Algebra Matricial
Tarea #8
Enrique Santibáñez Cortés

1. Sea V un espacio con producto interno. Demuestre la ley del paralelograma:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

para todo $x, y \in V$.

Respuesta:

Por la definición de producto interno sabemos que se tiene que cumplir

i) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

iii) Entre otras propiedades ...

Ocupando lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \\ &= (\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle) + (\langle y + x\rangle + \langle \cancel{x}, y\rangle) \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2,\end{aligned}$$

&

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x-y\rangle + \langle -y, x-y\rangle \\ &= (\langle x, x\rangle + \langle x, -y\rangle) + (\langle -y, x\rangle + \langle -y, -y\rangle) \\ &= \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad // \quad \text{Q.D.E.}\end{aligned}$$

2. Sea A una matriz simétrica real $n \times n$. Demuestre que $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Respuesta:

→ En $\mathbb{R}^n$, un producto interno esta definido como

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x^t y. \quad \text{(Diapositiva 145).}$$

Recordemos algunas propiedades de la tranpuesta de una matriz.

→ Sea $A_{n \times m}$ & $B_{m \times p}$, entonces

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Mas aún si $A_{n \times n}$ es simetrica, entonces

$$A^t = A.$$

Ocupando la definición y las propiedades anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle = (Ax)^t y &= x^t A^t y \quad \text{Por ser } A \text{ una matriz simetrica.} \\ &= x^t (Ay) \\ &= \langle x, Ay \rangle \end{aligned}$$

Q.D.E.

3. Sea A una matriz cuyas columnas generan un subespacio $W \subset \mathbb{R}^n$ y sea $v \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $v \perp W$ si y solo si $v \in N(A^t)$.

Respuesta:

Sea V un espacio vectorial con producto interno, W un subespacio y $S \subset V$ tal que $\operatorname{gen}(S) = W$. Entonces $x \in W^\perp \iff x \perp S$.

Continuación ejercicio 3...

Proposición 2 (Demostrado en clase)

Sea A una matriz $m \times n$. Entonces $N(A) = R(A)^{\perp}$ y $N(A^t) = C(A)^{\perp}$. (Diapositiva 147).

El problema nos dice que W es el espacio generado por las columnas de A, es decir, $W = C(A)$. Ahora ocupando la proposición 2 tenemos que el complemento ortogonal del espacio columna de una matriz A es el espacio nulo de A^t, es decir, $W^{\perp} = C(A)^{\perp} = N(A^t)$. Por lo tanto, ocupando la proposición 1 podemos concluir que sea $v \in \mathbb{R}^n$,

$$v \perp W = C(A) \quad \text{si y solo si} \quad v \in W^{\perp} = C(A)^{\perp} = N(A^t).$$

Q.D.E

4. Se dice que una matriz real es normal si $AA^t = A^tA$. Si A es normal, demuestre que $C(A) \perp N(A)$.

Respuesta:

Proposición 1 (Demostrada en clase, 87)

$N(A^tA) = N(A)$ & $N(AA^t) = N(A^t)$.

Todos los vectores que pertenecen a $C(A)$ son de la forma Ay (por definición de espacio columna) y todos los vectores que pertenecen a $N(A)$ tienen que cumplir que $Ax = 0$ (por def.). Como A es normal y por la proposición 1: $N(A) = N(A^tA) = N(AA^t) = N(A^t)$. Entonces si $x \in N(A) \Rightarrow Ax = 0$ & $A^tx = 0$. Sea $Ay \in C(A)$ y $x \in N(A)$ entonces

$$\langle Ay, x \rangle = (Ay)^t x = y^t A^t x = y^t (A^t x) = y^t 0 = 0. \Rightarrow \text{Por lo tanto, } C(A) \perp N(A)$$

Maestría en Computo Estadístico
Álgebra Matricial
Tarea 8
4 de diciembre de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: Tarea 8, AM.

Todos los cálculos deben ser a mano.

5. Considere los vectores

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Luego, exprese el vector

$$v_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

como una combinación lineal de u_1, u_2, u_3.

