Definición

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Se dice que A es una matriz particionada o por bloques si se puede escribir como una matriz

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

donde cada una de las entradas A_{ij} es a su vez una matriz de tamaño $m_i \times n_j$ y $\sum_{i=1}^{p} m_i = m$, $\sum_{j=1}^{q} n_j = n$.

Proposición

$$A^t = \begin{pmatrix} A_{11}^t & A_{21}^t & \dots & A_{p1}^t \\ A_{12}^t & A_{22}^t & \dots & A_{p2}^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1q}^t & A_{2q}^t & \dots & A_{pq}^t \end{pmatrix}_{n \times m}$$

Sumar y multiplicar matrices por bloques para que los bloques sean tratados como si fueran elementos requiere condiciones adicionales a las que ya se tienen.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{n \times m}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 3 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}_{n \times m}$$

Sea A una matriz cuadrada de tamaño $m \times n$ y x un vector $n \times 1$. Si A está dada por bloques columna por

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

es decir a_i es un vector columna $m \times 1$ y

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n \end{aligned}$$

Una combinación lineal de matrices es una suma del tipo

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_k A_k$$

donde las A_i son matrices y los α_i números reales.

Ax es una combinación lineal de las columnas de A

Análogamente sea A una matriz cuadrada de tamaño $m \times n$ y y un vector horizontal $1 \times m$. Si A está dada por bloques renglón por

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix},$$

es decir u_i es un vector renglón $1 \times n$ y

$$y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} yA &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \\ &= y_1 u_1 + y_2 u_2 + \ldots + y_m u_m \end{aligned}$$

Luego, yA es una combinación lineal de los renglones de A.

En general, un producto matricial puede escribirse como

$$AB = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 b_1 & u_1 b_2 & \cdots & u_1 b_p \\ u_2 b_1 & u_2 b_2 & \cdots & u_2 b_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

donde A tiene bloques de vectores renglón y B tiene bloques de vectores columna.

Si ahora A tiene bloques de vectores columna y B tiene bloques de vectores renglón, entonces el producto está dado por la suma de matrices dadas por el producto exterior

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum a_i v_i$$

Definición

Sea $A = (a_{ij})$ *una matriz cuadrada de tamaño* n*. La traza de* A *es*

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposición

Sean A*,* B *matrices cuadradas de tamaño* n*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

i) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^t)$

ii) $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha\, \mathrm{tr}(A)$

iii) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

Proposición

Sean $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$ *matrices. Entonces* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$,

Proposición

Sean u, v *vectores* $m \times 1$. *Entonces* $\mathrm{tr}(uv^t) = u^t v = v^t u$.

$$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA)$$

Ejemplo

Sea A *una matriz cuadrada. Encuentre una matriz cuadrada* X *tal que* $AX - XA = I$

Definición

P es una matriz de permutación de tamaño n si se obtiene de permutar las columnas o renglones de la matriz identidad I_n.

Equivalentemente:

Definición

Una matriz de permutación de tamaño n es una matriz cuadrada tal que cada columna cada renglón contiene exactamente un 1 *y* 0 *en los demás lados.*

Si e_i es el vector canónico y

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

por bloques renglón y columna respectivamente y P es una matriz de permutación, entonces

$$PA = \begin{pmatrix} e_{i1}^t \\ e_{i2}^t \\ \vdots \\ e_{im}^t \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e_{i1}^t A \\ e_{i2}^t A \\ \vdots \\ e_{im}^t A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{im} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AQ = A\begin{pmatrix} e_{j1} & e_{j2} & \cdots & e_{jn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Ae_{j1} & Ae_{j2} & \cdots & Ae_{jn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definición

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ *es triangular superior si* $a_{ij} = 0$, $i > j$. *A es triangular inferior si* $a_{ij} = 0$, $j > i$. *A es triangular si es triangular inferior o superior*

Proposición

Sean A, B *matrices cuadradas de tamaño* n.

i) *Si* A *es triangular superior (inferior) entonces* A^t *es triangular inferior(superior).*

ii) *Si* A *y* B *son triangulares superiores (inferiores) entonces* AB *es triangular superior(inferior).*

Definición

Sea A una matriz cuadrada. Si existe un entero positivo k tal que $A^k = 0$, se dice que A es nilpotente.

