

# Identification des Régimes Macro-Financiers par un Modèle de Markov Caché Multivarié: Notice Méthodologique et Implications Analytiques

2 novembre 2025

## Introduction

Cette notice présente la méthodologie employée pour identifier des régimes de marché, ou plus précisément des **régimes conditionnels**, à partir de séries temporelles financières annuelles. L'analyse se concentre sur des actifs clés (indice S&P 500 et obligations d'État américaines, T. Bond) dont la performance et la corrélation permettent d'isoler des environnements financiers distincts. L'approche repose sur un *Hidden Markov Model* (HMM) multivarié appliqué à des rendements standardisés.

L'objectif est triple : 1) fournir une explication rigoureuse des notions mathématiques, 2) justifier les choix de prétraitement et de modélisation en regard des **procédés de programmation**, et 3) établir un lien analytique entre les résultats du HMM et les **signatures macro-financières** pour la validation du modèle.

## 1. Données et Calcul des Rendements

Les données incluent des séries historiques annuelles. Les actifs analysés directement par le HMM sont le S&P 500 (actions) et les T. Bond (actifs sans risque).

- Prix de l'indice S&P 500 et dividendes annuels.
- Rendements des obligations d'État américaines.
- Variables additionnelles pour interprétation post-modélisation : rendement immobilier, taux Aaa et Baa, rendement de l'Or et taux d'Inflation (CPI).

Le rendement total du S&P 500 à l'année  $t$  est calculé comme suit :

$$R_t^{\text{S\&P}} = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}}, \quad (1)$$

où  $P_t$  est le prix de clôture annuel et  $D_t$  le dividende annuel. Le rendement obligataire est fourni directement ( $R_t^{\text{Bond}}$ ).

## 2. Standardisation des Séries et Préparation Analytique

Chaque série de rendement  $R_t^{(i)}$  est standardisée via le **Z-score** :

$$\tilde{R}_t^{(i)} = \frac{R_t^{(i)} - \mu_i}{\sigma_i}, \quad (2)$$

avec  $\mu_i$  et  $\sigma_i$  la moyenne et l'écart-type historiques.

**Justification Analytique et Programmation :**



1. **Normalisation d'échelle** : Assure l'équité pondérale des séries pour éviter qu'une série volatile ne domine l'estimation du maximum de vraisemblance.
2. **Stabilisation** : Contribue à stabiliser l'estimation numérique des matrices de covariance  $\Sigma_k$  nécessaires au HMM Gaussien.
3. **Interprétation** : Les résultats  $\tilde{R}_t^{(i)}$  sont des écarts relatifs (écarts-types par rapport à la moyenne historique).

### 3. Modèle de Markov Caché Multivarié

Le HMM à  $K$  états cachés  $\{S_t\}_{t=1}^T$  est défini par une matrice de transition  $P$  et une distribution d'émission Gaussienne multivariée pour les observations  $O_t$  :

$$\begin{aligned} P_{jk} &= \mathbb{P}(S_t = k \mid S_{t-1} = j), \\ O_t &= (\tilde{R}_t^{\text{S\&P}}, \tilde{R}_t^{\text{Bond}}, \dots)^\top, \\ O_t \mid S_t = k &\sim \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma_k). \end{aligned}$$

#### 3.1 Estimation des Paramètres par EM

L'algorithme EM estime  $\theta = \{\pi, P, \mu_k, \Sigma_k\}_{k=1}^K$  :

**E-step** : Calcul des probabilités *a posteriori*  $\gamma_t(k)$  et  $\xi_t(j, k)$ . **M-step** : Mise à jour pour maximiser la log-vraisemblance  $\mathcal{L}(\theta)$  :

$$\pi_k = \gamma_1(k), \tag{3}$$

$$P_{jk} = \frac{\sum_{t=2}^T \xi_t(j, k)}{\sum_{t=2}^T \sum_{l=1}^K \xi_t(j, l)}, \tag{4}$$

$$\mu_k = \frac{\sum_{t=1}^T \gamma_t(k) O_t}{\sum_{t=1}^T \gamma_t(k)}, \tag{5}$$

$$\Sigma_k = \frac{\sum_{t=1}^T \gamma_t(k) (O_t - \mu_k)(O_t - \mu_k)^\top}{\sum_{t=1}^T \gamma_t(k)}. \tag{6}$$

