Maestría en Computo Estadístico
Álgebra Matricial
Tarea 3
14 de septiembre de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: Tarea 3, AM.

Todos los cálculos deben ser a mano.

1. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

encuentre su forma escalonada reducida por renglones. Escriba todas las matrices elementales correspondientes a las operaciones que usó para llevar la matriz a la forma que obtuvo.

RESPUESTA

Para encontrar la forma escalonada reducida por renglones ocuparemos eliminación de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \overset{R1 \Longleftrightarrow R3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix} \underset{R3 \to R_3 + 4R_1}{\overset{R_2 \to R_2 + R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 13 & -18 & 3 \end{pmatrix} \overset{R2 \to R2/3}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 13 & -18 & 3 \end{pmatrix} \overset{R3 \to R3 - 13R2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -28/3 & 17/3 \end{pmatrix} \overset{R3 \to -3R3/28}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -17/28 \end{pmatrix}.$$

Las matrices elementales que corresponden a las operaciones que se utilizaron para lleva la matriz a la forma escalonada reducida por renglones son:

$$E_3(-3/28)E_{32}(-13)E_2(1/3)E_{31}(4)E_{21}(1)E_{13}A$$

o

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{28} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \blacksquare.$$

2. Dada el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ a_1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

encuentre condiciones generales sobre a_1 y a_2 para que el sistema sea consistente. Si se quiere que la solución sea exactamente $x = (3, -1, 2)^t$, ¿qué valores deben tener a_1 y a_2?

RESPUESTA

Recordemos que un sistema es inconsistente cuando no tiene ninguna solución. Para determinar si el sistema es inconsistente o consistente ocuparemos eliminación gaussiana para resolver el sistema. El cual consiste primero en reducir por renglones la matriz aumentada a la forma escalonada por renglones y después sustitución hacia atrás. Reducimos la matriz aumentada a su forma escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ a_1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & a_2 \end{array}\right) \xrightarrow[R3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-a_1R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1-3a_1 & -3+a_1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & a_2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\Longleftrightarrow R3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & a_2 \\ 0 & -1-3a_1 & -3+a_1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-(1+3a_1)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & a_2 \\ 0 & 0 & -6-8a_1 & 1-a_2-3a_2a_1 \end{array}\right)$$

El sistema anterior es **inconsistente o no tiene solución si** $-6-8a_1=0$ y $1-a_2(1+3a_1)\neq 0$, despejando de ambos lados tenemos $a_1=-\frac{3}{4}$ y $a_2\neq -\frac{1}{1-3a_1}\neq \frac{4}{5}$.

Ahora, determinemos los valores de a_1 y a_2 para que la solución del sistema sea $x=(3,-1,2)^t$. Para que $(3,-1,2)^t$ sea solución se tiene que cumplir $A(3,-1,2)^t=b$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ a_1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-3-2 \\ 3a_1+1-6 \\ 3-2+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 3a_1+1-6 \\ 3-2+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Pero si observamos el primer renglón de lo anterior, notamos que $x=(3,-1,2)^t$ no puede ser solución del sistema debido a que no cumple la primera igualdad, independientemente de los valores que tomen a_1 y a_2. $\blacksquare$.

3. Encuentre la solución general, escribiéndola como combinación lineal de vectores, del sistema homogéneo $Ax=0$ donde

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

RESPUESTA
Tenemos que $Ax=0$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la solución general ocupemos reducción gaussiana. Primero reduzcamos la matriz en su forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3\to R_3-R_2]{R_4\to R_4+R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to -R_3/2]{R_4\to R_4-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4+R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to -R_4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora realizamos sustitución hacia atrás de la matriz anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - 2R_4}{\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_4}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_2 \to R_2 - R_3}{\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_4}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo anterior encontramos que $x_6 = 0$ y $x_5 = 0$ del reglón 3 y 4 respectivamente. Del renglón 2 obtenemos que $x_3 = -2x_4$ y del renglón 1 $x_1 = 3x_2 + 3x_4$. Por lo que la solución general es

$$x = \begin{pmatrix} 3x_2 + 3x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

la cual se puede escribir como combinación lineal de la siguiente forma:

$$x = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \blacksquare.$$

4. Encuentra la inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

RESPUESTA

Para encontrar A^{-1}, tenemos la ecuación $AX = I$ que puede verse como un conjunto de sistemas de ecuaciones $Ax_i = e_i$ donde x_i son las columnas de X. Luego con el método de Gauss, si es posible resolver cada uno de estos sistemas con solución x_i, encontramos la inversas de A dada por $X = (x_1, \cdots, x_n)$. Usando Gauss Jordan

$$L(A|I) = (LA|LI) = (I|L)$$

implica que $L = A^{-1}$.

