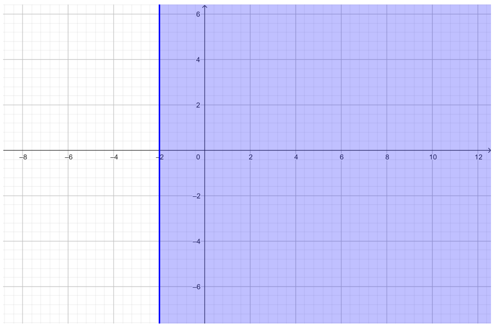
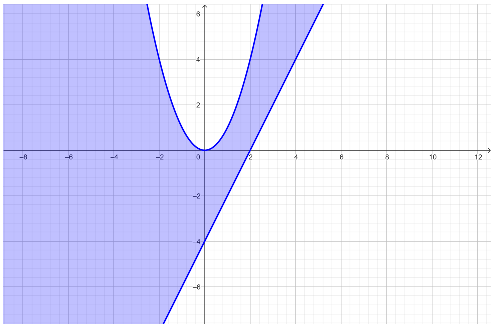
Clase 1 (Práctica 2) - Análisis 1 - Geometría en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ - Aplicaciones

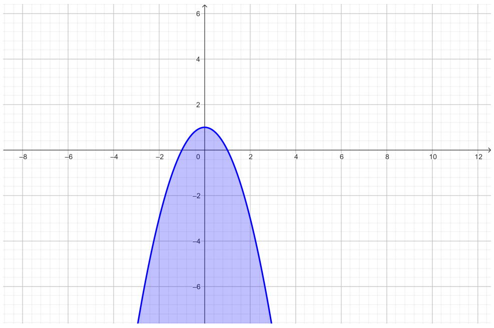
1. Graficar en $\mathbb{R}^2$ las siguientes inecuaciones.

   (a) $x \geq -2$ (b) $y \leq 1 - x^2$ (c) $2x - 4 \leq y \leq x^2$

   Los siguientes gráficos se hicieron en GeoGebra. Relacione cada gráfico con el ítem correspondiente.



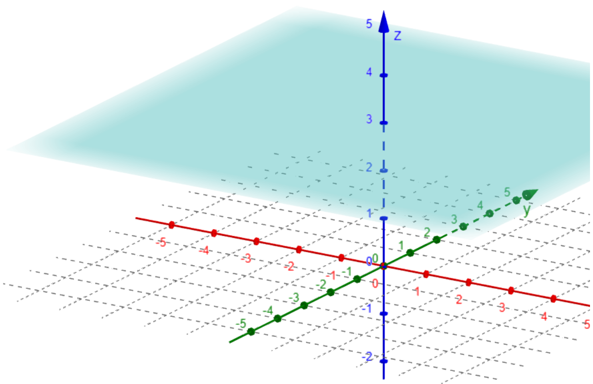


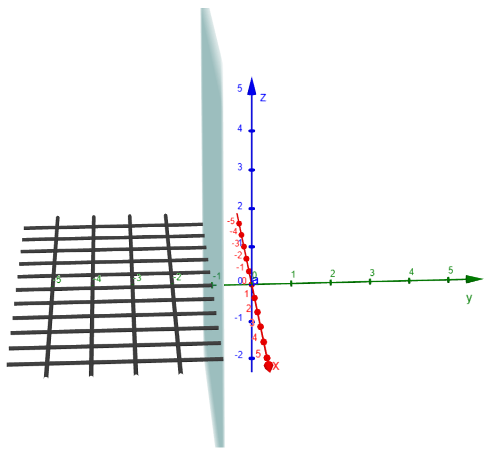


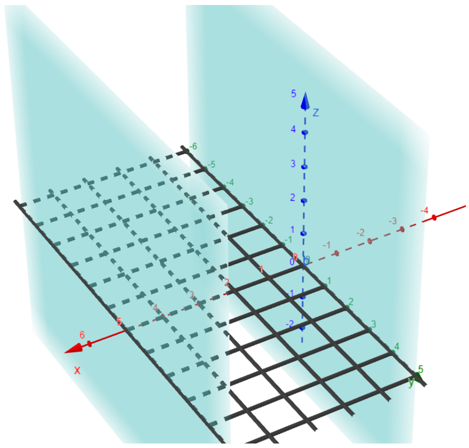
2. Representar gráficamente en $\mathbb{R}^3$ las siguientes ecuaciones e inecuaciones.