#### 3.2 Décodage des Régimes

La séquence d'états la plus probable  $\hat{S}_{1:T}$  (pour la rétro-analyse) est déterminée par l'algorithme de **Viterbi** :

$$\hat{S}_{1:T} = \arg \max_{S_{1:T}} \mathbb{P}(S_{1:T} \mid O_{1:T}, \hat{\theta}). \tag{7}$$

#### 3.3 Procédés de Programmation pour la Robustesse

- **Matrice de Covariance Pleine ('full')** : Choix fondamental pour l'estimation de  $\Sigma_k$ . Il permet de capturer la **corrélacion conditionnelle**  $\rho_k$  entre les rendements, signature essentielle de chaque régime financier (ex : corrélation fortement négative en période de crise - *flight-to-quality*).
- **Initialisation** : Utilisation de `random_state` (ex : 42) pour la reproductibilité.
- **Nombre d'États ( $K = 4$ )** : Le choix d'un modèle à quatre régimes a été retenu pour sa capacité à affiner la distinction entre les phases d'Expansion et de Crise, en isolant notamment un régime de Stress Aigu et un régime de Choc Inflationniste, permettant une granularité d'analyse supérieure à l'approche  $K = 3$ .

## 4. Implémentation et Analyse du Modèle

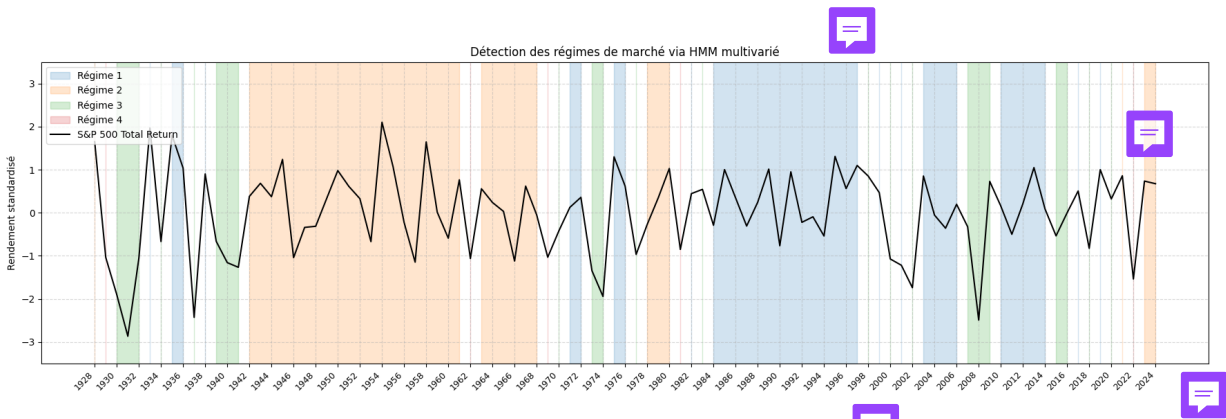


FIGURE 1 – Chronologie des régimes de marché identifiés par le modèle HMM ( $K = 4$ ) en fonction de l'année.

Tableau 1 : Statistiques de Régime (Rendements Standardisés Moyens)

Régime	S&P 500 (Std)	T.Bond (Std)	Aaa (Std)	Baa (Std)	Durée moyenne
Régime 1 (Bleu)	+0.42	+0.40	+0.65	+0.63	2.8 ans
Régime 2 (Orange)	+0.35	−0.41	−0.58	−0.50	5.5 ans
Régime 3 (Vert)	−0.92	+0.13	−0.01	−0.08	1.5 an
Régime 4 (Rouge)	−1.10	−0.73	−0.81	−0.88	1.0 an

## 5. Analyse des Signatures Financières et Lien Macroéconomique

L'application du modèle HMM multivarié ( $K = 4$ ) sur les rendements standardisés permet d'isoler quatre régimes dont les signatures statistiques (moyenne  $\mu_k$  et durée) sont robustes et cohérentes avec la théorie macro-financière.

