Maestría en Computo Estadístico
Álgebra Matricial
Tarea 7
9 de noviembre de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: Tarea 7, AM.

Todos los cálculos deben ser a mano.

1. Dadas las matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Para cada una de ellas: i) Determine todos los valores propios. ii) Para cada valor propio λ encuentre el espacio propios que le corresponde. iii) Si es posible, encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ que consista de vectores propios de A. iv) Si tal base existe, determine una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que la matriz es igual a PDP^{-1}.

RESPUESTA
Recordemos las definiciones de valor propio, espacio propio.

Definición: 1 *(Visto en clase, pag. 124) Sea A una matriz $n \times n$. La ecuación característica de A es*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Decimos que λ es un valor propio de A si y solo si λ satisface la ecuación característica.

Definición: 2 *(Visto en clase, pag. 124) Sea A una matriz $n \times n$. $p(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ es un polinomio de grado n, llamado el polinomio característico de A.*

Definición: 3 *(Visto en clase, pag. 122) El espacio propio de A correspondiente a λ es*

$$E_\lambda := \mathcal{N}(A - \lambda I).$$

Teorema: 1 *(Visto en clase, pag. 122) Sea A una matriz $n \times n$. Entonces A es diagonalizable si y solo si A tiene n vectores propios linealmente independientes. De hecho, $A = PDP^{-1}$ si y solo si las columnas de P son los n vectores propios de A linealmente independientes y las entradas de la matriz diagonal D son los valores propios correspondientes a los vectores propios.*

Denotemos a la primera matriz del problema como A y a la segunda como B, empecemos a calcular lo que piden para A. Para determinar los valores propios calculemos el polinomio característico de

A:

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)[(4-\lambda)(2-\lambda) - 3(\lambda-2)] - [2(2-\lambda) - 3(\lambda-2) \\
&= (3-\lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3\lambda + 6] - [4 - 2\lambda - 3\lambda + 6] \\
&= (3-\lambda)[\lambda^2 - 9\lambda + 14] - [-5\lambda + 10] \\
&= 3\lambda^2 - 27\lambda + 42 - \lambda^3 + 9\lambda^2 - 14\lambda + 5\lambda - 10 \\
&= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 16) \\
&= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-8) \\
&= (2-\lambda)^2(8-\lambda)
\end{aligned}
$$

Esto implica **que i) todos los valores propios de A sean**

$$
\begin{gathered}
p(\lambda) = 0, \Leftrightarrow \\
(2-\lambda)^2(8-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad y \quad \lambda_2 = 8.
\end{gathered}
$$

Ahora calculemos los espacios propios, para $\lambda_1 = 2$ por definición de espacio propio (3) tenemos que

$$
E_{\lambda_1} = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 3-2 & 2 & 3 \\ 1 & 4-2 & 3 \\ 1 & 2 & 5-2 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right).
$$

Para encontrar el espacio nulo anterior, ocupamos eliminación Guassiana para determinar el conjunto del sistema

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

lo anterior implica que la solución del sistema es $x_1 = -2x_2 - 3x_3$, y x_2, x_3 son libres, es decir, el conjunto solución es

$$
\left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.
$$

Por lo tanto, ii) **el espacio propio asociado a $\lambda_1 = 2$ es**

$$
E_{\lambda_1} = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.
$$

Realizando un procedimiento analago al anterior calculemos el espacio propio de $\lambda_2 = 8$, tenemos que

$$
E_{\lambda_2} = \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 3-8 & 2 & 3 \\ 1 & 4-8 & 3 \\ 1 & 2 & 5-8 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\right).
$$

