Clase 12 (Práctica 2) - Análisis 1 - Teorema de la función implícita. Teorema de Taylor en una variable.

Teorema de la función implícita:
Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^1$. Consideremos la superficie de nivel

$$S = \{(x_1, ..., x_n) \in A : f(x_1, ..., x_n) = 0\}.$$

Si $P = (p_1, ..., p_n) \in S$ es un punto que cumple que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \neq 0$ para algún $i \in \{1, ..., n\}$ entonces existe un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ y una función $\phi : V \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ tal que $x_i = \phi(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ y existe una bola $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que $B \cap S = Graf(\phi)$.
Además, las derivadas parciales de ϕ las podemos calcular como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, ..., x_{i-1}, \phi(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n), x_{i+1}, ..., x_n)}{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, \phi(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n), x_{i+1}, ..., x_n)}$$

para $k \neq i$ y para todo $(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in V$. En particular,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k}(p_1, ..., p_{i-1}, p_{i+1}, ..., p_n) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(P)}{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(P)}.$$

Recordar los dibujos que hicimos en clase en los casos $n = 2$ y $n = 3$ para ayudar a entender geométricamente qué es lo que nos dice el teorema. En el siguiente ejercicio veremos una aplicación del TFI.

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = ayz + xe^z \ln(y)$
   a) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la ecuación $f(x, y, z) = 0$ defina una función implícita $z = \phi(x, y)$ en un entorno del $(-2, 1)$ tal que $\phi(-2, 1) = 0$.
   b) Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = \phi(x, y)$ en el punto $(-2, 1, \phi(-2, 1))$. ¿Para qué valor(es) de $a \in \mathbb{R}$ el plano tangente es paralelo a la recta $L : \lambda(-1, 2, 4)$.

Solución:

a) Consideremos la superficie de nivel

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$$

y notemos que $P = (-2, 1, \phi(-2, 1)) = (-2, 1, 0)$ pertenece a S. Si pedimos que $\frac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$ podemos aplicar el Teorema de la función implícita para concluir que existe una función ϕ tal que $z = \phi(-2, 1)$ en un entorno de $(-2, 1)$ y que cumpla que $\phi(-2, 1) = 0$.
Veamos esto:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = ay + xe^z \ln(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z}(-2, 1, 0) = a$$

Siempre que $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ podemos garantizar que existe un abierto $V \subset \mathbb{R}^2$ que contiene al punto $(-2,1)$ y una función $\phi : V \to \mathbb{R}$ tal que $z = \phi(x,y)$.

b) El plano tangente a la superficie dada por $z = \phi(x,y)$ en el punto $(-2,1,\phi(-2,1))$ tiene ecuación

$$z = \phi(-2,1) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(-2,1)(x+2) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(-2,1)(x-1)$$

Sabemos que $\phi(-2,1) = 0$ y nos falta calcular $\frac{\partial \phi}{\partial x}(-2,1)$ y $\frac{\partial \phi}{\partial y}(-2,1)$. Para ello vamos a usar la segunda parte del Teorema de la función implícita que nos dice

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(-2,1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1,\phi(-2,1))}{\frac{\partial f}{\partial z}(-2,1,\phi(-2,1))} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(-2,1,0)}$$

y

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(-2,1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(-2,1,\phi(-2,1))}{\frac{\partial f}{\partial z}(-2,1,\phi(-2,1))} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(-2,1,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(-2,1,0)}$$

pero $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^z \ln(y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = az + \frac{xe^z}{y}$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(-2,1) = -\frac{0}{a} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y}(-2,1) = -\frac{(-2)}{a} = \frac{2}{a}$$

y la ecuación del plano tangente es

$$z = 0 + 0 \cdot (x+2) + \frac{2}{a}(y+1) = \frac{2}{a}y + \frac{2}{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad -2y + az = 2.$$

Ahora, si queremos que el plano obtenido sea paralelo a la recta $L : \lambda(-1,2,4)$ debemos pedir que el vector normal $\vec{n} = (0,-2,a)$ del plano sea perpendicular al vector director de la recta $\vec{v} = (-1,2,4)$, esto es

$$0 = \vec{n} \cdot \vec{v} = (0,-2,a) \cdot (-1,2,4) = -4 + 4a$$

con lo cual $a = 1$.