RESPUESTA

Definición: 1 *(Lemma 7.3, pag. 179 Linear Matriz,) Un conjunto de vectores $\{u_1, \cdots, u_p\}$ de V se denomina conjunto ortogonal si cada par de vectores diferentes del conjunto es ortogonal, es decir, si $\langle u_i, u_j \rangle$ siempre que $i \neq j$.*

Teorema: 1 *(Lemma 7.3, pag. 183 Linear Matriz,) Sea $S = \{u_1, \cdots, u_p\}$, es un conjunto ortogonal de vectores no nulos de V, entonces S es linealmente independiente.*

Teorema: 2 *(Visto en clase, pag. 148) Sea V un espacio con producto interno y $W = gen\{u_1, \cdots, u_p\}$, donde los u_j forman un conjunto ortogonal de vectores en V distintos de cero. Entonces $y \in W$ es de la forma*

$$y = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p$$

donde

$$\alpha_j = \frac{\langle y, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle}$$

Ocupemos la definición (1) para probar que los vectores $u_i's$ son ortogonales, para ello calculemos el producto interno

$$\begin{aligned}\langle u_1, u_2\rangle &= 1(-1)+0(4)+1(1)=0,\\ \langle u_1, u_3\rangle &= 1(2)+0(2)+1(-2)=0,\\ \langle u_2, u_3\rangle &= -1(2)+4(1)+1(-2)=0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, como cada par de vectores $u_i's$ son ortogonales entonces podemos concluir que el conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ es ortogonal. Ahora, por el teorema (1) podemos concluir que el conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ es linealmente independiente. Como sabemos que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ y también que $\#\{u_1, u_2, u_3\} = 3$, entonces $\{u_1, u_2, u_3\}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$. Y por lo tanto, **podemos concluir que** $\{u_1, u_2, u_3\}$ **es una base ortogonal de** $\mathbb{R}^3$**.**

Para expresar a v_1 como combinación lineal de $\{u_1, u_2, u_3\}$ ocupemos el teorema (2), primeros calculemos los productos puntos necesarios:

$$\begin{aligned}\langle u_1,u_1\rangle &= & 1(1)+0(0)+1(1) &= & 2, \quad \langle v_1,u_1\rangle &= 8(1)-4(0)-3(1) &= 5\\ \langle u_2,u_2\rangle &= & -1(-1)+4(4)+1(1) &= & 18, \quad \langle v_1,u_2\rangle &= 8(-1)-4(4)-3(1) &= -27,\\ \langle u_3,u_3\rangle &= & 2(2)+1(1)-2(-2) &= & 9, \quad \langle v_1,u_3\rangle &= 8(2)-4(1)-3(-2) &= 18.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el vector v_1 se puede expresar como combinación lineal de $\{u_1, u_2, u_3\}$ como

$$v_1 = \frac{5}{2}u_1 + \frac{-27}{18}u_2 + \frac{18}{9}u_3$$

$$= \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} + \mathbf{2}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}. \quad \blacksquare.$$

6. Demuestre que el producto de matrices ortogonales es una matriz ortogonal.

   RESPUESTA

Definición: 2 *(Visto en clase, pag. 155) Una matriz U cuadrada es ortogonal si $UU^t = I$.*

Demostremos por inducción que el producto de n matrices ortogonales es otra matriz ortogonal.

Paso 1: Probarlo para $n = 2$. Sea A_1, A_2 matrices ortogonales de tamaño $n \times n$, es decir, ocupando la definición 2 tenemos que $A_iA_i^t = I$, ß $= 1, 2$. Sea C la matriz resultante del producto de A_1A_2, entonces ocupando las propiedades básicas de la traza tenemos que

$$CC^t = (A_1A_2)(A_1A_2)^T = (A_1A_2)(A_2^tA_1^t) = A_1(A_2A_2^t)A_1^t = A_1IA_1^t = A_1A_1^t = I.$$

Por lo tanto, podemos concluir que la matriz C es ortogonal, es decir, el producto de A_1 y A_2 es ortogonal.

Paso 2: Suponemos que se cumple para el producto de n matrices ortogonales. Es decir, el producto de las matrices $A_1, A_2, ...A_n$ ortogonales de tamaño $n \times n$, es otra matriz ortogonal.

