

Identification des Régimes Macro-Financiers par un Modèle de Markov Caché Multivarié: Notice Méthodologique et Implications Analytiques

1^{er} novembre 2025

Introduction

Cette notice présente la méthodologie employée pour identifier des régimes de marché, ou plus précisément des **régimes conditionnels**, à partir de séries temporelles financières annuelles. L'analyse se concentre sur des actifs clés (indice S&P 500 et obligations d'État américaines, T. Bond) dont la performance et la corrélation permettent d'isoler des environnements financiers distincts. L'approche repose sur un *Hidden Markov Model* (HMM) multivarié appliqué à des rendements standardisés.

L'objectif est triple : 1) fournir une explication rigoureuse des notions mathématiques, 2) justifier les choix de prétraitement et de modélisation en regard des **procédés de programmation**, et 3) établir un lien analytique entre les résultats du HMM et les **signatures macro-financières** pour la validation du modèle.

1. Données et Calcul des Rendements

Les données incluent des séries historiques annuelles. Les actifs analysés directement par le HMM sont le S&P 500 (actions) et les T. Bond (actifs sans risque).

- Prix de l'indice S&P 500 et dividendes annuels.
- Rendements des obligations d'État américaines.
- Variables additionnelles pour interprétation post-modélisation : rendement immobilier, taux Aaa et Baa, rendement de l'Or et taux d'Inflation (CPI).

Le rendement total du S&P 500 à l'année t est calculé comme suit :

$$R_t^{\text{S\&P}} = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}}, \quad (1)$$

où P_t est le prix de clôture annuel et D_t le dividende annuel. Le rendement obligataire est fourni directement (R_t^{Bond}).

2. Standardisation des Séries et Préparation Analytique

Chaque série de rendement $R_t^{(i)}$ est standardisée via le **Z-score** :

$$\tilde{R}_t^{(i)} = \frac{R_t^{(i)} - \mu_i}{\sigma_i}, \quad (2)$$

avec μ_i et σ_i la moyenne et l'écart-type historiques.

Justification Analytique et Programmation :

1. **Normalisation d'échelle** : Assure l'équité pondérale des séries pour éviter qu'une série volatile ne domine l'estimation du maximum de vraisemblance.
2. **Stabilisation** : Contribue à stabiliser l'estimation numérique des matrices de covariance Σ_k nécessaires au HMM Gaussien.
3. **Interprétation** : Les résultats $\tilde{R}_t^{(i)}$ sont des écarts relatifs (écarts-types par rapport à la moyenne historique).

3. Modèle de Markov Caché Multivarié

Le HMM à K états cachés $\{S_t\}_{t=1}^T$ est défini par une matrice de transition P et une distribution d'émission Gaussienne multivariée pour les observations O_t :

$$\begin{aligned} P_{jk} &= \mathbb{P}(S_t = k \mid S_{t-1} = j), \\ O_t &= (\tilde{R}_t^{\text{S\&P}}, \tilde{R}_t^{\text{Bond}}, \dots)^\top, \\ O_t \mid S_t = k &\sim \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma_k). \end{aligned}$$

3.1 Estimation des Paramètres par EM

L'algorithme EM estime $\theta = \{\pi, P, \mu_k, \Sigma_k\}_{k=1}^K$:

E-step : Calcul des probabilités *a posteriori* $\gamma_t(k)$ et $\xi_t(j, k)$. **M-step** : Mise à jour pour maximiser la log-vraisemblance $\mathcal{L}(\theta)$:

$$\pi_k = \gamma_1(k), \tag{3}$$

$$P_{jk} = \frac{\sum_{t=2}^T \xi_t(j, k)}{\sum_{t=2}^T \sum_{l=1}^K \xi_t(j, l)}, \tag{4}$$

$$\mu_k = \frac{\sum_{t=1}^T \gamma_t(k) O_t}{\sum_{t=1}^T \gamma_t(k)}, \tag{5}$$

$$\Sigma_k = \frac{\sum_{t=1}^T \gamma_t(k) (O_t - \mu_k)(O_t - \mu_k)^\top}{\sum_{t=1}^T \gamma_t(k)}. \tag{6}$$

