianza anterior es el conjunto de valores $\boldsymbol{a}'\mu$ para los cuales

$$|t| = \left| \frac{\sqrt{n}(\boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a}'\mu)}{\sqrt{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}} \right| \leq t_{n-1}(\alpha/2)$$

o equivalentemente

$$t^2 = \frac{n(\boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{a}'\mu)^2}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}} = \frac{n(\boldsymbol{a}'(\overline{\boldsymbol{x}} - \mu))^2}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}} \leq t^2_{n-1}(\alpha/2)$$

- Así que una región de confianza *simultánea* está dada por el conjunto de todos los valores $\boldsymbol{a}'\mu$ tal que t^2 es relativamente pequeño ¡*para todas las elecciones* de $\boldsymbol{a}$!

Relaciones de Confianza Simultáneas

- Es razonable esperar que la constante $t^2_{n-1}(\alpha/2)$ en la relación anterior será reemplazada por una constante c^2 mas grande, cuando las relaciones de confianza son construidas para muchas elecciones de **a**
- Considerando los valores de $\boldsymbol{a}$ para los cuales $t^2 \leq c^2$, es natural tratar de determinar

$$\max_{\boldsymbol{a}} t^2 = \max_{\boldsymbol{a}} \frac{n(\boldsymbol{a}'(\overline{\boldsymbol{x}} - \mu))^2}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}$$

- Ahora por un **lema de maximización**: Para un vector dado $\boldsymbol{d}$ $p \times 1$, una matriz definida positiva $\boldsymbol{B}$ $p \times p$, y un vector arbitrario no nulo(no cero) $\boldsymbol{x}$, se cumple

$$\max_{\boldsymbol{x} \neq 0} \frac{(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{d})^2}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{d}'\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d}$$

Con el máximo alcanzado cuando $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d}$ para cualquier constante c.

Lema de maximización:

$$\max_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{d})^2}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{d}'\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d}$$

Con el máximo alcanzado cuando $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{d}$ para cualquier constante c.

- Ahora bien, si en el lema tomamos $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d} = (\overline{\boldsymbol{x}} - \mu)$ y $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{a}} t^2 &= \max_{\boldsymbol{a}} \frac{n(\boldsymbol{a}'(\overline{\boldsymbol{x}} - \mu))^2}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}} \\ &= n \max_{\boldsymbol{a}} \frac{(\boldsymbol{a}'(\overline{\boldsymbol{x}} - \mu))^2}{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}} \\ &= n(\overline{\boldsymbol{x}} - \mu)'\boldsymbol{S}^{-1}(\overline{\boldsymbol{x}} - \mu) = T^2 \end{aligned}$$

y el máximo ocurre cuando $\boldsymbol{a} \propto \boldsymbol{S}^{-1}(\overline{\boldsymbol{x}} - \mu)$

Resultado: Sea $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ una muestra aleatoria obtenida de una población $N_p(\mu, \boldsymbol{\Sigma})$ con $\boldsymbol{\Sigma}$ positiva definida. Entonces, simultáneamente para todo $\boldsymbol{a}$, el intervalo

$$\left(\boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{X}} - \sqrt{\frac{(n-1)p}{n(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{X}} + \sqrt{\frac{(n-1)p}{n(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}},\right)$$

Contendrá $\boldsymbol{a}'\mu$ con probabilidad $1-\alpha$.
Estos intervalos simultáneos se denomina intervalos T^2, ya que la probabilidad de cobertura es determinada por la distribución T^2

- Nótese que las elecciones sucesivas de $\boldsymbol{a}' = [100....0], \boldsymbol{a}' = [010....0], ..., \boldsymbol{a}' = [000....1]$ para los intervalos T^2, nos permiten obtener los intervalos de confianza para las medias de los componentes, $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p$, esto es

$$
\begin{gathered}
\overline{x}_1 - \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \leq \mu_1 \leq \overline{x}_1 + \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \\
\overline{x}_2 - \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \leq \mu_2 \leq \overline{x}_2 + \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \\
\vdots \\
\overline{x}_p - \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{pp}}{n}} \leq \mu_p \leq \overline{x}_p + \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{pp}}{n}}
\end{gathered}
$$

que se mantendrán simultáneamente con probabilidad $1 - \alpha$

- También se pueden hacer elecciones con mas juicio de $\boldsymbol{a}'$ para los intervalos T^2, que nos permite probar contrastes especiales sin modificar el coeficiente $1-\alpha$.
- Por ejemplo si queremos contrastar $\mu_1 - \mu_2$, elegimos $\boldsymbol{a}'$ como $\boldsymbol{a}' = [1, -1, 0, ..., 0]$, este caso $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a} = s_{11} - 2s_{12} + s_{22}$. Entonces intervalos para diferencias como $\mu_1 - \mu_2$ tienen la forma

