Optimización: Programación Lineal

Maestría en Cómputo Estadístico

Centro de Investigación en Matemáticas A.C.

Introducción

- En problemas del mundo real, muchas veces queremos maximizar la ganancia, minimizar costo, etc.
- La programación lineal (PL) define una clase de problemas de optimización.
- Un problema de PL consiste de:
  - Una función objetivo lineal.
  - Un conjunto de restricciones lineales.
  - Un conjunto de variables de decisión no negativas.
- La solución a este tipo de problemas típicamente se encuentra en los vértices o en la frontera.

CIMAT

Forma escalar

Formalmente...

Un problema de programación lineal puede ser declarado como:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar } & c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \\
\text{sujeto a: } & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
& x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}
\end{aligned}
$$

donde:

- $a_{ij}, b_j, c_i, \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \wedge j \in \{1, \ldots, m\}$

CIMAT

Forma estándar

Formalmente...

Un problema de programación lineal en su forma estándar es declarado como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a: } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

donde:

- $\mathbf{x}$ y $\mathbf{c}$ son vectores n-dimensional.
- $\mathbf{b}$ es un vector m-dimensional.
- $\mathbf{A}$ es una matriz de $m \times n$.

CIMAT

Forma estándar

- En la forma estándar, un problema de PL se caracteriza por:
  - La función objetivo es del tipo minimizar.
  - Las restricciones son de igualdad.
  - Las variables están restringidas a ser no negativas.

Cualquier problema de PL puede ser convertido a su forma estándar

Convirtiendo a la forma estándar I

- **Minimizar**: Usando el principio de dualidad, un problema de maximizar es equivalente a minimizar el negativo de la función; esto es:

$$\text{maximizar: } f(\mathbf{x})$$

Es equivalente a:

$$\text{minimizar: } -f(\mathbf{x})$$

CIMAT

Convirtiendo a la forma estándar II

- **Restricciones de igualdad**: En caso de existir restricciones de desigualdad del tipo $\leq$, estas pueden ser convertidas a restricciones de igualdad añadiendo variables de holgura en el lado izquierdo; por ejemplo:

$$a_1x_1 + a_2x_+ \ldots + a_kx_k \leq \beta_1$$

Es equivalente a:

$$a_1x_1 + a_2x_+ \ldots + a_kx_k + x_{k+1} = \beta_1$$

Convirtiendo a la forma estándar III

En caso de existir restricciones de desigualdad del tipo $\geq$, estas pueden ser convertidas a restricciones de igualdad restando variables de excedente en el lado izquierdo; por ejemplo:

$$a_1 x_1 + a_2 x_+ \ldots + a_k x_k \geq \beta_2$$

Es equivalente a:

$$a_1 x_1 + a_2 x_+ \ldots + a_k x_k - x_{k+1} = \beta_2$$

Convirtiendo a la forma estándar IV

- **Variables no negativas**: Cuando en un problema se presentan variables irrestrictas, también llamadas libres, deben sustituirse por la diferencia de dos variables no negativas; esto es:

$$x_1 = {x_1}' - {x_1}''$$

Ejemplo I: Problema

Transformar el siguiente problema de PL a su forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & -2x_1 + x_2 - 5x_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & -3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 - 7x_2 + 4x_3 \geq -3 \\ & x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo I: Solución

Solución:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar } & 2x_1 - x_2 + 5{x_3}' - 5{x_3}'' \\
\text{sujeto a: } & -3x_1 + x_2 + {x_3}' - {x_3}'' + x_4 = 2 \\
& x_1 - 7x_2 + 4{x_3}' - 4{x_3}'' - x_5 = -3 \\
& x_1 - 3x_2 - 2{x_3}' + 2{x_3}'' + x_6 = 1 \\
& x_1, x_2, {x_3}', {x_3}'', x_4, x_5, x_6 \geq 0,
\end{aligned}
$$

Ejercicio I

Convertir el siguiente problema de PL a su forma estándar:

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar } & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{sujeto a: } & 2 \leq x_1 + x_2 \leq 3 \\
& 4 \leq x_1 + x_3 \leq 5 \\
& x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

CIMAT

Terminología

- **Variables de decisión:** Constituyen las incógnitas del problema, consisten básicamente en los niveles de todas las actividades que pueden llevarse a cabo en el problema a formular. La definición de las variables es el punto clave.
- **Objetivo:** Consiste en optimizar la función objetivo, la cual es una función lineal de las diferentes actividades del problema.
- **Restricciones estructurales:** Representan los diferentes requisitos que debe cumplir cualquier solución para que pueda llevarse a cabo. En cierta manera, son las limitantes en los valores de los niveles de las diferentes actividades (variables).

CIMAT

Conceptos básicos

- Una *solución* es un conjunto de valores específicos de las variables de decisión, sin importar que sea algo deseable o ni siquiera permitido.
- Una *solución factible* es aquella para la que todas las restricciones se satisfacen simultáneaneamente.
- Una *solución no factible* es en la cual se viola al menos una restricción.
- La *región factible* será el espacio que resulta de la unión de todas las soluciones factibles.
- Una *solución factible en un vértice* es una solución que se encuentra en una esquina de la región factible. Es decir, es la intersección de dos restricciones funcionales.
- La *solución óptima* será una solución factible que proporciona el valor más favorable de la función objetivo.

- Habrá problemas que puedan tener soluciones múltiples o en su defecto no tener alguna solución optima.
- Cuando no tenga solución puede ser por dos causas: que el problema no tenga soluciones factibles o que las restricciones no impidan que el valor de la función objetivo mejore indefinidamente.

