Maestría en Computo Estadístico
Álgebra Matricial
Tarea 8
4 de diciembre de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: Tarea 9, AM.

Todos los cálculos deben ser a mano.

1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Encuentre una matriz ortogonal P y una diagonal D tal que $A = PDP^t$.

RESPUESTA

Teorema: 1 *(Diapositiva 153). Una matriz cuadrada es ortogonal si y solo si tiene columnas ortonormales.*

Teorema: 2 *(Diapositiva 163). Si A es diagonalizable, $A = PDP^{-1}$ con P ortogonal, entonces $A = PDP^t$. En tal caso diremos que A es diagonalizable ortogonalmente.*

Teorema: 3 *(Diapositiva 163). Si A es simétrica entonces existe una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tal que $A = PDP^t$.*

Ocupando el teorema (3) podemos decir que A es diagonalizable, para pasamos a encontras las matrices P y D. Para ello, primero calculemos el polinomio característico de A,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)[(4-\lambda)(4-\lambda)-4] - 2[2(4-\lambda)-4] + 2[4-2(4-\lambda)]$$

$$= (4-\lambda)[\lambda^2 - 8\lambda + 12] - 2[4 - 2\lambda] + 2[-4 + 2\lambda]$$
$$= 48 - 32\lambda + 4\lambda - 12\lambda + 8\lambda^2 - \lambda^3$$
$$= (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 10\lambda - 16) = (\lambda - 2)(\lambda - 8)(-\lambda + 2).$$

Esto implica que los valores propios de A sean

$$p(\lambda) = 0, \Leftrightarrow$$
$$(5-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-6) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 2.$$

Ahora calculemos los vectores propios para cada uno de los valores propios. Para $\lambda_1 = 8$, tenemos

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 4-8 & 2 & 2 \\ 2 & 4-8 & 2 \\ 2 & 2 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \Rightarrow 2R_3 + R_1]{R_2 \Rightarrow 2R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \Rightarrow -R_1/4 - R_2/12]{R_3 \Rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, de la eliminación Guass-jordan tenemos que la solución del sistema es $x_1 = x_3, x_2 = x_3$ y x_3 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_1 = 8$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$. Realizando un razonamiento análogo, calculemos el vector propio para $\lambda_2 = 2$, tenemos

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 4-2 & 2 & 2 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 2 & 2 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \Rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \Rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, tenemos que la solución del sistema es $x_1 = -x_2 - x_3$, y haciendo $x_2 = 1$ y $x_3 = 0$ y $x_2 = 0, x_3 = 1$ tenemos el conjunto solución es

$$\left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3, x_2 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_2 = 5$ es $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$ y otro $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$. Por lo que ya tenemos 3 vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t, v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t, v_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$. Veamos que estos vectores son ortogonales para ello calculemos el producto interno

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= 1(-1) + 1(0) + 1(1) = 0, \\ \langle v_1, v_3 \rangle &= 1(-1) + 1(0) + 1(1) = 0, \\ \langle v_2, v_3 \rangle &= -1(-1) + 1(0) + 0(1) = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Observemos que el vector v_3 no es ortogonal a v_2 entonces para hacerlo ortogonal encontremos la proteción de v_3 en v_2 y v_1 de la siguiente forma,

$$w = proj_{u_1}(u_3) + proj_{u_2}(u_3) = \frac{-1+1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cómo sabemos que un vector se puede escribir como suma de dos vectores ortogonales, sea y ese vector entonces

$$u_3 = w + y \Rightarrow y = u_3 - w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces ya tenemos tres vectores ortogonales, ahora normalicemos cada uno de los vectores,

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^t \\ u_2 &= \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}^t \\ u_3 &= \frac{v_3}{||v_3||} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^t. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el teorema **podemos concluir que la A se diagonaliza como**

$$A = PDP^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix} \ \blacksquare.$$

2. Diagonalize ortogonalmente la matriz simétrica.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

RESPUESTA

Denotemos a la matriz del problema como la matriz A. Observemos que A es simetrica, ocupando el teorema (3) podemos decir que A es diagonalizable. Encontramos los valores propios y vectores propios asociados a esos valores propios de A para determinar a las matrices D y P. Para ello, primero calculemos el polinomio característico de A,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)[(5-\lambda)^2 - 1] = (5-\lambda)[\lambda^2 - 10\lambda + 25 - 1] =$$
$$= (5-\lambda)[\lambda^2 - 10\lambda + 24]$$
$$= (5-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-6).$$

Esto implica que los valores propios de A sean

$$p(\lambda) = 0, \Leftrightarrow$$
$$(5-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-6) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 5 \ \ y \ \ \lambda_3 = 6.$$

Ahora calculemos los vectores propios para cada uno de los valores propios. Para $\lambda_1 = 4$, tenemos

