Maestría en Computo Estadístico
Álgebra Matricial
Tarea 3
9 de septiembre de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: Tarea 3, AM.

Todos los cálculos deben ser a mano.

1. Dada la matriz
$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$
encuentre su forma escalonada reducida por renglones. Escriba todas las matrices elementales correspondientes a las operaciones que usó para llevar la matriz a la forma que obtuvo.

   RESPUESTA
   Realizando las operaciones elementales tenemos que
$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \overset{R1 \Longleftrightarrow R3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix} \underset{R3 \to R_3+4R_1}{\overset{R_2 \to R_2+R_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Dada el sistema $Ax = b$, donde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ a_1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$
encuentre condiciones generales sobre a_1 y a_2 para que el sistema sea consistente. Si se quiere que la solución sea exactamente $x = (3, -1, 2)^t$, ¿qué valores deben tener a_1 y a_2?

3. Encuentre la solución general, escribiéndola como combinación lineal de vectores, del sistema homogéneo $Ax = 0$ donde
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. encuentra la inversa de
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$
Demuestre que A es no singular y luego escriba A como producto de matrices elementales.

6. i) Encuentre dos matrices que sean invertibles pero que su suma no sea invertible. ii) Encuentre dos matrices singulares cuya suma sea invertible. Justifique todas sus aseveraciones.

7. Encuentre la descomposición LU de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. Encuentre la descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

y luego úsela para encontrar la solución del sistema $Ax = b$, donde

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

9. Encuentre la descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & 26 & 2 \end{pmatrix},$$

Usando esta misma descomposición como ayuda, encuentre A^{-1}.

10. Encuentre la descomposición LU de la matriz por bandas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

(Para una interesante aplicación de matrices por bandas a problemas de flujo de calor en física y la importancia de obtener su descomposición LU, ver problemas 31 y 32 de Linear Algebra, D. Lay, 4th ed., p. 131 y las explicaciones que ahí se dan.)