Proposición

Sean $A_{n\times n}$ una matriz triangular con entradas diagonales cero. Entonces A es nilpotente. De hecho, $A^n = 0$.

Definición

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ *es Hessenberg superior si* $a_{ij} = 0$, $i > j + 1$. A *es Hessenberg inferior si* $a_{ij} = 0$, $j > i + 1$. A *es Hessenberg si es Hessenberg inferior o superior.*

Si H es Hessenberg superior (inferior) entonces A^t es Hessenberg inferior(superior).

Si H es Hessenberg y simétrica, se le llama tridiagonal.

Se pueden definir bidiagobal superior e inferior a partir de una tridiagonal.

Una matriz diagonal es Hessenberg.

El producto de matrices Hessenberg no necesariamente resulta del mismo tipo.

Proposición

Sean H una matriz Hessenberg superior (inferior) triangular superior (inferior). Entonces TH y HT son ambas Hessenberg superiores (inferiores).

Una matriz es sparse, si la mayoría de sus entradas son cero. Es densa si la mayoría de sus entradas es distinta de cero.

Definición

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ *es una matriz banda si existen enteros* p_1*,* $p_2 \geq 0$ *tales que* $a_{ij} = 0$ *cuando* $i > j + p_1$ *o* $j > i + p_2$*.* p_1 *y* p_2 *se llaman el ancho de banda inferior y superior respectivamente; El ancho de banda de la matriz es* $p_1 + p_2 + 1$

Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones y n variables es un sistema del tipo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Los a_{ij} son escalares fijos llamados coeficientes y las x_i son las variables. Si $m = n$ el sistema se llama cuadrado y rectangular de otra manera.

Una solución es una n-eada $(s_1, \cdots, s_n)$ que hace que las ecuaciones sean ciertas al mismo tiempo.

Representación matricial de un sistema lineal

Todo sistema se puede representar por una ecuación matricial del tipo $Ax = b$.

La matriz de coeficientes del sistema A está dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

En representación matricial, una solución es un vector

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$

que satisface

$$As = b$$

Un sistema $Ax = b$ puede tener

i) Solución única
ii) Un número infinito de soluciones
iii) No solución

Proposición

Si un sistema $Ax = b$ tiene más de una solución entonces tiene un número infinito de soluciones.

Definición

Un sistema $Ax = b$ es consistente si tiene al menos una solución e inconsistente si no.

Definición

Dada una matriz, una operación elemental por renglones es una de las siguientes:

i) *Tipo I: intercambiar dos renglones de la matriz*
ii) *Tipo II: multiplicar un renglón por un escalar distinto de cero.*
iii) *Tipo III: reemplazar un renglón por la suma de ese renglón con el múltiplo escalar otro renglón*

Proposición

Si se aplica las mismas operaciones por renglón a A y b en el sistema $Ax = b$, la solución del sistema sigue siendo la misma.

La matriz de coeficientes aumentada del sistema está dada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}_{m\times n}$$

De esta forma aplicar operaciones por renglones a la matriz aumentada $(A|b)$ es equivalente a aplicarlas en ambos lados de la ecuación $Ax = b$.

Sea U la matriz dada por bloques renglón o columna

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Una matriz U tiene forma escalonada por renglones si se cumple:

- Si el primer elemento no cero en un renglón u_i está en la posición j, entonces todas las entradas abajo de la posición i en las columnas $v_1, \ldots, v_j$ son cero.
- Si el renglón u_i es cero, entonces todos los renglones abajo de él son vectores de ceros.

Los pivotes son las primeras entradas no cero en cada renglón.

El método de Gauss o de eliminación Gaussiana consiste en llevar una matriz aumentada correspondiente a un sistema $Ax = b$ a una forma escalonada por renglones.