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 5-4 & 1 & 0 \\ 1 & 5-4 & 0 \\ 0 & 0 & 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \Rightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, de la eliminación Guass-jordan tenemos que la solución del sistema es $x_1 = -x_2$ y $x_3 = 0$, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_1 = 1$ es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t$. Realizando un razonamiento análogo, calculemos el vector propio para $\lambda_2 = 5$, tenemos

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 5-5 & 1 & 0 \\ 1 & 5-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, tenemos que la solución del sistema es $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ y x_3 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_2 = 5$ es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$. Realizando un razonamiento análogo, calculemos el vector propio para $\lambda_3 = 6$, tenemos

$$A - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} 5-6 & 1 & 0 \\ 1 & 5-6 & 0 \\ 0 & 0 & 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \Rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, de la eliminación Guass-jordan tenemos que la solución del sistema es $x_1 = x_2$ y $x_3 = 0$, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_3 = 6$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$. Por lo que ya tenemos 3 vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$. Veamos que estos vectores son ortogonales para ello calculemos el producto interno

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= 1(0) - 1(0) + 0(1) = 0, \\ \langle v_1, v_3 \rangle &= 1(1) - 1(1) + 0(0) = 0, \\ \langle v_2, v_3 \rangle &= 1(0) + 1(0) + 0(1) = 0. \end{aligned}$$

Ahora normalicemos cada uno de los vectores,

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}^t \\ u_2 &= \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \\ u_3 &= \frac{v_3}{||v_3||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}^t \end{aligned}$$

Por lo tanto, con el conjunto de los vectores propios unitarios podemos genera la matriz P tal que P es una matriz ortogonal (por el teorema 1),

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, por el teorema 2 **podemos concluir que la A se diagonaliza ortogonalmente como**

$$\begin{aligned} A = PDP^t &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad \blacksquare. \end{aligned}$$

3. Encuentre la descomposición espectral de la matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

RESPUESTA

Definición: 1 *(Diapositiva 164). En el caso de una matriz simétrica, la descomposición espectral toma la forma*
$$A = \lambda_1 u_1 u_1^t + \lambda_2 u_2 u_2^t + \cdots + \lambda_n u_n u_n^t$$
donde los u_i *son los vectores de* P *en la descomposición* $A = PDP^t$ *de* A.

Ocupando la definición (1), primero encontremos la diagonalización A, para ello primero calculemos el polinomio característico de A,

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)(-3-\lambda) - 16 \\ &= \lambda^2 - 9 - 16 = \lambda^2 - 25 = (\lambda-5)(\lambda+5). \end{aligned}$$

Esto implica que los valores propios de A sean

$$\begin{aligned} p(\lambda) = 0, \Leftrightarrow \\ (\lambda-5)(\lambda+5) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 5, \quad y \;\; \lambda_2 = -5. \end{aligned}$$

Ahora calculemos los vectores propios para cada uno de los valores propios. Para $\lambda_1 = 5$, tenemos

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 3-5 & 4 \\ 4 & -3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \Rightarrow R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow -R_1/2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, de la eliminación Guass-jordan tenemos que la solución del sistema es $x_1 = 2x_2$ y x_2 libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : x_2 \;\in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_1 = 5$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t$. Realizando un razonamiento análogo, calculemos el vector propio para $\lambda_2 = -5$, tenemos

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 3+5 & 4 \\ 4 & -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \Rightarrow 2R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_1/8} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, tenemos que la solución del sistema es $x_1 = -1/2x_2$, y x_2 libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} : x_2 \;\in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_2 = -5$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}^t$. Por lo que ya tenemos 2 vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^t, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}^t$. Ahora normalicemos cada uno de los vectores

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^t \\ u_2 &= \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^t. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la A se diagonaliza como

$$A = PDP^t = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, **ocupando el teorema (1) podemos concluir que la descomposición espectral de A es**

$$\begin{aligned} A &= \lambda_1 u_1 u_1^t + \lambda_2 u_2 u_2^t \\ &= 5 \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare. \end{aligned}$$

4. Diga quién es la matriz de la forma cuadrática

$$x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$$

y encuentre un cambio de variable para que se transforme en una sin productos cruzados.