Ocupando lo anterior tenemos que:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R3 \to R_3 - 2R_1}{\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 \end{array}\right) \underset{R2 \to R_2 + 2R_3}{\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 \end{array}\right).$$

Por lo tanto la inversa es:

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 3.5 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \blacksquare.$$

5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que A es no singular y luego escriba A como producto de matrices elementales.

RESPUESTA

Reduzcamos a A en su forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que si

Si $A_{n \times n}$ se puede escribir en su forma escalonada con n pivotes si solo sí es no singular (demostrado en clase).

Por lo tanto, como la forma escalonada de $A_{3\times 3}$ tiene 3 pivotes entonces A es no singular. Otra forma de demostrarlo es calculando el determinante de A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (1)(2)(-4) = -8.$$

Por lo tanto, como el determinante de A es distinto de cero eso implica que A es no singular.

Ahora para escribir a A como producto de matrices elementales, hacemos reducción hacia atrás a la matriz escalonada calculada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -R_3/4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_2 \to R_2 - 3R_3}{\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, transformando las operaciones elementales por matrices elementales,tenemos que lo anterior es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = I \Rightarrow$$

Ahora, haciendo uso de las propiedades de las matrices inversas ($(E_1E_2\cdots E_n)^{-1} = E_n^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1}$, demostrada en clase), entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} I \Rightarrow$$

Ahora para calcular las inversas ocupemos lo visto en clase:
Sea $A = I_n + uv^t$ una matriz elemental. Entonces A es invertible con inversa dada por

$$A^{-1} = I - \frac{uv^t}{1 + v^t u}.$$

Más aún, si E es elemetal del tipi I, II, ó III entonces E^{-1} es elemental del mismo tipo que E.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \blacksquare.$$

Para que quede más especifico realizamos aquí las matrices inversas:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -4R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. i) Encuentre dos matrices que sean invertibles pero que su suma no sea invertible. ii) Encuentre dos matrices singulares cuya suma sea invertible. Justifique todas sus aseveraciones.

   RESPUESTA
   Recordemos que:
   Si $A_{n\times n}$ se puede escribir en su forma escalonada con n pivotes si solo sí es no singular (demostrado

en clase).
Sea $A_{3\times3}$ y $B_{3\times3}$ matrices triangulares superiores, con elementos en la diagonal distintos de cero, esto implica que A y B son invertibles debido a que estan en su forma escalonada y tienen 3 pivotes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}, \text{ donde } a_{ii} \neq 0 \text{ y} b_{ii} \neq 0.$$

Ahora haciendo que $a_{33} = -b_{33}$ y $a_{11} \neq b_{11}$, $a_{22} \neq b_{22}$, esto implicaría que:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -b_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{12} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ 0 & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y por lo tanto, como $A + B$ tiene a lo más 2 pivotes esto implica que $A + B$ no se invertible.

i) Por lo anterior, **podemos proponer las siguientes dos matrices A y B tal que son invertibles y $A + B$ no sea invertible**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $A_{3\times3}$ y $B_{3\times3}$ matrices triangulares superiores, con un elemento diagonal igual a cero pero en diferente posición en A y B ($a_{33} = 0$ y $b_{22} = 0$), esto implica que A y B no son invertibles debido a que estan en su forma escalonada y tienen 2 pivotes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}, \text{ donde } a_{ii} \neq 0 \text{ y} b_{ii} \neq 0.$$

Ahora considerando a $a_{11} \neq -b_{11}$, entonces:

$$A{+}B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} + b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \text{ donde } a_{ii} \neq 0 \text{ y} b_{ii} \neq 0.$$

Y por lo tanto, como $A + B$ tiene 3 pivotes esto implica que $A + B$ es invertible.

ii) Por lo anterior, **podemos proponer las siguientes dos matrices A y B tal que no sean invertibles y $A + B$ sea invertible**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

7. Encuentre la descomposición LU de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

RESPUESTA
Sea T_i una matriz inferior elemental y si no se requieren intercambios de renglones se pueden hacer $n-1$ multiplicaciones por la izquierda de $A_{n\times n}$ por matrices triangulares inferiores elementales para llevar a A a una forma triangular superior, es decir:

$$T_{n-1}\cdots T_1 A = U$$

Luego

$$A = T_1^{-1}\cdots T_{n-1}^{-1}U = LU,$$

donde $L = T_1^{-1}\cdots T_n^{-1}$.