En una matriz cuadrada $A_{n\times n}$, correspondiente al sistema $Ax = b$, obtenemos un nuevo sistema $Ux = b'$ con matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & b'_1 \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} & b'_n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Las soluciones del sistema cuadrado están dadas entonces por: 1. $x_n = b'_n/u_{nn}$.

2. Recursivamente:

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right)$$

para $i = n, n-1, \ldots, 2, 1$.

Si el sistema es rectangular $n > m$, el sistema reducido tendrá mas incógnitas que ecuaciones por lo que se deben seleccionar algunas variables que se llamaran básicas y las restantes serán libres. Usualmente se escogen los pivotes como básicas y las restantes como libres. Una vez seleccionadas se hace sustitución hacia atrás y se encuentra una solución general.

Por medio de eliminación Gaussiana podemos saber si un sistema es inconsistente o no: Un sistema es inconsistente si y solo si al reducirlo se encuentra un renglón (en la matriz aumentada) del tipo $(0 \ldots 0, \alpha)$

Teorema

Sea A una matriz y sean U_1, U_2 dos formas escalonadas por renglones de A distintas (i.e. se emplearon dos sucesiones distintas de operaciones elementales). Entonces el número de pivotes de U_1 y U_2 es el mismo.

De esta manera, no importa que sucesión de operaciones elementales usemos, el número de pivotes permanece constante, y en consecuencia en las mismas posiciones. Por lo tanto el número de pivotes es un invariante de A.

El número de pivotes cuenta el número de variables básicas por lo que estás son siempre el mismo número y similarmente para las libres.

Sea U cualquier matriz en forma reducida por renglones obtenida de A, entonces:

$$\begin{aligned}
\text{Número de pivotes de } A &= \text{Número de pivotes de } U \\
&= \text{Número de renglones no cero de } U \\
&= \text{Número de columnas básicas de } U
\end{aligned}$$

Definición

El rango de A es el número de pivotes de A.

Una matriz E tiene forma escalonada reducida por renglones si se cumple:

- E Está en forma escalonada por renglones
- El primer elemento no cero en cada renglón es 1.
- Todas las entradas arriba de cada pivote son 0.

El método de Gauss-Jordan o de eliminación Gauss-Jordan consiste en llevar una matriz aumentada correspondiente a un sistema $Ax = b$ a una forma escalonada por renglones.

Las columnas básicas de $E_{m \times n}$ son r vectores canónicos en R^m.

Siempre podemos encontrar una matriz de permutación P tal que

$$EP = \begin{pmatrix} I_r & J \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición

Una matriz elemental de orden $n \times n$ es una matriz cuadrada del tipo $I_n + uv^t$ donde u, v son vectores $n \times 1$ tales que $v^t u \neq -1$.

Definición

i) *Una matriz elemental de tipo I es una del tipo*

$$E_{ij} = I - (e_j - e_i)(e_j - e_i)^t$$

ii) *Una matriz elemental de tipo II es una del tipo*

$$E_i(\alpha) = I + (\alpha - 1)e_i e_i^t$$

iii) *Una matriz elemental de tipo III es una del tipo*

$$E_{ij}(\beta) = I + \beta e_j e_i^t$$

con $i \neq j$

Proposición

Sea A una matriz $m \times n$. Hacer una operación elemental por renglones en A es lo mismo que multiplicar A por la izquierda por la correspondiente matriz elemental.

Definición

Dada una matriz, una operación elemental por columnas es una de las siguientes:

i) *Tipo I: intercambiar dos columnas de la matriz*
ii) *Tipo II: multiplicar una columna por un escalar distinto de cero.*
iii) *Tipo III: reemplazar una columna por la suma de ese columna con el múltiplo escalar otra columna*

Proposición

Sea A una matriz $m \times n$. Hacer una operación elemental por columnas en A es lo mismo que multiplicar A por la derecha por la correspondiente matriz elemental.