3.2 Décodage des Régimes

La séquence d'états la plus probable $\hat{S}_{1:T}$ (pour la rétro-analyse) est déterminée par l'algorithme de **Viterbi** :

$$\hat{S}_{1:T} = \arg \max_{S_{1:T}} \mathbb{P}(S_{1:T} \mid O_{1:T}, \hat{\theta}). \tag{7}$$

3.3 Procédés de Programmation pour la Robustesse

- **Matrice de Covariance Pleine ('full')** : Choix fondamental pour l'estimation de Σ_k . Il permet de capturer la **corrélacion conditionnelle** ρ_k entre les rendements, signature essentielle de chaque régime financier (ex : corrélation fortement négative en période de crise - *flight-to-quality*).
- **Initialisation** : Utilisation de `random_state` (ex : 42) pour la reproductibilité.
- **Nombre d'États ($K = 3$)** : Choix pragmatique pour distinguer les états macro-financiers clés : Expansion, Crise, Stagflation/Transition.

4. Implémentation et Analyse du Modèle

Tableau 1 : Statistiques de Régime (Rendements Standardisés Moyens)

Régime	S&P 500	T.Bond	Aaa	Baa	Durée moyenne
Régime 1 (Bleu)	+0.22	−0.36	−0.33	−0.24	3.4 ans
Régime 2 (Orange)	−1.11	+0.10	−0.25	−0.63	1.3 ans
Régime 3 (Vert)	+0.43	+0.43	+0.62	+0.75	8.0 ans

5. Analyse des Signatures Financières et Lien Macroéconomique

L'application du modèle HMM multivarié ($K = 3$) sur les rendements standardisés permet d'isoler trois régimes dont les signatures statistiques (moyenne μ_k et durée) sont robustes et cohérentes avec la théorie macro-financière.

5.1 Interprétation des Signatures Financières par Régime (Tableau 1)

Les valeurs μ_k représentent la performance moyenne des actifs en termes d'écarts-types par rapport à leur moyenne historique.

— Régime 3 (Boom / Expansion) :

- **Signature** : Ce régime est caractérisé par une **surperformance générale** : S&P 500 (+0.43) et T. Bond (+0.43) sont tous deux bien au-dessus de leur moyenne historique. Les obligations risquées (Baa à +0.75) performant le mieux, indiquant une forte réduction de la prime de risque.
- **Implication Financière** : Ce profil implique une **corrélacion actions-obligations modérément positive** ($\rho_3 > 0$), typique des environnements de "Goldilocks" où croissance et désinflation sont synchronisées.
- **Cohérence** : Sa **longue durée moyenne (8.0 ans)** est cohérente avec les grandes périodes de tendance haussière (ex. la Grande Modération).

— Régime 2 (Crise / Récession, Risk-Off) :

- **Signature** : Ce régime est caractérisé par une **sous-performance sévère des actifs risqués** (S&P 500 à −1.11) et des obligations d'entreprises (Baa à −0.63). Simultanément, les obligations d'État (T. Bond à +0.10) surperforment.
- **Implication Financière** : Cette divergence est la manifestation la plus claire du mécanisme de *flight-to-quality*, impliquant une **corrélacion actions-obligations fortement négative** ($\rho_2 < 0$).
- **Cohérence** : Sa **durée très courte (1.3 an)** le valide comme l'état de stress aigu du système financier (ex. 1929, 2008).

— Régime 1 (Stagflation / Tension Monétaire) :

- **Signature** : Les actions affichent une performance neutre (S&P 500 à +0.22), mais la signature clé est la **sous-performance de toutes les classes d'actifs obligataires** (T. Bond à −0.36).
- **Implication Financière** : Ce profil indique que l'obligation d'État n'a pas joué son rôle de couverture (−0.36), suggérant un environnement pénalisant pour la dette (ex. forte inflation, hausses de taux). La corrélacion actions-obligations redevient **positive ou faiblement négative** ($\rho_1 \approx 0$).
- **Cohérence** : Sa durée intermédiaire (**3.4 ans**) est cohérente avec les phases de transition économique difficiles (ex. Chocs pétroliers, Choc Volcker).

