Maestría en Computo Estadístico
Álgebra Matricial
Tarea 5
27 de septiembre de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: Tarea 5, AM.

Todos los cálculos deben ser a mano.

1. Encuentre la descomposición LDU de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

RESPUESTA
Recordemos la definición de la descomposición LDU.

> **Definición: 1** *(Definición vista en clase) Sea A no singular de tamaño $n \times n$. Entonces $A = LDU$ donde L es $n \times n$ es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, D es $n \times n$ es una matriz diagonal con elementos diagonales no cero y U es $n \times n$ es una matriz triangular superior con unos en la diagonal.*

Por la definición 1, primero busquemos la matriz escalonada para ello ocupemos eliminicación gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} \underset{R3 \to R_3 - 2R_1}{\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces, de la matriz resultante podemos decir que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es decir, para encontrar U veamos que si multiplicamos las matrices tenemos que:

$$\begin{aligned} 2 &= a, \\ 4 &= b, \\ 2 = 2c \Rightarrow 1 &= c. \end{aligned}$$

Recordemos que si $E_1, E_2, \cdots, E_n$ son las matrices elementales para llevar a la matriz A a su forma escalonada, entonces $L = (E_n E_1 \cdots E_1^{-1}) = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_n^{-1}$. Para este problema las matrices elementales son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la descomposición LDU de la matriz original es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare.$$

Nota, para las inversas de las matrices elementales ocupamos el siguiente teorema:

Teorema: 1 *Sea $E_{ij}(\alpha)$ es la matriz elemental que multiplica al renglón j por α y lo suma al renglón i, entonces la matriz inversa de $E_{ij}(\alpha)$ es $E_{ij}(-\alpha)$.*

2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observe que A es no singular y siempre tiene descomposición PLU. Pruebe que, sin embargo, A no tiene descomposición LU. (Sugerencia: no use eliminación, use un teorema.)

RESPUESTA

Ocupemos el siguiente teorema (demostrado en clase)

Teorema: 2 *Sea A una matriz no singular. A tiene una factorización LU si y solo si todas sus submatrices principales líderes son no singulares.*

Una submatriz principal líder se obtiene cuando es principal y $I_c = I_r = \{1, 2 \cdots, k\}, k < n$.

Entonces si observamos la matriz principal líder $A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, podemos observar que es singular debido a que el renglón 2 es múltiplo del renglón 1 (o por que su determinante es cero). Por lo tanto (ocupando el teorema 2), como una matriz singular principal líder es singular, esto implica que A no tiene factorización LU. $\blacksquare$.

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 23 \end{pmatrix}$$

Encuentre la descomposición LDL^t de A. ¿Es A positiva definida? Explique. En tal caso encuentre su descomposición de Cholesky.

RESPUESTA

Recordemos el siguiente lema (demostrado en clase):

> **Lema: 1** *Sea A una matriz simétrica de tamaño $n \times n$ tal que $A = LDU$ donde L es triangular inferior con unos en la diagonal, U es triangular superior con con unos en la diagonal, D es diagonal con elementos diagonales no cero. Entonces $U = L^t$ y $A = LDL^t$.*

Primero reduzcamos la matriz A a su forma escalonada ocupando eliminación gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R3 \to R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Lo anterior implica que la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices elementales que se ocuparon para llegar a la forma escalonada reducida son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veamos que la matriz A es simétrica debido a que $A = A^t$, entonces ocupando el lema 1

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la descomposición LDL^t de A es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como todos los pivotes de A son estrictamente positivos (ver última la matriz de 1) entonces podemos decir que A es positiva definida.