Proposición

Sea E una matriz elemental que multiplicada con A por la izquierda de A ejecuta una operación elemental por renglón. Entonces E^t es la matriz tal que AE^t ejecuta la operación correspondiente por columna.

Tipo I por columna: E_{ij}^t
Tipo II por columna: $E_i(\alpha)^t$
Tipo II por columna: $E_{ij}(\beta)^t$

Sistemas lineales homogéneos

Definición

Un sistema lineal $Ax = 0$ *se llama un sistema lineal homogéneo*

Siempre tiene la solución trivial $x = 0$ por lo que es consistente.

Dados v_1, v_2, ..., v_n vectores, una combinación lineal es una expresión del tipo

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

donde los α_i son escalares.

La solución general de un sistema homogéneo es una combinación lineal de las soluciones particulares que se obtienen al hacer una variable libre igual a 1 y 0 en las demás, tomando las variables libres como coeficientes.

Proposición

Si A es $m \times n$ y $n > m$, entonces $Ax = 0$ tiene soluciones no triviales.

En general, si A es $m \times n$ la solución general del sistema homogéno es

$$x = x_{f_1} h_1 + x_{f_2} h_2 + \ldots + x_{f_{n-r}} h_{n-r}$$

Para el sistema $Ax = b$, la solución general es del tipo

$$x = x_p + x_h$$

donde x_h es la solución general del sistema homogéneo asociado y x_p es una solución particular que se obtiene haciendo todas las variables libres igual a cero.

Definición

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Se dice que A es invertible o no singular si existe una matriz B tal que $AB = I_n$, $BA = I_n$. B es una inversa de A.

Si A no es invertible se le llama singular.

Proposición

Si A es invertible, la matriz inversa es única.

La inversa de A se denota por A^{-1}.

Si una matriz es invertible, entonces la solución del sistema $Ax = b$ esta dada por $x = A^{-1}b$.

El sistema se llama sistema no singular cuando A es no singular.

Proposición

Sen A, B matrices $n \times n$. Entonces $AB = I$ si y solo si $BA = I$.

Si A es una matriz $m \times n$, una inversa izquierda de A es una matriz C, $n \times m$ tal que $CA = I_n$. Una inversa derecha es una matriz B, $m \times n$ tal que $AB = I_m$.

Una matriz rectangular puede tener inversa por un lado, pero no del otro y no tienen por que coincidir.

Proposición

Sean A una matriz $n \times n$. Entonces

i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

iii) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Para encontrar A^{-1}, tenemos la ecuación $AX = I$ que puede verse como un conjunto de sistemas de ecuaciones $Ax_i = e_i$ donde x_i son las columnas de X.

Luego con el método de Gauss, si es posible resolver cada uno de estos sistemas con solución x_i, encontramos la inversa de A dada por $X = (x_1 \ldots x_n)$. Usando Gauss Jordan

$$L(A|I) = (LA|LI) = (I|L)$$

implica que $L = A^{-1}$

Proposición

A es invertible si y solo si el sistema homogéneo asociado solo tiene la solución $x = 0$.

Proposición

Sea $A = I_n + uv^t$ una matriz elemental. Entonces A es invertible con inversa dada por

$$A^{-1} = I - \frac{uv^t}{1 + v^t u}$$

Más áun, si E es elemental del tipo I, II ó III, entonces E^{-1} es elemental del mismo tipo que E.

Proposición

Sea $A \neq 0$ *una matriz* $m \times n$*. Entonces:*

i) *Existe una matriz invertible* G *tal que* $GA = U$*, donde* U *está en forma escalonada por renglones.*

ii) *Existe una matriz invertible* H *tal que* $HA = E$*, donde* E *está en forma escalonada reducida por renglones.*

Proposición

A *es no singular si y solo si el el producto de matrices elementales de tipo I, II, ó III.*

Proposition

Si $A_{n\times n}$ *es triangular inferior (superior) con todas sus entradas diagonales distintas de cero, entonces es invertible y su inversa es triangular inferior (superior). Más aún, cada elemento de la diagonal de la matriz inversa es el recíproco del elemento correspondiente de* A*.*

Proposition

El producto de dos matrices de permutación es una matriz de permutación.

