**Maestría en Computo Estadístico**
**Álgebra Matricial**
**Tarea 3**
26 de septiembre de 2020
*Enrique Santibáñez Cortés*
Repositorio de Git: Tarea 5, AM.

Todos los cálculos deben ser a mano.

1. Encuentre la descomposición $LDU$ de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

**RESPUESTA**
Recordemos la definición de la descomposición $LDU$.

**Definición: 1** *(Definición vista en clase) Sea $A$ no singular de tamaño $n \times n$. Entonces $A = LDU$ donde $L$ es $n \times n$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, $D$ es $n \times n$ es una matriz diagonal con elementos diagonales no cero y $U$ es $n \times n$ es una matriz triangular superior con unos en la diagonal.*

Por la definición 1, primero busquemos la matriz escalonada para ello ocupemos eliminicación gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} \underset{R3 \to R_3 - 2R_1}{\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces, de la matriz resultante podemos decir que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es decir, para encontrar $U$ veamos que si multiplicamos las matrices tenemos que:

$$\begin{aligned} 2 &= a, \\ 4 &= b, \\ 2 = 2c \Rightarrow 1 &= c. \end{aligned}$$

Recordemos que si $E_1, E_2, \cdots, E_n$ son las matrices elementales para llevar a la matriz $A$ a su forma escalonada, entonces $L = (E_n E_1 \cdots E_1^{-1}) = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_n^{-1}$. Para este problema las matrices elementales son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la descomposición LDU de la matriz original es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare.$$

Nota, para las inversas de las matrices elementales ocupamos el siguiente teorema:

**Teorema: 1** *Sea $E_{ij}(\alpha)$ es la matriz elemental que multiplica al renglón $j$ por $\alpha$ y lo suma al renglón $i$, entonces la matriz inversa de $E_{ij}(\alpha)$ es $E_{ij}(-\alpha)$.*

2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observe que $A$ es no singular y siempre tiene descomposición $PLU$. Pruebe que, sin embargo, A no tiene descomposición $LU$. (Sugerencia: no use eliminación, use un teorema.)

**RESPUESTA**

Ocupemos el siguiente teorema (demostrado en clase)

**Teorema: 2** *Sea $A$ una matriz no singular. $A$ tiene una factorización $LU$ si y solo si todas sus submatrices principales líderes son no singulares.*

Una submatriz principal líder se obtiene cuando es principal y $I_c = I_r = \{1, 2 \cdots, k\}, k < n$.

Entonces si observamos la matriz principal líder $A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, podemos observar que es singular debido a que el renglón 2 es múltiplo del renglón 1 (o por que su determinante es cero). Por lo tanto (ocupando el teorema 2), como una matriz singular principal líder es singular, esto implica que $A$ no tiene factorización $LU$. $\blacksquare$.

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 23 \end{pmatrix}$$

Encuentre la descomposición $LDL^t$ de $A$. ¿Es $A$ positiva definida? Explique. En tal caso encuentre su descomposición de Cholesky.

**RESPUESTA**

Recordemos el siguiente lema (demostrado en clase):

> **Lema: 1** *Sea $A$ una matriz simétrica de tamaño $n \times n$ tal que $A = LDU$ donde $L$ es triangular inferior con unos en la diagonal, $U$ es triangular superior con con unos en la diagonal, $D$ es diagonal con elementos diagonales no cero. Entonces $U = L^t$ y $A = LDL^t$.*

Primero reduzcamos la matriz $A$ a su forma escalonada ocupando eliminación gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 23 \end{pmatrix} \underset{R3 \to R_3 - 2R_1}{\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Lo anterior implica que la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices elementales que se ocuparon para llegar a la forma escalonada reducida son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veamos que la matriz $A$ es simétrica debido a que $A = A^t$, entonces ocupando el lema 1

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la descomposición $LDL^t$ de $A$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como todos los pivotes de $A$ son estrictamente positivos (ver última la matriz de 1) entonces podemos decir que $A$ es positiva definida.

Una matriz diagonal $D$ con entradas positivas en la diagonal, es factorizable como $D = \sqrt{D}\sqrt{D}$, donde $\sqrt{D}$ es una matriz cuya diagonal consiste en la raiz cuadrada de cada elemento de $D$, así la descomosición de Cholesky tiene una relación con la descomposición $LDL^t$:

$$A = LDL^t = L(\sqrt{D}\sqrt{D})L^t) = LDL^t = (L\sqrt{D})(\sqrt{D}L^t) = (L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^t = TT^t.$$

Entonces ocupando lo anterior,

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & 3\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la descomposición de Cholesky de $A$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & 3\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare.$$

4. Sea $A$ la matriz por bloques

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

con $B$ y $E$ no singulares. Demuestre que $A^{-1}$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & X \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix}$$

y encuentre $X$. Luego, si

$$A_1 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & E \end{pmatrix}$$

y encuentre $Y$.

