Chapitre 1 : Multiples, diviseurs, nombres premiers

Cours

Si on a trois nombres a, b et c tels que

$$a \times b = c$$

On dit que

- a et b sont des **diviseurs** de c.
- c est un **multiple** de a et de b.
- On dit que c est **divisible** par a et b.

Exemple

- 2 est un diviseur de 6.
- 7 est un diviseur de 21.
- 6 est un multiple de 2.
- 6 est un multiple de 3.
- 48 est un multiple de 4.

Cours : Critères de divisibilité

Parfois, on peut rapidement savoir si un nombre est un diviseur d'un autre nombre.

- Si le dernier chiffre d'un nombre est **pair**, ce nombre est un multiple de 2.
- Si la somme des chiffres d'un nombre est **un multiple de 3**, ce nombre est un multiple de 3.
- Si le dernier chiffre d'un nombre est **0 ou 5**, ce nombre est un multiple de 5.
- Si la somme des chiffres d'un nombre est **un multiple de 9**, ce nombre est un multiple de 9.

Exemple

- 1244 est un multiple de 2, car 4 est un multiple de 2.
- 546 est un multiple de 3, car $5 + 4 + 6 = 15$, qui est un multiple de 3.
- 200, 15, 35... Sont des multiples de 5.
- 279 est un multiple de 9, car $2 + 7 + 9 = 18$ est un multiple de 9.

Cours

Une **division euclidienne** se fait entre deux nombres entiers a et b. Il en résulte un

quotient et un **reste**.

$$\begin{array}{r|l} a & \quad\quad b \\ \cline{2-2} \vdots & \text{quotient} \\ \text{reste} & \end{array}$$

$$a = b \times \text{quotient} + \text{reste}$$

On obtient le quotient en soustrayant b aux chiffres de a.

Exemple

Faisons par exemple la division euclidienne de 377 par 12 :

$$\begin{array}{rcccc|l}
 & & 3 & 7 & 7 & 12 \\ \cline{6-6}
{\color{blue}0} \times 12 = 0 \rightarrow & - & {\color{blue}0} & & & \\ \cline{2-5}
 & & & & & {\color{blue}0}{\color{red}3}{\color{green}1} \\
 & & 3 & 7 & & \\
{\color{red}3} \times 12 = 36 \rightarrow & - & {\color{red}3} & {\color{red}6} & & \\ \cline{2-5}
 & & & 1 & 7 & \\
{\color{green}1} \times 12 = 12 \rightarrow & - & & {\color{green}1} & {\color{green}2} & \\ \cline{2-5}
 & & & & 5 &
\end{array}$$

On obtient ainsi un **quotient** de 31, et un **reste** de 5.

Cours

Un **nombre premier** est un nombre qui n'a que 1 et lui même comme diviseurs.

Note : il y a une infinité de nombres premiers.

Exemple

2, 3, 5 et 7 sont des nombres premiers.

On peut obtenir tous les nombres premiers entre 1 et 100 en utilisant un crible d'Eratosthène :

Règles :

- Barrer le nombre 1.
- Entourer le 2 (premier nombre non barré), puis barrer tous ses multiples.
- Entourer le premier nombre ni entouré ni barré, et barrer tous ses multiples.
- Répéter la consigne précédente, jusqu'à ce que tous les nombres soient soit entourés soit barrés.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Cours : Décomposition en nombres premiers

Tout nombre peut être **décomposé** en un produit de nombres premiers.
Pour trouver tous les diviseurs premiers d'un nombre, il faut essayer de diviser ce nombre par *tous* les nombres premiers qui lui sont inférieurs, jusqu'à n'avoir que des nombres premiers.

Exemple

- On veut décomposer 15 en nombres premiers :
  - 15 n'est pas un multiple de 2.
  - 15 est un multiple de 3 : on écrit $15 = 3 \times 5$.
  - 3 et 5 sont tous les deux premiers, donc on peut s'arrêter là.
- On veut décomposer 18 en nombres premiers :
  - 18 est un multiple de 2 : on écrit $18 = 2 \times 9$.
  - 9 n'est pas un multiple de 2.
  - 9 est un multiple de 3 : on écrit $18 = 2 \times 3 \times 3$.
  - 2 et 3 sont tous les deux premiers, donc on peut s'arrêter là.

  On remarque que le même nombre premier peut apparaître **plusieurs fois** dans la décomposition !
- On veut décomposer 231 en nombres premiers :
  - Grâce aux Critères de divisibilité, on peut déterminer que 231 et un multiple de 3 : on écrit $231 = 3 \times 77$.
  - 77 n'est pas un multiple de 2.

    - 77 n'est pas un multiple de 3.
    - 77 n'est pas un multiple de 5.
    - 77 est un multiple de 7 : on écrit $231 = 3 \times 7 \times 11$.
    - 3, 7 et 11 sont tous premiers, donc on peut s'arrêter là.
- $32 = 2 \times 16 = 2 \times 2 \times 8 = 2 \times 2 \times 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

Cours

Le **PGCD** est le **Plus Grand Commun Diviseur** : c'est le plus grand nombre qui divise deux nombres donnés.
Pour le calculer :

- On fait la liste des diviseurs premiers des deux nombres.
- On prend tous les nombres qui apparaissent dans les *deux* listes, et on les multiplient entre eux.

Exemple

On veut calculer le PGCD de 12 et de 20 (noté PGCD(12, 20)) :

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5$$

Donc PGCD(12, 20) = $2 \times 2 = 4$.

Exemple

On veut calculer le PGCD de 60 et de 126 :

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$$

Donc PGCD(60, 126) = $2 \times 3 = 6$.