Proposition

Una matriz de permutación es invertible y su inversa es su transpuesta.

Definición

Sea A una matriz $n \times n$. Se dice que A tiene una descomposición LU si se puede factorizar como $A = LU$ donde

i) $L = (l_{ij})$ *es una matriz triangular inferior tal que* $l_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$

ii) $U = (u_{ij})$ *es una matriz triangular superior tal que* $u_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$

L es el factor inferior y U es el factor superior.

Una matriz triangular inferior elemental está definida por

$$T_k = I_n - \tau_k e_k^t$$

donde

$$\tau_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tau_{k+1,k} \\ \vdots \\ \tau_{n,k} \end{pmatrix}$$

$$T_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\tau_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\tau_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición

Una matriz triangular inferior elemental T_k es invertible, su inversa también es una matriz triangular inferior elemental y está dada por

$$T_k^{-1} = I + \tau_k e_k^t$$

El efecto de multiplicar una matriz triangular inferior elemental por otra matriz es eliminar las entradas abajo del pivote k.

$$T_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \tau_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tau_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(k-1)} = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & a_{1,k}^{(k-1)} & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & a_{2,k}^{(k-1)} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k,k}^{(k-1)} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k+1,k}^{(k-1)} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,k}^{(k-1)} & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

$a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$

$$T_k A^{(k-1)} = (I - \tau_k e_k^t) A^{(k-1)} = A^{(k-1)} - \tau_k e_k^t A^{(k-1)}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & \cdots & a_{1,k}^{(k-1)} & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & a_{2,k}^{(k-1)} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k,k}^{(k-1)} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

donde

$$\tau_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{k+1,k}^{(k-1)} / a_{k,k}^{(k-1)} \\ \vdots \\ a_{n,k}^{(k-1)} / a_{k,k}^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

Observemos que T_k no afecta las primeras $k-1$ columnas de $A^{(k-1)}$.

Si no se requieren intercambios de renglones se pueden hacer $n-1$ multiplicaciones por la izquierda de $A_{n\times n}$ por matrices triangulares inferiores elementales para llevar a A a una forma triangular superior, es decir:

$$T_{n-1}T_n \dots T_2 T_1 A = U$$

Luego

$$A = T_1^{-1} \dots T_{n-1}^{-1} U$$

$$
\begin{aligned}
T_1^{-1} \dots T_{n-1}^{-1} &= (I + \tau_1 e_1^t) \dots (I + \tau_{n-1} e_{n-1}^t) \\
&= I + \tau_1 e_1^t + \dots + \tau_{n-1} e_{n-1}^t
\end{aligned}
$$

usando que $e_j^t \tau_k = 0$ cuando $j < k$. Además

$$
\tau_k e_k^t = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & 0 & \cdots & \tau_{k+1,k} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \tau_{n,k} & * & \cdots & *
\end{pmatrix}
$$

Por lo tanto

$$I + \tau_1 e_1^t + \ldots + \tau_{n-1} e_{n-1}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$A = T_1^{-1} \ldots T_{n-1}^{-1} U = (I + \tau_1 e_1^t + \ldots + \tau_{n-1} e_{n-1}^t) U = LU$$

En resumen, hemos demostrado:

Proposición

Si A es una matriz y U es la matriz que se obtiene usando eliminación Gaussiana y no se necesitaron intercambios de renglones (i.e. no aparecieron pivotes cero) entonces A tiene una descomposición LU, dada por $A = LU$ donde L se obtiene con el algoritmo anterior.

Los elementos de la diagonal de U son los pivotes de A.

Para resolver el sistema lineal $Ax = b$ cuando $A = LU$ se resuelven dos sistemas triangulares $Ly = b$ y $Ux = y$.

Primero se usa sustitución hacia adelante en $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$y_1 = b_1$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_i$$

$i = 2, 3, \ldots, n$.