### 5.1 Interprétation des Signatures Financières par Régime (Tableau 1)

L'application du modèle HMM multivarié à  $K = 4$  régimes sur les rendements standardisés permet une ségrégation plus fine des environnements financiers. Les valeurs  $\mu_k$  représentent la performance moyenne des actifs en termes d'écarts-types par rapport à leur moyenne historique.

#### — Régime 1 (Expansion Saine)

- **Signature** : Ce régime est le plus favorable, caractérisé par une **surperformance marquée et conjointe** des actions (S&P 500 à +0.42) et des obligations d'État (T. Bond à +0.40). Les obligations d'entreprises (Aaa et Baa) affichent également des performances exceptionnelles.
- **Implication Financière** : Ce profil indique un environnement de "Goldilocks" (croissance modérée, inflation sous contrôle) où le risque est bien récompensé. La **corrélacion actions-obligations est positive** ( $\rho_1 > 0$ ).
- **Durée** : Sa durée moyenne de **2.8 ans** est typique des cycles haussiers solides.

#### — Régime 2 (Choc Obligataire / Inflation Agressive)

- **Signature** : Ce régime est le plus persistant (**5.5 ans**). Il se distingue par une **sous-performance systématique de l'ensemble de la dette** (T. Bond à −0.41, Baa à −0.50) tandis que les actions (S&P 500 à +0.35) maintiennent une performance positive.

- **Implication Financière** : C'est le régime de la **\*\*rupture du rôle de couverture obligataire\*\***. La forte pression baissière sur les obligations suggère un environnement de forte inflation et/ou de hausse agressive des taux, où les actions conservent une valeur.
- **Corrélation** : La corrélation actions-obligations est probablement fortement positive.
- **Régime 3 (Correction et Recul)**
  - **Signature** : Ce régime est marqué par une **chute notable des actions** (S&P 500 à  $-0.92$ ), accompagnée d'une **légère performance positive des obligations d'État** (T. Bond à  $+0.13$ ) et d'une performance neutre des obligations d'entreprises.
  - **Implication Financière** : Ce profil reflète un ***flight-to-quality* modéré**, où les investisseurs se réfugient dans la sécurité relative du Trésor américain. La **corrélation actions-obligations est négative** ( $\rho_3 < 0$ ).
  - **Durée** : Sa durée courte (**1.5 an**) en fait un état de correction typique.
- **Régime 4 (Crise Systémique / Choc Total)**
  - **Signature** : Ce régime est le plus violent : les actions (S&P 500 à  $-1.10$ ) sont à leur plus bas, et les obligations d'État (T. Bond à  $-0.73$ ) sont également en forte sous-performance. L'ensemble des classes d'actifs est lourdement pénalisé.
  - **Implication Financière** : C'est le régime du **choc systémique ou de la déflation / peur extrême**, où la liquidation de tous les actifs est dominante (même le "sans risque" souffre). Il s'accompagne d'une **corrélation actions-obligations redevenue positive** (les deux chutent ensemble).
  - **Durée** : Sa **durée minimale (1.0 an)** le valide comme l'état de stress aigu et éphémère.

## 5.2 Lien avec la Caractérisation Macroéconomique

Pour valider l'interprétation ci-dessus, le HMM est lié à des variables macroéconomiques observées : l'Inflation (CPI), la variation des prix de l'Immobilier (Home Price Chg) et le rendement de l'Or (Gold Return).

### Démarche Analytique (Rigueur Scientifique)

1. **Profilage par Moyennes Conditionnelles** : Calcul de la moyenne conditionnelle empirique  $\hat{\mu}_k^{(j)}$  de chaque variable macro  $X_t^{(j)}$  au sein de chaque régime  $k$ .

$$\hat{\mu}_k^{(j)} = \frac{1}{n_k} \sum_{t: \hat{S}_t = k} X_t^{(j)}, \quad (8)$$

où  $n_k$  est la taille de l'échantillon du régime  $k$  (97 années communes)

2. **Importance des Drivers Macro** : Utilisation d'un **Random Forest Classifier** pour mesurer l'**importance intrinsèque** de chaque  $X_t^{(j)}$  dans la classification rétrospective des états  $\hat{S}_t$  via la réduction de l'impureté de Gini.