RESPUESTA

Teorema: 4 *(Diapositiva 166). Si $Q(x) = x^tAx$ es una forma cuadrática, con A simétrica, entonces existe una matriz ortogonal P tal que $A = PDP^t$, haciendo el cambio de variable $y = P^{-1}x$, y^tDy toma los mismos valores que Q sin tener productos cruzados.*

Teorema: 5 *(Libro 403,). Considere el polinomio homogéneo general de grado dos en n variables $x = (x_1, x_2, \cdots, X_n)^t$*

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 + \sum_{i \leq i < j \leq n} \beta_{ij} x_i x_j.$$

Entonces el polinomio anterior se puede expresar como x^tAx donde $A = \{a_{ij}\}$ es una matriz simétrica de tamaño $n \times n$ con

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha_1 & si\ i = j, \\ \frac{\beta_{ij}}{2} & si\ i < j, \\ \frac{\beta_{ij}}{2} & si\ i > j, \end{cases}$$

Ocupando el teorema (4) y considerando a $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t$ tenemos que

$$x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Es decir, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es de la forma cuadrática $Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$. Ocupando el teorema (5) podemos encontrar un cambio de variable para no tener productos cruzados. Para ello primero encontremos los valores propios y vectores propios asociados a esos valores propios de A para determinar a las matrices D y P. Para ello, primero calculemos el polinomio característico de A,

$$\begin{aligned}
p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = &\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda) - 1] - [1 - \lambda - 3] + 3[1 - 3(3-\lambda)] = \\
&= (1-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 2] - [-\lambda - 2] + 3[-8 + 3\lambda] \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 2 - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda + \lambda + 2 - 24 + 9\lambda \\
&= -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda - 20 \\
&= (\lambda + 2)(-\lambda^2 + 7\lambda - 10) \\
&= (\lambda + 2)(\lambda - 2)(-\lambda + 5).
\end{aligned}$$

Esto implica que los valores propios de A sean

$$\begin{gathered}
p(\lambda) = 0, \Leftrightarrow \\
(\lambda + 2)(\lambda - 2)(-\lambda + 5) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2 \ \ y \ \ \lambda_3 = 5.
\end{gathered}$$

Ahora calculemos los vectores propios para cada uno de los valores propios. Para $\lambda_1 = -2$, tenemos

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1+2 & 1 & 3 \\ 1 & 3+2 & 1 \\ 3 & 1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \Rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \Rightarrow 3R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \Rightarrow R_1/3]{R_2 \Rightarrow R_2/14} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, de la eliminación Guass-jordan tenemos que la solución del sistema es $x_1 = -x_3,\ x_2 = 0$ y x_3 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_1 = -2$ es $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$. Realizando un razonamiento análogo, calculemos el vector propio para $\lambda_2 = 2$, tenemos

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1-2 & 1 & 3 \\ 1 & 3-2 & 1 \\ 3 & 1 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \Rightarrow R_3 + 3R_1]{R_2 \Rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \Rightarrow -R_1 + R_2/2]{R_3 \Rightarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, tenemos que la solución del sistema es $x_1 = x_3,\ x_2 = -2x_3$ y x_3 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_2 = 2$ es $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix}^t$. Realizando un razonamiento análogo, calculemos el vector propio para $\lambda_3 = 5$, tenemos

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix}1-5 & 1 & 3\\ 1 & 3-5 & 1\\ 3 & 1 & 1-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \Rightarrow 4R_3+3R_1]{R_2 \Rightarrow 4R_2+R_1} \begin{pmatrix}-4 & 1 & 3\\ 0 & -7 & 7\\ 0 & 7 & -7\end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \Rightarrow -R_1 - R_2/7]{R_3 \Rightarrow R_3+R_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, de la eliminación Guass-jordan tenemos que la solución del sistema es $x_1 = x_3,\ x_2 = x_3$ y x_3 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} : x_3 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_3 = 5$ es $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t$. Por lo que ya tenemos 3 vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}^t, v_2 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix}^t, v_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t$. Veamos que estos vectores son ortogonales para ello calculemos el producto interno

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_2\rangle &= -1(1) + 0(-2) + 1(1) = 0,\\ \langle v_1, v_3\rangle &= -1(1) + 0(1) + 1(1) = 0,\\ \langle v_2, v_3\rangle &= 1(1) - 2(1) + 1(1) = 0.\end{aligned}$$

Ahora normalicemos cada uno de los vectores,

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^t\\ u_2 &= \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}^t\\ u_3 &= \frac{v_3}{||v_3||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^t\end{aligned}$$

Por lo tanto, con el conjunto de los vectores propios unitarios podemos genera la matriz P tal que P es una matriz ortogonal (por el teorema 1),

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, por el teorema 2 tenemos que A se diagonaliza ortogonalmente como

$$\begin{aligned}A = PDP^t &= \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^t\\ &= \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Entonces ocupando el teorema (4), tenemos el cambio de variable

$$y = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} x$$

hace que

$$y^t \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} y$$

tome los mismos valores que $Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2$, es decir, sin los productos cruzados. $\blacksquare$.

