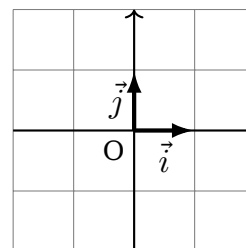


## Chapitre 6 : Vecteurs dans un repère

### Définition : Base orthonormée

Soit  $O$  un point du plan, et deux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  dont les directions sont perpendiculaires et dont les normes sont égales à 1.  
On dit que  $(\vec{i}, \vec{j})$  est une **base orthonormée** du plan et que  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  est un **repère orthonormé** du plan.

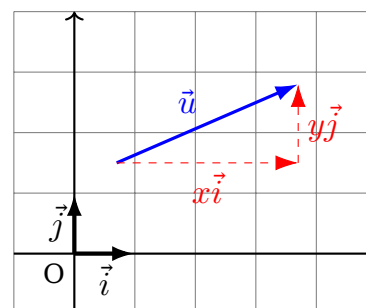


### Propriété : Coordonnées d'un vecteur

Si  $(\vec{i}, \vec{j})$  est une base orthonormée du plan et  $u$  est un vecteur, il existe un unique couple de réels  $(x ; y)$  tel que :

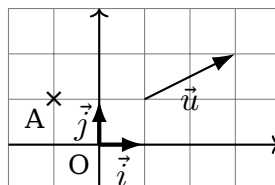
$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

On dit que le vecteur  $\vec{u}$  a pour **coordonnées**  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .



### Remarque

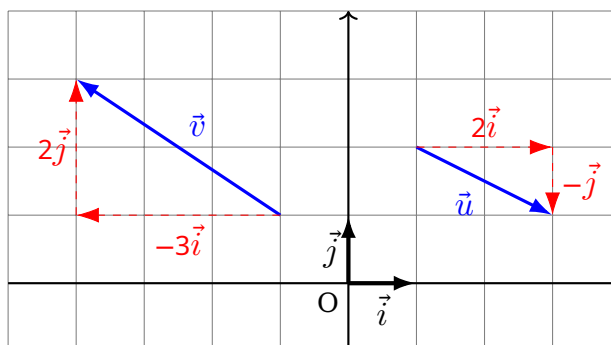
- Cela revient à décomposer le vecteur  $\vec{u}$  en sa composante horizontale et verticale.
- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales.
- On écrit les coordonnées d'un point à l'horizontale, et celles d'un vecteur à la verticale :



$$A(-1; 1)$$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### Exemple



Dans le repère ci-dessus, on a

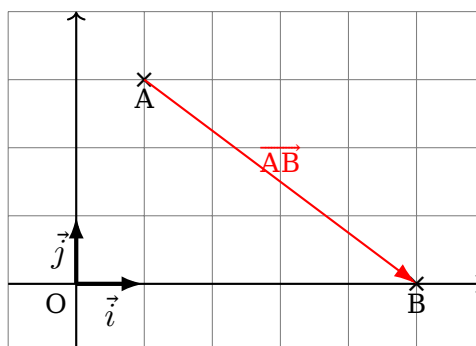
- $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ , donc  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .
- $\vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ , donc  $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

### Propriété : Coordonnées d'un vecteur à partir de points

Soient  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$  deux points du plan.  
Alors le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

### Exemple



Dans le repère ci-dessus, on a les points  $A(1 ; 3)$  et  $B(5 ; 0)$ .

Donc le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 0 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

### Propriété : Norme d'un vecteur

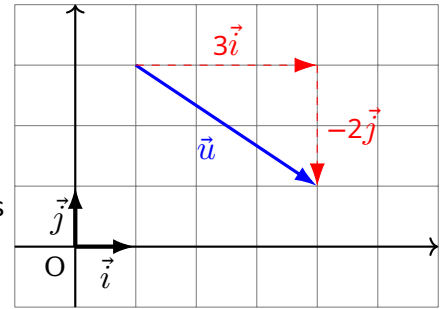
Si un vecteur  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , sa norme est égale à  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

### Exemple

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Alors  $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ .

Remarquons que cela revient à calculer la distance entre les deux extrémités du vecteur.



### Propriété : Somme de vecteurs

Si on a deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , alors  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ .

#### Exemple

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Alors  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 3 + (-1) \\ -5 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

### Propriété : Produit d'un vecteur par un réel

Si un vecteur  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $k$  est un nombre réel, le vecteur  $k\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ .

#### Exemple

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Alors le vecteur  $-3\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} -3 \times (-2) \\ -3 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$ .

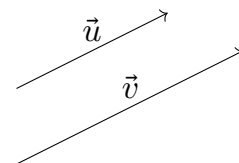
### Définition : Colinéarité

Si deux vecteurs ont la même direction, on dit qu'ils sont **colinéaires**.

### Propriété : Colinéarité

Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si, de manière équivalente, on a :

- $\vec{u} = k\vec{v}$ , avec  $k$  un nombre réel ;
- Les coordonnées de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont proportionnelles ;
- $x \times y' = x' \times y$

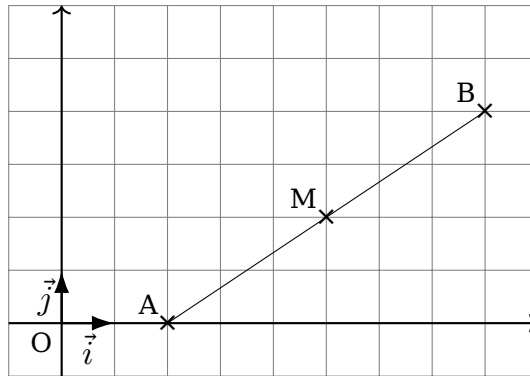


#### Exemple

Les vecteurs  $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$  sont colinéaires, car  $6 \times 10 = 4 \times 15 (= 60)$ .

**Propriété : Milieu d'un segment**

Si on a deux points  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ , le milieu  $M$  du segment  $[AB]$  a pour coordonnées  $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ .

**Exemple**

Sur la figure ci-dessus, on a  $A(2;0)$  et  $B(8;4)$ . Ainsi le milieu de  $[AB]$  a pour coordonnées  $M\left(\frac{2+8}{2}; \frac{0+4}{2}\right) = (5;2)$ .