

# Chapitre 1 : Multiples, diviseurs, nombres premiers

## Cours

Si on a trois nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que

$$a \times b = c$$

On dit que

- $a$  et  $b$  sont des **diviseurs** de  $c$ .
- $c$  est un **multiple** de  $a$  et de  $b$ .
- On dit que  $c$  est **divisible** par  $a$  et  $b$ .

## Exemple

- 2 est un **diviseur** de 6.
- 7 est un **diviseur** de 21.
- 6 est un **multiple** de 2.
- 6 est un **multiple** de 3.
- 48 est un **multiple** de 4.

## Cours : Critères de divisibilité

Parfois, on peut rapidement savoir si un nombre est un diviseur d'un autre nombre.

- Si le dernier chiffre d'un nombre est **pair**, ce nombre est un multiple de 2.
- Si la somme des chiffres d'un nombre est **un multiple de 3**, ce nombre est un multiple de 3.
- Si le dernier chiffre d'un nombre est **0 ou 5**, ce nombre est un multiple de 5.
- Si la somme des chiffres d'un nombre est **un multiple de 9**, ce nombre est un multiple de 9.

## Exemple

- 1244 est un multiple de 2, car 4 est un multiple de 2.
- 546 est un multiple de 3, car  $5 + 4 + 6 = 15$ , qui est un multiple de 3.
- 200, 15, 35... Sont des multiples de 5.
- 279 est un multiple de 9, car  $2 + 7 + 9 = 18$  est un multiple de 9.

## Cours

Une **division euclidienne** se fait entre deux nombres entiers  $a$  et  $b$ . Il en résulte un

**quotient** et un **reste**.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \div & \text{quotient} \\ \hline & \text{reste} \end{array}$$

$$a = b \times \text{quotient} + \text{reste}$$

On obtient le quotient en soustrayant  $b$  aux chiffres de  $a$ .

### Exemple

Faisons par exemple la division euclidienne de 377 par 12 :

$$\begin{array}{r} 0 \times 12 = 0 \rightarrow \begin{array}{r} 3 \ 7 \ 7 \\ - \ 0 \\ \hline \end{array} \\ 3 \times 12 = 36 \rightarrow \begin{array}{r} 3 \ 7 \\ - \ 3 \ 6 \\ \hline \end{array} \\ 1 \times 12 = 12 \rightarrow \begin{array}{r} 1 \ 7 \\ - \ 1 \ 2 \\ \hline \end{array} \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 \\ \hline 031 \\ 5 \end{array}$$

On obtient ainsi un **quotient** de 31, et un **reste** de 5.

### Cours

Un **nombre premier** est un nombre qui n'a que 1 et lui même comme diviseurs.

Note : il y a une infinité de nombres premiers.

### Exemple

2, 3, 5 et 7 sont des nombres premiers.

On peut obtenir tous les nombres premiers entre 1 et 100 en utilisant un crible d'Eratosthène :

### Règles :

- Barrer le nombre 1.
- Entourer le 2 (premier nombre non barré), puis barrer tous ses multiples.
- Entourer le premier nombre ni entouré ni barré, et barrer tous ses multiples.
- Répéter la consigne précédente, jusqu'à ce que tous les nombres soient soit entourés soit barrés.

<del>1</del>	(2)	(3)	<del>4</del>	(5)	<del>6</del>	(7)	<del>8</del>	<del>9</del>	<del>10</del>
(11)	<del>12</del>	(13)	<del>14</del>	<del>15</del>	<del>16</del>	(17)	<del>18</del>	(19)	<del>20</del>
<del>21</del>	<del>22</del>	(23)	<del>24</del>	<del>25</del>	<del>26</del>	<del>27</del>	<del>28</del>	(29)	<del>30</del>
(31)	<del>32</del>	<del>33</del>	<del>34</del>	<del>35</del>	<del>36</del>	(37)	<del>38</del>	<del>39</del>	<del>40</del>
(41)	<del>42</del>	(43)	<del>44</del>	<del>45</del>	<del>46</del>	(47)	<del>48</del>	<del>49</del>	<del>50</del>
<del>51</del>	<del>52</del>	(53)	<del>54</del>	<del>55</del>	<del>56</del>	<del>57</del>	<del>58</del>	(59)	<del>60</del>
(61)	<del>62</del>	<del>63</del>	<del>64</del>	<del>65</del>	<del>66</del>	(67)	<del>68</del>	<del>69</del>	<del>70</del>
(71)	<del>72</del>	(73)	<del>74</del>	<del>75</del>	<del>76</del>	<del>77</del>	<del>78</del>	(79)	<del>80</del>
<del>81</del>	<del>82</del>	(83)	<del>84</del>	<del>85</del>	<del>86</del>	<del>87</del>	<del>88</del>	(89)	<del>90</del>
<del>91</del>	<del>92</del>	<del>93</del>	<del>94</del>	<del>95</del>	<del>96</del>	(97)	<del>98</del>	<del>99</del>	<del>100</del>

### Cours : Décomposition en nombres premiers

Tout nombre peut être **décomposé** en un produit de nombres premiers.  
Pour trouver tous les diviseurs premiers d'un nombre, il faut essayer de diviser ce nombre par *tous* les nombres premiers qui lui sont inférieurs, jusqu'à n'avoir que des nombres premiers.

#### Exemple

- On veut décomposer 15 en nombres premiers :
  - 15 n'est pas un multiple de 2.
  - 15 est un multiple de 3 : on écrit  $15 = 3 \times 5$ .
  - 3 et 5 sont tous les deux premiers, donc on peut s'arrêter là.
- On veut décomposer 18 en nombres premiers :
  - 18 est un multiple de 2 : on écrit  $18 = 2 \times 9$ .
  - 9 n'est pas un multiple de 2.
  - 9 est un multiple de 3 : on écrit  $18 = 2 \times 3 \times 3$ .
  - 2 et 3 sont tous les deux premiers, donc on peut s'arrêter là.

On remarque que le même nombre premier peut apparaître **plusieurs fois** dans la décomposition !
- On veut décomposer 231 en nombres premiers :
  - Grâce aux Critères de divisibilité, on peut déterminer que 231 est un multiple de 3 : on écrit  $231 = 3 \times 77$ .
  - 77 n'est pas un multiple de 2.

- 77 n'est pas un multiple de 3.
- 77 n'est pas un multiple de 5.
- 77 est un multiple de 7 : on écrit  $231 = 3 \times 7 \times 11$ .
- 3, 7 et 11 sont tous premiers, donc on peut s'arrêter là.
- $32 = 2 \times 16 = 2 \times 2 \times 8 = 2 \times 2 \times 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ .

## Cours

Le **PGCD** est le **Plus Grand Commun Diviseur** : c'est le plus grand nombre qui divise deux nombres donnés.

Pour le calculer :

- On fait la liste des diviseurs premiers des deux nombres.
- On prend tous les nombres qui apparaissent dans les *deux* listes, et on les multiplie entre eux.

### Exemple

On veut calculer le PGCD de 12 et de 20 (noté  $\text{PGCD}(12, 20)$ ) :

$$12 = \textcircled{2} \times \textcircled{2} \times 3$$

$$20 = \textcircled{2} \times \textcircled{2} \times 5$$

Donc  $\text{PGCD}(12, 20) = 2 \times 2 = 4$ .

### Exemple

On veut calculer le PGCD de 60 et de 126 :

$$60 = \textcircled{2} \times 2 \times \textcircled{3} \times 5$$

$$126 = \textcircled{2} \times \textcircled{3} \times 3 \times 7$$

Donc  $\text{PGCD}(60, 126) = 2 \times 3 = 6$ .