Entonces, usemos eliminación gaussiana para determinar la matriz U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \underset{R_4\to R_4-R_1}{\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_4\to R_4-3R_2}{\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4-4R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

Ahora determinaremos L,

$$E_{43}(-4)E_{42}(-3)E_{32}(-1)E_{41}(-1)E_{31}(-2)A = U$$

o

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = U \Rightarrow A =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} U.$$

Y esto implica que:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir, la descomposición LU de la matriz definida es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \quad \blacksquare.$$

Para que quede más especifico que se realizaron las matrices inversas a mano:

$$\cdot \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to R_4 + 4R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Encuentre la descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

y luego úsela para encontrar la solución del sistema $Ax = b$, donde

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

RESPUESTA

El problema anterior se resolvió utilizando la metodología vista en clase. Ahora se hará uso de un método "más sencillo"(Álgebra Lineal, Grossman (2012)). Si $A = LU$, si sabe que A se puede factorizar como:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} = LU$$

Observe que el primer renglón de U es el mismo que el primer renglón de A porque al reducir A a la forma triangular, no hace falta modificar los elementos del primer renglón.

Se pueden obtener todos los coeficientes faltantes con tan sólo multiplicar las matrices. La componente 2, 1 de A es 4. De este modo, el producto escalar del segundo renglón de L y la primera columna de U es igual a 4:

$$4 = 2a \quad \text{o} \quad a = 2$$

Después se tiene:

componente $2, 2$: $7 = 6 + u \to \ u = 1$.

De aquí en adelante se pueden insertar los valores que se encuentran en L y U:

componente $2,3$: $2 = -2 + v \rightarrow\ v = 4$.

componente $2,4$: $1 = 12 + w \rightarrow\ w = -11$.

componente $3,1$: $-2 = 2b \rightarrow\ b = -1$.

componente $3,2$: $5 = -3 + c \rightarrow\ c = 8$.

componente $3,3$: $-2 = +1 + 32 + x \rightarrow\ x = -35$.

componente $3,4$: $0 = -6 - 88 + y \rightarrow\ y = 94$.

componente $4,1$: $0 = 2d \rightarrow\ d = 0$.

componente $4,2$: $-4 = e \rightarrow\ e = -4$.

componente $4,3$: $5 = -16 - 35f \rightarrow\ f = -3/5$.

componente $4,4$: $2 = 44 - 3(94)/5 + z \rightarrow\ z = 72/5$.

Por lo que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & -35 & 94 \\ 0 & 0 & 0 & 72/5 \end{pmatrix} = LU$$

Ahora, para resolver un sistema lineal $Ax = b$ cuando $A = LU$ se resuelven dos sistemas triangulares $Ly = b$ y $Ux = y$. Primero se una sustitución hacia adelante en $Ly = b$, y luego se resuelve el sistema $Ux = y$ usando sustitución hacia atras (esta metodología se presento en clase). Entonces para este problema tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Esto implica que

$$y_1 = 1$$

$$2(1) + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -2$$

$$-(1) + 8(-2) + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = 17$$

$$0 - 4(-2) - 3(17)/5 + y_4 = 4 \Rightarrow y_4 = 31/5$$

Sea acaba de realizar la sustitución hacia adelante. Ahora, de $Ux = y$ se obtiene:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 &= 1 \\ x_2 + 4x_3 - 11x_4 &= -2 \\ -35x_3 + 94x_4 &= 17 \\ 72/5x_4 &= 31/5 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} x_4 &= \tfrac{31}{72} \\ -35x_3 + 94(\tfrac{31}{72}) &= 17, \text{de manera que } x_3 = \tfrac{17-94\left(\frac{31}{72}\right)}{-35} = \tfrac{17*72-94*31}{-35*72} = \tfrac{-1690}{-2520} = \tfrac{169}{252} \\ x_2 + 4x_3 - 11x_4 &= -2, \text{de manera que } x_2 = -2 + 11\left(\tfrac{31}{72}\right) - 4\left(\tfrac{169}{252}\right) = \tfrac{3}{56} \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 &= 1, \text{de manera que } x_1 = \tfrac{1}{2} - 3\left(\tfrac{31}{72}\right) + \tfrac{169}{504} - 3\left(\tfrac{3}{112}\right) = -\tfrac{541}{1008} \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución es:

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{541}{1008} \\ \\ \frac{3}{56} \\ \\ \frac{169}{252} \\ \\ \frac{31}{72} \end{pmatrix} \qquad \blacksquare.$$

