Activité : Carré bordé dans Geogebra

Un carré bordé

À partir d'un carré ABCD dont le côté mesure 1, on construit un quadrilatère EFGH de la façon suivante :
On choisit un nombre réel a positif, puis on place les points E, F, G et H définis par les relations :

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = a\overrightarrow{\mathrm{AB}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{CF}} = a\overrightarrow{\mathrm{BC}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{DG}} = a\overrightarrow{\mathrm{CD}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{AH}} = a\overrightarrow{\mathrm{DA}}$$

On s'intéresse à la nature du quadrilatère EFGH.

1. (a) Dans Geogebra, tracer le carré ABCD puis, à l'aide d'un curseur a, les points E, F, G et H.

   > AIDE : Voir la vidéo suivante : `https://lycee.hachette-education.com/Barbazo/2de/#chapitre_7_p210_TP3_tutoriel_logiciel_de_geometriemp4`

   (b) Faire varier le curseur et conjecturer la nature du quadrilatère EFGH.
   Il semble que EFGH soit un carré.

2. On considère le repère $(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AD}})$.

   (a) Justifier que ce repère est un repère orthonormé.
   ABCD est un carré, donc on a $\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$ et l'angle ABD est droit : donc ce repère est orthonormé.

   (b) À l'aide des relations vectorielles définissant les points E, F, G et H, déterminer, dans ce repère, les coordonnées de chacun de ces quatres points.

   $\mathrm{E}(1 + a;0)$ $\qquad$ $\mathrm{F}(1;1 + a)$
   $\mathrm{G}(-a;1)$ $\qquad$ $\mathrm{H}(0;-a)$

   (c) Calculer les longueurs EF, FG, GH et HE.

   $\mathrm{EF} = \sqrt{a^2 + (1 + a)^2}$

   $\mathrm{FG} = \sqrt{(1 + a)^2 + a^2}$

   $\mathrm{GH} = \sqrt{a^2 + (1 + a)^2}$

   $\mathrm{HE} = \sqrt{(1 + a)^2 + a^2}$

   (d) Valider ou invalider la conjecture faite à la question 1.
   Toutes ces longueurs sont égales : il suffit donc de montrer qu'un des angles est droit.
   Pour ce faire, on va utiliser la réciproque du théorème de Pythagore : ici on a
   $\mathrm{EF}^2 = a^2 + (1 + a^2)$, $\mathrm{HE}^2 = (1 + a)^2 + a^2$ et $\mathrm{HF}^2 = 1^2 + (1 + 2a)^2$
   Ainsi $\mathrm{EF}^2 + \mathrm{HE}^2 = 2a^2 + 2(1 + 2a + a^2) = 4a^2 + 4a + 2$, et $\mathrm{HF}^2 = 1 + 1 + 4a + 4a^2 = \mathrm{EF}^2 + \mathrm{HE}^2$.
   Donc l'angle FEH est droit, et donc EFGH est un carré.