**RESPUESTA**

Como ya demostramos que $A^{-1}$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & X \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix},$$

entonces se tiene que cumplir que:

$$AA^{-1} := \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & X \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

5. Sea $F$ un matriz fija de $3 \times 2$ y sea

$$H = \{A \in M_{2\times 4}(\mathbb{R}) | FA = 0\}.$$

Determine si $H$ es un subespacio de $M_{2\times 4}(\mathbb{R})$.

**RESPUESTA**
Recordemos la definición de subespacio.

**Definición: 2** *(Definición vista en clase) Sea $V$ un espacio vectorial sobre $K$. $W \subset V$, $W \neq 0$. $W$ es un subespacio de $V$ si*

a) *Si $w_1, w_2 \in W$ entonces $w_1 + w_2 \in W$.*

b) *Si $w \in W$, $\alpha \in K$ entonces $\alpha w \in W$.*

6. Demuestre que en $\mathbb{R}^2$ los únicos subespacioes posibles son $\{0\}$, las líneas que pasan por el origen y $\mathbb{R}^2$. Enuncie y demuestre un resultado análogo para $\mathbb{R}^3$.

7. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ dado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determine si

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

esta en gen($S$), y si

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

esta en gen($S$).

**RESPUESTA**
Para que el vector $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ este en gen($S$) se debe encontrar una combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ tal que sea el vector $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, sea $\alpha, \beta$ escalares

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Encontremos los escalares $\alpha, \beta$ que cumple (2).

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 2\beta \\ -\alpha - 3\beta \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sumando 2 y 3} \quad \beta = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 4 = -2 \\ -\alpha - 6 = -3 \Rightarrow \alpha = -3. \\ \alpha + 4 = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, como encontramos una combinación lineal de los vectores del conjunto $S$ podemos concluir que $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ si esta en gen$(S)$.

Realizamos un razonamiento análogo al anterior para ver si el vector $\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ esta en gen$(S)$, busquemos los vectores $\alpha$ y $\beta$ tal que

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Para ello,

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 2\beta \\ -\alpha - 3\beta \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sumando 2 y 3} \quad \beta = -9 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 18 = -8 \\ -\alpha + 27 = 5 \\ \alpha - 18 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = 22 \end{array} \alpha_1 = \alpha_2.$$

Como no pudimos encontrar $\alpha$ y $\beta$ tal que se cumpliera (3), es decir, no existe una combinación lineal de los vectores del conjunto $S$ que sea el vector $\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, podemos concluir que $\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ no esta en gen$(S)$. $\blacksquare$.

8. Sea $V$ un espacio vectorial y $W,\ Z$ subespacios de $V$. Al definir el espacio $W + Z$ no se hizo distinción en el orden. ¿Por qué no?, es decir, ¿es cierto que $W + Z = Z + W$? Argumente su respuesta. Enuncie y demuestre un resultado similar para cualquier número finito de subespacios.

   **RESPUESTA**
   Recordemos la definición de la suma de dos subespacios.

> **Definición: 3** *(Definición vista en clase) Sea $V$ un espacio vectorial, $W_1, W_2$ subespacios de $V$. La suma de $W_1$ y $W_2$ es:*
>
> $$W_1 + W_2 = \{v \in V | v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

   Como $W, Z$ son subespacios de $V$ y ocupando la definición 2, podemos decir $\forall w \in W \Rightarrow w \in V$ y $\forall z \in Z \Rightarrow z \in V$ debido a que una condición para ser subespacio es que sea un subconjunto. Ahora ocupando la definición 3, tenemos que la suma

9. Encuentre $A$ tal que $W = \mathcal{C}(A)$, donde

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} r - s \\ 2r + 3t \\ r + 3s - 3t \\ s + t \end{pmatrix} \middle| r, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

**RESPUESTA**
Recordemos la definición de espacio columna.

> **Definición: 4** *El* ***espacio columna*** *de una matriz $A$ de $m \times n$, que se denota como $\mathcal{C}(A)$, es el conjunto de todas las combinacioens lineales de las columnas de $A$. Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, entonces*
> $$\mathcal{C}(A) = gen(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

Entonces para encontrar $A$, en primer lugar, escribimos $W$ como un conjunto de combinaciones lineales.

$$W = \left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| r, s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

En segundo lugar, utilizamos los vectores en el conjunto generador como las columnas de $A$. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. De esta forma, $W = \mathcal{C}(A)$. $\blacksquare$.

10. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 0 \\ 10 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

. Encuentre un vector en $\mathcal{N}$ (A). Encuentre dos vectores distintos (que no sean múltiplos) en $\mathcal{C}(A)$. ¿Se pueden encontrar más vectores en $\mathcal{N}(A)$ y $\mathcal{C}(A)$, respectivamente, a los ya encontrados que no sean combinación lineal de los anteriores?