

2. Demuestre que la sucesión del inciso e) del Ejercicio 1 converge en probabilidad y casi seguramente, pero que no converge en  $L_2$ . Demuestre que la sucesión del inciso f) del Ejercicio 1 converge en  $L_2$ .

### RESPUESTA

Recordemos la definición de las tres tipos de convergencia

**Teorema: 1** Sea  $\{X_n, n \geq 1\}$  una sucesión de v.a. y sea  $X$  una v.a. Denotemos por  $F_n$  a la función de distribución de  $X_n$  y por  $F$  a la función de distribución de  $X$ .

1.  $X_n$  converge a  $X$  en probabilidad, denotado por  $X_n \xrightarrow{P} X$ , si para cada  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0.$$

2.  $X_n$  converge a  $X$  en media cuadrática (o en  $L_2$ ), denotado por  $X_n \xrightarrow{L_2} X$ , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0.$$

3. Diremos que  $X_n$  converge casi seguramente a  $X$ , denotado por  $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ , si

$$\mathbb{P}(\{\omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1.$$

Primero demosntremos que la sucesión del inciso e) no converge en  $L_2$  a 0. Tenemos que  $X_n = 2^n 1_{[0, 1/n]}(Z)$ ,  $Z \sim Unif(0, 1)$ , lo anterior se puede interpretar como

$$f_{X_n}(x_n) = \begin{cases} \mathbb{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{n}\right) & x_n = 2^n \\ 1 - \mathbb{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{n}\right) & x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f_{X_n}(x_n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x_n = 2^n \\ 1 - \frac{1}{n} & x_n = 0 \end{cases},$$

la anterior es cierto ya que como  $Z \sim Unif(0, 1) \Rightarrow$

$$\mathbb{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{n}\right) = \int_0^{\frac{1}{n}} dz = \frac{1}{n}.$$

Ahora calculamos la media cuadrática de  $X_n - X \equiv 0$

$$\mathbb{E}[(X_n - X)^2] = \mathbb{E}[(X_n)^2] = \frac{1}{n}(2^n)^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)0 = \frac{4^n}{n}$$

Veamos que la función de arriba es exponencial y la de abajo es polinomial de grado 1, por lo que podemos afirmar que  $4^n$  crece más rápido que  $n$ , por lo que podemos decir que el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{n} = \infty$ , es decir diverge, y por lo tanto podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{n} \neq 0,$$

por lo cuál, **podemos decir que**  $X_n = 2^n 1_{[0, 1/n]}(Z)$ ,  $Z \sim Unif(0, 1)$ , **no converge en  $L_2$  a 0.**

Ahora, para demostrar que  $X_n = 2^n 1_{[0, 1/n]}(Z)$ ,  $Z \sim Unif(0, 1)$  converge casi seguramente utilizando la distribución de probabilidad de  $X_n$  tenemos que

$$f_{X_n}(x_n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x_n = 2^n \\ 1 - \frac{1}{n} & x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_{X_n}(x_n) = \begin{cases} 0 & x_n = \infty \\ 1 & x_n = 0 \end{cases}$$

Y por lo anterior, podemos concluir que

$$\mathbb{P}(\{\omega : X_n(\omega) \rightarrow 0\}) = 1,$$

es decir,  $X_n$  **converge casi seguramente a 0**. Ahora, ocupando el teorema (5) y como sabes que converge casi seguramente a 0, **esto implica que  $X_n$  también converge en probabilidad a 0**.

Ahora, demostremos que la sucesión del inciso f) ejercicio 1 converge en  $L_2$ . Tenemos que  $Y_1, \dots, Y_n \sim N(0, 1)$  v.a.i. y  $X_1 = X_2 = 1$ ,

$$X_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{(2n \log(\log(n)))^{1/2}}, \quad n \geq 2.$$

Para mostrar que  $X_n$  converge en  $L_2$  a 0 tenemos que

$$\mathbb{E}[(X_n - 0)^2] = \mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{(2n \log(\log(n)))^{1/2}}\right)^2\right] = \frac{1}{2n \log(\log(n))} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2\right],$$

pero como las  $Y_i$ 's  $\sim N(0, 1)$  entonces podemos decir que  $\sum_{i=1}^n Y_i \sim N(0, n)$  (propiedad de v.a.'s normales), y entonces