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{22}}{n}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha)} \sqrt{\frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{22}}{n}}$$

que de igual manera se mantendrán simultáneamente con probabilidad $1-\alpha$

Ejemplo 1: Intervalos de Confianza Simultáneos

Usando la muestra original de datos bivariados, construir intervalos de confianza simultáneos del 90 % para las medias de las variables x_1 y x_2:

x_{j1}	x_{j2}
1.43	-0.69
1.62	-5.00
2.46	-1.13
2.48	-5.20
2.97	-6.39
4.03	2.87
4.47	-7.88
5.76	-3.97
6.61	2.32
6.68	-3.24
6.79	-3.56
7.46	1.61
7.88	-1.87
8.92	-6.60
9.42	-7.64

Anteriormente calculamos los estadísticos:

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 5.26 \\ -3.09 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 7.12 & -0.72 \\ -0.72 & 12.43 \end{bmatrix} \longrightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1412 & 0.0082 \\ 0.0082 & 0.0809 \end{bmatrix}$$

y

$$\frac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p}(\alpha) = 5.95$$

Ejemplo 1: Intervalos de Confianza Simultáneos

Nuestras elecciones de $\boldsymbol{a}'$ son [1 0] y [0 1], que producen los intervalos T^2:

$$\overline{x}_1 - \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \leq \mu_1 \leq \overline{x}_1 + \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{11}}{n}}$$

o

$$5.26 - \sqrt{5.95)}\sqrt{\frac{7.12}{15}} \leq \mu_1 \leq 5.26 + \sqrt{5.95)}\sqrt{\frac{7.12}{15}}$$

o

$$3.579 \leq \mu_1 \leq 6.941$$

$$i.e\, \mu_1 = 5.26 \pm 1.681, i.e\, \mu_1 = (3.579, 6.941)$$

y

$$\overline{x}_2 - \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \leq \mu_2 \leq \overline{x}_2 + \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{22}}{n}}$$

o

$$-3.09 - \sqrt{5.95)}\sqrt{\frac{12.43}{15}} \leq \mu_2 \leq -3.09 + \sqrt{5.95)}\sqrt{\frac{12.43}{15}}$$

o

$$-5.310 \leq \mu_2 \leq -0.870$$

$$i.e\, \mu_2 = -3.09 \pm 2.220, i.e\, \mu_2 = (-5.310, -0.870)$$

que se mantendrán simultáneamente con probabilidad $1-\alpha$

Ejemplo 2: Intervalos de Confianza Simultáneos

Usando la muestra original de datos bivariados, construiremos intervalos de confianza simultáneos del 90% para la suma y la diferencia entre las medias de las dos variables x_1 y x_2:

x_{j1}	x_{j2}
1.43	-0.69
1.62	-5.00
2.46	-1.13
2.48	-5.20
2.97	-6.39
4.03	2.87
4.47	-7.88
5.76	-3.97
6.61	2.32
6.68	-3.24
6.79	-3.56
7.46	1.61
7.88	-1.87
8.92	-6.60
9.42	-7.64

De nuevo, usaremos los estadísticos ya calculados

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 5.26 \\ -3.09 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 7.12 & -0.72 \\ -0.72 & 12.43 \end{bmatrix} \longrightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1412 & 0.0082 \\ 0.0082 & 0.0809 \end{bmatrix}$$

y

$$\frac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p}(\alpha) = 5.95$$

Ejemplo 2: Intervalos de Confianza Simultáneos

Nuestras opciones de $\boldsymbol{a}'$ son [1, 1] y [1 -1], por lo que los intervalos T^2 son:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{22}}{n}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{22}}{n}}$$

o

$$5.26 - (-3.09) - \sqrt{5.95}\sqrt{\frac{7.12 - 2(0.72) + 12.43}{15}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 5.26 - (-3.09) + \sqrt{5.95}\sqrt{\frac{7.12 - 2(0.72) + 12.43}{15}}$$

