

**Maestría en Computo Estadístico**  
**Álgebra Matricial**  
**Tarea 3**

15 de septiembre de 2020  
*Enrique Santibáñez Cortés*  
 Repositorio de Git: [Tarea 3, AM.](#)

Todos los cálculos deben ser a mano.

1. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

encuentre su forma escalonada reducida por renglones. Escriba todas las matrices elementales correspondientes a las operaciones que usó para llevar la matriz a la forma que obtuvo.

**RESPUESTA**

Para encontrar la forma escalonada reducida por renglones ocuparemos eliminación de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3 \rightarrow R3 + 4R1]{R2 \rightarrow R2 + R1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 13 & -18 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2 \rightarrow R2/3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 13 & -18 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \rightarrow R3 - 13R2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -28/3 & -17/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \rightarrow -3R3/28} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 17/28 \end{pmatrix} \xrightarrow[R2 \rightarrow R2 + 2R3/3]{R1 \rightarrow R1 + R3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 23/28 \\ 0 & 1 & 0 & 15/14 \\ 0 & 0 & 1 & 17/28 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1 \rightarrow R1 - 2R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -37/28 \\ 0 & 1 & 0 & 15/14 \\ 0 & 0 & 1 & 17/28 \end{pmatrix}$$

Las matrices elementales que corresponden a las operaciones que se utilizaron para llevar la matriz a la forma escalonada reducida por renglones son:

$$E_{12}(-2)E_{23}(2/3)E_{13}(3)E_3(-3/28)E_{32}(-13)E_2(1/3)E_{31}(4)E_{21}(1)E_{13}A$$

o

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{28} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \blacksquare.$$

2. Dada el sistema  $Ax = b$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ a_1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

encuentre condiciones generales sobre  $a_1$  y  $a_2$  para que el sistema sea consistente. Si se quiere que la solución sea exactamente  $x = (3, -1, 2)^t$ , ¿qué valores deben tener  $a_1$  y  $a_2$ ?

### RESPUESTA

Recordemos que un sistema es inconsistente cuando no tiene ninguna solución. Para determinar si el sistema es inconsistente o consistente ocuparemos eliminación gaussiana para resolver el sistema. El cual consiste primero en reducir por renglones la matriz aumentada a la forma escalonada por renglones y después sustitución hacia atrás. Reducimos la matriz aumentada a su forma escalonada reducida:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ a_1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & a_2 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - a_1 R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 - 3a_1 & -3 + a_1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & a_2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & a_2 \\ 0 & -1 - 3a_1 & -3 + a_1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - (1+3a_1)R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & a_2 \\ 0 & 0 & -6 - 8a_1 & 1 - a_2 - 3a_2a_1 \end{array} \right)$$

El sistema anterior es **inconsistente o no tiene solución si**  $-6 - 8a_1 = 0$  y  $1 - a_2(1 + 3a_1) \neq 0$ , despejando de ambos lados tenemos  $a_1 = -\frac{3}{4}$  y  $a_2 \neq \frac{1}{1+3a_1} \neq \frac{1}{1+3(-3/4)} \neq -\frac{4}{5}$ .

Ahora, determinemos los valores de  $a_1$  y  $a_2$  para que la solución del sistema sea  $x = (3, -1, 2)^t$ . Para que  $(3, -1, 2)^t$  sea solución se tiene que cumplir  $A(3, -1, 2)^t = b$ , es decir,

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 & 3 & -1 \\ a_1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 3 \\ -1 \\ 2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ a_2 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c} 3 - 3 - 2 \\ 3a_1 + 1 - 6 \\ 3 - 2 + 4 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ a_2 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c} -2 \\ 3a_1 + 1 - 6 \\ 3 - 2 + 4 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ a_2 \end{array} \right)$$

Pero si observamos el primer renglón de lo anterior, notamos que  $x = (3, -1, 2)^t$  no puede ser solución del sistema debido a que no cumple la primera igualdad, independientemente de los valores que tomen  $a_1$  y  $a_2$ . ■.

