Inferencia Estadística

Tarea 4

24/09/2020

Escriba de manera concisa y clara sus resultados, justificando los pasos necesarios. Serán descontados puntos de los ejercicios mal escritos y que contenga ecuaciones sin una estructura gramatical adecuada. Las conclusiones deben escribirse en el contexto del problema. Todos los programas y simulaciones tienen que realizarse en `R`.

1. Sea X una v.a. continua cuya función de distribución F es estrictamente creciente. El Teorema de la Transformación Integral nos dice que $Y = F(X)$ tiene distribución Uniforme$(0,1)$.

   a) Sea $U \sim$Uniforme$(0,1)$ y $X' = F^{-1}(U)$. Muestre que $X' \sim F$.

   b) Escriba un programa que tome variables aleatorias Uniforme$(0,1)$ y que las utilice para generar variables aleatorias de una distribución Exp(β). El problema debe recibir el tamaño de la muestra que se desea generar, denotado por m, y al parámetro β. Deberá regresar una muestra de tamaño m.

   c) Simule $m = 100$ muestras Exp$(1/2)$. Con esta muestra contruya un QQ plot exponencial y una gráfica que compare el histograma de la muestra con la función de densidad de Exp$(1/2)$. Comente.

2. Sea A el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y suponga que X, Y tiene una densidad conjunta uniforme en el triángulo. (a) Halle las distribuciones marginales de X, Y y $Z = X + Y$. (b) ¿Son X y Y independientes? ¿Por qué?

3. Halle la densidad condicional de $X|Y = y$ si (X,Y) tiene densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{y}\exp\left(-\frac{x}{y} - y\right) \quad \text{para } x, y > 0.$$

   También calcule $E(X|Y = y)$.

4. Sea $Y \sim$Exp(θ) y dado $Y = y$, X tiene distribución de Poisson de media y. Encuentre la ley de X.

5. Sea (X,Y) un vector aleatorio con la siguiente densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} \pi^{-1} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ \\ 0 & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}.$$

   Demuestre que X y Y no están correlacionadas, pero que no son independientes.

6. Sean X_1 y X_2 v.a.i. que tienen una distribución normal estándar. Obtenga la densidad conjunta de (Y_1, Y_2), donde $Y_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ y $Y_2 = X_1/X_2$. ¿Son Y_1 y Y_2 independientes?

7. Ejercicio 6 de la tarea anterior.
8. Ejercicio 3 del examen.

Honours problems

1. Sea X una v.a. continua con segundo momento finito. Demuestra que la mediana $M(X)$ de X satisface

$$|M(X) - E(X)| \leq (\mathrm{Var}(X))^{1/2}.$$

   Hint: Use los honour problems de la tarea anterior.

Entrega: 06/10/2020.