Cours de Mathématiques

5ème

2021-2022

Chapitre 1

Multiples, diviseurs, nombres premiers

Cours

Si on a trois nombres a, b et c tels que

$$a \times b = c$$

On dit que

- a et b sont des **diviseurs** de c.
- c est un **multiple** de a et de b.
- On dit que c est **divisible** par a et b.

Exemple

- 2 est un diviseur de 6.
- 7 est un diviseur de 21.
- 6 est un multiple de 2.
- 6 est un multiple de 3.
- 48 est un multiple de 4.

Cours : Critères de divisibilité

Parfois, on peut rapidement savoir si un nombre est un diviseur d'un autre nombre.

- Si le dernier chiffre d'un nombre est **pair**, ce nombre est un multiple de 2.
- Si la somme des chiffres d'un nombre est **un multiple de 3**, ce nombre est un multiple de 3.
- Si le dernier chiffre d'un nombre est **0 ou 5**, ce nombre est un multiple de 5.
- Si la somme des chiffres d'un nombre est **un multiple de 9**, ce nombre est un multiple de 9.

Exemple

- 1244 est un multiple de 2, car 4 est un multiple de 2.
- 546 est un multiple de 3, car $5 + 4 + 6 = 15$, qui est un multiple de 3.
- 200, 15, 35... Sont des multiples de 5.

- 279 est un multiple de 9, car $2 + 7 + 9 = 18$ est un multiple de 9.

Cours

Une **division euclidienne** se fait entre deux nombres entiers a et b. Il en résulte un **quotient** et un **reste**.

$$\begin{array}{r|l} a & \qquad b \\ \cline{2-2} \vdots & \text{quotient} \\ \text{reste} & \end{array}$$

$$a = b \times \text{quotient} + \text{reste}$$

On obtient le quotient en soustrayant b aux chiffres de a.

Exemple

Faisons par exemple la division euclidienne de 377 par 12 :

$$\begin{array}{rcccc|l}
 & & 3 & 7 & 7 & 12 \\ \cline{6-6}
0 \times 12 = 0 \rightarrow & - & 0 & & & \\ \cline{2-5}
 & & & & & 031 \\
 & & 3 & 7 & & \\
3 \times 12 = 36 \rightarrow & - & 3 & 6 & & \\ \cline{2-5}
 & & & & & \\
 & & & 1 & 7 & \\
1 \times 12 = 12 \rightarrow & - & & 1 & 2 & \\ \cline{2-5}
 & & & & & \\
 & & & & 5 &
\end{array}$$

On obtient ainsi un **quotient** de 31, et un **reste** de 5.

Cours

Un **nombre premier** est un nombre qui n'a que 1 et lui même comme diviseurs.

Note : il y a une infinité de nombres premiers.

Exemple

2, 3, 5 et 7 sont des nombres premiers.

On peut obtenir tous les nombres premiers entre 1 et 100 en utilisant un crible d'Eratosthène :

Règles :

- Barrer le nombre 1.
- Entourer le 2 (premier nombre non barré), puis barrer tous ses multiples.
- Entourer le premier nombre ni entouré ni barré, et barrer tous ses multiples.
- Répéter la consigne précédente, jusqu'à ce que tous les nombres soient soit entourés soit barrés.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Cours : Décomposition en nombres premiers

Tout nombre peut être **décomposé** en un produit de nombres premiers.
Pour trouver tous les diviseurs premiers d'un nombre, il faut essayer de diviser ce nombre par *tous* les nombres premiers qui lui sont inférieurs, jusqu'à n'avoir que des nombres premiers.

Exemple

- On veut décomposer 15 en nombres premiers :
  - 15 n'est pas un multiple de 2.
  - 15 est un multiple de 3 : on écrit $15 = 3 \times 5$.
  - 3 et 5 sont tous les deux premiers, donc on peut s'arrêter là.
- On veut décomposer 18 en nombres premiers :
  - 18 est un multiple de 2 : on écrit $18 = 2 \times 9$.
  - 9 n'est pas un multiple de 2.
  - 9 est un multiple de 3 : on écrit $18 = 2 \times 3 \times 3$.
  - 2 et 3 sont tous les deux premiers, donc on peut s'arrêter là.

  On remarque que le même nombre premier peut apparaître **plusieurs fois** dans la décomposition !
- On veut décomposer 231 en nombres premiers :
  - Grâce aux Critères de divisibilité, on peut déterminer que 231 et un multiple de 3 : on écrit $231 = 3 \times 77$.
  - 77 n'est pas un multiple de 2.

- ◦ 77 n'est pas un multiple de 3.
  - ◦ 77 n'est pas un multiple de 5.
  - ◦ 77 est un multiple de 7 : on écrit $231 = 3 \times 7 \times 11$.
  - ◦ 3, 7 et 11 sont tous premiers, donc on peut s'arrêter là.
- $32 = 2 \times 16 = 2 \times 2 \times 8 = 2 \times 2 \times 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

Cours

Le **PGCD** est le **Plus Grand Commun Diviseur** : c'est le plus grand nombre qui divise deux nombres donnés.
Pour le calculer :

- On fait la liste des diviseurs premiers des deux nombres.
- On prend tous les nombres qui apparaissent dans les *deux* listes, et on les multiplient entre eux.

Exemple

On veut calculer le PGCD de 12 et de 20 (noté PGCD(12, 20)) :

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5$$

Donc PGCD(12, 20) = $2 \times 2 = 4$.

Exemple

On veut calculer le PGCD de 60 et de 126 :

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$$

Donc PGCD(60, 126) = $2 \times 3 = 6$.

Chapitre 2

Priorités opératoires

Cours : Vocabulaire

- Le résultat d'une addition est une **somme**. Les nombres additionés sont les **termes**.
- Le résultat d'une soustraction est une **différence**. Les nombres qui interviennent dans la soustraction sont les **termes**.
- Le résultat d'une multiplication est un **produit**. Les nombres multipliés sont les **facteurs**.
- Le résultat d'une division est un **quotient**.
  - Si l'opération est écrite avec le signe "$\div$", on dit qu'on divise un **dividende** par un **diviseur**.
  - Si l'opération est écrite comme une fraction, on dit qu'on divise un **numérateur** par un **dénominateur**.

On fera attention au vocabulaire utilisé, notamment les prépositions (de, par, entre, ...). Regarde bien les exemples ci-dessous pour savoir quoi utiliser.

Exemple

- Dans $6 + 3{,}2 = 9{,}2$:
  - 6 et 3,2 sont les **termes**.
  - 9,2 est la **somme** de 6 et 3,2.
- Dans $8{,}7 - 6{,}5 = 2{,}2$:
  - 8,7 et 6,5 sont les **termes**.
  - 2,2 est la **différence** entre 8,7 et 6,5.
- Dans $5 \times 1{,}2 = 6$:
  - 5 et 1,2 sont les **facteurs**.
  - 6 est le **produit** de 5 par 1,2.
- Dans $8 \div 5 = 1{,}6$:
  - 8 est le **dividende**, 5 est le **diviseur**.
  - 1,6 est le **quotient** de 8 par 5.
- Dans $\frac{6}{4} = 1{,}5$:
  - 6 est le **numérateur**, 5 est le **dénominateur**.
  - 1,5 est le **quotient** de 6 par 4.

Cours : Calcul sans parenthèses

- Dans une expression sans parenthèses ne contenant que des *additions* et des *soustractions*, on effectue les calculs **de la gauche vers la droite**.
- Dans une expression sans parenthèses ne contenant que des *multiplications* et des *divisions*, on effectue les calculs **de la gauche vers la droite**.

Exemple

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{6+3}-2-1 \\ A &= \underbrace{9-2}-1 \\ A &= \underbrace{7-1} \\ A &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \underbrace{20 \div 2} \times 3 \div 5 \\ B &= \underbrace{10 \times 3} \div 5 \\ B &= \underbrace{30 \div 5} \\ B &= 6 \end{aligned}$$

Cours : Calcul sans parenthèses 2

Dans les autres expressions sans parenthèses, on effectue **d'abord** les *multiplications* et les *divisions*, puis les *additions* et les *soustractions*.
On dit que la multiplication et la division sont **prioritaires** par rapport à l'addition et la soustraction.

Exemple

$$\begin{aligned} C &= 1+\underbrace{2 \times 4}-5 \\ C &= \underbrace{1+\ 8}-5 \\ C &= \underbrace{9-5} \\ C &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \underbrace{4 \div 2}+3 \times 5 \\ D &= 2+\underbrace{3 \times 5} \\ D &= \underbrace{2+\ 15} \\ D &= 17 \end{aligned}$$

Cours : Calcul avec parenthèses

Si une expression contient des morceaux entre parenthèses, on effectue **les calculs entre parenthèses en premier**.
Si il y a des parenthèses dans des parenthèses, on effectue **les calculs entre le plus de parenthèses en premier**.
⚠ Ajouter des parenthèses peut changer le résultat du calcul !