Paso 3: Demostremos para $n+1$ matrices ortogonales. Sea A_{n+1} otra matriz ortogonal de tamaño $n \times n$, ocupando el paso 2 tenemos que

$$A_1A_2\cdots A_nA_{n+1} = (A_1A_2\cdots A_n)A_{n+1} = A'A_{n+1},$$

donde $A'n$ es una matriz ortogonal. Y ocupando el paso 1, como el producto de dos matrices ortogonales es otra ortogonal entonces podemos concluir que

$$A_1A_2\cdots A_nA_{n+1} = (A_1A_2\cdots A_n)A_{n+1} = A'A_{n+1} = I.$$

Es decir, queda demostrado que el producto de matrices ortogonales es otra matriz matriz ortogonal. $\blacksquare$.

7. Dados los vectores

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

i) Verifique que u_1 y u_2 son ortogonales, *ii*) Encuentre la proyección ortogonal de y sobre el espacio generado por u_1 y u_2.

RESPUESTA

Definición: 3 *(Definición 7.6, pag. 186 Linear Álgebra) Sea v y x dos vectores en $\mathbb{R}^n$ tal que $v \neq 0$. Entonces, una proyección de x sobre el vector v viene dada por la función vectorial*

$$proy_v(x) = \frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v.$$

Por otro lado, la proyección ortogonal de v sobre el espacio U generado por el conjunto de vectores ortogonales $\{u_1, ...u_k\}$ no nulos se define como

$$proy_U(v) = proy_{u_1}(v) + proy_{u_2}(v) + \cdots + proy_{u_k}(v).$$

Tenemos que el producto interno de los vectores u_1, u_2 es

$$\langle u_1, u_2\rangle = 3(1) - 1(-1) + 2(-2) = 0.$$

Por lo tanto, podemos concluir que **i) los vectores u_1, u_2 son ortogonales.** Ahora, ocupemos la definición (3) para encontrar la proyección de y en el espacio generado por u_1, u_2 para ello primero encontremos las proyeciones de y en cada uno de los vectores u_1, u_2.

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_1\rangle &= & 3(3) - 1(-1) + 2(2) &= & 14, \quad \langle y, u_1\rangle &= -1(3) + 2(-1) + 6(2) &= 7 \\ \langle u_2, u_2\rangle &= & 1(1) - 1(-1) - 2(-2) &= & 6, \quad \langle y, u_2\rangle &= -1(1) + 2(-1) + 6(-2) &= -15 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$proy_{u_1}(y) = \frac{\langle y, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} = \frac{7}{14}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$proy_{u_2}(y) = \frac{\langle y, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} = -\frac{15}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15/6 \\ 15/6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el proyección ortogonal de y sobre el espacio generado por u_1, u_2 es

$$proy_U(y) = proy_{u_1}(y) + proy_{u_2}(y) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15/6 \\ 15/6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare.$$

8. Sea W es espacio generado por

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si

$$y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

escriba y como la suma de un vector en W y un vector ortogonal a W.

RESPUESTA

Teorema: 3 *(Diapositiva pag. 149) Sea V un espacio con producto interno y $W \subset V$ un subespacio. Entonces cualquier $y \in V$ se puede escribir de manera única como*

$$y = w + z$$

donde $w \in W$ y $z \in W^{\perp}$. Más aún, si $\{u_1, \cdots, u_p\}$ es una base ortogonal de W, entonces

$$w = proy_{u_1}(y) + \cdots + proy_{u_p}(y) \quad \& \quad z = y - w.$$

Ocupemos la definición (1) para probar que los vectores $u_i's$ son ortogonales, para ello calculemos el producto interno

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2 \rangle &= 1(-1) + 1(3) + 0(1) + 1(-2) = 0, \\ \langle u_1, u_3 \rangle &= 1(-1) + 0(1) + 1(0) + 1(1) = 0, \\ \langle u_2, u_3 \rangle &= -1(-1) + 3(0) + 1(1) - 2(1) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como cada par de vectores $u_i's$ son ortogonales entonces podemos concluir que el conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ es ortogonal. Ahora, por el teorema (1) podemos concluir que el conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ es linealmente independiente. Entonces podemos concluir que $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortogonal para W. Ahora, encontremos las proyeciones de y en cada uno de los vectores u_1, u_2, u_3.