5. Encuentre los valores singulares de

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

RESPUESTA

> **Definición: 2** *(Diapositiva 173). Sea A una matriz $m \times n$. Observemos que:*
>
> a) *A^tA es simétrica.*
>
> b) *Los valores propios de A^tA son no negativos.*
>
> $$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n 0.$$
>
> *Los valores singulares de A son $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \cdots, n$.*

Entonces para encontrar los valores singulares, primero busquemos los valores propios de A^tA.

$$A^tA = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}.$$

Ahora encontremos los valores propios de A^tA, para ello, primero calculemos el polinomio característico de A,

$$p(\lambda) = \det(A^tA - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(7-\lambda) - 12$$
$$= \lambda^2 - 10\lambda + 21 - 12 = \lambda^2 - 10\lambda - 9 = (\lambda - 9)(\lambda - 1).$$

Esto implica que los valores propios de AA^t sean

$$p(\lambda) = 0, \Leftrightarrow$$
$$(\lambda - 9)(\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 9 \; > \; \lambda_2 = 1.$$

Por lo que podemos concluir que **los valores singulares son**

$$\sigma_1 = \sqrt{9} = 3 \;\text{ y }\; \sigma_2 = \sqrt{1} = 1. \blacksquare.$$

6. Encuentre una desmposición en valores singulares de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

RESPUESTA

Teorema: 6 *(Diapositiva 173). Sea A una matriz de $m \times n$ de rango r. Entonces existe una matriz Σ de tamaño $m \times n$ de la forma*

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde D es una matriz diagonal $r \times r$ que tiene como entradas los primeros r valores singulares de A, $\sigma_1 \geq \sigma_{\geq} \cdots \geq \sigma_r > 0$ (en ese orden), y existen una matriz ortogonal U, $m \times m$ y una matriz ortogonal V , $n \times n$ tal que

$$A = U\Sigma V^t.$$

Considerando la metodología para encontrar la descomposición en valores singulares (6) vista en clase, primero encontremos el producto de A^tA y AA^t

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comparando las matrices resultados, observamos que trabajar con AA^t es más sencillo que A^tA. Por lo que en lugar de encontrar la descomposición en valores singulares de A, encontremos la descomposición en valores singulares de A^t y será más sencillo la de A. Ahora encontremos los valores propios de AA^t, para ello, primero calculemos el polinomio característico de AA^t,

$$p(\lambda) = \det(AA^t - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2-(2-\lambda) \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 6-\lambda & 4 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda[(6-\lambda)(4-\lambda) - 4(2)]$$
$$= -\lambda[\lambda^2 - 10\lambda + 24 - 8] = -\lambda(\lambda^2 - 10\lambda + 16) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-8).$$

Esto implica que los valores propios de AA^t sean

$$p(\lambda) = 0, \Leftrightarrow$$
$$-\lambda(\lambda-2)(\lambda-8) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 8 \;>\; \lambda_2 = 2 \;>\; \lambda_3 = 0.$$

Por lo que, los valores singulares son

$$\sigma_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \;\text{ y }\; \sigma_2 = \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Y esto implica que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculemos los vectores propios para cada uno de los valores propios. Para $\lambda_1 = 8$, tenemos

$$AA^t - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2-8 & 2 & 2 \\ 2 & 6-8 & 2 \\ 2 & 2 & 2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \Rightarrow 3R_3 + R_1]{R_2 \Rightarrow 3R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 8 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \Rightarrow R_1 + R_2/2]{R_3 \Rightarrow R_3 + 2R_2}$$
$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \Rightarrow -R_2/4]{R_1 \Rightarrow -R_1/6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, de la eliminación Guass-jordan tenemos que la solución del sistema es $x_1 = x_3, x_2 = 2x_3$ y x_3 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_1 = 8$ es $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t$. Realizando un razonamiento análogo, calculemos el vector propio para $\lambda_2 = 2$, tenemos

$$AA^t - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2-2 & 2 & 2 \\ 2 & 6-2 & 2 \\ 2 & 2 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \Rightarrow R_2 - R_1]{R_1 \Leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \Rightarrow R_1 - R_2]{R_3 \Rightarrow R_3 - R_2}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \Rightarrow R_2/2]{R_1 \Rightarrow R_1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, tenemos que la solución del sistema es $x_1 = x_3, \ x_2 = -x_3$ y x_3 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_2 = 5$ es $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t$. Realizando un razonamiento análogo, calculemos el vector propio para $\lambda_3 = 0$, tenemos

$$AA^t - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \Rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \Leftrightarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \Rightarrow R_2/4]{R_1 \Rightarrow R_1/2 - R_2/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, tenemos que la solución del sistema es $x_1 = -x_3, \ x_2 = 0$ y x_3 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_3 = 0$ es $v_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$. Entonces tenemos que los vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t$ y $v_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$. Ahora normalizamos los vectores anteriores,

$$v_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}^t,$$
$$v_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}^t,$$
$$u_3 = \frac{v_3}{||v_3||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^t.$$