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n Y_i\right]\right)^2 = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2\right] = n.$$

Entonces

$$\mathbb{E}[(X_n - 0)^2] = \frac{1}{2n \log(\log(n))} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2\right] = \frac{n}{2n \log(\log(n))} = \frac{1}{2 \log(\log(n))}.$$

y por lo tanto el límite de la 2da esperanza de  $X_n$  es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_n - 0)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \log(\log(n))} = 0.$$

Por lo tanto, **podemos concluir que  $X_n$  converge en  $L_2$  a 0**. ■.

Con el ejercicio 1 y 2, observamos la demostración analítica de convergencia y observamos con las simulaciones la convergencia.

3. Supongamos que  $X_0, X_1, \dots$  es una sucesión de experimentos Bernoulli independientes con probabilidad de éxito  $p$ . Supongamos también que  $X_i$  es la indicadora del éxito de su equipo en el  $i$ -ésimo juego de un rally de fútbol. Su equipo anota un punto cada vez que tiene un éxito seguido de otro. Denotemos por  $S_n = \sum_{i=1}^n X_{i-1}X_i$  al número de puntos que su equipo anota al tiempo  $n$ .

a) Encuentre la distribución asintótica de  $S_n$ .

### RESPUESTA

Calculemos la esperanza de  $X_{i-1}X_i$  (recordemos que las  $X_i$ 's son independientes), para ello utilizaremos las propiedades de la esperanza

$$\mathbb{E}(X_{i-1}X_i) = \mathbb{E}(X_{i-1})\mathbb{E}(X_i) - \text{Cov}(X_{i-1}X_i) = p^2 - 0 = p^2.$$

Ahora calculemos la varianza de  $S_n$ , por como esta descrito el problema podemos asumir independencia entre cualquier pareja de  $X_{i-1}X_i$  y  $X_{j-1}X_j$ ,  $j \neq i$ , entonces ocupando lo anterior podemos calcular la varianza como

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_{i-1}X_i) &= \mathbb{E}(X_{i-1}^2)\mathbb{E}(X_i^2) - (\mathbb{E}(X_{i-1})\mathbb{E}(X_i))^2 \\ &= p * p - p^2p^2 = p^2(1 - p^2) = p^2(1 - p^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, ocupando el teorema central de limite tenemos

$$\frac{S_n - np^2}{\sqrt{np^2(1-p^2)}} \rightarrow Normal(0, 1).$$

Es decir,  $\frac{S_n - np^2}{\sqrt{np^2(1-p^2)}}$  tiene una distribución asintótica  $Normal(0, 1)$ . Igual podemos decir, que para un  $n$  finito,  $S_n$  aproximadamente se distribuye como  $Normal(np^2, \sqrt{np^2(1-p^2)})$ .

4. Sean  $X_1, X_2, \dots$  v.a.i tales que  $X_i \sim Unif[-j, j]$ ,  $j = 1, 2, \dots$  Muestre que la sucesión satisface la condición de Lindeberg.

### RESPUESTA

Enunciemos la condición de Lindeberg

**Teorema: 2** Sea  $\{X_n, n \geq 1\}$  independientes (pero no necesariamente idénticamente distribuidas) y suponga que  $X_k$  tiene distribución  $F_k$  y que  $\mathbb{E}(X_k) = 0$  y  $Var(X_k) = \sigma_k^2$ . Definamos

$$s_n = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 = Var\left(\sum_{j=1}^n X_j\right).$$

