Inferencia Estadística

Tarea 6

22/10/2020

Escriba de manera concisa y clara sus resultados, justificando los pasos necesarios. Serán descontados puntos de los ejercicios mal escritos y que contenga ecuaciones sin una estructura gramatical adecuada. Las conclusiones deben escribirse en el contexto del problema. Todos los programas y simulaciones tienen que realizarse en `R`.

1. En este ejercicio, asistido por una computadora, visualizará los conceptos de convergencia estudiados en clase.

   a) Lea el artículo:

   Pierre Lafaye de Micheaux & Benoit Liquet (2009). *Understanding Convergence Concepts: A Visual-Minded and Graphical Simulation-Based Approach*, The American Statistician, 63:2, 173-178, DOI: 10.1198/tas.2009.0032.

   El paper está en la carpeta donde está la tarea. No hay que entregar nada para este inciso.

   b) Implemente el método para visualizar la convergencia en probabilidad descrito en la sección 2.1 del artículo. La función deberá recibir al número de realizaciones M, el número máximo de elementos de la sucesión que se considera $n_{\text{máx}}$, M muestras de la sucesión trunca $X_1, X_2, \ldots, X_{n_{\text{máx}}}$ y el error ϵ; deberá reproducir la Figura 3 del paper, sin incluir a_n, y regresar al vector $(\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_{n_{\text{máx}}})$.

   c) Implemente el método para visualizar la convergencia casi segura descrito en la sección 2.1 del artículo. La función deberá recibir al número de realizaciones M, el número máximo de elementos de la sucesión que se considera $n_{\text{máx}}$, M muestras de la sucesión trunca $X_1, X_2, \ldots, X_{n_{\text{máx}}}$, el error ϵ y al parámetro $K \in (0,1)$ descrito en el ejemplo de la página 175; deberá reproducir la Figura 3 del paper y regresar al vector $(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{K \cdot n_{\text{máx}}})$.

   d) Escriba un pseudocódigo para visualizar la convergencia en L_2 usando lo descrito en la sección 2.3 del artículo, en particular a $e_{n,2}$. Implemente su pseudocódigo en una función de `R` que muestre gráficas. ¿Qué variables toma como argumento su función?

   e) Fije $n_{\text{máx}} = 10000$, $M = 1000$, $K = 0.5$. Sea $Z \sim$Unif$(0,1)$ y $X_n = 2^n 1_{[0,1/n)}(Z)$. ¿Hay evidencia de que $X_n \xrightarrow{L_2} 0$, $X_n \xrightarrow{P} 0$ y $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$? Utilice las funciones de los incisos anteriores para responder la pregunta y comente.

   f) Fije $n_{\text{máx}} = 10000$, $M = 1000$, $K = 0.5$. Sea $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(0,1)$ v.a.i. Defina $X_1 = X_2 = 1$ y

   $$X_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{(2n \log(\log n))^{1/2}} \quad n \geq 3.$$

   ¿Hay evidencia de que $X_n \xrightarrow{L_2} 0$, $X_n \xrightarrow{P} 0$ y $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$? Utilice las funciones de los incisos anteriores para responder la pregunta y comente.

2. Demuestre que la sucesión del inciso e) del Ejercicio 1 converge en probabilidad y casi seguramente, pero que no converge en L_2. Demuestre que la sucesión del inciso f) del Ejercicio 1 converge en L_2.

3. Supongamos que $X_0, X_1, \ldots$ es una sucesión de experimentos Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p. Supongamos también que X_i es la indicadora del éxito de su equipo en el i-ésimo juego de un rally de fútbol. Su equipo anota un punto cada vez que tiene un éxito seguido de otro. Denotemos por $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}X_i$ al número de puntos que su equipo anota al tiempo n.

   a) Encuentre la distribución asintótica de S_n.

   b) Simule una sucesión de $n = 1000$ variables aleatorias como arriba y calcule S_{1000} para $p = 0.4$. Repita este proceso 100 veces y grafíque la distribución empírica de S_{1000} que se obtiene de la simulación, y empálmela con la distribución asintótica teórica que obtuvo. Comente sus resultados.

4. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i. tales que $X_j \sim$Unif$[-j, j]$, $j = 1, 2, \ldots$ Muestre que la sucesión satisface la condición de Lindeberg.

5. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i. tales que $P(X_j = \pm j^a) = P(X_j = 0) = 1/3$, donde $a > 0$, $j = 1, 2, \ldots$. Muestre que se cumple la condición de Lyapunov.

6. Justifique que $X_n \xrightarrow{P} 1$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $X_n = 1 + nY_n$, con $Y_n \sim Bernoulli(1/n)$.

   b) $X_n = Y_n/\log n$, con $Y_n \sim Poisson(\sum_{i=1}^{n} 1/i)$.

   c) $X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$, con las Y_i's v.a.i.i.d. y $Y_i \sim N(0, 1)$.

   ¿En qué casos $X_n \xrightarrow{L_2} 1$?

Entrega: 03/11/2020.