CIMAT

Resolviendo un problema de PL

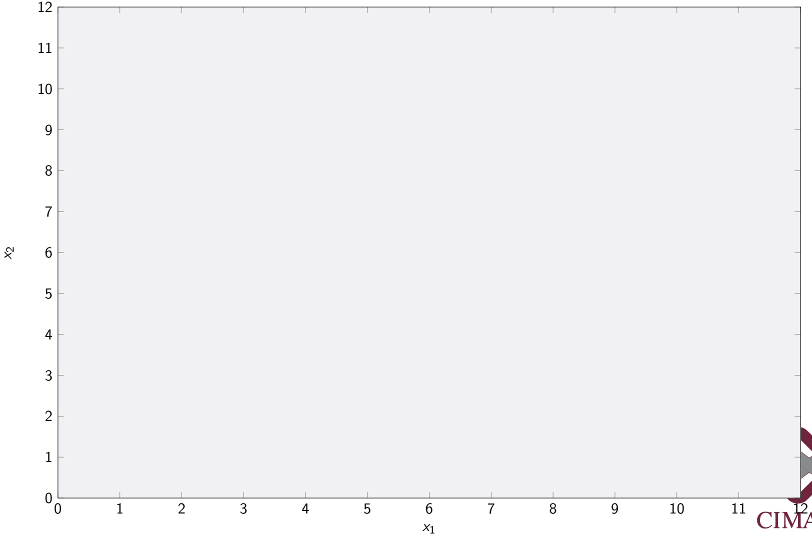
- Una vez que el problema de programación lineal ha sido formulado, el siguiente paso es obtener una solución óptima.
- Cuando el problema de optimización involucra dos variables, es posible usar un método gráfico.
- En la práctica, los problemas de PL involucran más de dos variables.

Ejemplo II: Problema

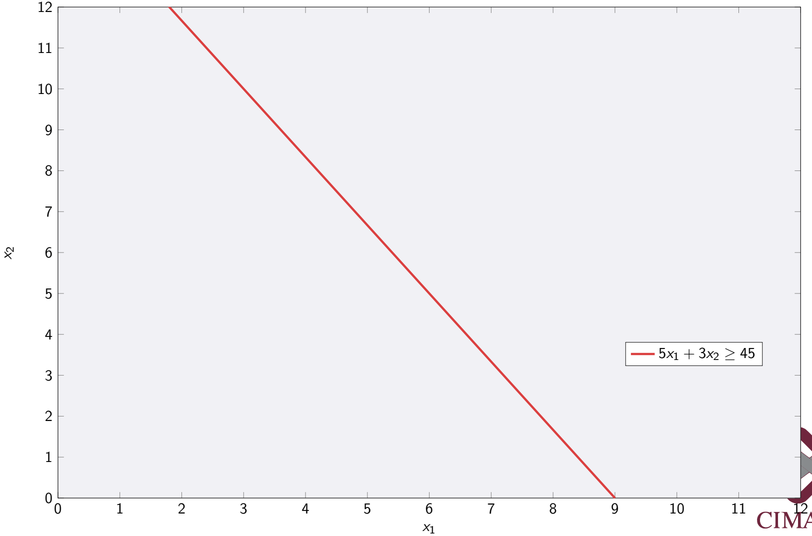
Encuentre de forma gráfica la solución al siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } & 40x_1 + 36x_2 \\ \text{sujeto a: } & 5x_1 + 3x_2 \geq 45 \\ & x_1 \leq 8 \\ & x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