Diremos que  $\{X_k\}$  satisface la condición de Lindeberg si, para todo  $t > 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j^2 1_{\{|X_j|/s_n > t\}}) \rightarrow 0.$$

y además ocupemos el siguiente teorema

**Teorema: 3** Sea  $\{X_n, n \geq 1\}$  independientes (pero no

Demostremos primero que se cumple la condición de Lyapunov (definición 4), como  $X'_j \sim Unif(-j, j)$  entonces tenemos que la distribución de probabilidad es

$$f_{X_j} = \begin{cases} \frac{1}{2j} & -j < x < j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y ocupando lo anterior, tenemos que

$$\mathbb{E}(|X_j|^{\delta+2}) = \int_{-j}^j |x_j|^{\delta+2} \frac{1}{2j} dx_i = 2 \int_0^j x_k^{\delta+2} \frac{1}{2j} dx_j = \frac{1}{j} \frac{x_j^{\delta+3}}{\delta+3} \Big|_0^j = \frac{j^{\delta+2}}{\delta+3}.$$

Ahora calculemos  $s_n^2$ , tenemos que  $\sigma_i^2 = \frac{j^2}{3}$  entonces

$$s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{3} \Rightarrow s_n^{2+\delta} = s_n^2 \left( \sqrt{s_n^2} \right)^\delta = \left( \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{3} \right)^{\frac{\delta}{2}+1}$$

Entonces, sea  $\delta = 2$  esto implica que

$$\frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|X_j|^{2+2}]}{s_n^{2+2}} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{j^4}{5}}{\left(\sum_{j=1}^n \frac{j^2}{3}\right)^2} = \frac{9}{5} \frac{\sum_{j=1}^n j^4}{\left(\sum_{j=1}^n j^2\right)^2}, \quad (1)$$

observemos que

$$\left(\sum_{j=1}^n j^2\right)^2 = \sum_{j=1}^n j^4 + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n j^2 k^2 \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n j^2\right)^2 > \sum_{k=1}^n j^4.$$

Por lo tanto, como el denominador es más grande que el numerador en la expresión (1) podemos decir que el converge a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{E}[|X_j|^{2+2}]}{s_n^{2+2}} = \frac{9}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n j^4}{\left(\sum_{j=1}^n j^2\right)^2} = 0 \quad (2)$$

Cómo encontramos en  $\delta = 2$  tal que se cumpla (4), podemos concluir que se cumple la condición de Lyapunov. Y por lo tanto, **ocupando el teorema (3) podemos concluir que igual se cumple la condición de Lindeberg.** ■.

5. Sean  $X_1, X_2, \dots$  v.a.i tales que  $\mathbb{P}(X_j = \mp j^a) = \mathbb{P}(X_j = 0) = 1/3$ , donde  $a > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Muestre que se cumple la condición de Lyapunov.

#### RESPUESTA

La condición de Lyapunov nos dice que

**Teorema: 4** Sea  $\{X_k, k \geq 1\}$  una sucesión de v.a.i. satisfaciendo  $\mathbb{E}[X_k] = 0$ ,  $Var(X_k) = \sigma_k^2 < \infty$  y  $s_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$ . Si para algún  $\delta > 0$

$$\frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_k|^{\delta+2}]}{s_n^{\delta+2}} \rightarrow 0.$$

Calculemos la esperanza y la varianza de  $X_k$ , la cual es

$$\mathbb{E}(X_k) = \frac{k^a - k^a}{3} = 0 \quad y \quad Var(X_k) = \mathbb{E}(X_k^2) - [E(X_k)]^2 = \frac{(k^a)^2 + (-k^a)^2}{3} = \frac{2}{3} k^{2a}.$$

Ahora calculemos  $\mathbb{E}[|X_k|^{\delta+2}]$  y  $s_n^{\delta+2}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_k|^{\delta+2}) &= \frac{(|k^a|)^{\delta+2} + (|-k^a|)^{\delta+2}}{3} = \frac{2}{3} k^{a(\delta+2)}. \\ s_n^{\delta+2} &= s_n^2 \left(\sqrt{s_n^2}\right)^\delta = \left(\sum_{k=1}^n \frac{2}{3} k^{2a}\right)^{\frac{\delta}{2}+1} \end{aligned}$$

