

Chapitre 7 : Lois de probabilités

Définition : Arbre de probabilités

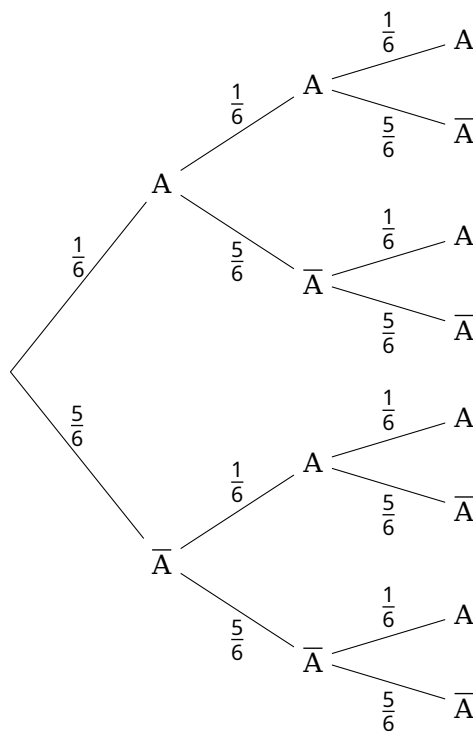
Une expérience aléatoire peut être représentée par un **arbre de probabilités** si elle est composée de plusieurs *épreuves*.

Deux épreuves sont **indépendantes** lorsque le résultat de l'une n'influence pas la probabilité des résultats de l'autre.

Exemple

On fait une expérience qui consiste à lancer un dé équilibré 3 fois de suite, et à regarder si on a obtenu un 6.

On note A l'évènement «Le dé est tombé sur 6». Ainsi on peut dessiner l'arbre suivant :



Propriété : Probabilité d'une issue

Si les épreuves que représente notre arbre sont indépendantes, la probabilité d'une issue est le **produit** des probabilités du chemin qui mène à cette issue.

Exemple

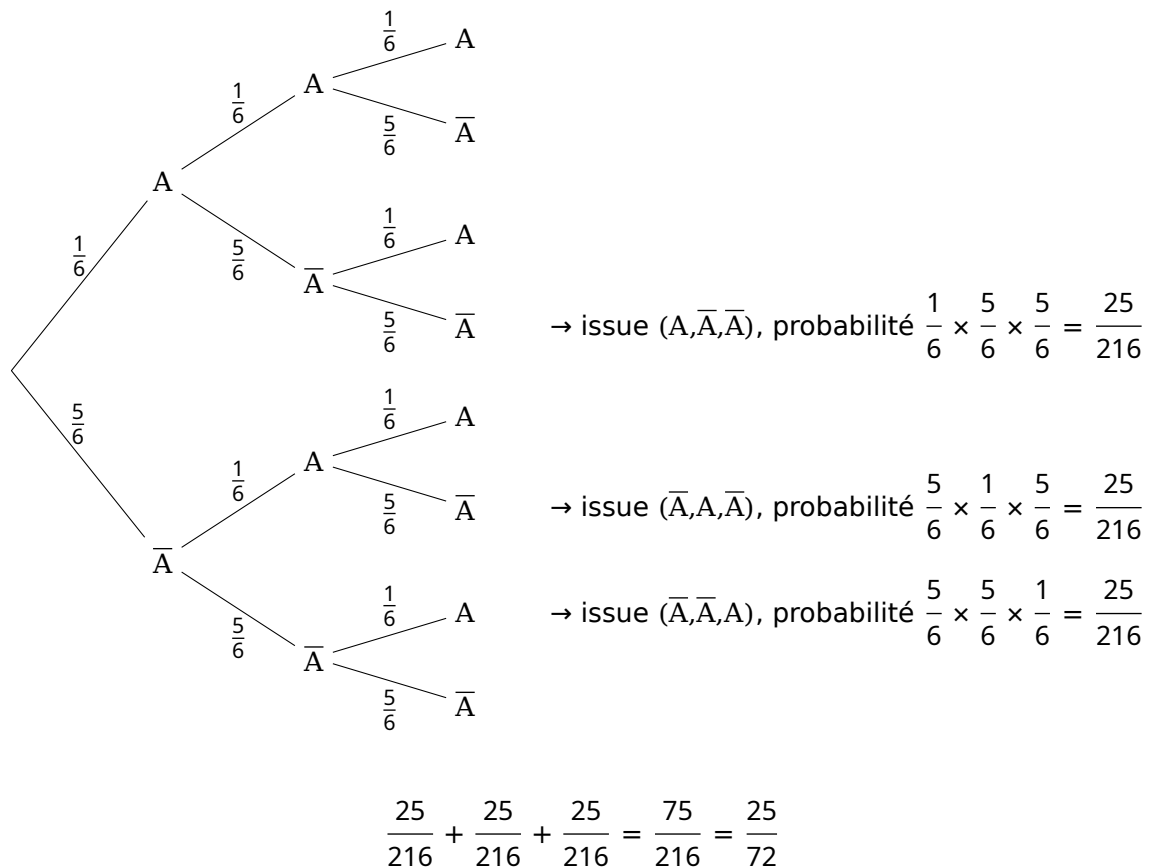
Dans l'exemple précédent, l'issue «On a obtenu un six *uniquement* au premier lancé» est représentée par le chemin (A, \bar{A}, \bar{A}) . Sa probabilité est alors $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$.

