1. Sean $L_1 : t(-3, 2, -1) + (0, 1, 1)$ y $L_2 : t(2, 1, -4) + (1, 0, 2)$.

   (a) ¿Son paralelas?

   (b) ¿Son perpendiculares?

   (c) ¿Se cortan? Si la respuesta es afirmativa encontrar el punto de intersección entre ambas rectas.

   (d) Hallar la recta perpendicular a $L_1$ y $L_2$ que pasa por el punto $(1, 0, -3)$.

   **Solución:** Llamamos $\vec{v_1} = (-3, 2, -1)$ y $\vec{v_2} = (2, 1, -4)$ los vectores directores de $L_1$ y $L_2$ respectivamente.

   (a) Las rectas $L_1$ y $L_2$ no son paralelas ya que sus vectores directores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ no son múltiplos.

   (b) Como $\langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle = \langle (-3, 2, -1), (2, 1, -4) \rangle = -6 + 2 + 4 = 0$, concluimos que las rectas son perpendiculares.

   (c) Para ver si se cortan igualamos las coordenadas de $L_1$ y $L_2$ (observar que usamos parámetros distintos para las dos rectas):

   $$\begin{cases} -3t = 2s + 1 \\ 2t + 1 = s \\ -t + 1 = -4s + 2 \end{cases}.$$

   Reemplazando la segunda ecuación en la primera tenemos que

   $$-3t = 2(2t + 1) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3t = 4t + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 7t = -3 \quad \Leftrightarrow \quad t = -3/7$$

   con lo cual, $s = -6/7 + 1 = 1/7$. Veamos si la tercera ecuación se cumple. Por un lado, $-t + 1 = 3/7 + 1 = 10/7$ y por otro lado $-4s + 1 = -4/7 + 2 = 10/7$. Como ambos lados de la igualdad coinciden para los valores de $t$ y $s$ hallados, el sistema es compatible determinado.
   El punto de intersección se obtiene reemplazando los valores de $t = -3/7$ y $s = 1/7$ es $L_1$ y $L_2$ respectivamente. En efecto, reemplazando $s = 1/7$ en $L_2$ obtenemos el punto $Q = (9/7, 1/7, 10/7)$.
   *Evaluar $t = -3/7$ en $L_1$ y verificar que se obtiene el mismo punto.

   (d) Primero necesitamos un vector director para la recta que buscamos, es decir, un vector perpendicular a $v_1$ y $v_2$. Para ello podemos hacer el producto vectorial entre ambos.

   $$\vec{w} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-8 + 1)i - (12 + 2)j + (-3 - 4)k = (-7, -14, -7)$$

   Ahora, una ecuación paramétrica de la recta perpendicular a $L_1$ y $L_2$ que pasa por el punto $(1, 0, -3)$ es

   $$L_3 : t(-7, -14, -7) + (1, 0, -3).$$

2. Consideremos el triángulo de vértices $A = (1, 0, -1)$, $B = (3, -2, 0)$ y $C = (1, 3, 3)$.

   (a) Calcular el perímetro del triángulo.

   (b) Hallar una ecuación paramétrica del plano $\Pi$ que los contiene.

(c) Hallar una ecuación de la recta normal a $\Pi$ que pasa por $B$ y dar una ecuación implícita para $\Pi$.

**Solución:**

(a) Para calcular el perímetro calculamos la longitud de los segmentos que determinan los tres lados del triángulo y luego sumamos dichas longitudes.

$$\|B-A\| = \|(3,-2,0)-(1,0,-1)\| = \|(2,-2,1)\| = \sqrt{4+4+1} = 3$$
$$\|B-C\| = \|(3,-2,0)-(1,3,3)\| = \|(2,-5,-3)\| = \sqrt{4+25+9} = \sqrt{38}$$
$$\|C-A\| = \|(1,3,3)-(1,0,-1)\| = \|(0,3,4)\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Luego, el perímetro del triángulo es $8+\sqrt{38}$.

