**Maestría en Computo Estadístico**
**Álgebra Matricial**
**Tarea 1**
26 de agosto de 2020
*Enrique Santibáñez Cortés*
Repositorio de Git: Tarea 1, IE.

1. Si $A$ es una matriz $m \times n$ dada por bloques de vectores columna como
$$(a_1\ a_2\ \cdots a_n)$$
y $B$ es una matriz $n \times p$ dada por bloques de vectores renglón como
$$\begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$
Demuestre que
$$AB = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

2. Sean $A$ y $B$ matrices cuadradas del mismo orden. Demuestre que $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ si y solo si $AB = BA$.

3. Sean $A$ y $B$ matrices $n \times n$, $A \neq 0,\ B \neq 0$, tales que $AB = BA$. Demuestre que $A^p B^p = B^p A^p$ para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$.

4. Se dice que una matriz cuadrada $A$ es antisimétrica si $A = -A^t$. Demuestre que $A - A^t$ es antisimétrica.

5. Demuestre que dada cualquier matriz cuadrada $A$, esta se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

6. Se dice que una matriz cuadrada $P$ es idempotente si $P^2 = P$. Si
$$A = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix}$$
y si $P$ es idempotente, encuentre $A^{500}$.

**RESPUESTA**
$$A^2 = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2+0 & IP+P^2 \\ 0+0 & 0+P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2+0 & IP+2P^2 \\ 0+0 & 0+P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 3P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$
Por lo tanto
$$A^{500} = \begin{pmatrix} I & 500P \\ 0 & P \end{pmatrix} \blacksquare.$$

7. Sean $A$ y $B$ matrices de tamaño $m \times n$. Demuestre que tr$(AB^t)$ =tr$(A^tB)$.

8. Encuentre matrices $A, B$ y $C$ tales que tr$(ABC) \neq$tr$(BAC)$.

9. Sea $L$ una mtriz triangular inferior $n \times n$. Demuestre que $L = L_1 L_2 \cdots L_n$ donde $L_i$ es la matriz $n \times n$ que se obtiene reemplazando la $i-$ésima columna de $I_n$ por la $i-$ésima columna de $L$. Demuestre un resultado análogo para matrices triangulares superiores.

10. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño $n$ tal que $a_{ij} = 0$ para $i = 1, \cdots, n$. Demuestre que para $i = 1, \cdots, n$ y $j = 1, \cdots, \text{mín}(n, i + p - 1)$ se cumple que $b_{ij} = 0$ donde $A^p = (b_{ij})$ y $p$ es un entero positivo.