Cálculos de la simplificación de x_2 y x_1 :

$$-2+11\left(\frac{31}{72}\right)-4\left(\frac{169}{252}\right)=-2+\frac{341}{72}-\frac{338}{126}=\frac{-18144+42966-24336}{9000}=\frac{486}{72*126}=\frac{3}{56}.$$

$$\frac{1}{2}-3\left(\frac{31}{72}\right)+\frac{169}{504}-3\left(\frac{3}{112}\right)=\frac{1}{2}-\frac{31}{24}+\frac{169}{504}-\frac{9}{112}=\frac{504-1302+338-81}{1008}=-\frac{541}{1008}.$$

9. Encuentre la descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & 26 & 2 \end{pmatrix},$$

Usando esta misma descomposición como ayuda, encuentre A^{-1}.

RESPUESTA

Utilizando la metodología que el ejercicio anterior. Tenemos que si $A = LU$, si se sabe que A se puede factorizar como:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & 26 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} = LU$$

Observe que el primer renglón de U es el mismo que el primer renglón de A porque al reducir A a la forma triangular, no hace falta modificar los elementos del primer renglón.

Se pueden obtener todos los coeficientes faltantes con tan sólo multiplicar las matrices. La componente 2, 1 de A es 3. De este modo, el producto escalar del segundo renglón de L y la primera columna de U es igual a 3:

$$3 = a \quad \text{o} \quad a = 3$$

Después se tiene:

componente $2,2$: $-9 = -6 + u \to \ u = -3$.

De aquí en adelante se pueden insertar los valores que se encuentran en L y U:

componente $2,3$: $0 = -6 + v \to \ v = 6$.	componente $3,4$: $7 = 3 + y \to \ y = 4$.
componente $2,4$: $-9 = -9 + w \to \ w = 0$.	componente $4,1$: $-3 = d \to \ d = -3$.
componente $3,1$: $-1 = b \to \ b = -1$.	componente $4,2$: $-6 = 6 - 3e \to \ e = 4$.
componente $3,2$: $2 = 2 + -3c \to \ c = 0$.	componente $4,3$: $26 = 6 + 24 + 2f \to \ f = -2$.
componente $3,3$: $4 = 2 + x \to \ x = 2$.	componente $4,4$: $2 = 9 + -8 + z \to \ z = 1$.

Por lo que:

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&-2&-3\\3&-9&0&-9\\-1&2&4&7\\-3&-6&26&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\-1&0&1&0\\-3&4&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&-2&-3\\0&-3&6&0\\0&0&2&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}=LU$$

Ahora, considerando la propiedad de la inversa de una matriz (demostrada en clase):

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

Entonces tenemos que:

$$A^{-1}=(LU)^{-1}=U^{-1}L^{-1}$$

Calculemos la inversa de U^{-1} y L^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\3&1&0&0&0&1&0&0\\-1&0&1&0&0&0&1&0\\-3&4&-2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\underset{R_3\to R_3+R_1}{\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-3&1&0&0\\0&0&1&0&1&0&1&0\\-3&4&-2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\underset{R_4\to R_4-4R_2}{\xrightarrow{R_4\to R_4+3R_1}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-3&1&0&0\\0&0&1&0&1&0&1&0\\0&0&-2&1&15&-4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_4\to R_4+2R_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-3&1&0&0\\0&0&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&17&-4&2&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$L^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\1&0&1&0\\17&-4&2&1\end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&-2&-3&1&0&0&0\\0&-3&6&0&0&1&0&0\\0&0&2&4&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\underset{R_3\to R_3-4R_4}{\xrightarrow{R_1\to R_1+3R_4}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&-2&0&1&0&0&3\\0&-3&6&0&0&1&0&0\\0&0&2&0&0&0&1&-4\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3/2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&-2&0&1&0&0&3\\0&-3&6&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0.5&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\underset{R_1\to R_1+2R_3}{\xrightarrow{R_2\to R_2-6R_3}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&0&0&1&0&1&-1\\0&-3&0&0&0&1&-3&12\\0&0&1&0&0&0&0.5&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to -R_2/3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-2&0&0&1&0&1&-1\\0&1&0&0&0&-1/3&1&-4\\0&0&1&0&0&0&0.5&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1+2R_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-2/3&3&-9\\0&1&0&0&0&-1/3&1&-4\\0&0&1&0&0&0&0.5&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$U^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2/3&3&-9\\0&-1/3&1&-4\\0&0&0.5&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=U^{-1}L^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2/3&3&-9\\0&-1/3&1&-4\\0&0&0.5&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\1&0&1&0\\17&-4&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-147&\frac{106}{3}&-15&-9\\-66&\frac{47}{3}&-7&-4\\\frac{-67}{2}&8&\frac{-7}{2}&-2\\17&-4&2&1\end{pmatrix}\blacksquare$$

10. Encuentre la descomposición LU de la matriz por bandas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

(Para una interesante aplicación de matrices por bandas a problemas de flujo de calor en física y la importancia de obtener su descomposición LU, ver problemas 31 y 32 de Linear Algebra, D. Lay, 4th ed., p. 131 y las explicaciones que ahí se dan.)