Una matriz diagonal D con entradas positivas en la diagonal, es factorizable como $D = \sqrt{D}\sqrt{D}$, donde $\sqrt{D}$ es una matriz cuya diagonal consiste en la raiz cuadrada de cada elemento de D, así la descomosición de Cholesky tiene una relación con la descomposición LDL^t:

$$A = LDL^t = L(\sqrt{D}\sqrt{D})L^t) = LDL^t = (L\sqrt{D})(\sqrt{D}L^t) = (L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^t = TT^t.$$

Entonces ocupando lo anterior,

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & 3\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la descomposición de Cholesky de A es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & 3\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare.$$

4. Sea A la matriz por bloques

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

con B y E no singulares. Demuestre que A^{-1} es de la forma

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & X \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix}$$

y encuentre X. Luego, si

$$A_1 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & E \end{pmatrix}$$

con B y E no singulares, demuestre que A_1^{-1} es de la forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ Y & E^{-1} \end{pmatrix}$$

y encuentre Y.

RESPUESTA

Sea W, X, Y, Z matrices tal que el producto de la matriz A por la matriz por bloques $\begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$

(llamemosla la matriz A^*) se pueda realizar. Entonces, para que A^* sea la inversa de A se debe cumplir que

$$AA^* = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} BW + CY & BX + CZ \\ 0W + EY & 0X + EZ \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} BW + CY & BX + CZ \\ EY & EZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

De lo anterior podemos ver que como $EY = 0$ y como E es no singular entonces implica que $Y = 0$ (la demostración de lo anterior se anexa al final de este problema). Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior y como que B y E son no singulares

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} BW & BX + CZ \\ 0 & EZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} BW = I \\ EZ = I \\ BX + CZ = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W = B^{-1} \\ Z = E^{-1} \\ X = -B^{-1}CZ \end{cases}$$

Por lo tanto, la inversa de A es de la forma

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & X \\ 0 & E^{-1} \end{pmatrix}, \text{ donde } X = -B^{-1}CE^{-1}.$$

Realizando un razonamiento análogo al anterior, si

$$A_1 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & E \end{pmatrix},$$

y sea W, X, Y, Z matrices tal que el producto de la matriz A_1 por la matriz por bloques $\begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix}$ (llamemosla la matriz A_1^*) se pueda realizar. Entonces, para que A_1^* sea la inversa de A_1 se debe cumplir que

$$AA^* = \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} BW + 0Y & BX + 0Z \\ DW + EY & DX + EZ \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} BW & BX \\ DW + EY & DX + EZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

De lo anterior podemos ver que como $BX = 0$ y como B es no singular entonces implica que $X = 0$ (la demostración de lo anterior se anexa al final de este problema). Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior y como que B y E son no singulares

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} BW & 0 \\ DW + EY & EZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} BW = I \\ EZ = I \\ DW + EY = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W = B^{-1} \\ Z = E^{-1} \\ Y = -E^{-1}DW \end{cases}$$

Por lo tanto, la inversa de A es de la forma

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ Y & E^{-1} \end{pmatrix}, \text{ donde } Y = -E^{-1}DB^{-1}. \quad \blacksquare.$$

Demostración de una parte de la justificación.
Sea A (no singular) y B matrices, si $AB = 0$ entonces $B = 0$. Como A es no singular entonces

$$AB = 0 \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}0 \Rightarrow B = 0. \quad \blacksquare.$$

5. Sea F un matriz fija de 3×2 y sea

$$H = \{A \in M_{2\times 4}(\mathbb{R}) | FA = \mathbf{0}\}.$$

Determine si H es un subespacio de $M_{2\times 4}(\mathbb{R})$.

RESPUESTA
Recordemos la definición de subespacio.

Definición: 2 *(Definición vista en clase) Sea V un espacio vectorial sobre K. $W \subset V$, $W \neq \emptyset$. W es un subespacio de V si*

a) *Si $w_1, w_2 \in W$ entonces $w_1 + w_2 \in W$.*

b) *Si $w \in W,\ \alpha \in K$ entonces $\alpha w \in W$.*

Ahora, si F es la matriz nula de tamaño 3×2 es sencillo ver que $H \neq \emptyset$. Si F no es la matriz nula, sea A la matriz nula 2×4 entonces para cualquier F fija se cumple que $FA = F\mathbf{0} = \mathbf{0}$, y por lo tanto $H \neq \emptyset$. Además por definición del conjunto H, se cumple que $\forall A \in H \Rightarrow A \in M_{2\times4}(R)$, es decir $H \subset M_{2\times4}(R)$. Por último demostremos las condiciones de la definición 2:

- Si $A_1, A_2 \in H$, es decir, se cumple que $FA_1 = \mathbf{0}$ y $FA_2 = \mathbf{0}$. Entonces (ocupando las propiedades básicas de las matrices vistas en clase) $F(A_1 + A_2) = FA_1 + FA_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Y por lo tanto se cumple que $A_1 + A_2 \in H$.
- Si $A \in H, \alpha \in R$, es decir, se cumple que $FA = 0$. Entonces (ocupando las propiedades básicas de las matrices vistas en clase) $F(\alpha A) = \alpha FA = \alpha(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Y por lo tanto se cumple que $\alpha A \in H$.

Por lo tanto, como se cumplen todos los supuestos y condiciones podemos concluir que H es un subespacio de $M_{2\times4}(\mathbb{R})$. $\blacksquare$.

6. Demuestre que en $\mathbb{R}^2$ los únicos subespacio es posibles son $\{\mathbf{0}\}$, las líneas que pasan por el origen y $\mathbb{R}^2$. Enuncie y demuestre un resultado análogo para $\mathbb{R}^3$.

RESPUESTA
En la demostración se utilizará la definición de espacio generado.

Definición: 3 *(Definición vista en clase) Sea V un espacio vectorial y $S \subset V$. El espacio generado por S es el conjunto*

$$\mathit{gen}(S) = \{v \in V | v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, v_i \in S, \alpha_1 \in K\}.$$

Teorema: 3 *(Teorema demostrado en clase) Sea V un espacio vectorial y $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. $\mathit{gen}(S)$ es un subespacio de V.*

Ahora, si F Primero demostremos que $\{\mathbf{0}\}$, las líneas que pasan por el origen y $\mathbb{R}^2$ son subespacios de $\mathbb{R}^2$. Si $W_0 = \{\mathbf{0}\}$ es claro que $W_0 \neq \emptyset$ (por tener un elemento) y que $W_0 \subset \mathbb{R}^2$ (por definición de $\mathbb{R}^2$), y además por solo tener un elemento se cumple ambas condiciones de la definición 2 de subespacio (visto en clase). Ahora si, $W_1 = \{\lambda\mathbf{u} | \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ (o equivalente a gen($\mathbf{u}$)), es decir, la líneas que pasan por el origen, demostremos que W_1 es subespacio de $\mathbb{R}^2$, para ello veamos si $m, n \in W_1$, entonces por definición podemos decir que $m = \lambda_0\mathbf{u}$ y $n = \lambda_1\mathbf{u}$ con $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ y por lo tanto

$$m + n = \lambda_0\mathbf{u} + \lambda_1\mathbf{u} = (\lambda_0 + \lambda_1)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \text{ donde } \lambda = \lambda_0 + \lambda_1.$$

Queda demostrado que $m+n \in W_1$. Ahora sea $m \in W_1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$\alpha m = \alpha(\lambda_0 \mathbf{u}) = (\alpha\lambda_0)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \text{ donde} \lambda = \alpha\lambda_0,$$

por lo que podemos decir que $\alpha m \in W_1$. Entonces como W_1 es cerrado bajo la suma y la multiplicación por un escalar podemos concluir que $W_1 = \{\lambda\mathbf{u} | \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$. Por último, como $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial por definición cumple la cerradura de la suma y la cerradura de la multiplicación escalar, por lo tanto $\mathbb{R}^2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Ya hemos demostrado que que $\{\mathbf{0}\}$, las líneas que pasan por el origen y $\mathbb{R}^2$ son subespacios de $\mathbb{R}^2$. Ahora demostremos que son todos los subespacios posibles de $\mathbb{R}^2$. Para ello supongamos que $\mathcal{W}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ tal que $W_1 \subset \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^2$ y $W_1 \neq \mathcal{W}$, es decir, existe un vector $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v} \neq \lambda\mathbf{u}$. Ocupando la definición de espacio generado 3 tenemos que como $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{W}, \Rightarrow \text{gen}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{z \in \mathcal{W} | z = \lambda\mathbf{u} + \beta\mathbf{v},\ \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$. Con el teorema (3) podemos decir que $\text{gen}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es un subespacio de $\mathcal{W}$, y por definición de subespacio 2 y por como esta definido $\mathcal{W}$ podemos concluir que

$$\text{gen}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \subset \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

