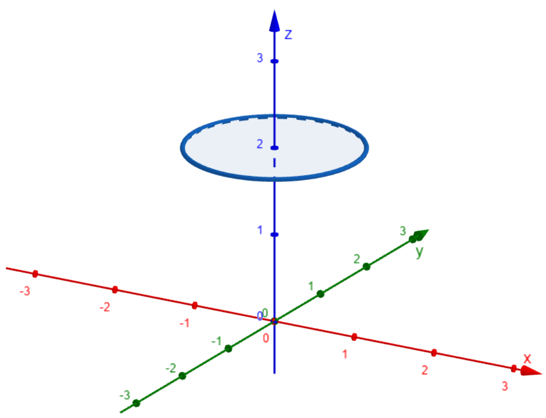
Clase 4 (Práctica 2) - Análisis 1 - Curvas en $\mathbb{R}^3$ y superficies cuádricas.

1. Graficar la curva imagen de las siguientes funciones.

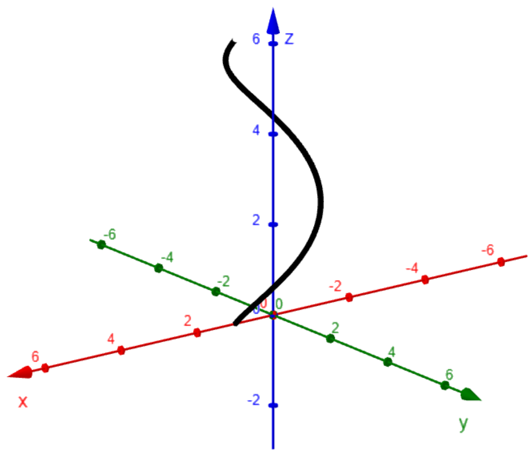
   (a) $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 2)$, $t \in [0, 2\pi]$.
   (b) $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
   (c) $\alpha(t) = (t\cos(t), t\operatorname{sen}(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   En muchos casos, para graficar una curva en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ intentamos buscar alguna relación entre sus coordenadas.

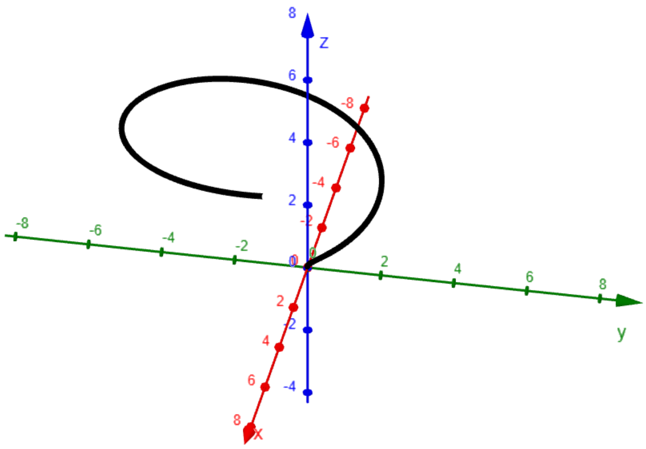
   Para el ítem (a) por ejemplo, sabemos que las primeras dos coordenadas $x(t) = \cos(t)$ y $y(t) = \operatorname{sen}(t)$ describen una circunferencia de radio 1. Al mismo tiempo, la coordenada $z = 2$ nos dice que esta circunferencia se encuentra en el plano a altura $z = 2$. Otra manera de pensarlo es que la curva imagen de α es la intersección entre el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z = 2$.



   En el ítem (b) observamos que al igual que el caso anterior las primeras dos coordenadas describen una circunferencia. Sin embargo, también vemos que la coordenada $z(t) = t$ aumenta al mismo tiempo que el ángulo de rotación. La curva imagen será una *hélice*.



Por último, en el ítem (c) las coordenadas de α, $x(t) = t\cos(t)$, $y(t) = t\,\mathrm{sen}(t)$ y $z(t) = t$ cumplen la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ cuyo gráfico es un cono. Entonces podemos intuir que la imagen de la curva está sobre el cono y aumenta sus alturas en forma de hélice.



Superficies cuádricas
Uns superficie cuádrica es el gráfico de una ecuación de segundo grado en tres variables x, y e z:

$$P(x, y, z) = 0.$$

Cualquier superficie cuádrica se puede transformar (por rotaciones y/o traslaciones) en alguna de las siguientes formas:

$$\begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0 \\ Ax^2 + By^2 + Cz = 0 \end{cases}$$

donde A, B, C y D son constantes.

