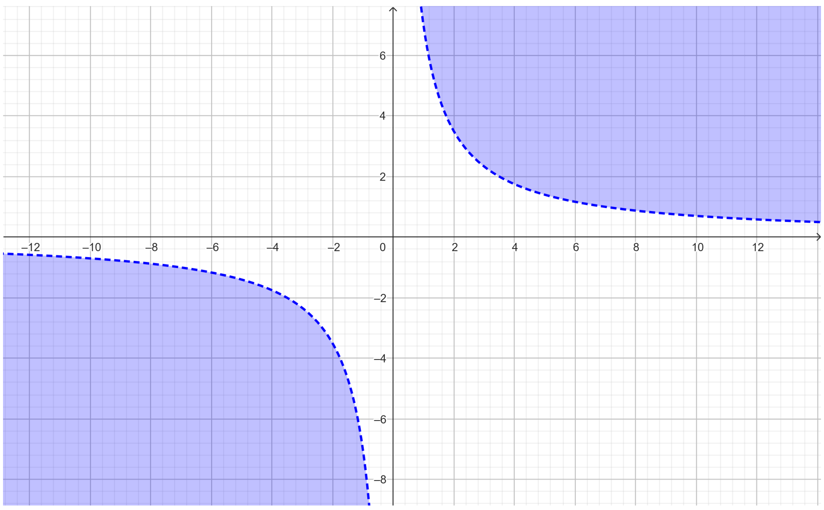
Recordemos:

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in D$.

- El gradiente de f en (x_0, y_0) es el vector
$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) .$$
- Decimos que f es diferenciable en (x_0, y_0) si
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$
En ese caso, existe el plano tangente a f en (x_0, y_0) y su ecuación es
$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$
La función lineal $L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ es la que mejor aproxima a $f(x, y)$ cerca del punto (x_0, y_0).

Ejercicio: Calcular las derivadas parciales de f y analizar la diferenciabilidad de la función $f(x, y) = 1 + y \ln(xy - 7)$ en el punto $(2, 4)$. En caso de ser diferenciable calcular el plano tangente en $(2, 4, f(2, 4))$.

Solución: Miremos primero el dominio de f: para que $\ln(xy - 7)$ esté bien definido debe cumplirse que $xy - 7 > 0$ con lo cual $xy > 7$. Esto último dice que si $x > 0$ entonces $y > 7/x$, por otro lado si $x < 0$ entonces $y < 7/x$. En resumen, el dominio de f es la región que se muestra en el siguiente gráfico.

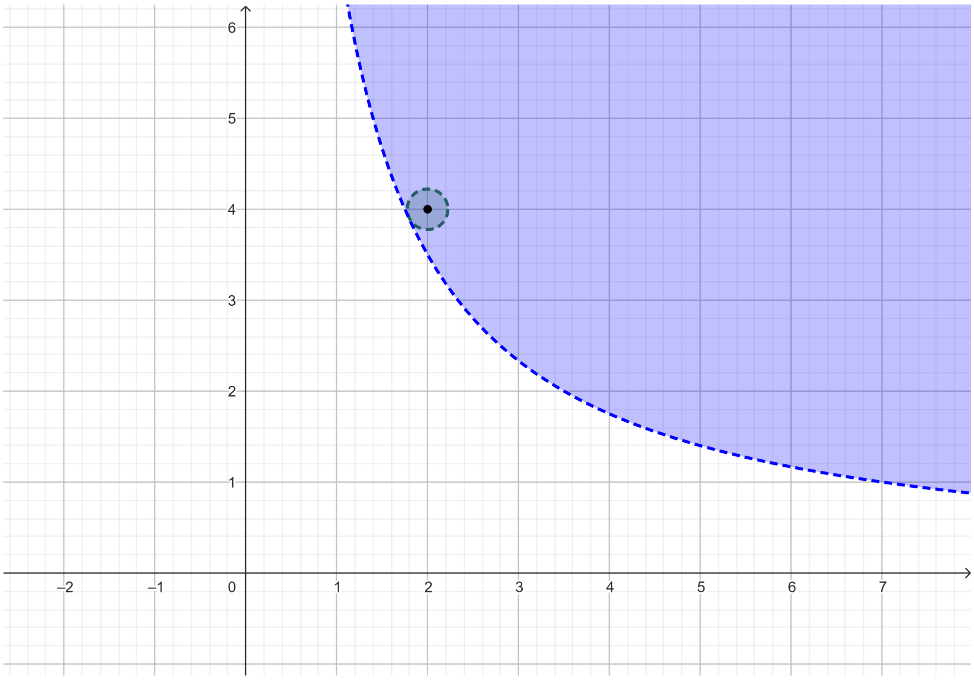


Calculemos las derivadas parciales de f:

$$f_x(x, y) = \frac{y^2}{xy - 7} \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = \ln(xy - 7) + \frac{xy}{xy - 7}.$$

Evaluando en el punto $(2, 4)$ obtenemos $f_x(2, 4) = 16$ y $f_y(2, 4) = \ln(1) + 8 = 8$.