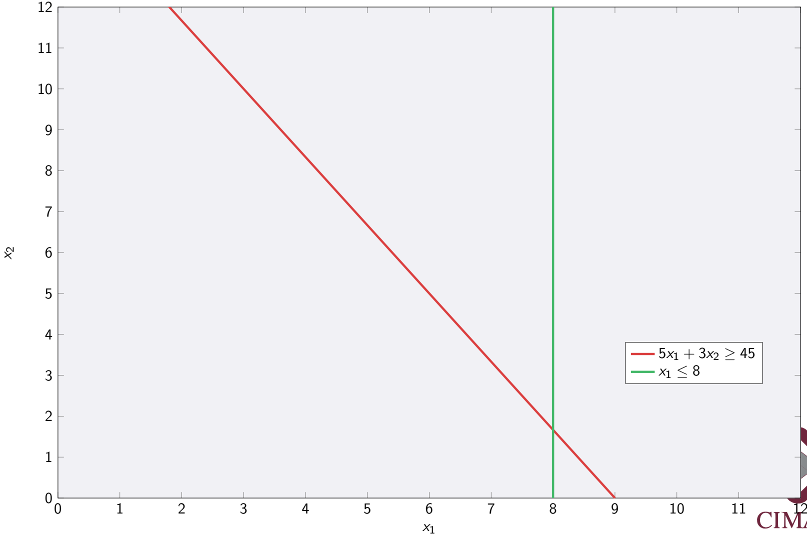
Ejemplo II: Solución



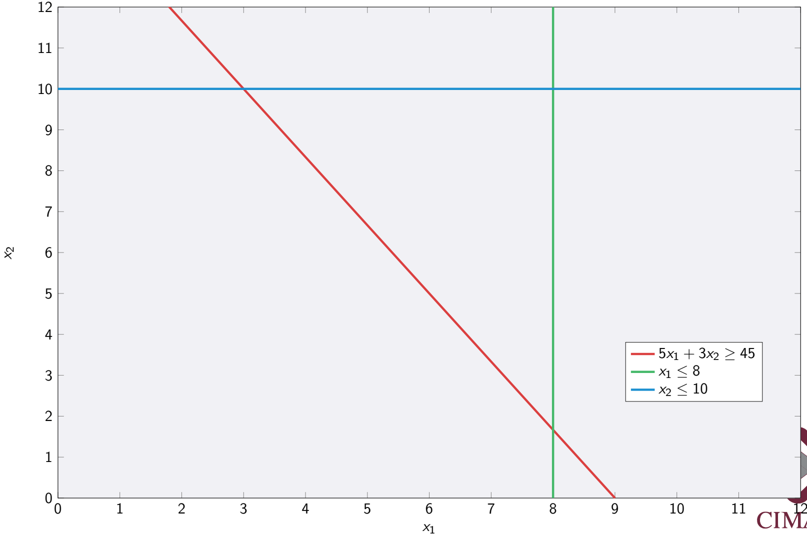
Ejemplo II: Solución



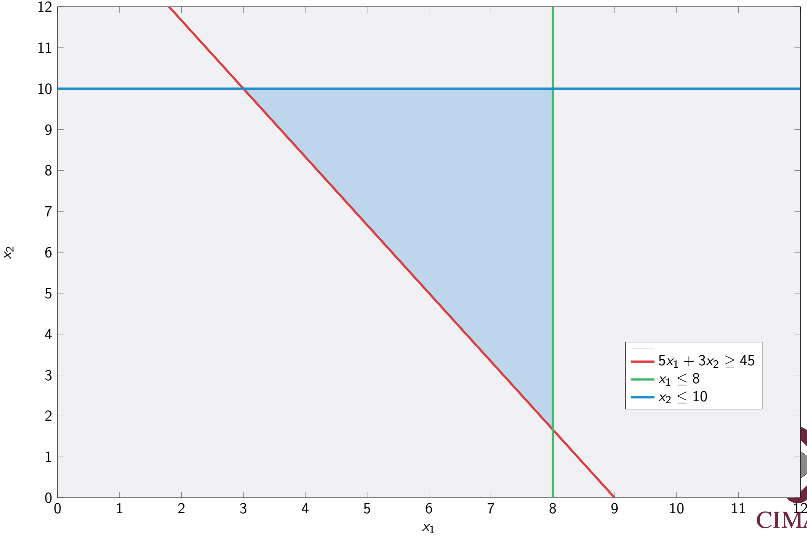
Ejemplo II: Solución



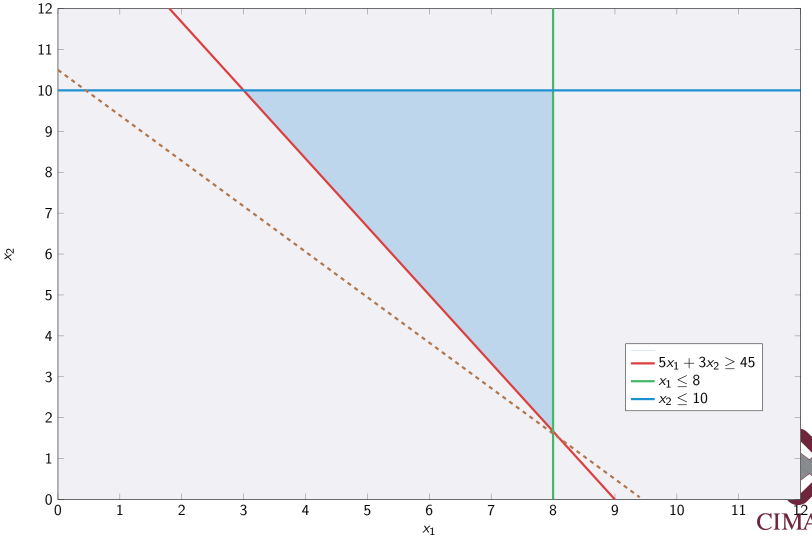
Ejemplo II: Solución



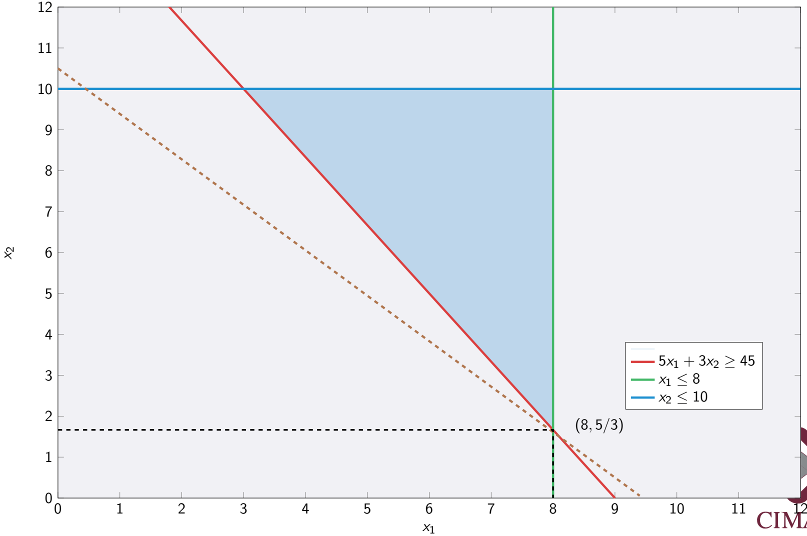
Ejemplo II: Solución



Ejemplo II: Solución



Ejemplo II: Solución



Ejercicio II

Encuentre de forma gráfica la solución al siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } & x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a: } & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

CIMAT

Método *Simplex*

- En la práctica, muchos problemas de PL involucran más de dos variables.
- El método *Simplex* fue propuesto por G. B. Dantzing en 1947.
- Es usado para resolver problemas de PL.
- La idea básica es comenzar por una solución factible básica de las restricciones en su forma estándar.
- Hay que recordar que las variables de holgura ayudan a completar la base al pasar de una desigualdad de $\leq$ a $=$.
- También hay que recordar que la función objetivo de $max\ z$ es equivalente a $min\ -z$.
- Los lados derechos del modelo deben ser no negativos.

Recordando. . .

Forma estándar

Un problema de programación lineal en su forma estándar es declarado como:

$$\begin{aligned} \text{maximizar } & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a: } & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

donde:

- $\mathbf{x}$ y $\mathbf{c}$ son vectores columna n-dimensional
- $\mathbf{b}$ es un vector m-dimensional
- $\mathbf{A}$ es una matriz de coeficientes $m \times n$

CIMAT

Solución básica I

- En general, existen más variables que ecuaciones.
- Una solución básica sería aquella solución obtenida de resolver el sistema de ecuaciones lineales.

Solución básica

Sea $\mathbf{B}$ una submatriz de $\mathbf{A}$ con m columnas y $\mathbf{N}$ una submatriz con los $n-m$ columnas restantes y $\mathbf{x} = [\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}]$. La solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ obtenida a través de hacer $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ y $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$ es llamada **solución básica**

Solución básica II

- Los vectores columna de $\mathbf{B}$ son llamados vectores básicos y los componentes $\mathbf{x_B}$ son llamados *básicos* y los componentes de $\mathbf{x_N}$ *no básicos*.
- Una solución es llamada *degenerada* si uno o más de los componentes en $\mathbf{x_B}$ son cero.
- Si todos los componentes $\mathbf{x_B}$ son mayores o igual que cero, se dice que es una *solución básica factible*.

