Clase 2 (Práctica 2) - Análisis 1 - Geometría en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ - Aplicaciones

1. Encontrar todos los valores de k tales que el ángulo entre los vectores $\vec{v} = (2, -1, 1)$ y $\vec{w} = (1, k, 0)$ es $\pi/6$.

   Solución: Recordemos que si $\theta \in [0, \pi)$ es el ángulo entre dos vectores entonces

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}.$$

   En este caso, tenemos

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/6) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{\langle (2, -1, 1), (1, k, 0) \rangle}{\sqrt{6}\sqrt{1 + k^2}} = \frac{2 - k}{\sqrt{6}\sqrt{1 + k^2}}.$$

   Luego,

$$\sqrt{18}\sqrt{1 + k^2} = 2(2 - k)$$

   Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad anterior nos queda

$$9(1 + k^2) = 2(4 - 4k + k^2)$$

   Aplicando la propiedad distributiva y agrupando los terminos de igual grado obtenemos la ecuación cuadrática:

$$7k^2 + 8k + 1 = 0$$

   cuyas soluciones se pueden calcular usando la resolvente:

$$k = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 28}}{14} = \frac{-8 \pm 6}{14} \quad \Leftrightarrow \quad k = -1 \text{ ó } k = -\frac{1}{7}$$

   y estos son los valores de k buscados.

2. Hallar todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son perpendiculares a $\vec{v} = (-1, 2)$. ¿Qué conjunto forman? ¿cuántas direcciones perpendiculares a $\vec{v}$ hay?

   Solución: Si (a, b) es un vector perpendicular a $\vec{v}$ entonces debe cumplir que $\langle (a, b), (-1, 2) \rangle = 0$, es decir,

$$-a + 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2b.$$

   Entonces, todos los vectores perpendiculares a $\vec{v}$ son de la forma

$$(2b, b) = b(2, 1), \quad \text{con } b \in \mathbb{R}.$$

   y conforman una recta que pasa por el origen y sigue la dirección del vector $(2, 1)$.

   Hay una sola dirección perpendicular a $\vec{v}$ que está determinada por la recta que pasa por el origen y tiene vector director $(2, 1)$.

3. Sean $\vec{v} = (4, -1, 1)$ y $\vec{w} = (2, 1, -3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$.

   (a) Hallar todos los vectores perpendiculares a $\vec{v}$. ¿Qué conjunto forman? ¿Cuántas direcciones perpendiculares a $\vec{v}$ hay?

   (b) Hallar todos los vectores en $\mathbb{R}^3$ que son perpendiculares a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ simultáneamente. ¿Qué conjunto forman? ¿Cuántas direcciones perpendiculares a $\vec{v}$ hay?

   Solución:

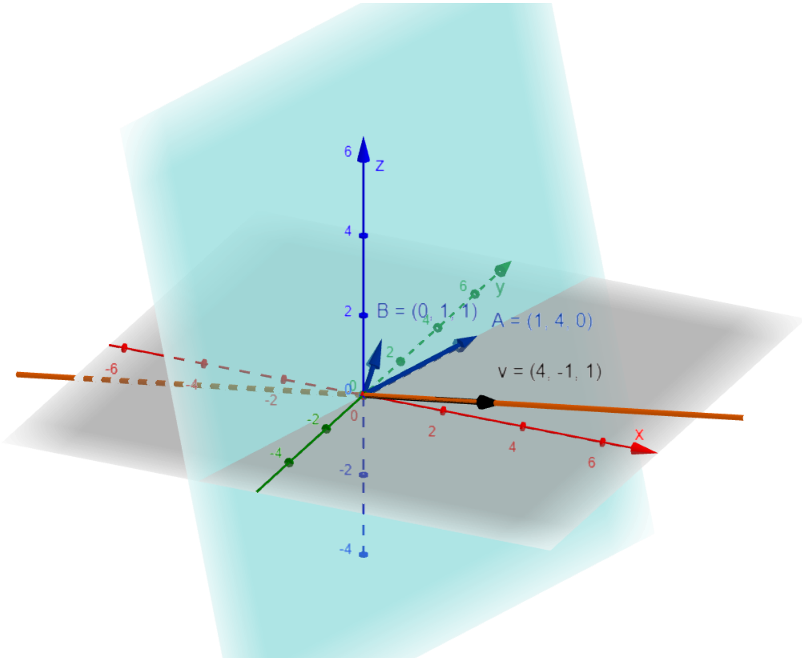
(a) Un vector $\vec{u} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ es perpendicular a $\vec{v}$ si y solo si