Para analizar la diferenciabilidad de f podemos observar que las derivadas parciales existen y son continuas (cociente de funciones continuas y el denominador no se anula) en un entorno del $(2,4)$, es decir, f es $\mathcal{C}^1$ en $(2,4)$. En el siguiente gráfico se muestra el punto $(2,4)$ rodeado por una bolita dentro del dominio de f.



Otra forma de justificar que f es diferenciable en $(2,4)$ es usando las propiedades de funciones diferenciables (suma, producto y composición de funciones diferenciables es diferenciable) un producto de funciones diferenciables.

Ahora, como f es diferenciable en $(2,4)$ existe un plano tangente en $(2,4,f(2,4))=(2,4,1)$ cuya ecuación viene dada por es

$$\begin{aligned} z &= 1 + 16(x-2) + 8(y-4) \\ &= 16x + 8y - 63. \end{aligned}$$

Ejercicio: Para las siguientes funciones calcular las derivadas parciales $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$ y analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-3x^3 + 2x^2y^2 - 3xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(e^{xy}-1)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solución:

a) Como f es una función partida en $(0,0)$ vamos a calcular las derivadas parciales por la definición como límites:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3h^3}{h^3} = -3$$

y

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

Estudiemos ahora la diferenciabilidad de f en $(0,0)$. Para ello recurrimos a la definición de diferenciabilidad.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\|(x,y)-(0,0)\|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{-3x^3+2x^2y^2-3xy^2}{x^2+y^2}+3x}{\|(x,y)\|} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{-3x(x^2+y^2)+2x^2y^2}{x^2+y^2}+3x}{\|(x,y)\|} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-3x+\dfrac{2x^2y^2}{x^2+y^2}+3x}{\|(x,y)\|} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y^2}{\|(x,y)\|^3}
\end{aligned}$$

Como $x^2 \leq x^2+y^2$ y $y^2 \leq x^2+y^2$, podemos acotar la función del límite anterior de la siguiente manera:

$$\frac{2x^2y^2}{\|(x,y)\|^3} \leq \frac{2\|(x,y)\|^2\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|^3} = 2\|(x,y)\| \to 0.$$

Es decir,

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y^2}{\|(x,y)\|^3} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2\|(x,y)\| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y^2}{\|(x,y)\|^3} = 0$$

así que la función f es diferenciable en $(0,0)$.

Podemos afirmar entonces que existe el plano tangente en $(0,0,0)$ y viene dado por la ecuación $z=-3x$.

b) Procedemos a calcular las derivadas parciales por definición:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

y

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

Observamos que ambas derivadas parciales existen en $(0,0)$.

Vamos a estudiar ahora la diferenciabilidad de f en $(0,0)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\|(x,y)-(0,0)\|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{x(e^{xy}-1)}{x^2+y^2}}{\|(x,y)\|} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(e^{xy}-1)}{\|(x,y)\|^3}
\end{aligned}$$

Veamos que este límite no existe. Si nos acercamos por la recta $x = 0$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(e^{xy}-1)}{\|(x,y)\|^3} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Mientras que si nos acercamos por una recta de la forma $y = mx$ con $(m \neq 0)$ nos queda

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(e^{xy}-1)}{\|(x,y)\|^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x(e^{mx^2}-1)}{(\sqrt{x^2+m^2x^2})^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x(e^{mx^2}-1)}{|x|^3(\sqrt{1+m^2})^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x(e^{mx^2}-1)}{|x|x^2(\sqrt{1+m^2})^3}.$$

Observamos que el último límite de la derecha lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{mx^2}-1}{mx^2}\right) \cdot \frac{mx}{|x|} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+m^2})^3}$$

y si estudiamos los límites laterales:

$$\frac{1}{(\sqrt{1+m^2})^3} \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{e^{mx^2}-1}{mx^2}\right) \cdot \frac{mx}{|x|} = -\frac{m}{(\sqrt{1+m^2})^3}$$
$$\frac{1}{(\sqrt{1+m^2})^3} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^{mx^2}-1}{mx^2}\right) \cdot \frac{mx}{|x|} = \frac{m}{(\sqrt{1+m^2})^3}$$

tenemos que el dicho límite no existe.

Concluimos entonces que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(e^{xy}-1)}{\|(x,y)\|^3}$ no existe y por lo tanto f no es diferenciable en $(0,0)$.

Ejercicio: Graficar todas las funciones en GeoGebra y vicualizar el comportamiento de cada una alrededor del punto donde se está estudiando la diferenciabilidad.