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_1 \rangle &= & 1(1) + 1(1) + 0(0) + 1(1) &= & 3, \quad \langle y, u_1 \rangle &= 4(1) + 3(1) + 3(0) - 1(1) &= 6 \\ \langle u_2, u_2 \rangle &= & -1(-1) + 3(3) + 1(1) - 2(-2) &= & 15, \quad \langle y, u_2 \rangle &= 4(-1) + 3(3) + 3(1) - 1(-2) &= 10 \\ \langle u_2, u_2 \rangle &= & -1(-1) + 0(0) + 1(1) + 1(1) &= & 3, \quad \langle y, u_2 \rangle &= 4(-1) + 3(0) + 3(1) - 1(1) &= -2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$proy_{u_1}(y) = \frac{\langle y, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = \frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\\2\end{pmatrix},$$

$$proy_{u_2}(y) = \frac{\langle y, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} = \frac{10}{15}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\2\\2/3\\-4/3\end{pmatrix}$$

$$proy_{u_3}(y) = \frac{\langle y, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/3\\0\\-2/3\\-2/3\end{pmatrix}.$$

Por lo que, el proyección ortogonal de y sobre el espacio generado por u_1, u_2, u_3 es

$$w = proy_{u_1}(y) + proy_{u_2}(y) + proy_{u_3}(y) = \begin{pmatrix}2\\2\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2/3\\2\\2/3\\-4/3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2/3\\0\\-2/3\\-2/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Entonces esto implica que

$$z = y - w = \begin{pmatrix}4\\3\\3\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, y se puede expresar como la suma de los vectores w, y tal que $w \in W$ y $y \in W\perp$, es decir

$$\begin{pmatrix}4\\3\\3\\-1\end{pmatrix} = y = w + z = \begin{pmatrix}2\\4\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\\3\\-1\end{pmatrix}. \quad \blacksquare.$$

9. Sea W el espacio generado por

$$u_1 = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Si

$$y = \begin{pmatrix}3\\1\\5\\1\end{pmatrix}$$

encuentre el punto en W más cercano a y.

RESPUESTA

Teorema: 4 *(Diapositiva pag. 151) Sea V un espacio con producto interno, $W \subset V$ un subespacio, $y \in V$ y $u = proy_W(y)$. Entonces u es el vector en W más cercano a y.*

Ocupando el teorema (4) podemos encontrar el punto más cercano de W a y. Primero verifiquemos que u_1, u_2 son ortogonales, calculemos el producto interno de los vectores u_1, u_2

$$\langle u_1, u_2\rangle = 3(1) + 1(-1) - 1(1) + 1(-1) = 0.$$

Por lo anterior, podemos concluir que u_1, u_2 son ortogonales. Ahora, ocupemos la definición (3) para encontrar la proyección de y en el espacio generado por u_1, u_2 para ello primero encontremos las proyeciones de y en cada uno de los vectores u_1, u_2.

$$\begin{aligned}
\langle u_1, u_1\rangle = &\quad 3(3) + 1(1) - 1(-1) + 1(1) = 12, & \langle y, u_1\rangle &= 3(3) + 1(1) + 5(-1) + 1(1) &= 6\\
\langle u_2, u_2\rangle = &\quad 1(1) - 1(-1) + 1(1) - 1(-1) = 4, & \langle y, u_2\rangle &= 3(1) + 1(-1) + 5(1) + 1(-1) &= 6 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$proy_{u_1}(y) = \frac{\langle y, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} = \frac{6}{12}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix},$$

$$proy_{u_2}(y) = \frac{\langle y, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

Por lo que, el proyección ortogonal de y sobre el espacio generado por u_1, u_2 es

$$proy_W(y) = proy_{u_1}(y) + proy_{u_2}(y) = \begin{pmatrix}3/2\\1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, **podemos concluir que el punto en W más cercano a y es $\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.** $\blacksquare$.

