Maestría en Computo Estadístico
Inferencia Estadística
Tarea 3
25 de septiembre de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: Tarea 4, IE.

Escriba de manera concisa y clara sus resultados, justificando los pasos necesarios. Serán descontados puntos de los ejercicios mal escritos y que contenga ecuaciones sin una estructura gramatical adecuada. Las conclusiones deben escribirse en el contexto del problema. Todos los programas y simulaciones tienen que realizarse en R. 1. Sea X una v.a continua cuya función de distribución F es estrictamente creciente. El Teorema de la Transformación Integral nos dice que $Y = F(X)$ tiene distribución Uniforme(0, 1).

a) Sea $U \sim Uniforme(0, 1)$ y $X' = F^{-1}(U)$. Muestre que $X' \sim F$.

b) Escriba un programa que tome variables aleatorias Uniforme(0, 1) y que las utilice para generar variables aleatorias de una distribución Exp(β). El problema debe recibir el tamaño de la muestra que se desea generar, denotado por m, y al parámetro β. Deberá regresar una muestra de tamaño m.

c) Simule $m = 100$ muestras Exp(1/2). Con esta muestra contruya un QQ plot exponencial y una gráfica que compare el histograma de la muestra con la función de densidad de Exp(1/2). Comente.

2. Sea A el triángulo de vértices (0, 0), (0, 1), (1, 0) y suponga que X, Y tiene una densidad conjunta uniforme en el triángulo. (a) Halle las distribuciones marginales de X, Y y $Z = X + Y$. (b) ¿Son X y Y independientes? ¿Por qué?

3. Halle la densidad condicional de $X|Y = y$ si (X, Y) tiene densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{y} \exp\left(-\frac{x}{y} - y\right) \text{ para } x, y > 0.$$

También calcule $\mathbb{E}(X|Y = y)$.

4. Sea $Y \sim \exp(\theta)$ y dado $Y = y$, X tiene distribución de Poisson de media y. Encuentre la ley de X.

5. Sea (X, Y) un vector aleatorio con la siguiente densidad

$$f(x, y) = \begin{cases} \pi^{-1} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Demuestre X y Y no están correlacionadas, pero que no son independientes.

6.Sea X_1 y X_2 v.a.i que tienen una distribución normal estándar. Obtenga la densidad conjunta de (Y_1, Y_2), donde $Y_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ y $Y_2 = X_1/X_2$. ¿Son Y_1 y Y_2 independientes?

7. Ejercicio 6 de la tarea anterior.

8. Ejercicio 3 del examen.

Honours problems

1. Sea X una v.a continua con segundo momento finito. Demuestra que la mediana $M(X)$ de X satisface

$$|M(X) - E(X)| \leq (Var(X))^{1/2}.$$

Hint: Use los honour problems de la tarea anterior.