Maestría en Computo Estadístico
Álgebra Matricial
Tarea 3
10 de septiembre de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: Tarea 3, AM.

Todos los cálculos deben ser a mano.

1. Dada la matriz
$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$
encuentre su forma escalonada reducida por renglones. Escriba todas las matrices elementales correspondientes a las operaciones que usó para llevar la matriz a la forma que obtuvo.
RESPUESTA
Realizando las operaciones elementales tenemos que
$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \overset{R1 \Longleftrightarrow R3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix} \underset{R3 \to R_3 + 4R_1}{\overset{R_2 \to R_2 + R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 13 & -18 & 3 \end{pmatrix} \overset{R2 \to R2/3}{\longrightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 13 & -18 & 3 \end{pmatrix} \overset{R3 \to R3 - 13R2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -28/3 & 17/3 \end{pmatrix} \overset{R3 \to -3R3/28}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -17/28 \end{pmatrix}.$$
Lo anterior se puede escribir como las matrices elementales:
$$E_3(-3/28)E_32(-13)E_2(1/3)E_{31}(4)E_{21}(1)E_{13} \qquad \blacksquare.$$

2. Dada el sistema $Ax = b$, donde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ a_1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$
encuentre condiciones generales sobre a_1 y a_2 para que el sistema sea consistente. Si se quiere que la solución sea exactamente $x = (3, -1, 2)^t$, ¿qué valores deben tener a_1 y a_2?
RESPUESTA
Ocupemos Gauss Jordan para encontrar su forma escalonada:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ a_1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & a_2 \end{array}\right) \underset{R3 \to R_3 - R_1}{\overset{R_2 \to R_2 - a_1 R_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1-3a_1 & -3+a_1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & a_2 \end{array}\right) \overset{R_2 \Longleftrightarrow R3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & a_2 \\ 0 & -1-3a_1 & -3+a_1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\overset{R_3 \to R_3 - (1+3a_1)R_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & a_2 \\ 0 & 0 & -6-8a_1 & 1 - a2 - a_2 a_1 \end{array}\right)$$
Por lo tanto el sistema es inconsistente cuando no tiene ninguna solución. El sistema anterior no tiene solución si $-6 - 8a_1 = 0$ y $1 - a_2 - a_2 a_1 \neq 0$.

Si $-6-8a_1 \neq 0$, tenemos que

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-a2-a_2a_1}{-6-8a_1} \end{array}\right).$$

3. Encuentre la solución general, escribiéndola como combinación lineal de vectores, del sistema homogéneo $Ax = 0$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

RESPUESTA
Transformemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces ocupando reducción

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1}$$

4. Encuentra la inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

RESPUESTA
Usando Gauss Jordan

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3/2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 \end{array}\right) \xrightarrow[R2 \to R_2 + 2R_3]{R_1 \to R_1 + 2R_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 \end{array}\right).$$

Por lo tanto la inversa es:

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 3.5 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \blacksquare.$$

5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que A es no singular y luego escriba A como producto de matrices elementales.

RESPUESTA

Veamos que A es igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Calculemos el determinante de A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (1)(2)(-4) = -8.$$

Por lo tanto, como el determinante de A es distinto de cero eso implica que A es no singular.

Haciendo reducción hacia atras:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -R_3/4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R2 \to]{R_1 \to -R_3/4}$$

6. i) Encuentre dos matrices que sean invertibles pero que su suma no sea invertible. ii) Encuentre dos matrices singulares cuya suma sea invertible. Justifique todas sus aseveraciones.