Para encontrar el espacio nulo anterior, ocupamos eliminación Guassiana para determinar el conjunto del sistema

$$\begin{pmatrix}-5 & 2 & 3\\ 1 & -4 & 3\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \Rightarrow R_2 - R_1]{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -6 & 6\\ -5 & 2 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \Rightarrow -R_2/6]{R_3 \Rightarrow R_3 + 5R_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 12 & -12\end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \Rightarrow R_1 - 2R_2]{R_3 \Rightarrow R_3 - 12R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

lo anterior implica que la solución del sistema es $x_1 = x_3, x_2 = x_3$, y x_3 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por lo tanto, ii) **el espacio propio asociado a $\lambda_2 = 8$ es**

$$E_{\lambda_1} = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \left\{ x_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ahora determinaremos y encontraremos de ser posible una base para $\mathbb{R}^3$ considerando vectores propios de A. Recordando la definición de base:

> **Definición: 4** *(Visto en clase) Sea V un espacio vectorial, $W \subset V$ un espacio. Una base de W es un subconjunto de W linealmente independiente que genera a W.*

Para el valor propio $\lambda_1 = 2$ tenemos los vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}^t$ y $v_2 = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\end{pmatrix}^t$ haciendo a $x_2 = 1$ & $x_3 = 0$ y $x_2 = 0$ & $x_3 = 0$ en espacio asociado respectivamente, y para el valor propio $\lambda_2 = 8$ el vector propio asociado es $v_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t$ haciendo a $x_3 = 1$ en el espacio propio asociado en $\lambda_2 = 8$. Entonces, vemos que $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$, veamos si son linealmente independiente para comprobarlo veamos si la matriz construida por los vectores tiene inversa, utilizamos eliminación gauss-jordan para encontrar la inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \Rightarrow 2R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \Rightarrow R_1 - R_2]{R_3 \Rightarrow 3R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1 \Rightarrow 3R_1 + R_3]{R_2 \Rightarrow 2R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}-6 & 0 & 0 & 1 & -4 & 3\\ 0 & 6 & 0 & -1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 3\end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \Rightarrow R_3/6]{R_2 \Rightarrow R_2/6} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{3}{6}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{3}{6}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6}\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & 4 & -3\\ -1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, como los vectores propios son linealmente independiente y son subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y es sencillo mostrar que generan a $\mathbb{R}^3$ (la definición del espacio columna de una matriz de tamaño

$m \times n$ siempre genera al $\mathbb{R}^n$, teorema de la tarea anterior), **iii) entonces podemos concluir que los vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$ de A son una base para** $\mathbb{R}^3$.

Ahora, considerando el teorema (1), observemos que en el inciso anterior ya encontramos 3 vectores linealmente independiente, por lo que podemos decir que la matriz A es diagonalizable. Y por lo tanto, **la matriz A la escribir como una matriz invertible P (es la matriz formada por los vectores propios como columnas)y una matriz diagonal D (son los vectores propios correspondientes a los vectores propios), es decir, con los resultados de los incisos anteriores ya tenemos todo los necesario para definir a A como**

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Realizamos un procedimiento análogo de lo que hicimos con la matriz A para determinar los resultados de la matriz B. Determinemos los valores propios de B, para ello calculemos el polinomio característico de B:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 & -8 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (6-\lambda)(-2-\lambda)(-3-\lambda) - (-2-\lambda)(-8) \\ &= (6-\lambda)[\lambda^2 + 5\lambda + 6] - 16 - 8\lambda \\ &= 6\lambda^2 + 30\lambda + 36 - \lambda^3 - 5\lambda^2 - 6\lambda - 16 - 8\lambda \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 16\lambda + 20 \\ &= (-2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 10) \\ &= (-2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-5) \end{aligned}$$

Esto implica **que i) todos los valores propios de B sean**

$$p(\lambda) = 0, \Leftrightarrow$$
$$(-2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-5) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad y \quad \lambda_2 = 5.$$

Ahora calculemos los espacios propios, para $\lambda_1 = 2$ por definición de espacio propio (3) tenemos que

$$E_{\lambda_1} = \mathcal{N}(B - \lambda_1 I) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 6+2 & 3 & -8 \\ 0 & -2+2 & 0 \\ 1 & 0 & -3+2 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 8 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