Exemple

$$\begin{aligned} E &= 2 \times (\underbrace{1+3}) \\ E &= \underbrace{2 \times\ 4} \\ E &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 3 \times (4-(\underbrace{1+2})) \\ F &= 3 \times (\underbrace{4-\ 3}) \\ F &= \underbrace{3 \times\ 7} \\ F &= 21 \end{aligned}$$

Exemple

Ajouter des parenthèses peut changer le résultat d'un calcul :

$$\begin{aligned} G &= \underbrace{3-2}-1 \\ G &= \underbrace{1-1} \\ G &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= 3-(\underbrace{2-1}) \\ H &= \underbrace{3-\ 1} \\ H &= 2 \end{aligned}$$

Cours : Calcul avec des fractions

Dans une fraction, on considère le numérateur et le dénominateur comme des expressions entre parenthèses.

Exemple

$$\mathrm{I} = \frac{\boxed{1 + 2} + 3}{1 + 1}$$

I peut aussi s'écrire $(1 + 2 + 3) \div (1 + 1)$

$$\mathrm{I} = \frac{\boxed{3 + 3}}{1 + 1}$$

$$\mathrm{I} = \frac{6}{\boxed{1+1}}$$

$$\mathrm{I} = \frac{6}{2}$$

$$\mathrm{I} = 3$$

Cours : Nature d'une expression

La nature d'une expression est déterminée par l'opération à effectuer en **dernier**.

Exemple

L'expression $4 + 5 \times 2$ est une **somme**, car on effectue l'addition en dernier.
C'est la **somme** de 4 et du **produit** de 5 par 2.

Chapitre 3

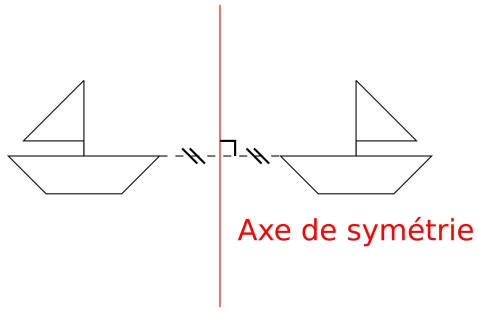
Symétrie

1 Symétrie axiale

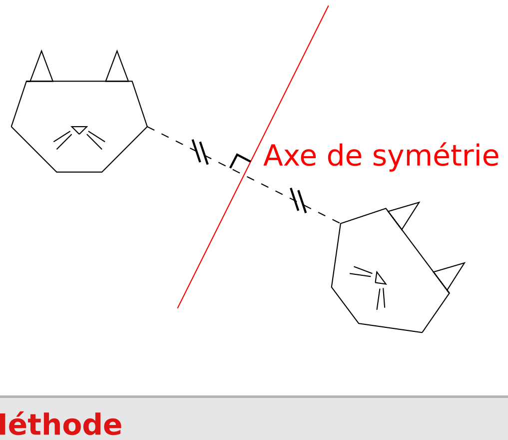
Cours

On dit que deux figures sont **symétriques par rapport à une droite** (appelée **l'axe de symétrie**) si elles se superposent quand on plie le long de cette droite.

Exemple



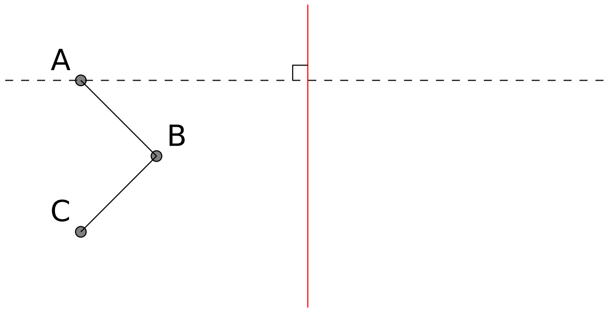
Exemple



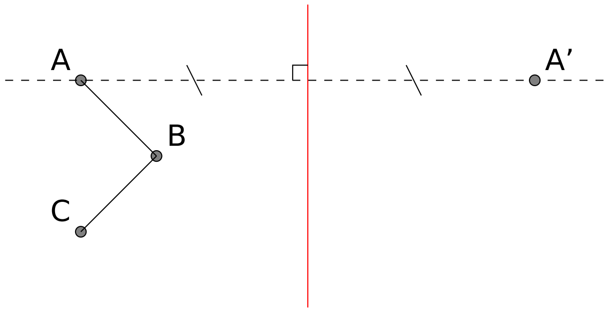
Méthode

Pour faire le symétrique par rapport à un axe :

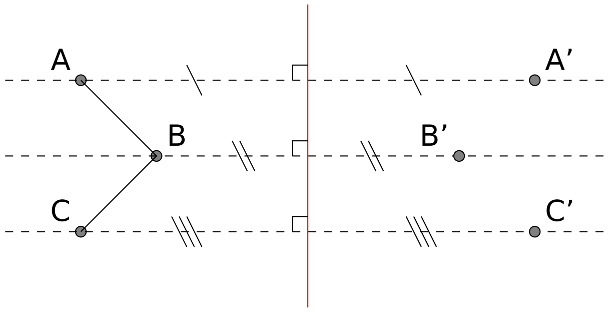
1. Pour chaque point sur la figure d'origine, trace une ligne passant par ce point, **perpendiculaire** à l'axe de symétrie.



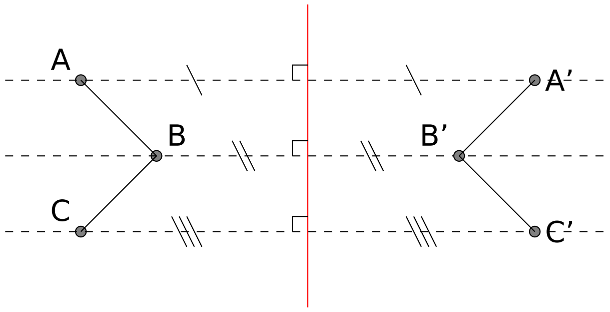
2. Puis, place un point **à la même distance** de l'autre côté de l'axe.



3. Fait de même pour les autres point :



4. Enfin, relie les points qui étaient reliés sur la figure d'origine.

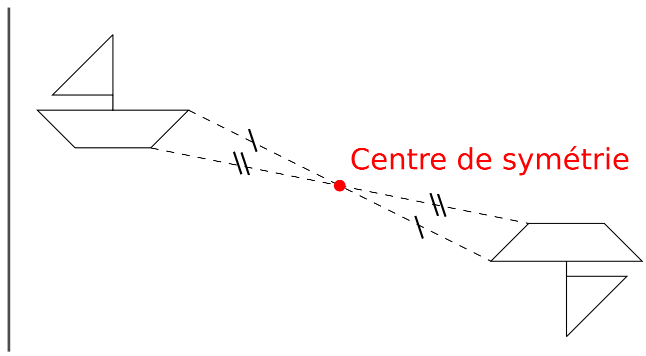


2 Symétrie centrale

Cours

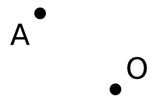
On dit que deux figures sont **symétriques par rapport à un point** (appelée **le centre de symétrie**) si elles se superposent quand fait un demi-tour autour du point.

Exemple

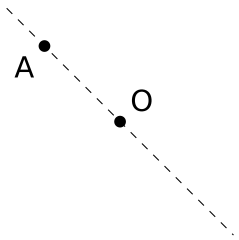


Méthode

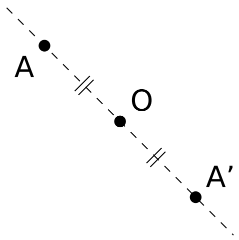
Pour faire le symétrique d'un point A par rapport à un centre O :



1. Trace la droite, qui part du point et passe par le centre :



2. Place le symétrique du point A **à égale distance de O** :

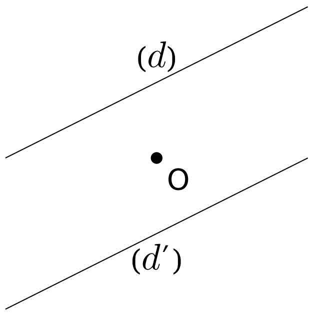


Tu peux utiliser un **compas** pour cette étape !

