Maestría en Computo Estadístico
Inferencia Estadística
Tarea 3
10 de septiembre de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: Tarea 3, IE.

Escriba de manera concisa y clara sus resultados, justificando los pasos necesarios. Serán descontados puntos de los ejercicios mal escritos y que contenga ecuaciones sin una estructura gramatical adecuada. Las conclusiones deben escribirse en el contexto del problema. Todos los programas y simulaciones tienen que realizarse en R.

1. Resuelva lo siguiente:

a) Sea $X \sim Exponencial(\beta)$. Encuentre $\mathbb{P}(|X - \mu_X \geq k\sigma_X)$ para $k > 1$. Compare esta probabilidad con la que obtiene de la desigualdad de Chebyshev.

b) Sean $X_1, \cdots, X_n \sim Bernoulli(p)$ y $\bar{X} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Usando las desigualdades de Chebyshev y Hoeffding, acote $\mathbb{P}(|\bar{X} - p| > \epsilon)$. Demuestre que para n grande la cota de Hoeffding es más pequeña que la cota de Chebyshev. ¿En qué beneficia esto?

2. Sean $X_1, \cdots, X_n \sim Bernoulli(p)$.

a) Sea $\alpha > 0$ fijo y defina

$$\epsilon_n = \sqrt{\frac{1}{2n}\log\left(\frac{2}{\alpha}\right)}.$$

Sea $\hat{p} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Defina $C_n = (\hat{p}_n - \epsilon_n, \hat{p}_n + \epsilon_n)$. Use la desigualdad de Hoeffding para demostrar que

$$\mathbb{P}(C_n \text{contiene a } p) \neq 1 - \alpha$$

. Diremos que C_n es un $(1-\alpha)-$intervalo de confianza para p. En la practica, se trunca el intervalo de tal manera de que no vaya debajo del 0 o arriba del 1.

b) Sea $\alpha = 0.05$ y $p = 0.4$.Mediante simulaciones, realice un estudio para ver que tan a menudo el intervalo de confianza contiene a p (la cobertura). Haga esto para $n = 10, 50, 100, 250, 500, 1000, 2500, 5000, 10000$. Grafique la cobertura contra n.

c) Grafique la longitud del intervalo contra n. Suponga que deseamos que la longitud del intervalo sea menor que 0.05. ¿Qué tan grande debe ser n?

3. Una partícula se encuentra inicialmente en el origen de la recta real y se mueve en saltos de una unidad. Para cada salto, la probabilidad de que la partícula salte una unidad a la izquierda es p y la probabilidad de que salte una unidad a la derecha es $1 - p$. Denotemos por X_n a la posición de la partícula después de n unidades. Encuentre $\mathbb{E}(X_n)$ y $\mathrm{Var}(X_n)$. Esto se conoce como una caminata aleatoria en una dimensión.

7. Demuestre que la fórmula de la densidad de la Beta integra 1.

Honors problems

1.

a) Sea X una v.a. discreta con media finita y que toma valores en el conjunto $0, 1, 2\cdots$. Demuestre que

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

b) Sea X una v.a. continua no-negativa con media finita, función de densidad f y función de distribución F. Demuestre que

$$E(X) = \int_0^\infty (1 - F(t))dt.$$

c) ¿Cómo cambia la fórmula del caso anterior cuando el soporte de X es todo $\mathbb{R}$?

2. Sea X una v.a. continua con primer momento finito. Demuestre que la función $G(c) = E(|X - c|).c \in \mathbb{R}$, se minimiza en $c = M(X)$ para $M(X)$ la mediana de X.