Chapitre 3 : Effectifs, fréquences et probabilités

1 Tableaux

Définition : Tableau croisé d'effectifs

Lorsqu'on étudie deux **caractères** d'un objet, on utilise un **tableau croisé d'effectifs** (aussi appelé **tableau à double entrée**).
Le premier caractère est noté X, et le deuxième Y.

Les valeurs prises par le caractère X sont notées x_1, x_2, x_3, ..., et sont notées sur la première colonne.
Les valeurs prises par le caractère Y sont notées y_1, y_2, y_3, ..., et sont notées sur la première ligne.

Dans chaque case, on place **l'effectif** correspondant au valeurs décrites.
L'effectif correspondant aux valeurs $(x_i;y_j)$ est noté n_{ij}.
Les totaux de chaque colonne et chaque ligne sont appelés les **effectifs marginaux**. On les place dans la dernière ligne/colonne.
Dans la case en bas à droite, on place **l'effectif total** N.

Exemple

un constructeur de smartphone vend un modèle disponible en trois couleurs différentes et avec trois capacités de stockage possibles. Un magasin fait le bilan du nombre de smartphones vendus selon ces deux caractères.

Y = mémoire / X = couleur	y_1 = 64 Go	y_2 = 128 Go	y_3 = 256 Go	Total
x_1 = Noir	36	73	16	125
x_2 = Blanc	20	52	3	75
x_3 = Rouge	24	17	9	50
Total	80	142	28	250

Effectifs marginaux

Effectifs marginaux Effectif total (N)

Définition : Tableau de fréquences

Lorsqu'on a un tableau d'effectifs, on peut dresser en parallèle un **tableau de fréquences**.
Chaque case contient le rapport de l'effectif considéré par l'effectif global.
Chaque fréquence peut être exprimée comme un nombre décimal, une fraction ou un pourcentage.
La fréquence d'un effectif marginal est une **fréquence marginale**.

La fréquence de la ligne i et de la colonne j est appelée f_{ij}.

Remarque

La fréquence totale est **toujours** 1.

Exemple

On reprend l'exemple des smartphones : Chaque effectif doit être divisé par 250 (l'effectif total).

X = couleur \ Y = mémoire	y_1 = 64 Go	y_2 = 128 Go	y_3 = 256 Go	Total
x_1 = Noir	$\frac{36}{250}$ = 0,144	$\frac{73}{250}$ = 0,292	$\frac{16}{250}$ = 0,064	0,5
x_2 = Blanc	0,08	0,208	0,012	0,3
x_3 = Rouge	0,096	0,068	0,036	0,2
Total	0,32	0,568	0,112	1

Fréquences marginales

Fréquences marginales

Fréquence totale (N)

Définition : Tableau de fréquences conditionnelles

Si on a un tableau d'effectifs, on peut pour chaque caractère dresser un **tableau de fréquences conditionnelles** par rapport à ce caractère.
Dans ce cas, on ne garde que la ligne (ou colonne) liée à ce caractère, et on divise toutes les cases par le total de cette ligne (ou colonne).

Exemple

Si on reprend l'exemple des smartphones, on peut se demander :

- Parmi ceux qui ont 64 Go de capacité, quelle est la répartition des couleurs ?
  On dresse alors le tableau suivant :

X = couleur	y_1 = 64 Go
x_1 = Noir	$\frac{36}{80}$ = 0,45
x_2 = Blanc	0,25
x_3 = Rouge	0,3
Total	1

- Parmi ceux qui sont rouges, quelle est la répartition des capacités ?
  On dresse alors le tableau suivant :

Y = capacité	y_1 = 64 Go	y_2 = 64 Go	y_3 = 64 Go	Total
x_3 = Rouge	0,48	0,34	0,18	1

2 Probabilités conditionnelles

Rappel : vocabulaire des évènements

Définition : Expérience aléatoire, évènements

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont l'**issue** n'est pas connue à l'avance.
Un **évènement** est un regroupement de plusieurs issues.

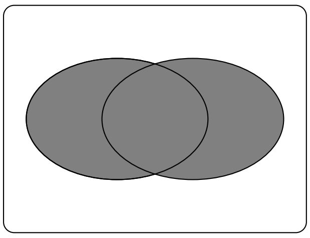
Exemple

Un jeté de dé est une expérience aléatoire, dont les issues sont {1,2,3,4,5,6}.
On peut noter A l'évènement « le résultat obtenu est pair ». Cet évènement contient les issues 2, 4 et 6 : on note alors $A = \{2,4,6\}$.

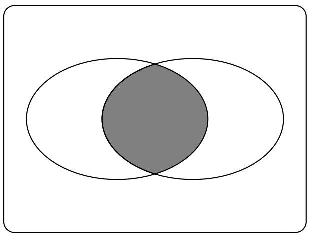
Définition : Opérations sur les évènements

Si A et B sont des évènements :

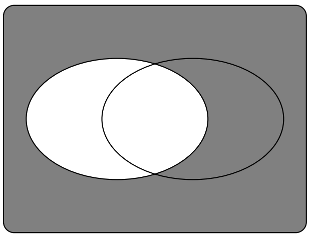
- $A \cup B$ est l'évènement qui regroupe toutes les issues qui sont dans A **ou** dans B (ou les deux). On le lit « A union B ».
- $A \cap B$ est l'évènement qui regroupe toutes les issues qui sont dans A **et** dans B. On le lit « A inter B ».
- $\overline{A}$ est l'évènement qui regroupes toutes les issues qui **ne sont pas** dans A. On le lit « A barre ».



$A \cup B$



$A \cap B$



$\overline{A}$

Définition : Probabilités

Chaque issue et évènement a une **probabilité** d'être réalisé. On note $P(A)$ la probabilité de l'évènement A.

Remarque

On a toujours $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Propriété : Probabilités

Si chaque issue à la même probabilité d'être réalisée, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.
Dans ce cas, on a

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues dans A}}{\text{nombre total d'issues}}$$

Probabilités conditionnelles

Définition : Cardinal

Le **Cardinal** de l'évènement A est le nombres d'issues dans A. On le note $\text{Card}(A)$.

Définition : Probabilité conditionnelle

Si A et B sont des évènements, on appelle **probabilité de** A **sachant** B le nombre

$$P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$$

Exemple

Dans l'exemple des smartphones, on peut se demander :
Si on a pris un smartphone au hasard, et on a vu qu'il est rouge ; quelle est la probabilité qu'il ai 256 Go de capacité ?

On a alors

- A l'évènement « le smartphone a 256 Go de capacité ».
- B l'évènement « le smartphone est rouge ».

En reprenant le tableau des fréquences, on voit que $\text{Card}(B) = 50$, et $\text{Card}(A \cap B) = 9$.

Ainsi $P_B(A) = \frac{9}{50} = 18\%$.

Remarque

Si $TOTAL$ est le nombre total d'issues,

on a $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{Card}(A \cap B)/TOTAL}{\text{Card}(B)/TOTAL} = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)} = P_B(A)$

Donc

$$\boxed{P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$