Chapitre 7 : Fonctions

Définition : Fonction, image, antécédent

Une **fonction** est un procédé qui à un nombre réel x associe un unique nombre réel $f(x)$.

- $f(x)$ est **L'image** de x par la fonction f. On représente une image par la lettre y, et on écrit alors

$$f(x) = y$$

$$x \xrightarrow{\quad f \quad} f(x)$$

- x est **UN antécédent** de y.

Remarque

- Il n'y a <u>qu'une seule image</u> pour un nombre donné.
- Il peut y avoir <u>plusieurs antécédents</u> pour un nombre donné.

Définition : Calcul d'image

Si on a une expression **algébrique** de la fonction f, on peut calculer l'image d'un nombre en remplaçant x par ce nombre dans l'expression de la fonction.

Exemple

Si f est la fonction qui à x associe $3x + 2$:

- $f(2) = 3 \times 2 + 2 = 8$
- Attention : si on remplace x par une expression complexe, il faut ajouter des parenthèses. Par exemple,
  $f(1 + 3) = 3 \times (1 + 3) + 2 = 3 \times 4 + 2 = 14$

Définition : Domaine de définition

L'ensemble des nombres ayant une image par la fonction f est appelé le **domaine de définition** de f. On le note $\mathcal{D}_f$.

Exemple

- Si f est la fonction qui à x associe $\frac{1}{x}$, alors x ne peut pas être 0.
  Son domaine de définition est $\mathcal{D}_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
- Si f représente une longueur, x ne peut pas être négatif.
  Son domaine de définition est $\mathcal{D}_f = [0;+\infty[$.

Définition : Courbe représentative

La **courbe représentative** d'une fonction f est l'ensemble des points $(x;y)$ tels que $y = f(x)$.

Définition : fonction affine

Une **fonction affine** est une fonction définie par

$$f(x) = mx + p$$

où m et p sont des nombres réels fixés.

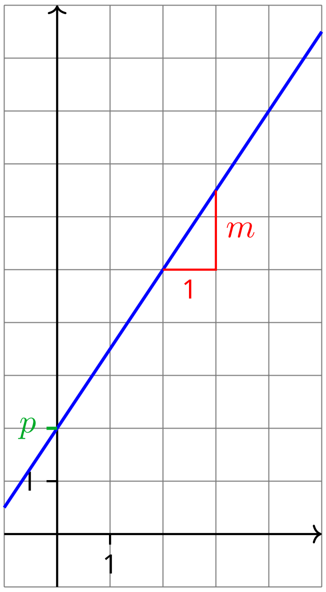
Remarque

- Si $p = 0$, on a alors $f(x) = mx$, donc la fonction est **linéaire**.
- Si $m = 0$, on a alors $f(x) = p$, donc la fonction est **constante**.

Définition : Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine. Alors
- m est le **coefficient directeur** (ou la **pente**) de la droite représentative de f.
- p est l'**ordonnée à l'origine**.

Exemple



La droite ci-contre correspond à la fonction

$$\begin{aligned} f(x) &= mx + p \\ &= 1{,}5x + 2 \end{aligned}$$

Propriété : Représentation d'une fonction affine

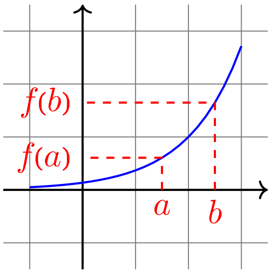
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Définition : Variations d'une fonction

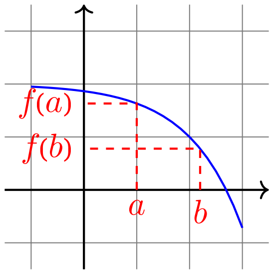
On considère une fonction f définie sur un intervalle I.
- On dit que f est **croissante** sur I si pour tout réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$.
- On dit que f est **décroissante** sur I si pour tout réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a

$f(a) \geq f(b)$.