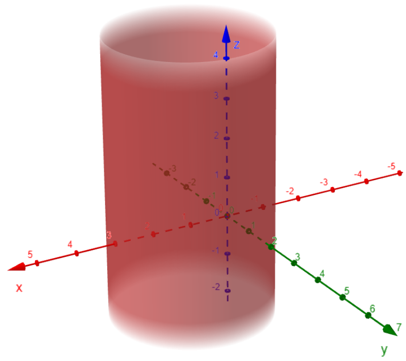
   (a) $z = 3$
   (b) $y < -1$
   (c) $0 \leq x \leq 5$
   (d) $4 \leq x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 9$
   (e) $(x-1)^2 + y^2 = 4$

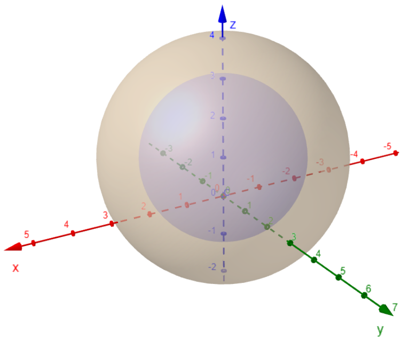
   En este ejercicio conviene escribir cada item como un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ para comprender qué región de $\mathbb{R}^3$ representa cada uno. Utilizando GeoGebra podemos obtener los siguientes gráficos para las inecuaciones y ecuaciones dadas. Relacione cada gráfico con el ítem correspondiente.











3. Demostrar que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y + 4z = 15$ representa una esfera y determinar su centro y su radio.

   Solución: Completando cuadrados en cada variable tenemos que:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 - 8y + z^2 + 4z &= 15 \\ (x-1)^2 - 1 + (y-4)^2 - 16 + (z+2)^2 - 4 &= 15 \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 &= 36 \end{aligned}$$

   El centro de la esfera es el punto $(1, 4, -2)$ y el radio es $r = 6$.

4. Si nos movemos a partir de $P = (3, -2)$ una longitud de 7 unidades en dirección (y sentido) de $\vec{v} = (-2, 1)$. ¿A qué punto llegamos?

   Solución: El recorrido desde el punto P en la dirección de $\vec{v}$ está dado por $t\vec{v} + P = t(-2, 1) + (3, -2) = (-2t + 3, t - 2)$. Buscamos t para que $\|Q - P\| = 7$ con $Q = (-2t + 3, t - 2)$. Entonces

$$\|(-2t + 3, t - 2) - (3, -2)\| = \sqrt{4t^2 + t^2} = \sqrt{5t^2} = 7$$

   con lo cual $t^2 = 49/5$, es decir, $t = \pm 7/\sqrt{5}$. Nos quedamos con $t = 7/\sqrt{5}$ ya que nos estamos moviendo en la dirección y sentido del vector $\vec{v}$.

   Finalmente, el punto Q al que llegamos es $Q = (\frac{-14}{\sqrt{5}} + 3, \frac{7}{\sqrt{5}} - 2)$.

   Si nos movemos en la dirección de $\vec{v}$ pero en sentido opuesto, el valor de t que elegimos es $t = -7/\sqrt{2}$ y por lo tanto llegamos al punto $Q' = (\frac{14}{\sqrt{5}} + 3, \frac{-7}{\sqrt{5}} - 2)$.