Chapitre 4 : Statistiques descriptives

1 Proportions et pourcentages

Définition : Population

- Une **population** est un ensemble d'éléments, appelés les **individus**.
- Une **sous-population** est une partie de la population.
- Le nombre total d'individus dans la population est appelé l'**effectif total**.

Remarque

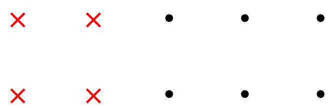
Les individus d'une population ne sont pas toujours des personnes.
Par exemple, on peut parler de la *population* d'une trousse, dont les *individus* sont les stylos, et une *sous-population* est formée par les stylos rouges.

Définition : Proportion

On considère une population dont l'effectif total est N, et une sous-population dont l'effectif est n.

- La **proportion** d'individus dans la sous-population est $p = \dfrac{n}{\mathrm{N}}$.
- On peut exprimer cette proportion en pourcentage, en la multipliant par 100 :
  $\left(\dfrac{n}{\mathrm{N}} \times 100\right)$% des individus sont dans la sous-population.

Exemple

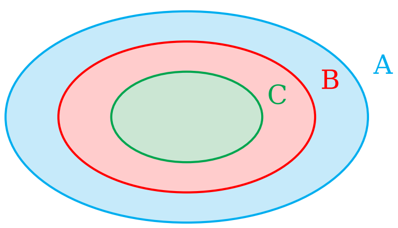


Dans la population ci-dessus, la proportion de croix est $\dfrac{4}{10} = 0{,}4$, ou 40%.

Remarque

Prendre x% d'une valeur revient à la multiplier par $\dfrac{x}{100}$.

Propriété : Proportion de proportion, pourcentage de pourcentage



On considère une population A, et

- Une sous-population B de A, dont la proportion dans A est p_{B}.
- Une sous-population C de B, dont la proportion dans B est p_{C}.

Alors la proportion de C dans A est $p = p_{\mathrm{B}} \times p_{\mathrm{C}}$

Exemple

On considère la population des véhicules possédés par une entreprise.

- 75% de ces véhicules sont électriques.
- Parmi les véhicules électriques, 30% sont des deux-roues.

La proportion p de deux-roues électriques dans la population totale est donc

$$p = 0{,}75 \times 0{,}3 = 0{,}225$$

Soit 22,5%.

2 Variations et évolutions

Définition : Variations

Lorsqu'on passe d'une valeur V_1 à une valeur V_2, on dit qu'il s'agit d'une **évolution**. On a alors :

- $\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1$ est la **variation absolue**.
- $\dfrac{\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1}{\mathrm{V}_1}$ est la **variation relative**, aussi appelée le **taux d'évolution**.

Exemple

Une personne ayant 1 000 000 d'euros gagne 1 000 000 €.

- la variation absolue est de 1 000 000 €.
- la variation relative est de $\dfrac{1\,000\,000}{100\,000\,000} = 0{,}01$, ou 1%.

Remarque

- Si la variation absolue (ou le taux d'évolution) est positive, c'est que la valeur à augmenté. Sinon, c'est qu'elle a diminué.
- La variation absolue est dans la même unité que V_1 et V_2.
- Le taux d'évolution n'a pas d'unité.

Propriété

Si t est le taux d'évolution entre deux valeurs A et B, on a

$$\mathrm{B} = \mathrm{A} \times (1 + t)$$

Démonstration. On sait que t est le taux d'évolution, donc $t = \dfrac{\mathrm{B} - \mathrm{A}}{\mathrm{A}}$.
Donc $\mathrm{A} \times t = \mathrm{B} - \mathrm{A}$, et donc $\mathrm{B} = \mathrm{A} \times t + \mathrm{A} = \mathrm{A} \times (1 + t)$. □

Remarque

Si t est *supérieur à* 0, c'est une augmentation. Sinon, c'est une diminution.

Propriété : Évolutions successives et coefficient global

Lorsqu'on applique plusieurs évolutions successives, on obtient le **coefficient global** en multipliant les coefficients.

Exemple

Si on applique une augmentation de 20%, suivie d'une diminution de 20%, l'évolution a pour coefficient global

$$\left(1+\frac{20}{100}\right)\times\left(1-\frac{20}{100}\right)=1{,}2\times 0{,}8=0{,}96$$

On a donc globalement une diminution.

Propriété : Évolution réciproque

Si une évolution nous fait passer d'une valeur A à une valeur B en multipliant par c, on peut revenir à A en *divisant* par c.
Cette nouvelle évolution est appelée **l'évolution réciproque**, et son coefficient est le **coefficient réciproque** $c_r=\frac{1}{c}$.

Exemple

Si on passe de 150€ à 240€, on doit multiplier par 1,6.

Donc pour passer de 240€ à 150€, on doit multiplier par $\dfrac{1}{1{,}6}=0{,}625$.

3 Séries statistiques

Définition : Moyenne, moyenne pondérée

Si on dispose d'une série de valeurs $x_1,\cdots,x_n$,

- on peut calculer leur **moyenne** :

$$\mathrm{M}=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

- La moyenne peut être pondérée, c'est-à-dire que chaque valeur est multipliée par un coefficient c_i :

$$\mathrm{M}=\frac{c_1\times x_1+\cdots+c_n\times x_n}{c_1+\cdots+c_n}$$

Exemple

La moyenne de la série de notes 8;11;12;17 est

$$\mathrm{M}=\frac{8+11+12+17}{4}=\frac{48}{4}=12$$

Si la quatrième note (le 17) était coefficient 2, et que toutes les autres notes sont coefficient 1, la moyenne devient

$$\mathrm{M} = \frac{8+11+12+2\times 17}{1+1+1+2} = \frac{65}{5} = 13$$

Propriété : Linéarité de la moyenne

- Si on ajoute le même nombre a à chaque valeur, la moyenne augmente de a.
- Si on multiplie chaque valeur par un nombre b, la moyenne est multipliée par b.

Définition : Variance, écart-type

Si on dispose d'une série de valeurs $x_1,\cdots,x_n$, et qu'on dispose de la moyenne M, on définit

- La **variance** de cette série
$$\mathrm{V} = \frac{(x_1-\mathrm{M})^2+\cdots+(x_n-\mathrm{M})^2}{n}$$
- L'**écart-type** de cette série
$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V}}$$

Exemple

Prenons la série de notes 1;4;9;15;18;13.
La moyenne de cette série est 10. Donc on a

- $$\begin{aligned}\mathrm{V} &= \frac{(1-10)^2+(4-10)^2+(9-10)^2+(15-10)^2+(18-10)^2+(13-10)^2}{6}\\ &= \frac{(-9)^2+(-6)^2+(-1)^2+5^2+8^2+3^2}{6}\\ &= \frac{81+36+1+25+64+9}{6}\\ &= \frac{216}{6} = 36\end{aligned}$$
- $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}} = \sqrt{36} = 6$