Maestría en Computo Estadístico
Inferencia Estadística
Tarea 1
30 de noviembre de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: Tarea 8, IE.

1. Sean $X_1, \cdots, X_n \sim Uniforme(0,\theta)$. Sea $f(\theta) \propto 1/\theta$. Calcule la densidad posterior.
RESPUESTA

Definición: 1 *Sea $X_1, \cdots, X_n$ con distribución a priori $f(\theta)$ entones la distribución posteriori cumple que*

$$f(\theta|x) \propto L(\theta)f(\theta),$$

donde $L(\theta)$ representa la función de verosimilitud.

Ocupando la definición (1) como sabemos que la función de verosimilitud para el caso en que la m.a es Uniforme es

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{\theta^n}_{\{\theta \leq \text{máx}(x_1,\cdots,x_n)\}} = \frac{1}{\theta^n}_{\{\theta \leq x_{(n)}\}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(\theta|x) \propto L(\theta)f(\theta) &= \frac{1}{\theta^n}_{\{\theta \leq x_{(n)}\}}\frac{1}{\theta} \\ &\propto \frac{1}{\theta^{n+1}}_{\{\theta \leq x_{(n)}\}}. \ \blacksquare. \end{aligned}$$

Ahora calculamos la constante de normalización,

$$\int_{x(n)}^{\infty} \frac{1}{\theta^{n+1}} = -\frac{1}{n\theta^n}\Big|_{x_{(n)}}^{\infty} = \frac{1}{nx_{(n)}^n}$$

Por lo tanto, la distribución a posteriori es

$$f(\theta|x) = \frac{nx_{(n)}^n}{\theta^{n+1}} 1_{\{\theta \leq x_{(n)}\}}.$$