Para graficar las superficies cuádricas es útil dibujar algunas trazas. Esto consiste en cortar la superficie con planos paralelos a los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y dibujar qué curvas se obtienen.

Utilizando trazas vamos a graficar algunas superficies cuádricas en $\mathbb{R}^3$.

1. **Esfera:** $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

   Calculemos algunas trazas:

   - $z = -1 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 + y^2 = 24$ es una circunferencia contenida en el plano $z = -1$ de centro $(0, 0, -1)$ y radio $\sqrt{24}$.

   - $z = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 + y^2 = 25$ es una circunferencia contenida en el plano $x = 0$ de centro $(0, 0, 0)$ y radio 5.

   - $z = 1 \quad \rightsquigarrow \quad x^2+y^2 = 24$ es una circunferencia contenida en el plano $z = 1$ de centro $(0, 0, 1)$ y radio $\sqrt{24}$.

   - $x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad y^2 + z^2 = 25$ es una circunferencia contenida en el plano $x = 0$ de centro $(0, 0, 0)$ y radio 5.

- $y = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 + z^2 = 25$, es una circunferencia contenida en el plano $y = 0$ de centro $(0, 0, 0)$ y radio 5.

En general, si $z = k$ con k una constante real tenemos

$$x^2 + y^2 + k^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 25 - k^2$$

que es la ecuación de una circunferencia contenida en el plano $z = k$ de centro $(0, 0, k)$ y radio $\sqrt{25 - k^5}$. Observar que dicha ecuación tiene solución si y solo si $|k| \leq 5$. Para valores de $|k| > 5$ no hay trazas.

Análogamente se pueden calcular algunas trazas haciendo $x = k$ o $y = k$.

Con ayuda de GeoGebra podemos dibujar algunas trazas intersectando la ecuación original con distintos planos paralelos a los planos coordenados:

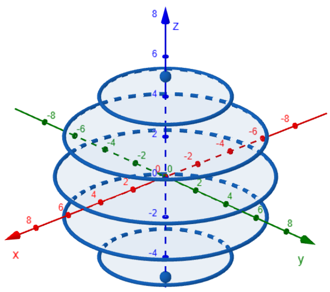


Fig. 1: Trazas $z = k$

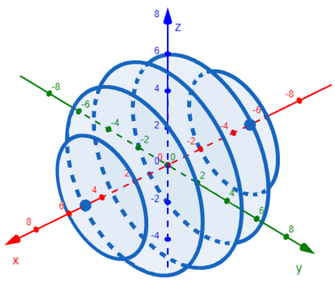


Fig. 2: Trazas $x = k$

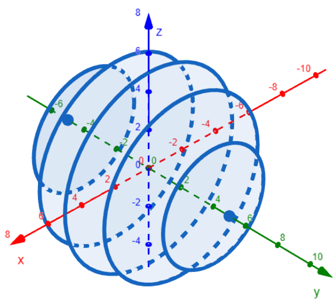


Fig. 3: Trazas $y = k$

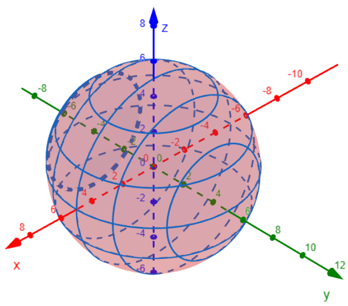


Fig. 4: Gráfico de $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

2. **Elipsoide:** $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$

   Calculemos algunas trazas:

   - $z = -1 \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 0$, el único punto que cumple la ecuación es el $(0, 0, -1)$.

- $z=0 \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, es una elipse contenida en el plano $z=0$ de centro $(0,0,0)$ y semiejes $a=2$ y $b=3$.

- $z=1 \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=0$, el único punto que cumple la ecuación es el $(0,0,1)$.

- $x=0 \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{y^2}{9}+z^2=1$, es una elipse contenida en el plano $x=0$ de centro $(0,0,0)$ y semiejes $a=3$ y $b=1$.

- $y=0 \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{x^2}{4}+z^2=1$, es una elipse contenida en el plano $y=0$ de centro $(0,0,0)$ y semiejes $a=2$ y $b=1$.

