Clase 7 (Práctica 2) - Análisis 1 - Continuidad. Derivada de curvas.

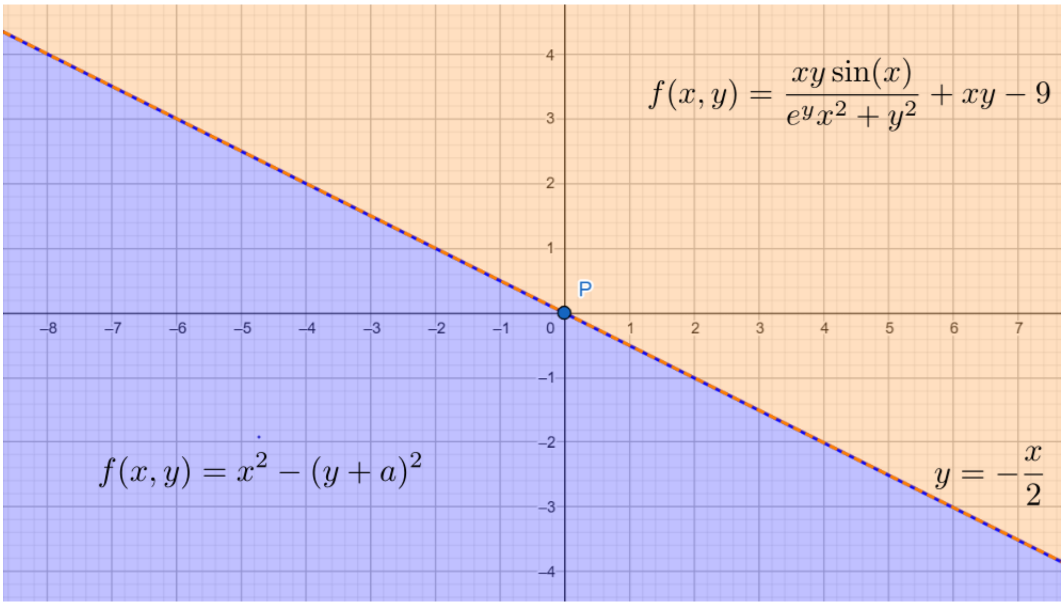
Ejercicio: Sea

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2-(y+a)^2 & \text{si } x+2y\le 0\\ \dfrac{xy\,\mathrm{sen}(x)}{e^y x^2+y^2}+xy-9 & \text{si } x+2y>0\end{cases}$$

Hallar, si es posible, todos los valores de $a\in\mathbb{R}$ de manera que f resulte continua en $(0,0)$.

Solución:

Primero observamos que el dominio de f que es $\mathbb{R}^2$ está dividido en dos regiones, como muestra el siguiente gráfico:



Para que f resulte continua en $(0,0)$ debe existir el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ y además su valor debe coincidir con $f(0,0)$.

Por un lado, sabemos que para cualquier punto (x,y) que cumple $x+2y>0$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy\,\mathrm{sen}(x)}{e^y x^2+y^2}+xy-9\right)=-9$$

Recordar que la clase pasada vimos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\,\mathrm{sen}(x)}{e^y x^2+y^2}=0$.

Por otro lado, para cualquier punto (x,y) que cumple $x+2y\le 0$ se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2-(y+a)^2=-a^2.$$

Además, $f(0,0)=-a^2$. Para que f sea continua en $(0,0)$ debe cumplirse que $-a^2=-9$ y por lo tanto $a=3$ ó $a=-3$.

Observación: La existencia y coincidencia del límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ en ambas regiones delimitadas por la recta $x+2y=0$ garantiza la existencia de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y su valor coincide con lo que vale el límite en ambas regiones. Veamos esto por definición.

