Álgebra matricial
Tarea 5

Todos los cálculos deben ser a mano.

1. Encuentre la descomposición LDU de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observe que A es no singular y siempre tiene descomposición PLU. Pruebe que, sin embargo, A no tiene descomposición LU. (Sugerencia: no use eliminación, use un teorema.)

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 23 \end{pmatrix}.$$

Encuentre la descomposición LDL^t de A. ¿Es A positiva definida? Explique. En tal caso encuentre su descomposición de Cholesky.

4. Sea A la matriz por bloques

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

con B y E no singulares. Demuestre que A^{-1} es de la forma

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & X \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix}$$

y encuentre X. Luego, si

$$A_1 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & E \end{pmatrix}$$

con B y E no singulares, demuestre que A_1^{-1} es de la forma

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ Y & E^{-1} \end{pmatrix}$$

y encuentre Y.

5. Sea F una matriz fija de 3×2 y sea

$$H = \{A \in M_{2\times 4}(\mathbb{R}) \mid FA = 0\}.$$

Determine si H es un subespacio de $M_{2\times 4}(\mathbb{R})$.

6. Demuestre que en $\mathbb{R}^2$ los únicos subespacios posibles son $\{0\}$, las líneas que pasan por el origen y $\mathbb{R}^2$. Enuncie y demuestre un resultado análogo para $\mathbb{R}^3$.

7. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ dado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determine si

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

está en $\text{gen}(S)$, y si

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

está en $\text{gen}(S)$.

8. Sea V un espacio vectorial y W, Z subespacios de V. Al definir el espacio $W + Z$ no se hizo distinción en el orden. ¿Por qué no?, es decir, ¿es cierto que $W + Z = Z + W$? Argumente su respuesta. Enuncie y demuestre un resultado similar para cualquier número finito de subespacios.

9. Encuentre A tal que $W = \mathcal{C}(A)$, donde

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} r - s \\ 2r + 3t \\ r + 3s - 3t \\ s + t \end{pmatrix} \middle| r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

10. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 0 \\ 10 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Encuentre un vector en $\mathcal{N}(A)$. Encuentre dos vectores distintos (que no sean múltiplos) en $\mathcal{C}(A)$. ¿Se pueden encontrar más vectores en $\mathcal{N}(A)$ y $\mathcal{C}(A)$, respectivamente, a los ya encontrados que no sean combinación lineal de los anteriores?