Maestría en Computo Estadístico
Álgebra Matricial
Tarea 1
31 de agosto de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: Tarea 1, IE.

1. Si A es una matriz $m \times n$ dada por bloques de vectores columna como

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots a_n)$$

y B es una matriz $n \times p$ dada por bloques de vectores renglón como

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Demuestre que

$$AB = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

RESPUESTA
Como A es una matriz $m \times n$ dada por bloques columnas, como

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots a_n)$$

donde a_i es un vector columna

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo podemos decir que B esta constituida por b_i vectores renglón:

$$v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} & v_{i2} & \cdots & v_{in} \end{pmatrix}.$$

Entonces ocupando lo anterior

$$AB = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \ \blacksquare.$$

2. Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden. Demuestre que $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ si y solo si $AB=BA$.

RESPUESTA
$\Rightarrow$) Si $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ entonces:

$$\begin{aligned} A^2-B^2 &= (A-B)(A+B) \\ &= AA-BA+AB-BB \\ &= A^2-BA+AB-B^2 \\ BA &= AB. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Si $AB=AB$ entonces:

$$(A-B)(A+B)=AA-BA+AB-BB=A^2-B^2.$$

Por lo tanto, queda demostrado que $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ si y solo si $AB=BA$. $\blacksquare$.

3. Sean A y B matrices $n\times n$, $A\neq 0,\ B\neq 0$, tales que $AB=BA$. Demuestre que $A^pB^q=B^qA^p$ para cualesquiera $p,q\in\mathbb{N}$.

RESPUESTA
Multiplicado por A^{p-1} (donde $p\in\mathbb{N}$) por la izquierda a $AB=BA$ tenemos

$$\begin{aligned} A^{p-1}AB &= A^{p-1}BA \\ &= A^{p-2}(AB)A=A^{p-2}(BA)A \\ &= A^{p-3}(AB)A^2=A^{p-3}(BA)A^2 \\ &= \vdots \\ &= (AB)A^{p-1}=(BA)A^{p-1}. \end{aligned}$$

Simplificando de ambos lados, tenemos que $A^pB=BA^p$. Ahora multiplicamos al resultado obtenido por la matriz B^{q-1} (donde $q\in\mathbb{N}$) por la derecha tenemos

$$\begin{aligned} A^pBB^{q-1} &= BA^pB^{q-1} \\ &= BA^{p-1}(AB)B^{q-2}=BA^{p-1}(BA)B^{q-2} \\ &= BA^{p-2}(AB)AB^{q-2}=BA^{p-2}(BA)AB^{q-2} \\ &= BA^{p-3}(AB)A^2B^{q-2}=BA^{p-3}(BA)A^2B^{q-2} \\ &\vdots \\ &= B(AB)A^{p-1}B^{q-2}=B(BA)A^{p-1}B^{q-2} \\ &= B^2A^pB^{q-2} \\ &= B^2A^{p-1}(AB)B^{q-3}=B^2A^{p-1}(BA)B^{q-3} \\ &= B^2A^{p-2}(AB)AB^{q-3}=B^2A^{p-2}(BA)AB^{q-3} \\ &= B^2A^{p-3}(AB)A^2B^{q-3}=B^2A^{p-3}(BA)A^2B^{q-3} \\ &\vdots \\ &= B^2(AB)A^{p-1}B^{q-3}=B^2(BA)A^{p-1}B^{q-3} \\ &= B^3A^pB^{q-3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rc} \vdots & \\ = & B^{q-1}A^{p-1}(AB) = B^{q-1}A^{p-1}(BA) \\ = & B^{q-1}A^{p-2}(AB)A = B^{q-1}A^{p-2}(BA)A \\ = & B^{q-1}A^{p-3}(AB)A^2 = B^{q-1}A^{p-3}(BA)A^2 \\ \vdots & \\ = & B^{q-1}(AB)A^{p-1} = B^{q-1}(BA)A^{p-1} \\ = & B^qA^p. \end{array}$$

Por lo tanto, queda demostrado que si $AB = BA$ y para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$ se cumple que $A^pB^q = B^qA^p \quad \blacksquare$.

4. Se dice que una matriz cuadrada A es antisimétrica si $A = -A^t$. Demuestre que $A - A^t$ es antisimétrica.

   RESPUESTA
   Sea $B = A - A^t$, entonces:
   $$B^t = (A - A^t)^t = A^t - A.$$
   y
   $$-B^t = -(A^t - A) = A - A^t.$$
   Como $B = -B^t$ y como $B = A - A^t$ (por definición), podemos concluir que $A - A^t$ es antisimétrica. $\blacksquare$.

5. Demuestre que dada cualquier matriz cuadrada A, esta se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

   RESPUESTA
   Es sencillo

6. Se dice que una matriz cuadrada P es idempotente si $P^2 = P$. Si
   $$A = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix}$$
   y si P es idempotente, encuentre A^{500}.

