Maestría en Computo Estadístico
Álgebra Matricial
Tarea 1
1 de septiembre de 2020
Enrique Santibáñez Cortés
Repositorio de Git: Tarea 1, IE.

1. Si A es una matriz $m \times n$ dada por bloques de vectores columna como

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots a_n)$$

y B es una matriz $n \times p$ dada por bloques de vectores renglón como

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Demuestre que

$$AB = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

RESPUESTA
Como A es una matriz $m \times n$ dada por bloques columnas, como

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots a_n)$$

donde a_i es un vector columna

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo podemos decir que B esta constituida por b_i vectores renglón:

$$v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} & v_{i2} & \cdots & v_{in} \end{pmatrix}.$$

Entonces ocupando lo anterior

$$AB = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \ a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \ = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \blacksquare.$$

2. Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden. Demuestre que $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ si y solo si $AB=BA$.

RESPUESTA

$\Rightarrow$) Si $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ entonces:

$$\begin{aligned} A^2-B^2 &= (A-B)(A+B) \\ &= AA-BA+AB-BB \\ &= A^2-BA+AB-B^2 \\ BA &= AB. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Si $AB=AB$ entonces:

$$(A-B)(A+B)=AA-BA+AB-BB=A^2-B^2.$$

Por lo tanto, queda demostrado que $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ si y solo si $AB=BA$. $\blacksquare$.

3. Sean A y B matrices $n\times n$, $A\neq 0,\ B\neq 0$, tales que $AB=BA$. Demuestre que $A^pB^q=B^qA^p$ para cualesquiera $p,q\in\mathbb{N}$.

RESPUESTA

Multiplicado por A^{p-1} (donde $p\in\mathbb{N}$) por la izquierda a $AB=BA$ tenemos

$$\begin{aligned} A^{p-1}AB &= A^{p-1}BA \\ &= A^{p-2}(AB)A=A^{p-2}(BA)A \\ &= A^{p-3}(AB)A^2=A^{p-3}(BA)A^2 \\ &= \vdots \\ &= (AB)A^{p-1}=(BA)A^{p-1}. \end{aligned}$$

Simplificando de ambos lados, tenemos que $A^pB=BA^p$. Ahora multiplicamos al resultado obtenido por la matriz B^{q-1} (donde $q\in\mathbb{N}$) por la derecha tenemos

$$\begin{aligned} A^pBB^{q-1} &= BA^pB^{q-1} \\ &= BA^{p-1}(AB)B^{q-2}=BA^{p-1}(BA)B^{q-2} \\ &= BA^{p-2}(AB)AB^{q-2}=BA^{p-2}(BA)AB^{q-2} \\ &= BA^{p-3}(AB)A^2B^{q-2}=BA^{p-3}(BA)A^2B^{q-2} \\ &\vdots \\ &= B(AB)A^{p-1}B^{q-2}=B(BA)A^{p-1}B^{q-2} \\ &= B^2A^pB^{q-2} \\ &= B^2A^{p-1}(AB)B^{q-3}=B^2A^{p-1}(BA)B^{q-3} \\ &= B^2A^{p-2}(AB)AB^{q-3}=B^2A^{p-2}(BA)AB^{q-3} \\ &= B^2A^{p-3}(AB)A^2B^{q-3}=B^2A^{p-3}(BA)A^2B^{q-3} \\ &\vdots \\ &= B^2(AB)A^{p-1}B^{q-3}=B^2(BA)A^{p-1}B^{q-3} \\ &= B^3A^pB^{q-3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\vdots \\
= &\quad B^{q-1}A^{p-1}(AB) = B^{q-1}A^{p-1}(BA) \\
= &\quad B^{q-1}A^{p-2}(AB)A = B^{q-1}A^{p-2}(BA)A \\
= &\quad B^{q-1}A^{p-3}(AB)A^2 = B^{q-1}A^{p-3}(BA)A^2 \\
&\vdots \\
= &\quad B^{q-1}(AB)A^{p-1} = B^{q-1}(BA)A^{p-1} \\
= &\quad B^qA^p.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que si $AB = BA$ y para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$ se cumple que $A^pB^q = B^qA^p$ $\blacksquare$.