(b) Una ecuación paramétrica del plano que contiene a A, B y C es:

$$\Pi : (B-A)s + (C-A)t + A = (2,-2,1)s + (0,3,4)t + (1,0,-1).$$

(c) La recta normal a $\Pi$ que pasa por $B$ es de la forma $L : t\vec{v} + B$ donde $v$ es un vector normal al plano que lo podemos calcular, por ejemplo, haciendo el producto vectorial entre los vectores $\vec{v_1} = B - A = (2,-2,1)$ y $\vec{v}_2 = C - A = (0,3,4)$. Es decir,

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-8-3)i - (8-0)j + (6-0)k = (-11,-8,6). \tag{1}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta buscada es

$$L : t(-11,-8,6) + (3,-2,0).$$

Por otro lado, una ecuación implícita para $\Pi$ es

$$\Pi : -11x - 8y + 6z = d$$

donde la constante $d$ la podemos buscar evualando en la ecuación cualquier punto que pertenezca al plano. Por ejemplo, evaluando en $B$ nos queda que

$$d = -11(3) - 8(-2) + 6(0) = -33 + 16 + 0 = -17.$$

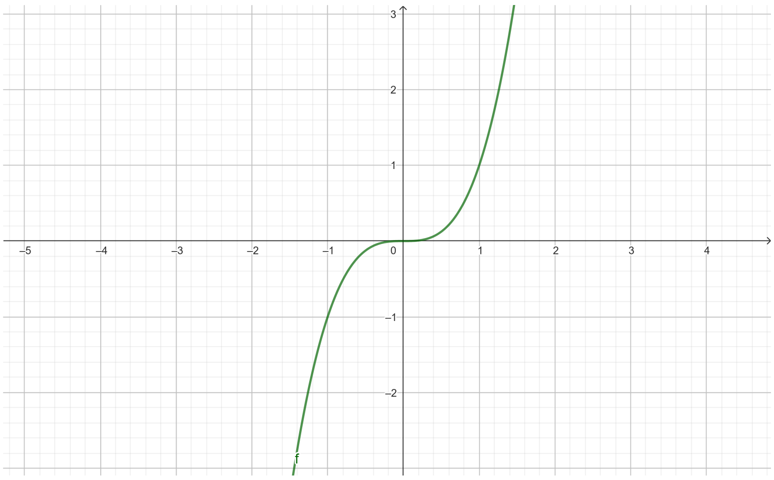
Así que una ecuación implícita del plano es $-9x - 8y + 6z = -17$.

3. Dibujar las siguientes curvas paramétricas en $\mathbb{R}^2$:

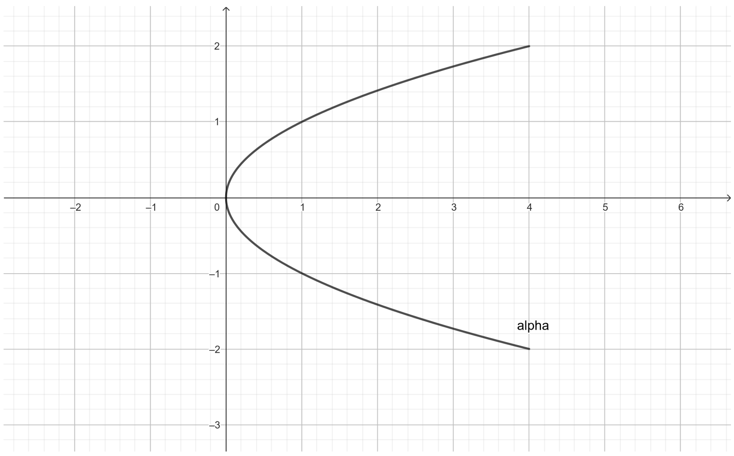
(a) $\alpha(t) = (t, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.
(b) $\alpha(t) = (t^2, t)$, $-2 \leq t \leq 2$.
(c) $\alpha(t) = (2\cos(t) - 1, 2\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi)$.
(d) $\alpha(t) = (t\cos(t), t\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi)$.
(e) $\alpha(t) = (2\cos(t), 3\operatorname{sen}(t))$

**Solución:**

(a) Las coordenadas de $\alpha$ son $x(t) = t$ e $y(t) = x^3$ y cumplen la relación $y(t) = x(t)^3$, es decir, los puntos que conforman la imagen de $\alpha$ coinciden con el gráfico de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^3$.




(b) En este ítem las coordenadas de $\alpha$ son $x(t) = t^2$ e $y(t) = t$ y la relación entre ellas es $x(t) = y(t)^2$ (o $x = y^2$) cuyo gráfico es una parábola con vértice en $(0, 0)$ y abre hacia el semieje $x$ positivo.