10. Encuentre una base ortogonal para el espacio columna de la matriz

$$\begin{pmatrix}3 & -5 & 1\\1 & 1 & 1\\-1 & 5 & -2\\3 & -7 & 8\end{pmatrix}$$

RESPUESTA

Definición: 4 *(Vista en clase) Gram-Schmidt. Sea una base $\{v_1, \cdots, v_p\}$ del subespacio S de V. Definimos:*

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1,\\
w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1,\\
&\vdots\\
w_p &= v_p - \frac{\langle v_p, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_p, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 - \cdots - \frac{\langle v_p, w_p\rangle}{\langle w_p, w_p\rangle} w_p.
\end{aligned}$$

Entonces $\{w_1, \cdots, w_p\}$ es una base ortogonal de S.

Primero encontremos una base para el espacio columna de A, ocupamos eliminación gaussiana para determinar si los vectores son linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 5 & -2\\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \Rightarrow R_3 + R_1/3]{R_2 \Rightarrow R_2 - R_1/3} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1\\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{-5}{3}\\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \Rightarrow 3R_2/8]{R_4 \Rightarrow R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1\\ 0 & 1 & 1/4\\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{-5}{3}\\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \Rightarrow 3R_3/10]{R_4 \Rightarrow R_4 + 2R_2}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1\\ 0 & 1 & 1/4\\ 0 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 15/2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \Rightarrow 2R_4/15]{R_3 \Rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1\\ 0 & 1 & 1/4\\ 0 & 0 & -3/4\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \Rightarrow R_4 - R_3]{R_3 \Rightarrow -4R_3/3} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1\\ 0 & 1 & 1/4\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo anterior, podemos concluir que las columnas de A son vectores linealmente independientes por lo que una base para A es

$$\mathcal{C}(A) = \text{gen}\{a_1, a_2, a_3\}, \text{ donde } a_i \text{ son las columnas de A.}$$

Ahora, veamos si los vectores son vectores ortogonales. Para ello ocupemos la definición (1) para probar que los vectores $u_i's$ verificar si son o no son ortogonales, para ello calculemos sus productos internos

$$\begin{aligned}
\langle a_1, a_2\rangle &= 3(-5) + 1(1) - 1(5) + 3(-7) = -40 \neq 0,\\
\langle a_1, a_3\rangle &= 3(1) + 1(1) - 1(-2) + 3(8) = 30 \neq 0,\\
\langle a_2, a_3\rangle &= -5(1) + 1(1) + 5(-2) - 7(8) = -70 \neq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ es no es ortogonal y por ende no es una base ortogonal. Entonces ocupemos la metodología de Gram-Schmidt (4) para transforma la base a una base ortogonal,

$$\begin{aligned}
w_1 &= a_1,\\
w_2 &= a_2 - \frac{\langle a_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1,
\end{aligned}$$

calculemos lo anterior

$$\langle w_1, w_1\rangle = \quad 3(3) + 1(1) - 1(-1) + 3(3) = \quad 20, \quad \langle a_2, w_1\rangle \quad = \langle a_2, a_1\rangle \quad = -40 \Rightarrow$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} - \frac{-40}{20} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$w_3 = a_3 - \frac{\langle a_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle a_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2,$$

calculemos lo anterior

$$\begin{aligned} \langle w_2, w_2 \rangle &= \ 1(1) + 3(3) + 3(3) - 1(-1) = \ 20, \quad \langle a_3, w_2 \rangle \ = 1(1) + 1(3) - 2(3) + 8(-1) \ = -10 \\ \langle a_3, w_1 \rangle &= \qquad \qquad \langle a_3, a_1 \rangle = \ 30 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{30}{20} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-10}{20} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9/2 \\ 3/2 \\ -3/2 \\ 9/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, **una base ortogonal para el espacio columna de A es**