Entonces lo anterior implica que,

$$V = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Y por, último calculemos u_1 y u_2 de la siguiente forma $u_i = \frac{1}{\sigma_i}Av_1$.

$$u_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 + \frac{2}{\sqrt{3}} + 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{6}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$
$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Ahora encontremos un vector que sea independiente a u_1 y u_2, para ello denotemoslo de la forma $u_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & a\end{pmatrix}$ tal que $\frac{\alpha}{2\sqrt{3}} + \frac{\beta}{3} \neq a$ donde

$$\alpha\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \;\&\; \beta = \frac{3\alpha}{\sqrt{6}} = \frac{3(2/\sqrt{3})}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}.$$

Es decir, $a \neq \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Entonces por convicción escogemos $a = 0$ por lo que el otro vector elegido independiente de u_1 y u_2 es $u_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Entonces como tenemos tres vectores en $\mathbb{R}^3$ podemos concluir que son una base para $\mathbb{R}^3$ ya que $\dim(\mathbb{R}^3) = \#\{\text{vectores independientes}\} = 3$. Con la base anterior utilicemos la metodología Gram Schimidt para encontrar ahora una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, para facilitar los cálculos renombremos los vectores de la siguiente forma $u_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^t, u_2 = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3}\end{pmatrix}^t$ y $u_3 = \begin{pmatrix}0 & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}^t$. Con lo anterior, tenemos ahora

$$w_1 = u_1,$$
$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}w_1,$$

calculemos lo anterior

$$\langle w_1, w_1\rangle = \quad 1(1) + 0(0) + 0(0) = \quad 1, \quad \langle u_2, w_1\rangle \quad = \sqrt{3}/2(1) + 1/\sqrt{6}(0) + 1/2\sqrt{3}(0) \quad = \sqrt{3}/2 \Rightarrow$$

$$w_2 = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ 1/\sqrt{6}\\ 1/2\sqrt{3}\end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1/\sqrt{6}\\ 1/2\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$w_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle u_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2,$$

calculemos lo anterior

$$\begin{aligned}
\langle w_2, w_2\rangle &= 0(0) + 1/\sqrt{6}(1/\sqrt{6}) + 1/2\sqrt{3}(1/2\sqrt{3}) = 1/6 + 1/12 = 3/12 = 1/4,\\
\langle u_3, w_2\rangle &= 0(0) - 1/\sqrt{3}(1/\sqrt{6}) + 1/\sqrt{3}(1/2\sqrt{3}) = -1/3\sqrt{2} + 1/6 = (1-\sqrt{2})/6,\\
\langle u_3, w_1\rangle &= 0(1) - 1/\sqrt{3}(0) + 1/\sqrt{3}(0) = 0
\end{aligned}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3}\end{pmatrix} - \frac{0}{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} - \frac{4(1-\sqrt{2})}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/2\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2(1-\sqrt{2})/3\sqrt{6} \\ (1-\sqrt{2})/3\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (2-5\sqrt{2})/3\sqrt{6} \\ (4-\sqrt{2})/3\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, una base ortogonal sería

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/2\sqrt{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ (2-5\sqrt{2})/3\sqrt{6} \\ (4-\sqrt{2})/3\sqrt{3}\end{pmatrix} \right\}.$$

Por lo que esto implica que

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} \\ 0 & (2-5\sqrt{2})/3\sqrt{6} & (4-\sqrt{2})/3\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} \\ 0 & (2-5\sqrt{2})/3\sqrt{6} & (4-\sqrt{2})/3\sqrt{3}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^t.$$

Por lo tanto, **esto implica que la descomposición de valores singulares de A es**

$$\begin{aligned}
A = V\Sigma U^t &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 1/2\sqrt{3} \\ 0 & (2-5\sqrt{2})/3\sqrt{6} & (4-\sqrt{2})/3\sqrt{3}\end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & (2-5\sqrt{2})/3\sqrt{6} \\ 0 & 1/2\sqrt{3} & (4-\sqrt{2})/3\sqrt{3}\end{pmatrix}. \quad \blacksquare.
\end{aligned}$$

7. Encuentre una descomposición en valores singulares de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1-2 & \end{pmatrix}.$$

RESPUESTA

Considerando la metodología para encontrar la descomposición en valores singulares (6) vista en clase, primero encontremos el producto de A^tA

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1-2 & \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1-2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1-2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1-2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1-2 & \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1-2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ahora encontremos los valores propios de A^tA, para ello, primero calculemos el polinomio característico de A^tA,

$$p(\lambda) = \det(A^tA - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(9-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 54 - 4$$
$$= \lambda^2 - 15\lambda + 50 = (\lambda - 10)(\lambda - 5).$$