Para encontrar el espacio nulo anterior, ocupamos eliminación Guassiana para determinar el conjunto del sistema

$$\begin{pmatrix} 6+2 & 3 & -8 \\ 0 & -2+2 & 0 \\ 1 & 0 & -3+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 8R_1]{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2/3]{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

lo anterior implica que la solución del sistema es $x_1 = -x_3, x_2 = 0$, y x_3 son libres, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por lo tanto, ii) **el espacio propio asociado a $\lambda_1 = -2$ es**

$$E_{\lambda_1} = \mathcal{N}(B - \lambda_1 I) = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Realizando un procedimiento analago al anterior calculemos el espacio propio de $\lambda_2 = 5$, tenemos que

$$E_{\lambda_2} = \mathcal{N}(B - \lambda_2 I) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 6-5 & 3 & -8 \\ 0 & -2-5 & 0 \\ 1 & 0 & -3-5 \end{pmatrix} \right) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 0 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & -8 \end{pmatrix} \right).$$

Para encontrar el espacio nulo anterior, ocupamos eliminación Guassiana para determinar el conjunto del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 0 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & -8 \end{pmatrix} \underset{R_2 \Rightarrow -R_2/7}{\overset{R_3 \Rightarrow R_3 - R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_3 \Rightarrow R_3 + 3R_2}{\overset{R_1 \Rightarrow R_1 - 3R_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo anterior implica que la solución del sistema es $x_1 = 8x_3, x_2 = 0$, y x_3 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por lo tanto, ii) **el espacio propio asociado a $\lambda_2 = 5$ es**

$$E_{\lambda_1} = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ahora determinaremos y encontraremos de ser posible una base para $\mathbb{R}^3$ considerando vectores propios de A. Ya que los vectores propios de B son $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$, y cualquier otro vector propio de B es combinación lineal de estos dos vectores podemos decir que no es posible generar una base para $\mathbb{R}^3$, la justificación es que cualquier base de $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3 y como cualquier conjunto de vectores propios de B son linealmente independiente a los vectores v_1 y v_2 entonces esto indica que la dimensión de cualquier conjunto de vectores propios es a lo más 2, por lo**que podemos concluir iii) no es posible construir una base a partir de los vectores propios de B.** Entonces como no existe la base, **no es posible hacer el inciso iv). (ya que eso dice el problema.** $\blacksquare$.

2. Dadas las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine si cada una de ellas es diagonalizable y si lo es, encuentre una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que la matriz es igual a PDP^{-1}.

RESPUESTA
Denotemos las matrices para una mejor redacción del problema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veamos si la matriz A es diagonalizable para ello ocupemos el teorema (1), entonces primero calculemos el polinomio característico de A

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 1 & 7 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(-\lambda)(4-\lambda) - 21] = (1-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda - 21] =$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda - 21 - \lambda^3 + 4\lambda^2 + 21\lambda$$
$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 17\lambda - 21 = (-\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda - 21) = (-\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda-7).$$

Esto implica que los valores propios de A sean

$$p(\lambda) = 0, \Leftrightarrow$$
$$(-\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda-7) = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3 \ \ y \ \ \lambda_3 = 7.$$

Ahora calculemos los vectores propios para cada uno de los valores propios. Para $\lambda_1 = 1$, tenemos

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to -1R_2]{R_1 \to R_1 + 7R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, de la eliminación Guass-jordan tenemos que la solución del sistema es $x_1 = -24x_3,\ x_2 = 3x_3$ y x_3 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} -24 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_1 = 1$ es $\begin{pmatrix} -24 & 3 & 1 \end{pmatrix}^t$. Realizando un razonamiento análogo, calculemos el vector propio para $\lambda_2 = -3$, tenemos

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1+3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R3 - R_1]{R_1 \leftrightarrow R_1/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 7R_2]{R_2 \to R_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, de la eliminación Guass-jordan tenemos que la solución del sistema es $x_1 = 0,\ x_2 = -x_3$ y x_3 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_2 = -3$ es $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t$. Realizando un razonamiento análogo, calculemos el vector propio para $\lambda_3 = 7$, tenemos

$$A - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} 1-7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 7 & 4-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R3 - R_1]{R_1 \leftrightarrow -R_1/6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to -R_2/7]{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, de la eliminación Guass-jordan tenemos que la solución del sistema es $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{7}x_3$ y x_3 es libre, es decir, el conjunto solución es

