Álgebra matricial
Tarea 6

Todos los cálculos deben ser a mano.

1. Dados los vectores $(1,-1,-2), (-1,-5,-8), (2,1,1), (2,-8,-14)$, encuentre la dimensión y una base del espacio generado por ellos.

2. Determine si los vectores $(3,-1,-1,1), (1,-6,3,0), (0,5,-1,2), (1,0,1,0)$ forman una base de $\mathbb{R}^4$.

3. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_r$ linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Si A es una matriz $n\times n$ invertible, demuestre que $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_r$ son linealmente independientes.

4. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 & -3 & 10 \\ 1 & 7 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

encuentre bases para $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ y $\mathcal{R}(A)$. Encuentre el rango de A, la nulidad de A y la dimensión de $\mathcal{R}(A)$.

5. Dadas las bases $\mathcal{B} = \{(3,-1,-1), (1,-6,3), (0,5,-1)\}$ y $\mathcal{C} = \{(3,0,6), (2,2,-4), (1,-2,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$, encuentre la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y la matriz de cambio de base de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$. Encuentre las coordenadas del vector $(-2,7,1)$ con respecto a cada una de las bases.

6. Demuestre que dados cualquier conjunto finito S de vectores en $\mathbb{R}^n$, existe una matriz A tal que $\mathcal{N}(A) = \text{gen}(S)$. De un ejemplo de esto en $\mathbb{R}^3$ y justifíquelo, es decir, encuentre un método para encontrar A.

7. Sea F la matriz por bloques

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Demuestre que $\rho(F) \geq \rho(A) + \rho(E)$. De un ejemplo donde la desigualdad sea estricta.

8. Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Si $\rho(A^k) = \rho(A^{k+1})$ para algún $k \geq 1$, demuestre que $\rho(A^{k+1}) = \rho(A^{k+2})$.

9. Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Demuestre que existe un $1 \leq p \leq n$ tal que

$$\rho(A) > \rho(A^2) > \cdots > \rho(A^p) = \rho(A^{p+1}) = \cdots.$$

10. Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 16 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

encuentre su factorización por rango.