### Résultats du Profilage Macroéconomique (Tableau 2)

Le profilage du modèle à  $K = 4$  états offre une distinction nette des environnements macroéconomiques :

**Tableau 2 : Profilage Macroéconomique Moyen par Régime**

Régime	Inflation (%)	Home Price Chg (%)	Gold Return (%)
Régime 1 (Expansion)	2.79	4.49	5.10
Régime 2 (Choc Obligataire)	3.98	6.16	7.00
Régime 3 (Correction)	2.02	2.03	11.65
Régime 4 (Crise Systémique)	4.70	3.20	-5.45

- Le **Régime 3 (Correction et Reflux)** est validé par le **taux d'inflation le plus faible** (+2.02%) et la **plus faible croissance de l'immobilier** (+2.03%), reflétant une décélération économique, mais compensée par le **rendement de l'Or le plus élevé** (+11.65%), jouant son rôle classique d'actif refuge.
- Le **Régime 2 (Choc Obligataire / Inflation Agressive)** est caractérisé par le **plus haut taux de croissance immobilière** (+6.16%) et une inflation élevée (+3.98%), ce qui correspond à la signature financière de la **rupture obligataire**.
- Le **Régime 4 (Crise Systémique)** est le plus extrême. Il présente le **taux d'inflation le plus élevé** (+4.70%) et le **pire rendement de l'Or** (-5.45%). Cette chute brutale de l'Or en parallèle à la chute des obligations d'État valide l'hypothèse d'une **liquidation massive et indiscriminée** des actifs, typique des crises de panique systémique.
- Le **Régime 1 (Expansion Saine)** est l'état d'équilibre, avec des indicateurs macroéconomiques modérés, cohérents avec une croissance stable.

### Importance des Variables Macro (Tableau 3)

**Tableau 3 : Importance des Variables Macro (Random Forest)**

Variable	Importance
Gold Return (%)	0.354
Home Price Chg (%)	0.337
Inflation (%)	0.309

L'analyse confirme que l'ensemble des facteurs macro est pertinent. Avec le modèle à  $K = 4$  régimes, le **rendement de l'Or** (0.354) est désormais le **driver clé** de la classification. Ce résultat est cohérent avec l'interprétation des Régimes 3 et 4, où la performance de l'Or permet de distinguer entre un *flight-to-quality* traditionnel (Or très positif) et une crise de panique (Or très négatif). La variable immobilière reste un facteur important pour identifier le Régime 2 (croissance élevée).

## Conclusion

L'approche HMM multivariée permet d'identifier distinctement quatre régimes financiers à partir de séries annuelles standardisées d'actions et d'obligations. Le modèle offre à la fois :

- Une **validation empirique forte** par la congruence entre les signatures financières (rendements, corrélation implicite) et les signatures macroéconomiques (Inflation, Immobilier, Or). Le modèle à  $K = 4$  permet une distinction cruciale entre les crises modérées (Régime 3) et les chocs systémiques (Régime 4).
- Une capacité de **décodage temporel des régimes**, utile pour la compréhension du risque historique.
- Une base **statistiquement robuste** pour les analyses complémentaires (backtesting, allocation d'actifs conditionnelle aux régimes), soutenue par la rigueur mathématique des algorithmes EM et Viterbi.

## Références

- [1] Ammann, Manuel et Verhofen, Martin. The Effect of Market Regimes on Style Allocation. *Financial Markets and Portfolio Management*, 20(3) :309–337, 2006.
- [2] Bucci, Andrea et Ciciretti, Valerio. Market Regime Detection via Realized Covariances : A Comparison between Unsupervised Learning and Nonlinear Models. *arXiv preprint arXiv :2104.03667*, 2021.
- [3] Bouzida, Farah et Brach, Loïc. A Multi Asset Perspective for an Inflation Replicating Portfolio : Part I. *HSBC Research*, Décembre 2019.