

**Maestría en Computo Estadístico**  
**Álgebra Matricial**

**Tarea 1**

30 de agosto de 2020

*Enrique Santibáñez Cortés*

Repositorio de Git: [Tarea 1, IE](#).

1. Si  $A$  es una matriz  $m \times n$  dada por bloques de vectores columna como

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

y  $B$  es una matriz  $n \times p$  dada por bloques de vectores renglón como

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Demuestre que

$$AB = \sum_{i=1}^n a_i v_i.$$

2. Sean  $A$  y  $B$  matrices cuadradas del mismo orden. Demuestre que  $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$  si y solo si  $AB = BA$ .

**RESPUESTA**

$\Rightarrow$ ) Si  $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$  entonces:

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= (A - B)(A + B) \\ &= AA - BA + AB - BB \\ &= A^2 - BA + AB - B^2 \\ BA &= AB. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ ) Si  $AB = BA$  entonces:

$$(A - B)(A + B) = AA - BA + AB - BB = A^2 - B^2.$$

Por lo tanto, queda demostrado que  $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$  si y solo si  $AB = BA$ . ■.

3. Sean  $A$  y  $B$  matrices  $n \times n$ ,  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ , tales que  $AB = BA$ . Demuestre que  $A^p B^q = B^q A^p$  para cualesquiera  $p, q \in \mathbb{N}$ .

**RESPUESTA**

Multiplicado por  $A^{p-1}$  por la izquierda y  $B^{q-1}$  por la derecha tenemos que:

$$A^{p-1}(AB)B^{q-1} = A^{p-1}(BA)B^{q-1} \quad \blacksquare.$$

4. Se dice que una matriz cuadrada  $A$  es antisimétrica si  $A = -A^t$ . Demuestre que  $A - A^t$  es antisimétrica.

**RESPUESTA**

Sea  $B = A - A^t$ , entonces:

$$B^t = (A - A^t)^t = A^t - A.$$

y

$$-B^t = -(A^t - A) = A - A^t.$$

Como  $B = -B^t$ , podemos concluir que  $A - A^t$  es asimétrica. ■.

5. Demuestre que dada cualquier matriz cuadrada  $A$ , esta se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

**RESPUESTA**

Es sencillo

6. Se dice que una matriz cuadrada  $P$  es idempotente si  $P^2 = P$ . Si

$$A = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

y si  $P$  es idempotente, encuentre  $A^{500}$ .

**RESPUESTA**

Encontremos una formula para encontrar a  $A^n$ . Primero veamos que pasa cuando  $n = 2, 3$ :

$$A^2 = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + 0 & IP + P^2 \\ 0 + 0 & 0 + P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + 0 & IP + 2P^2 \\ 0 + 0 & 0 + P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 3P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

De lo anterior y considerando  $n \in \mathbb{N}$  podemos suponer que se cumple que :

$$A^n = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Demostremos lo anterior de forma inductiva:

**Paso 1.** Mostrar que se cumple para  $n = 2, 3$  o para algún  $n$ . Por construcción se cumple este paso.

**Paso 2.** Suponer que se cumple para  $n$ .

**Paso 3.** Demostrar que se cumple para  $n + 1$ . Considerando el paso 2, tenemos que:

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + 0 & IP + nP^2 \\ 0 + 0 & 0 + P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & (n+1)P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Queda demostrado que para  $n \in \mathbb{N}$  se cumple

$$A^n = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, utilizando la formula encontrada podemos concluir que

$$A^{500} = \begin{pmatrix} I & 500P \\ 0 & P \end{pmatrix} \quad \blacksquare.$$

7. Sean  $A$  y  $B$  matrices de tamaño  $m \times n$ . Demuestre que  $\text{tr}(AB^t) = \text{tr}(A^tB)$ .

**RESPUESTA**

Sea  $A_{m \times n}, B_{n \times m}$  matrices. Entonces se cumple que (*se demostraron en clase*):

- $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^t)$ .
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

Ocupando las dos propiedades de la traza anteriores tenemos que:

$$\text{tr}(AB^t) = \text{tr}((AB^t)^t) = \text{tr}(BA^t) = \text{tr}(A^tB). \quad \blacksquare$$

8. Encuentre matrices  $A, B$  y  $C$  tales que  $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$ .

**RESPUESTA**

Por convicción definamos a  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , y ahora sea  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ .

Entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{pmatrix}.$$

Observemos que la primera multiplicación representa a un cambio de renglones y la segunda a un cambio de columnas. Ahora multipliquemos de lado izquierdo lo anterior por la matriz  $C$  pero solo concentrarnos en los resultados de la diagonal.

$$ABC = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & \gamma_1 \\ \gamma_2 & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \end{pmatrix},$$

$$BAC = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} & \gamma_3 \\ \gamma_4 & b_{22}c_{12} + b_{21}c_{22} \end{pmatrix},$$

donde  $\gamma_i$  no son relevantes para este problema. Por lo que la traza de esos producto de matrices es:

$$\text{tr}(ABC) = b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \quad \text{y} \quad \text{tr}(BAC) = b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} + b_{22}c_{12} + b_{21}c_{22}.$$

De lo anterior podemos observar que si  $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$ ,

$$\begin{aligned} b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} &\neq b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} + b_{22}c_{12} + b_{21}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} - b_{12}c_{11} - b_{11}c_{21} - b_{22}c_{12} - b_{21}c_{22} &\neq 0 \\ c_{11}(b_{21} - b_{12}) + c_{21}(b_{22} - b_{11}) + c_{12}(b_{11} - b_{22}) + c_{22}(b_{12} - b_{21}) &\neq 0 \\ (b_{21} - b_{12})(c_{11} - c_{22}) + (b_{22} - b_{11})(c_{21} - c_{12}) &\neq 0. \end{aligned}$$

Entonces de lo anterior podemos encontrar un conjunto de elementos de las matrices  $B$  y  $C$ :

$$\begin{aligned} c_{11} &> c_{22} \quad , \quad b_{21} > b_{12} \\ c_{21} &> c_{12} \quad , \quad b_{22} > b_{11} \end{aligned}$$

tal que  $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$ , donde  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Entonces una tripleta de matrices que cumple que  $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$ , son:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B =$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Mostremos que la igualdad se cumple:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculemos la multiplicación con la matriz  $C$ :

$$ABC = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14+15 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$BAC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+6 & \gamma_3 \\ \gamma_4 & 10+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & \gamma_3 \\ \gamma_4 & 14 \end{pmatrix},$$

donde  $\gamma_i$  no son relevantes para este problema. Por lo que la traza de esos producto de matrices es:

$$\text{tr}(ABC) = 29 + 7 = 36 \quad \text{y} \quad \text{tr}(BAC) = 18 + 14 = 32.$$

Por lo que se cumple que  $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$  para las matrices propuestas. ■.

9. Sea  $L$  una matriz triangular inferior  $n \times n$ . Demuestre que  $L = L_1 L_2 \cdots L_n$  donde  $L_i$  es la matriz  $n \times n$  que se obtiene reemplazando la  $i$ -ésima columna de  $I_n$  por la  $i$ -ésima columna de  $L$ . Demuestre un resultado análogo para matrices triangulares superiores.

### RESPUESTA

Considerando que  $L_i$  se puede interpretar como la matriz elemental por un escalar.

10. Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz cuadrada de tamaño  $n$ , triangular superior tal que  $a_{ii} = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ . Demuestre que para  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, \min(n, i+p-1)$  se cumple que  $b_{ij} = 0$  donde  $A^p = (b_{ij})$  y  $p$  es un entero positivo.

### RESPUESTA

Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz cuadrada de tamaño  $n$ , triangular superior tal que  $a_{ii} = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces veamos que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0a_{12} + \sum_{j=2}^n a_{1j}0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$