3. Encuentre la solución general, escribiéndola como combinación lineal de vectores, del sistema homogéneo  $Ax = 0$  donde

$$A = \left( \begin{array}{cccccc} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{array} \right).$$

### RESPUESTA

Tenemos que  $Ax = 0$ , es decir,

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la solución general ocupemos reducción gaussiana. Primero reduzcamos la matriz en

su forma escalonada reducida:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_2]{R_4 \rightarrow R_4 + R_1} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -R_3/2]{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_3} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow -R_4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ahora realizamos sustitución hacia atrás de la matriz anterior:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 2R_4]{R_2 \rightarrow R_2 - 4R_4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \rightarrow R_2 - R_3]{R_1 \rightarrow R_1 - R_4} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Por lo anterior encontramos que  $x_6 = 0$  y  $x_5 = 0$  del renglón 3 y 4 respectivamente. Del renglón 2 obtenemos que  $x_3 = -2x_4$  y del renglón 1  $x_1 = 3x_2 + 3x_4$ . Por lo que la solución general es

$$x = \begin{pmatrix} 3x_2 + 3x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

la cual se puede escribir como combinación lineal de la siguiente forma:

$$x = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \blacksquare.$$

4. Encuentra la inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

**RESPUESTA**

Para encontrar  $A^{-1}$ , tenemos la ecuación  $AX = I$  que puede verse como un conjunto de sistemas de ecuaciones  $Ax_i = e_i$  donde  $x_i$  son las columnas de  $X$ . Luego con el método de Gauss, si es posible resolver cada uno de estos sistemas con solución  $x_i$ , encontramos la inversa de  $A$  dada por  $X = (x_1, \dots, x_n)$ . Usando Gauss Jordan

$$L(A|I) = (LA|LI) = (I|L)$$

implica que  $L = A^{-1}$ .

Ocupando lo anterior tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3.5 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \rightarrow R_2 + 2R_3]{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3.5 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la inversa es:

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 3.5 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \blacksquare.$$

5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que  $A$  es no singular y luego escriba  $A$  como producto de matrices elementales.

**RESPUESTA**

Reduzcamos a  $A$  en su forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que si

*Si  $A_{n \times n}$  se puede escribir en su forma escalonada con  $n$  pivotes si solo sí es no singular (demostrado en clase).*

Por lo tanto, como la forma escalonada de  $A_{3 \times 3}$  tiene 3 pivotes entonces  $A$  es no singular. Otra forma de demostrarlo es calculando el determinante de  $A$ :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (1)(2)(-4) = -8.$$

Por lo tanto, como el determinante de  $A$  es distinto de cero eso implica que  $A$  es no singular.

Ahora para escribir a  $A$  como producto de matrices elementales, hacemos reducción hacia atrás a la matriz escalonada calculada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_3/4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \rightarrow R_2 - 3R_3]{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, transformando las operaciones elementales por matrices elementales, tenemos que lo anterior es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = I \Rightarrow$$

Ahora, haciendo uso de las propiedades de las matrices inversas ( $(E_1 E_2 \cdots E_n)^{-1} = E_n^{-1} \cdots E_2^{-1} E_1^{-1}$ , demostrada en clase), entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} I \Rightarrow$$

Ahora para calcular las inversas ocupemos lo visto en clase:

Sea  $A = I_n + uv^t$  una matriz elemental. Entonces  $A$  es invertible con inversa dada por

$$A^{-1} = I - \frac{uv^t}{1 + v^t u}.$$

Más aún, si  $E$  es elemental del tipo I, II, ó III entonces  $E^{-1}$  es elemental del mismo tipo que  $E$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \blacksquare.$$

Para que quede más específico realizamos aquí las matrices inversas:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow -4R_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow 2R_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. i) Encuentre dos matrices que sean invertibles pero que su suma no sea invertible. ii) Encuentre dos matrices singulares cuya suma sea invertible. Justifique todas sus aseveraciones.