o

$$5.645 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 11.235$$

$$i.e\, \mu_1 - \mu_2 = 8.35 \pm 2.885, i.e\, \mu_1 - \mu_2 = (5.645, 11.235)$$

Ejemplo 2: Intervalos de Confianza Simultáneos

y para la suma:

$$\bar{x}_1+\bar{x}_2-\sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{11}-2s_{12}+s_{22}}{n}}\leq\mu_1+\mu_2\leq\bar{x}_1+\bar{x}_2+\sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{11}-2s_{12}+s_{22}}{n}}$$

o

$$5.26+(-3.09)-\sqrt{5.95)}\sqrt{\frac{7.12-2(0.72)+12.43}{15}}\leq\mu_1+\mu_2\leq 5.26+(-3.09)+\sqrt{5.95)}\sqrt{\frac{7.12-2(0.72)+12.43}{15}}$$

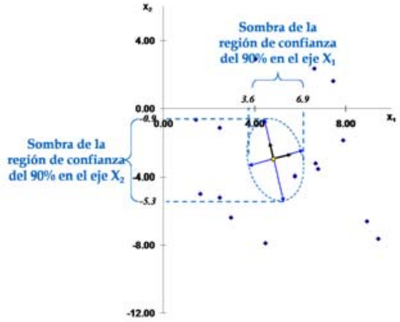
o

$$-0.715\leq\mu_1+\mu_2\leq 5.055$$

$$i.e\,\mu_1+\mu_2=2.17\pm 2.885,\, i.e\,\mu_1+\mu_2=(-0.715,5.055)$$

que se mantendrán simultáneamente con probabilidad $1-\alpha$

Ejemplo 2: Intervalos de Confianza Simultáneos



Observe que las proyecciones de la elipse sobre los ejes forman los intervalos de confianza simultáneos

Ejemplo 2: Intervalos de Confianza Simultáneos

Para este ejemplo, obtener los intervalos de confianza para μ_1 y μ_2 de forma separada es decir de manera univariada:

$$\overline{x}_1 - t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \leq \mu_1 \leq \overline{x}_1 + t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{s_{11}}{n}}$$

o

$$5.26 - 1.761\sqrt{\frac{7.12}{15}} \leq \mu_1 \leq 5.26 + 1.761\sqrt{\frac{7.12}{15}}$$

o

$$4.047 \leq \mu_1 \leq 6.473$$

$$i.e\, \mu_1 = 5.26 \pm 1.213,\ i.e., \mu_1 = (4.047, 6.473)$$

Ejemplo 2: Intervalos de Confianza Simultáneos

y

$$\overline{x}_2 - t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \leq \mu_2 \leq \overline{x}_2 + t_{n-1}(\alpha/2)\sqrt{\frac{s_{22}}{n}}$$

o

$$-3.09 - 1.761\sqrt{\frac{12.43}{15}} \leq \mu_2 \leq -3.09 + 1.761\sqrt{\frac{12.43}{15}}$$

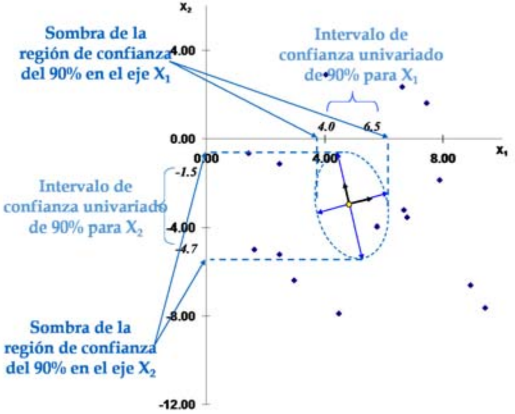
o

$$-4.690 \leq \mu_2 \leq -1.487$$

$$i.e\, \mu_2 = -3.09 \pm 1.603,\ i.e., \mu_2 = (-4.690, -1.487)$$

Estos intervalos no garantizan que simultáneamente tendrán un nivel de confianza del $1-\alpha$,¿Por qué?

Ejemplo 2: Intervalos de Confianza Simultáneos



Note que los intervalos univariados son más cortos - ¡no consideran la covarianza entre x_1 y x_2!