Con estos y otros valores de x,y e z podemos graficar algunas trazas:

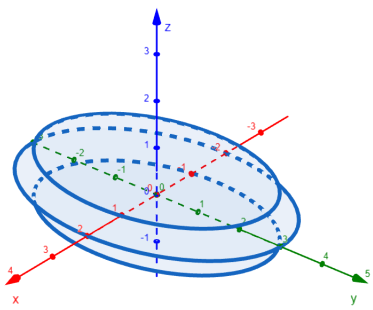


Fig. 5: Trazas $z=k$

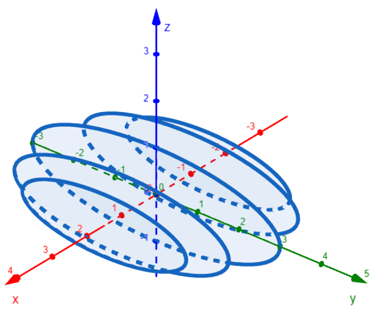


Fig. 6: Trazas $x=k$

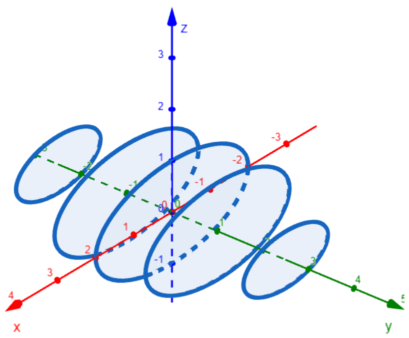


Fig. 7: Trazas $y=k$

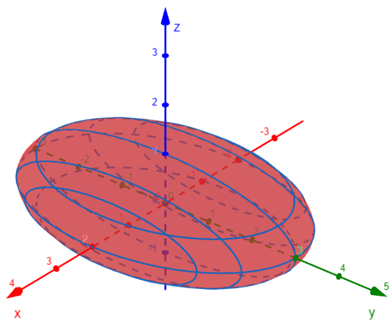


Fig. 8: Gráfico de $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2=1$

3. **Hiperboloide de dos hojas:** $-x^2-y^2+z^2=1$

   Calculemos algunas trazas:

   - $z=-1 \quad \rightsquigarrow \quad x^2+y^2=0$, el único punto que cumple la ecuación es el $(0,0,1)$.

- $z = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 + y^2 = -1$. Esta ecuación no tiene solución. Observar que para $z = k \in (-1, 1)$ la ecuación $x^2 + y^2 = 1 - k^2$ no tiene solución, con lo cual no existen trazas para estos valores de $z = k$.
- $z = 1 \quad \rightsquigarrow \quad x^2 + y^2 = 0$, el único punto que cumple la ecuación es el $(0, 0, 1)$.
- $x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -y^2 + z^2 = 1$, esta es una hipérbola contenida en el plano $x = 0$ con vértices en $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$.
- $y = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -y^2 + z^2 = 1$, esta es una hipérbola contenida en el plano $y = 0$ con vértices en $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$.

Con estos y otros valores de x,y e z obtenemos los siguientes gráficos:

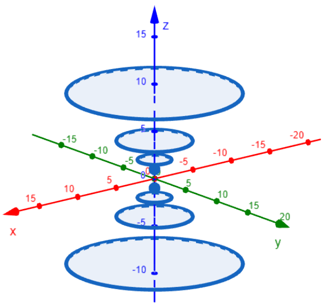


Fig. 9: Trazas $z = k$

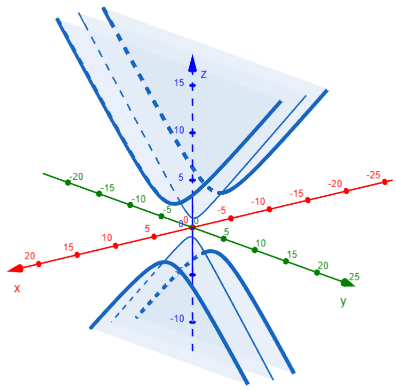


Fig. 10: Trazas $x = k$

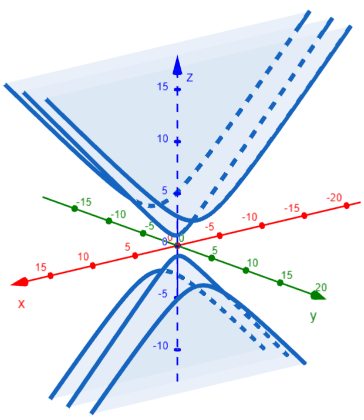


Fig. 11: Trazas $y = k$

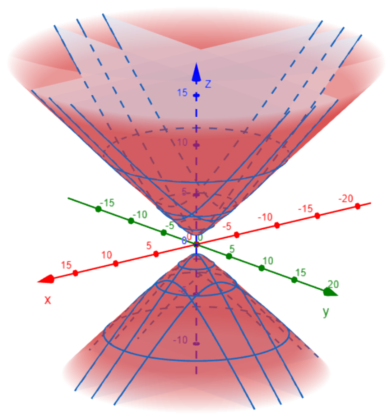


Fig. 12: Gráfico de $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

4. **Paraboloide hiperbólico:** $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = z$.