3 Propriétés de la symétrie centrale

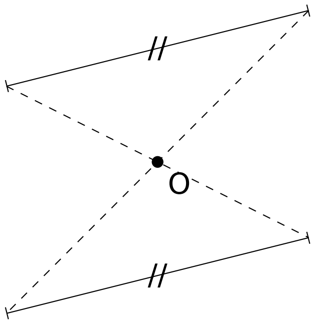
Cours

Si deux droites sont symétriques par rapport à un point, alors elles sont parallèles.



Cours

Le symétrique d'un segment par rapport à un point a la même longueur : la symétrie conserve les longueurs.



Cours

Deux figures symétriques par rapport à un point ont exactement la même forme : on dit que la symétrie centrale conserve les angles.

Chapitre 4

Proportionnalités et tableaux

1 Proportionnalité

Vocabulaire : Grandeur

Une **grandeur** est une caractéristique qui se mesure ou se calcule.
Par exemple le temps, la masse, la taille, le prix...

Cours : Proportionnalité

On dit que deux grandeurs sont **proportionnelles** si on peut obtenir l'une en multipliant l'autre par un nombre fixé. Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité**.

Exemple

On va acheter des livres en librairie : chaque livre coûte 10€.

- La première grandeur est **le nombre de livres**.
- La deuxième grandeur est **le prix des livres**.

Les deux grandeurs sont donc **proportionnelles**, car il suffit de multiplier le nombre de livres par 10 pour avoir le prix.

Exemple

La taille d'une personne n'est pas proportionnelle à son âge : si je mesure 1,50 mètres à 15 ans, je ne ferais pas 6 mètres à 60 ans !

Cours : Tableau de proportionnalité

Dans un **tableau de proportionnalité**, les nombres de la première ligne sont proportionnels avec ceux de la deuxième ligne.

Exemple

On mesure la distance parcourue par une voiture en deux heures, en fonction de sa vitesse :

Vitesse	20km/h	50km/h	40km/h	120km/h
Distance parcourue	40km	100km	80km	240km

C'est un tableau de proportionnalité, car on obtient la deuxième ligne en multipliant la première par deux.

2 Quatrième proportionnelle

Cours : Quatrième proportionnelle

Si un tableau de proportionnalité a quatre case, dont une seule vide, alors **on peut calculer la quatrième valeur**, qu'on appelle alors **quatrième proportionnelle**.

Méthode

Pour trouver une quatrième proportionnelle :

- Une des colonnes du tableau est remplie : on peut donc trouver le *coefficient de proportionnalité*.
- Si la valeur manquante est en bas, on **multiplie** la case au dessus par le coefficient de proportionnalité.
- Si la valeur manquante est en haut, on **divise** la case en dessous par le coefficient de proportionnalité.

Exemple

On sait que le tableau suivant est proportionnel :

Nombre de livres achetés	5	8
Prix	20€	??

× coefficient de proportionnalité

Le coefficient de proportionnalité est

$$20 \div 5 = 4$$

Donc le prix de 8 livres est

$$8 \times 4 = 32€$$

Remarque

On peut aussi passer d'une colonne à l'autre en multipliant/divisant par un nombre. Ce nombre change selon les colonnes.

3 Pourcentages

Cours : Pourcentage

Calculer x**%** (prononcé **x pour cent**) d'une quantité revient à calculer cette quantité multipliée par $\frac{x}{100}$.

Exemple

On a une réduction de 15% sur un gâteau qui coûte 10€.

On paie donc 15% en moins, c'est-à-dire $\frac{15}{100} \times 10 = 1{,}50€$ de moins.

Méthode : Calculer un pourcentage

Pour calculer un pourcentage à partir d'une fraction, il faut mettre le *dénominateur* de la fraction à 100.

4 Durées et horaires

Cours : Durées

- Dans une minute, il y a 60 secondes.
- Dans une heure, il y a 60 minutes.
- Dans une heure, il y a 3600 secondes.
- Dans une journée, il y a 24 heures.
- Dans une année, il y a 365 jours (sauf pendant une année bissextile).

Toutes ces grandeurs sont **proportionnelles**.

Chapitre 5

Nombres relatifs

1 Définition des nombres relatifs

Cours : Définition des nombres relatifs

- Un nombre **positif** est un nombre supérieur à 0. On le note avec le signe +, ou sans signe.
- Un nombre **négatif** est un nombre inférieur à 0. On le note avec le signe −.
- Les nombres positifs et négatifs forment les nombres **relatifs**.

Exemple

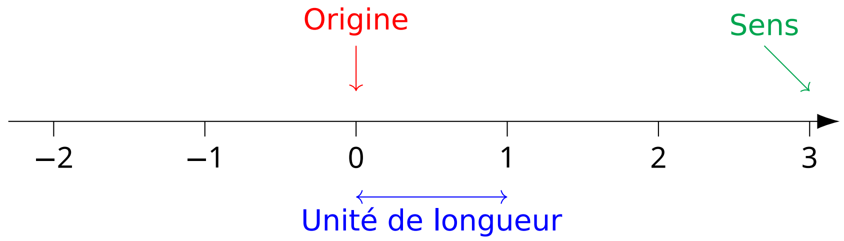
- 3,2 est un nombre positif. On peut aussi le noter +3,2.
- −5,3 est un nombre négatif.
- 0 est le seul nombre à la fois positif et négatif.
- Tous ces nombres (3,2, −5,3, 0, et d'autres) sont des nombres relatifs.

2 Repérage sur une droite

Définition : Droite graduée

Une **droite graduée** est une droite sur laquelle on a placé :

- Un point qu'on appelle une **origine**, qui porte le nombre 0 ;
- Un **sens**, représenté par une flèche ;
- Une **unité de longueur**, qu'on utilise pour marquer de nouveaux points à intervalles réguliers depuis l'origine.



Cours : Abscisse

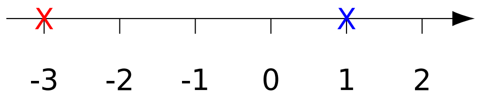
Chaque point d'une droite graduée correspond à un nombre relatif. On l'appelle **l'abscisse** de ce point.

3 Comparaison de nombres relatifs

Cours : Comparer des nombres relatifs

Lorsqu'on place deux nombres relatifs sur une droite graduée, le plus petit est celui à **gauche**.

Exemple



On voit que -3 est à gauche de 1.
Donc -3 est plus petit que 1.

Méthode : Comparer des nombres relatifs

Pour comparer deux nombres relatifs :

- Si ce sont deux nombres positifs :
  On sait déjà faire.
- Si ce sont un nombre négatif et nombre positif :
  Le nombre négatif est toujours plus **petit** que le nombre positif.
- Si ce sont deux nombres négatifs :
  Le plus petit est
  - celui qui est le plus **loin** de zéro.
  - celui qui est le plus **grand** lorsqu'on enlève les signe "-".

Exemple

- 1 est plus petit que 6. On note 1 < 6.
- 5,2 est plus grand que 5,1. On note 5,2 > 5,1.
- -3 est plus grand que -4, car 3 est plus *petit* que 4. On note -3 > -4.
- -2,5 est plus petit que -2,3, car 2,5 est plus *grand* que 2,3. On note -2,5 > -2,3.

Rappel : comparer des nombres à virgules

Pour comparer des nombres à virgule :

- On compare les parties entières (avant la virgule). Si l'une est plus petite que l'autre, c'est fini.
- Sinon, on regarde les chiffres après la virgule un par un.
  Le premier nombre à avoir un chiffre plus petit que l'autre, ou plus de chiffres, est le plus petit.

Exemple

On compare 25,12 et 25,13 :

- 25 = 25, donc on passe au premier chiffre après la virgule.
- 1 = 1, donc on passe au deuxième chiffre après la virgule.
- 2 < 3, donc 25,12 < 25,13.