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{7} \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \ \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo anterior implica que un vector propio de $\lambda_3 = 7$ es $\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{7} & 1 \end{pmatrix}^t$. Ahora comprobemos si los vectores propios son linealmente independiente. Para ello calculemos la matriz inversa inversa de la matriz formada por los vectores propios encontrados, ocupando eliminación Gauss-Jordan podemos calcularla si es que existe (solo con decir que exista era suficiente para decir que son linealmente independiente, pero encuentro la matriz inversa ya que esta representará a P^{-1} si es que existe)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -24 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & \frac{3}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_1 \to -R_1/24}{\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{3}{7} & \frac{1}{8} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 \to -1R_2}{\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{-1}{8} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{24} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{-1}{8} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{1}{6} & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 3R_3/7} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{40} & \frac{-7}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{60} & \frac{7}{10} & \frac{7}{10} \end{array}\right).$$

Por lo tanto, como la matriz de los vectores propios existe podemos decir por el teorema 1 que **la matriz A es diagonalizable ya que tiene 3 vectores propios propios linealmente independientes**. Ahora, por el teorema 1 (aquí se describe los elementos de las matrices P y D, y a P^{-1} ya la calculamos arriba) **podemos concluir que a A se puede escribir como**

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & \frac{3}{7} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{24} & 0 & 0 \\ \frac{-3}{40} & \frac{-7}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{7}{60} & \frac{7}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

Ahora consideremos un razonamiento análogo que se realizo con la matriz A para la matriz B. Primero veamos si B es diagonalizable, para ello calculemos el polinomio característico de A

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)[(-2-\lambda)(1-\lambda) + 2] + [2(1-\lambda) - 2] + [-2 - (-2-\lambda)] \\ &= (1-\lambda)[\lambda^2 + \lambda] + [-2\lambda] + \lambda \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda^2 + \lambda - 2\lambda + \lambda \\ &= -\lambda^3. \end{aligned}$$

Esto implica que los valores propios de B sean

$$\begin{aligned} p(\lambda) = 0, &\quad \Leftrightarrow \\ -\lambda^3 = 0 &\quad \Rightarrow \lambda = 0. \end{aligned}$$

Ahora calculamos los vectores propios para el valor propio de B, es decir, para $\lambda = 0$ tenemos que

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3 \to R3 - R_1}{\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2 - 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

lo anterior implica que la solución del sistema homogéneo formado por los vectores propios es $x_1 = x_2 - x_3$, y x_2, x_3 libres, es decir, si hacemos a $x_2 = 1$ &$x_3 = 0$ y $x_2 = 0$ & $x_3 = 1$ el conjunto solución es

$$\left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces podemos decir que los vectores linealmente independientes asociados al valor propio $\lambda = 0$ de B son $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$, y cualquier otro vector propio tiene que ser combinación lineal de estos dos vectores (por como esta definido el conjunto solución). Por lo tanto, ocupando el teorema (1) **podemos concluir que B no es diagonalizable, ya que no tiene 3 vectores propios linealmente independientes.** ■.

3. Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

encuentre una expresión para A^n, donde n es un entero positivo.

RESPUESTA

Un enfoque que podemos utilizar es con el siguiente resultado demostrado en clase.

> **Teorema: 2** *(Visto en clase, pag. 137) Si A es diagonalizable y $A = PDP^{-1}$, entonces*
>
> $$A^k = PD^kP^{-1}$$

Entonces, empecemos por probar que A es diagonalizable. El polinomio característico de A es

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 3 - 4\lambda + \lambda^2 - 8 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5. \end{aligned}$$

Esto implica que los valores propios de A sean:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda - 5 &= 0 (\lambda+1)(\lambda-5) = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda_1 = -1} \quad \& \quad \boldsymbol{\lambda_2 = 5}. \end{aligned}$$

Ahora determinemos los vectores propios, para ello observemos que el espacio generado para $\lambda = 5$ es

$$\mathcal{N}(A - 5I) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

para encontrar el espacio nulo anterior, ocupemos eliminación guassinana para determinar el conjunto solución del sistema homogéneo.

