

Chapitre 7 : Lois de probabilités

Définition : Arbre de probabilités

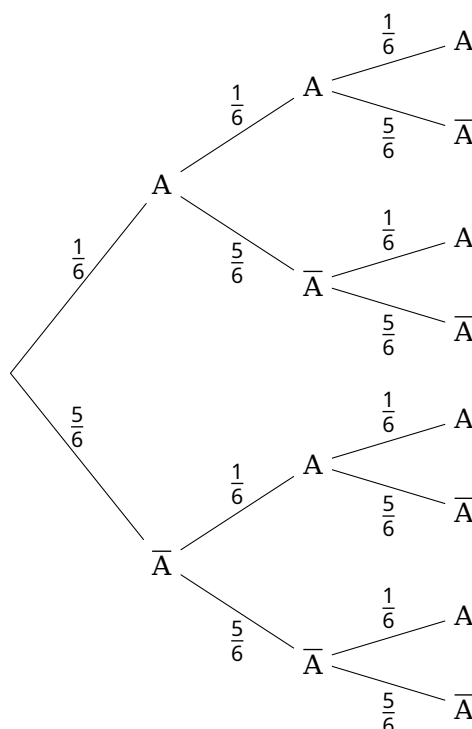
Une expérience aléatoire peut être représentée par un **arbre de probabilités** si elle est composée de plusieurs *épreuves*.

Deux épreuves sont **indépendantes** lorsque le résultat de l'une n'influence pas la probabilité des résultats de l'autre.

Exemple

On fait une expérience qui consiste à lancer un dé équilibré 3 fois de suite, et à regarder si on a obtenu un 6.

On note A l'évènement «Le dé est tombé sur 6». Ainsi on peut dessiner l'arbre suivant :



Propriété : Probabilité d'une issue

Si les épreuves que représente notre arbre sont indépendantes, la probabilité d'une issue est le **produit** des probabilités du chemin qui mène à cette issue.

Exemple

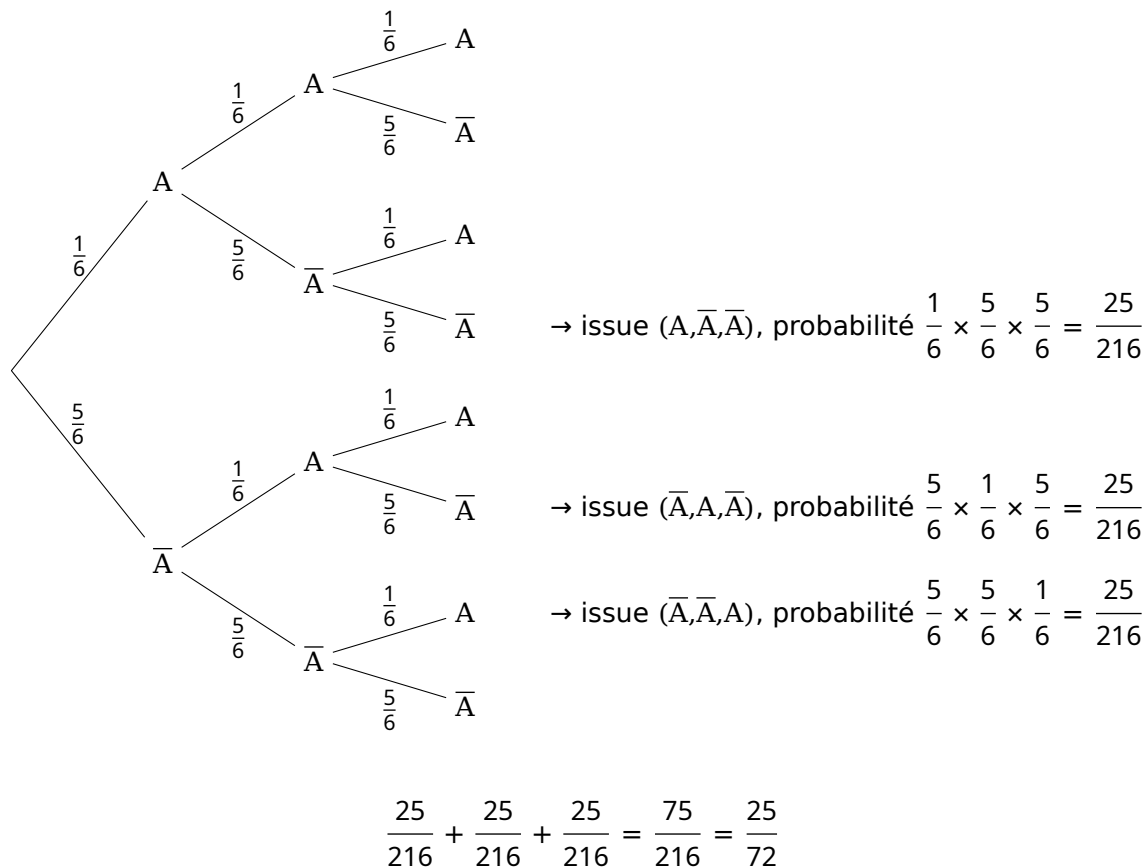
Dans l'exemple précédent, l'issue «On a obtenu un six *uniquement* au premier lancé» est représentée par le chemin (A, \bar{A}, \bar{A}) . Sa probabilité est alors $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$.

Propriété : Probabilité d'un évènement

La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des issues qui forment cet évènement.

Exemple

Si on veut obtenir la probabilité d'obtenir *exactement* 1 six sur les trois lancés :
Cet évènement est constitué des issues (A, \bar{A}, \bar{A}) , (\bar{A}, A, \bar{A}) et (\bar{A}, \bar{A}, A) . Sa probabilité est donc

**Définition : Variable aléatoire**

Dans une expérience aléatoire, une **variable aléatoire** est un nombre réel associé à chaque issue de l'expérience. On la note avec une lettre majuscule, souvent (mais pas toujours !) X ou Y.

Ainsi on peut définir des évènements liés à cette variable aléatoire :

- $\{X = a\}$ désigne l'évènement « X prend la valeur a »
- $\{X < a\}$ désigne l'évènement « X prend une valeur strictement inférieure à a »

Exemple

On lance trois dés, et :

- Si on obtient 3 six, on gagne 1000€.
- Sinon, on perd 10€.

Ici la variable aléatoire est le gain G que l'on peut obtenir, en euros. Il y a deux possibilités :

- Si on fait 3 six, alors $G = +1000$. On a donc $P(G = 1000) = \frac{1}{216}$ (la probabilité de faire 3 six).
- Sinon, $G = -10$. On a donc $P(G = -10) = \frac{215}{216}$.

On dira que l'issue (6;6;6) est **favorable** à l'évènement $\{G = 1000\}$, tandis que les issues (1;1;1), (2;3;2), etc... sont favorables à l'évènement $\{G = -10\}$.

Définition : Loi de probabilité

Pour une variable aléatoire X , sa **loi de probabilité** est la description des probabilités associées à chaque valeur possible de X .

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, la loi de probabilité de G est

- $P(G = 1000) = \frac{1}{216}$
- $P(G = -10) = \frac{215}{216}$

Noter que le total des probabilités est toujours 1.