

Maestría en Computo Estadístico
Álgebra Matricial

Tarea 1

30 de agosto de 2020

Enrique Santibáñez Cortés

Repositorio de Git: [Tarea 1, IE](#).

1. Si A es una matriz $m \times n$ dada por bloques de vectores columna como

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots a_n)$$

y B es una matriz $n \times p$ dada por bloques de vectores renglón como

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Demuestre que

$$AB = \sum_{i=1}^n a_i v_i.$$

2. Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden. Demuestre que $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ si y solo si $AB = BA$.

RESPUESTA

\Rightarrow) Si $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ entonces:

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= (A - B)(A + B) \\ &= AA - BA + AB - BB \\ &= A^2 - BA + AB - B^2 \\ BA &= AB. \end{aligned}$$

\Leftarrow) Si $AB = BA$ entonces:

$$(A - B)(A + B) = AA - BA + AB - BB = A^2 - B^2.$$

Por lo tanto, queda demostrado que $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ si y solo si $AB = BA$. ■.

3. Sean A y B matrices $n \times n$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, tales que $AB = BA$. Demuestre que $A^p B^q = B^q A^p$ para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$.

RESPUESTA

Multiplicado por A^{p-1} por la izquierda y B^{q-1} por la derecha tenemos que:

$$A^{p-1}(AB)B^{q-1} = A^{p-1}(BA)B^{q-1} \quad \blacksquare.$$

4. Se dice que una matriz cuadrada A es antisimétrica si $A = -A^t$. Demuestre que $A - A^t$ es antisimétrica.

RESPUESTA

Sea $B = A - A^t$, entonces:

$$B^t = (A - A^t)^t = A^t - A.$$

y

$$-B^t = -(A^t - A) = A - A^t.$$

Como $B = -B^t$, podemos concluir que $A - A^t$ es asimétrica. ■.

5. Demuestre que dada cualquier matriz cuadrada A , esta se puede escribir como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

RESPUESTA

Es sencillo

6. Se dice que una matriz cuadrada P es idempotente si $P^2 = P$. Si

$$A = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

y si P es idempotente, encuentre A^{500} .

RESPUESTA

Encontremos una formula para encontrar a A^n . Primero veamos que pasa cuando $n = 2, 3$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + 0 & IP + P^2 \\ 0 + 0 & 0 + P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} I & 2P \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + 0 & IP + 2P^2 \\ 0 + 0 & 0 + P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 3P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

De lo anterior y considerando $n \in \mathbb{N}$ podemos suponer que se cumple que :

$$A^n = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Demostremos lo anterior de forma inductiva:

Paso 1. Mostrar que se cumple para $n = 2, 3$ o para algún n . Por construcción se cumple este paso.

Paso 2. Suponer que se cumple para n .

Paso 3. Demostrar que se cumple para $n + 1$. Considerando el paso 2, tenemos que:

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + 0 & IP + nP^2 \\ 0 + 0 & 0 + P^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & (n+1)P \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Queda demostrado que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$A^n = \begin{pmatrix} I & nP \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, utilizando la formula encontrada podemos concluir que

$$A^{500} = \begin{pmatrix} I & 500P \\ 0 & P \end{pmatrix} \quad \blacksquare.$$

7. Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$. Demuestre que $\text{tr}(AB^t) = \text{tr}(A^tB)$.

RESPUESTA

Sea $A_{m \times n}, B_{n \times m}$ matrices. Entonces se cumple que (*se demostraron en clase*):

- $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^t)$.
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Ocupando las dos propiedades de la traza anteriores tenemos que:

$$\text{tr}(AB^t) = \text{tr}((AB^t)^t) = \text{tr}(BA^t) = \text{tr}(A^tB). \quad \blacksquare$$

8. Encuentre matrices A, B y C tales que $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$.

RESPUESTA

Por convicción definamos a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y ahora sea $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ por lo que tenemos que:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{pmatrix}.$$

Observemos que la primera multiplicación representa a un cambio de renglones y la segunda a un cambio de columnas. Ahora multipliquemos lo anterior por la matriz C pero solo concentrarnos en los resultados de la diagonal.

$$ABC = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & \gamma_1 \\ \gamma_2 & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \end{pmatrix},$$

$$BAC = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} & \gamma_3 \\ \gamma_4 & b_{12}c_{12} + b_{21}c_{22} \end{pmatrix},$$

donde γ_i no son relevantes para este problema. Ahora calculemos la traza de ese producto de matrices:

$$\text{tr}(ABC) = b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \quad \text{y} \quad \text{tr}(BAC) = b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} + b_{12}c_{12} + b_{21}c_{22}.$$

De lo anterior podemos observar que si $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$,

$$\begin{aligned} b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} &\neq b_{12}c_{11} + b_{11}c_{21} + b_{12}c_{12} + b_{21}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} - b_{12}c_{11} - b_{11}c_{21} - b_{12}c_{12} - b_{21}c_{22} &\neq 0 \\ c_{11}(b_{21} - b_{12}) + c_{21}(b_{22} - b_{11}) + c_{12}(b_{11} - b_{12}) + c_{22}(b_{12} - b_{21}) &\neq 0 \\ (b_{21} - b_{12})(c_{11} - c_{22}) + (b_{22} - b_{11})(c_{21} - c_{12}) &\neq 0. \end{aligned}$$

De lo anterior podemos observar que si $c_{ij} > 0$ y $b_{ij} > 0$ para $i = 1, 2, j = 1, 2$. Y además considerando las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} c_{11} &> c_{22} \quad , \quad b_{21} > b_{12} \\ c_{21} &> c_{12} \quad , \quad b_{22} > b_{11} \end{aligned}$$

Obtenemos un conjunto de matriz que cumplirán que $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$

9. Sea L una matriz triangular inferior $n \times n$. Demuestre que $L = L_1 L_2 \cdots L_n$ donde L_i es la matriz $n \times n$ que se obtiene reemplazando la i -ésima columna de I_n por la i -ésima columna de L . Demuestre un resultado análogo para matrices triangulares superiores.

RESPUESTA

Considerando que L_i se puede interpretar como la matriz elemental por un escalar.

10. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño n , triangular superior tal que $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \dots, n$. Demuestre que para $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, \min(n, i+p-1)$ se cumple que $b_{ij} = 0$ donde $A^p = (b_{ij})$ y p es un entero positivo.

RESPUESTA

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño n , triangular superior tal que $a_{ii} = 0$ para $i = 1, \dots, n$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces veamos que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0a_{12} + \sum_{j=2}^n a_{1j}0 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$