Entonces, sea  $\delta = 2$  esto implica que

$$\frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_k|^{\delta+2}]}{s_n^{\delta+2}} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{2}{3} k^{4a}}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{2}{3} k^{2a}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3} \sum_{k=1}^n k^{4a}}{\frac{4}{9} (\sum_{k=1}^n k^{2a})^2} = \frac{3}{2} \frac{\sum_{k=1}^n k^{4a}}{(\sum_{k=1}^n k^{2a})^2},$$

observemos que

$$\left(\sum_{k=1}^n k^{2a}\right)^2 = \sum_{k=1}^n k^{4a} + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n j^{2a} k^{2a} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n k^{2a}\right)^2 > \sum_{k=1}^n k^{4a}.$$

Si observamos la última igualdad anterior observamos que cuando  $n \rightarrow \infty$  tanto el número y denominador divergente, pero observamos que el denominador crece más rápido que el denominador, es decir, es de un orden mayor. Por lo tanto, como el denominador tiende a  $\infty$  más rápido que el denominador podemos concluir que la toda la expresión tiene a 0, es decir cuándo  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ |X_k|^{\delta+2} \right]}{s_n^{\delta+2}} \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, como ya encontramos un  $\delta = 2$  tal que se cumple

$$\frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ |X_k|^{\delta+2} \right]}{s_n^{\delta+2}} \rightarrow 0.$$

podemos concluir que se cumple la condición de Lyapunov. ■.

6. Justifique que  $X_n \xrightarrow{P} 1$  en cada uno de los siguientes casos:

- a)  $X_n = 1 + nY_n$ , con  $Y_n \sim \text{Bernoulli}(1/n)$ .
- b)  $X_n = Y_n / \log n$ , con  $Y_n \sim \text{Poisson}(\sum_{i=1}^n 1/i)$ .
- c)  $X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2$ , con las  $Y_i'$ s v.a.i.i.d. y  $Y_i \sim N(0, 1)$ .

¿En qué casos  $X_n \xrightarrow{L_2} 1$ ?

### RESPUESTA

Primero recordemos que

**Teorema: 5** Sea  $\{X_n\}$  una sucesión de v.a.i y  $X$  una variable aleatoria  $X$ , entonces se tienen las siguientes relaciones:

- a)  $X_n \xrightarrow{L_2} X$  implica que  $X_n \xrightarrow{P} X$ .
- b)  $X_n \xrightarrow{P} X$  implica que  $X_n \xrightarrow{d} X$ .
- c)  $X_n \xrightarrow{c.s} X$  implica que  $X_n \xrightarrow{P} X$ .

Entonces para este ejercicio primero procederemos a validar si convergen en  $L_2$  y si lo satisfacen entonces ocupando el teorema (5) podríamos concluir que también convergen en probabilidad.

a)  $X_n = 1 + nY_n$ , con  $Y_n \sim \text{Bernoulli}(1/n)$ . Para probar que  $X_n \xrightarrow{L_2} 1$  ocupemos la definición (1) de convergencia en  $L_2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_n - 1)^2] &= \mathbb{E}[X_n^2 - 2X_n + 1] = \mathbb{E}[X_n^2] - 2\mathbb{E}[X_n] + 1 = \mathbb{E}[(1 + nY_n)^2] - 2\mathbb{E}[(1 + nY_n)] + 1 \\ &= \mathbb{E}[1 + 2nY_n + 4n^2Y_n^2] - 2\left(1 + n\frac{1}{n}\right) + 1 \\ &= 1 + 2n\mathbb{E}[Y_n] + 4n^2\mathbb{E}[Y_n^2] - 4 + 1 \\ &= 1 + 2n\frac{1}{n} + 4n^2\left(1^2\frac{1}{n} + 0\right) - 4 + 1 \\ &= 1 + 2 + 4n - 4 + 1 = 4n, \end{aligned}$$

lo anterior implica que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_n - 1)^2] = \lim_{x \rightarrow \infty} 4n = \infty,$$

es decir, la serie diverge, **lo que podemos concluir que**  $X_n = 1 + nY_n$ , con  $Y_n \sim \text{Bernoulli}(1/n)$  **no converge en  $L_2$  a 1**,  $X_n \not\stackrel{L_2}{\rightarrow} 1$ . Ahora probemos que  $X_n \stackrel{P}{\rightarrow} 1$ , para ello ocuparemos la relación que existe de convergencia casi segura y probabilidad (teorema (5)), primero probaremos que converge casi seguramente a 1, es decir,  $X_n \xrightarrow{c.s.} 1$ , tenemos que la función de distribución de  $X_n = 1 + nY_n$ ,  $Y_n \sim \text{Bernoulli}(1/n)$  es