   RESPUESTA
   Encontremos una formula para encontrar a A^n. Primero veamos que pasa cuando $n = 2, 3$:
   $$A^2 = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2+0 & IP+P^2 \\ 0+0 & 0+P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$
   $$A^3 = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2+0 & IP+2P^2 \\ 0+0 & 0+P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 3P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$
   De lo anterior y considerando $n \in \mathbb{N}$ podemos suponer que se cumple que :
   $$A^n = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$
   Demostremos lo anterior de forma inductiva:
   Paso 1. Mostrar que se cumple para $n = 2, 3$ o para algún n. Por construcción se cumple este paso.

Paso 2. Suponer que se cumple para n.
Paso 3. Demostrar que se cumple para $n+1$. Considerando el paso 2, tenemos que:

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2+0 & IP+nP^2 \\ 0+0 & 0+P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & (n+1)P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Queda demostrado que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$A^n = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, utilizando la formula encontrada podemos concluir que

$$A^{500} = \begin{pmatrix} I & 500P \\ 0 & P \end{pmatrix} \quad \blacksquare.$$

7. Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$. Demuestre que $\text{tr}(AB^t)$ =$\text{tr}(A^tB)$.

   RESPUESTA
   Sea $A_{m\times n}, B_{n\times m}$ matrices. Entonces se cumple que (*se demostraron en clase*):

   - $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^t)$.
   - $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

   Ocupando las dos propiedades de la traza anteriores tenemos que:

   $$\text{tr}(AB^t) = \text{tr}((AB^t)^t) = \text{tr}(BA^t) = \text{tr}(A^tB). \quad \blacksquare.$$

8. Encuentre matrices A, B y C tales que $\text{tr}(ABC) \neq$$\text{tr}(BAC)$.

   RESPUESTA
   Por convicción definamos a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y ahora sea $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.
   Entonces

   $$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{pmatrix}.$$

   Observemos que la primera multiplicación representa a un cambio de renglones y la segunda a un cambio de columnas. Ahora multipliquemos de lado izquierdo lo anterior por la matriz C pero solo concentrarnos en los resultados de la diagonal.

   $$ABC = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & \gamma_1 \\ \gamma_2 & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \end{pmatrix},$$

   $$BAC = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} & \gamma_3 \\ \gamma_4 & b_{22}c_{12} + b_{21}c_{22} \end{pmatrix},$$

   donde γ_i no son relevantes para este problema. Por lo que la traza de esos producto de matrices es:

   $$\text{tr}(ABC) = b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \quad \text{y} \quad \text{tr}(BAC) = b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} + b_{22}c_{12} + b_{21}c_{22}.$$

De lo anterior podemos observar que si $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$,

$$\begin{gathered}
b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}+b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \neq b_{12}c_{11}+b_{11}c_{21}+b_{22}c_{12}+b_{21}c_{22} \\
b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}+b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22}-b_{12}c_{11}-b_{11}c_{21}-b_{22}c_{12}-b_{21}c_{22} \neq 0 \\
c_{11}(b_{21}-b_{12})+c_{21}(b_{22}-b_{11})+c_{12}(b_{11}-b_{22})+c_{22}(b_{12}-b_{21}) \neq 0 \\
(b_{21}-b_{12})(c_{11}-c_{22})+(b_{22}-b_{11})(c_{21}-c_{12}) \neq 0.
\end{gathered}$$

Entonces de lo anterior podemos encontrar un conjunto de elementos de las matrices B y C:

$$\begin{array}{ccc}
c_{11} > c_{22} & , & b_{21} > b_{12} \\
c_{21} > c_{12} & , & b_{22} > b_{11}
\end{array}$$

tal que $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Entonces una tripleta de matrices que cumple que $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$, son: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculemos la trazas para mostrar que efectivamente se cumple.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculemos la multiplicación con la matriz C:

$$ABC = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14+15 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$BAC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+6 & \gamma_3 \\ \gamma_4 & 10+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & \gamma_3 \\ \gamma_4 & 14 \end{pmatrix},$$

donde γ_i no son relevantes para este problema. Por lo que la traza de esos producto de matrices es:

$$\text{tr}(ABC) = 29 + 7 = 36 \;\text{ y }\; \text{tr}(BAC) = 18 + 14 = 32.$$

Por lo que se cumple que $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$ para las matrices propuestas. $\blacksquare$.

9. Sea L una matriz triangular inferior $n \times n$. Demuestre que $L = L_1 L_2 \cdots L_n$ donde L_i es la matriz $n \times n$ que se obtiene reemplazando la $i-$ésima columna de I_n por la $i-$ésima columna de L. Demuestre un resultado análogo para matrices triangulares superiores.

RESPUESTA

Sea L la matriz triangular inferir $n \times n$:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Entonces L_i están definidas como:

$$L_1 = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},\; L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \cdots, L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

10. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño n, triangular superior tal que $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \cdots, n$. Demuestre que para $i = 1, \cdots, n$ y $j = 1, \cdots, \text{mín}(n, i+p-1)$ se cumple que $b_{ij} = 0$ donde $A^p = (b_{ij})$ y p es un entero positivo.

RESPUESTA

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño n, triangular superior tal que $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \cdots, n$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces veamos que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0a_{12} + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$