Nom, Prénom : CORRECTION 24 mai 2023

Évaluation : dérivation (sujet A)

Exercice 1 :

1. $f(x) = x - 1$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3 + h - 1 - (3-1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

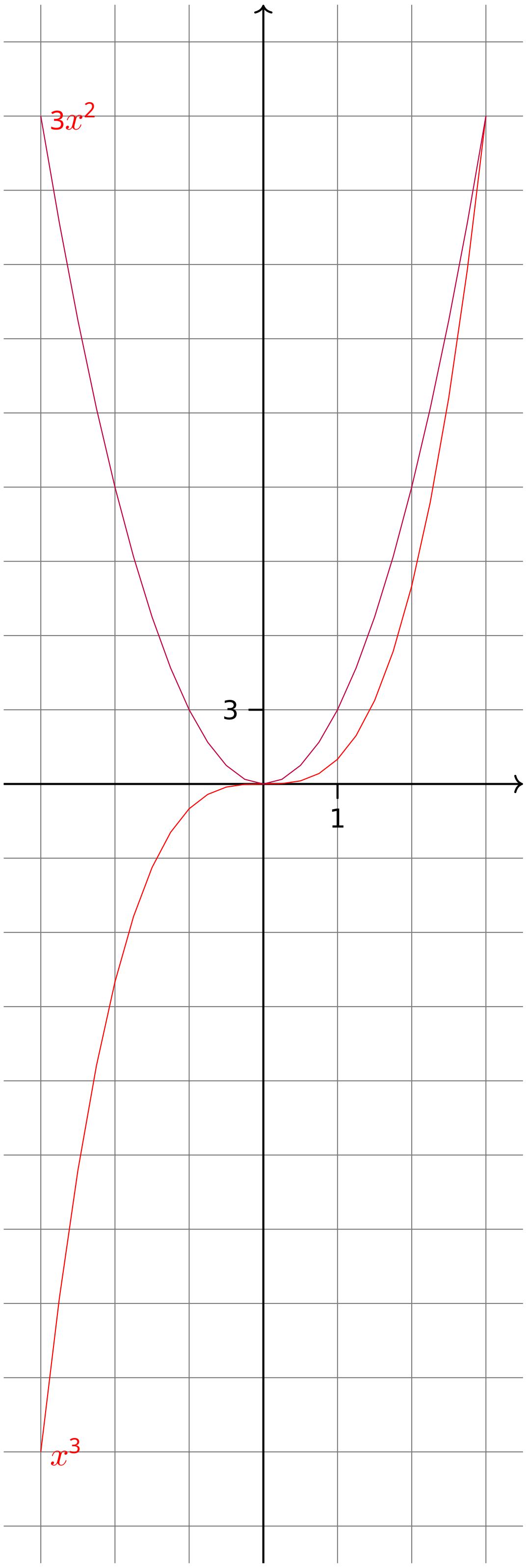
2. $f(x) = x^2 + 2$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 + 2 - (2^2+2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 2 - 6}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 4 + h \\ &= 4 \end{aligned}$$

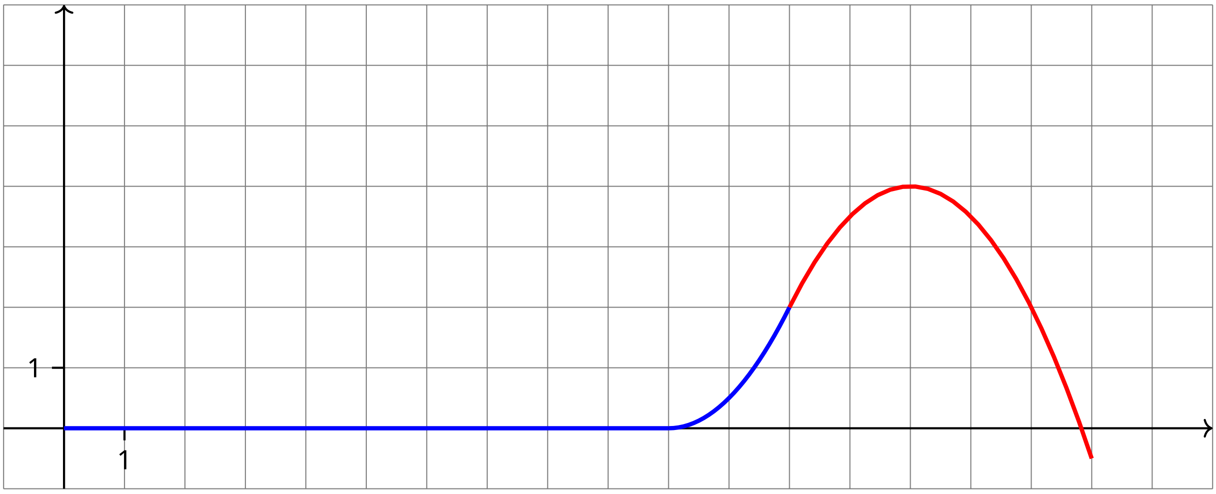
3. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-(-1+h)^2 + 6(-1+h) - 5 - (-(-1)^2 + 6\times(-1) - 5)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-(1 - 2h + h^2) - 6 + 6h - 5 + 12}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{8h - h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 8 - h \\ &= 8 \end{aligned}$$