Supongamos que $a=3$ (uno de los valores posibles de "a" donde el límite existe), entonces como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy\,\mathrm{sen}(x)}{e^y x^2+y^2}+xy-9\right)=-9 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2-(y+3)^2=-9$$

en las regiones correspondientes, tenemos que para todo $\varepsilon>0$ existen δ_1 y δ_2 tales que:

$$\text{Si } (x,y) \text{ cumple } x+2y>0 \text{ y } \|(x,y)\|<\delta_1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{xy\,\mathrm{sen}(x)}{e^y x^2+y^2}+xy\right|<\varepsilon$$

y

$$\text{Si } (x,y) \text{ cumple } x+2y\leq 0 \text{ y } \|(x,y)\|<\delta_2 \quad \Rightarrow \quad |x^2-(y+3)^2+9|<\varepsilon.$$

Entonces si elegimos $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ tenemos que

$$\|(x,y)\|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,y)+9|<\varepsilon,$$

es decir, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=-9$.

Ejercicio: Analizar la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de la función

$$f(x,y)=\left(\sqrt{|xy|},\frac{x}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}\right).$$

¿Es posible extender f de forma continua a todo $\mathbb{R}^2$?

Solución: Sean $f_1(x,y)=\sqrt{|xy|}$ y $f_2(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}$ las funciones coordenadas de f. Observamos que $Dom(f)=Dom(f_1)\cap Dom(f_2)=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$.

Para estudiar la continuidad de f, estudiamos la continuidad de sus funciones coordenadas. Observamos que f_1 es una función continua ya que es una composición de funciones. Por otra parte, f_2 es continua pues es un cociente de funciones continuas y el denominador no se anula en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$. Concluimos que f es continua en su dominio.

Ahora, estudiemos el comportamiento de f alrededor del punto $(0,-1)$. Para ello, solo es necesario analizar el límite de $f_2(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,-1)$, ya que f_1 está bien definida en dicho punto y vale $f_1(0,-1)=0$.

Para analizar la existencia del límite $\lim_{(x,y)\to(0,-1)} f(x,y)$ podemos hacer un cambio a coordenadas polares eligiendo

$$x=r\cos\theta \quad \text{y} \quad y+1=r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

donde $r=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$ y $\theta\in\mathbb{R}$. Notemos que si $(x,y)\to(0,-1)$ entonces $r\to 0^+$. Luego el límite queda de la forma:

$$\lim_{(x,y)\to(0,-1)}\frac{x}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}=\lim_{r\to 0^+}\frac{r\cos\theta}{r}=\lim_{r\to 0^+}\cos\theta$$

como este límite depende de θ concluimos que no existe.

Como $\lim_{(x,y)\to(0,-1)} f_2(x,y)$ no existe, f_2 tiene una singularidad esencial en $(0,-1)$. Por lo tanto, no es posible extender f al $(0,-1)$ de manera que resulte continua en ese punto.

Vector tangente y recta tangente a una curva:

Sea $\mathcal{C}$ una curva parametrizada por $\alpha : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con $a < b$ y $t_0 \in I$. La derivada de α en t_0 se obtiene derivando cada coordenada de α y evaluando en $t = t_0$ (siempre que existan todas las derivadas en t_0).

Observaciones:

- $\alpha(t_0)$ es la posición de una partícula que sigue la trayectoria descrita por $\mathcal{C}$,
- $\alpha'(t_0)$ es la velocidad de dicha partícula en el instante t_0,
- La recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\alpha(t_0)$ tiene ecuación

$$L_{t_0} : \lambda\alpha'(t_0) + \alpha(t_0).$$

Ejercicio: Para las siguientes funciones, hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $\mathcal{C} = \mathrm{Im}(\alpha)$ en el punto $\alpha(t_0)$.

a) $\alpha(t) = (e^{t-1}, e^{1-t})$, $t \in [0,2]$, $t_0 = 1$.