(c) Primero recordemos que usando coordenadas polares podemos describir la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $r > 0$ como $\sigma(t) = (r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ ya que $x(t) = r\cos(t)$ y $y(t) = r\,\mathrm{sen}(t))$ cumplen la ecuación

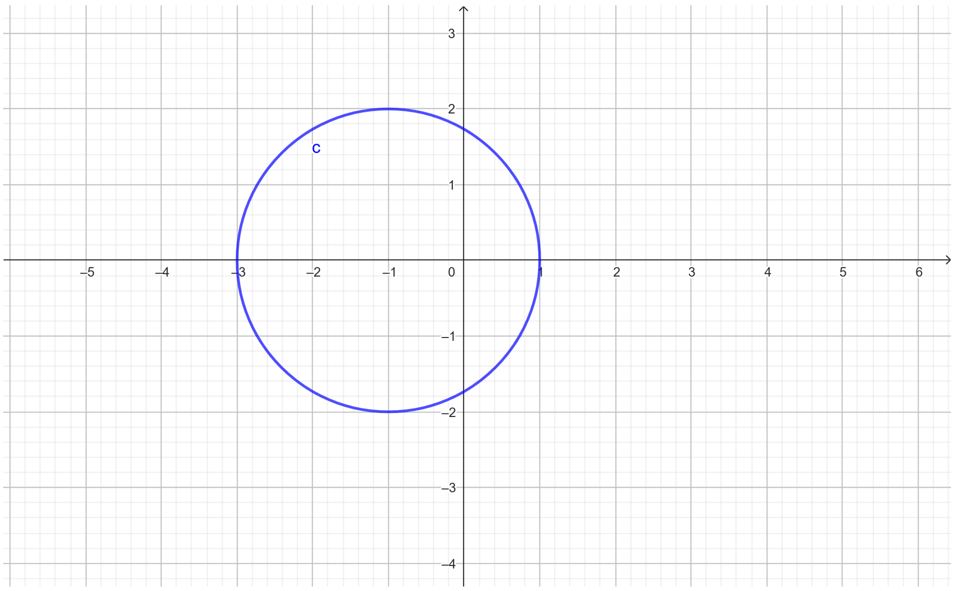
$$x^2 + y^2 = r^2$$

que es la ecuación implícita de dicha circunferencia.
Más en general, la circunferencia de centro $(h, k)$ y radio $r > 0$ se puede describir

$$\sigma(t) = (r\cos(t) + h, r\,\mathrm{sen}(t) + k), \quad t \in [0, 2\pi].$$

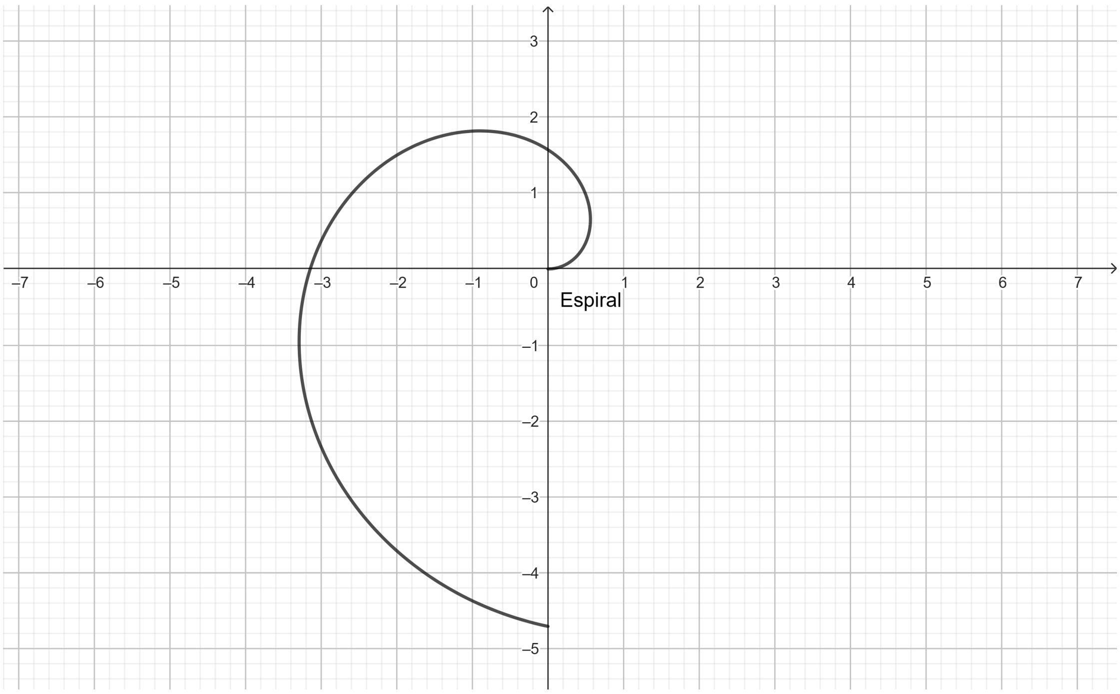
Ahora, el gráfico de $\alpha(t) = (2\cos(t) - 1, 2\,\mathrm{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi)$ es una circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 2 ya que satisface que:

$$(x + 1)^2 + y^2 = (2\cos(t) - 1 + 1)^2 + (2\,\mathrm{sen}(t))^2 = 4(\cos^2(t) + \mathrm{sen}^2(t)) = 4$$



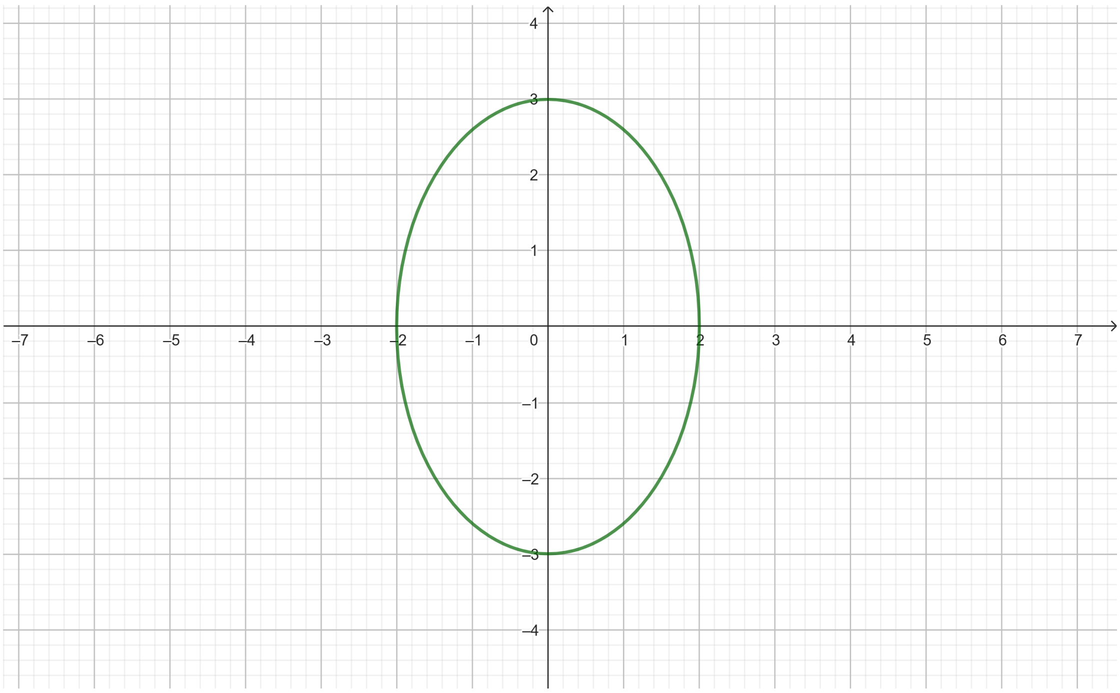

(d) Observar que $\alpha(t) = (t\cos(t), t\,\mathrm{sen}(t))$, $t \in [0, 3\pi/2)$ describe una curva que tiene la propiedad que a medida que aumentamos el ángulo el radio también aumenta. Para hacernos una idea de cómo queda el dibujo podemos evaluar $\alpha$ en algunos puntos del intervalo $[0, 2\pi]$:

$$\alpha(0) = (0,0), \quad \alpha(\pi/2) = (0, \pi/2), \quad \alpha(\pi) = (-\pi, 0), \quad \alpha(3\pi/2) = (0, -3\pi/2)$$



