Algebra Matricial

Tarea #8

Enrique Santibáñez Cortés

1. Sea V un espacio con producto interno. Demuestre la ley del paralelograma:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

para todo $x, y \in V$.

Respuesta:

Por la definición de producto interno sabemos que se tiene que cumplir

i) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

iii) Entre otras propiedades ...

Ocupando lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \\ &= (\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle) + (\langle y + x\rangle + \langle y, y\rangle) \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2,\end{aligned}$$

&

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x-y\rangle + \langle -y, x-y\rangle \\ &= (\langle x, x\rangle + \langle x, -y\rangle) + (\langle -y, x\rangle + \langle -y, -y\rangle) \\ &= \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \; // \quad \text{Q.D.E.}\end{aligned}$$

2. Sea A una matriz simétrica real $n \times n$. Demuestre que $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Respuesta:

→ En $\mathbb{R}^n$, un producto interno esta definido como

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x^t y. \quad \text{(Diapositiva 145).}$$

Recordemos algunas propiedades de la tranpuesta de una matriz.

→ Sea $A_{n\times m}$ & $B_{m\times p}$, entonces

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Mas aún si $A_{n\times n}$ es simetrica, entonces

$$A^t = A.$$

Ocupando la definición y las propiedades anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= (Ax)^t y = x^t A^t y \quad \text{Por ser } A \text{ una matriz simetrica.} \\ &= x^t (Ay) \\ &= \langle x, Ay \rangle \end{aligned}$$

Q.D.E.

3. Sea A una matriz cuyas columnas generan un subespacio $W \subset \mathbb{R}^n$ y sea $v \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $v \perp W$ si y solo si $v \in N(A^t)$.

Respuesta:

Sea V un espacio vectorial con producto interno, W un subespacio y $S \subset V$ tal que $\text{gen}(S) = W$. Entonces $x \in W^\perp \iff x \perp S$.

Continuación ejercicio 3...

Proposición 2 (Demostrado en clase)

Sea A una matriz $m \times n$. Entonces $N(A) = R(A)^{\perp}$ y $N(A^t) = C(A)^{\perp}$. (Diapositiva 147).

El problema nos dice que W es el espacio generado por las columnas de A, es decir, $W = C(A)$. Ahora ocupando la proposición 2 tenemos que el complemento ortogonal del espacio columna de una matriz A es el espacio nulo de A^t, es decir, $W^{\perp} = C(A)^{\perp} = N(A^t)$. Por lo tanto, ocupando la proposición 1 podemos concluir que sea $v \in \mathbb{R}^n$,

$$v \perp W = C(A) \quad \text{si y solo si} \quad v \in W^{\perp} = C(A)^{\perp} = N(A^t).$$

Q.D.E

4. Se dice que una matriz real es normal si $AA^t = A^tA$. Si A es normal, demuestre que $C(A) \perp N(A)$.

Respuesta:

Proposición 1 (Demostrada en clase, 87)

$N(A^tA) = N(A)$ & $N(AA^t) = N(A^t)$.

Todos los vectores que pertenecen a $C(A)$ son de la forma Ay (por definición de espacio columna) y todos los vectores que pertenecen a $N(A)$ tienen que cumplir que $Ax = 0$ (por def.). Como A es normal y por la proposición 1: $N(A) = N(A^tA) = N(AA^t) = N(A^t)$. Entonces si $x \in N(A) \Rightarrow Ax = 0$ & $A^tx = 0$. Sea $Ay \in C(A)$ y $x \in N(A)$ entonces

$\langle Ay, x \rangle = (Ay)^t x = y^t A^t x = y^t(A^t x) = y^t 0 = 0. \Rightarrow$ Por lo tanto, $C(A) \perp N(A)$