Definición de límite en $\mathbb{R}^2$:
Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ ($\overline{A}$ denota la clausura de A). Recordemos que formalmente decimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$$

Comentarios:

- Queremos que $f(x, y)$ esté cerca del punto ℓ si (x, y) está cerca del punto (x_0, y_0).
- No nos interesa qué ocurre con $f(x, y)$ exactamente en el punto (x_0, y_0).

Ejercicio: Demostrar por definición que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{2x^2 + y^2} = 0$$

Solución: Sea $\varepsilon > 0$. Veamos que existe $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que

$$0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x^3y}{2x^2 + y^2}\right| < \epsilon.$$

Para encontrar δ comenzamos acotando la expresión $\left|\frac{x^3y}{2x^2+y^2}\right|$ por alguna expresión que dependa de $\|(x, y)\|$ ya que la información que tenemos es que $\|(x, y)\| < \delta$: notemos que si escribimos $x^3 = x^2x$ y multiplicamos y dividimos por 2 tenemos que

$$\left|\frac{x^3y}{2x^2 + y^2}\right| = \left|\frac{2x^2}{2x^2 + y^2}\right| \frac{|x||y|}{2}. \tag{1}$$

Ahora, como $2x^2 \leq 2x^2 + y^2$, el cociente $\frac{2x^2}{2x^2+y^2}$ es menor o igual a 1. Por otro lado, vale que

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Por lo tanto, (1) se puede acotar de la siguiente manera:

$$\left|\frac{x^3y}{2x^2 + y^2}\right| = \left|\frac{2x^2}{2x^2 + y^2}\right| \frac{|x||y|}{2} \leq \frac{\|(x, y)\|^2}{2} < \frac{\delta^2}{2}. \tag{2}$$

Como queremos que lo anterior sea menor que ε, imponemos que $\delta^2/2 < \varepsilon$ con lo cual $\delta < \sqrt{2\varepsilon}$. En resumen, para cada $\varepsilon > 0$ si elegimos $\delta < \sqrt{2\varepsilon}$ se cumple que

$$0 < \|(x, y)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x^3y}{2x^2 + y^2}\right| < \frac{\delta^2}{2} < \varepsilon.$$

Esto concluye la demostración.

Recordemos algunas propiedades de límites.

Propiedades:
Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones y $(x_0, y_0) \in \overline{A}$. Supongamos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell_1 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell_2.$$

Entonces:

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \ell_1 + \ell_2.$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \cdot \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \ell_1 \cdot \ell_2.$
3. Si $g(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in A$ y $\ell_2 \neq 0$ entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

Ejercicio: Calcular, si existen, los siguientes límites. En caso contrario demostrar que no existen.

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{3x - y + 1}{xy}$

   Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-2)} (3x - y + 1) = 6$ y $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-2)} xy = -2$, concluimos por las propiedades de límites que

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{3x - y + 1}{xy} = \frac{6}{-2} = -3.$$

2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^3y + x^2y)}{x^2 + y^2}$

   Para este ejercicio será de utilidad la desigualdad $|\operatorname{sen}(x)| \leq |x|$, $x \in \mathbb{R}$ (que es consecuencia del Teorema del valor medio de Lagrange, como vimos en clase).

   Recordemos que para probar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ podemos usar una desigualdad del tipo $0 \leq |f(x,y)| \leq |g(x,y)|$. Si sabemos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0$ entonces $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$.

   Vamos a intentar acotar el módulo de la función $\dfrac{\operatorname{sen}(x^3y + x^2y)}{x^2 + y^2}$:

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x^3y + x^2y)}{x^2 + y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3y + x^2y}{x^2 + y^2}\right| = \left|\frac{x^2(xy + y)}{x^2 + y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right| |xy + y| \leq |xy + y|.$$

   En la primera desigualdad usamos que $|\operatorname{sen}(x^3y + x^2y)| \leq |x^3y + x^2y|$ y en la última desigualdad usamos que $\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1$. Luego, como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (xy + y) = 0$ concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^3y + x^2y)}{x^2 + y^2} = 0.$$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + xy + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

Otra herramienta útil para calcular algunos límites es el cambio a coordenadas polares. Recordemos que un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se puede expresar en coordenadas polares como

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ es la distancia del punto al origen de coordenadas $(0, 0)$ y θ es el ángulo que forma semieje positivo de las x.

Notemos que al reemplazar (x, y) por sus coordenadas polares, la condición $(x, y) \to (0, 0)$ se reemplaza con $r \to 0$ (con $\theta \in \mathbb{R}$).

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + xy + y^2)\ln(x^2 + y^2) &= \lim_{r\to 0^+} (r^2\cos^2\theta + r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + r^2\cos^2\theta)\ln(r^2) \\ &= \lim_{r\to 0^+} (r^2 + r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\ln(r^2) \\ &= \lim_{r\to 0^+} (1 + \cos\theta\operatorname{sen}\theta)r^2\ln(r^2) \end{aligned}$$

Observando que $|1 + \cos\theta\operatorname{sen}\theta| \leq 2$ (es decir, es acotado) y $\lim\limits_{r\to 0^+} r^2\ln(r^2) = 0$ concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + xy + y^2)\ln(x^2 + y^2) = \lim_{r\to 0^+} (1 + \cos\theta\operatorname{sen}\theta)r^2\ln(r^2) = 0.$$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 + xy + y^3}{2x^2 + y^2}$.

Recordemos que cuando el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ existe, no importa por qué camino nos acercquemos a (x_0, y_0), siempre el valor del límite existe y da lo mismo.
Entonces, si encontramos dos caminos que se acercan a (x_0, y_0) y el límite nos da valores distintos, podemos concluir que el límite no existe.

Para analizar la existencia del límite dado vamos a acercarnos por distintas trayectorias que tienden al origen $(0, 0)$, para ver qué ocurre con el valor del límite. Por ejemplo, si nos acercamos primero por el eje x, es decir, por la recta $y = 0$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + xy + y^3}{2x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0.$$

Análogamente, si nos acercamos por el eje y, es decir, por la recta $x = 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + xy + y^3}{2x^2 + y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^2} = \lim_{y\to 0} y = 0.$$

Aunque al acercarnos por los ejes coordenados el valor del límite da lo mismo, esto no es suficiente para dar una conclusión.

Probemos ahora acercándonos por rectas que pasan por el origen, es decir, $y = mx$ con $m \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + xy + y^3}{2x^2 + y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + mx^2 + m^3x^3}{2x^2 + m^2y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{x^2(x + m + m^3x)}{x^2(2 + m^2)} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{(x + m + m^3x)}{2 + m^2} = \frac{m}{2 + m^2}
\end{aligned}$$

Como el resultado depende de m que es la pendiente de cada recta, esto nos dice que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 + xy + y^3}{2x^2 + y^2}$ no existe.

Ejercicio: Con ayuda de GeoGebra, graficar todas las funciones de los límites estudiados y visualizar el comportamiento de cada función alrededor del punto donde se pide calcular el límite.