7. Encuentre la descomposición LU de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

RESPUESTA

Usamos la eliminación gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + 3R_2]{R_3 \to R_3 + R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -R_3/2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + 8R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4/24}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

8. Encuentre la descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

y luego úsela para encontrar la solución del sistema $Ax = b$, donde

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

RESPUESTA
El problema anterior se resolvió utilizando .... . Ahora se hará uso de un método más sencillo. Si $A = LU$, se sabe que A se puede factorizar como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} = LU$$

Observe que el primer renglón de U es el mismo que el primer renglón de A porque al reducir A a la forma triangular, no hace falta modificar los elementos del primer renglón.
Se pueden obtener todos los coeficientes faltantes con tan sólo multiplicar las matrices. La componente 2, 1 de A es 4. De este modo, el producto escalar del segundo renglón de L y la primera columna de U es igual a 4:

$$4 = 2a \quad \text{o} \quad a = 2$$

Después se tiene:
componente $2, 2$: $7 = 6 + u \to\ u = 1$.
De aquí en adelante se pueden insertar los valores que se encuentran en L y U:

componente $2, 3$: $2 = -2 + v \to\ v = 4$.

componente $2, 4$: $1 = 12 + w \to\ w = -11$.

componente $3, 1$: $-2 = 2b \to\ b = -1$.

componente $3, 2$: $5 = -3 + c \to\ c = 8$.

componente $3, 3$: $-2 = +1 + 32 + x \to\ x = -35$.

componente $3, 4$: $0 = -6 - 88 + y \to\ y = 94$.

componente $4, 1$: $0 = 2d \to\ d = 0$.

componente $4, 2$: $-4 = e \to\ e = -4$.

componente $4, 3$: $5 = -16 - 35f \to\ f = -3/5$.

componente $4, 4$: $2 = 44 - 3(94)/5 + z \to\ z = 72/5$.

Por lo que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & -35 & 94 \\ 0 & 0 & 0 & 72/5 \end{pmatrix} = LU$$

9. Encuentre la descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & 26 & 2 \end{pmatrix},$$

Usando esta misma descomposición como ayuda, encuentre A^{-1}.

RESPUESTA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & 26 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

10. Encuentre la descomposición LU de la matriz por bandas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

(Para una interesante aplicación de matrices por bandas a problemas de flujo de calor en física y la importancia de obtener su descomposición LU, ver problemas 31 y 32 de Linear Algebra, D. Lay, 4th ed., p. 131 y las explicaciones que ahí se dan.)

RESPUESTA

Considerando la metodología del inciso 9. Si $A = LU$, se sabe que A se puede factorizar como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} = LU$$

Observe que el primer renglón de U es el mismo que el primer renglón de A porque al reducir A a la forma triangular, no hace falta modificar los elementos del primer renglón.

Se pueden obtener todos los coeficientes faltantes con tan sólo multiplicar las matrices. La componente 2, 1 de A es a_{21}. De este modo, el producto escalar del segundo renglón de L y la primera columna de U es igual a a_{21}:

$$a_{21} = a_{11} \cdots a \quad \text{o} \quad a = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Después se tiene:

componente $2, 2$: $a_{22} = a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} + u \rightarrow\ u = a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}$

De aquí en adelante se pueden insertar los valores que se encuentran en L y U:

componente $2, 3$: $a_{23} = 0 + v \rightarrow\ v = a_{23}$.

componente $2, 4$: $0 = 0 + w \rightarrow\ w = 0$.

componente $3, 1$: $0 = a_{11}b \rightarrow\ b = 0$.

componente $3, 2$: $a_{32} = (a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}})c \rightarrow\ c = \frac{a_{32}a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$.

componente $3, 3$: $a_{33} = a_{23}\left(\frac{a_{32}a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}\right) + x \rightarrow\ x = -35$.

componente $3, 4$: $a_{34} = 0 + y \rightarrow\ y = a_{34}$.

componente $4, 1$: $0 = a_{11}d \rightarrow\ d = 0$.

componente $4, 2$: $0 = \left(a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}\right)e \rightarrow\ e = 0$.

componente $4, 3$: $5 = -16 - 35f \rightarrow\ f = -3/5$.

componente $4, 4$: $2 = 44 - 3(94)/5 + z \rightarrow\ z = 72/5$

Por lo que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{32}a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & x & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} = LU$$