CIMAT

Ejemplo III: Problema

Encuentre una solución básica al siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } z = & -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ \text{sujeto a: } & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \leq 8 \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

CIMAT

Ejemplo III: Solución I

Expresando en su forma estándar

$$
\begin{aligned}
\text{max -z} = {} & 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 \\
\text{sujeto a: } & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\
& x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Representando en forma matricial:

Ejemplo III: Solución II

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Una posible solución básica sería:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 8, x_6 = 4$$

¿Cuántas posibles soluciones básicas se pueden obtener?

Pivote

- La operación pivote se encarga de intercambiar una variable básica y una no básica.
- Se denomina:
  - **Columna pivote** a la columna de la variable no básica.
  - **Fila pivote** a la fila con la variable no básica diferente de cero.
  - **Pivote** a la intersección de la columna pivote y fila pivote.

CIMAT

Método *Simplex* I

1. Expresar el problema de PL en su forma normal.
2. Hacer la función objetivo de la forma:

$$maxz = 0$$

3. Construir la tabla *Simplex*:

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{1}$$

4. Eliminar todas las variables básicas de la función objetivo.

CIMAT

Método *Simplex* II

5. Variable que entra. De la fila 0, seleccionar la columna i con el elemento más negativo como la columna pivote.
6. Varible que sale. De todos los elementos positivos de la columna i, seleccionar la fila j que tenga la menor proporción con el vector $\mathbf{b}$. Es decir, hacer la prueba del cociente mínimo, la cual consiste en elegir los elementos positivos de la columna pivote y dividir el lado derecho entre el elemento correspondiente de esa columna.
7. Aplicar operaciones básicas con el pivote intercambiando las variables y eliminándolas de la columna.
8. Prueba de optimalidad. Si todos los coeficientes en la fila 0 son mayores o igual que cero nos detenemos; de lo contrario, ir al paso 5 (cambiar la base).

CIMAT

Ejemplo IV: Problema

Encuentre la solución con el método Simplex al siguiente problema de PL:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } z= & -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ \text{sujeto a: } & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \leq 8 \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo IV: Solución I

- Expresando en su forma estándar:

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar -z} = & \; 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 \\
\text{sujeto a: } & \; x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 8 \\
& \; x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\
& \; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo IV: Solución II

- Reescribiendo la función objetivo como:

$$-z - 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0$$

- Definiendo la tabla *Simplex*:

	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
$-z$	1	-3	4	-2	5	0	0	0
x_5	0	1	1	-1	-1	1	0	8
x_6	0	1	-1	1	-1	0	1	4

Ejemplo IV: Solución III

- Definiendo la columna como el elemento más negativo:

	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
$-z$	1	-3	4	-2	5	0	0	0
x_5	0	1	1	-1	-1	1	0	8
x_6	0	1	-1	1	-1	0	1	4

- Definiendo la fila como la que tiene menor proporción con LD:

	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
$-z$	1	-3	4	-2	5	0	0	0
x_5	0	1	1	-1	-1	1	0	8
x_6	0	1	-1	1	-1	0	1	4

Ejemplo IV: Solución IV

- Intercambiando variables y convirtiendo a cero:

	$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
$-z$	1	0	1	1	2	0	3	12
x_5	0	0	2	-2	0	1	1	12
x_1	0	1	-1	1	-1	0	1	4

- Como todos los elementos en la fila 0 son mayores o iguales que cero, paramos
- La solución está dada por $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 12, x_6 = 0$, con un valor en la función objetivo de -12

CIMAT

Ejemplo V: Problema

Encuentre la solución con el método Simplex al siguiente problema de PL:

$$
\begin{aligned}
\text{max z}= \; & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeto a: } & x_1 \leq 4 \\
& 2x_2 \leq 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo V: Problema

Forma estándar:

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeto a: } & x_1 + x_3 = 4 \\
& 2x_2 + x_4 = 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejercicio III

Encuentre la solución al siguiente problema de PL:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar:} \quad & -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\
\text{sujeto a:} \quad & x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 20 \\
& x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 400 \\
& -5x_2 + 5x_3 \leq 100 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar:} \quad & -3x_1 - 5x_2 \\
\text{sujeto a:} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 15 \\
& x_1 + x_2 \leq 7 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo VI: Problema

Encuentre la solución al siguiente problema de PL:

$$\begin{aligned} \text{max z}= & \ 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeto a: } & \ x_1 \leq 4 \\ & \ 2x_2 \leq 12 \\ & \ 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ & \ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo VI: Problema

- Si una restricción es de forma de igualdad $(=)$, se introduce una variable artificial denotada por $\overline{x}$, para poder completar la base. Pero para poder compensar este hecho se debe penalizar a la variable en la función objetivo con un número muy grande M.

CIMAT

Ejemplo VI: Problema

Forma aumentada:

$$
\begin{aligned}
\text{max z}=\ & 3x_1 + 5x_2 - M\bar{x}_5 \\
\text{sujeto a: }\ & x_1 + x_3 = 4 \\
& 2x_2 + x_4 = 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo VII: Problema

Encuentre la forma aumentada del siguiente problema de PL:

$$
\begin{aligned}
\min \text{ z} = &\ 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeto a: } &\ x_1 \leq 4 \\
&\ 2x_2 = 12 \\
&\ 3x_1 + 2x_2 \geq 18 \\
&\ x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo VII: Problema

- Si una restricción es de forma $\geq$, se introducen dos variables, una variable artificial denotada por $\bar{x}$ y una de excedente para poder completar la base. Pero para poder compensar el hecho de introducir la variable artificial se debe penalizar a la variable en la función objetivo con un número muy grande M.