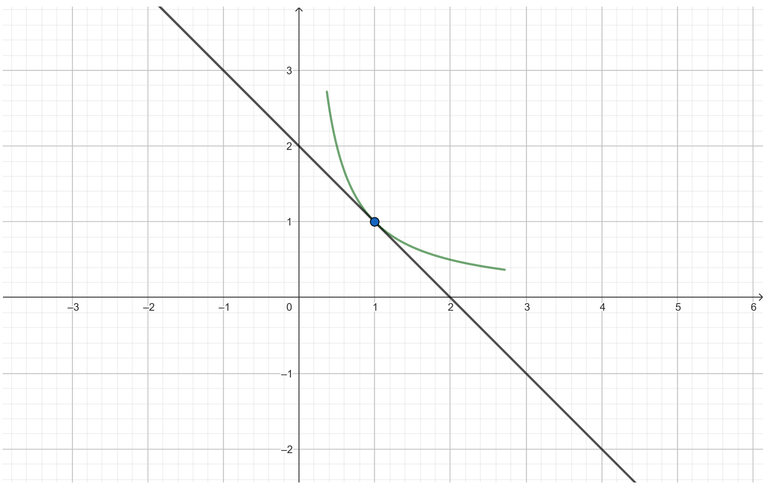
b) $\alpha(t) = (2\cos(t), \mathrm{sen}(t), t)$, $t \in [0,\pi]$, $t_0 = \pi/4$. (Ejercicio)

Solución: a) Para dar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en $\alpha(1)$ necesitamos calcular $\alpha(1)$ y $\alpha'(1)$. En efecto, $\alpha(1) = (e^{1-1}, e^{1-1}) = (1,1)$ y $\alpha'(t) = (e^{t-1}, -e^{1-t})$ con lo cual $\alpha'(1) = (1,-1)$.

Luego, la recta tangente a $\mathcal{C}$ en $\alpha(1)$ es

$$L : \lambda(1,-1) + (1,1).$$

Con ayudad de GeoGebra podemos graficar la curva junto con la recta tangente en el punto indicado.



Ejercicio: Sea $\mathcal{C}$ la curva dada por la intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20 \quad \text{y} \quad y + z = 5.$$

Hallar una parametrización de $\mathcal{C}$ y encontrar todos los puntos de $\mathcal{C}$ en donde las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ son perpendiculares al plano $x = 1$.

Solución: Primero completamos cuadrados en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2y + 1 - 1 &= 20 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 &= 25 \end{aligned}$$

esta es la ecuación de un cilindro en que se puede parametrizar como

$$\alpha(t) = (5\cos(t) + 2, 5\,\mathrm{sen}(t) - 1, z), \quad t \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}.$$

Ahora, si despejamos la variable z de la ecuación del plano $y + z = 5$, nos queda que

$$z = -y + 5 = -5\,\mathrm{sen}(t) + 1 + 5 = -5\,\mathrm{sen}(t) + 6.$$

Por lo tanto, la parametrización de la curva $\mathcal{C}$ es

$$r(t) = (5\cos(t) + 2, 5\,\mathrm{sen}(t) - 1, -5\,\mathrm{sen}(t) + 6).$$

Luego, el vector tangente a $\mathcal{C}$ en un punto $\alpha(t)$ viene dado por

$$r'(t) = (-5\,\mathrm{sen}(t), 5\cos(t), -5\cos(t)).$$

Para que este vector sea perpendicular al plano $x = 1$ debe ser paralelo a la normal al plano que está dada por $\vec{n} = (1, 0, 0)$, es decir, requerimos que la segunda y tercera coordenada de $r'(t)$ sean cero. Por lo tanto, buscamos $t \in [0, 2\pi]$ tales que $\cos(t) = 0$, estos valores son $t = \pi/2$ y $t = 3\pi/2$.

Por último, los puntos donde la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ es paralela al plano $x = 1$ son $r(\pi/2) = (2, 4, 1)$ y $r(3\pi/2) = (2, -6, 11)$.