

## Chapitre 5 : Dérivation

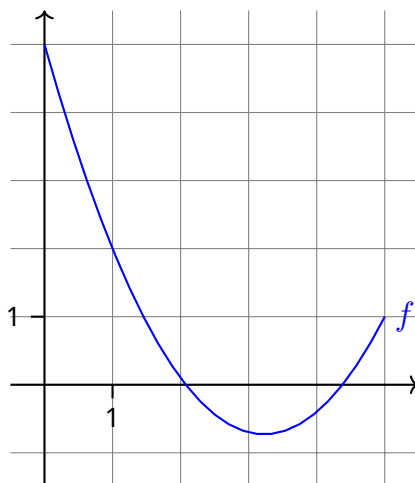
### Définition : Taux d'accroissement

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ ,  $a$  un nombre dans  $I$ , et  $h \neq 0$ , tel que  $a + h \in I$ . Alors, le rapport

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

est le **taux d'accroissement** de  $f$  entre  $a$  et  $a+h$ .

### Exemple



Sur le graphique ci-dessus :

- $\tau_0(1) = \frac{f(0+1) - f(0)}{1} = \frac{2-5}{1} = -3$
- $\tau_1(4) = \frac{f(1+4) - f(1)}{4} = \frac{1-2}{4} = -0,25$

### Exemple

Si  $f$  est la fonction telle que  $f(x) = x^2$ , on peut calculer l'expression de  $\tau_a(h)$  :

$$\begin{aligned} \tau_a(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2}{h} \\ &= 2a + h \end{aligned}$$

**Remarque**

Le taux d'accroissement de  $f$  entre  $a$  et  $b$  correspond à la **pente** de la droite passant par  $(a; f(a))$  et  $(b; f(b))$ .

**Définition : Nombre dérivé**

Si le taux d'accroissement  $\tau_a(h)$  admet une limite lorsque  $h$  tend vers 0, on dit que  $f$  est **dérivable** en  $a$ .

La limite est alors appelée le nombre dérivée de  $f$  en  $a$  : on note

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

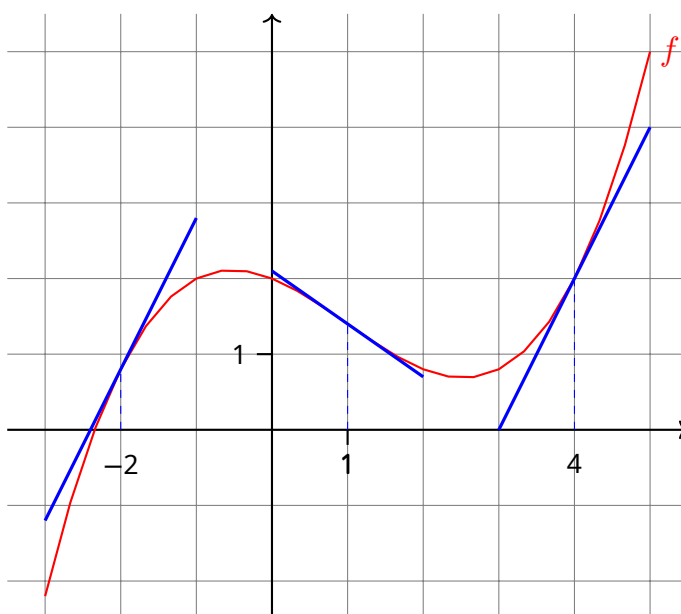
**Remarque**

Le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  correspond à la **pente** de la droite *tangente* à la courbe de  $f$  au point  $a$ .

**Exemple**

Soit  $f$  la fonction telle que  $f(x) = 0,1x^3 - 0,3x^2 - 0,4x + 2$ .

- Graphiquement :



On peut déterminer graphiquement la pente de la tangente, et obtenir ainsi le nombre dérivé :

$$\circ f'(-2) = 2$$

$$\circ f'(1) = 0,7$$

$$\circ f'(4) = 2$$

- Par le calcul :

On admet que pour tout  $h \neq 0$ , on a

$$\tau_2(h) = -0,4 + 0,3h + 0,1h^2$$

Alors  $f$  est dérivable en 2, car  $\tau_2(h)$  admet une limite lorsque  $h$  tend vers 0,  
Et  $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (-0,4 + 0,3h + 0,1h^2) = -0,4$ .

**Propriété : Équation de la tangente**

La tangente à la courbe de  $f$  au point  $(a; f(a))$  a pour équation

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$