Ejemplo VII: Problema

Solución

Forma aumentada:

$$
\begin{aligned}
\text{min z} = \ & 3x_1 + 5x_2 + M\bar{x_4} + M\bar{x_6} \\
\text{sujeto a: } & x_1 + x_3 = 4 \\
& 2x_2 + \bar{x_4} = 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 - x_5 + \bar{x_6} = 18 \\
& x_1, x_2, x_3, \bar{x_4}, x_5, \bar{x_6} \geq 0
\end{aligned}
$$

Pero falta cambiar la función objetivo, entonces:

Ejemplo VII: Problema

Solución

Forma aumentada:

$$\begin{aligned}\text{max -z=} \; & -3x_1 - 5x_2 - M\bar{x_4} - M\bar{x_6} \\ \text{sujeto a: } & x_1 + x_3 = 4 \\ & 2x_2 + \bar{x_4} = 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_5 + \bar{x_6} = 18 \\ & x_1, x_2, x_3, \bar{x_4}, x_5, \bar{x_6} \geq 0\end{aligned}$$

Problema primal y dual: Simétrico y asimétrico I

Problemas de programación lineal de maximizar y minimizar pueden ser representados como:

$$\begin{aligned} \min\ \mathbf{z} &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a: } \mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ \mathbf{w} &= \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{sujeto a: } \mathbf{A}^T\mathbf{y} &\leq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq 0 \end{aligned}$$

donde:

- $\mathbf{x}$ y $\mathbf{c}$ son vectores columna n-dimensional
- $\mathbf{y}$ y $\mathbf{b}$ son vectores columna m-dimensional
- $\mathbf{A}$ es una matriz de $m \times n$

¡Forma simétrica!

Problema primal y dual: Simétrico y asimétrico II

Problemas de programación lineal de maximizar y minimizar pueden ser representados como:

$$\begin{aligned} \text{mín } \mathbf{z} &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{sujeto a: } \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max \mathbf{w} &= \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{sujeto a: } \mathbf{A}^T\mathbf{y} &\leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

donde:

- $\mathbf{x}$ y $\mathbf{c}$ son vectores columna n-dimensional
- $\mathbf{y}$ y $\mathbf{b}$ son vectores columna m-dimensional
- $\mathbf{A}$ es una matriz de $m \times n$

¡Forma asimétrica!

CIMAT

Problema primal y dual: Definiciones I

Primal y dual

Para cada problema de programación lineal, existe otro problema de programación lineal cercanamente asociado, formando ambos un par. Si el primer programa es llamado **primal**, entonces el segundo es llamado **dual**.

Problema primal y dual: Definiciones II

- **Variables duales**: Los componentes del vector columna $\mathbf{y}$ son llamados **variables duales**.
- **Solución dual factible**: Es una solución que satisface las restricciones $\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$
- **Región dual factible**: La región que contiene el conjunto de soluciones duales factibles

Correspondencia

La correspondencia entre los problemas primales y duales se puede resumir como:

Problema primal		Problema dual	
Función objetivo	minimizar	Función Objetivo	maximizar
Variables	≥ 0	Restricciones	$\leq$
	≤ 0		$\geq$
	libres		$=$
Restricciones	$\geq$	Variables	≥ 0
	$\leq$		≤ 0
	$=$		libres

Ejemplo VIII

Obtener el dual del siguiente problema de PL:

$$\begin{aligned} \text{mín } & z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a: } & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 7 \\ & 8x_1 + 9x_2 + 10x_3 \geq 11 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo VIII

Obtener el dual del siguiente problema de PL:

$$\begin{aligned} \text{mín } z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a: } & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 7 \\ & 8x_1 + 9x_2 + 10x_3 \geq 11 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{max } w &= 7y_1 + 11y_2 \\ \text{sujeto a: } & 4y_1 + 8y_2 \leq 1 \\ & 5y_1 + 9y_2 \leq 2 \\ & 6y_1 + 10y_2 \leq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo IX

Obtener el dual del siguiente problema de PL:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeto a: } x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo IX

Obtener el dual del siguiente problema de PL:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeto a: } x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ w &= 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\ \text{sujeto a: } y_1 + 0y_2 + 3y_3 &\geq 3 \\ 0y_1 + 2y_2 + 2y_3 &\geq 5 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

El teorema de dualidad I

Simetría

El dual de un problema dual es el problema primal

Dualidad débil

Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son soluciones factibles a los problemas primal y dual, respectivamente; entonces, $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$

- Si cualquiera de los problemas primal y dual es no acotado, entonces el otro no tiene solución factible
- Si $\mathbf{x}^*$ y $\mathbf{y}^*$ son soluciones factibles a los problemas primal y dual, respectivamente, y $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}^*$; entonces son las soluciones óptimas al par de problemas

El teorema de dualidad II

Dualidad fuerte

Si existe una solución óptima a cualquiera de los problemas: primal o dual; entonces, existe una solución óptima al otro y el valor óptimo asociado es el mismo

Relación primal–dual

Si un programa lineal tiene una solución óptima básica factible, correspondiente a las variables en $\mathbf{B}$; entonces su dual correspondiente tiene la solución que satisface $\lambda^* = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{-\mathbf{1}}$

El método *Simplex dual* I

En algunas ocaciones será más fácil resolver el problema dual que el problema primal.

Para estas ocasiones se ha realizado una adaptación del método Simplex para resolver los problemas duales de forma más eficiente.

Este método se llama *Simplex dual*. Una de las ventajas que tiene es que evita introducir variables artificiales al problema y por lo tanto no aparecen las M´s.

CIMAT

El método *Simplex dual* II

Para resolver el dual, podemos...

$$\min \mathbf{z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\text{sujeto a: } \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\max \mathbf{w} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$$
$$\text{sujeto a: } \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$$
$$\mathbf{y} \geq 0$$

$$\max \mathbf{b}^T\mathbf{y}$$
$$\text{sujeto a: } \begin{bmatrix}\mathbf{A}^\mathbf{T} & \mathbf{I}\end{bmatrix}[\mathbf{y} \;\; \mathbf{s}] = \mathbf{c}$$
$$[\mathbf{y} \;\; \mathbf{s}] \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b}^T & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix}\mathbf{A}^\mathbf{T} & \mathbf{I}\end{bmatrix} & \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

CIMAT

El método *Simplex dual* III

O trabajar directamente con el método *Simplex dual*

1. Prueba de optimalidad: Si todos los lados derechos son no negativos es la solución óptima, en caso contrario hacer cambio de base.
2. Variable que sale: Escoger el valor más negativo del lado derecho como la fila pivote. negativo en la j-ésima columna.