### RESPUESTA

Recordemos que:

*Si  $A_{n \times n}$  se puede escribir en su forma escalonada con  $n$  pivotes si solo sí es no singular (demostrado en clase).*

Sea  $A_{3 \times 3}$  y  $B_{3 \times 3}$  matrices triangulares superiores, con elementos en la diagonal distintos de cero, esto implica que  $A$  y  $B$  son invertibles debido a que están en su forma escalonada y tienen 3 pivotes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{donde } a_{ii} \neq 0 \text{ y } b_{ii} \neq 0.$$

Ahora haciendo que  $a_{33} = -b_{33}$  y  $a_{11} \neq b_{11}$ ,  $a_{22} \neq b_{22}$ , esto implicaría que:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -b_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ 0 & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y por lo tanto, como  $A + B$  tiene a lo más 2 pivotes esto implica que  $A + B$  no es invertible.

i) Por lo anterior, **podemos proponer las siguientes dos matrices  $A$  y  $B$  tal que son invertibles y  $A + B$  no sea invertible:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea  $A_{3 \times 3}$  y  $B_{3 \times 3}$  matrices triangulares superiores, con un elemento diagonal igual a cero pero en diferente posición en  $A$  y  $B$  ( $a_{33} = 0$  y  $b_{22} = 0$ ), esto implica que  $A$  y  $B$  no son invertibles debido a que están en su forma escalonada y tienen 2 pivotes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{donde } a_{ii} \neq 0 \text{ y } b_{ii} \neq 0.$$

Ahora considerando a  $a_{11} \neq -b_{11}$ , entonces:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} + b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \quad \text{donde } a_{ii} \neq 0 \text{ y } b_{ii} \neq 0.$$

Y por lo tanto, como  $A + B$  tiene 3 pivotes esto implica que  $A + B$  es invertible.

ii) Por lo anterior, **podemos proponer las siguientes dos matrices  $A$  y  $B$  tal que no sean invertibles y  $A + B$  sea invertible:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

7. Encuentre la descomposición LU de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

### RESPUESTA

Sea  $T_i$  una matriz inferior elemental y si no se requieren intercambios de renglones se pueden hacer  $n-1$  multiplicaciones por la izquierda de  $A_{n \times n}$  por matrices triangulares inferiores elementales para llevar a A a una forma triangular superior, es decir:

$$T_{n-1} \cdots T_1 A = U$$

Luego

$$A = T_1^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1} U = LU,$$

donde  $L = T_1^{-1} \cdots T_n^{-1}$ .

Entonces, usemos eliminación gaussiana para determinar la matriz  $U$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \rightarrow R_4 - R_1]{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \rightarrow R_4 - 3R_2]{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 4R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

Ahora determinaremos  $L$ ,

$$E_{43}(-4)E_{42}(-3)E_{32}(-1)E_{41}(-1)E_{31}(-2)A = U$$

o

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = U \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} U.$$

Y esto implica que:

$$\begin{aligned}
L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es decir, la descomposición LU de la matriz definida es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \quad \blacksquare.$$

Para que quede más específico que se realizaron las matrices inversas a mano:

$$\begin{aligned}
&\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\
& \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + 4R_3} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right) \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

8. Encuentre la descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

y luego úsela para encontrar la solución del sistema  $Ax = b$ , donde

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

### RESPUESTA

El problema anterior se resolvió utilizando la metodología vista en clase. Ahora se hará uso de un método "más sencillo" (Álgebra Lineal, Grossman (2012)). Si  $A = LU$ , si sabe que  $A$  se puede factorizar como:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} = LU$$

Observe que el primer renglón de  $U$  es el mismo que el primer renglón de  $A$  porque al reducir  $A$  a la forma triangular, no hace falta modificar los elementos del primer renglón.