Exercice 2 :



Exercice 3 :
Un motard accélère de manière continue sur une route, avant de se lancer dans les airs depuis une rampe.
On modélise la situation par le schéma suivant :



On admet que la position du motard est définie par la fonction f, telle que :

- Si $x \in [0;10]$, le motard est sur la route, donc $f(x) = 0$.
- Si $x \in [10;12]$, le motard est sur la rampe, dont la courbe est définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 10x + 50$.

1. Déterminer la pente de la rampe lorsque le motard la quitte.
2. Si il n'y avait pas de gravité, quelle serait la hauteur du motard au point d'abscisse 20 ?
3. En prenant en compte la gravité, on admet que la position du motard après la rampe suit la courbe de la fonction $f(x) = -0{,}5x^2 + bx + c$, où b et c ne sont pas encore connus.
   (a) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   D'après la question 1, quelle est la valeur de $f'(12)$?
   On admet que sur l'intervalle $[12;+\infty[$, la dérivée de f peut s'écrire $f'(x) = -x + b$. Quelle est alors la valeur de b ?
   $f'(12) = -12 + b = 2$, donc $b = 14$.
   (b) Lire sur le graphe la valeur de $f(12)$. En déduire la valeur de c.
   $f(12) = 2$, donc $f(12) = -72 + 14 * 12 + c = 2$, donc $c = -94$
4. Tracer alors la fonction $f(x) = -0{,}5x^2 + bx + c$ sur l'intervalle $[12;17]$.
   À quelle abscisse le motard touche-il le sol ?

Nom, Prénom : CORRECTION 24 mai 2023

Évaluation : dérivation (sujet B)

Exercice 1 :

1. $f(x) = x + 2$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3 + h + 2 - (3+2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

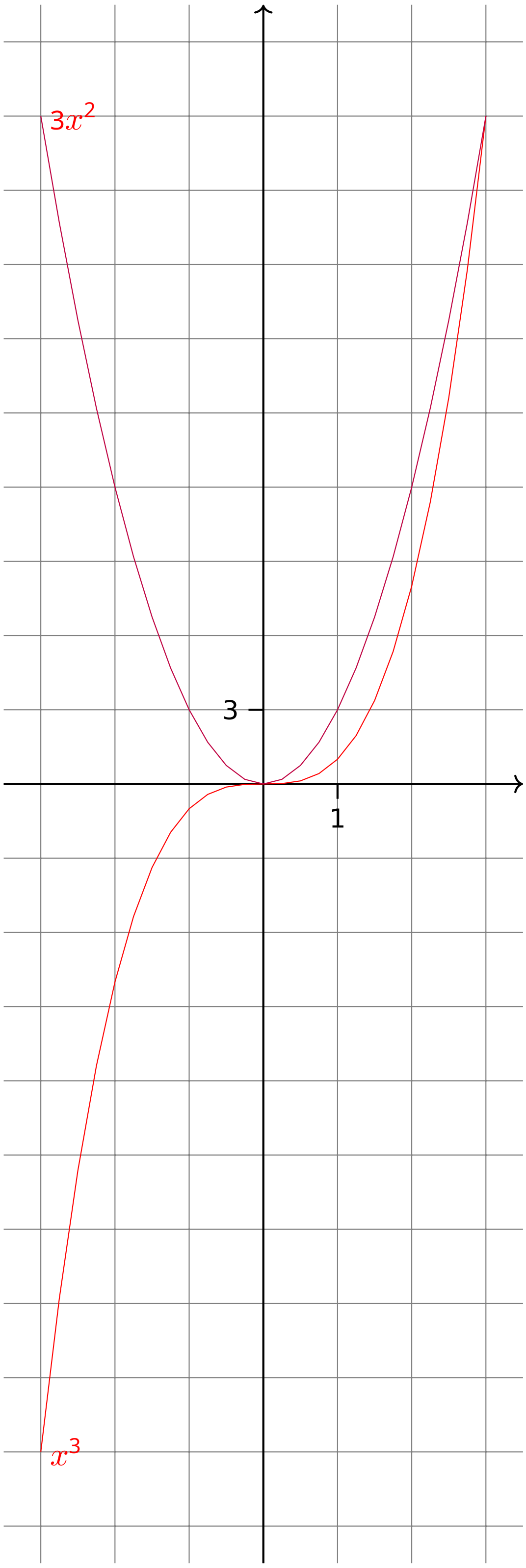
2. $f(x) = -x^2 + 1$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-(2+h)^2 + 1 - (-2^2 + 1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-4 - 4h - h^2 + 1 + 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-4h - h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} -4 - h \\ &= -4 \end{aligned}$$