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (a, b, c), (4, -1, 1) \rangle = 4a - b + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 4a + c.$$

Luego, todos los vectores buscados son de la forma

$$(a, 4a + c, c) = a(1, 4, 0) + c(0, 1, 1)$$

y esto define el plano que pasa por el origen de ecuación $\Pi : s(1, 4, 0) + t(0, 1, 1)$. Hay infinitas direcciones perpendiculares a $\vec{v}$. Cada dirección perpendicular a $\vec{v}$ está determinada por una única recta que pasa por el origen y está incluida en el plano $\Pi : s(1, 4, 0) + t(0, 1, 1)$.



(b) Un vector $\vec{u} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ es perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ simultáneamente si y solo si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ y $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0$. Es decir,

$$\begin{aligned} \langle (a, b, c), (4, -1, 1) \rangle &= 4a - b + c = 0 \\ \langle (a, b, c), (2, 1, -3) \rangle &= 2a + b - 3c = 0 \end{aligned}$$

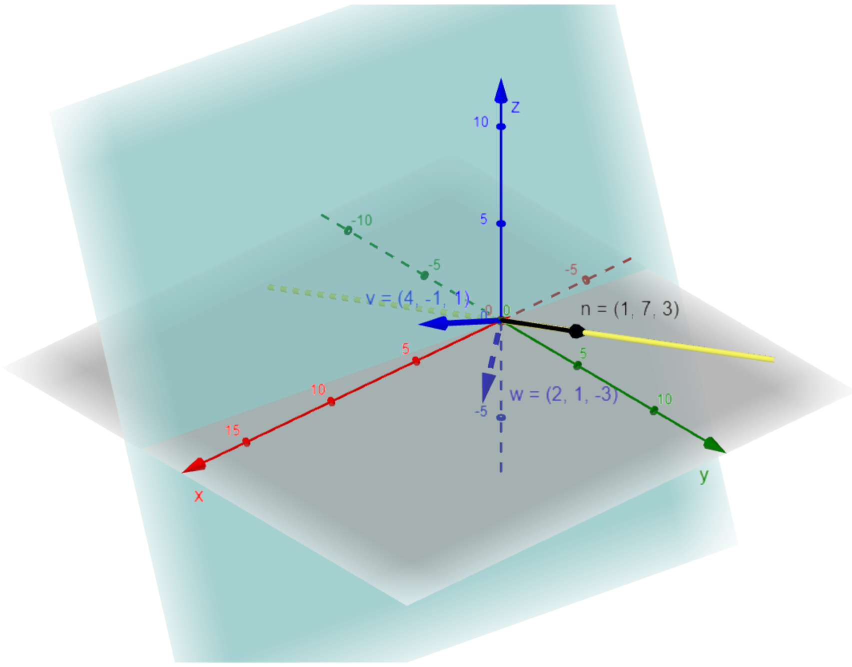
Despejando b de la primera ecuación tenemos que $b = 4a + c$. Reemplazando en la segunda nos queda que $2a + 4a + c - 3c = 0$ con lo cual $6a - 2c = 0$ y por lo tanto $c = 3a$ y $b = 7a$. Todos los vectores perpendiculares a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ simultáneamente son de la forma

$$(a, 7a, 3a) = a(1, 7, 3)$$

y determinan una recta que pasa por el origen y tiene vector director $(1, 7, 3)$.
Otra forma: como el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{w}$ es un vector perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ simultáneamente, entonces todos vectores perpendiculares a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son de la forma $\alpha(\vec{v} \times \vec{w})$. Calculemos el producto vectorial:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (3 - 1)i - (-12 - 2)j + (4 + 2)k = (2, 14, 6).$$

Luego, todos los vectores perpendiculares a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son $\alpha(2, 14, 6) = 2\alpha(1, 7, 3)$. Esto es coherente con lo que obtuvimos antes.



Comentario: Con ayuda de GeoGebra reproducir los gráficos para visualizar los objetos (vectores, rectas y planos) que aparecen en la resolución del ejercicio.