4 Repérage dans un plan

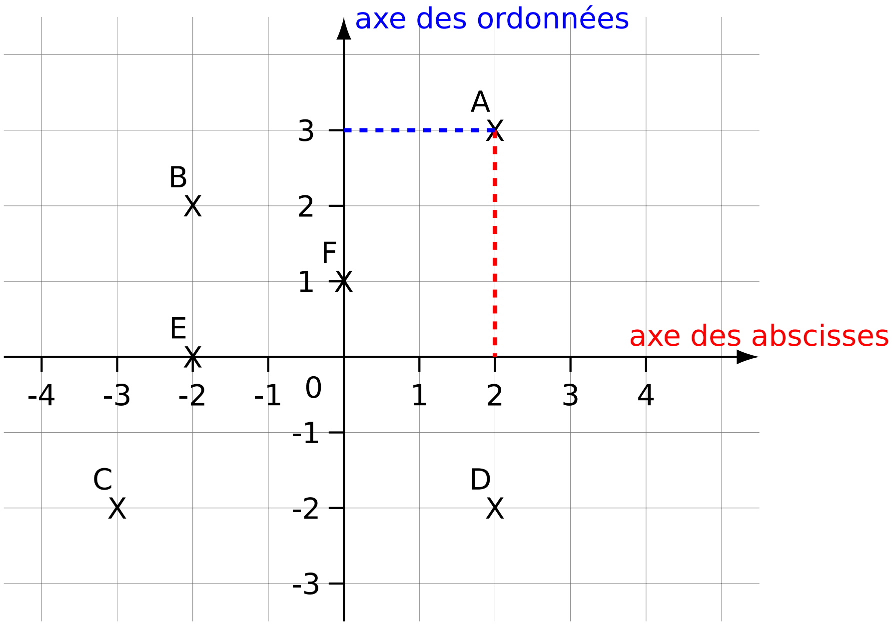
Cours : Repère du plan

Un **repère du plan** est formé de deux droite graduées de même origine. L'une est appelée **axe des abscisses**, l'autre **axe des ordonnées**.
Si les droites sont perpendiculaires, on dit que le repère est **orthogonal**.

Cours : Coordonnées

Dans un repère du plan, chaque point est répéré par deux nombres relatifs : l'un sur l'axe des abscisses, l'autre sur l'axe des ordonnées. Ce sont ses **coordonnées**.
On les note **(abscisse ; ordonnée)**.

Exemple



- Le point A a pour coordonnées (2 ;3).
- Le point B a pour coordonnées (-2 ;2).
- Le point C a pour coordonnées (-3 ;-2).
- Le point D a pour coordonnées (2 ;-2).
- Le point E a pour coordonnées (-2 ;0).
- Le point F a pour coordonnées (0 ;1).

Bonus : hiérarchie des nombres

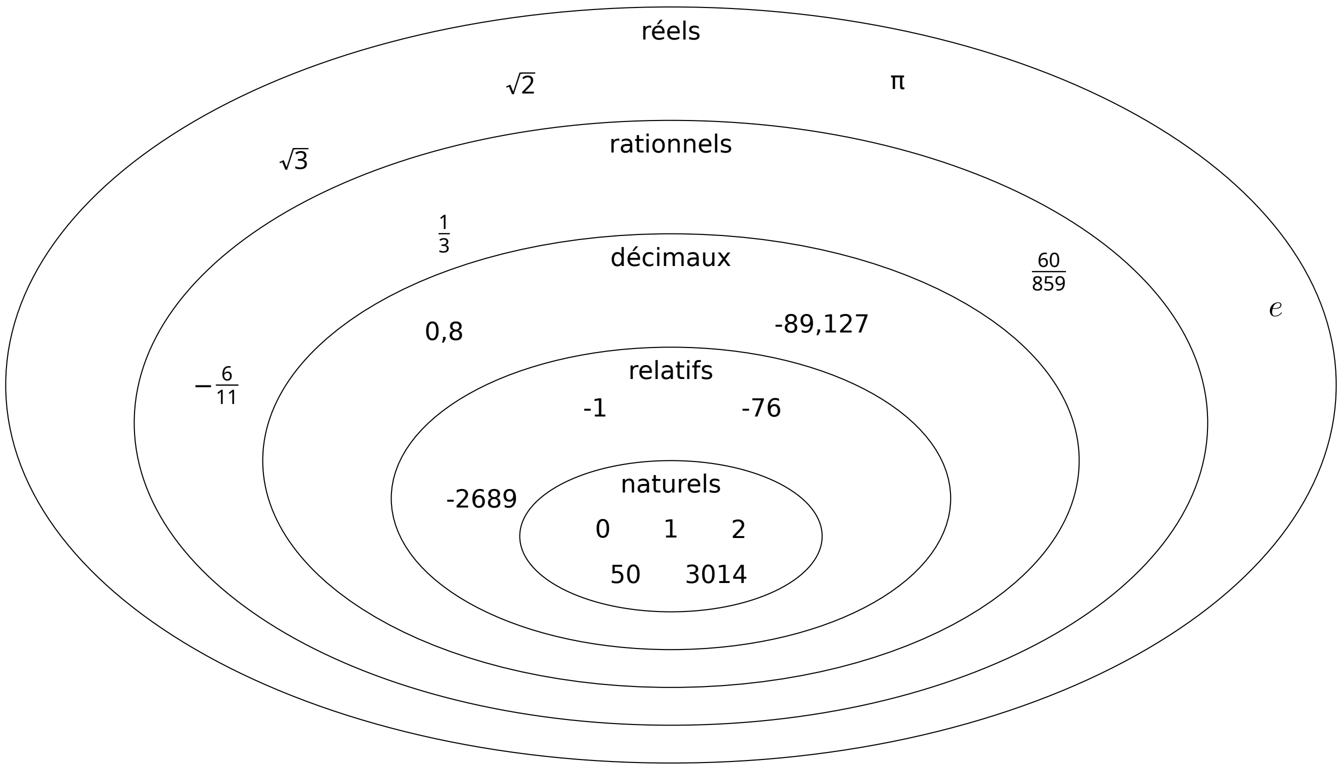
On remarque que, avec les nombres relatifs, on a ajouté une nouvelle catégories de nombres !
Il existe ainsi plusieurs catégories de nombres, chacune ajoutant un nouveau *type* de nombre :

- Les nombres entiers, dits **naturels**. Ceux-ci contiennent $0,1,2,\cdots$.
- Les nombres entiers **relatifs**, qui contiennent $0,1,2,\cdots$ mais aussi $-1,-2,-3,\cdots$.

> Dans le cours, le terme relatif s'applique aussi aux *nombres à virgules*. La plupart des mathématiciens préfèrent que les nombres relatifs ne soient que les *nombres entiers*.

- Les nombres **décimaux** : ce sont les nombres à virgules, mais qui ont seulement un nombre fini de chiffres après la virgule. Par exemple, $2{,}1$, 5 ou encore $-6{,}8$.
- Les nombres **rationnels** : ce sont les fractions.
- Les nombres **réels** : ce sont tous les nombres qui peuvent se placer sur une droite. Par exemple, pi (π) n'est pas un nombre rationnel (il ne peut pas s'écrire sous forme de fraction), mais c'est un nombre réel, égal à $3{,}141592\cdots$

On peut schématiser cela par le diagramme suivant :



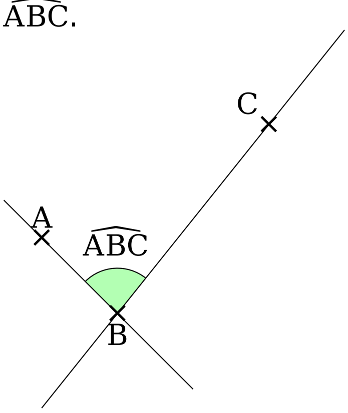
Chapitre 6

Angles, angles dans un triangles

Rappel sur les angles

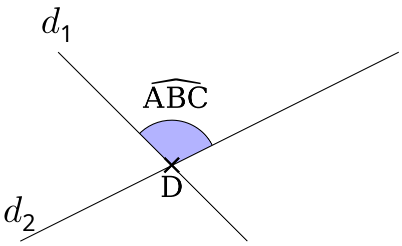
Rappel

Si on a trois points A, B et C, l'angle que forme les droites (AB) et (BC) est appelé $\widehat{\mathrm{ABC}}$.



Rappel

Si on a deux droite (d_1) et (d_2) qui s'intersectent en D, l'angle que forment ces deux droite est appelé $\widehat{d_1 \mathrm{D} d_2}$.



Rappel

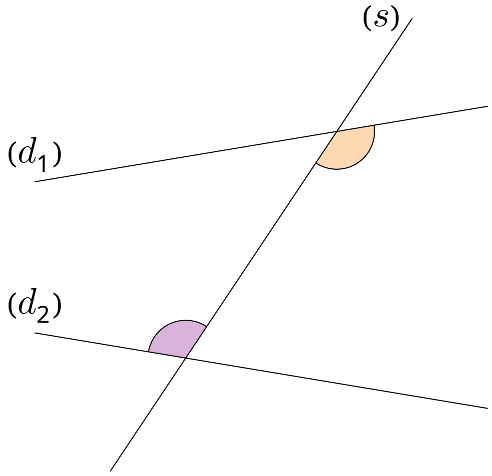
Le nombre qui indique l'écartement d'un angle est appelé sa **mesure**.

