Inferencia Estadística

Tarea 5

08/10/2020

Escriba de manera concisa y clara sus resultados, justificando los pasos necesarios. Serán descontados puntos de los ejercicios mal escritos y que contenga ecuaciones sin una estructura gramatical adecuada. Las conclusiones deben escribirse en el contexto del problema. Todos los programas y simulaciones tienen que realizarse en `R`.

1. Supongamos que X y Y son v.a. continuas con densidad conjunta f y que $Z = X/Y$.

   a) Muestre que

   $$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, xv) dx dv.$$

   b) Muestre que, si X y Y son independientes, la densidad de Z puede escribirse como

   $$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx$$

   c) Si X y Y son independientes con distribución normal estándar, muestre que Z se distribuye como una Cauchy. ¿Qué parametrización tiene la densidad de esta distribución?

2. Sea Y una v.a. aleatoria discreta que toma valores en $\{0, 1, 2 \ldots\}$ y $X|Y = y \sim$Binomial$(n = y, p)$. Muestre lo siguiente.

   a) Si Y tiene distribución de Poisson con media θ, entonces la distribución marginal de X es Poisson con media $p\theta$.

   b) Si $Y + r$ tiene distribución Binomial Negativa con tamaño r y probabilidad π, la distribución marginal de $X + r$ es la distribución Binomial Negativa con tamaño r y probabilidad $\pi/(1 - (1 - p)(1 - \pi))$.

   Hint: Utiliza funciones generadoras de momentos.

3. Sea N una v.a. con esperanza finita y $X_1, X_2, \ldots$ v.a. independientes de N con media común $E(X)$. Definamos $T = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Muestre que

   $$E(T) = E(N \cdot E(X)) = E(N)E(X).$$

   Si además asumimos que las X_i's tienen varianza común $\mathrm{Var}(X)$, también muestre que

   $$\mathrm{Var}(T) = E(N)\mathrm{Var}(X) + E(X)\mathrm{Var}(N).$$

4. En este ejercicio corroborará mediante simulaciones la Ley de Grandes Números (LGN).

a) Simule una muestra $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de una v.a. $Normal(\pi, \sqrt{2})$, con tamaño $n = 10^5$. Defina $y_m = \sum_{i=1}^{m} x_i/m$ y grafique esta cantidad como función de m. ¿Qué observa? ¿Cómo está esto relacionado con la LGN?

b) Repita el procedimiento anterior 100 veces y grafique las y_m de cada iteración sobre una misma gráfica. ¿Qué observa?

c) Repita los dos incisos anteriores para una distribución $Cauchy(\pi, \sqrt{2})$. ¿Qué observa?

5. El número de carros que pasa un cruce durante una hora tiene distribución de Poisson de parámetro λ. El número de personas en cada carro tiene distribución de Poisson de parámetro ν. Si Y es el total de personas que pasan por el cruce durante una hora, calcule $E(Y)$ y $\mathrm{Var}(Y)$.

6. Sea p la probabilidad de que un chinche caiga con la punta hacia abajo al lanzarlo una vez. Una persona lanza un chinche hasta que la punta caiga hacia abajo por primera vez. Sea X el número de lanzamientos. Luego lanza de nuevo el chinche otras X veces. Sea Y el número de veces que la punta del chinche cae hacia abajo en la segunda serie de lanzamientos. Halle la distribución de Y.

7. Sean $(X_1, \ldots, X_n)$ v.a.i.i.d. con $X_i \sim N(0,1)$. Muestre que $X_i^2/\sum_{j=1}^{n} X_j^2$ y $\sum_{j=1}^{n} X_j^2$ son independientes, $i = 1, 2, \ldots$

8. Sean $(X_1, \ldots, X_n)$ v.a.i.i.d. tal que $X_i \sim Exponencial(\theta)$. Sean $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ estadísticos de orden, $X_{(0)} = 0$ y $Z_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Calcule la distribución de $2(n - i + 1)Z_i/\theta$. ¿Son $Z_1, \ldots, Z_n$ independientes?

9. En este ejercicio corroborará mediante simulaciones el Teorema Clásico de Límite Central (TCLC).

   a) Escriba la siguiente función en `R`. Simule una muestra de tamaño n de una variable aleatoria $Exponencial(\lambda)$ y calcule el estadístico $Z_n \equiv \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \lambda^{-1})}{\lambda^{-1}}$. Repita lo anterior m veces. La función deberá tomar como parámetros n, m y λ y regresar un vector de tamaño n conteniendo la muestra de Z_n.

   b) Para $n = 5, 10, 100, 500, 1000, 10000$, $m = 1000$ y $\lambda = 1$, utilice la función del inciso anterior para obtener muestras de Z_n. Grafíque las muestras anteriores en un histograma (un histograma para cada n). ¿Qué observa? ¿Qué tiene que ver su resultado con el TCLC?

   c) Para cada una de las muestras generadas en el inciso anterior, encuentre el Q-Q plot y el P-P plot normales. Comente sus resultados.

10. En este ejercicio volverá a trabajar con el TCLC.

   a) Escriba una función análoga a la pedida en el inciso 9*a*) para una distribución $Binomial(p, N)$. La función deberá tomar los mismos parámetros a los pedidos en el inciso 9*a*), con excepción al parámetro λ que tendrá que ser sustituido p y N.

   b) Para $p = 1/2$ y $N = 15$, repita los incisos 9*b*) y 9*c*) para el caso Binomial de este ejercicio.

   c) Para $p = 0.1$, $N = 15$, $n = 5, 10, 20, 100$ y $m = 1000$, genere muestras de Z_n y grafíque estás muestras en un histograma (un histograma para cada n). ¿Qué observa? Explíque.

   d) Repita el inciso anterior para $p = 0.99$. Compare su resultado con lo obtenido en el inciso anterior.

11. Los ejercicios que cambiaron de fecha de entrega la tarea pasada.

Entrega: 21/10/2020.