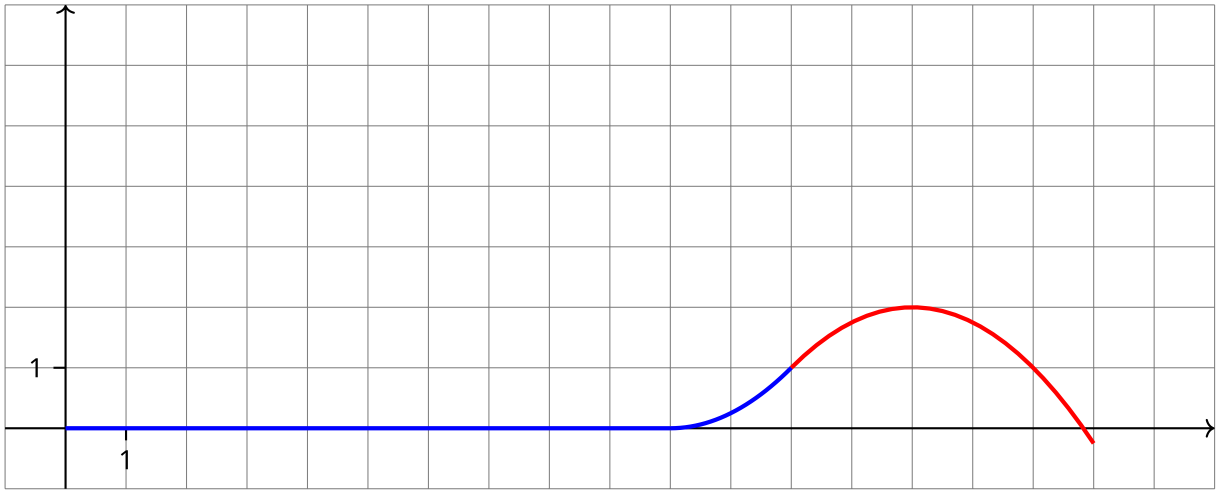
3. $f(x) = x^2 + 6x - 5$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2 + 6(-1+h) - 5 - ((-1)^2 + 6\times(-1) - 5)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1 - 2h + h^2 - 6 + 6h - 5 + 10}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 4 + h \\ &= 4 \end{aligned}$$

Exercice 2 : Tracer les courbes de x^3 et de sa dérivée entre -3 et 3.
(Remarque : il faudra prendre au moins 3 unités par carreau en ordonnée)



Exercice 3 :
Un motard accélère de manière continue sur une route, avant de se lancer dans les airs depuis une rampe.
On modélise la situation par le schéma suivant :



On admet que la position du motard est définie par la fonction f, telle que :

- Si $x \in [0;10]$, le motard est sur la route, donc $f(x) = 0$.
- Si $x \in [10;12]$, le motard est sur la rampe, dont la courbe est définie par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 25$.

1. Déterminer la pente de la rampe lorsque le motard la quitte.
2. Si il n'y avait pas de gravité, quelle serait la hauteur du motard au point d'abscisse 20 ?
3. En prenant en compte la gravité, on admet que la position du motard après la rampe suit la courbe de la fonction $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$, où b et c ne sont pas encore connus.
   (a) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   D'après la question 1, quelle est la valeur de $f'(12)$?
   On admet que sur l'intervalle $[12;+\infty[$, la dérivée de f peut s'écrire $f'(x) = -0{,}5x + b$. Quelle est alors la valeur de b ?
   $f'(12) = -6 + b = 1$, donc $b = 7$.
   (b) Lire sur le graphe la valeur de $f(12)$. En déduire la valeur de c.
   $f(12) = 2$, donc $f(12) = -36 + 7 * 12 + c = 1$, donc $c = -47$
4. Tracer alors la fonction $f(x) = -0{,}5x^2 + bx + c$ sur l'intervalle $[12;17]$.
   À quelle abscisse le motard touche-il le sol ?