1 Angles alternes-internes

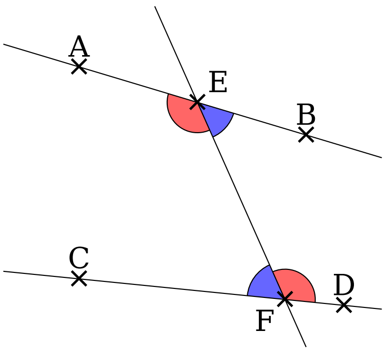
Cours : Angles alternes-internes

Soit (d_1) et (d_2) des droites, et (s) une droite qui intersecte (d_1) et (d_2) en A et B. Alors, deux angles sont **alternes-internes** si :

- Ils ont pour sommet A et B.
- Ils sont chacun d'un côté différent de la droite (s).
- Ils sont entre les droites (d_1) et (d_2).



Exemple



Sur cette figure, les angles

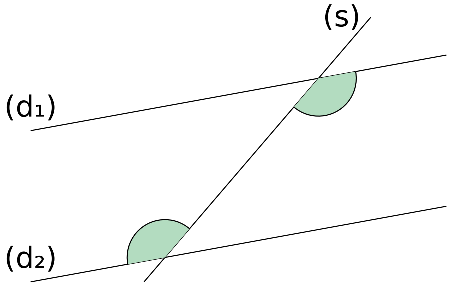
- $\widehat{\text{FEA}}$ et $\widehat{\text{EFD}}$ sont alternes-internes.
- $\widehat{\text{BEF}}$ et $\widehat{\text{CFE}}$ sont alternes-internes.

Cours

Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les angles alternes-internes ont la même mesure.

Exemple

(d_1) // (d_2)



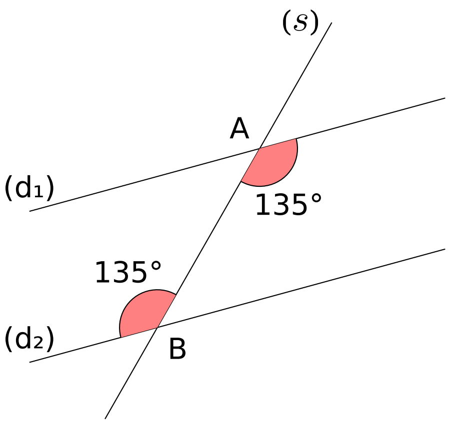
Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, donc les angles verts ont la même mesure.

2 Droites parallèles

Cours

Si deux droites (dont on ne sais pas encore si elles sont parallèles ou non) sont coupées par une sécante, et que les angles alternes-internes ont la même mesure, *alors* les droites sont parallèles.

Exemple



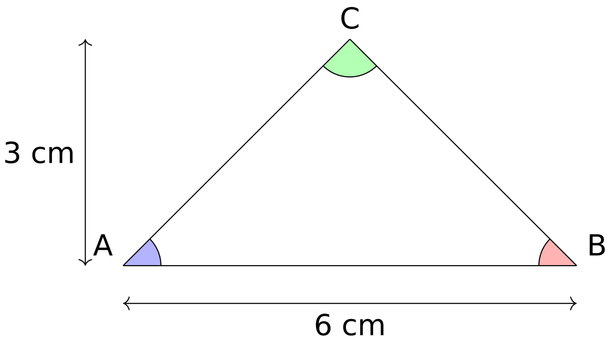
Sur la figure ci-contre, les angles $\widehat{d_1\mathrm{A}s}$ et $\widehat{d_2\mathrm{B}s}$ on la même mesure, et sont alternes-internes. Donc, les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

3 Angles dans un triangle

Cours

La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.

Exemple



Dans la figure ci-contre, on a

- $\widehat{\mathrm{ABC}} = 45°$
- $\widehat{\mathrm{BCA}} = 90°$
- $\widehat{\mathrm{CAB}} = 45°$

Et on retrouve bien

$$45° + 90° + 45° = 180°$$

Chapitre 7

Fractions

1 L'écriture fractionnaire

Cours : écriture fractionnaire

Soient a et b deux nombres, avec b non égal à 0. Le quotient de a par b est le nombre qui, multiplié par b, donne a.
On peut le noter :

- $a \div b$: c'est l'écriture **décimale**.
- $\frac{a}{b}$: c'est l'écriture **fractionnaire**.
  a est le **numérateur**.
  b est le **dénominateur**.

On ne peut **jamais** diviser par 0.

Exemple

Le quotient de 8 par 9 est $\frac{8}{9}$, et on a $\frac{8}{9} \times 9 = 8$.

Cours : Fractions

Lorsque a et b sont des nombres *entiers*, on dit que $\frac{a}{b}$ est une **fraction**.

2 Simplifier des fractions

Cours

Si on *multiplie* ou *divise* le numérateur *et* le dénominateur d'un quotient par le *même* nombre (différent de 0), la valeur du quotient reste la même.
Si a, b, et k sont trois nombres, avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$, alors

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Exemple

$$\frac{24}{30} = \frac{24 \div 6}{30 \div 6} = \frac{4}{5} \qquad \frac{3{,}5}{6} = \frac{3{,}5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{7}{12}$$

Cours

Pour **simplifier** une fraction, il faut écrire une autre fraction qui lui est égale, mais dont le numérateur et le dénominateur sont plus petits.
Pour simplifier au *maximum* une fraction, il faut utiliser le *PGCD*, vu au chapitre 1.
On dit alors que la fraction est **irréductible**.

Exemple

Pour simplifier $\frac{36}{15}$:

- 36 et 15 sont divisible par 3.
- Donc on a $\frac{36}{15} = \frac{36 \div 3}{15 \div 3} = \frac{12}{5}$

Exemple

Pour simplifier $\frac{84}{70}$:

- On a $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$ et $70 = 2 \times 5 \times 7$. Donc $\text{PGCD}(84, 70) = 2 \times 7 = 14$.
- Donc on a $\frac{84}{70} = \frac{84 \div 14}{70 \div 14} = \frac{6}{5}$.

3 Comparaison de fractions

Cours

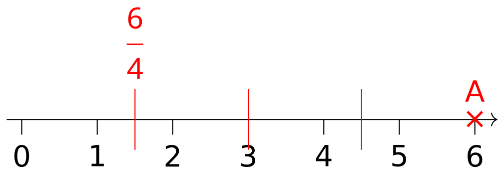
Pour placer une fraction $\frac{a}{b}$ sur une droite graduée, on peut :

- Calculer la valeur de $\frac{a}{b}$;
- Placer un point A d'abscisse a, et diviser le segment $[\mathrm{OA}]$ en b partie égales.

Exemple

Pour placer $\frac{6}{4}$, on peut :

- Calculer $\frac{6}{4} = 1{,}5$
- Placer le point A d'abscisse 6, et diviser le segment $[\mathrm{OA}]$ en 4 parties égales.



Cours : Comparer des fraction

Pour comparer des fractions, il faut qu'elles aient le même **dénominateur**. On les compare alors par leur numérateur.

Exemple

$\frac{8}{5} < \frac{9}{5}$, car $8 < 9$.

Méthode

Si on veut comparer deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur, il faut les modifier pour qu'elles aient le même dénominateur.
Pour comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$:
On multiplie le numérateur et le dénominateur de $\frac{a}{b}$ par d, et le numérateur et le dénominateur de $\frac{c}{d}$ par b.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d} \qquad \text{et} \qquad \frac{c}{d} = \frac{c \times b}{d \times b}$$

$$b \times d = d \times b$$

Exemple

Si on veut comparer $\frac{12}{10}$ et $\frac{8}{6}$:

$$\frac{12}{10} = \frac{12 \times 6}{10 \times 6} = \frac{72}{60} \qquad \text{et} \qquad \frac{8}{6} = \frac{8 \times 10}{6 \times 10} = \frac{80}{60}$$

Donc $\frac{12}{10} < \frac{8}{6}$.

Avancé

Méthode : Comparer des fractions

Pour comparer deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on peut mettre le dénominateur de ces fractions au **PPCM** de c et d.

Exemple

On voudrait comparer $\frac{17}{90}$ et $\frac{19}{110}$.

- 90 = 2×5×11 et 110 = 2×3×3×5, donc PPCM(90, 110) = 2×3×3×5×11 = 990.
- On a 90 × 11 = 990 et 110 × 9 = 990. Donc

$$\frac{17}{90} = \frac{17 \times 11}{90 \times 11} = \frac{187}{990}$$
$$\frac{19}{110} = \frac{19 \times 9}{110 \times 9} = \frac{171}{990}$$

Donc $\frac{17}{90} > \frac{19}{110}$.