Método de Bonferroni de comparaciones múltiples

- Los intervalos T^2 son demasiado anchos si se aplican únicamente a las medias de cada uno de los p componentes
- Frecuentemente el objetivo consiste en estudiar un pequeño número de intervalos de confianza individuales. En estas situaciones es posible considerar otras opciones en lugar de los intervalos simultáneos T^2 para obtener intervalos mas estrechos.
- Un método alternativo para comparaciones multiples es el llamado *método de Bonferroni*, porque se desarrolla a partir de una desigualdad de probabilidad que lleva ese nombre.
- Supongamos que antes de recolectar los datos, se requieren intervalos de confianza sobre m combinaciones $\boldsymbol{a}_1^{'}\mu, \boldsymbol{a}_2^{'}\mu, \ldots, \boldsymbol{a}_m^{'}\mu$

Método de Bonferroni de comparaciones múltiples

Desigualdad de Bonferroni:
Sea C_i un intervalo de confianza para el valor $\mathbf{a_i}'\mu$ con P(C_i sea verdadera)$=1-\alpha_i$, $i=1,\ldots,m$. Entonces

$$P(\text{todos los} \quad C_i \quad \text{sean verdaderos}) \geq 1-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)$$

- Permite a un investigador controlar la tasa de error global $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)$, independientemente de la estructura de correlación entre las variables.
- Desarrollemos estimaciones de intervalos simultáneos para el conjunto de los componentes μ_i de μ.
- Debido a que no tenemos información sobre la importancia relativa de los componentes μ_i, cada α_i se obtiene dividiendo el nivel global α entre el numero de intervalos de confianza a probar, m.

Método de Bonferroni de comparaciones múltiples

- Así, tenemos que los intervalos individuales t tienen la forma

$$\overline{x}_i \pm t_{n-1}(\frac{\alpha_i}{2})\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}}, \ \ i = 1, \ldots, m, \ \text{con} \ \ \alpha_i = \frac{\alpha}{m}$$

- Ahora bien, ya que

$$P\left(\overline{x}_i \pm t_{n-1}(\frac{\alpha}{2m})\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}} \text{ contiene a } \mu_i\right) = 1 - \frac{\alpha}{m}, \ \ i = 1, \ldots, m$$

- De la desigualdad de Bonferroni tenemos que

$$P\left(\overline{x}_i \pm t_{n-1}(\frac{\alpha}{2m})\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}} \text{ contiene a } \mu_i, \text{ para todo i}\right)$$
$$\geq 1 - (\frac{\alpha}{m} + \frac{\alpha}{m} \cdots + \frac{\alpha}{m}) = 1 - \alpha.$$

Método de Bonferroni de comparaciones múltiples

- Por tanto, con un nivel de confianza global mas grande o igual a $1-\alpha$, podemos construir los $m=p$ intervalos de confianza de Bonferroni:

$$\begin{gathered}
\overline{x}_1 - t_{n-1}\left(\tfrac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\tfrac{s_{11}}{n}} \leq \mu_1 \leq \overline{x}_1 + t_{n-1}\left(\tfrac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\tfrac{s_{11}}{n}} \\
\overline{x}_2 - t_{n-1}\left(\tfrac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\tfrac{s_{22}}{n}} \leq \mu_2 \leq \overline{x}_2 + t_{n-1}\left(\tfrac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\tfrac{s_{22}}{n}} \\
\vdots \\
\overline{x}_p - t_{n-1}\left(\tfrac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\tfrac{s_{pp}}{n}} \leq \mu_p \leq \overline{x}_p + t_{n-1}\left(\tfrac{\alpha}{2p}\right)\sqrt{\tfrac{s_{pp}}{n}}
\end{gathered}$$

- Comparados con los intervalos simultáneos T^2, los percentiles $t_{n-1}(\frac{\alpha}{2p})$ reemplazan a $\sqrt{\frac{(n-1)p}{(n-p)}F_{p,n-p}(\alpha)}$

Ejemplo 3: Obtención de intervalos simultáneos mediante Método de Bonferroni

Utiliza la muestra original de datos bivariados para construir intervalos de confianza simultáneos del 90 % de Bonferroni para las medias de las variables x_1 y x_2.

x_{j1}	x_{j2}
1.43	-0.69
1.62	-5.00
2.46	-1.13
2.48	-5.20
2.97	-6.39
4.03	2.87
4.47	-7.88
5.76	-3.97
6.61	2.32
6.68	-3.24
6.79	-3.56
7.46	1.61
7.88	-1.87
8.92	-6.60
9.42	-7.64

De nuevo, usaremos los estadísticos ya calculados

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 5.26 \\ -3.09 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 7.12 & -0.72 \\ -0.72 & 12.43 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3: Obtención de intervalos simultáneos mediante Método de Bonferroni