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}. \ \blacksquare.$$

11. Encuentre una descomposición QR de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

RESPUESTA

Definición: 5 *(Definición 7.9, pag. 195) Si A es una matriz $m \times n$ con columnas linealmente independientes, entonces A puede ser factorizada de la forma $A = QR$, donde Q es una matriz $m \times n$ cuyas columnas forman una base ortonormal de $\mathcal{C}(A)$ y R es una matriz $n \times n$ triangular superior e invertible con componentes positivas en su diagonal principal.*

Por la definición 5 sabemos que las columnas de Q son forman una base ortonormal de $\mathcal{C}(A)$. Entonces empecemos por encontrar una base $\mathcal{C}(A)$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \underset{R_3 \Rightarrow R_3 + R_1}{\xrightarrow{R_2 \Rightarrow R_2 + 3R_1}} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 0 & 10 & 21 \\ 0 & 8 & 12 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \underset{R_3 \Rightarrow R_3 - 4R_2/5}{\xrightarrow{R_4 \Rightarrow R_4 + R_1}} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 0 & 10 & 21 \\ 0 & 0 & \frac{-24}{5} \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \Rightarrow R_4 - R_2/5}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 0 & 10 & 21 \\ 0 & 0 & \frac{-24}{5} \\ 0 & 0 & \frac{-6}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \Rightarrow R_4 - R_3/4} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 0 & 10 & 21 \\ 0 & 0 & \frac{-24}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo anterior, podemos concluir que las columnas de A son vectores linealmente independientes por lo que una base para A es

$$\mathcal{C}(A) = \text{gen}\{a_1, a_2, a_3\}, \text{ donde } a_i \text{ son las columnas de A.}$$

Ahora, veamos si los vectores son vectores ortogonales. Para ello ocupemos la definición (1) para probar que los vectores $u_i's$ verificar si son o no son ortogonales, para ello calculemos sus productos internos

$$\begin{aligned}
\langle a_1, a_2\rangle &= -1(6) + 3(-8) + 1(-2) + 1(-4) = -36 \neq 0,\\
\langle a_1, a_3\rangle &= -1(6) + 3(3) + 1(6) + 1(-3) = 6 \neq 0,\\
\langle a_2, a_3\rangle &= 6(6) - 8(3) - 2(6) - 4(-3) = 12 \neq 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ es no es ortogonal y por ende no es una base ortogonal. Entonces ocupemos la metodología de Gram-Schmidt (4) para transforma la base a una base ortogonal,

$$\begin{aligned}
w_1 &= a_1,\\
w_2 &= a_2 - \frac{\langle a_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1,
\end{aligned}$$

calculemos lo anterior

$$\langle w_1, w_1\rangle = \quad -1(-1) + 3(3) + 1(1) + 1(1) = \quad 12, \quad \langle a_2, w_1\rangle \quad = \langle a_2, a_1\rangle \quad = -36 \Rightarrow$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 6\\ -8\\ -2\\ -4 \end{pmatrix} - \frac{-36}{12}\begin{pmatrix} -1\\ 3\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\\ -8\\ -2\\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\\ 9\\ 3\\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$w_3 = a_3 - \frac{\langle a_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle a_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2,$$

calculemos lo anterior

$$\begin{aligned}
\langle w_2, w_2\rangle = \quad & 3(3) + 1(1) + 1(1) - 1(-1) = \quad 12, \quad \langle a_3, w_2\rangle \quad = 6(3) + 3(1) + 6(1) - 3(-1) \quad = 30\\
\langle a_3, w_1\rangle = \quad & \langle a_3, a_1\rangle = \quad 6 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 6\\ 3\\ 6\\ -3 \end{pmatrix} - \frac{6}{12}\begin{pmatrix} -1\\ 3\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} - \frac{30}{12}\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 1\\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\\ 3\\ 6\\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2\\ -3/2\\ -1/2\\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15/2\\ -5/2\\ -52\\ -5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 3\\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, una base ortogonal de $\mathcal{C}(A)$ sería

