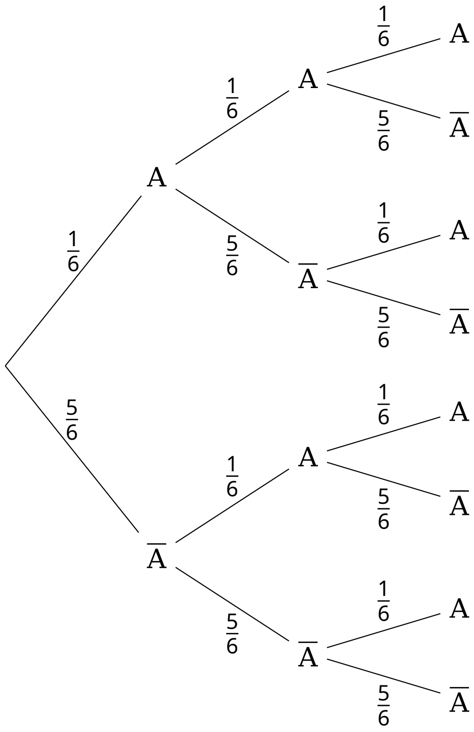
Chapitre 7 : Lois de probabilités

Définition : Arbre de probabilités

Une expérience aléatoire peut être représentée par un **arbre de probabilités** si elle est composée de plusieurs *épreuves*.
Deux épreuves sont **indépendantes** lorsque le résultat de l'une n'influence pas la probabilité des résultats de l'autre.

Exemple

On fait une expérience qui consiste à lancer un dé équilibré 3 fois de suite, et à regarder si on a obtenu un 6.
On note A l'évènement «Le dé est tombé sur 6». Ainsi on peut dessiner l'arbre suivant :



Propriété : Probabilité d'une issue

Si les épreuves que représente notre arbre sont indépendantes, la probabilité d'une issue est le **produit** des probabilités du chemin qui mène à cette issue.

Exemple

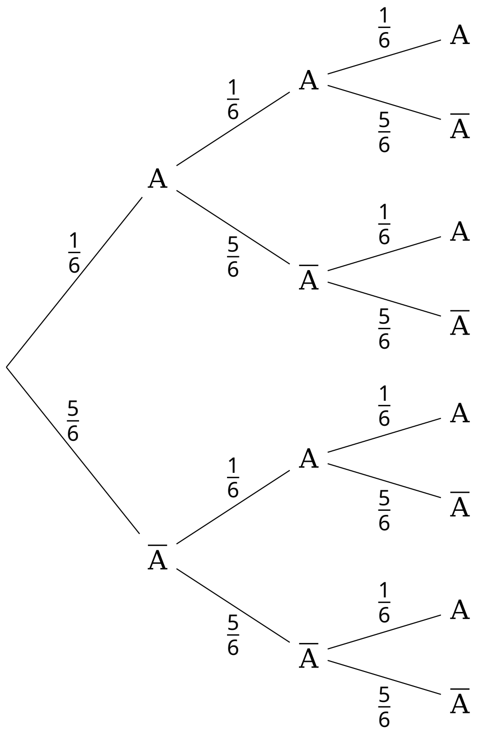
Dans l'exemple précédent, l'issue «On a obtenu un six *uniquement* au premier lancé» est représentée par le chemin $(\mathrm{A},\overline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}})$. Sa probabilité est alors $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{216}$.

Propriété : Probabilité d'un évènement

La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des issues qui forment cet évènement.

Exemple

Si on veut obtenir la probabilité d'obtenir *exactement* 1 six sur les trois lancés :
Cet évènement est constitué des issues $(\mathrm{A},\overline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}})$, $(\overline{\mathrm{A}},\mathrm{A},\overline{\mathrm{A}})$ et $(\overline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}},\mathrm{A})$. Sa probabilité est donc



→ issue $(\mathrm{A},\overline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}})$, probabilité $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{216}$

→ issue $(\overline{\mathrm{A}},\mathrm{A},\overline{\mathrm{A}})$, probabilité $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{216}$

→ issue $(\overline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}},\mathrm{A})$, probabilité $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$

$$\frac{25}{216}+\frac{25}{216}+\frac{25}{216}=\frac{75}{216}=\frac{25}{72}$$

Définition : Variable aléatoire

Dans une expérience aléatoire, une **variable aléatoire** est un nombre réel associé à chaque issue de l'expérience. On la note avec une lettre majuscule, souvent (mais pas toujours !) X ou Y.
Ainsi on peut définir des *évènements* liés à cette variable aléatoire :

- $\{\mathrm{X}=a\}$ désigne l'évènement « X prend la valeur a »
- $\{\mathrm{X}<a\}$ désigne l'évènement « X prend une valeur strictement inférieure à a »

Exemple

On lance trois dés, et :

- Si on obtient 3 six, on gagne 1000€.
- Sinon, on perd 10€.

Ici la variable aléatoire est le gain G que l'on peut obtenir, en euros. Il y a deux possibilités :

- Si on fait 3 six, alors $\mathrm{G}=+1000$. On a donc $\mathrm{P}(\mathrm{G}=1000)=\frac{1}{216}$ (la probabilité de faire 3 six).
- Sinon, $\mathrm{G}=-10$. On a donc $\mathrm{P}(\mathrm{G}=-10)=\frac{215}{216}$.

On dira que l'issue (6;6;6) est **favorable** à l'évènement $\{G = 1000\}$, tandis que les issues (1;1;1), (2;3;2), etc... sont favorable à l'évènement $\{G = -10\}$.

Définition : Loi de probabilité

Pour une variable aléatoire X, sa **loi de probabilité** est la description des probabilités associées à chaque valeur possible de X.

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, la loi de probabilité de G est

- $P(G = 1000) = \dfrac{1}{216}$
- $P(G = -10) = \dfrac{215}{216}$

Noter que le total des probabilités est toujours 1.

Définition : Espérance

L'**espérance** d'une variable aléatoire X est la valeur de la moyenne que l'on peut *espérer* obtenir si on répète l'expérience un grand nombre de fois.
Si la loi de probabilité de X est donnée par

a_i	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
$P(X = a_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Alors son espérance est

$$E(X) = p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n$$

Exemple

Si on jette un dé équilibré à six faces, et que l'on défini la variable aléatoire X telle que :

- Si on obtient 1, 2, 3 ou 4, $X = 0$.
- Si on obtient 5, $X = 1$.
- Si on obtient 6, $X = 2$.

On a alors le tableau suivant :

a	0	1	2
$P(X = a)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Et donc

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{4}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 \\ &= 0 + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Définition : Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui n'a que deux issue : le succès, ou l'échec.

Définition : Loi de Bernoulli

Une **loi de Bernoulli** la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès, et 0 en cas d'échec.
La probabilité p du succès est appelée le **paramètre** de cette loi. La loi de Bernoulli est alors donnée par le tableau suivant :

a_i	0	1
$P(X = a_i)$	$1 - p$	p

Exemple

Si on regarde la probabilité d'un sportif à gagner un de ses matchs :

- Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, car le sportif ne peut que perdre ou gagner.
- Le nombre de victoires qu'il obtient (zéro ou une) est alors une loi de Bernoulli.