Exemple



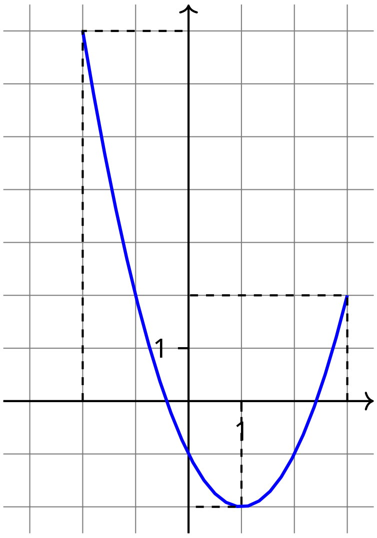
On a $a \leq b$, et $f(a) \leq f(b)$, donc f est croissante.



On a $a \leq b$, et $f(a) \geq f(b)$, donc f est décroissante.

Tableau de variations

Un **tableau de variations** résume les intervalles sur lesquelles la fonction est croissante ou décroissante :



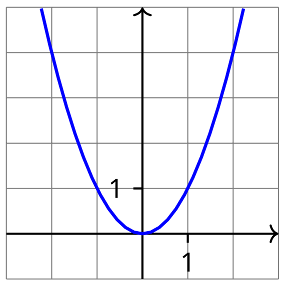
x	-2		1		3
$f(x)$	7	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Fonctions carrée et cube

La fonction **carrée** est la fonction
$f(x) = x^2$

Pour tout nombre réel x, on a
$f(x) = f(-x)$

L'axe des ordonnées est un axe de symétrie du graphe.



La courbe est une **parabole**.
Le point (0;0) est le **sommet** de cette parabole.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	

La fonction **cube** est la fonction
$g(x) = x^3$

Pour tout nombre réel x, on a
$g(x) = -g(-x)$

Le centre du repère est un centre de symétrie du graphe.

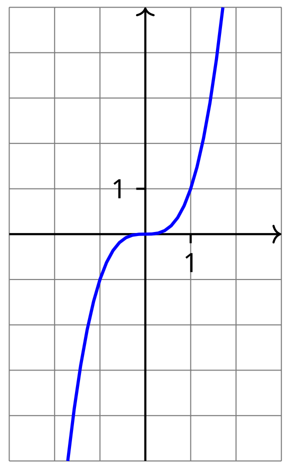


Tableau de variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
x^3		↗	

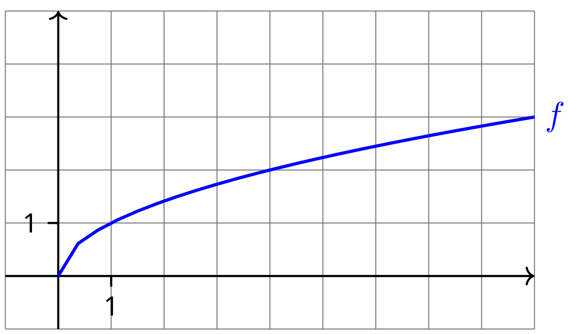
Rappel

La racine carrée $\sqrt{a}$ d'un nombre positif a est l'unique nombre positif tel que $\sqrt{a}^2 = a$.

Fonction racine carrée

La **fonction racine carrée** est $f(x) = \sqrt{x}$, définie sur $[0;+\infty[$.

x	0	1	2	3	4	5
$\sqrt{x}$	0	1	$\approx$ 1,41	$\approx$ 1,73	2	$\approx$ 2,24

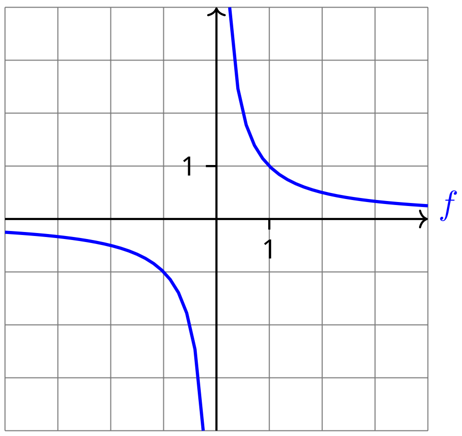


x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗	

Fonction inverse

La **fonction inverse** est $f(x) = \dfrac{1}{x}$, définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\dfrac{1}{x}$	$-0{,}25$	$\approx -0{,}33$	$-0{,}5$	-1	NON	1	0,5	$\approx 0{,}33$	0,25



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		↘	‖	↘	