4. Se dice que una matriz cuadrada A es antisimétrica si $A = -A^t$. Demuestre que $A - A^t$ es antisimétrica.

   RESPUESTA
   Sea $B = A - A^t$, entonces:
   $$B^t = (A - A^t)^t = A^t - A.$$
   y
   $$-B^t = -(A^t - A) = A - A^t.$$
   Como $B = -B^t$ y como $B = A - A^t$ (por definición), podemos concluir que $A - A^t$ es antisimétrica. $\blacksquare$.

5. Demuestre que dada cualquier matriz cuadrada A, esta se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

   RESPUESTA
   Demostremos que sea A una matriz cuadrada entonces $A + A^t$ es simétrica. Sea $B = A + A^t$ entonces:
   $$B^t = (A + A^t)^t = A^t + A = B.$$
   Como $B = B^t$ y como $B = A + A^t$, podemos concluir que $A + A^t$ es simétrica.

   Ahora,
   $$\begin{aligned}
   A &= \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}A \\
   &= \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}A^t + \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}A^t \\
   &= \tfrac{1}{2}(A + A^t) + \tfrac{1}{2}(A - A^t).
   \end{aligned}$$
   Y como ya se demostró que $A + A^t$ es simétrica y $A - A^t$ es antisimetrica para cualquier matriz cuadrada A y además como se conoce que si una matriz simétrica(antisimetrica) se multiplica por un escalar es igual a otra matriz simétrica(antisimetrica), entonces podemos concluir que dada cualquier matriz cuadrada A se puede escribir como suma de una matriz simétrica y una matriz antisimetrica. $\blacksquare$.

6. Se dice que una matriz cuadrada P es idempotente si $P^2 = P$. Si
   $$A = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix}$$
   y si P es idempotente, encuentre A^{500}.

RESPUESTA
Encontremos una formula para encontrar a A^n. Primero veamos que pasa cuando $n = 2, 3$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + 0 & IP + P^2 \\ 0 + 0 & 0 + P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + 0 & IP + 2P^2 \\ 0 + 0 & 0 + P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 3P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

De lo anterior y considerando $n \in \mathbb{N}$ podemos suponer que se cumple que :

$$A^n = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Demostremos lo anterior de forma inductiva:
Paso 1. Mostrar que se cumple para $n = 2, 3$ o para algún n. Por construcción se cumple este paso.
Paso 2. Suponer que se cumple para n.
Paso 3. Demostrar que se cumple para $n + 1$. Considerando el paso 2, tenemos que:

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + 0 & IP + nP^2 \\ 0 + 0 & 0 + P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & (n+1)P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Queda demostrado que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$A^n = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, utilizando la formula encontrada podemos concluir que

$$A^{500} = \begin{pmatrix} I & 500P \\ 0 & P \end{pmatrix} \quad \blacksquare.$$

7. Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$. Demuestre que tr(AB^t) =tr(A^tB).

   RESPUESTA
   Sea $A_{m\times n}, B_{n\times m}$ matrices. Entonces se cumple que (*se demostraron en clase*):

   - $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^t)$.
   - $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

   Ocupando las dos propiedades de la traza anteriores tenemos que:

   $$\text{tr}(AB^t) = \text{tr}((AB^t)^t) = \text{tr}(BA^t) = \text{tr}(A^tB). \quad \blacksquare.$$

8. Encuentre matrices A, B y C tales que tr$(ABC) \neq$tr(BAC).

   RESPUESTA
   Por convicción definamos a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y ahora sea $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.
   Entonces

   $$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{pmatrix}.$$

Observemos que la primera multiplicación representa a un cambio de renglones y la segunda a un cambio de columnas. Ahora multipliquemos de lado izquierdo lo anterior por la matriz C pero solo concentrarnos en los resultados de la diagonal.