Chapitre 8

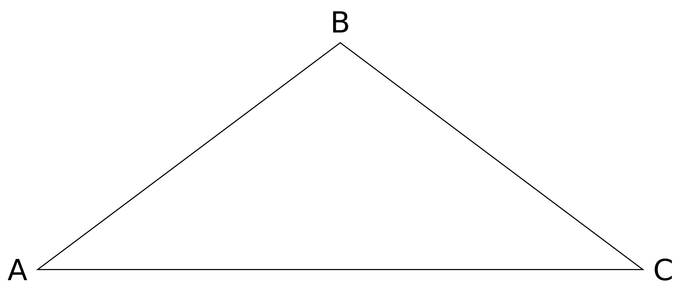
Triangles et cercles

1 Inégalité triangulaire

Cours : Inégalité triangulaire

Dans un triangle, la longueur d'un côté est **toujours inférieure** à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Exemple



AB = 5cm

BC = 5cm

AC = 8cm

On a

- AB < BC + AC
- BC < AB + AC
- AC < AB + BC

2 Médiatrice

Cours : Médiatrice

La **médiatrice** d'un segment [AB] est la droite qui

- Passe par le milieu de [AB].
- Est perpendiculaire à [AB].

Tous les points de la médiatrice sont alors **à égale distance** de A et B.

Cours

Dans un triangle ABC, les médiatrices des trois côtés se rencontrent **en un seul point**.
Ce point est alors **à égale distance** de A, B et C.

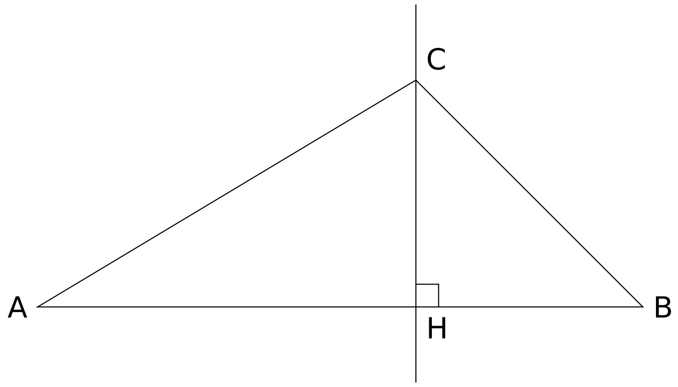
3 Hauteurs

Cours : Hauteur issue d'un sommet

Dans un triangle, la **hauteur issue d'un sommet** est la droite

- passant par ce sommet ;
- perpendiculaire au côté opposé.

Exemple



Ici, la hauteur issue de C est la droite (CH).

Chapitre 9

Calcul littéral

1 Expression littérale

Cours : Expression littérale

Une **expression littérale** est une expression dans laquelle un ou plusieurs nombres sont désignés par des lettres.

Exemple

$$\mathrm{A} = 2 \times x + 3 \qquad \mathrm{B} = x + 2 \times y$$

sont des expressions littérales.

Cours : Simplification d'écriture

Pour alléger l'écriture d'une expression littérale, le signe × peut être supprimé dans certains cas :

- Entre un nombre et une lettre :
  $3 \times a = 3a$
  $20 - 5 \times x = 20 - 5x$
- Entre 2 lettres :
- $x \times y = xy$
  $2 \times a \times b = 2ab$
- Entre un nombre et une parenthèse :
  $2 \times (x + 3) = 2(x + 3)$
  $5 \times (3 \times x - 1) = 5(3x - 1)$
- Entre une lettre et une parenthèse :
  $x \times (7 + y) = x(7 + y)$
  $6 \times x \times (2 + y) = 6x(2 + y)$
- Entre 2 parenthèses :
  $(5 + x) \times (3 - 2y) = (5 + x)(3 - 2y)$
- $1x$ s'écrit simplement x

Cours : Développer, factoriser

- **Développer** une expression littérale, c'est l'écrire comme une somme de termes.

- **Factoriser** une expression littérale, c'est l'écrire comme un produit de facteurs.

Exemple

- $\mathrm{A} = 7x + 3(x + 2)$ est une forme quelconque.
- $\mathrm{B} = 3z + 5 - 2z + 9$ est une forme développée.
- $\mathrm{C} = 5(g - 7)$ est une forme factorisée.
- $\mathrm{D} = (a - 3)(a + 4)$ est une forme factorisée.

Cours : Utilisation d'une expression littérale

Pour utiliser une expression littérale avec certaines valeurs, on *remplace* dans l'expression toutes les *lettres* par leurs *valeurs*.

Exemple

L'aire $\mathcal{A}$ d'un rectangle peut s'écrire comme le produit de sa longueur L et de sa largeur l :

$$\mathcal{A} = \mathrm{L} \times l$$

Si on veut calculer l'aire d'un rectangle de longueur 6 et de largeur 4, on doit donc remplacer L par 6 et l par 4 :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathrm{L} \times l \\ \mathcal{A} &= 6 \times 4 \\ \mathcal{A} &= 24 \end{aligned}$$

2 Tester une égalité

Cours : Égalité

- Une **égalité** est constituée de deux **membres** séparés par un signe =.
- Une égalité est **vraie** si les deux membres ont la même valeur.

Exemple

$$\underbrace{3 \times 6}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{13 + 5}_{\text{membre de droite}}$$

Cette égalité est *vraie* car les deux membres valent 18.

$$\underbrace{1 + 2 + 18}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{5 \times 4}_{\text{membre de droite}}$$

Cette égalité est *fausse* car le membre de gauche vaut 21, tandis que le membre de droite vaut 20.

Cours : Égalité avec des lettres

Si une égalité contient des lettres, elle peut être *vraie* pour certaines valeurs, et *fausse* pour d'autres.

Exemple

Considérons l'égalité $x + 6 = 19$.

- Si $x = 8$, cette égalité est fausse : on a 14 à gauche et 19 à droite.
- Si $x = 13$, cette égalité est vraie : on a 19 des deux côtés.

Résumé / carte mentale

Expression littérale

Les lettres désignent des nombres.
Exemple : $x + 2$

Calcul de la valeur d'une expression littérale

On remplace les lettres par leurs valeurs.
Exemple : Avec $x = 1$,

$$\begin{aligned} x + 2 &= 1 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Égalité

$$\underset{\text{membre de gauche}}{\mathrm{G}} = \underset{\text{membre de droite}}{\mathrm{D}}$$

Tester une égalité

Calcul de G puis calcul de D.

- Si Résultat G = Résultat D alors l'égalité est **vraie**.
- Si Résultat $\mathrm{G} \neq$ Résultat D alors l'égalité est **fausse**.

Chapitre 10

Série de données

1 Effectifs, fréquence, moyenne

Cours : Effectif

Dans une série de données :

- L'**effectif** d'une donnée est le nombre de fois où cette donnée apparait.
- L'**effectif total** est la somme de tous les effectifs.

Exemple

Voici les couleurs de cheveux des élèves dans une classe :

Taille	Blond	Brun	Noir
Nombre d'élèves	5	12	7

L'*effectif* des élèves ayant les cheveux blonds est 5.
L'*effectif total* est $5 + 12 + 7 = 24$.

Cours : Moyenne

Si les données sont des nombres, la **moyenne** de la série de données est égale à la somme de toutes ces données, divisées par l'effectif total.

Exemple

Si les cinq notes du semestre d'un élève sont 11, 12, 10, 15 et 17, sa moyenne est

$$\frac{11 + 12 + 10 + 15 + 17}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

Cours : Fréquence

La **fréquence** d'une donnée est obtenue en divisant son effectif par l'effectif total :

$$\text{fréquence d'une donnée} = \frac{\text{effectif de la donnée}}{\text{effectif total}}$$

2 Diagrammes et graphiques

Cours : diagrammes

- Dans un **diagramme en bâtons**, la hauteur d'un bâton est proportionnelle à l'effectif de la donnée associée.
- Lorsqu'il y a trop de données différentes, on peut les regrouper en **classes**, et utiliser un **histogramme**.
- Dans un **diagramme circulaire**, la mesure de chaque angle est proportionnelle à l'effectif associé.

