Reconnaître des suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1. 1. On donne les deux premiers termes d'une suite arithmétique u ci dessous :

$$u_0 = 11 \; ; \; u_1 = 25 \; ; \; u_2 = 39$$

Quelle est le prochain terme de la suite ?
Quelle est alors la raison de cette suite ? $r = 14$

2. On donne les deux premiers termes d'une suite géométrique v ci dessous :

$$u_0 = 3 \; ; \; u_1 = 18 \; ; \; u_2 = 108$$

Quelle est le prochain terme de la suite ?
Quelle est alors la raison de cette suite ? $r = 6$

3. On en déduit les propriétés ci-dessous :
   - Pour trouver la raison d'une suite arithmétique, on fait la différence entre deux termes successifs.
   - Pour trouver la raison d'une suite géométrique, on fait le rapport entre deux termes successifs.

Exercice 2.

1. Dans une suite arithmétique, la différence entre deux termes est constante.
2. Dans une suite géométrique, le rapport entre deux termes est constant.

Exercice 3. Pour chacune des suites ci-dessous :

- Donner l'expression de $u_{n+1} - u_n$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n, en la simplifiant au maximum.
- Dire alors si la suite est arithmétique, géométrique (ainsi que sa raison), ou ni l'un ni l'autre.

a. $u_n = 2n$
b. $u_n = 3^n$
c. $u_n = 6n^2 + 3n$
d. $u_n = 5n + 6$

a. $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 2n = 2(n+1-n) = 2.$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2(n+1)}{2n} = \dfrac{n+1}{n}$
Donc u est arithmétique de raison 2.

b. $u_{n+1} - u_n = 3^{n+1} - 3^n = 3 \times 3^n - 3^n = 2 \times 3^n.$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+1}}{3^n} = \dfrac{3 \times 3^n}{3^n} = 3$
Donc u est géométrique de raison 3.

c. $u_{n+1} - u_n = 6(n+1)^2 + 3(n+1) - (6n^2 + 3n) = 6(n^2 + 2n + 1) + 3n + 3 - 6n^2 - 3n = 12n + 9.$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{6(n+1)^2 + 3(n+1)}{6n^2 + 3n} = \dfrac{6n^2 + 15n + 9}{6n^2 + 3n}$
Donc u n'est ni arithmétique, ni géométrique.

d. $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 6 - (5n+6) = 5n + 5 + 6 - 5n - 6 = 5.$
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5(n+1)+6}{5n+6} = \dfrac{5n+11}{5n+6}$
Donc u est arithmétique de raison 5.