Se pueden obtener todos los coeficientes faltantes con tan sólo multiplicar las matrices. La componente 2, 1 de  $A$  es 4. De este modo, el producto escalar del segundo renglón de  $L$  y la primera columna de  $U$  es igual a 4:

$$4 = 2a \quad \text{o} \quad a = 2$$

Después se tiene:

componente 2, 2:  $7 = 6 + u \rightarrow u = 1$ .

De aquí en adelante se pueden insertar los valores que se encuentran en  $L$  y  $U$ :

componente 2, 3: $2 = -2 + v \rightarrow v = 4$ .	componente 3, 4: $0 = -6 - 88 + y \rightarrow y = 94$ .
componente 2, 4: $1 = 12 + w \rightarrow w = -11$ .	componente 4, 1: $0 = 2d \rightarrow d = 0$ .
componente 3, 1: $-2 = 2b \rightarrow b = -1$ .	componente 4, 2: $-4 = e \rightarrow e = -4$ .
componente 3, 2: $5 = -3 + c \rightarrow c = 8$ .	componente 4, 3: $5 = -16 - 35f \rightarrow f = -3/5$ .
componente 3, 3: $-2 = +1 + 32 + x \rightarrow x = -35$ .	componente 4, 4: $2 = 44 - 3(94)/5 + z \rightarrow z = 72/5$ .

Por lo que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & -35 & 94 \\ 0 & 0 & 0 & 72/5 \end{pmatrix} = LU$$

Ahora, para resolver un sistema lineal  $Ax = b$  cuando  $A = LU$  se resuelven dos sistemas triangulares  $Ly = b$  y  $Ux = y$ . Primero se una sustitución hacia adelante en  $Ly = b$ , y luego se resuelve el sistema  $Ux = y$  usando sustitución hacia atrás (esta metodología se presento en clase). Entonces para este problema tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -3/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Esto implica que

$$y_1 = 1$$

$$2(1) + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -2$$

$$-(1) + 8(-2) + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = 17$$

$$0 - 4(-2) - 3(17)/5 + y_4 = 4 \Rightarrow y_4 = 31/5$$

Sea acaba de realizar la sustitución hacia adelante. Ahora, de  $Ux = y$  se obtiene:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 &= 1 \\ x_2 + 4x_3 - 11x_4 &= -2 \\ -35x_3 + 94x_4 &= 17 \\ 72/5x_4 &= 31/5 \end{aligned}$$

o

$$x_4 = \frac{31}{72}$$

$$-35x_3 + 94\left(\frac{31}{72}\right) = 17, \text{ de manera que } x_3 = \frac{17 - 94\left(\frac{31}{72}\right)}{-35} = \frac{17 \cdot 72 - 94 \cdot 31}{-35 \cdot 72} = \frac{-1690}{-2520} = \frac{169}{252}$$

$$x_2 + 4x_3 - 11x_4 = -2, \text{ de manera que } x_2 = -2 + 11\left(\frac{31}{72}\right) - 4\left(\frac{169}{252}\right) = \frac{3}{56}$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 1, \text{ de manera que } x_1 = \frac{1}{2} - 3\left(\frac{31}{72}\right) + \frac{169}{504} - 3\left(\frac{3}{112}\right) = -\frac{541}{1008}$$

Por lo tanto la solución es:

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{541}{1008} \\ \frac{3}{56} \\ \frac{169}{252} \\ \frac{31}{72} \end{pmatrix} \quad \blacksquare.$$

*Cálculos de la simplificación de  $x_2$  y  $x_1$ :*

$$-2 + 11\left(\frac{31}{72}\right) - 4\left(\frac{169}{252}\right) = -2 + \frac{341}{72} - \frac{338}{126} = \frac{-18144 + 42966 - 24336}{9000} = \frac{486}{72 \cdot 126} = \frac{3}{56}.$$

$$\frac{1}{2} - 3\left(\frac{31}{72}\right) + \frac{169}{504} - 3\left(\frac{3}{112}\right) = \frac{1}{2} - \frac{31}{24} + \frac{169}{504} - \frac{9}{112} = \frac{504 - 1302 + 338 - 81}{1008} = -\frac{541}{1008}.$$

9. Encuentre la descomposición LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & 26 & 2 \end{pmatrix},$$

Usando esta misma descomposición como ayuda, encuentre  $A^{-1}$ .