- Tenemos que $\frac{\alpha}{2p} = \frac{.1}{4} = .025$, entonces $t_{n-1}(\frac{\alpha}{2p}) = t_{14}(.025) = \pm 2.145$.
- El intervalo para μ_1 está dado por

$$\overline{x}_1 - t_{n-1}(\alpha/2p)\sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \leq \mu_1 \leq \overline{x}_1 + t_{n-1}(\alpha/2p)\sqrt{\frac{s_{11}}{n}}$$

o

$$5.26 - 2.145\sqrt{\frac{7.12}{15}} \leq \mu_1 \leq 5.26 + 2.145\sqrt{\frac{7.12}{15}}$$

o

$$3.782 \leq \mu_1 \leq 6.738$$

$$i.e\, \mu_1 = 5.26 \pm 1.478,\ i.e.,\mu_1 = (3.782, 6.738)$$

Ejemplo 3: Obtención de intervalos simultáneos mediante Método de Bonferroni

- El intervalo para μ_2 está dado por

$$\overline{x}_2 - t_{n-1}(\alpha/2p)\sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \leq \mu_2 \leq \overline{x}_2 + t_{n-1}(\alpha/2p)\sqrt{\frac{s_{22}}{n}}$$

  o

$$-3.09 - 2.145\sqrt{\frac{12.43}{15}} \leq \mu_2 \leq -3.09 + 2.145\sqrt{\frac{12.43}{15}}$$

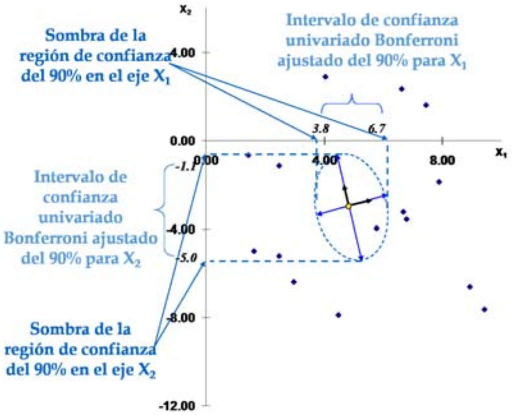
  o

$$-5.043 \leq \mu_2 \leq -1.137$$

$$i.e\, \mu_2 = -3.09 \pm 1.953,\; i.e., \mu_2 = (-5.043, -1.137)$$

- Estos intervalos no garantizan mantenerse simultáneamente con probabilidad $1-\alpha$. ¿Por qué?

Ejemplo 3: Obtención de intervalos simultáneos mediante Método de Bonferroni



Obsérvese que los intervalos univariados ajustados de Bonferroni son aún más cortos - ¡no consideran la covarianza entre x_1 y x_2!

Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

- Cuando la muestra es muy grande ($n \gg p$) no necesitamos confiar en la normalidad multivariada de la población para hacer inferencias sobre el vector de medias μ (¿por qué no?).
- Como consencuencia del TCL sabemos que

$$n(\overline{\boldsymbol{X}} - \mu)' \boldsymbol{S}^{-1} (\overline{\boldsymbol{X}} - \mu) \mathring{\sim} \chi_p^2$$

- Por tanto podemos decir que

$$P\left[n(\overline{\boldsymbol{X}} - \mu)' \boldsymbol{S}^{-1} (\overline{\boldsymbol{X}} - \mu) \leq \chi_p^2(\alpha)\right] \doteq 1 - \alpha$$

donde $\chi_p^2(\alpha)$ es el percentil superior del $100(\alpha)\%$ de la distribución χ_p^2.

Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

- Este resultado conduce directamente a obtener intervalos de confianza simultáneos y pruebas de hipótesis para el vector de medias $\boldsymbol{\mu}$, para una muestra grande ($n \gg p$)
- Sea $\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_n$ una muestra aleatoria de una población con media $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$ positiva definida, que sigue alguna distribución arbitraria.
- Cuando $n - p$ es grande, la hipótesis

$$H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu_0}$$

se rechaza a favor de

$$H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu_0}$$

a un nivel de significancia α si

$$n(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{S}^{-1} (\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}) > \chi^2_p(\alpha)$$

Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

- La diferencia entre la prueba de la teoría normal (muestras pequeñas) y la prueba para muestras grandes es el valor crítico de la distribución:

$$\frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha) \;\; vs \;\; \chi^2_p(\alpha)$$

- De hecho, a medida que $n-p$ crece, la distribución del estadístico de prueba de la teoría normal (muestras pequeñas) casi seguramente se aproxima a la distribución del estadístico de prueba de muestra grande:

$$\frac{(n-1)p}{n(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha) \underset{n-p\to\infty}{\longrightarrow} \chi^2_p(\alpha)$$

- Por lo tanto, nunca es completamente inapropiado utilizar la prueba de la teoría normal (muestra pequeña), *sólo es mas conservador*.

Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

- También podemos construir intervalos de confianza simultáneos dada una muestra grande ($n \gg p$) para el vector de medias μ.
- Sea $\boldsymbol{x_1}, \ldots \boldsymbol{x_n}$ una muestra aleatoria de una población con media μ, matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$ positiva definida, que sigue alguna distribución arbitraria. Cuando $n - p$ es grande

$$\boldsymbol{a}'\overline{\boldsymbol{x}} \pm \sqrt{\chi^2_p(\alpha)}\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}}{n}}$$

  Contendrá a $\boldsymbol{a}'\mu$, para cada $\boldsymbol{a}$, con probabilidad aproximada de $1-\alpha$.
- En consecuencia, podemos construir los siguientes intervalos de confianza simultáneos de $100(1-\alpha)\%$ para las μ_i :

$$\overline{x}_i \pm \sqrt{\chi^2_p(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}}, \ , i = 1, \ldots, p$$

Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

- Además, para todos los pares $(\mu_i, \mu_k), i, k = 1 \ldots, p$, tenemos que las elipses centradas en la media muestral

$$n\left[\overline{x_i} - \mu_i, \overline{x_k} - \mu_k\right] \begin{bmatrix} s_{ii} & s_{ik} \\ s_{ik} & s_{kk} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \overline{x_i} - \mu_i \\ \overline{x_k} - \mu_k \end{bmatrix} \leq \chi^2_p(\alpha)$$

Contienen a (μ_i, μ_k) con probabilidad $1 - \alpha$.

Ejempo: Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

- Supongamos que recolectamos una muestra aleatoria de 107 observaciones en $p = 5$ dimensiones y obtuvimos el siguiente resumen estadístico de los datos:

Variable	Sample Mean (x_i)	Sample Standard Deviation ($\sqrt{s_{ii}}$)
X_1	58.6	4.44
X_2	19.3	2.39
X_3	101.5	8.87
X_4	67.0	3.99
X_5	42.5	4.69

- Construya los cinco intervalos de confianza simultáneos del 90 % para las medias de los componente individuales μ_i, $i = 1, \ldots, 5$.

Ejempo: Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

Tenemos una muestra grande ($n = 107 \gg p = 5$), por lo que usaremos el enfoque de una muestra grande para construir los intervalos de confianza simultáneos del 90 % para los componentes individuales de μ.

$$\mu_1 : \overline{x}_1 \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{11}}{n}} = 58.6 \pm \sqrt{9.236}\frac{4.44}{\sqrt{107}}$$

$$58.6 \pm 6.034 = (52.565, 64.635)$$

$$\mu_2 : \overline{x}_2 \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{22}}{n}} = 19.3 \pm \sqrt{9.236}\frac{2.39}{\sqrt{107}}$$

$$19.3 \pm 3.248 = (16.052, 22.548)$$

$$\mu_3 : \overline{x}_3 \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{33}}{n}} = 101.5 \pm \sqrt{9.236}\frac{8.87}{\sqrt{107}}$$

$$101.5 \pm 12.056 = (89.444, 113.556)$$

Ejempo: Inferencia sobre el vector de medias de la población para muestras grandes

$$\mu_4 : \overline{x}_4 \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{44}}{n}} = 67.0 \pm \sqrt{9.236}\frac{3.99}{\sqrt{107}}$$

$$67.0 \pm 5.423 = (61.577, 72.423)$$

$$\mu_5 : \overline{x}_5 \pm \sqrt{\chi_p^2(\alpha)}\sqrt{\frac{s_{55}}{n}} = 42.5 \pm \sqrt{9.236}\frac{4.69}{\sqrt{107}}$$

$$42.5 \pm 6.374 = (36.126, 48.874)$$

Si usamos estos intervalos para probar la hipótesis nula

$$H_0 : \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 25 \\ 111 \\ 59 \\ 34 \end{bmatrix}$$

a un nivel de significancia de $\alpha = 1 - 0.90 = 0.10$, rechazaríamos la hipótesis nula (¿por qué?).