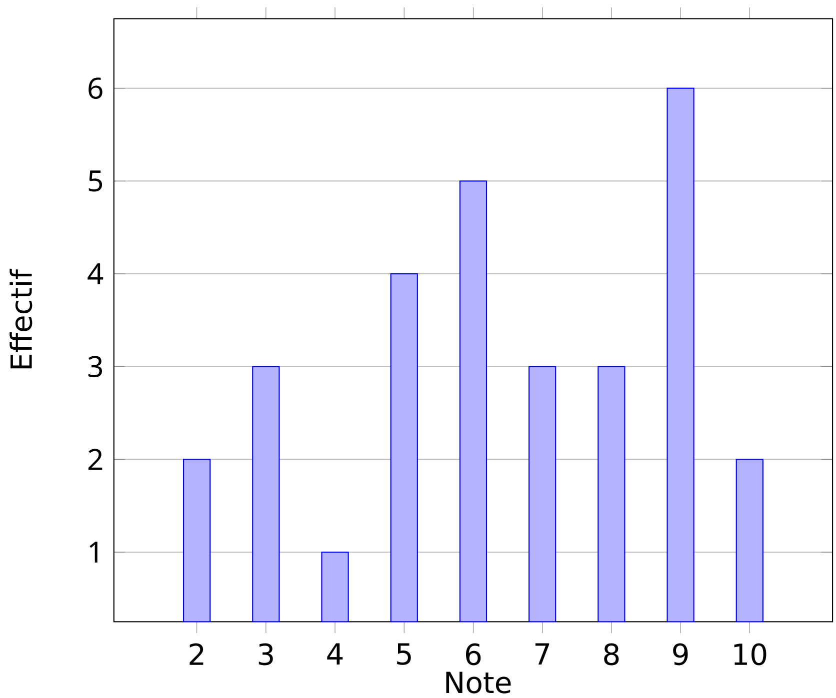
2.1 Diagramme en bâtons

Exemple

Voici les notes d'un devoir de mathématiques :

Note	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	2	3	1	4	5	3	3	6	2

À chaque note est associé un bâton : sa hauteur est le nombre d'élèves ayant obtenu cette note.

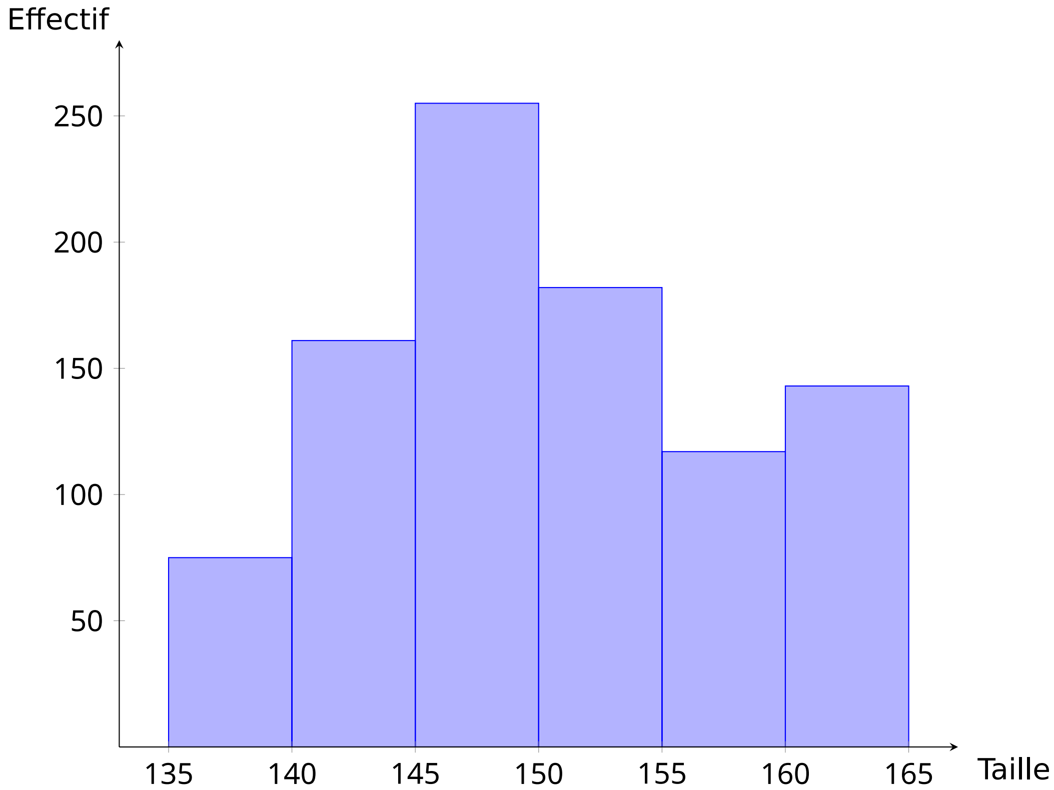


2.2 Histogramme

Exemple

On a mesuré la taille des élèves dans le collège. Comme presque toutes ces tailles sont différentes, on les a regroupé en *classes*, d'**amplitude** 5cm :

Taille (en cm) entre	135 et 139	140 et 144	145 et 149	150 et 154	155 et 159	160 et 164
Effectif	75	161	255	182	117	143

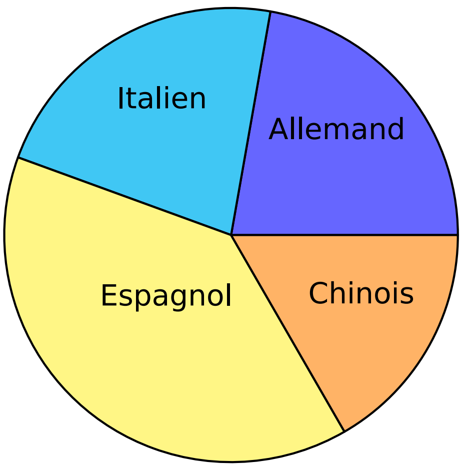


2.3 Diagramme circulaire

Exemple

Voici la répartition des élèves d'un collège en LV2 :

Langue	Allemand	Italien	Espagnol	Chinois	**Total**
Effectif	40	40	70	30	180
Angle (en °)	80	80	140	60	360



Chapitre 11

Nombres relatifs (partie 2)

1 Addition

Rappel

La **distance à zéro** d'un nombre relatif est le nombre positif situé après le signe.

Exemple

La distance à zéro de $+5$ est 5.
La distance à zéro de -2 est 2.

Cours : Addition de nombres relatifs, cas 1

Pour additionner deux nombres négatifs :

- On fait la somme de leurs distances à zero. C'est-à-dire, on fait la somme sans les signes "$-$".
- On ajoute un signe "$-$" devant le résultat.

Exemple

Pour calculer $-2 + (-7)$:

- La somme de leurs distances à zéro est $2 + 7 = 9$.
- On rajoute un signe "$-$" devant le résultat.

Donc la somme de -2 et -7 est -9.

Cours : Addition de nombres relatifs, cas 2

Si deux nombres relatifs sont de signes contraires, alors leur somme a

- Le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro.
- Pour distance à zéro, la **différence** de leurs distances à zéro.

Exemple

Pour calculer $-8 + 6$:

- Le nombre qui à la plus grande distance à zéro est -8, donc le résultat est *négatif*.
- La différence de leurs distances à zéro est $8 - 6 = 2$.

Donc la somme de -8 et de 6 est -2.

2 Nombres opposés

Cours

Deux nombres sont **opposés** si leur somme est égale à zéro.
De manière équivalente, deux nombres opposés :

- Sont de signes contraires.
- Ont la même distance à zéro.

Exemple

- $3{,}2$ et $-3{,}2$ sont opposés.
- L'opposé de $-4{,}6$ est $+4{,}6$ (ou seulement $4{,}6$).

3 Soustraction

Cours : Soustraction de nombres relatifs

Pour **soustraire** un nombre relatif, on ajoute son opposé.

Exemple

$$\begin{aligned} A &= -5 - 2 \\ &= -5 + (-2) \\ &= -(5 + 2) \\ &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 3 - (-8{,}7) \\ &= 3 + 8{,}7 \\ &= 11{,}7 \end{aligned}$$

Méthode : Simplification d'écriture

Pour transformer des additions et soustractions sur les relatifs en opérations sur des nombres positifs, on applique les règles suivantes :

$+$ suivi de $+$ donne $+$
$-$ suivi de $-$ donne $+$
$-$ suivi de $+$ donne $-$
$+$ suivi de $-$ donne $-$

Exemple

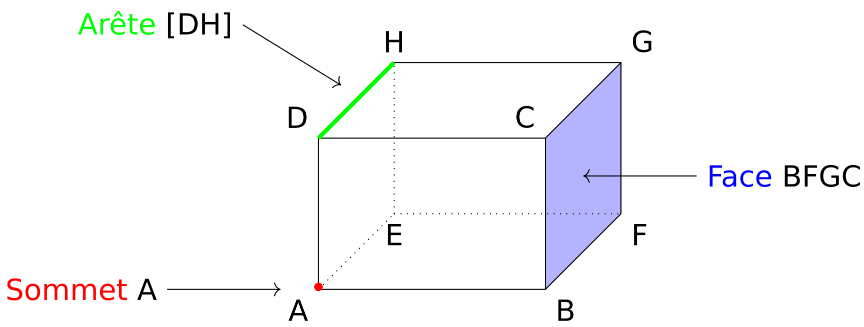
- $5 - (-8)$: Il y a un $-$ suivi d'un $-$, ce qui donne $+$.
  Donc $5 - (-8) = 5 + 8 = 13$.
- $-3 + (-7)$: Il y a un $+$ suivi d'un $-$, ce qui donne $-$.
  Donc $-3 + (-7) = -3 - 7 = -10$.