Propriété : Probabilité d'un évènement

La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des issues qui forment cet évènement.

Exemple

Si on veut obtenir la probabilité d'obtenir *exactement* 1 six sur les trois lancés :
Cet évènement est constitué des issues (A, \bar{A}, \bar{A}) , (\bar{A}, A, \bar{A}) et (\bar{A}, \bar{A}, A) . Sa probabilité est donc

**Définition : Variable aléatoire**

Dans une expérience aléatoire, une **variable aléatoire** est un nombre réel associé à chaque issue de l'expérience. On la note avec une lettre majuscule, souvent (mais pas toujours !) X ou Y .

Ainsi on peut définir des évènements liés à cette variable aléatoire :

- $\{X = a\}$ désigne l'évènement « X prend la valeur a »
- $\{X < a\}$ désigne l'évènement « X prend une valeur strictement inférieure à a »

Exemple

On lance trois dés, et :

- Si on obtient 3 six, on gagne 1000€.
- Sinon, on perd 10€.

Ici la variable aléatoire est le gain G que l'on peut obtenir, en euros. Il y a deux possibilités :

- Si on fait 3 six, alors $G = +1000$. On a donc $P(G = 1000) = \frac{1}{216}$ (la probabilité de faire 3 six).
- Sinon, $G = -10$. On a donc $P(G = -10) = \frac{215}{216}$.

On dira que l'issue (6;6;6) est **favorable** à l'évènement $\{G = 1000\}$, tandis que les issues (1;1;1), (2;3;2), etc... sont favorables à l'évènement $\{G = -10\}$.

Définition : Loi de probabilité

Pour une variable aléatoire X , sa **loi de probabilité** est la description des probabilités associées à chaque valeur possible de X .

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, la loi de probabilité de G est

- $P(G = 1000) = \frac{1}{216}$
- $P(G = -10) = \frac{215}{216}$

Noter que le total des probabilités est toujours 1.

Définition : Espérance

L'**espérance** d'une variable aléatoire X est la valeur de la moyenne que l'on peut *espérer* obtenir si on répète l'expérience un grand nombre de fois.

Si la loi de probabilité de X est donnée par

a_i	a_1	a_2	\dots	a_n
$P(X = a_i)$	p_1	p_2	\dots	p_n

Alors son espérance est

$$E(X) = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n$$

Exemple

Si on jette un dé équilibré à six faces, et que l'on définit la variable aléatoire X telle que :

- Si on obtient 1, 2, 3 ou 4, $X = 0$.
- Si on obtient 5, $X = 1$.
- Si on obtient 6, $X = 2$.

On a alors le tableau suivant :

a	0	1	2
$P(X = a)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Et donc

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \frac{4}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 \\
 &= 0 + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Définition : Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues : le succès, ou l'échec.

Définition : Loi de Bernoulli

Une **loi de Bernoulli** la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès, et 0 en cas d'échec. La probabilité p du succès est appelée le **paramètre** de cette loi. La loi de Bernoulli est alors donnée par le tableau suivant :

a_i	0	1
$P(X = a_i)$	$1 - p$	p

Exemple

Si on regarde la probabilité d'un sportif à gagner un de ses matchs :

- Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, car le sportif ne peut que perdre ou gagner.
- Le nombre de victoires qu'il obtient (zéro ou une) est alors une loi de Bernoulli.