Esto implica que los valores propios de A^tA sean

$$p(\lambda) = 0, \Leftrightarrow$$
$$(\lambda - 10)(\lambda - 5) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 10 \;>\; \lambda_2 = 5.$$

Por lo que, los valores singulares son

$$\sigma_1 = \sqrt{10} = \sqrt{10} \;\text{ y }\; \sigma_2 = \sqrt{5}.$$

Y esto implica que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Ahora calculemos los vectores propios para cada uno de los valores propios. Para $\lambda_1 = 10$, tenemos

$$A^tA - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 5-10 & 0 & 5 \\ 0 & 5-10 & 0 \\ 5 & 0 & 5-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \Rightarrow -R_1/5]{R_3 \Rightarrow R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \Rightarrow -R_2/5}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, de la eliminación Guass-jordan tenemos que la solución del sistema es $x_1 = x_3, x_2 = 0$ y x_3 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_1 = 10$ es $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$. Realizando un razonamiento análogo, calculemos el vector propio para $\lambda_2 = 5$, tenemos

$$AA^t - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 5-5 & 0 & 5 \\ 0 & 5-5 & 0 \\ 5 & 0 & 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \Leftrightarrow R_3/5]{R_1 \Leftrightarrow R_3/5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, tenemos que la solución del sistema es $x_1 = x_3 = 0$, y x_2 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_2 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_2 = 5$ es $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$. Realizando un razonamiento análogo, calculemos el vector propio para $\lambda_3 = 0$, tenemos

$$AA^t - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \Rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \Leftrightarrow R_2/5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \Rightarrow R_1/5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, tenemos que la solución del sistema es $x_1 = -x_3, \ x_2 = 0$ y x_3 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_3 = 0$ es $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t$. Entonces tenemos que los vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t$. Ahora normalizamos los vectores anteriores,

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^t, \\ v_2 &= \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t, \\ u_3 &= \frac{v_3}{||v_3||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^t. \end{aligned}$$

Entonces lo anterior implica que,

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Y por, último calculemos u_1 y u_2 de la siguiente forma $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_1$.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo que esto implica que

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, **la descomposición de valores singulares de A es**

$$A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^t$$
$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare.$$

8. Encuentre la seudoinversa de las matrices de los ejercicios 5, 6 y 7.

RESPUESTA

> **Definición: 3** *(Diapositiva 175). Sea A una matriz $m \times n$. La seudoinversa, o inversa de (Moore-Penrose) de A está dada por*
>
> $$A^{\dagger} = V_r D^{-1} U_r^t$$
>
> *donde $A = U_r D V_r^t$ es una descomposición en valores singulares reducida de A.*

Empecemos por el ejercicio 5, tenemos

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, A^tA = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1, \sigma_1 = 3, \sigma = 1.$$

Entonces primero encontremos una descomposición en valores singulares, lo anterior implica que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. Ahora calculemos los vectores propios para cada uno de los valores propios. Para $\lambda_1 = 9$, tenemos

$$A^tA - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 3-9 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \overset{R_1 \Rightarrow R_2 1 - R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_2 - 2\sqrt{3}R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, de la eliminación Guass-jordan tenemos que la solución del sistema es $x_1 = x_2/\sqrt{3}$, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} : x_2 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_1 = 9$ es $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^t$. Realizando un razonamiento análogo, calculemos el vector propio para $\lambda_2 = 1$, tenemos

$$A^tA - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 3-1 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix} \overset{R_1 \Rightarrow R_1/1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_2 - 2\sqrt{3}R_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, tenemos que la solución del sistema es $x_1 = -\sqrt{3}x_2$, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} : x_2 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_2 = 1$ es $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^t$. Por lo que ya tenemos 2 vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^t, v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^t$.Ahora normalizamos los vectores anteriores,

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}^t, \\ v_2 &= \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}^t, \end{aligned}$$

Entonces lo anterior implica que,

$$V = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Y por, último calculemos u_1 y u_2 de la siguiente forma $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_1$.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3\sqrt{3}/2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \\ u_2 &= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, una base ortogonal sería

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por lo que esto implica que

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Y por lo tanto la descomposición en valores singulares de A es

$$A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}^t.$$

Observemos entonces que la descomposición anterior también es la descomposición en valores singulares reducida de A, por lo podemos concluir que **la seudoinversa de A es**

$$\begin{aligned} A^\dagger = V_r \Sigma^{-1} U_r^t &= \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}^t. \end{aligned}$$

