Maestría en Computo Estadístico
Álgebra Matricial
Tarea 1
26 de agosto de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: Tarea 1, IE.

1. Si A es una matriz $m \times n$ dada por bloques de vectores columna como

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots a_n)$$

y B es una matriz $n \times p$ dada por bloques de vectores renglón como

$$\begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Demuestre que

$$AB = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

2. Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden. Demuestre que $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ si y solo si $AB = BA$.

RESPUESTA
Primera implicación:

$$(A - B)(A + B) = AA - BA + AB - BB =$$

3. Sean A y B matrices $n \times n$, $A \neq 0, \ B \neq 0$, tales que $AB = BA$. Demuestre que $A^p B^p = B^p A^p$ para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$.

RESPUESTA
Multiplicado por A^{p-1} por la izquierda y B^{q-1} por la derecha tenemos que:

$$A^{p-1}(AB)B^{q-1} = A^{p-1}(BA)B^{q-1} \quad \blacksquare.$$

4. Se dice que una matriz cuadrada A es antisimétrica si $A = -A^t$. Demuestre que $A - A^t$ es antisimétrica.

RESPUESTA
Considerando las propiedades de la transpuesta:

$$-(A - A^t)^t = -(A - A^t) = A - A^t \quad \blacksquare.$$

5. Demuestre que dada cualquier matriz cuadrada A, esta se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

6. Se dice que una matriz cuadrada P es idempotente si $P^2 = P$. Si

$$A = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

y si P es idempotente, encuentre A^{500}.

RESPUESTA

$$A^2 = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2+0 & IP+P^2 \\ 0+0 & 0+P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2+0 & IP+2P^2 \\ 0+0 & 0+P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 3P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$A^{500} = \begin{pmatrix} I & 500P \\ 0 & P \end{pmatrix} \blacksquare.$$

7. Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$. Demuestre que tr(AB^t) =tr(A^tB).

   RESPUESTA
   Utilizando la propiedad de la traza de una matriz:

   $$\text{tr}(A) = \text{tr}(A^t).$$

   Y si Entonces,

   $$\text{tr}(AB^t) = \text{tr}($$

8. Encuentre matrices A, B y C tales que tr(ABC) $\neq$tr(BAC).

9. Sea L una matriz triangular inferior $n \times n$. Demuestre que $L = L_1L_2\cdots L_n$ donde L_i es la matriz $n\times n$ que se obtiene reemplazando la $i-$ésima columna de I_n por la $i-$ésima columna de L. Demuestre un resultado análogo para matrices triangulares superiores.

10. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño n tal que $a_{ij} = 0$ para $i = 1, \cdots, n$. Demuestre que para $i = 1, \cdots, n$ y $j = 1, \cdots, \text{mín}(n, i+p-1)$ se cumple que $b_{ij} = 0$ donde $A^p = (b_{ij})$ y p es un entero positivo.