Chapitre 5 : Règles de calcul (partie 2)

Propriété : Double distributivité

Si a,b,c et d sont quatres nombres réels, on a

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

On dit que l'expression de gauche est **factorisée**, et que l'expression de droite est **développée**.

Propriété : Identités remarquables

Si a et b sont des nombres réels, on a
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ces égalités sont à connaître par cœur !

Démonstration. On va prouver l'égalité 1, en utilisant la double distributivité :
Soient a et b deux nombres réels. Alors :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a\times a + a\times b + b\times a + b\times b\\ &= a^2 + a\times b + a\times b + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

□

Propriété

Si a et b sont des nombres réels, on a :

$$(ab)^2 = a^2b^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Propriété

Si a et b sont des nombres réels, on a :
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Montrer que les deux égalités et l'inégalité ci-dessus sont vérifiées pour $a = 9$ et $b = 16$:
- $\sqrt{9\times 16} = \sqrt{144} = 12$, et $\sqrt{9}\times\sqrt{16} = 3\times 4 = 12$
- $\sqrt{\dfrac{9}{16}} = \sqrt{0{,}5625} = 0{,}75$, et $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

- $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$, et $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

Propriété : Produit nul

Si un produit est nul, alors au moins un des facteurs est nul.

$$\text{Si } \mathrm{A} \times \mathrm{B} = 0, \text{ alors } \mathrm{A} = 0 \text{ ou } \mathrm{B} = 0.$$

Exemple

Résoudre l'équation $(x-3)(2x+4) = 0$:

- On sait que $(x-3)(2x+4) = 0$. Donc on a $x-3 = 0$ ou $2x+4 = 0$.
- Si $x-3 = 0$, alors $x = 3$.
- Si $2x+4 = 0$, alors $x = -2$.
- L'ensemble de solutions de cette équation est donc $\{-2;3\}$.

Propriété : Résolution par factorisation

Si on a une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, on peut *parfois* la résoudre en **factorisant**, et en utilisant la propriété du produit nul.

Techniques de factorisation

- Si il n'y a pas de terme constant, on peut factoriser par x.
- Sinon, l'expression à factoriser est sous la forme $ax^2 + bx + c$. On s'intéresse alors aux termes ax^2 et c :
  - On écrit $ax^2 = (\sqrt{a}x)$, et $c = \sqrt{c}$.
  - Si $b > 0$, on essaie de factoriser en $(\sqrt{a}x + c)^2$.
  - Si $b < 0$, on essaie de factoriser en $(\sqrt{a}x - c)^2$.
  - Si $b = 0$, on essaie de factoriser en $(\sqrt{a}x + c)(\sqrt{a}x - c)$.

Exemple

- On veut factoriser $2x^2 - 3x$. On remarque qu'il n'y a pas de terme constant, donc
$$2x^2 - 3x = x(2x-3)$$
- On veut factoriser $9x^2 + 30x + 25$. On pose $9x^2 = (3x)^2$ et $25 = 5^2$. De plus $b > 0$, donc
$$9x^2 + 30x + 25 = (3x+5)^2$$
On peut vérifier que c'est vrai en développant la partie de droite.
- On veut factoriser $100x^2 - 4$. On pose $100x^2 = (10x)^2$ et $4 = 2^2$. De plus $b = 0$, donc
$$100x^2 - 4 = (10x+2)(10x-2)$$
On peut vérifier que c'est vrai en développant la partie de droite.