El método *Simplex dual* IV

3. Variable que entra: Calcular la razón de cada variable no básica con coeficiente negativo en la columna pivote y escoger como columna pivote la que genere el menor valor (prueba del cociente mínimo):

$$r = \left| \frac{a_{0j}}{a_{ij}} \right|$$

donde i es el índice de la fila pivote, a_{0j} es el valor en la j-ésima columna de la fila 0 y a_{ij} es un valor.

4. Usar operaciones básicas para eliminar la variable del resto de las filas. Ir al paso 1.

Ejemplo X: Problema

Encontrar la solución óptima al siguiente problema de PL con el método *Simplex dual* :

$$\begin{aligned} \text{mín } & z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeto a: } & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 7 \\ & 8x_1 + 9x_2 + 10x_3 \geq 11 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo X: Problema

Primero hacemos ajustes :

$$
\begin{aligned}
\text{mín } z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{sujeto a: } & -4x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq -7 \\
& -8x_1 - 9x_2 - 10x_3 \leq -11 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo X: Problema

Después encontramos la forma aumentada :

$$
\begin{aligned}
\text{mín } & z - x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\
\text{sujeto a: } & -4x_1 - 5x_2 - 6x_3 + s_1 = -7 \\
& -8x_1 - 9x_2 - 10x_3 + s_2 = -11 \\
& x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo X: Solución I

- Construyendo la tabla *Simplex*

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	1	-1	-2	-3	0	0	0
s_1	0	-4	-5	-5	1	0	-7
s_2	0	-8	-9	-10	0	1	-11

- Definiendo el pivote

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	1	-1	-2	-3	0	0	0
s_1	0	-4	-5	-5	1	0	-7
s_2	0	-8	-9	-10	0	1	-11

Ejemplo X: Solución II

- Convirtiendo el pivote en unitario y aplicando operaciones básicas

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	1	0	-0.875	-1.75	0	-0.125	1.375
s_1	0	0	-0.5	0	1	-0.5	-1.5
x_1	0	1	1.125	1.25	0	-0.125	1.375

- Definiendo pivote

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	1	0	-0.875	-1.75	0	-0.125	1.375
s_1	0	0	-0.5	0	1	-0.5	-1.5
x_1	0	1	1.125	1.25	0	-0.125	1.375

Ejemplo X: Solución III

- Convirtiendo el pivote en unitario y aplicando operaciones básicas

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	1	0	0.75	1.75	0.25	0	1.75
s_2	0	0	1	0	-2	1	3
x_1	0	1	1.25	1.25	-0.25	0	1.75

- Como ya no existen más valores negativos del lado derecho y la condición de óptimo es satisfecha, entonces terminar
- La solución es $x_1 = 1.75, x_2 = 0, x_3 = 0$ con el valor de la función objetivo de $z = 1.75$.

Ejemplo XI: Problema

Encontrar la solución óptima al siguiente problema de PL con el método *Simplex dual* :

$$\begin{aligned} \min \ & w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\ \text{sujeto a:} \ & y_1 + 0y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ & 0y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo XI: Problema

Modelo con ajuste:

$$
\begin{aligned}
\min \; w &= 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\
\text{sujeto a:} \; & -y_1 - 3y_3 \leq -3 \\
& -2y_2 - 2y_3 \leq -5 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo XI: Problema

Modelo aumentado:

$$\begin{aligned} \min\ & w - 4y_1 - 12y_2 - 18y_3 = 0 \\ \text{sujeto a:}\ & -y_1 - 3y_3 + y_4 = -3 \\ & -2y_2 - 2y_3 + y_5 = -5 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Interpretación económica de la dualidad

Las variables duales también son conocidas como precios sobra, son importantes cuando los lados derechos de nuestro modelo son tentativos, es decir, que pueden variar de un momento a otro.

Los precios sombra del recurso i miden el valor marginal de éste, es decir, la tasa a la que la función objetivo z puede aumentar si se incrementa (un poco) la cantidad que se proporciona del recurso b_i. La importancia de analizarlos es para examinar la posibilidad de reasignar recursos dentro de una organización.

El problema dual nos brinda una alternativa de analizar el problema desde un enfoque económico.

CIMAT

Ejemplo XII

El entrenador en jefe del equipo de fútbol americano “Borregos del Tec”, está interesado en preparar lo que ha bautizado como la “EV” (ensalada vitamínica), la cual puede prepararse a partir de cinco verduras básicas disponibles. Se desea que la EV contenga por lo menos 10 unidades de vitamina A y 25 unidades de vitamina C. La información relevante del contenido vitamínico y costo de las verduras se proporciona en la siguiente tabla:

	Verduras (unidades de vitamina por kg)				
Vitamina	1	2	3	4	5
A	2	0	3	4	1
C	1	2	2	1	3
Costo por kg	100	80	95	100	110

Ejemplo XII

¿A qué modelo de programación lineal se debe enfrentar el entrenador?

Por otro lado,suponga que el dueño de unos laboratorios farmacéuticos se entera de la EV y vislumbra la posibilidad de entablar un negocio con el entrenador al fabricarle pastillas de vitamina A y vitamina C. Por lo tanto, logra convencerlo que, si los jugadores tomas las pastillas, éstos obtendrán los requerimientos vitamínicos solicitados, seguro que su idea será aceptada. Sin embargo, ¿cómo debe proceder el fabricante de vitaminas?

Analice ambas persepctivas, del entrenador y de la farmacéutica.

Sensibilidad I

- En algunas aplicaciones, las variables o costos asociados a un problema de programación lineal pueden variar.
- Si ya se tiene un solución óptima, ¿qué tanto se puede cambiar los datos para que la solución siga siendo óptima?

¡Análisis de sensibilidad!

Sensibilidad II

Tipos de análisis:

- Cambio en los valores del lado derecho de las restricciones.
- Cambio en los coeficientes de la función objetivo.
- Otros

Partir de una solución existente para encontrar una nueva solución a los cambios.

Cambios del lado derecho

Los cambios pueden ocurrir de dos maneras:

- Independientes.
- Simultáneos.

Empezaremos con un solo cambio en el lado derecho.