Chapitre 12

Solides de l'espace, volume

1 Pavé droit

Cours : Vocabulaire pavé droit



La figure ci-dessus est un **pavé droit** (ou **parallélépipède rectangle**).

Cours : Propriétés du pavé droit

Un pavé droit a

- **6 faces rectangulaires**.
- **12 arêtes**.
- **8 sommets**.

Le **volume** $\mathcal{V}$ d'un parallélépipède rectangle de longueur L, de largeur l et de hauteur h est :

$$\mathcal{V} = L \times l \times h$$

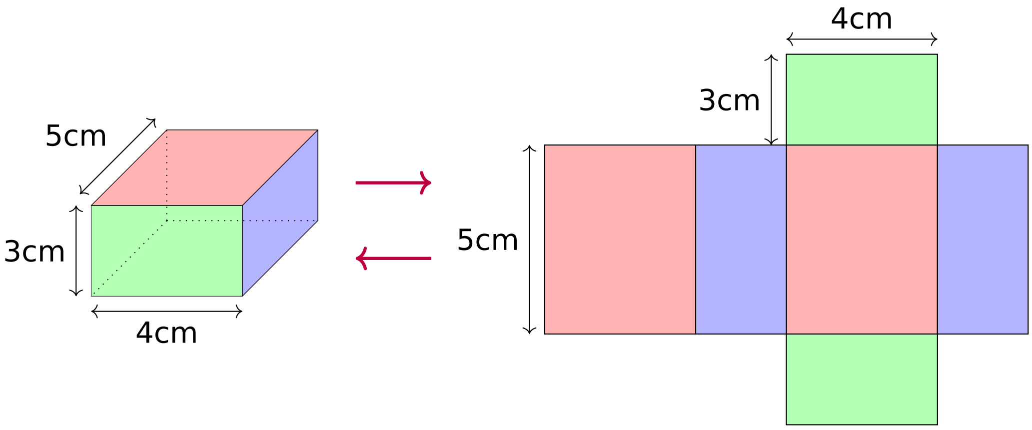
Exemple

Un pavé droit de longueur 10 cm, de largeur 5 cm et de hauteur 20 cm a un volume de

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= 10 \times 5 \times 20 \\ &= 1000 \text{ cm}^3 \\ &= 1 \text{ dm}^3 \qquad \text{(1 décimètre cube)} \end{aligned}$$

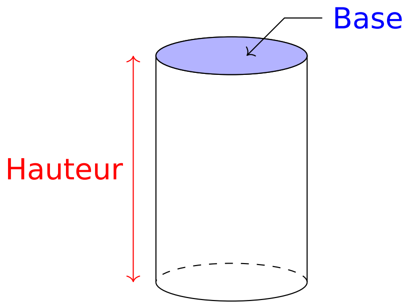
Cours : Patron du pavé droit

Le patron d'un pavé droit est



2 Cylindre

Cours : Vocabulaire du cylindre



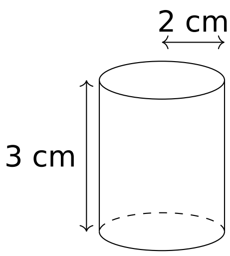
La figure ci-dessus est un **cylindre**.
Les deux disques sont les **bases** du cylindre. La longueur du segment reliant le centre des deux bases est la **hauteur**.

Cours : Propriétés du cylindre

Le **volume** $\mathcal{V}$ d'un cylindre de hauteur h et dont le rayon de la base est r est :

$$\mathcal{V} = \pi \times r \times r \times h$$

Exemple

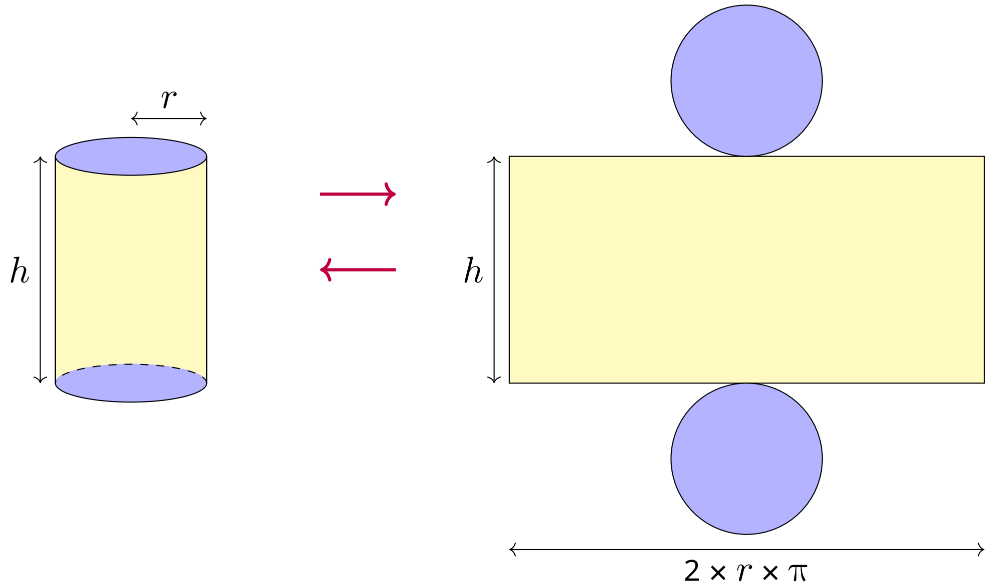


Le volume de ce cylindre est :

$$\mathcal{V} = \pi \times 2 \times 2 \times 3 = 12\pi \approx 37{,}7 \text{ cm}^3$$

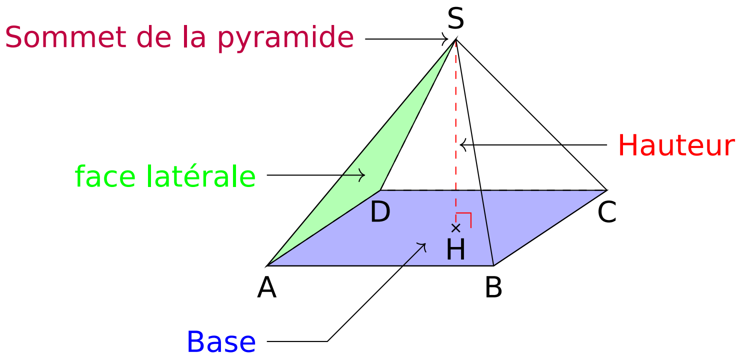
Cours : Patron du cylindre

Le patron d'un cylindre est



3 Pyramide

Cours : Vocabulaire de la pyramide

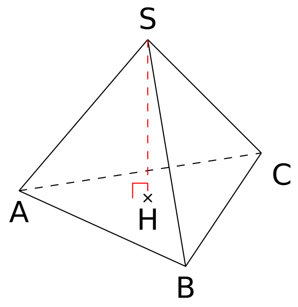


La figure ci-dessus est une **pyramide**.

- Sa **base** est un polygone (triangle, quadrilatère, ...).
- Chaque **face latérale** est un triangle.
- La **hauteur** de la pyramide est le segment [SH] : il part du point S, et est perpendiculaire à la base.

Cours : Pyramides spéciales

- Si sa base est un triangle, une pyramide est appelée un **tétrahèdre**.
- Un polygone est **régulier** si tous ses côtés font la même longeur, et tous ses angles sont les mêmes.
- Une pyramide est **régulière** si sa base est un polygone régulier, et que H est le centre de ce polygone.

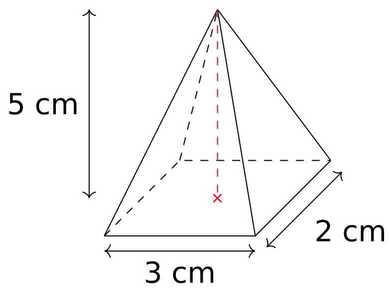


Cours : Propriétés de la pyramide

Le **volume** $\mathcal{V}$ d'une pyramide est :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

Exemple



Le volume de cette pyramide à base rectangulaire est

$$\mathcal{V} = \frac{5 \times 3 \times 2}{3} = 10 \text{ cm}^3$$

4 Cône