Ahora, sea $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ algún vector de $\mathbb{R}^2$, y sea $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, u_i \neq 0$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, v_i \neq 0$. Entonces mostremos que existen $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Cómo sabemos que $\mathbf{v} \neq \lambda\mathbf{u}$ (por definición), es decir, los vectores no son múltiplos y además como $u_i, v_i \neq 0$, por demos decir que la matriz $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ existe su forma escalonada reducida, y esto implica que existan α, β únicos (la justificación es debido a que como tiene su forma escalonada eso implica que el sistema tenga solución y sea único, visto en clase). Entonces, para todo vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ podemos encontrar α, β tal que $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$, esto implica que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x \in \text{gen}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, es decir, $\mathbb{R}^2 \subset \text{gen}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Por lo tanto, si ocupamos el resultado obtenido y el resultado 2 tenemos que

$$\mathbb{R}^2 \subset \text{gen}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \subset \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathcal{W} = \mathbb{R}^2.$$

Por lo tanto, queda demostrado que los únicos subespacios de $\mathbb{R}^2$ son $\{0\}$, la lineas que pasan por el origen y $\mathbb{R}^2$.

Resultado análogo para $\mathbb{R}^3$:
Los únicos subespacios posibles de $\mathbb{R}^3$ son $\{0\}$, la lineas que pasan por el origen, los planos que pasan por el origen y $\mathbb{R}^3$.

7. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ dado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Determine si

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

esta en gen(S), y si

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

esta en gen(S).

RESPUESTA

Ocupando la definición de espacio generado 3, para que el vector $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ este en gen(S) se debe encontrar una combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ tal que sea el vector $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, sea α, β escalares

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Encontremos los escalares α, β que cumple la ecuación (3).

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 2\beta \\ -\alpha - 3\beta \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sumando 2 y 3} \quad \beta = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 4 = -2 \\ -\alpha - 6 = -3 \\ \alpha + 4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -3.$$

Por lo tanto, como encontramos una combinación lineal de los vectores del conjunto S podemos concluir que $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ si esta en gen(S).

Realizamos un razonamiento análogo al anterior para ver si el vector $\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ esta en gen(S), busquemos los vectores α y β tal que

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Para ello,

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 2\beta \\ -\alpha - 3\beta \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sumando 2 y 3} \quad \beta = -9 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 18 = -8 \\ -\alpha + 27 = 5 \\ \alpha - 18 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = 22 \end{matrix} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Como no pudimos encontrar α y β tal que se cumpliera la ecuación (4), es decir, no existe una combinación lineal de los vectores del conjunto S que sea el vector $\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, podemos concluir que $\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ no esta en gen(S). $\blacksquare$.

Nota: Lo anterior igual se puede probar utilizando la definición de dependencia/independecia entre vectores, es decir, si probamos que los vectores de S y un vector u son linealmente independientes podemos decir que u no esta en el gen(S), y si son linealmente dependientes entonces u si esta en gen(S).

8. Sea V un espacio vectorial y $W,\ Z$ subespacios de V. Al definir el espacio $W+Z$ no se hizo distinción en el orden. ¿Por qué no?, es decir, ¿es cierto que $W+Z=Z+W$? Argumente su respuesta. Enuncie y demuestre un resultado similar para cualquier número finito de subespacios.

RESPUESTA
Recordemos la definición de la suma de dos subespacios.

