Álgebra Matricial
Tarea 7

Todos los cálculos deben ser a mano.

1. Dadas la matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Para cada una de ellas: i) Determine todos los valores propios. ii) Para cada valor propio λ encuentre el espacio propios que le corresponde. iii) Si es posible, encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ que consista de vectores propios de A. iv) Si tal base existe, determine una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que la matriz es igual a PDP^{-1}.

2. Dadas la matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine si cada una de ellas es diagonalizable y si lo es, encuentre una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que la matriz es igual a PDP^{-1}.

3. Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

encuentre una expresión para A^n, donde n es un entero positivo.

4. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ y multiplicidades correspondientes $m_1, m_2, \ldots, m_r$. Suponga que B es una matriz en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, triangular superior y similar a la matriz A. Demuestre que las entradas diagonales de B son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ y que cada λ_j aparece m_j veces, $1 \leq j \leq r$.

5. Suponga que $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene dos valores propios distintos λ_1 y λ_2 y que $\dim(E_{\lambda_1}) = n - 1$. Demuestre que A es diagonalizable.

6. Sea A una matriz que es diagonalizable e invertible. Demuestre que A^{-1} también es diagonalizable.

7. Sea $A \in M_{r\times r}(\mathbb{R})$ la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_{r-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}$$

donde a_0, a_1, …, a_{r-1} son escalares arbitrarios. Demuestre que el polinomio característico de A es

$$(-1)^r(a_0 + a_1 t + \ldots + a_{r-1} t^{r-1} + t^r).$$

Sugerencia: use inducción matemática, expandiendo el determinante con el primer renglón.

8. Demuestre que una matriz nilpotente tiene como único valor propio a 0.