Luego se resuelve el sistema $Ux = y$ usando sustitución hacia atras:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$x_n = y_n / u_{nn}$$

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_i$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right)$$

$i = n-1, n-2, \ldots, 1.$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 0 \\ -6 & -10 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una submatriz de una matriz A es una matriz que se obtiene al eliminar renglones y columnas de A.

Si A es de tamaño $m \times n$, $I_r \subset \{1, \ldots, m\}$, $I_c \subset \{1, \ldots, n\}$, se denota por $A_{Ir,\cdot}$ a la matriz que se forma al dejar solo los renglones indexados por I_r y $A_{\cdot,Ic}$ a la matriz que se forma al dejar solo las columnas indexadas por I_c.

Si A es $n \times n$, una una submatriz principal si se obtiene de A eliminando los mismos renglones y columnas, i.e. $I_c = I_r$. Una submatriz principal lider se obtiene cuando es principal y $I_c = I_r = \{1, 2, \cdots, k\}$, $k < n$.

Proposición

Sea A una matriz no singular. A tiene una factorización LU si y solo si todas sus submatrices principales líderes son no singulares.

Proposición

Sea A una matriz no singular. A tiene una factorización LU si y solo si todas sus submatrices principales líderes son no singulares.

Proposición

Si A una matriz no singular y $A = LU$ es una factorización LU de A, entonces L y U son únicas.

No todas la matrices no singulares tienen una descomposición LU, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}$$

Sin embargo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, podemos multiplicar una matriz A por una matriz de permutación P de tal manera que $PA = LU$.

En general esto es cierto, siempre podemos encontrar una matriz de permutación P tal que PA tiene una descomposición LU.

De manera algorítmica, supongamos que A es $n \times n$ no singular y después de k pasos se requiere un intercambio de renglones, los cuales podemos suponer son $k+i$ y $k+j$. Si E es una matriz elemental del tipo I que cambia esos renglones, tenemos:

$$\begin{aligned} ET_k \cdots T_1 A &= ET_k E^2 T_{k-1} E^2 \cdots E^2 T_1 E^2 A \\ &= (ET_k E)(ET_{k-1}E) \cdots (ET_1 E) EA \end{aligned}$$

Lema

$\tilde{T}_\ell = ET_\ell E$ *es triangular inferior elemental.*

Continuando este proceso

$$\tilde{T}_{n-1} \cdots \tilde{T}_1 PA = U$$

$$PA = LU$$

Proposición

Si A es no singular, entonces existe una matriz de permutación P tal que PA tiene una descomposición LU

$$PA = LU$$

donde L es triangular inferior con unos en la diagonal y U es triangular superior.

Proposición

Sa A no singular de tamaño $n \times n$. Entonces $PA = LDU$ donde P es una matriz de permutación $n \times n$, L es $n \times n$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, D es $n \times n$ diagonal con elementos diagonales no cero y U es $n \times n$ es una matriz triangular superior con unos en la diagonal.

Los elementos de D son distintos de cero pues son los pivotes de A.

L y U son únicas.

Lema

Sea A una matriz simétrica de tamaño $n \times n$ tal que $A = LDU$ donde L es triangular inferior con unos en la diagonal, U es triangular superior con con unos en la diagonal, D es diagonal con elementos diagonales no cero. Entonces $U = L^t$ y $A = LDL^t$.

Proposición

Sea A una matriz simétrica de tamaño $n \times n$ que tiene una descomposición LU con pivotes estrictamente positivos. Entonces existe una matriz triangular inferior T tal que $A = TT^t$ y los elementos diagonales de T son positivos.

Definición

Sea A una matriz simétrica de tamaño $n \times n$. Se dice que A es positiva definida si todos sus pivotes son estrictamente positivos.

La descomposición $A = TT^t$ de una matriz positiva definida se llama la descomposición de Cholesky.

Ejemplos.

1. Inversa de matrices particionadas.
2. Descomposición LDU de matrices particionadas