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1\\ 3\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 1\\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 3\\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ahora normalizamos cada vector para obtener una base ortonormal,

$$\frac{w_1}{\sqrt{\langle w_1, w_1\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{3}{2\sqrt{3}}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix}, \quad \frac{w_2}{\sqrt{\langle w_2, w_2\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}3\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2\sqrt{3}}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

$$\frac{w_3}{\sqrt{\langle w_3, w_3\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{3}{2\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Por lo anterior, podemos concluir que

$$Q = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Puesto que las columnas de Q son ortonormales, tenemos que $Q^tQ = I$. Ahora necesitamos encontrar la matriz triangular superior R que verifica $A = QR$. Si multiplicamos ambos miembros de esta expresión por Q^t resulta

$$Q^tA = Q^tQR = IR = R.$$

Así,

$$R = Q^tA = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix}-1 & 6 & 6\\ 3 & -8 & 3\\ 1 & -2 & 6\\ 1 & -4 & -3\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix}-1 & 6 & 6\\ 3 & -8 & 3\\ 1 & -2 & 6\\ 1 & -4 & -3\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1+9+1+1 & -6-24-2-4 & -6+9+6-3\\ -3+3+1-1 & 18-8-2+4 & 18+3+6+3\\ 1-3+3+1 & -6+8-6+4 & -6-3+18+-3\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}12 & -36 & 6\\ 0 & 12 & 30\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}6/\sqrt{3} & -18/\sqrt{3} & 3/\sqrt{3}\\ 0 & 6/\sqrt{3} & 15/\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 6/\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\sqrt{3} & -6\sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 0 & 2\sqrt{3} & 5\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 2\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, **la descomposición QR de A es**

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 6 & 6\\ 3 & -8 & 3\\ 1 & -2 & 6\\ 1 & -4 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}}\\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\sqrt{3} & -6\sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 0 & 2\sqrt{3} & 5\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 2\sqrt{3}\end{pmatrix} = QR. \ \blacksquare.$$

12. Encuentre las soluciones de mínimos cuadrados de $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\\ 0 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}3\\1\\-4\\2\end{pmatrix}.$$

RESPUESTA

Teorema: 5 *(Diapositiva pag. 157) Son equivalentes*

1. *La solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ es única.*
2. *Las columnas de A son linealmente independientes.*
3. *A^tA es invertible.*

En cualquier caso de los anteriores

$$\hat{x} = (A^tA)^{-1}A^tb$$

.

Ocupemos el teorema (5), primero calculemos el siguiente producto

$$\begin{aligned}
A^tA &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1(1) + (-1)(-1) + 0(0) + 2(2) & 1(-2) + (-1)(2) + 0(3) + 2(5) \\ -2(1) + 2(-1) + 3(0) + 5(2) & -2(-2) + 2(2) + 3(3) + 5(5) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ahora, como $\det(A^tA) = \det\left(\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{pmatrix}\right) = 6(42) - 6(6) = 6(36) \neq 0$ podemos concluir que la matriz A^tA es invertible. Entonces como A^tA es invertible podemos concluir que la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ es única y se encuentra como $(A^tA)^{-1}A^tb$. Ahora calculemos la inversa de A^tA (se ocupa el teorema 6),

$$(A^tA)^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6(42) - 6(6)} \begin{pmatrix} 42 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{36} & \frac{-1}{36} \\ \frac{-1}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Entonces la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ es

$$\begin{aligned}
\hat{x} = (A^tA)^{-1}A^tb &= \begin{pmatrix} \frac{7}{36} & \frac{-1}{36} \\ \frac{-1}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{36} & \frac{-1}{36} \\ \frac{-1}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1(3) + (-1)\,(1) + 0\,(-4) + 2(2) \\ -2(3) + 2(1) + 3\,(-4) + 5(2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{36} & \frac{-1}{36} \\ \frac{-1}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{36}(6) + \frac{-1}{36}\,(-6) \\ \frac{-1}{36}(6) + \frac{1}{36}\,(-6) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es decir, **el sistema $Ax = b$ tiene solución única y es** $x = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ $\blacksquare$.

ANEXO:

Teorema: 6 *(Recordatorio) Encontrar la inversa de una matriz A de 2×2 mediante la fórmula*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Nota: Los primero 5 ejercicios ya no me dio tiempo pasarlos a latek, espero no sea complicado entenderle a mi letra.