Cambios del lado derecho

Al pensarlo con calma, si cambiamos el vector b por el vector $\bar{b}$ nos damos cuenta que en el método simplex tabular sólo habrán cambios en la columna de los lados derechos. El lado derecho en la tabla de la función objetivo se calcula como $z^* = y^* \bar{b}$ y los lados derechos de las demás ecuaciones se actualizan mediante la fórmula $b^* = S^* \bar{b}$, donde S^* es la tabla final que obtenemos después de optimizar con el método simplex, pero únicamente para las variables de holgura.

CIMAT

Cambios del lado derecho

Aquí se puede aprovechar que estamos realizando únicamente un cambio de algún b_i a la vez, por lo que $\Delta z^* = y^* \Delta b$ y de la misma manera $\Delta b^* = S^* \Delta b$.

Después de actualizar la función objetivo y la solución, deberemos asegurarnos que siga siendo factible. En el caso donde la solución actualizada no resulte factible, tenemos que aplicar el método simplex dual para encontrar el nuevo óptimo.

Ejemplo XIII

Suponga que en el ejemplo V ahora se tienen disponibles el doble de recursos para la segunda restricción. Es decir, que ahora $b_2 = 24$. Analice si la solución sigue siendo óptima, en caso de no serlo, reoptimice el problema y encuentre la nueva solución óptima.

Cambios del lado derecho

En este ejemplo anterior, nos dimos cuenta que el cambio de b_2 fue muy grande y nos provocó que se tuviera que cambiar la solución óptima. En ocasiones es importante analizar los intervalos de incremento y decremento en los lados derechos b_i para mantener la solución óptima actual.

Para esto debemos analizar el impacto que tiene el cambio Δb_i en el problema con la siguiente expresión: $b^* = b^* + S^* \Delta b$, donde debemos notar que estamos analizando un cambio a la vez, por lo que el vector Δb debe incluir únicamente ceros a excepción del parámetro que se modificó. Este parámetro lo dejamos expresado como Δb_i.

CIMAT

Cambios del lado derecho

Como el interés recae en que la solución actualizada siga siendo factible (por lo tanto, la óptima), se deben exigir que los lados derechos b^* sean no negativos, es decir, $b^* + S^*\Delta b \geq 0$, para cada componente del vector resultante.

Ejemplo XIV

Encuentre el intervalo permisible de cada lado derecho para seguir factible considerando el ejemplo V.

Cambios del lado derecho

Ahora vamos a analizar qué pasa cuando hay cambios simultáneos en los lados derechos.

En ocasiones es de interés verificar que la solución óptima de los precios sombra se mantenga como tal al hacerse algunas modificaciones en las b_i al mismo tiempo. Aquí podemos calcular $b^* = S^* \bar{b}$ y checar que todos los lados derechos sean no negativos, si esto se cumple garantizamos que la solución del dual (precios sombra) siga siendo la óptima, aquí es importante notar que el acomodo de las variables básicas y no básicas se mantiene igual pero con diferente nivel de actividad en cada variable básica.

CIMAT

Cambios del lado derecho

En el caso contrario, cuando algún b_i^* se hace negativo se debe reoptimizar el modelo. Aquí es importante mencionar que el enfoque de los intervalos permisibles no lo podemos aplicar directamente porque ahí solo se considera el cambio de algún b_i a la vez. Entonces, se utiliza la Regla de 100 %.

Después de calcular los porcentajes, si los precios sombra siguen siendo válidos hay que actualizar el valor de la función objetivo y la solución óptima. Si no son válidos los precios sombra, entonces reoptimice el modelo.

CIMAT

Cambios del lado derecho

Regla de 100 %: Cuando los cambios en los lados derechos son muy grandes los precios sombra ya no son válidos. Para verificar si los cambios son suficientemente pequeños, para cada cambio se calcula el porcentaje del cambio permitido (aumento o decremento) para que ese lado derecho siga dentro de su intervalo permisible. Si la suma de los porcentajes de cambios es menor o igual que 100 %, se concluye que los precios sombra aún serán válidos. En el caso que sea esta suma sea mayor que 100 % no hay certeza de que sigan siendo los valores óptimos.

Cambios del lado derecho

Las fórmulas para calcular esos porcentajes son:

$$\% IncrementoPermisible = \frac{\bar{b} - b}{IncrementoPermisible} * 100\,\% \tag{2}$$

$$\% DecrementoPermisible = \frac{b - \bar{b}}{DecrementoPermisible} * 100\,\% \tag{3}$$

Ejemplo XV:

Basados en el ejemplo V consideremos el cambio de los recursos disponibles a $\bar{b}$. Analice si a pesar de esos cambios los precios sombra siguen siendo válidos y actualice la solución en caso de serlo.

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Ejemplo XVI:

Vuelva a analizar el ejemplo V pero ahora teniendo:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Cambios de los coeficientes de alguna variable no básica

Después de haber analizado los cambios en los lados derechos vamos a enfocarnos en estudiar si se afectan las soluciones debido a cambios en los coeficientes de alguna variable no básica.

Estos cambios pueden ser tanto en el vector de coeficientes de la función objetivo o en los coeficientes de las restricciones, es decir, si suponemos que x_j sea no básica y hay uno o más cambios en $c_j, a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$. De esta forma tendremos $\bar{c}_j$ y $\bar{a_{ij}} = \bar{A}_j$.

CIMAT

Cambios de los coeficientes de alguna variable no básica

Hay que recordar que si la solución básica complementaria y^* en el problema dual todavía satisface la restricción dual que cambió, entonces la solución óptima original del problema primal lo seguirá siendo.

En el caso de que la solución cambie, debemos encontrar la nueva solución óptima. Esto lo hacemos con las siguientes fórmulas, para el coeficiente de x_j en la ecuación 0 de la tabla final del método simplex hacemos $z_j^* - \bar{c}_j = y^* \bar{A}_j - \bar{c}_j$ y el coeficiente de x_j en las demás ecuaciones se actualiza con $A_j^* = S^* \bar{A}_j$. Como la solución actual ya no será óptima, tendremos el valor de $z_j^* - \bar{c}_j$ negativo en la ecuación 0 y comenzamos el método simplex con x_j como la variable que entra a la base.

CIMAT

Ejemplo XVII:

Considerando que se dejó el cambio propuesto en el ejemplo XIII (cuando $\bar{b}_2 = 24$) se decide hacer más atractivo al producto 1 haciendo los siguientes cambios $c_1 = 4$ y $a_{31} = 2$. Verifique si la solución primal actual aún es óptima. Después considere $c_1 = 8$ y verifique.