$$ABC = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & \gamma_1 \\ \gamma_2 & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \end{pmatrix},$$

$$BAC = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} & \gamma_3 \\ \gamma_4 & b_{22}c_{12} + b_{21}c_{22} \end{pmatrix},$$

donde γ_i no son relevantes para este problema. Por lo que la traza de esos producto de matrices es:

$$\mathrm{tr}(ABC) = b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \;\text{ y }\; \mathrm{tr}(BAC) = b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} + b_{22}c_{12} + b_{21}c_{22}.$$

De lo anterior podemos observar que si $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(BAC)$,

$$\begin{gathered} b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \neq b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} + b_{22}c_{12} + b_{21}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} - b_{12}c_{11} - b_{11}c_{21} - b_{22}c_{12} - b_{21}c_{22} \neq 0 \\ c_{11}(b_{21} - b_{12}) + c_{21}(b_{22} - b_{11}) + c_{12}(b_{11} - b_{22}) + c_{22}(b_{12} - b_{21}) \neq 0 \\ (b_{21} - b_{12})(c_{11} - c_{22}) + (b_{22} - b_{11})(c_{21} - c_{12}) \neq 0. \end{gathered}$$

Entonces de lo anterior podemos encontrar un conjunto de elementos de las matrices B y C:

$$\begin{matrix} c_{11} > c_{22} & , & b_{21} > b_{12} \\ c_{21} > c_{12} & , & b_{22} > b_{11} \end{matrix}$$

tal que $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(BAC)$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Entonces una tripleta de matrices que cumple que $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(BAC)$, son: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculemos la trazas para mostrar que efectivamente se cumple.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculemos la multiplicación con la matriz C:

$$ABC = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 + 15 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$BAC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + 6 & \gamma_3 \\ \gamma_4 & 10 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & \gamma_3 \\ \gamma_4 & 14 \end{pmatrix},$$

donde γ_i no son relevantes para este problema. Por lo que la traza de esos producto de matrices es:

$$\mathrm{tr}(ABC) = 29 + 7 = 36 \;\text{ y }\; \mathrm{tr}(BAC) = 18 + 14 = 32.$$

Por lo que se cumple que $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(BAC)$ para las matrices propuestas. $\blacksquare$.

9. Sea L una matriz triangular inferior $n\times n$. Demuestre que $L = L_1L_2\cdots L_n$ donde L_i es la matriz $n\times n$ que se obtiene reemplazando la $i-$ésima columna de I_n por la $i-$ésima columna de L. Demuestre un resultado análogo para matrices triangulares superiores.

RESPUESTA
Sea L la matriz triangular inferir $n\times n$:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Entonces L_i están definidas como:

$$L_1 = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},\ L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \cdots, L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Considerando la siguiente partición por bloques de L_1 y L_2

$$L_1 = \left(\begin{array}{c|cccc} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} N_1 & \mathbf{0} \\ M_1 & I_{n-1} \end{pmatrix} \text{ y } L_2 = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

Entonces la multiplicación de L_1 y L_2 es:

$$L_1L_2 = \begin{pmatrix} N_1 & \mathbf{0} \\ M_1 & I_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1I_1 & N_1\mathbf{0} + \mathbf{0}A_{n-1} \\ M_1I_1 & M_2\mathbf{0} + I_{n-1}A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & \mathbf{0} \\ M_1 & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora considerando la partición por bloques de L_1L_2 y L_3

$$L_1L_2 = \left(\begin{array}{cc|ccc} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} N_2 & \mathbf{0} \\ M_2 & I_{n-2} \end{pmatrix} \text{ y } L_3 = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & l_{n3} & \cdots & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Por lo que