### RESPUESTA

Utilizando la metodología que el ejercicio anterior. Tenemos que si  $A = LU$ , si se sabe que  $A$  se puede factorizar como:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & 26 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} = LU$$

Observe que el primer renglón de  $U$  es el mismo que el primer renglón de  $A$  porque al reducir  $A$  a la forma triangular, no hace falta modificar los elementos del primer renglón.

Se pueden obtener todos los coeficientes faltantes con tan sólo multiplicar las matrices. La componente 2, 1 de  $A$  es 3. De este modo, el producto escalar del segundo renglón de  $L$  y la primera columna de  $U$  es igual a 3:

$$3 = a \quad \text{o} \quad a = 3$$

Después se tiene:

componente 2, 2:  $-9 = -6 + u \rightarrow u = -3$ .

De aquí en adelante se pueden insertar los valores que se encuentran en  $L$  y  $U$ :

componente 2, 3: $0 = -6 + v \rightarrow v = 6$ .	componente 3, 4: $7 = 3 + y \rightarrow y = 4$ .
componente 2, 4: $-9 = -9 + w \rightarrow w = 0$ .	componente 4, 1: $-3 = d \rightarrow d = -3$ .
componente 3, 1: $-1 = b \rightarrow b = -1$ .	componente 4, 2: $-6 = 6 - 3e \rightarrow e = 4$ .
componente 3, 2: $2 = 2 + -3c \rightarrow c = 0$ .	componente 4, 3: $26 = 6 + 24 + 2f \rightarrow f = -2$ .
componente 3, 3: $4 = 2 + x \rightarrow x = 2$ .	componente 4, 4: $2 = 9 + -8 + z \rightarrow z = 1$ .

Por lo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & 26 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Ahora, considerando la propiedad de la inversa de una matriz (demostrada en clase):

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Entonces tenemos que:

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

Calculemos la inversa de  $U^{-1}$  y  $L^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 + R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_4 \rightarrow R_4 - 4R_2]{R_4 \rightarrow R_4 + 3R_1} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 17 & -4 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 15 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + 2R_3} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 17 & -4 & 2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
& \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - 4R_4]{R_1 \rightarrow R_1 + 3R_4} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3/2} \\
& \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_1 \rightarrow R_1 + 2R_3]{R_2 \rightarrow R_2 - 6R_3} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2/3} \\
& \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2/3 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\
& U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 3 & -9 \\ 0 & -1/3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 3 & -9 \\ 0 & -1/3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -147 & \frac{106}{3} & -15 & -9 \\ -66 & \frac{47}{3} & -7 & -4 \\ \frac{-67}{2} & 8 & \frac{-7}{2} & -2 \\ 17 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \blacksquare$$

10. Encuentre la descomposición LU de la matriz por bandas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

(Para una interesante aplicación de matrices por bandas a problemas de flujo de calor en física y la importancia de obtener su descomposición LU, ver problemas 31 y 32 de Linear Algebra, D. Lay, 4th ed., p. 131 y las explicaciones que ahí se dan.)

### RESPUESTA

Para hacer un poco más facil este problema, definamos las siguientes submatrices de  $A$ :

$$A_1^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_2^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \Rightarrow$$

$$\det(A_1^*) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad y \quad \det(A_2^*) = a_{33}\det(A_1^*) - a_{32}a_{11}a_{23}.$$

Ahora utilizando (*demostrado en clase*):

$A$  tiene una factorización LU si y solo si todas sus submatrices principales líderes son no singulares.