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R2 - 2R_1]{R_1 \leftrightarrow -R_1/4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

lo anterior implica que las soluciones del sistema son $x_1 = x_2$ y x_2 es libre, es decir, el espacio nulo es igual a

$$\mathcal{N}(A-5I) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Realizando un razonamiento análogo tenemos que el espacio generado de $\lambda = -1$ es

$$\mathcal{N}(A+I) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

para encontrar el espacio nulo anterior, ocupemos eliminación guassinana para determinar el conjunto solución del sistema homogéneo.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R2-2R_1]{R_1 \leftrightarrow -R_1/2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

lo anterior implica que las soluciones del sistema son $x_1 = -x_2$ y x_2 es libre, es decir, el espacio nulo es igual a

$$\mathcal{N}(A-5I) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Entonces tenemos dos vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$, determinemos si son linealmente independientes, para ello calculemos la inversa de la matriz construida con esos vectores, es decir, calculemos la inversa,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1(-1)-2(1)}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Entonces como la inversa de la matriz construida por los vectores propios existe, podemos concluir que los vectores v_1 y v_2 son linealmente independientes. Y por lo tanto, por el teorema (1) podemos decir que la matriz A es diagonalizable, es decir, $A = PDP^{-1}$ donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo que si ocupamos el teorema (2), tenemos una expresión para A^n, donde n es un entero positivo

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n & 2(-1)^n \\ 5^n & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 2\cdot 5^n + 2(-1)^{n+1} \\ 5^n + (-1)^{n+1} & 2\cdot 5^n + (-1)^{n+2} \end{pmatrix} \quad \blacksquare. \end{aligned}$$

4. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ y multiplicidades correspondientes $m_1, \cdots, m_r$. Suponga que B es una matriz en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, triangular superior y similar a la matriz A. Demuestre que las entradas diagonales de B son $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ y que cada λ_j aparece m_j veces, $1 \leq j \leq r$.

RESPUESTA

Recordemos la definición de matrices similares y dos teoremas que se ocupara en la demostración.

Teorema: 3 *(Visto en clase, pag. 126) Si A y B son similares entonces tienen el mismo polinomio característico y por tanto tienen los mismos valores propios.*

Teorema: 4 *(Demostrado en clase, pag. 123) Si A es triangular, sus valores propios son las entradas de su diagonal principal.*

RESPUESTA
Como B es similar a A por el teorema (3) podemos afirmar que B tiene el mismo polinomio característico y más específicamente los mismos valores propios con sus respectivas multiplicidades de A, es decir, los valores propios de B son $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_r$ y multiplicidades correspondientes $m_1, \cdots, m_r$. Entonces como B también es una matriz triangular (superior, no importa si es superior o inferior) por el teorema (4) podemos concluir que los las entradas de su diagonal principal son sus valores propios, pero como su valores propios son $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_r$ y multiplicidades correspondientes $m_1, \cdots, m_r$. Y por lo tanto, **queda demostrado que las entradas diagonales de B son $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_r$ y λ_i aparece m_i veces para $i \leq i \leq r$.** $\blacksquare$.

5. Suponga que $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene dos valores propios distintos λ_1 y λ_2 y que $\dim(E_{\lambda_1}) = n-1$. Demuestre que A es diagonalizable.

RESPUESTA
Recordemos la definición de multiciplidad algebraica y geométrica, y también un teorema para demostrar diagonialización.