Definición: 4 *(Definición vista en clase) Sea V un espacio vectorial, W_1, W_2 subespacios de V. La suma de W_1 y W_2 es:*

$$W_1 + W_2 = \{v \in V | v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

Como W, Z son subespacios de V y ocupando la definición 2, podemos decir $\forall w \in W \Rightarrow w \in V$ y $\forall z \in Z \Rightarrow z \in V$ debido a que una condición para ser subespacio es que sea un subconjunto. Ahora ocupando lo anterior en la definición 4, tenemos que la suma de $W+Z$ esta definida como

$$\begin{aligned} W + Z = &\{v \in V | v = w + z, w \in W, z \in Z\} \Leftrightarrow \ \text{*ocupando que } w, z \in V. \\ &\{v \in V | v = z + w, w \in W, z \in Z\} = Z + W, \end{aligned}$$

es decir,

$$W + Z = Z + W.$$

La justificación del paso * es que como $w, z \in V$ y como V es un espacio vectorial por definición se cumple que para $\forall v_1, v_1 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ (la cerradura de la suma).

Enunciado para un número finitos de supespacios:
Sea $W_1, W_2, \cdots, W_n$ subespacios de V. Entonces la suma de todos los subespacios $W_1+W_2+\cdots+W_n$

9. Encuentre A tal que $W = \mathcal{C}(A)$, donde

$$W = \left\{ \left(\begin{matrix} r-s \\ 2r+3t \\ r+3s-3t \\ s+t \end{matrix} \right) \middle| r, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

RESPUESTA
Recordemos la definición de espacio columna.

Definición: 5 *El **espacio columna** de una matriz A de $m \times n$, que se denota como $\mathcal{C}(A)$, es el conjunto de todas las combinacioens lineales de las columnas de A. Si $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, entonces*

$$\mathcal{C}(A) = gen(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

Entonces para encontrar A, en primer lugar, escribimos W como un conjunto de combinaciones lineales.

$$W = \left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| r, s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

En segundo lugar, utilizamos los vectores en el conjunto generador como las columnas de A. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. De esta forma, $W = \mathcal{C}(A)$. $\blacksquare$.

10. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 0 \\ 10 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

. Encuentre un vector en $\mathcal{N}$ (A). Encuentre dos vectores distintos (que no sean múltiplos) en $\mathcal{C}(A)$. ¿Se pueden encontrar más vectores en $\mathcal{N}(A)$ y $\mathcal{C}(A)$, respectivamente, a los ya encontrados que no sean combinación lineal de los anteriores?

RESPUESTA

Recordemos la definición de espacio nulo.

Definición: 6 *El* ***espacio nulo*** *de una matriz A de $m \times n$, que se denota como $\mathcal{N}(A)$, es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación homogénea $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, es decir,*

$$\mathcal{N}(A) = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in R^n y A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.\}$$

Entonces, para determinar el $\mathcal{N}(A)$ primero encontremos la solución general $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en términos de variables libres. Para ello reduzcamos la matriz a la forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 0 \\ 10 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R4 \to R_4 - R_1]{R_2 \to R_2 - 10R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -62 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -62 & -2 \\ 0 & 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 56 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R3 \to R_3/64]{R_2 \to R_2/2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -31 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 56 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 56R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -31 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R1 \to R_1 - 6R_3]{R_2 \to R_2 + 31R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la solución general es $x_1 - x_4 = 0,\ x_2 - x_4 = 0, x_3 = 0$, y x_4 libre, o es equivalente a

$$\left\{ x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por lo tanto, un vector que se encuentre en $\mathcal{N}(A)$ es $\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$. En $\mathcal{N}(A)$ no se pueden encontrar más vectores que no sean combinación lineal de este, debido a como esta definido

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ahora encontramos el espacio columna ocupando la definición 5. Tenemos que

$$\mathcal{C}(A) = \operatorname{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ r \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| r, s, t, p \in \mathbb{R} \right\}.$$

Recordemos la definición de linealmente independiente:

Definición: 7 *Sea V un espacio vectorial. Sea $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$. S es linealmente independiente si* 2

Observemos que el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ es linealmente dependiente a los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, debido a que s