Cambios de los coeficientes de alguna variable no básica

Después de analizar los cambios simultáneos para los parámetros de las variables no básicas, vamos a encontrar el *intervalo de valores permitidos* de c_j para que siga siendo la solución óptima.

Es fácil entender que esto se cumple cuando $z_j^* - \bar{c}_j \geq 0$, donde $z_j^* = y^* \bar{A}_j$, entonces el intervalo lo calculamos como $c_j \leq y^* \bar{A}_j$. El cálculo de este intervalo es para un cambio a la vez de algún c_j únicamente si la variable x_j es no básica. Los precios sombra se mantienen siempre y cuando se permanezca dentro del intervalo permisible.

CIMAT

Ejemplo XVIII:

Halle el intervalo de cambio permisible para c_1 tal que la solución complementaria obtenida en el ejemplo XIII siga siendo óptima.

Cambios simultáneos en los coeficientes de la función objetivo

Usaremos la Regla del 100 % pero con algunas consideraciones importantes. Es decir, si se hacen cambios simultáneos en los coeficientes de la función objetivo, en cada cambio se calcula el porcentaje de cambio permisible (aumento o decremento) para que ese coeficiente siga dentro de su intervalo permisible para continuar óptimo. Si la suma de los porcentajes de cambios no excede 100 %, entonces la solución óptima original seguirá siendo óptima. Si la suma excede 100 % no tendremos esa seguridad.

CIMAT

Ejemplo XIX:

Verifique si la solución óptima para el ejemplo XIII se mantiene como óptima si cambiamos $c_1 = 6$ y $c_2 = 4$.

Cambios introduciendo una nueva variable

Entonces se requieren introducir los coeficientes apropiados en la función objetivo y en las restricciones del modelo actual. Este caso se debe tratar como los conceptos que acabamos de explicar, es decir, debemos asumir que la variable x_j ya estaba en el modelo original con todos sus coeficientes iguales a cero y así mismo que x_j es una variable no básica de la solución actual.

Entonces vamos a incrementar esos coeficientes cero a otro valor y se analiza de la misma manera que el caso anterior. Lo único que se debe hacer para comprobar si la solución actual sigue siendo óptima es verificar si la solución básica complementaria y^* satisface la nueva restricción dual que corresponde a la nueva variable del problema primal.

Ejemplo XX:

Suponga que en el ejemplo V se introduce una nueva variable con coeficiente 4 en la función objetivo y en las restricciones con coeficientes 2, 3 y 1 respectivamente, además de no negatividad. Determine si la solución óptima actual lo sigue siendo a pesar del cambio.

Cambios en los coeficientes de las variables básicas

Supongamos que x_j es una variable básica en la solución óptima del problema. La diferencia entre este caso y el anterior es que ahora por ser variable básica su columna correspondiente de la tabla del método simplex debe tener la forma canónica (coeficiente de 1 en su respectivo renglón y los demás renglones un 0).

Por esto, después de actualizar sus valores usando las fórmulas $z_j^* - \bar{c}_j = y^* \bar{A}_j - \bar{c}_j$ y $A_j^* = S^* \bar{A}_j$, por lo general, deberán aplicarse operaciones por renglón para regresar a la forma canónica y por esto, perder optimalidad. En este caso, se deberá reoptimizar para llegar a la nueva solución óptima.

Ejemplo XXI:

Considere el ejemplo XIII y considere ahora los siguientes valores en el problema: $c_2 = 3$, $a_{22} = 3$ y $a_{32} = 4$. Verifique si la solución permanece como óptima.

Cambios en los coeficientes de las variables básicas

Para encontrar el rango permisible de cambio de las variables básicas basta con verificar que $z_j^* - \bar{c}_j \geq 0$ donde $\bar{c}_j = c_j + \Delta c_j$.

Es importante notar que como x_j es una variable básica, su coeficiente en la ecuación 0 debe ser cero. Es decir, $z_j^* - c_j = 0$, lo que nos conduce a que quede solamente $-\Delta c_j$ en esa posición. Mediante operaciones por renglón hay que quitar $-\Delta c_j$ de la ecuación 0 y analizar las desigualdades resultantes.

CIMAT

Ejemplo XXII:

Encuentre el rango permisible de cambio para c_2 considerando el ejemplo anterior.

Cambios introduciendo una nueva restricción

Por último vamos a analizar qué pasaría si se introduce una nueva restricción después de haber obtenido la solución. Esta nueva restricción puede deberse a que se omitió para facilitar el modelo (computacionalmente hablando), porque se agregaron algunas consideraciones al problema o simplemente porque se pasó por alto al momento de modelar.

Cambios introduciendo una nueva restricción

Aquí es muy sencillo, solo basta con verificar si la solución óptima actual satisface esa restricción, si esto se cumple, estamos seguros de que aún estamos en la mejor solución básica factible. En el caso de que la solución óptima actual viole la restricción, debemos introducir un renglón adicional a la tabla final del método simplex considerando a la nueva variable de holgura (la que corresponde a la restricción nueva) como parte de la base.

CIMAT

Cambios introduciendo una nueva restricción

Aquí hay que tener cuidado y verificar que las columnas de las demás variables básicas permanezcan con la forma canónica. En caso de que alguna variable básica pierda la forma, hay que actualizar mediante operaciones por renglón. Si después de la actualización todos los lados derechos son no negativos estaremos en el nuevo óptimo. En caso de que algún lado derecho sea negativo, debemos reoptimizar utilizando el método simplex dual.

Ejemplo XXIII:

Considere el ejemplo XIII y considere la nueva restricción $2x_1 + 3x_2 \leq 24$.

Cambios introduciendo una nueva restricción

Con éste análisis terminamos de estudiar todos los posibles cambios en los parámetros del modelo original, hay que tener en cuenta que dichos parámetros son sólo estimaciones de los valores reales o que esos valores pueden cambiar de un momento a otro, es por esto que el análisis de sensibilidad resulta importante y útil al momento de tomar decisiones basadas en algún modelo de programación lineal.

CIMAT

¿Preguntas?

CIMAT