Inferencia Estadística

Primer Examen Parcial

Escribe de manera concisa y clara tus respuestas, justificando los pasos necesarios. Serán descontados puntos de los ejercicios mal escritos. Las conclusiones deben escribirse en el contexto del problema.

1. Usando el teorema de la transformación integral, simula 1000 observaciones de una v.a. Weibull($\alpha = 2, \beta = 2$). Explica el algoritmo en pseudocódigo. Grafica un histograma y una estimación no paramétrica de la densidad (KDE) usando el kernel gaussiano. Explica como seleccionaste el ancho de banda. ¿Qué pasaría si no conocieras los parámetros?

2. Sea $X \sim Poisson(\lambda)$ y define

$$\mu_k = E[(X-\mu)^k] \quad k \in \mathbb{N},$$

para $\mu = E[X]$. Además, considera

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}, \quad \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}.$$

La cantidad α_3 es conocida como el coeficiente de asimetría y se utiliza para medir la asimetría en la distribución. La cantidad α_4 es conocida como el coeficiente de kurtosis y se utiliza para medir la picudez de las distribuciones. Calcule α_3 y α_4 para X. Si $\lambda = 1$, ¿cuáles son los valores de α_3 y α_4?

3. Supongamos que se desea estudiar un número, n, grande de muestras de sangre para tratar de detectar una enfermedad rara en cada una de las muestras. Si cada muestra es analizada individualmente, se requieren n pruebas. Supongamos que cada muestra se divide a la mitad y que de cada muestra se selecciona una de las mitades, las que se usan para crear una mezcla de todas ellas (i.e. se juntan en una sola muestra). Si la prueba es suficientemente sensitiva, esta mezcla puede examinarse y, si tal prueba sale negativa, no se requieren hacer más pruebas y solo se necesita una (no hay enfermos en la muestra). Si la prueba de la mezcla es positiva, cada una de las mitades reservadas de la muestras (las mitades no mezcladas) pueden ser analizadas individualmente. En dicho caso, se necesitan un total de $n+1$. Así, si la enfermedad es rara, es posible que se puedan lograr algunos ahorros a través de este método de analizar en grupo.

   Generalicemos el esquema anterior y supongamos que las n muestras primero se agrupan en m grupos de tamaño k (muestras); es decir, $n = mk$. Cada grupo se prueba con el método de grupo que se explico en el párrafo anterior; si un grupo sale positivo, cada individuo en el grupo es analizado individualmente. Si X_i es el número de pruebas que se hacen en el i-ésimo grupo, el número total de pruebas que se hacen es $N = \sum_{i=1}^{m} X_i$. Sea p la probabilidad de que un individuo cualquiera salga negativo en la prueba. Calcule la esperanza de N. ¿Por qué es importante que la enfermedad sea rara? *Hint: Lea cuidadosamente el ejercicio. Note que la prueba de una muestra resulta en una v.a. Bernoulli*(p).

4. Sea X = el tiempo (en semanas) desde que se embarca un producto defectuoso hasta que el cliente lo devuelve. Supóngase que el tiempo mínimo de devolución es $\gamma = 3.5$ y que el tiempo excedente $Y = X - 3.5$ arriba del tiempo mínimo tiene una distribución Weibull con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 1.5$.

   a) ¿Cuál es la distribución acumulada de X?
   b) ¿Cuál es el tiempo de devolución esperado y la varianza del tiempo de devolución?
   c) Calcular $P(X > 5)$.
   d) ¿Cuál es la mediana del tiempo de devolución?