Clase 11 (Práctica 2) - Análisis 1 - Más de regla de la cadena y derivadas direccionales. Gradiente y curvas de nivel.

1. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^4 + x^2 y \cos(\pi e^y)$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(s,t) = (s+2t, st^2)$.
   a) Calcular $D(f\circ g)$ en el punto $(-1,0)$.
   b) Hallar la ecuación del plano tangente a la función $f \circ g$ en el punto $(-1,0)$.

Solución:

a) Primero observamos que como f y g son diferenciables, la composición también lo es. Por la regla de la cadena

$$D(f\circ g)(-1,0) = Df(g(-1,0)) \cdot Dg(-1,0).$$

Calculemos primero $Df(x,y)$ y $Dg(s,t)$:

$$Df(x,y) = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 & 2x\cos(\pi e^y) - 2xy\pi e^y \operatorname{sen}(\pi e^y) \end{pmatrix}$$

y

$$Dg(s,t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t^2 & 2st \end{pmatrix}$$

Como $g(-1,0) = (-1+2\cdot 0, (-1)\cdot 0^2) = (-1,0)$, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} D(f\circ g)(-1,0) &= \nabla f(g(-1,0)) \cdot Dg(-1,0) = \nabla f(-1,0)\cdot Dg(-1,0) \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Si llamamos $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(s,t) = f(g(s,t))$, por el ítem anterior tenemos que $h_x(-1,0) = -4$ y $h_y(-1,0) = -8$. Además, $h(-1,0) = f(g(-1,0)) = f(-1,0) = 1$ Ahora, el plano tangente a h en el punto $(-1,0,h(-1,0))$ tiene ecuación

$$\begin{aligned} z = h(-1,0) + h_x(-1,0)(x+1) + h_y(-1,0) &= 1 + (-4)(x+1) + (-8)y \\ &= -4x - 8y - 3. \end{aligned}$$

2. Calcular todas las derivadas direccionales de $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2$ en el punto $P = (3,-1)$. Dadas las direcciones $\vec{v} = (1,2)$ y $\vec{w} = (3,-2)$, ¿En cual dirección f crece más si nos movemos a partir de P en dichas direcciones? ¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de f en P?

Solución: Sea $\vec{u} = (a,b)$ con $\|\vec{u}\| = 1$. Observamos que f es una función diferenciable por ser un polinomio en dos variables. Luego la derivada direccional de f en $P = (3,-1)$ en la dirección de $\vec{u}$ viene dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(3,-1) = \nabla f(3,-1)\cdot \vec{u}.$$

El gradiente de f es $\nabla f(x,y) = (4x-3y, -3x+2y)$ y entonces $\nabla f(3,-1) = (12+3, -9-2) = (15,-11)$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(3,-1) = \nabla f(3,-1)\cdot \vec{u} = (15,-11)\cdot(a,b) = 15a - 11b.$$

Ahora, usemos esta fórmula para calcular las derivadas direccionales en las direcciones de $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Como $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son vectores unitarios los normalizamos antes de calcular las derivadas direccionales:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \qquad \text{y} \qquad \|\vec{w}\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

Llamamos $\vec{v}_u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y $\vec{w}_u = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}}\right)$ (el subíndice u indica que son vectores unitarios con las mismas direcciones de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ respectivamente). Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_u}(3,-1) = 15\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - 11\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{15-22}{\sqrt{5}} = \frac{-7}{\sqrt{5}}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{w}_u}(3,-1) = 15\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} - 11\cdot\frac{(-2)}{\sqrt{13}} = \frac{45+22}{\sqrt{13}} = \frac{67}{\sqrt{13}}.$$

f crece más si nos movemos en la dirección de $\vec{w}_u$.
La dirección de máximo crecimiento de f en P es $\frac{\nabla f(3,-1)}{\|\nabla f(3,-1)\|} = (\frac{15}{165}, \frac{-11}{165}) = (11, \frac{-11}{165})$.

3. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

   a) Calcular, si existen, todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.
   b) ¿Es f continua en $(0,0)$? ¿es diferenciable en $(0,0)$?

Solución:

a) Como f es una función partida en $(0,0)$ vamos a calcular la derivada direccional por definición. Sea $\vec{v} = (a,b)$ con $\|\vec{v}\| = 1$. Entonces si $b = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

y si $b \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{a^2t^2bt}{a^4t^4+b^2t^2}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{a^2t^2bt}{t^3(a^4t^2+b^2)} = \lim_{t\to 0}\frac{a^2b}{a^4t^2+b^2} = \frac{a^2}{b}$$

es decir que existen **todas** las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.

b) f no es continua en $(0,0)$ ya que si evaluamos el límite por parábolas de la forma $y = mx^2$ obtenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^4}{x^4+m^2x^4} = \frac{m}{1+m^2}$$

que depende de m y por lo tanto el límite no existe. Al no ser f continua en $(0,0)$ tampoco es diferenciable en ese punto.

4. Sean $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \in \mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

   Sabiendo que la curva de nivel 3 de f es la parábola $y = x^2$, y que $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2, 4) = -8$, halle $\nabla f(-2, 4)$.

Solución: Como f es diferenciable, a partir de la ecuación $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2, 4) = -8$ tenemos que

$$-8 = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-2, 4) = \nabla f(-2, 4) \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5} f_x(-2, 4) + \frac{4}{5} f_y(-2, 4).$$

Por otro lado, la curva de nivel 3 de f es el conjunto

$$S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 3\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}.$$

Si parametrizamoa la curva $y = x^2$ por $\alpha(t) = (t, t^2)$, se cumple que $f(\alpha(t)) = 3$ y derivando ambos lados tenemos

$$D(f \circ \alpha)(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 0$$

es decir, $\nabla f(\alpha(t))$ es ortogonal a $\alpha'(t)$ en el punto $\alpha(t)$. En particular, si $\alpha(t) = (-2, 4)$ entonces $t = -2$ y vale que

$$0 = \nabla f(\alpha(-2)) \cdot \alpha'(-2) = \nabla f(-2, 4) \cdot (1, -4) = f_x(-2, 4) - 4 f_y(-2, 4).$$

Finalmente, al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{3}{5} f_x(-2, 4) + \frac{4}{5} f_y(-2, 4) = -8 \\ f_x(-2, 4) - 4 f_y(-2, 4) = 0 \end{cases}$$

obtenemos que $f_x(-2, 4) = -10$ y $f_y(-2, 4) = -5/2$.