Álgebra Matricial
Tarea 8

Todos los cálculos deben ser a mano.

1. Sea V un espacio con producto interno. Demuestre la ley del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

para todo x, $y \in V$.

2. Sea A una matriz simétrica real $n \times n$. Demuestre que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

3. Sea A una matriz cuyas columnas generan un subespacio $W \subset \mathbb{R}^n$ y sea $v \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $v \perp W$ si y solo si $v \in \mathcal{N}(A^t)$.

4. Se dice que una matriz real es normal si $AA^t = A^tA$. Si A es normal, demuestre que $\mathcal{C}(A) \perp \mathcal{N}(A)$.

5. Considere los vectores

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Luego, exprese el vector

$$u_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

como una combinación lineal de u_1, u_2, u_3.

6. Demuestre que el producto de matrices ortogonales es una matriz ortogonal.

7. Dados los vectores

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

i) Verifique que u_1 y u_2 son ortogonales, ii) Encuentre la proyección ortogonal de y sobre el espacio generado por u_1 y u_2.

8. Sea W es espacio generado por

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si

$$y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

escriba y como la suma de un vector en W y un vector ortogonal a W.

9. Sea W el espacio generado por

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

encuentre el punto en W más cercano a y.

10. Encuentre una base ortogonal para el espacio columna de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

11. Encuentre una descomposición QR de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

12. Encuentre las soluciones de mínimos cuadrados de $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$