On présente la preuve suivante d'une propriété de cours :

Propriété

Si X et Y sont des évènements, on a

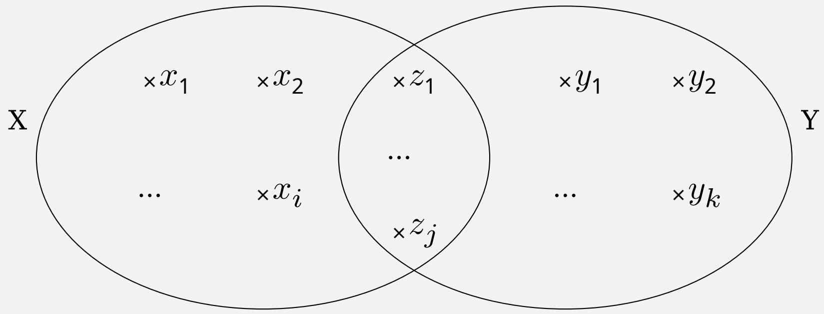
$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}) + \mathrm{P}(\mathrm{Y}) - \mathrm{P}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y})$$

Démonstration :

On note :

- x_1 ; $\cdots$; x_i les issues qui sont dans X mais pas dans Y ;
- y_1 ; $\cdots$; y_k les issues qui sont dans Y mais pas dans X ;
- z_1 ; $\cdots$; z_j les issues qui sont dans X et dans Y.

On fait un schéma représentant la situation :



Ainsi on a :

	Uniquement dans X	Uniquement dans Y	Dans X **ET** dans Y
$\mathrm{P}(\mathrm{X}) =$	$\mathrm{P}(x_1) + \cdots + \mathrm{P}(x_i) +$		$\mathrm{P}(z_1) + \cdots + \mathrm{P}(z_j)$
$\mathrm{P}(\mathrm{Y}) =$		$\mathrm{P}(y_1) + \cdots + \mathrm{P}(y_k) +$	$\mathrm{P}(z_1) + \cdots + \mathrm{P}(z_j)$
$\mathrm{P}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) =$			$\mathrm{P}(z_1) + \cdots + \mathrm{P}(z_j)$
$\mathrm{P}(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) =$	$\mathrm{P}(x_1) + \cdots + \mathrm{P}(x_i) +$	$\mathrm{P}(y_1) + \cdots + \mathrm{P}(y_k) +$	$\mathrm{P}(z_1) + \cdots + \mathrm{P}(z_j)$

Et donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{X}) + \mathrm{P}(\mathrm{Y}) &= \mathrm{P}(x_1) + \cdots + \mathrm{P}(x_i) + \mathrm{P}(y_1) + \cdots + \mathrm{P}(y_k) + \mathrm{P}(z_1) + \cdots + \mathrm{P}(z_j) + \mathrm{P}(z_1) + \cdots + \mathrm{P}(z_j) \\ &= \mathrm{P}(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) + \mathrm{P}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y}) \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}) + \mathrm{P}(\mathrm{Y}) - \mathrm{P}(\mathrm{X} \cap \mathrm{Y})$$

Répondre aux questions suivantes, portant sur la démonstration ci-dessus :

1. Quelles sont les issues qui appartiennent à $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$? ....
2. Quelles sont les issues qui appartiennent à $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$? ....
3. Quand on calcule la somme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) + \mathrm{P}(\mathrm{Y})$, quelles sont les issues dont les probabilités sont comptées deux fois ?