Para el ejercicio 6, tenemos que la descomposición es

$$A = UDV^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & (2-5\sqrt{2})/3\sqrt{6} \\ 0 & 1/2\sqrt{3} & (4-\sqrt{2})/3\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Ahora ocupando la definición (3) y como el $\rho(A) = 2$, podemos observar que la descomposición de valores singulares reducida de A es

$$A = U_r D_r V_r^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & (2-5\sqrt{2})/3\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Por lo que la seudoinversa de A sería

$$\begin{aligned} A^\dagger = V_r \Sigma^{-1} U_r^t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & (2-5\sqrt{2})/3\sqrt{6} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & (2-5\sqrt{2})/3\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ \sqrt{3}/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para el ejercicio 7, tenemos que la descomposición es

$$A = U\Sigma V^t = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ -2\sqrt{2}/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^t,$$

Ahora ocupando la definición (3) y como el $\rho(A) = 2$, podemos observar que la descomposición de valores singulares reducida de A es

$$A = U_r D V_r^t = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{10} & 2/\sqrt{5} \\ -2\sqrt{2}/\sqrt{10} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$$

Por lo que la seudoinversa de A sería

$$A^\dagger = V_r \Sigma^{-1} U_r^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{10} & -2\sqrt{2}/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare.$$

9. Dado el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 &= 0, \end{aligned}$$

si es consistente, encuentre la única solución que tiene norma mínima; si es inconsistente, encuentre la mejor aproximación a una solución que tenga norma mínima.

RESPUESTA
Observando que $x_1 + x_2 = 1 \neq 2 = x_1 + x_2$ podemos concluir que el sistema es inconsistente ya que

no puede tomar dos valores distintos. Ahora ocupemos mínimos cuadrados para encontrar la mejor aproximación de norma mínima. Tenemos,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculemos $A^t A$,

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Entonces como es una matriz diagonal, podemos concluir que $A^t A$ es invertible por lo que la solución de mínimos cuadrados es única de la forma

$$\hat{x} = (A^t A)^{-1} b = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2. \end{pmatrix}. \quad \blacksquare.$$

10. Sea A, B matrices $n \times n$ semi positivas definidas tales que $A + B = 0$. Demuestre que $A = B = 0$.

RESPUESTA

> **Definición: 4** *(Diapositiva 165). Una forma cuadrática es una función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forma*
>
> $$Q(x) = x^t B x$$
>
> *donde B es una matriz $n \times n$ y x es el vector correspondiente al valor de $\mathbb{R}^n$.*
> *Entonces, se dice que es semi positiva definida si $Q(x) \geq 0, \forall\ x \neq 0$.*

> **Teorema: 7** *(Ejercicio 5, Tarea 1). Sea A una matriz cuadrada, esta se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica de la forma*
>
> $$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2},$$
>
> *donde $\frac{A+A^t}{2}$ es la matriz simétrica y $\frac{A-A^t}{2}$ es la matriz antisimetrica.*

> **Teorema: 8** *(Diapositiva 166). Si A es simétrica, entonces $x^t A x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ si y solo si $A = 0$.*

Ocupando la definición de matriz semi positiva definida (4), entonces para cualquier $x \neq 0$ tenemos que $x^t A x \geq 0$ y para cualquier $y \neq 0$ tenemos que $y^t B t \geq 0$. Entonces, haciendo $x = y \neq 0$ y como $A + B = 0$ entonces

$$0 = x^t (A + B) x = (x^t A + x^t B) x = x^t A x + x^t B x,$$

pero como sabemos que $x^tAx \geq 0$ y $x^tBx \geq 0$, esto implica que

$$x^tAx = 0 \;\text{ y }\; x^tBx = 0 \tag{1}$$

Entonces dado que x^tAx y x^tBx son números números reales, su transposición es igual a sí mismo por lo que tenemos que

$$x^tAx = (x^tAx)^t = x^tA^tx \Rightarrow x^tAx = \frac{x^tAx + x^tA^tx}{2} = x^t\left(\frac{A+A^t}{2}\right)x, \quad \text{y}$$
$$x^tBx = (x^tBx)^t = x^tB^tx \Rightarrow x^tBx = \frac{x^tBx + x^tB^tx}{2} = x^t\left(\frac{B+B^t}{2}\right)x.$$

Entonces regresando al resultado obtenido en (1) tenemos que

$$x^tAx = x^t\left(\frac{A+A^t}{2}\right)x = 0 \;\text{ y }\; x^tBx = x^t\left(\frac{B+B^t}{2}\right)x = 0.$$

Ahora ocupemos el resultado obtenido de la tarea 1 ejercicio 5 (7), tenemos que $(A+A^t)/2$ es una matriz simétrica y $(B+B^t)/2$ es una matriz simétrica. Y ocupando el teorema (8) tenemos que

$$x^t\left(\frac{A+A^t}{2}\right)x = 0 \Leftrightarrow \frac{A+A^t}{2} = 0 \;\text{ y }\; x^t\left(\frac{B+B^t}{2}\right)x = 0 \Leftrightarrow \frac{B+B^t}{2} = 0. \Rightarrow$$
$$A + A^t = 0 \Rightarrow A = -A^t \;\text{ y }\; B + B^t = 0 \Rightarrow B = -B^t.$$