Definición: 5 *(Visto en clase, pag. 130) Sea A una matriz $n \times n$ y λ_0 un valor propio de A. La multiplicidad algebraica de λ_0 es el número m de veces que aparece como raíz del polinomio característico, $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m q(\lambda)$. La multiplicidad geométrica de λ_0 es $\dim(E_{\lambda_0}) = \dim \mathcal{N}(A - \lambda_0 I)$.*

La multiplicidad geométrica de un valor propio es menor o igual que su multiplicidad algebraica.

Teorema: 5 *(Visto en clase, pag. 131) Sea A una matriz $n \times n$. A es diagonalizable si y solo si la multiplicidad geométrica de cada valor propio es igual a su multiplicidad algebraica; es decir si la suma de las dimensiones de los espacios propios es igual a n.*

Con lo anterior, denotamos a g_1, g_2 las multiplicidades geométricas de λ_1, λ_2 respectivamente y a a_1, a_2 las multiplicidades algebraicas de λ_1, λ_2 respectivamente. Ocupando la (5) tenemos que

$$a_1 \geq g_1 = n-1, \quad y \quad a_2 \geq g_2 \geq 1.$$

Pero como sabemos que $a_1 + a_2 = n$ (por definición de polinomio característico (2)), entonces esto implica que

$$a_1 = g_1 = n-1, \quad y \quad a_2 = g_2 = 1.$$

Y ocupando el teorema (5), como la multiplicidad de cada valor propio es igual a su multiplicidad algebraica podemos concluir que A es diagonalizable. $\blacksquare$.

6. Sea A una matriz que es diagonalizable e invertible. Demuestre que A^{-1} también es diagonalizable.

RESPUESTA
Como A es diagonalizable entonces la podemos escribir como

$$A = PDP^{-1}$$

donde las columnas de P son los n vectores propios de A linealmente independientes y las entradas de la matriz diagonal D son los valores propios correspondientes a los vectores propios (por el teorema (1)). Tenemos que A y P son invetibles, y como D es una matriz diagonal entonces podemos concluir que D también es invertible. Ahora, ocupando las propiedades de las matrices tenemos que

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que A^{-1} también es diagonalizable con P igual a la P matriz que en la diagonalización de A y como $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \Rightarrow D^{-1} = diag(\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1})$. $\blacksquare$.

7. Sea $A \in M_{r\times r}(\mathbb{R})$ la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{r-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}$$

donde $a_0, a_1, \cdots, a_{r-1}$ son escalares arbitrarios. Demuestre que el polinomio característico de A es

$$(-1)^r(a_0 + a_1t + \cdots + a_{r-1}t^{r-1} + t^r)$$

Sugerencia: use inducción matemática, expandiendo el determinante con el primer renglón.

RESPUESTA
Ocupando la definición (2), tenemos que el polinomio característico de A es

$$\det(tI - A) = \det \begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t & a_{r-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t + a_{r-1} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Entonces, demostremos por inducción que sea una matriz de tañaño $n \times n$ (con $n > 1$) de la forma

$$\begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

entonces su determinante es

$$\det\begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t & a_{r-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t+a_{n-1} \end{pmatrix} = (-1)^n(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n).$$

Paso 1. Demostremos que se cumple para algún n. Sea $n = 2$, entonces sea la matriz de la forma 2

$$\begin{pmatrix} t & a_0 \\ -1 & t+a_1 \end{pmatrix}, \Rightarrow \det\begin{pmatrix} t & a_0 \\ -1 & t+a_1 \end{pmatrix} = t(t+a_1) - (-1)a_0 = t^2 + ta_1 + a_0 = (-1)^2(a_0 + a_1 t + t^2),$$

es decir, se cumple para $n = 2$.