$$f_{X_n}(x_n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x_n = 1 + n \\ 1 - \frac{1}{n} & x_n = 1 \end{cases}$$

entonces

$$\text{ya que } \lim_{n \rightarrow \infty} f_{X_n}(x_n) = \begin{cases} 0 & \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + n \\ 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \end{cases} \text{ implica que } \mathbb{P}(\{\omega : X_n(\omega) \rightarrow 1\}) = 1.$$

Es decir, lo anterior demuestra que  $X_n \xrightarrow{c.s.} 1$ . Por lo tanto, **ocupando el teorema (5) podemos concluir que  $X_n$  también converge en probabilidad a 1**.

b)  $X_n = Y_n / \log n$ , con  $Y_n \sim \text{Poisson}(\sum_{i=1}^n 1/i)$ . Veamos si converge en  $L_2$  a 1, para ello observemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_n - 1)^2] &= \mathbb{E}[X_n^2 - 2X_n + 1] = \mathbb{E}[X_n^2] - 2\mathbb{E}[X_n] + 1 = \mathbb{E}[(Y_n / \log n)^2] - 2\mathbb{E}[Y_n / \log n] + 1 \\ &= \frac{1}{(\log n)^2} \mathbb{E}(Y_n^2) - \frac{2}{\log n} \mathbb{E}(Y_n) + 1 \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right)^2}{(\log n)^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\log n} + 1 \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{(\log n)^2} + \left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\log n}\right)^2 - \frac{2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\log n} + 1, \end{aligned}$$

Ocupemos la siguiente propiedad conocida de la serie armónica (la demostración es sencilla ocupando la definición de logaritmo como integral)

**Teorema: 6** *Serie armónica*

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \log n + 1$$

Entonces ocupando la propiedad anterior podemos demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\log n} \right) < \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\log n + 1}{\log n} \right) = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\log n} \right) = 1.$$

Entonces ocupando lo anterior podemos observar que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_n - 1)^2] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{(\log n)^2} + \left( \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\log n} \right)^2 - \frac{2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\log n} + 1 \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\log n} \frac{1}{\log n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\log n} \right)^2 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\log n} + 1 \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\log n} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\log n} \right) + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\log n} \right)^2 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\log n} + 1 \\
&= 1(0) + 1^2 - 2(1) + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Por lo anterior, **queda demostrado que**  $X_n \xrightarrow{L_2} 1$ . Entonces, ocupando el teorema (5) **podemos concluir que como**  $X_n \xrightarrow{L_2} 1$  **esto implica que**  $X_n \xrightarrow{P} 1$ .

c)  $X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2$ , con las  $Y_i$ 's v.a.i.i.d. y  $Y_i \sim N(0, 1)$ , recordemos lo siguiente

**Teorema: 7** (Demostrado en clase) Sea  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  v.a.i.i.d con distribución Normal(0,1), entonces  $Y_i^2 \sim Ji - cuadrada(1)$  y además  $\sum_{i=1}^n Y_i^2 \sim Ji - cuadrada(n)$ .

