Continuidad:

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ ($\overline{A}$ denota la clausura de A). Decimos que f es continua en (x_0, y_0) si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Para que f sea continua en (x_0, y_0):

- debe existir el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$,
- debe existir la imagen de f en (x_0, y_0),
- el límite de f cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) debe coincidir con la imagen de f en (x_0, y_0).

Decimos que f es continua en A si f es continua en todos los puntos de A.

Propiedades:
Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en A. Entonces

1. La suma $f + g$ es continua en A
2. El producto $f \cdot g$ es continua en A,
3. Si g no se anula en A, entonces el cociente f/g es continua en A.
4. La composición de funciones continuas es continua (siempre que se pueda hacer la composición).

Ejercicio: Estudiar la continuidad de las siguientes funciones. En caso de encontrar puntos donde la función es discontinua, clasificar la discontinuidad.

1. $f(x, y) = \dfrac{xy \operatorname{sen}(x)}{e^y x^2 + y^2}$

   Solución:

   Observamos primero que el dominio de f es $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Como las funciones $xy \operatorname{sen}(x)$ y $e^y x^2 + y^2$ son funciones continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y $e^y x^2 + y^2$ no se anula en ese conjunto, podemos afirmar que f es continua en todo su dominio.

   Aunque f no está definida en $(0, 0)$, podemos averiguar qué tipo de discontinuidad tiene en el punto $(0, 0)$ calculando el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$. Para ello podemos acotar la función $f(x, y)$ de la siguiente manera:

$$\left|\frac{xy \operatorname{sen}(x)}{e^y x^2 + y^2}\right| \leq \frac{|x||y||\operatorname{sen}(x)|}{e^y x^2 + y^2} \leq \frac{x^2|y|}{e^y x^2 + y^2} = \frac{e^y x^2}{e^y x^2 + y^2} e^{-y}|y|.$$

Usando que $\dfrac{e^y x^2}{e^y x^2 + y^2} \leq 1$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{-y}|y| = 0$, concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\operatorname{sen}(x)}{e^y x^2 + y^2} = 0.$$

Como el límite existe, decimos que la discontinuidad es evitable.

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy-y)^3}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}$

Solución:

Igual que antes podemos probar que $f(x,y)$ es una función continua en $\mathbb{R}^2 \setminus (1,0)$.

Veamos que ocurre en $(1,0)$. Por la definición de f tenemos que $f(1,0) = 0$. Además, el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(1,0)$ lo podemos calcular usanco coordenadas polares. Reemplazando en el límite $x-1 = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$, donde $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, nos queda

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy-y)^3}{(x-1)^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y(x-1))^3}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y(x-1))^3}{(x-1)^2+y^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{(r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^3}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^6\operatorname{sen}^3\theta\cos^3\theta}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} r^4 \operatorname{sen}^3\theta\cos^3\theta = 0 \end{aligned}$$

El último límite da cero ya que $sen^3\theta\cos^3\theta$ es una función acotada y $\lim\limits_{r\to 0^+} r^4 = 0$.

Vimos que el límite existe y coincide con el valor de $f(1,0)$, por lo tanto f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y + \cos(x^6+y^2) - 1}{x^6+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solución:

Afirmamos que f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ya que es un cociente de funciones continuas y el denominador $x^6 + y^2$ no se anula en ese conjunto.

El punto donde debemos estudiar la continuidad más cuidadosamente es el $(0,0)$. Por un lado, por la definición de f sabemos que $f(0,0) = 0$. Por otro lado, veamos si existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y + \cos(x^6+y^2) - 1}{x^6+y^2}.$$

Como en el numerador de f tenemos una suma de varias funciones estudiemos por separado la existencia de los siguientes límites:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2} \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^6+y^2)-1}{x^6+y^2}.$$

Comencemos con el límite de la derecha: si llamamos $u = x^6 + y^2$ tenemos que si $(x, y) \to (0, 0)$ entonces $u \to 0$. Luego,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^6 + y^2) - 1}{x^6 + y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t) - 1}{t} = 0.$$

Ahora si estudiamos el límite de la izquierda por rectas que pasan por el origen $y = mx$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^6 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^6 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^4 + m^2} = 0$$

Sin embargo, si nos acercamos por la curva $y = x^3$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{2x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Como acercándonos al $(0, 0)$ por caminos diferentes el valor del límite da distinto, el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ no existe.

Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y + \cos(x^6 + y^2) - 1}{x^6 + y^2}$ no existe.

Así que f no es continua en $(0, 0)$ y el tipo de discontinuidad es esencial.

4. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y} & \text{si } y \neq -x \\ 1 & \text{si } y = -x \end{cases}$

Solución:

Notemos que el dominio de $f(x, y)$ es $\mathbb{R}^2$. Ahora si (x_0, y_0) es un punto que no está sobre la recta $y = -x$, se cumple que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y} = \frac{\operatorname{sen}(x_0 + y_0)}{x_0 + y_0} = f(x_0 + y_0).,$$

es decir, $f(x, y)$ es continua en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$. Veamos que ocurre en los puntos que están sobre la recta $y = -x$. Primero podemos observar que $f(x, y) = 1$. Además, si (x_0, y_0) cumple que $y_0 = -x_0$, haciendo el cambio de variables $t = x + y$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1.$$

Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{x + y} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1 = f(x_0, y_0)$, concluimos que f también es continua en los puntos que están sobre la recta $y = -x$. Por lo tanto, f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.