RESPUESTA

Para hacer un poco más facil este problema, definamos las siguientes submatrices de A:

$$A_1^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_2^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \Rightarrow$$

$$\det(A_1^*) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad y \quad \det(A_2^*) = a_{33}\det(A_1^*) - a_{32}a_{11}a_{23}.$$

Ahora utilizando (*demostrado en clase*):
A tiene una factorización LU si y solo si todas sus submatrices principales líderes son no singulares.

Entonces para que A tenga su factorización LU asumimos que $[a_{11}]$, A_1^* y A_2^* son no singulares, es decir, $a_{11} \neq 0$, $\det(A_1^*) \neq 0$ y $\det(A_2^*) \neq 0$.
Ahora, considerando la metodología del inciso 9: Si $A = LU$, se sabe que A se puede factorizar como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} = LU$$

Observe que el primer renglón de U es el mismo que el primer renglón de A porque al reducir A a la forma triangular, no hace falta modificar los elementos del primer renglón.
Se pueden obtener todos los coeficientes faltantes con tan sólo multiplicar las matrices. La componente 2, 1 de A es a_{21}. De este modo, el producto escalar del segundo renglón de L y la primera columna de U es igual a a_{21}:

$$a_{21} = a_{11} \cdots a \quad \text{o} \quad a = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Después se tiene:
componente $2, 2$: $a_{22} = a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} + u \rightarrow \; u = a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}$
De aquí en adelante se pueden insertar los valores que se encuentran en L y U:

componente $2,3$: $a_{23} = 0 + v \to \ v = a_{23}$.

componente $2,4$: $0 = 0 + w \to \ w = 0$.

componente $3,1$: $0 = a_{11} b \to \ b = 0$.

componente $3,2$: $a_{32} = (a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}})c \to \ c = \frac{a_{32}a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$.

componente $3,3$: $a_{33} = a_{23}\left(\frac{a_{32}a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}\right) + x \to$

$x = a_{33} - a_{23}\left(\frac{a_{32}a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}\right) = \frac{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}}{\det(A_1^*)}$

componente $3,4$: $a_{34} = 0 + y \to \ y = a_{34}$.

componente $4,1$: $0 = a_{11} d \to \ d = 0$.

componente $4,2$: $0 = \left(a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}\right) e \to \ e = 0$.

componente $4,3$: $a_{43} = (\frac{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}}{\det(A_1^*)}) f \to$

$f = \frac{a_{43}}{\frac{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}}{\det(A_1^*)}} = \frac{a_{43} \cdot \det(A_1^*)}{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}}$

componente $4,4$: $a_{44} = a_{34} \frac{a_{43} \cdot \det(A_1^*)}{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}} + z$

$z = a_{44} - \frac{a_{34}a_{43} \cdot \det(A_1^*)}{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}}$.

Por lo tanto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{32}a_{11}}{\det(A_1^*)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{43} \cdot \det(A_1^*)}{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\det(A_1^*)}{a_{11}} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}}{\det(A_1^*)} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} - \frac{a_{34}a_{43} \cdot \det(A_1^*)}{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}} \end{pmatrix}$$

$$= LU.$$

Ahora, recordando la notación del inicio podemos ver que:

$$\det(A_2^*) = a_{33}\det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}, \quad y \quad \det(A) = a_{44} \cdot (a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}) - a_{34}a_{43}\det(A_1^*).$$

Es decir, el resultado anterior se puede simplificar a:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{32}a_{11}}{\det(A_1^*)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{43} \cdot \det(A_1^*)}{\det(A_2^*)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\det(A_1^*)}{a_{11}} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\det(A_2^*)}{\det(A_1^*)} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\det(A)}{\det(A_2^*)} \end{pmatrix} = LU\blacksquare.$$

Algo curioso de esas matrices con bandas, es que se puede observar que tanto L y U igual son matrices por bandas.