

Chapitre 5 : Règles de calcul (partie 2)

Propriété : Double distributivité

Si a, b, c et d sont quatre nombres réels, on a

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

On dit que l'expression de gauche est **factorisée**, et que l'expression de droite est **développée**.

Propriété : Identités remarquables

Si a et b sont des nombres réels, on a

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ces égalités sont à connaître par cœur !

Démonstration. On va prouver l'égalité 1, en utilisant la double distributivité :
Soient a et b deux nombres réels. Alors :

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\ &= a^2 + a \times b + a \times b + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

□

Propriété

Si a et b sont des nombres réels, on a :

$$(ab)^2 = a^2b^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Propriété

Si a et b sont des nombres réels, on a :

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Montrer que les deux égalités et l'inégalité ci-dessus sont vérifiées pour $a = 9$ et $b = 16$:

- $\sqrt{9 \times 16} = \sqrt{144} = 12$, et $\sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$
- $\sqrt{\frac{9}{16}} = \sqrt{0,5625} = 0,75$, et $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} = 0,75$

$$\bullet \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5, \text{ et } \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

Propriété : Produit nul

Si un produit est nul, alors au moins un des facteurs est nul.

$$\text{Si } A \times B = 0, \text{ alors } A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Exemple

Résoudre l'équation $(x-3)(2x+4) = 0$:

- On sait que $(x-3)(2x+4) = 0$. Donc on a $x-3 = 0$ ou $2x+4 = 0$.
- Si $x-3 = 0$, alors $x = 3$.
- Si $2x+4 = 0$, alors $x = -2$.
- L'ensemble de solutions de cette équation est donc $\{-2; 3\}$.

Propriété : Résolution par factorisation

Si on a une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, on peut *parfois* la résoudre en **factorisant**, et en utilisant la propriété du produit nul.

Techniques de factorisation

- Si il n'y a pas de terme constant, on peut factoriser par x .
- Sinon, l'expression à factoriser est sous la forme $ax^2 + bx + c$. On s'intéresse alors aux termes ax^2 et c :
 - On écrit $ax^2 = (\sqrt{a}x)^2$, et $c = \sqrt{c}$.
 - Si $b > 0$, on essaie de factoriser en $(\sqrt{a}x + c)^2$.
 - Si $b < 0$, on essaie de factoriser en $(\sqrt{a}x - c)^2$.
 - Si $b = 0$, on essaie de factoriser en $(\sqrt{a}x + c)(\sqrt{a}x - c)$.

Exemple

- On veut factoriser $2x^2 - 3x$. On remarque qu'il n'y a pas de terme constant, donc

$$2x^2 - 3x = x(2x - 3)$$

- On veut factoriser $9x^2 + 30x + 25$. On pose $9x^2 = (3x)^2$ et $25 = 5^2$. De plus $b > 0$, donc

$$9x^2 + 30x + 25 = (3x + 5)^2$$

On peut vérifier que c'est vrai en développant la partie de droite.

- On veut factoriser $100x^2 - 4$. On pose $100x^2 = (10x)^2$ et $4 = 2^2$. De plus $b = 0$, donc

$$100x^2 - 4 = (10x + 2)(10x - 2)$$

On peut vérifier que c'est vrai en développant la partie de droite.