Sabiendo lo anterior denotemos a  $\sum_{i=1}^n Y_i^2 \equiv W_n \sim Ji - cuadrada(n)$  para facilitar la notación, procedemos a demostrar si  $X_n = \frac{1}{n} W_n$  entonces converge en  $L_2$  a 1 o no. Recordemos que si  $X \sim Ji - cuadrada(n) \Rightarrow \mathbb{E}[X] = n$  y  $Var(X) = 2n$ . Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_n - 1)^2] &= \mathbb{E}[X_n^2 - 2X_n + 1] = \mathbb{E}[X_n^2] - 2\mathbb{E}[X_n] + 1 = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{W_n}{n} \right)^2 \right] - 2\mathbb{E} \left[ \left( \frac{W_n}{n} \right) \right] + 1 \\
&= \frac{1}{n^2} \mathbb{E}(W_n^2) - \frac{2}{n} \mathbb{E}(W_n) + 1 \\
&= \frac{1}{n^2} (Var(W_n) + \mathbb{E}[W_n]^2) - \frac{2n}{n} + 1 \\
&= \frac{1}{n^2} (2n + n^2) - 2 + 1 \\
&= \frac{2}{n} + 1 - 2 + 1 = \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Ocupando lo anterior podemos observar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_n - 1)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Por lo tanto, como  $\mathbb{E}[(X_n - 1)^2] \rightarrow 0$ , **podemos concluir que**  $X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2$  **converge en  $L_2$  a 1.** Entonces, ocupando el teorema (5) **podemos concluir que como**  $X_n \xrightarrow{L_2} 1$  **esto implica que**  $X_n \xrightarrow{P} 1$ . ■.

### Ejercicios de las Notas:

1. (Diapositiva 85) La proporción real de familias en cierta ciudad que viven en casa propia es 0.7. Si se escogen al azar 84 familias de esa ciudad y se les pregunta si viven o no en casa propia, ¿Con qué probabilidad podemos asegurar que el valor que se obtendrá de la proporción muestral caerá entre 0.64 y 0.76? Resolverlo usando la corrección por continuidad.

## RESPUESTA

Denotemos por  $X_i$  a la variable de que la  $i$ -ésima familia viva en casa propia (1 ó 0). En este caso tenemos que  $X_i \sim \text{Bernoulli}(0,7)$ . La proporción muestral está dada por

$$\hat{\theta}_{84} = \frac{1}{84} \sum_{i=1}^{84} X_i.$$

La corrección por continuidad nos dice que si  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  y si  $np$  y  $np(1-p)$  son grandes, entonces

$$\mathbb{P}(X < x + 1) \approx \mathbb{P}(Y \leq x + 1/2)$$

donde  $Y$  es una variable aleatoria que se distribuye como una normal con media  $np$  y varianza  $np(1-p)$  es decir,  $Y \sim N(np, \sqrt{np(1-p)})$ .

Entonces podemos aproximar la probabilidad de que se la proporción muestral este entre 0.64 y 0.76 como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0,64 < \hat{\theta}_{84} < 0,76) &= \mathbb{P}(0,64 < \frac{1}{84} \sum_{i=1}^{84} X_i < 0,76) = \mathbb{P}((0,64) * 84 < \sum_{i=1}^{84} X_i < (0,76) * 84) \\ &= \mathbb{P}(53,76 < \sum_{i=1}^{84} X_i < 63,84), \end{aligned}$$

como  $X_i \sim \text{Bernoulli}(0,7) \sim \sum_{i=1}^{84} X_i \sim \text{Binomial}(84, 0,7)$ , como  $np = 58,8$  y  $np(1-p) = 17,64$  son grandes podemos ocupar la corrección de continuidad utilizando  $Z \sim \text{Normal}(58,8, 4,2)$ . Es decir, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0,64 < \hat{\theta}_{84} < 0,76) &= \mathbb{P}(54 < \sum_{i=1}^{84} X_i < 64) \approx \mathbb{P}(Z \leq 63,5) - \mathbb{P}(Z \leq 53,5) = 0,8684401 - 0,1034915 \\ &= 0,7649486. \end{aligned}$$

Si comparamos la aproximación obtenida por la corrección de continuidad y la aproximación utilizando el TLC vista en clase, observamos que la que mejor aproxima a la teórica (0.7621075) es la obtenida por la por la corrección de continuidad. ■.

2. (Diapositiva 93) De hecho una suma de  $l$  variables aleatorias Ji-cuadradas independientes con  $n_i$  grados de libertad ( $i = 1, \dots, l$ ) es una variable aleatoria Ji-cuadrada con  $m = n_1 + n_2 + \dots + n_l$  grados de libertad. Verificar.

