Inferencia Estadística

Examen Parcial 2

Instrucciones del examen:

a) **Lee cuidadosamente cada problema antes de comenzar a resolverlo y responde sólo cuatro ejercicios. Si se entregan más de cuatro ejercicios, sólo se considerarán los cuatro con menor calificación.**

b) **Escribe de manera concisa y clara tus respuestas, justificando los pasos necesarios. Serán descontados puntos de los ejercicios mal escritos.**

c) **Las conclusiones deben escribirse en el contexto del problema. No vale sólo copiar resultados de las notas, es necesario explicar porque y como se usan.**

d) **Resuelve un problema por página, pon tu nombre a todas las hojas y asegurate de que marcas claramente que ejercicio estás resolviendo.**

e) **No pierdas tiempo copiando el enunciado del problema, sólo asegurate de que quede claro cual es el ejercicio que estas resolviendo.**

f) **Duración 4 horas.**

1. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución $Gamma(\alpha, \beta)$. Calcula el estimador de momentos de (α, β).

2. Considera la función

$$f(x; \alpha, \beta) = \beta^{-1} \exp\left\{-\beta^{-1}(x - \alpha)\right\}, \qquad \alpha < x < \infty,\ -\infty < \alpha < \infty,\ \beta > 0.$$

¿Es esta función de x una densidad? Si lo es, dada una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ con densidad $f(x; \alpha, \beta)$, encuentre el estimador de máxima verosimilitud para (α, β).

3. Sea $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, y sea $\{f_\theta, \theta \in \Theta\}$ sea una sucesión de funciones de densidad de probabilidad tal que $\{f_\theta > 0\}$ no depende de θ. Denota $(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$. Si existen funciones real-valuadas $Q_1(\theta), \ldots, Q_k(\theta), D(\theta)$ definidas sobre Θ y funciones $T_1, \ldots, T_k, S$ definidas sobre $\mathbb{R}^n$ tal que

$$f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} Q_i(\theta)T_i(\mathbf{x}) + D(\theta) + S(\mathbf{x})\right\},$$

decimos que la familia $\{f_\theta, \theta \in \Theta\}$ es una familia exponencial de k-parámetros. Demuestra que la distribución normal es una familia exponencial de 2 parámetros.

4. Sea t_n un v.a. t-Student con n grados de libertad. Usando el Teorema del Límite Central y el Teorema de Slutzky, demuestra que $t_n \xrightarrow{d} N(0,1)$ cuando $n \to \infty$.

5. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución conjunta $F_{X,Y}$. Encuentre el valor que minimiza

$$\arg \min_{g(x)} E[(Y - g(X))^2]$$

y demuestre que su respuesta es correcta.

6. Usando el Teorema de Box-Müller, escribe un programa en R que genere muestras normales. Puedes utilizar un generador de muestras uniformes.