Multiples de 3

Tu sais peut-être déjà que, pour qu'un nombre soit multiple de 3, il faut (et suffit) que la **somme des chiffres** de ce nombre soit aussi multiple de 3. Nous allons ici en faire la preuve !

> **Remarque :**
>
> On ne peut pas utiliser le critère de divisibilité par 3 tout au long de cette fiche, car **c'est ce qu'on essaie de montrer !**

1 Puissance de 10

- Calcule $10 - 1 = ...$
  Est-ce un multiple de 3 ?
- Fait de même pour $100 - 1 = ...$ et $1000 - 1 = ...$.
  Peux-tu faire une hypothèse ?
- Essaie de prouver cette hypothèse (sans utiliser le critère de divisibilité par 3 !).

Indice
On sait que $10\ 000 = 10 \times 1000$. Donc, $10\ 000 - 1 = (1000 - 1) \times .... + ...$ Enfin, tu sais que $(1000 - 1)$ est multiple de 3 : donc, que peux-tu dire de $10\ 000 - 1$? Fait de même pour $100\ 000 - 1$.

> **Notation**
>
> On note 10^k pour dire **un 10 suivi de k zéros**.

On sait maintenant que quel que soit k, $10^k - 1$ est un multiple de 3.

2 Nombres généraux

Prenons le nombre $2\ 000\ 000$.

- D'après la section précédente, on peut dire que $1\ 000\ 000 - 1 = 3 \times n$ (où n est un nombre que nous ne connaissons pas. En tout cas pas moi :)). Donc

$$1\ 000\ 000 = ... \times n + ...$$

- Sachant cela, écrit

$$2\ 000\ 000 = 3 \times .... + ...$$

- De même, écrit

$$3\ 000\ 000 = 3 \times .... + ...$$

  Que remarques-tu ?

Prenons maintenant le nombre $5\ 000\ 010$.

- On écrit $1\ 000\ 000 - 1 = 3 \times n$ et $10 - 1 = 3 \times m$. Donc

$$1\ 000\ 000 = ... \times n + ... \qquad \text{et} \qquad 10 = ... \times m + ...$$

- Ainsi, on peut écrire

$$5\ 000\ 010 = 3 \times .... + ...$$

Conclus.