

Chapitre 4 : Statistiques descriptives

1 Proportions et pourcentages

Définition : Population

- Une **population** est un ensemble d'éléments, appelés les **individus**.
- Une **sous-population** est une partie de la population.
- Le nombre total d'individus dans la population est appelé l'**effectif total**.

Remarque

Les individus d'une population ne sont pas toujours des personnes.
Par exemple, on peut parler de la *population* d'une trousse, dont les *individus* sont les stylos, et une *sous-population* est formée par les stylos rouges.

Définition : Proportion

On considère une population dont l'effectif total est N , et une sous-population dont l'effectif est n .

- La **proportion** d'individus dans la sous-population est $p = \frac{n}{N}$.
- On peut exprimer cette proportion en pourcentage, en la multipliant par 100 :
 $\left(\frac{n}{N} \times 100\right)\%$ des individus sont dans la sous-population.

Exemple

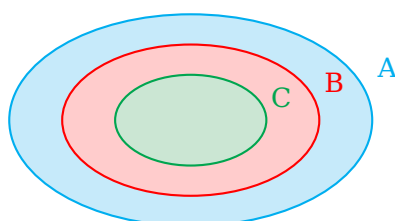
× × • • •
× × • • •

Dans la population ci-dessus, la proportion de croix est $\frac{4}{10} = 0,4$, ou 40%.

Remarque

Prendre $x\%$ d'une valeur revient à la multiplier par $\frac{x}{100}$.

Propriété : Proportion de proportion, pourcentage de pourcentage



On considère une population A, et

- Une sous-population B de A, dont la proportion dans A est p_B .
- Une sous-population C de B, dont la proportion dans B est p_C .

Alors la proportion de C dans A est $p = p_B \times p_C$

Exemple

On considère la population des véhicules possédés par une entreprise.

- 75% de ces véhicules sont électriques.
- Parmi les véhicules électriques, 30% sont des deux-roues.

La proportion p de deux-roues électriques dans la population totale est donc

$$p = 0,75 \times 0,3 = 0,225$$

Soit 22,5%.

2 Variations et évolutions

Définition : Variations

Lorsqu'on passe d'une valeur V_1 à une valeur V_2 , on dit qu'il s'agit d'une **évolution**. On a alors :

- $V_2 - V_1$ est la **variation absolue**.
- $\frac{V_2 - V_1}{V_1}$ est la **variation relative**, aussi appelée le **taux d'évolution**.

Exemple

Une personne ayant 1 000 000 d'euros gagne 1 000 000 €.

- la variation absolue est de 1 000 000 €.
- la variation relative est de $\frac{1\,000\,000}{100\,000\,000} = 0,01$, ou 1%.

Remarque

- Si la variation absolue (ou le taux d'évolution) est positive, c'est que la valeur a augmenté. Sinon, c'est qu'elle a diminué.
- La variation absolue est dans la même unité que V_1 et V_2 .
- Le taux d'évolution n'a pas d'unité.

Propriété

Si t est le taux d'évolution entre deux valeurs A et B, on a

$$B = A \times (1 + t)$$

Démonstration. On sait que t est le taux d'évolution, donc $t = \frac{B - A}{A}$.

Donc $A \times t = B - A$, et donc $B = A \times t + A = A \times (1 + t)$. □

Remarque

Si t est supérieur à 0, c'est une augmentation. Sinon, c'est une diminution.

Propriété : Évolutions successives et coefficient global

Lorsqu'on applique plusieurs évolutions successives, on obtient le **coefficient global** en multipliant les coefficients.

Exemple

Si on applique une augmentation de 20%, suivie d'une diminution de 20%, l'évolution a pour coefficient global

$$\left(1 + \frac{20}{100}\right) \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 1,2 \times 0,8 = 0,96$$

On a donc globalement une diminution.

Propriété : Évolution réciproque

Si une évolution nous fait passer d'une valeur A à une valeur B en multipliant par c , on peut revenir à A en *divisant* par c .

Cette nouvelle évolution est appelée **l'évolution réciproque**, et son coefficient est le **coefficient réciproque** $c_r = \frac{1}{c}$.

Exemple

Si on passe de 150€ à 240€, on doit multiplier par 1,6.

Donc pour passer de 240€ à 150€, on doit multiplier par $\frac{1}{1,6} = 0,625$.

3 Séries statistiques

Définition : Moyenne, moyenne pondérée

Si on dispose d'une série de valeurs x_1, \dots, x_n ,

- on peut calculer leur **moyenne** :

$$M = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

- La moyenne peut être pondérée, c'est-à-dire que chaque valeur est multipliée par un coefficient c_i :

$$M = \frac{c_1 \times x_1 + \dots + c_n \times x_n}{c_1 + \dots + c_n}$$

Exemple

La moyenne de la série de notes 8;11;12;17 est

$$M = \frac{8 + 11 + 12 + 17}{4} = \frac{48}{4} = 12$$

Si la quatrième note (le 17) était coefficient 2, et que toutes les autres notes sont coefficient 1,

la moyenne devient

$$M = \frac{8 + 11 + 12 + 2 \times 17}{1 + 1 + 1 + 2} = \frac{65}{5} = 13$$

Propriété : Linéarité de la moyenne

- Si on ajoute le même nombre a à chaque valeur, la moyenne augmente de a .
- Si on multiplie chaque valeur par un nombre b , la moyenne est multipliée par b .

Définition : Variance, écart-type

Si on dispose d'une série de valeurs x_1, \dots, x_n , et qu'on dispose de la moyenne M , on définit

- La **variance** de cette série

$$V = \frac{(x_1 - M)^2 + \dots + (x_n - M)^2}{n}$$

- L'**écart-type** de cette série

$$\sigma = \sqrt{V}$$

Exemple

Prenons la série de notes 1;4;9;15;18;13.

La moyenne de cette série est 10. Donc on a

- $$V = \frac{(1 - 10)^2 + (4 - 10)^2 + (9 - 10)^2 + (15 - 10)^2 + (18 - 10)^2 + (13 - 10)^2}{6}$$
$$= \frac{(-9)^2 + (-6)^2 + (-1)^2 + 5^2 + 8^2 + 3^2}{6}$$
$$= \frac{81 + 36 + 1 + 25 + 64 + 9}{6}$$
$$= \frac{216}{6} = 36$$
- $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{36} = 6$

Définition : Médiane, quartiles

Si on a une série de valeurs x_1, \dots, x_n rangées dans l'ordre croissant, alors

- La **médiane** est la valeur telle que 50% des valeurs sont supérieures ou égales, et 50% des valeurs sont inférieures ou égales.
- Le **1^{er} quartile** Q_1 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25% des valeurs lui sont inférieures ou égales.
- Le **3^e quartile** Q_3 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75% des valeurs lui sont inférieures ou égales.

Définition : Écart interquartile

L'écart interquartile est la valeur $Q_3 - Q_1$.

Exemple

Si on a la série 5 ; 12 ; 12 ; 14 ; 16 ; 21 ; 22 ; 23, alors

- La médiane est entre 14 et 16 : traditionnellement, on dira qu'elle vaut 15.
- Le premier quartile est 12, le troisième quartile est 21.
- L'écart interquartile est $21 - 12 = 9$.