Paso 2. Suponemos que se cumple para n. Es decir, se cumple que

$$\det\begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t & a_{r-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t+a_{n-1} \end{pmatrix} = (-1)^n(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n).$$

Paso 3. Demostremos que se cumple para $n + 1$. Sea la matriz de la forma 2

$$\begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{r-2} \\ 0 & 0 & \cdots & t & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t+a_n \end{pmatrix},$$

Entonces, calculemos el determinante de la matriz anterior el cual ocupamos el primer renglón para obtenerlo

$$\det\begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{r-2} \\ 0 & 0 & \cdots & t & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t+a_n \end{pmatrix} = t\det\begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ -1 & t & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t+a_n \end{pmatrix} + (-1)^{n+1}a_0\det\begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & t & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix},$$

observemos que la primera matriz de lado derecho de la igual es de la forma (2) de tamaño $n \times n$ por lo que podemos ocupar el paso 2 para encontrar el determinante, es decir, su determinante sería $(-1)^n(a_1 + a_2 t + \cdots + a_n t^{n-1} + t^n)$, y además observemos que la segunda matriz es una matriz diagonal con elementos iguales a -1 (por como se construyo la matriz por lo que el determinante de esa matriz sería igual a $(-1)^n$, entonces ocupando lo anterior tenemos

$$\det\begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{r-2} \\ 0 & 0 & \cdots & t & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t+a_n \end{pmatrix} = t((-1)^n[a_1 + a_2 t + \cdots + a_n t^{n-1} + t^n]) + (-1)^{n+1}(-1)^n a_0$$

$$= (-1)^{n+1}[a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + t^{n+1}] + (-1)^{n+1} a_0$$
$$= (-1)^{n+1}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + t^{n+1}).$$

Queda demostrado para $n+1$. Por lo tanto, queda demostrado que si una matriz de tamaño $n \times n$ es de la forma 2 entonces su determinante es $(-1)^n(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n)$.

Ocupando el resultado anterior, podemos concluir que el polinomio característico de la matriz del problema es

$$\det(tI - A) = \det\begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t & a_{r-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t+a_{r-1} \end{pmatrix} (-1)^r(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{r-1}t^{r-1} + t^r) \quad \blacksquare.$$

8. Demuestre que una matriz nilpotente tiene como único valor propio a 0.

RESPUESTA
Recordando la definición de valor propio y la de matriz nilpotente.

Definición: 6 *(Vista en clase, pag. 121) Sea A una matriz $n \times n$ un vector $x \in \mathbb{R}^n$, $\quad x \neq 0$ es un vector propio de A si $Ax = \lambda x$ para algún escalar λ, que en tal caso es llamada un valor propio.*

Definición: 7 *(Vista en clase, pag. 164) Sea A una matriz cuadrada. Si existe un entero positivo k tal que $A^k = 0$, se dice que A es nilpotente.*

Para demostrar que el único valor propio de A (una matriz nilpotente) es 0, primero demostremos por inducción que si λ es un valor propio de A entonces

$$A^n x = \lambda^n x., \qquad x \neq 0. \tag{3}$$

Como λ es valor propio de A por definición 6 se tiene que

$$Ax = \lambda x, \qquad x \neq 0$$

Paso 1. Mostrar que se cumple 3 para algún n. Mostraremos que se cumple para $n = 2$,

$$A^2 x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x.$$

Paso 2. Suponemos que se 3 cumple para n. Es decir, suponemos que se cumple

$$A^n x = \lambda^n x.$$

Paso 3. Demostremos que se cumple para $n + 1$. Como se cumple para n podemos multiplicar de ambos lados de la igualdad por A, es decir,

$$A^{n+1} x = A(A^n x) = A(\lambda^n x) = \lambda^n Ax = \lambda^n(\lambda x) = \lambda^{n+1} x.$$

Por lo tanto, queda demostrado que para cualquier n se cumple 3. Ahora, ocupando la definición de una matriz nilpotente 7. Sea A una matriz nilpotente, esto quiere decir que existe un entero positivo k que $A^k = 0$. Entonces sea k el entero positivo que satisface $A^k = 0$ y ocupando 3 tenemos que

$$A^k x = \lambda^k x = 0, \Rightarrow \lambda = 0,$$

donde λ es el valor propio de A. Por lo que queda demostrado que las matrices nilpotente tienen como único valor propio a 0. $\blacksquare$.