## RESPUESTA

Recordemos que la función generadora de momentos de una variable  $X_1 \sim \text{Ji-cuadrada}(n_1)$  es

$$M_{X_1}(t) = (1 - 2t)^{-\frac{n_1}{2}},$$

entonces si tenemos  $X_1, X_2, \dots, X_l$  variables independientes que se distribuye como Ji-cuadrada ( $n_1$ ), Ji-cuadrada ( $n_2$ ),  $\dots$ , Ji-cuadrada ( $n_l$ ) respectivamente entonces la función generadora de momentos de la suma de estas variables independientes es

$$\begin{aligned} M_{\sum_{i=1}^l X_i}(t) &= \mathbb{E}\left(e^{t \sum_{i=1}^l X_i}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right) \mathbb{E}\left(e^{tX_2}\right) \dots \mathbb{E}\left(e^{tX_l}\right) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \dots M_{X_l}(t) \\ &= (1 - 2t)^{-\frac{n_1}{2}} (1 - 2t)^{-\frac{n_2}{2}} \dots (1 - 2t)^{-\frac{n_l}{2}} = (1 - 2t)^{-\frac{\sum_{i=1}^l n_i}{2}} \\ &= (1 - 2t)^{-\frac{m}{2}}, \end{aligned}$$



donde  $m = \sum_{i=1}^l n_i$ . Por lo tanto, como la generadora de momentos es igual a la generadora de momentos de una Ji-cuadrada( $m$ ), **podemos concluir que la suma de  $l$  variables aleatorias Ji-cuadradas independientes con  $n_i$  grados de libertad ( $i = 1, \dots, l$ ) es una variable aleatoria Ji-cuadrada con  $m = n_1 + n_2 + \dots + n_l$  grados de libertad.** ■.

3. (Diapositiva 141, *opcional*) Demostrar que

$$n\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x)\right)^2\right] = -n\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x)\right].$$

4. (Diapositiva 110) Otro estimador para  $\sigma^2$  en poblaciones normales es  $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i - \bar{X})^2$ . Calcular el sesgo de este estimador.

### RESPUESTA

Recordemos la siguiente definición de sesgo

**Definición: 1** Si un estimador  $\hat{\theta}$  no es insesgado para  $\theta$ , se dice que es sesgado y se define el sesgo de  $\hat{\theta}$  como

$$\text{Sesgo}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta.$$

Tenemos que,

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\frac{n-1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n}S^2,$$

donde  $S^2$  es un estimador insesgado para  $\sigma^2$  en poblaciones normales. Lo anterior implica que

$$\mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{E}\left(\frac{n-1}{n}S^2\right) = \frac{n-1}{n}\mathbb{E}(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Y por lo tanto el sesgo de  $S_n^2$  es

$$\text{Sesgo}(S_n^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}. \quad \blacksquare.$$

5. (Diapositiva 118) Se dejará como ejercicio demostrar que la función de densidad de  $X_{(n)}$  y su varianza son

$$f_{X_{(n)}}(x) = n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 < x < \theta$$

y

$$\text{Var}(X_{(n)}) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2,$$

respectivamente.

### RESPUESTA

Tenemos que la función de distribución del estadístico de orden  $n$  es

$$f_{X_{(n)}}(x) = n[F_X(x)]^{n-1}f_X(x).$$

En este problema, tenemos que  $X_i \sim Unif(0, \theta)$ , entonces esto implica que la función de distribución de  $X_{(n)}$  sea

$$f_{X_{(n)}}(x) = n[F_X(x)]^{n-1}f_X(x) = n \left[ \frac{x}{\theta} \right]^{n-1} \frac{1}{\theta} = n \frac{x^{n-1}}{\theta^n} \quad 0 < x < \theta.$$

Por lo que la varianza se puede calcular como:

$$\begin{aligned} Var(X_{(n)}) &= \mathbb{E}(X_{(n)}^2) - [\mathbb{E}(X_{(n)})]^2 \\ &= \int_0^\theta x^2 n \frac{x^{n-1}}{\theta^n} dx - \left( \int_0^\theta x n \frac{x^{n-1}}{\theta^n} dx \right)^2 \\ &= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^{n+1} dx - \left( \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n dx \right)^2 \\ &= \frac{n}{\theta^n} \frac{x^{n+2}}{n+2} \Big|_0^\theta - \left( \frac{n}{\theta^n} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^\theta \right)^2 \\ &= \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} = \theta^2 \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} \\ &= \theta^2 \frac{n^3 + 2n^2 + n - n^3 - 2n^2}{(n+2)(n+1)^2} = \theta^2 \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}. \quad \blacksquare. \end{aligned}$$