Entonces para que  $A$  tenga su factorización LU asumimos que  $[a_{11}]$ ,  $A_1^*$  y  $A_2^*$  son no singulares, es decir,  $a_{11} \neq 0$ ,  $\det(A_1^*) \neq 0$  y  $\det(A_2^*) \neq 0$ .

Ahora, considerando la metodología del inciso 9: Si  $A = LU$ , se sabe que  $A$  se puede factorizar

como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & u & v & w \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} = LU$$

Observe que el primer renglón de  $U$  es el mismo que el primer renglón de  $A$  porque al reducir  $A$  a la forma triangular, no hace falta modificar los elementos del primer renglón.

Se pueden obtener todos los coeficientes faltantes con tan sólo multiplicar las matrices. La componente 2, 1 de  $A$  es  $a_{21}$ . De este modo, el producto escalar del segundo renglón de  $L$  y la primera columna de  $U$  es igual a  $a_{21}$ :

$$a_{21} = a_{11} \cdots a \quad \text{o} \quad a = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Después se tiene:

$$\text{componente 2, 2: } a_{22} = a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} + u \rightarrow u = a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

De aquí en adelante se pueden insertar los valores que se encuentran en  $L$  y  $U$ :

$$\text{componente 2, 3: } a_{23} = 0 + v \rightarrow v = a_{23}.$$

$$\text{componente 2, 4: } 0 = 0 + w \rightarrow w = 0.$$

$$\text{componente 3, 1: } 0 = a_{11}b \rightarrow b = 0.$$

$$\text{componente 3, 2: } a_{32} = (a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}})c \rightarrow c = \frac{a_{32}a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}.$$

$$\text{componente 3, 3: } a_{33} = a_{23} \left( \frac{a_{32}a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \right) + x \rightarrow$$

$$x = a_{33} - a_{23} \left( \frac{a_{32}a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \right) = \frac{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}}{\det(A_1^*)}$$

$$\text{componente 3, 4: } a_{34} = 0 + y \rightarrow y = a_{34}.$$

$$\text{componente 4, 1: } 0 = a_{11}d \rightarrow d = 0.$$

$$\text{componente 4, 2: } 0 = \left( a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) e \rightarrow e = 0.$$

$$\text{componente 4, 3: } a_{43} = \left( \frac{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}}{\det(A_1^*)} \right) f \rightarrow$$

$$f = \frac{a_{43}}{\frac{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}}{\det(A_1^*)}} = \frac{a_{43} \cdot \det(A_1^*)}{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}}$$

$$\text{componente 4, 4: } a_{44} = a_{34} \frac{a_{43} \cdot \det(A_1^*)}{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}} + z -$$

$$z = a_{44} - \frac{a_{34}a_{43} \cdot \det(A_1^*)}{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}}.$$

Por lo tanto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{32}a_{11}}{\det(A_1^*)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{43} \cdot \det(A_1^*)}{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\det(A_1^*)}{a_{11}} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}}{\det(A_1^*)} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} - \frac{a_{34}a_{43} \cdot \det(A_1^*)}{a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}} \end{pmatrix} = LU.$$

Ahora, recordando la notación del inicio podemos ver que:

$$\det(A_2^*) = a_{33} \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}, \quad y \quad \det(A) = a_{44} \cdot (a_{33} \cdot \det(A_1^*) - a_{23}a_{32}a_{11}) - a_{34}a_{43} \det(A_1^*).$$

Es decir, el resultado anterior se puede simplificar a:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{32}a_{11}}{\det(A_1^*)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{43} \cdot \det(A_1^*)}{\det(A_2^*)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\det(A_1^*)}{a_{11}} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\det(A_2^*)}{\det(A_1^*)} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\det(A)}{\det(A_2^*)} \end{pmatrix} = LU \blacksquare.$$

Algo curioso de esas matrices con bandas, es que se puede observar que tanto  $L$  y  $U$  igual son matrices por bandas.