$$(L_1L_2)L3 = \begin{pmatrix} N_2 & \mathbf{0} \\ M_2 & I_{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_2I_2 & N_2\mathbf{0} + \mathbf{0}A_{n-2} \\ M_2I_2 + I_{n-2}\mathbf{0} & M_2\mathbf{0} + I_{n-2}A_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_2 & \mathbf{0} \\ M_2 & A_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Como las matrices L_i por definición provienen de la construcción de una matriz triangular inferior podemos decir que L_i igual es una matriz triangular inferior. Entonces como todas las matrices tienen la misma estructura, podemos hacer el proceso iterativo que se utilizó para calcular la multiplicación de L_1L_2 y $(L_1L_2)L_3$, para la $n-1$ iteración que es multiplicar $L_1L_2\cdots L_{n-1}$ y L_n.
Particionamos la matriz $L_1L_2\cdots L_{n-1}$ y L_n

$$L_1L_2\cdots L_{n-1} = \left(\begin{array}{ccccc|c} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1\ 1} & l_{n-1\ 2} & l_{n-1\ 3} & \cdots & l_{n-1\ n-1} & 0 \\ \hline l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n\ n-1} & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} N_{n-1} & \mathbf{0} \\ M_{n-1} & I_1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$L_n = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix}.$$

Por lo que

$$(L_1L_2\cdots L_{n-1})L_n = \begin{pmatrix} N_{n-1} & \mathbf{0} \\ M_{n-1} & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{n-1}I_{n-1} & N_{n-1}\mathbf{0} + \mathbf{0}A_1 \\ M_{n-1}I_{n-1} + I_1\mathbf{0} & M_{n-1}\mathbf{0} + I_1A_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} N_{n-1} & \mathbf{0} \\ M_{n-1} & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1\ 1} & l_{n-1\ 2} & l_{n-1\ 3} & \cdots & l_{n-1\ n-1} & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n\ n-1} & l_{nn} \end{pmatrix} = L.$$

Por lo tanto, queda demostrado que $L = L_1L_2\cdots L_n$ donde L_i es la matriz $n\times n$ que se obtiene reemplazando la $i-$ésima columna de I_n por la $i-$ésima columna de L. $\blacksquare$.

Ahora un resultado análogo para matrices triangulares superiores sería: Sea U una matriz triangular superior $n\times n$, entonces $U = U_nU_{n-1}\cdots U_1$ donde U_i es la matriz $n\times n$ que se obtiene reemplazando el $i-$ésimo renglón de I_n por el $i-$ésimo renglón de U.

Para demostrar lo anterior ocupemos lo demostrado con las matrices triangulares inferiores. Como ya se demostró que si L matriz triangular inferior se puede escribir como producto de matrices $L_1L_2\cdots L_n$ donde L_i es la matriz $n\times n$ que se obtiene reemplazando la $i-$ésima columna de I_n por la $i-$ésima columna de L. Entonces ocupando este hecho podemos ver que

$$\begin{array}{rcl} L^t & = & (L_1L_2\cdots L_n)^t \\ & = & L_n^tL_{n-1}^t\cdots L_1^t \end{array}.$$

Por las propiedades de matrices inferiores/superiores (vistas en clase) sabemos que si L es inferior esto implica que L^t sea una matriz superior con

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad L^t = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & \cdots & l_{n2} \\ 0 & 0 & l_{33} & \cdots & l_{n3} \\ 0\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ahora si observamos a

$$L_i^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{ii} & l_{i+1\ i} & \cdots & l_{ni} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

podemos observar que L_i^t represenata a la matriz $n \times n$ que se obtiene remplazando el $i-$ésimo renglón de I_n por el $e-$ésiimo renglón de L^t. Por lo que queda demostrado que si U es una matriz triangular superior $n \times n$, entonces $U = U_n U_{n-1} \cdots U_1$ donde U_i es la matriz $n \times n$ que se obtiene reemplazando el $i-$ésimo renglón de I_n por el $i-$ésimo renglón de U. $\blacksquare$.

10. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño n, triangular superior tal que $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \cdots, n$. Demuestre que para $i = 1, \cdots, n$ y $j = 1, \cdots, \text{mín}(n, i+p-1)$ se cumple que $b_{ij} = 0$ donde $A^p = (b_{ij})$ y p es un entero positivo.

