Clase 10 (Práctica 2) - Análisis 1 - Diferenciabilidad. Regla de la cadena. Derivadas direccionales.

Ejercicio: Analizar la diferenciabilidad de la siguientes funciones en todo $\mathbb{R}^2$.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3y+y^5)}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2y}-1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

Solución:

a) Primero observamos que fuera del $(0,0)$ la función f es diferenciable por ser un cociente de funciones diferenciables y el denominador no se anula.

Para analizar la diferenciabilidad en $(0,0)$, antes calculemos las derivadas parciales en ese punto.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(0)}{2h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

y

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(h^5)}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h^5)}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h^5)}{h^5}\cdot h^2 = 0$$

Ambas derivadas parciales en $(0,0)$ son cero.

Ahora analicemos el límite de la definición de diferenciabilidad:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\|(x,y)\|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{\operatorname{sen}(x^3y+y^5)}{2x^2+y^2}}{\|(x,y)\|} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^3y+y^5)}{(2x^2+y^2)\|(x,y)\|}\end{aligned}$$

Acotando obtenemos lo siguiente:

$$0 \leq \left|\frac{\operatorname{sen}(x^3y+y^5)}{(2x^2+y^2)\|(x,y)\|}\right| \leq \frac{|x|^3|y|+|y|^5}{(2x^2+y^2)\|(x,y)\|} = \frac{|xy|}{2}\frac{2x^2}{2x^2+y^2} + |y|^3\frac{y^2}{2x^2+y^2} \leq \frac{|xy|}{2} + |y|^3$$

en la última desigualdas usamos que $\frac{2x^2}{2x^2+y^2} \leq 1$ y $\frac{y^2}{2x^2+y^2} \leq 1$.

Luego, como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{2} + |y|^3 = 0$ concluimos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^3y+y^5)}{(2x^2+y^2)\|(x,y)\|} = 0$ y por lo tanto f es diferenciable.

b) Procedemos a calcular las derivadas parciales por definición:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

y

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

Vamos a estudiar ahora la diferenciabilidad de f en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{e^{x^2y}-1}{x^2+y^2}}{\|(x,y)\|}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y}-1}{\|(x,y)\|^3}$$

Veamos qué ocurre con este límite si nos acercamos al $(0,0)$ por distintas rectas. Si nos acercamos por la recta $x=0$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y}-1}{\|(x,y)\|^3} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Mientras que si nos acercamos por una recta de la forma $y=mx$ con $(m\neq 0)$ nos queda

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y}-1}{\|(x,y)\|^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{mx^3}-1}{(\sqrt{x^2+m^2x^2})^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{mx^3}-1}{|x|^3(\sqrt{1+m^2})^3} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2})^3} \lim_{x\to 0} \frac{e^{mx^3}-1}{m|x|^3}$$

Si estudiamos los límites laterales:

$$\frac{m}{(\sqrt{1+m^2})^3} \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{e^{mx^3}-1}{-mx^3}\right) = -\frac{m}{(\sqrt{1+m^2})^3}$$
$$\frac{m}{(\sqrt{1+m^2})^3} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^{mx^3}-1}{mx^3}\right) = \frac{m}{(\sqrt{1+m^2})^3}$$

tenemos que el dicho límite no existe.

Concluimos entonces que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y}-1)}{\|(x,y)\|^3}$ no existe y por lo tanto f no es diferenciable en $(0,0)$.

Ejercicio: Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=\operatorname{sen}(ax+by)$. Sea g una función diferenciable tal que $g(0,0)=1$ y $\nabla g(0,0)=(1,2)$. Definimos $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ por $h(x,y)=g(f(x,y),y)$.

Hallar a y b para que el plano tangente al gráfico de $h(x,y)$ en $(0,0,h(0,0))$ sea $z=1+2x+4y$.

Solución: Primero notemos que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y h también lo es por ser composición de funciones diferenciables. El plano tangente a h en el punto $(0,0)$ tiene ecuación

$$z = h(0,0)+h_x(0,0)x+h_y(0,0) = 1+2x+4y.$$

con lo cual $h(0,0)=1$, $h_x(0,0)=2$ y $h_y(0,0)=4$.

Por otra parte, usando la regla de la cadena tenemos que si llamamos $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la función $u(x,y)=(f(x,y),y)$ podemos escribir que $h(x,y)=g\circ u(x,y)=g(u(x,y))=g(f(x,y),y)$. Por lo tanto, la regla de la cadena nos dice que

$$Dh(x,y) = \nabla g(u(x,y))\cdot Du(x,y) = \begin{pmatrix} g_x(u(x,y)) & g_y(u(x,y)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} g_x(u(x,y))f_x(x,y) \\ g_x(u(x,y))f_y(x,y)+g_y(u(x,y)) \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} h_x(x,y) &= g_x(u(x,y))f_x(x,y) = g_x(u(x,y))\, a\cos(ax+by) \\ h_y(x,y) &= g_x(u(x,y))f_y(x,y) + g_y(u(x,y))) = g_x(u(x,y))\, b\cos(ax+by) + g_y(u(x,y))). \end{aligned}$$

Si evaluamos en $(0,0)$ y usamos que $\nabla g(0,0) = (g_x(0,0), g_y(0,0)) = (1,2)$ nos queda que

$$2 = h_x(0,0) = g_x(u(0,0))a = g_x(f(0,0),0)a = g_x(0,0)a = a$$

y

$$4 = h_y(0,0) = g_x(f(0,0),0)b + g_y(f(0,0),0) = g_x(0,0)b + g_y(0,0) = b + 2.$$

Por lo tanto, los valores de a y b para que se cumpla lo pedido son $a = 2$ y $b = 2$.

Ejercicio: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Calcular el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1,0,f(1,0))$ si se sabe que $f(1,0) = 2$, $f_x(1,0) = 1$ y $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, siendo $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Solución:

Como f es diferenciable, existe el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1,0,f(1,0))$ cuya ecuación es

$$z = f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)y$$

Por la información que nos da el ejercicio, $f(1,0) = 1$ y $f_x(1,0) = 2$. Nos faltaría calcular $f_x(1,0)$. Para ello usamos que para la derivada direccional de f en el punto $(1,0)$ en la dirección de $\vec{v}$ se puede calcular como

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0) = \nabla f(1,0)\cdot\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}f_x(1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}f_y(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}f_y(1,0)$$

con lo cual $f_y(1,0) = 2$.

Por lo tanto, el plano tangente a f en $(1,0)$ es

$$z = 2 + (x-1) + 2y = x + 2y + 1.$$