Entonces, **como A y B son simétricas (por definición de semi positivas definidas) esto implica que $A = -A^t = A^t$ y $B = -B^t = B^t$ y por lo tanto $A = B = 0$. ■.**

Todo lo anterior se pudo omitir para hacerlo de una manera más sencilla, pero me dí cuenta tarde de este teorema. XD

> **Teorema: 9** *(Diapositiva 166). Si A es simétrica, entonces $x^tAx = 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ si y solo si $A = 0$.*

11. Sea A una matriz simétrica $n \times n$ y $Q(x)$ la forma cuadrática asociada. Si Q es positiva definida, demuestre que las entradas diagonales de A son positivas.

    RESPUESTA
    Tenemos que $Q(x)$ es positiva definida, esto implica que $Q(x) > 0 \Leftrightarrow x^tAx > 0, \quad \forall x \neq 0$. Ahora definamos a x_i el vector elemental $n \times 1$ tal que el elemento i es igual 1 y 0 todos los demás, es decir, el vectore e_i. Entonces

    $$x^tAx > 0 \Rightarrow e_i^tAe_i > 0 \Rightarrow a_{ii} > 0.$$

    Por lo tanto, **si hacemos lo anterior para $i = 1, \cdots, n$ entonces tendremos que $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn} > 0$. Por lo que podemos concluir que la diagonal de A son positivas. ■..**

12. Sea A una matriz $m \times n$. Al aplicar una sucesión de operaciones elementales obtenemos que

    $$EAP = \begin{pmatrix} T & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde T es una matriz triangular superior con elementos diagonales no cero, P es una matriz de permutación y B y los bloques de cero tienen los tamaños apropiados (otra forma de ver esto, es recordando la descomposición normal de una matiz). Demuestre que

$$G = P \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E,$$

es una inversa generalizada de A. ¿Cumple G con las propiedades de Moore−Penrose? Si es cierto, demuéstrelo y si no escriba un ejemplo que muestre una de las propiedades que no cumple para serlo. Si A es diagonalizable, ¿puede pensar en una forma para G en este caso y demostrar que es una inversa generalizada?

RESPUESTA

Teorema: 10 *(Diapositiva 182). A tiene inversa generalizada G si y solo si $AGA = A$.*

Definición: 5 *(Diapositiva 184). Sea A una matriz $m \times n$. Una matriz G, $n \times m$, es una inversa de Moore−Penrose de A si satisface:*

a) $AGA = A$
b) $GAG = G$
c) $(AG)^t = AG$
d) $(GA)^t = GA$.

Como E es de operaciones elementales entonces podemos decir que E^{-1} existe, entonces tenemos que

$$E^{-1}(EAP) = E^{-1} \begin{pmatrix} T & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AP = E^{-1} \begin{pmatrix} T & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\&\; EA = \begin{pmatrix} T & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Utilizando lo anterior y por el teorema (10) tenemos que

$$\begin{aligned} AGA &= AP \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} EA = E^{-1} \begin{pmatrix} T & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} EA = E^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} EA = \begin{pmatrix} E^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} EA \\ &= \begin{pmatrix} E^{-1}EA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A. \end{aligned}$$

Por lo anterior, **podemos decir que G no es su inversa generalizada.**

Ahora veamos que propiedades de Moore−Penrose cumple G, la primera ya vimos que no la cumple, es decir $\mathbf{AGA \neq A}$. Veamos la segunda

$$\begin{aligned} GAG &= P \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} EAP \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E = P \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E \\ &= P \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E = P \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E = G. \end{aligned}$$

Es decir, **la segunda propiedad si se cumple.** Sigamos con la tercera,

$$(AG)^t = \left(AP \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E \right)^t = \left(E^{-1} \begin{pmatrix} T & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E \right)^t = \left(E^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E \right)^t = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, **se cumple la propiedad tres** $(\mathbf{AG})^{\mathbf{t}} = \mathbf{AG}$. Por último, tenemos que

$$(GA)^t = \left(P \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} EA \right)^t = \left(P \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^t = \left(P \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^t = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, **se cumple la propiedad cuarta** $(\mathbf{GA})^{\mathbf{t}} = \mathbf{GA}$.

Si A es diagonalizable, es decir, $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD$, entonces podemos reescribir a G como

$$G = PD^{-1}P^{-1}.$$

Esto implica que

$$AGA = A(PD^{-1}P^{-1})A = (AP)(D^{-1}P^{-1})A) = PDD^{-1}P^{-1}A = PIP^{-1}A = PP^{-1}A = A.$$

Por lo tanto, por el teorema (10) podemos concluir que G es la inversa generalizdad de A. $\blacksquare$.