RESPUESTA
Para hacer más sencilla la demostración cambiemos la notación de i, j. Consideremos dos casos posibles para el valor de p, cuando $p + k = n$ donde $k \in \mathbb{N}$ es decir $p < n$ y el otro caso cuando $p \geq n$. Caso 1, cuando $p + k = n$ donde $k \in \mathbb{N}$, observemos que si $i \leq k$ esto implica que $j = 1, \cdots, i + p - 1$, y si $i > k$ implica que $j = 1, \cdots, n$. Ahora busquemos $\text{máx}(j - i)$, cuando $i \leq k \Rightarrow \text{máx}(j - i) = i + p - 1 - i = p - 1$, ahora si $i > k \Rightarrow \text{máx}(j - i) = n - (k + 1) = n - (n - p + 1) = p - 1$, por lo que observemos que sin importar i el $max(j - i) = p - 1 < p$. Caso 2, si $p \geq n$, tenemos que $\text{mín}(n, i + p - 1) = n$ para $i = 1, \cdots, n$, por lo que el $\text{máx}(j - i) = n - i < n \leq p$. Por lo que podemos decir $i = 1, \cdots, n$ y $j = 1, \cdots, \text{mín}(n, i + p - 1)$ es equivalente a decir que $j - i < p$.
Entonces demostremos que si A es una matriz cuadrada de tamaño n, triangular superior tal que $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \cdots, n$, entonces se cumple que $b_{ij} = 0$ para $j - i < p$ donde $A^p = (b_{ij})$ y p un entero positivo. Para ello ocuparemos inducción matemática.

Paso 1. Mostrar que se cumple para $p = 2, 3$ o para algún p. Si tomamos a $p = 1$, tenemos que $A^1 = (b_{ij}) = (a_{ij}) = A$, pero como A una matriz cuadrada de tamaño n, triangular superior tal que $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \cdots, n$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

entonces es sencillo ver que se cumple que para cuando $j - i < 1$ se cumple que $b_{ij} = 0$.

Paso 2. Suponer que se cumple para $p - 1$. Es decir, suponer que para $p - 1$ se cumple que $(b_{ij}) = 0$ para $j - i < p - 1$ donde $A^{p-1} = (b_{ij})$.

Paso 3. Demostrar que se cumple para p. Por definición de multiplicación de matrices tenemos que:

$$A_{ij}^{p} = (AA^{p-1})_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir}A_{rj}^{p-1} = \sum_{r=1}^{i} A_{ir}A_{rj}^{p-1} + \sum_{r=i+1}^{n} A_{ir}A_{rj}^{p-1}.$$

Observemos que en la primera suma como $r \leq i$ y como A_{ij} una matriz superior podemos concluir que $A_{ir} = 0$.

$$A_{ij}^{p} = \sum_{r=1}^{i} 0A_{rj}^{p-1} + \sum_{r=i+1}^{n} A_{ir}A_{rj}^{p-1} = \sum_{r=i+1}^{n} A_{ir}A_{rj}^{p-1}.$$

Ahora si consideramos todos los elementos de la matriz que cumple que $j - i < p$ en lo anterior, tenemos que $r = i + 1 > j - p + 1 = j - (p - 1)$ por lo que implica que $A_{rj}^{p-1} = 0$ debido a que $j - r < j - j - (p - 1) = p - 1$ por el paso dos de la inducción. Por lo que para $j - i < p$ queda demostrado que

$$A_{ij}^{p} = 0. \qquad \blacksquare.$$

Por lo que concluimos que si A matriz cuadrada triangular superior tal que $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \cdots, n$. entonces se cumple que $b_{ij} = 0$ para $i = 1, \cdots, n$ y $j = 1, \cdots, \text{mín}(n, i + p - 1)$ donde $A^p = (b_{ij})$ y p es un entero positivo.