**Maestría en Computo Estadístico**
**Inferencia Estadística**
**Tarea 2**
27 de agosto de 2020

*Enrique Santibáñez Cortés*

Repositorio de Git: Tarea 2, IE.

1. Cuando una máquina no se ajusta adecuadamente tiene una probabilidad 0.15 de producir un artículo defectuoso. Diariamente, la máquina trabaja hasta que se producen 3 artículos defectuosos. Se detiene la máquina y se revisa para ajustarla. ¿Cuál es la probabilidad de que una máquina mal ajustada produzca 5 o más artículos antes de que sea detenida? ¿Cuál es el número promedio de artículos que la máquina producirá antes de ser detenida?

   **RESPUESTA**
   Sea $X$ el número de artículos producidos antes de que se produzcan 3 artículos defectuosos, entonces podemos decir que $X \sim BN(3, 0.15)$. Por lo tanto, **la probabilidad de que una máquina mal ajustada produzca 5 o más artículos antes de que sea detenida** es

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4).$$

   Por como se distribuye $Y$ podemos decir que **el número promedio de artículos que la máquina producirá antes de ser detenida** es

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p} = \frac{3}{0.15}.\blacksquare.$$

2. Los empleados de una compañía de aislantes son sometidos a pruebas para detectar residuos de asbesto en sus pulmones. Se le ha pedido a la compañía que envíe a tres empleados, cuyas pruebas resulten positivas, a un centro médico para realizarles más análisis. Si se sospecha que el 40 % de los empleados tienen residuos de asbesto en sus pulmones, encuentre la probabilidad de que deban ser analizados 10 trabajadores para poder encontrar a 3 con resultado positivo.

   **RESPUESTA**
   Tenemos una distribución $Y \sim BN(3, 0.4)$.

5. Considera $X$ una v.a. con función de distribución $F$ y función de densidad $f$, y sea $A$ un intervalo de la línea real $\mathbb{R}$. Definamos la función indicadora $1_A(x)$ :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Sea $Y = 1_A(x)$. Encuentre una expresión para la distribución acumulada y el valor esperado de $Y$.
   **RESPUESTA**
   Consideremos dos casos:
   cuando $X$ es discreta tenemos que la función de densidad es

$$f(Y = y) = \mathbb{P}(1_A(x) = y) = \mathbb{P}(\{x : 1_A(x) = y\}).$$

$$f(y) = \begin{cases} \mathbb{P}(x \in A) & \text{para y=1} \\ \mathbb{P}(x \not\in A) & \text{para y=0} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Por lo que

   El valor esperado es

$$\mathbb{E}[Y] = \sum y f(y) = 1 \cdot f(1) + 0 \cdot f(0) = 1 \cdot f(1) = \mathbb{P}(x \in A)$$

6. Las calificaciones de un estudiante de primer semestre en un examen de química se describen por la densidad de probabilidad
$$f_y(y) = 6y(1-y) \quad 0 \leq y \leq 1,$$
donde $y$ representa la proporción de preguntas que el estudiante contesta correctamente. Cualquier calificación menor a 0.4 es reprobatoria. Responda lo siguiente:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante repruebe?
   b) Si 6 estudiantes toman el examen, ¿cuál es la probabilidad de exactamente 2 reprueben?

   **RESPUESTA**
   Solo para comprobación veamos que realmente sea una función de probabilidad, para ello observemos que
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_y(y) = \int_0^1 6y(1-y) = 3y^2 - 2y^3|_0^1 = 1.$$
   Por lo tanto observamos que si es una función de probabilidad.

   La probabilidad de que repruebe es
$$f_y(Y < 0.4) = \int_0^{0.4} f_y(y) = \int_0^{0.4} 6y(1-y) = 3y^2 - 2y^3|_0^{0.4} = 0.352$$
   Ahora, consideremos que $X$ el número de estudiantes de reprueban el examen de los 6 que tomaron el examen. Por definición podemos decir que $X \sim Bin(6, p)$ donde $p$ es la probabilidad de reprobar, es decir, $X \sim Bin(6, 0.352)$. Entonces la probabilidad de que exactamente 2 reprueben es:
$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{6}{2} 0.325^2 (1 - 0.325)^4 \quad \blacksquare.$$

8. En una oficina de correo los paquetes llegan según un proceso de Poisson de intensidad $\lambda$. Hay un costo de almacenamiento de c pesos por paquete y por unidad de tiempo. Los paquetes se acumulan en el local y se despachan en grupos cada $T$ unidades de tiempo (es decir, se despachan en $T, 2T, 3T, \cdots$). Hay un costo por despacho fijo de K pesos (es decir, el costo es independiente del número de paquetes que se despachen). (a) ¿Cuál es el costo promedio por paquete por almacenamiento en el primer ciclo $[0, T]$? (b) ¿Cuál es el costo promedio por paquete por almacenamiento y despacho en el primer ciclo? (c) ¿Cuál es el valor de $T$ que minimiza este costo promedio?

9. Considere la siguiente función
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 0.1 & \text{para } x = 0 \\ 0.1 + 0.8x & \text{para } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{para } 3/4 \leq x \end{cases}$$
   ¿ Es una función de distribución? Si es una función de distribución, ¿ corresponde a una variable aleatoria discreta o continua?

   **RESPUESTA**

**Honour problems (no es obligatorio entregarlos, pero dan crédito extra)**

1. Cambiando las hipótesis 2 y 3 que se usaron para contruir los procesos de Poisson homogéneos a la forma indicada en la diapositiva 135, deduzca la distribución del número de eventos que ocurren durante el intervalo [t 1 , t 2 ].

2. Sea $N(t),\ t \leq 0$ un proceso de Poisson con parámetro $\lambda > 0$. Para $0 < \mu < t$ y $0 \geq k \geq n$, calcule la probabilidad $P(N(u) = k | N(y) = n))$. Interpreta los resultados.