**Derivadas parciales:**

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in D$. Las derivadas parciales de $f$ en $(x_0, y_0)$ se definen como límites por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

**Notación:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$$

Esta noción de derivadas parciales se extiende a funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. En ese caso hay $n$ derivadas parciales.

**Ejercicio:** Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones

a) $f(x, y) = e^{-y} \cos(\pi x)$

b) $f(x, y) = \dfrac{5x + 7y}{x - 2y}$

c) $f(x, y, z, t) = x^2 y \cos(\frac{z}{t})$

**Solución:**

a) Para calcular la derivada parcial de $f$ con respecto a $x$ pensamos a $f(x, y)$ como una función de la variable $x$, y la variable $y$ la consideramos constante (respecto a $x$). Entonces

$$f_x(x, y) = -\pi e^{-y} \operatorname{sen}(\pi x).$$

Análogamente, la derivada parcial de $f$ con respecto a $y$ la calculamos pensando a $f$ como una función de $y$ considerando a $x$ como constante respecto a $y$, es decir,

$$f_y(x, y) = -e^{-y} \cos(\pi x).$$

b) Observamos que el dominio de $f$ es $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y \neq 0\}$. Como $f$ es un cociente de funciones derivables (en cada variable) en su dominio podemos calcular las derivadas parciales.

$$f_x(x, y) = \frac{5(x - 2y) - (5x + 7y)}{(x - 2y)^2} = \frac{5x - 10y - 5x - 7y}{(x - 2y)^2} = \frac{-17y}{(x - 2y)^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{7(x - 2y) - (5x + 7y)(-2)}{(x - 2y)^2} = \frac{7x - 14y + 10x + 14y}{(x - 2y)^2} = \frac{17x}{(x - 2y)^2}.$$

c) Notamos que $f : D \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, donde $D = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t \neq 0\}$. Tendremos en total cuatro derivadas parciales de $f$ (una por cada variable):

$$f_x(x,y) = 2xy\cos(\tfrac{z}{t})$$

$$f_y(x,y) = x^2\cos(\tfrac{z}{t})$$

$$f_z(x,y) = -x^2y\,\mathrm{sen}(\tfrac{z}{t})(\tfrac{1}{t}) = -\frac{x^2y\,\mathrm{sen}(\frac{z}{t})}{t}$$

$$f_t(x,y) = -x^2y\,\mathrm{sen}(\tfrac{z}{t})(-\tfrac{z}{t^2}) = \frac{x^2yz\,\mathrm{sen}(\frac{z}{t})}{t^2}$$

**Ejercicio:** Calcular todas las derivadas parciales de segundo orden de la función

$$f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}.$$

**Solución:** Primero calculamos las derivadas de primer orden:

$$f_x(x,y) = \frac{-2xy}{(1+x^2)^2} \qquad \text{y} \qquad f_y(x,y) = \frac{1}{1+x^2}.$$

**Notación:** Las derivadas de segundo orden las denotamos por

$$f_{xx} = \frac{\partial f}{\partial x^2} \qquad f_{xy} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x} \qquad f_{yx} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \qquad f_{yy} = \frac{\partial f}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= \frac{(-2y)(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)(2x)(-2xy)}{(1+x^2)^4} = \frac{(-2y)(1+x^2)^2 + 8x^2y(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \\
&= \frac{(-2y)(1+x^2) + 8x^2y}{(1+x^2)^3} = \frac{-2y - 2yx^2 + 8x^2y}{(1+x^2)^3} = \frac{-2y+6x^2y}{(1+x^2)^3} \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\
f_{yx}(x,y) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\
f_{yy}(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

*Comentario:* Observar que $f_{xy} = f_{yx}$.

**Ejercicio:** Usando la definición de derivada parcial como límites, calcular $f_x(0,1)$ y $f_y(0,1)$ para la función

$$f(x,y) = \frac{x}{x+y^2}.$$

**Solución:** Usando la definición de derivadas parciales tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,1) - f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t}{t+1} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t+1} = 1$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,1+t) - f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$