5.2 Lien avec la Caractérisation Macroéconomique

Pour valider l'interprétation ci-dessus, le HMM est lié à des variables macroéconomiques observées : l'Inflation (CPI), la variation des prix de l'Immobilier (Home Price Chg) et le rendement de l'Or (Gold Return).

Démarche Analytique (Rigueur Scientifique)

1. **Profilage par Moyennes Conditionnelles** : Calcul de la moyenne conditionnelle empirique $\hat{\mu}_k^{(j)}$ de chaque variable macro $X_t^{(j)}$ au sein de chaque régime k .

$$\hat{\mu}_k^{(j)} = \frac{1}{n_k} \sum_{t: \hat{S}_t = k} X_t^{(j)}, \quad (8)$$

où n_k est la taille de l'échantillon du régime k (97 années communes).

2. **Importance des Drivers Macro** : Utilisation d'un **Random Forest Classifier** pour mesurer l'**importance intrinsèque** de chaque $X_t^{(j)}$ dans la classification rétrospective des états \hat{S}_t via la réduction de l'impureté de Gini.

Résultats du Profilage Macroéconomique (Tableau 2)

Le profilage confirme la nature macroéconomique des régimes :

Tableau 2 : Profilage Macroéconomique Moyen par Régime

Régime	Inflation (%)	Home Price Chg (%)	Gold Return (%)
Régime 1 (Stagflation)	+3.57	+5.87	+9.77
Régime 2 (Crise)	+3.19	+2.45	+3.65
Régime 3 (Boom / Expansion)	+2.43	+3.69	+4.65

- Le **Régime 3 (Boom)** est validé par le **taux d'inflation le plus faible** (+2.43%).
- Le **Régime 2 (Crise)** est validé par la **plus faible croissance de l'immobilier** (+2.45%) et le **plus faible rendement de l'Or** (+3.65%), reflétant la peur et l'impact du choc sur l'économie réelle.
- Le **Régime 1 (Stagflation)** est validé par le **taux d'inflation le plus élevé** (+3.57%) et l'**excellent rendement de l'Or** (+9.77%), ce dernier servant de protection contre la dévaluation monétaire et la perte de valeur obligataire.

Importance des Variables Macro (Tableau 3)

Tableau 3 : Importance des Variables Macro (Random Forest)

Variable	Importance
Home Price Chg (%)	0.344
Gold Return (%)	0.339
Inflation (%)	0.316

L'analyse confirme que l'ensemble des facteurs macro est pertinent, avec l'Immobilier et l'Or agissant comme des ****drivers clés**** pour distinguer les états stables des états de choc ou d'inflation.

Conclusion

L'approche HMM multivariée permet d'identifier distinctement trois régimes financiers à partir de séries annuelles standardisées d'actions et d'obligations. Le modèle offre à la fois :

- Une **validation empirique forte** par la congruence entre les signatures financières (rendements, corrélation implicite) et les signatures macroéconomiques (Inflation, Immobilier, Or).
- Une capacité de **décodage temporel des régimes**, utile pour la compréhension du risque historique.
- Une base **statistiquement robuste** pour les analyses complémentaires (backtesting, allocation d'actifs conditionnelle aux régimes), soutenue par la rigueur mathématique des algorithmes EM et Viterbi.

Références

- [1] Ammann, Manuel et Verhofen, Martin. The Effect of Market Regimes on Style Allocation. *Financial Markets and Portfolio Management*, 20(3) :309–337, 2006.
- [2] Bucci, Andrea et Ciciretti, Valerio. Market Regime Detection via Realized Covariances : A Comparison between Unsupervised Learning and Nonlinear Models. *arXiv preprint arXiv :2104.03667*, 2021.
- [3] Bouzida, Farah et Brach, Loïc. A Multi Asset Perspective for an Inflation Replicating Portfolio : Part I. *HSBC Research*, Décembre 2019.