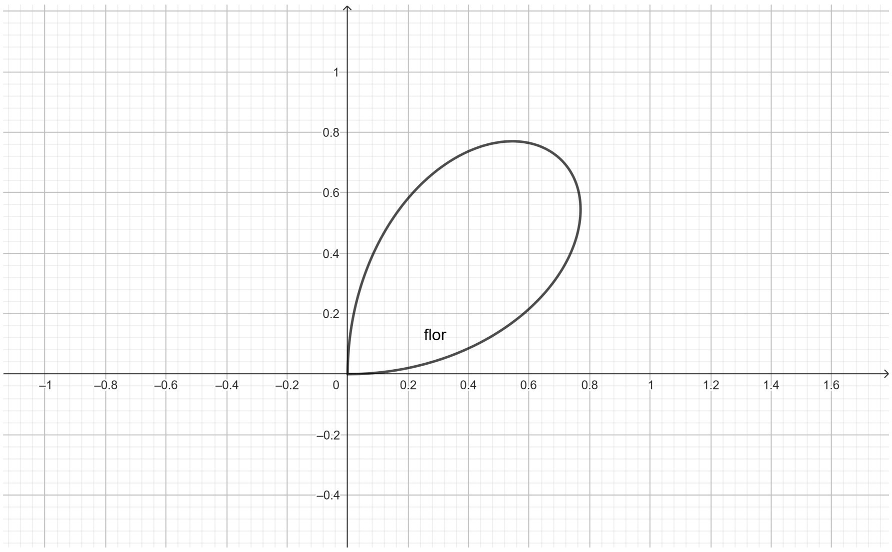

(e) Observar que $\alpha(t) = (2\cos(t), 3\,\mathrm{sen}(t))$ verifica la ecuación de una elipse de semiejes $a = 2$ y $b = 3$. En efecto,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{(2\cos(t))^2}{4} + \frac{(3\,\mathrm{sen}(t))^2}{9} = \cos^2(t) + \mathrm{sen}^2(t) = 1 \qquad (2)$$

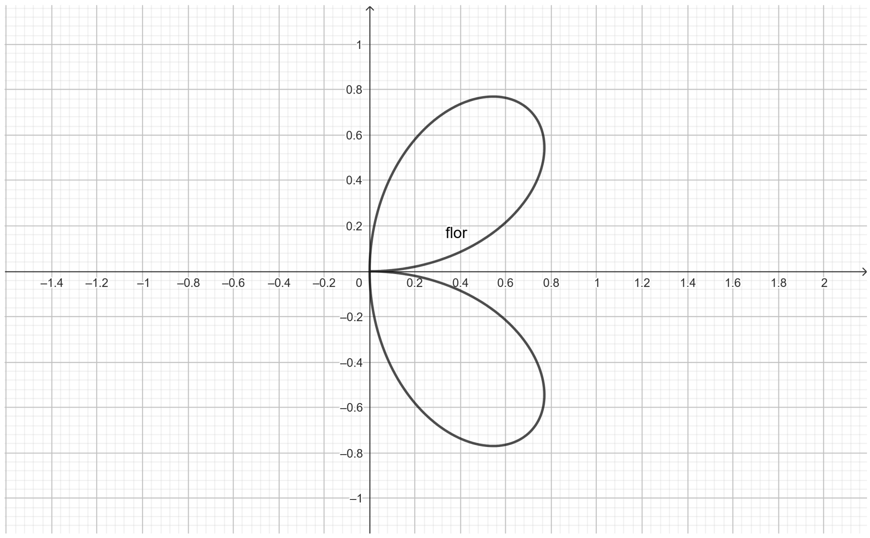


4. Graficar la siguiente curva dada en coordenadas polares $r(\theta) = \operatorname{sen}(2\theta)$, $\theta \in [0, \pi/2]$.

   La curva expresada en coordenadas cartesianas es $\alpha(\theta) = (\operatorname{sen}(2\theta)\cos(\theta), \operatorname{sen}(2\theta)\operatorname{sen}(\theta))$, $\theta \in [0, \pi/2]$. Con ayuda de GeoGebra podemos ver que el gráfico correspondiente es un pétalo en el primer cuadrante como se muestra en el siguiente gráfico:




   Comentario: Observar que si se cambia el intervalo para $\theta$ por $[0, \pi]$, la función $r(\theta) = \operatorname{sen}(2\theta)$ toma valores negativos en $(\pi/2, \pi)$ (segundo cuadrante). Al momento de graficarlo, esto se interpreta como que los puntos de la curva que corresponden a ese intervalo están en el cuadrante opuesto, es decir, en el cuarto cuadrante:




**Ejercicio:** Con ayuda de GeoGebra realizar los gráficos de las distintas curvas que vimos en esta clase. Usar deslizadores para visualizar que cada curva tiene un sentido de recorrido inducido por la función $\alpha$ dada en cada caso.