Polinomio de Taylor:
Sea $A \subset \mathbb{R}$ un abierto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable. El polinomio de Taylor de orden n centrado en x_0 es el único polinomio T_{n,x_0} que cumple que

$$f(x_0) = T_{n,x_0}(x_0), \quad f'(x_0) = T'_{n,x_0}(x_0), \quad \ldots \quad f^{(n)}(x_0) = T^{(n)}_{n,x_0}(x_0).$$

La expresión del polinomio de Taylor T_{n,x_0} es

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

El resto de Lagrange $R_n(x) = f(x) - T_{n,x_0}(x)$ cumple que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n,x_0}}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Además, existe c entre x y x_0 tal que

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(c)(x-x_0)^{n+1}.$$

2. Sea $f(x) = x\cos(x) + \operatorname{sen}(x)$.

a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de $f(x) = x\cos(x) + \operatorname{sen}(x)$ centrado en $x = \pi/2$, estimar el valor de $f(1.6)$ y acotar el error.

b) Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 3 de f y analizar la existencia del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) - 2x}{x^2}$$

Solución:

(a) El polinomio de Taylor de orden 3 de f centrado en $\pi/2$ está dado por

$$T_{3,\frac{\pi}{2}}(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}f'''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$$

Calculemos las derivadas parciales de f hasta orden 4 (calculamos un orden más ya que después nos piden acotar el resto).

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos(x) - x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = 2\cos(x) - x\operatorname{sen}(x)\\
f''(x) &= -2\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x) - x\cos(x) = -3\operatorname{sen}(x) - x\cos(x)\\
f'''(x) &= -3\cos(x) - \cos(x) + x\operatorname{sen}(x) = -4\cos(x) + x\operatorname{sen}(x)\\
f^{(iv)}(x) &= 4\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x) + x\cos(x) = 5\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)
\end{aligned}$$

con lo cual tenemos que $f(\pi/2) = 1$, $f'(\pi/2) = -\pi/2$, $f''(\pi/2) = -3$ y $f'''(\pi/2) = \pi/2$. Luego, el polinomio de Taylor buscado es

$$T_{3,\frac{\pi}{2}}(x) = 1 - \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3.$$

Si estimamos el valor de $f(1.6)$ con el polinomio de Taylor obtenido, nos queda que $T_{3,\frac{\pi}{2}}(1.6) \approx 0.95285421611$ y el valor que arroja la calculadora es $f(1.6) \approx 952854367359$.

La expresión de Lagrange para el error es

$$R_3(1.6) = \frac{1}{4!}f^{(iv)}(c)\left(1.6 - \frac{\pi}{2}\right)^4$$

donde c es un número entre $\frac{\pi}{2}$ y 1.6.

Para acotarlo en general usamos la desigualdad triangular y si las funciones involucradas crecen o decrecen en el intervalo donde se encuentra c. En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned}
|R_3(1.6)| = \left|\frac{1}{4!}f^{(iv)}(c)\left(1.6 - \frac{\pi}{2}\right)^4\right| &= \frac{1}{4!}|5\operatorname{sen}(c) + c\cos(c)|\left(1.6 - \frac{\pi}{2}\right)^4\\
&\leq \frac{1}{4!}\left(5|\operatorname{sen}(c)| + |c||\cos(c)|\right)\left(1.6 - \frac{\pi}{2}\right)^4
\end{aligned}$$

Usando que $\operatorname{sen}(x)$ es decreciente en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, 1.6]$ y las funciones $|x|$ y $|\cos(x)|$ son crecientes en $[\frac{\pi}{2}, 1.6]$ tenemos las siguientes cotas $|\operatorname{sen}(c)| < |\operatorname{sen}(\pi/2)| = 1$ y $|c||\cos(c)| < (1.6)\cos(1.6)$. Por lo tanto, la expresión del resto la podemos acotar de la siguiente manera

$$|R_3(1.6)| < \frac{1}{4!}\left(5 + (1.6)|\cos(1.6)|\right)\left(1.6 - \frac{\pi}{2}\right)^4 < 1.53 \times 10^{-7}.$$

(b) El polinomio de Maclaurin es el polinomio de Taylor centrado en 0. En ese caso sería

$$T_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Las derivadas de f hasta orden 3 ya las calculamos en el ítem anterior. Si evaluamos en 0 queda que $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 0$ y $f'''(0) = -4$. Luego,

$$T_{3,0}(x) = 2x - \frac{4}{3!}x^3.$$

Observar que los polinomios $T_{1,0}(x) = 2x = T_{2,0}(x)$. Esto muestra que el orden del polinomio de Taylor no tiene porqué coincidir con su grado. Lo que vale siempre es que el grado es menor o igual que el orden del polinomio de Taylor que estemos calculando.

Para analizar la existencia del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) - 2x}{x^2}$$

recordemos que los polinomios de Taylor de orden n de f cumplen la propiedad

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^2} = 0.$$

El límite que nos piden analizar se puede reescribir como

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) - 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_{2,0}(x)}{x^2} = 0.$$