   Calculemos algunas trazas:

   - $z = -1 \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{x^2}{4} - y^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, esta es una hipérbola contenida en el plano $z = -1$ que pasa por los puntos $(0, 1, -1)$ y $(0, -1, -1)$.

- $z = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 0$, la única solución es el punto $(0, 0, 0)$.
- $z = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{x^2}{4} - y^2 = -1$ es una hipérbola contenida en el plano $z = 1$ que pasa por los puntos $(2, 0, 1)$ y $(-2, 0, 1)$.
- $x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -y^2 = z$ es una parábola contenida en el plano $x = 0$ con vértice en $(0, 0, 0)$.
- $y = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{x^2}{4} = z$ es una parábola contenida en el plano $y = 0$ con vértice en $(0, 0, 0)$.

Con estos y otros valores de x,y e z obtenemos los siguientes gráficos:

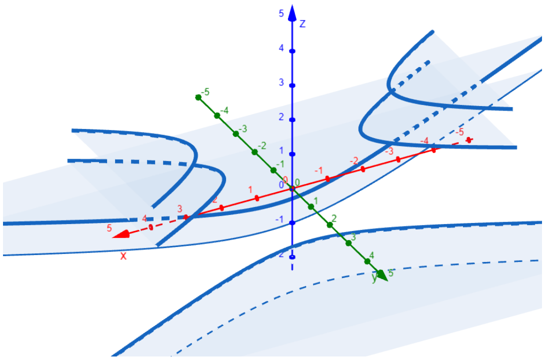


Fig. 13: Trazas $z = k$

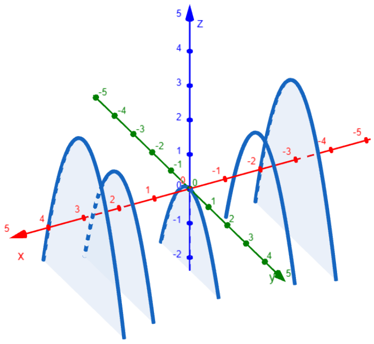


Fig. 14: Trazas $x = k$

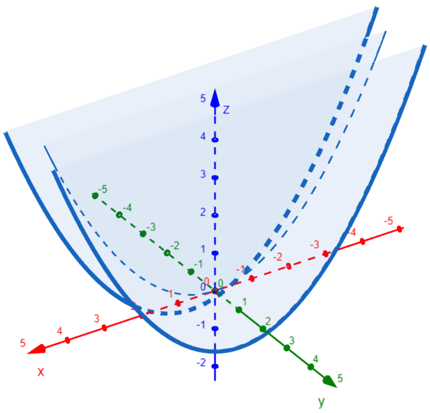


Fig. 15: Trazas $y = k$

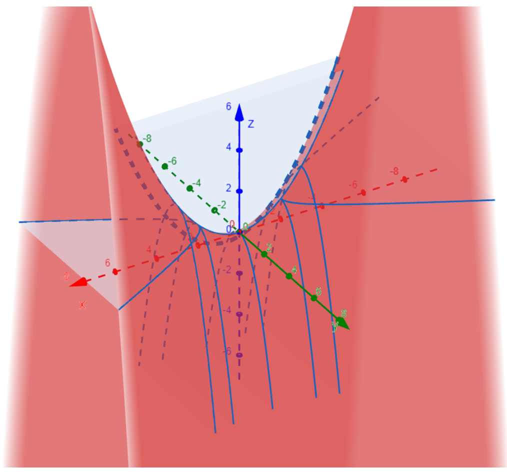


Fig. 16: Gráfico de $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = z$

Ejercicio: Clasificar las siguientes cuádricas y realizar el gráfico en $\mathbb{R}^3$ utilizando trazas. Intente hacer los dibujos a mano y luego compruebe con GeoGebra.

(a) $x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$ (b) $\dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = x^2$ (c) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{z^2}{16} = y$