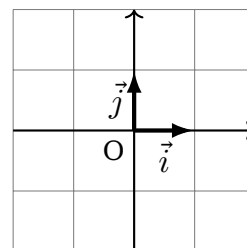


Chapitre 6 : Vecteurs dans un repère

Définition : Base orthonormée

Soit O un point du plan, et deux vecteurs \vec{i} et \vec{j} dont les directions sont perpendiculaires et dont les normes sont égales à 1.
On dit que (\vec{i}, \vec{j}) est une **base orthonormée** du plan et que $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est un **repère orthonormé** du plan.

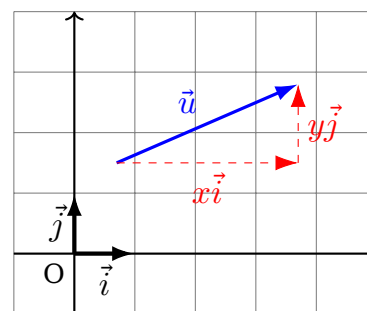


Propriété : Coordonnées d'un vecteur

Si (\vec{i}, \vec{j}) est une base orthonormée du plan et u est un vecteur, il existe un unique couple de réels $(x ; y)$ tel que :

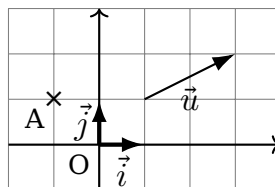
$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

On dit que le vecteur \vec{u} a pour **coordonnées** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .



Remarque

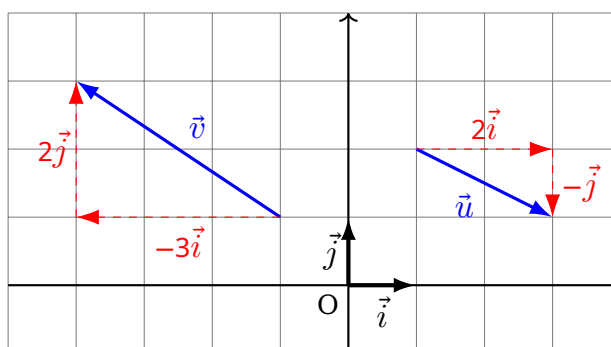
- Cela revient à décomposer le vecteur \vec{u} en sa composante horizontale et verticale.
- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales.
- On écrit les coordonnées d'un point à l'horizontale, et celles d'un vecteur à la verticale :



$$A(-1;1)$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple



Dans le repère ci-dessus, on a

- $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$, donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .
- $\vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$, donc $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

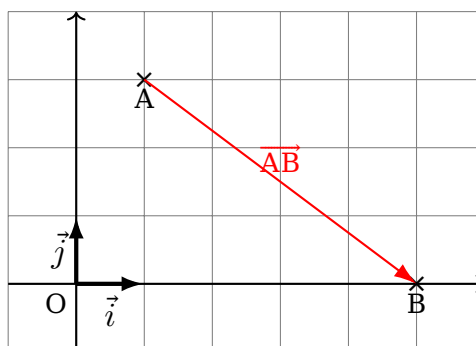
Propriété : Coordonnées d'un vecteur à partir de points

Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan.

Alors le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Exemple



Dans le repère ci-dessus, on a les points $A(1 ; 3)$ et $B(5 ; 0)$.

Donc le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 0 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Propriété : Norme d'un vecteur

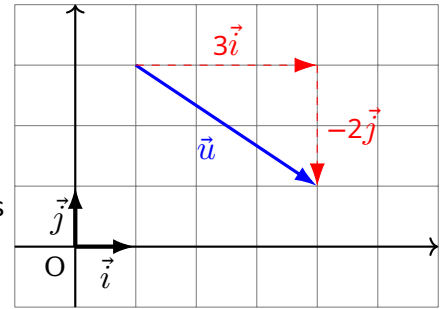
Si un vecteur \vec{u} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, sa norme est égale à $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemple

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

Remarquons que cela revient à calculer la distance entre les deux extrémités du vecteur.



Propriété : Somme de vecteurs

Si on a deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

Exemple

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 + (-1) \\ -5 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Propriété : Produit d'un vecteur par un réel

Si un vecteur \vec{u} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k est un nombre réel, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exemple

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Alors le vecteur $-3\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \times (-2) \\ -3 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$.

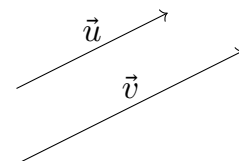
Définition : Colinéarité

Si deux vecteurs ont la même direction, on dit qu'ils sont **colinéaires**.

Propriété : Colinéarité

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si, de manière équivalente, on a :

- $\vec{u} = k\vec{v}$, avec k un nombre réel ;
- Les coordonnées de \vec{u} et \vec{v} sont proportionnelles ;
- $x \times y' = x' \times y$

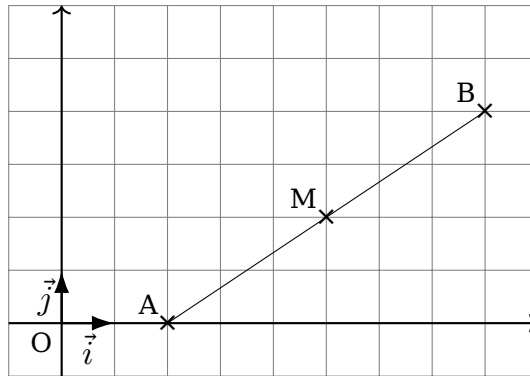


Exemple

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, car $6 \times 10 = 4 \times 15 (= 60)$.

Propriété : Milieu d'un segment

Si on a deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Exemple

Sur la figure ci-dessus, on a $A(2;0)$ et $B(8;4)$. Ainsi le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $M\left(\frac{2+8}{2}; \frac{0+4}{2}\right) = (5;2)$.