

## Activité : le paradoxe de Saint-Petersbourg

On considère le jeu de « Pile ou face » suivant :

Le joueur gagne le double de sa mise en cas de victoire (« Face »), et perd sa mise en cas de défaite (« Pile »).  
Le joueur peut rejouer tant que sa réserve d'argent le lui permet.

1. Compléter la fonction ci-dessous, qui simule une partie :

```
from random import randint
def partie(mise):
    tirage = randint(0, 1)
    gain = 0
    if tirage == 0: # "pile"
        gain = .....
    else:           # "face"
        gain = .....
    return gain
```

2. On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au gain du joueur.  
Calculer et interpréter l'espérance de  $X$ .  $\mathbb{E}(X) = 0$

Pierre, qui dispose d'une réserve de 1000€, décide de jouer de la manière suivante :

- Il mise 1€ au départ du jeu ;
- Tant qu'il perd, il rejoue une partie en **doublant** sa mise ;
- Il arrête si il gagne, ou si il n'a plus assez d'argent.

3. Que se passe-t'il si Pierre joue et fait Pile-Pile-Pile-Face ? **+1€**  
4. Afin de simuler une partie, on propose la fonction (incomplète) ci-dessous :

```
from random import randint
def jeu():
    victoire = False
    mise = 1
    reserve = 1000
    while reserve > ..... and victoire == .....:
        gain = partie(mise)
        reserve = .....
        if gain > 0:
            victoire = True
        else:
            mise = .....
    return reserve
```

- (a) Retrouver, dans l'énoncé, la condition à vérifier dans la boucle while de la fonction.  
(b) Compléter les autres pointillés.

5. On note  $Y$  la variable aléatoire correspondant au gain de Pierre à la fin du jeu.  
(a) Quelle est la valeur de  $Y$  si Pierre fait Pile-Pile-Face ? **1**  
(b) Quelle est la valeur de  $Y$  si Pierre fait Pile-Face ? **1**  
(c) Au bout de combien de « Pile » successives Pierre perd-il de l'argent ? Quelle est alors la valeur de  $Y$  ? **Au bout de 9 « Pile » successives.  $Y$  vaut alors -511€.**
6. Donner alors la loi de probabilités de  $Y$  sous forme d'un tableau.  
7. Calculer l'espérance de  $Y$ .