

Maestría en Computo Estadístico
Álgebra Matricial
Tarea 3

26 de septiembre de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: Tarea 5, AM.

Todos los cálculos deben ser a mano.

1. Encuentre la descomposición LDU de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

RESPUESTA

Recordemos la definición de la descomposición LDU .

Definición: 1 (Definición vista en clase) Sea A no singular de tamaño $n \times n$. Entonces $A = LDU$ donde L es $n \times n$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, D es $n \times n$ es una matriz diagonal con elementos diagonales no cero y U es $n \times n$ es una matriz triangular superior con unos en la diagonal.

Por la definición 1, primero busquemos la matriz escalonada para ello ocupemos eliminación gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces, de la matriz resultante podemos decir que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es decir, para encontrar U veamos que si multiplicamos las matrices tenemos que:

$$\begin{aligned} 2 &= a, \\ 4 &= b, \\ 2 &= 2c \Rightarrow 1 = c. \end{aligned}$$

Recordemos que si E_1, E_2, \dots, E_n son las matrices elementales para llevar a la matriz A a su forma escalonada, entonces $L = (E_n E_1 \dots E_1^{-1}) = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_n^{-1}$. Para este problema las matrices elementales son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la descomposición LDU de la matriz original es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare.$$

Nota, para las inversas de las matrices elementales ocupamos el siguiente teorema:

Teorema: 1 Sea $E_{ij}(\alpha)$ es la matriz elemental que multiplica al renglón j por α y lo suma al renglón i , entonces la matriz inversa de $E_{ij}(\alpha)$ es $E_{ij}(-\alpha)$.

2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observe que A es no singular y siempre tiene descomposición PLU . Pruebe que, sin embargo, A no tiene descomposición LU . (Sugerencia: no use eliminación, use un teorema.)

RESPUESTA

Ocupemos el siguiente teorema (demostrado en clase)

Teorema: 2 Sea A una matriz no singular. A tiene una factorización LU si y solo si todas sus submatrices principales líderes son no singulares.

Una submatriz principal líder se obtiene cuando es principal y $I_c = I_r = \{1, 2, \dots, k\}, k < n$.

Entonces si observamos la matriz principal líder $A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, podemos observar que es singular debido a que el renglón 2 es múltiplo del renglón 1 (o por que su determinante es cero). Por lo tanto (ocupando el teorema 2), como una matriz singular principal líder es singular, esto implica que A no tiene factorización LU . \blacksquare .

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 23 \end{pmatrix}$$

Encuentre la descomposición LDL^t de A . ¿Es A positiva definida? Explique. En tal caso encuentre su descomposición de Cholesky.

RESPUESTA

Recordemos el siguiente lema (demostrado en clase):

Lema: 1 Sea A una matriz simétrica de tamaño $n \times n$ tal que $A = LDU$ donde L es triangular inferior con unos en la diagonal, U es triangular superior con unos en la diagonal, D es diagonal con elementos diagonales no cero. Entonces $U = L^t$ y $A = LDL^t$.

Primero reduzcamos la matriz A a su forma escalonada ocupando eliminación gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3 \rightarrow R3 - 2R1]{R2 \rightarrow R2 - R1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \rightarrow R3 - 3R2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Lo anterior implica que la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices elementales que se ocuparon para llegar a la forma escalonada reducida son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Veamos que la matriz A es simétrica debido a que $A = A^t$, entonces ocupando el lema 1

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la descomposición LDL^t de A es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como todos los pivotes de A son estrictamente positivos (ver última la matriz de 1) entonces podemos decir que A es positiva definida.

Una matriz diagonal D con entradas positivas en la diagonal, es factorizable como $D = \sqrt{D}\sqrt{D}$, donde \sqrt{D} es una matriz cuya diagonal consiste en la raíz cuadrada de cada elemento de D , así la descomposición de Cholesky tiene una relación con la descomposición LDL^t :

$$A = LDL^t = L(\sqrt{D}\sqrt{D})L^t = LDL^t = (L\sqrt{D})(\sqrt{D}L^t) = (L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^t = TT^t.$$

Entonces ocupando lo anterior,

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & 3\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la descomposición de Cholesky de A es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & 3\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare.$$

4. Sea A la matriz por bloques

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

con B y E no singulares. Demuestre que A^{-1} es de la forma

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & X \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix}$$

y encuentre X . Luego, si

$$A_1 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & E \end{pmatrix}$$

y encuentre Y .

5. Sea F un matriz fija de 3×2 y sea

$$H = \{A \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R}) | FA = 0\}.$$

Determine si H es un subespacio de $M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$.

6. Demuestre que en \mathbb{R}^2 los únicos subespacios posibles son $\{0\}$, las líneas que pasan por el origen y \mathbb{R}^2 . Enuncie y demuestre un resultado análogo para \mathbb{R}^3 .

7. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ dado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determine si

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

esta en $\text{gen}(S)$, y si

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

esta en $\text{gen}(S)$.

RESPUESTA

Para que el vector $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ este en $\text{gen}(S)$ se tiene que cumplir que

8. Sea V un espacio vectorial y W, Z subespacios de V . Al definir el espacio $W + Z$ no se hizo distinción en el orden. ¿Por qué no?, es decir, ¿es cierto que $W + Z = Z + W$? Argumente su respuesta. Enuncie y demuestre un resultado similar para cualquier número finito de subespacios.
9. Encuentre A tal que $W = \mathcal{C}(A)$, donde

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} r - s \\ 2r + 3t \\ r + 3s - 3t \\ s + t \end{pmatrix} \middle| r, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

RESPUESTA

Recordemos la definición de espacio columna.

Definición: 2 El *espacio columna* de una matriz A de $m \times n$, que se denota como $\mathcal{C}(A)$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A . Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, entonces

$$\mathcal{C}(A) = \text{gen}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Entonces para encontrar A , en primer lugar, escribimos W como un conjunto de combinaciones lineales.

$$W = \left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| r, s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

En segundo lugar, utilizamos los vectores en el conjunto generador como las columnas de A . Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ De esta forma, } W = \mathcal{C}(A). \blacksquare.$$

10. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 0 \\ 10 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

. Encuentre un vector en $\mathcal{N}(A)$. Encuentre dos vectores distintos (que no sean múltiplos) en $\mathcal{C}(A)$.
 ¿Se pueden encontrar más vectores en $\mathcal{N}(A)$ y $\mathcal{C}(A)$, respectivamente, a los ya encontrados que no sean combinación lineal de los anteriores?