6. (Diapositiva 131) Calcular el valor esperado de la variable aleatoria  $T_r$  y a partir del resultado proponer un estimador insesgado para  $\mu$ , donde  $T_r$  = **el tiempo de vida total acumulado de las componentes a la terminación del experimento** es

$$T_r = \sum_{i=1}^r Y_i + (n-r)Y_r.$$

### RESPUESTA

Notemos que los  $Y_i$  son los estadísticos de orden  $i$  de los tiempos de vida. Una forma de proceder puede ser obteniendo el valor esperado de la fórmula anterior, sin embargo necesitamos conocer las densidades de los estadísticos de orden, hasta el de orden  $r$  inclusive. Esto sería algo extenuante ya que la distribución estaría cambiando para cada valor de la variable  $Y_i$ , por ello se prefiere una forma alternativa de escribir el tiempo  $T_r$ . Es importante recalcar el hecho de que cuando falla una componente las restantes siguen teniendo una distribución exponencial con el mismo parámetro  $\theta$ , a pesar de saber que han vivido por lo menos el tiempo de las componentes que fallaron. Esta es la propiedad de pérdida de memoria.

Con lo anterior en mente observemos que:

- las  $n$  componentes duran hasta lo que dura el estadístico de primer orden,  $Y_1$ , de las  $n$  componentes, cada una  $\text{Exp}(\theta)$ .
- las  $(n-1)$  componentes restantes duran un tiempo adicional de  $Y_2 - Y_1$ , que representa el nuevo estadístico de orden uno de las  $(n-1)$  componentes restantes, cada una  $\text{Exp}(\theta)$ .
- las  $(n-2)$  componentes restantes duran un tiempo adicional de  $Y_3 - Y_2$  que representa el nuevo estadístico de orden uno de las  $(n-2)$  componentes restantes, cada una  $\text{Exp}(\theta)$ .
- y así sucesivamente.

Por lo tanto, otra expresión para  $T_r$  es

$$T_r = nY_1 + (n-1)(Y_2 - Y_1) + (n-2)(Y_3 - Y_2) + \cdots + [n - (r-1)](Y_r - Y_{r-1})$$

donde se están sumando los mínimos tiempos cada vez. Observemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_1) &= \frac{\theta}{n}, \quad Y_1 = \text{est. de orden 1 de las } n \text{ comp. cada una } \exp(\theta) \\
\mathbb{E}(Y_2 - Y_1) &= \frac{\theta}{(n-1)}, \quad Y_2 - Y_1 = \text{est. orden 1 de las } n-1 \text{ comp. restantes} \\
\mathbb{E}(Y_3 - Y_2) &= \frac{\theta}{(n-2)}, \quad Y_3 - Y_2 = \text{est. orden 1 de las } n-2 \text{ comp. restantes} \\
&\vdots \\
\mathbb{E}(Y_r - Y_{r-1}) &= \frac{\theta}{(n - (r-1))},
\end{aligned}$$

Con lo anterior, podemos calcular la esperanza de  $T_r$  de manera más sencilla

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_r) &= \mathbb{E}[nY_1 + (n-1)(Y_2 - Y_1) + (n-2)(Y_3 - Y_2) + \cdots + [n - (r-1)](Y_r - Y_{r-1})] \\
&= n\frac{\theta}{n} + (n-1)\frac{\theta}{(n-1)} + \cdots + [n - (r-1)]\frac{\theta}{[n - (r-1)]} \\
&= \theta + \theta + \cdots + \theta = r\theta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}(T_r) = r\theta,$$

de donde un estimador insesgado utilizando este procedimiento sería

$$\hat{\theta} = \frac{T_r}{r}. \quad \blacksquare.$$