Chapitre 2 : Ensembles de nombres

1 Ensembles usuels

Définition : Entiers

- Un nombre entier naturel est un nombre entier positif ou nul. On note l'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$.
- Un nombre entier relatif est un nombre entier positif, négatif ou nul. On note l'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

Remarque

Tout nombre entier naturel est un nombre entier relatif : on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Définition : Nombres décimaux et rationnels

- Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire $\dfrac{a}{10^n}$, où a est un nombre entier relatif et n est un entier naturel. On note l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$.
- Un nombre rationnel est un nombre pouvant s'écrire $\dfrac{a}{b}$, où a est un nombre entier relatif et b est un entier naturel non nul. On note l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

Remarque

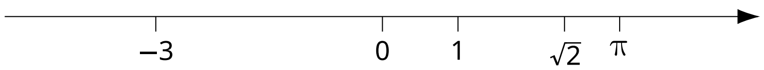
- Tout entier relatif est un nombre décimal.
- Tout nombre décimal est un nombre rationnel.

On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Définition : Nombre réel

On a deux manières de définir les nombres réels :

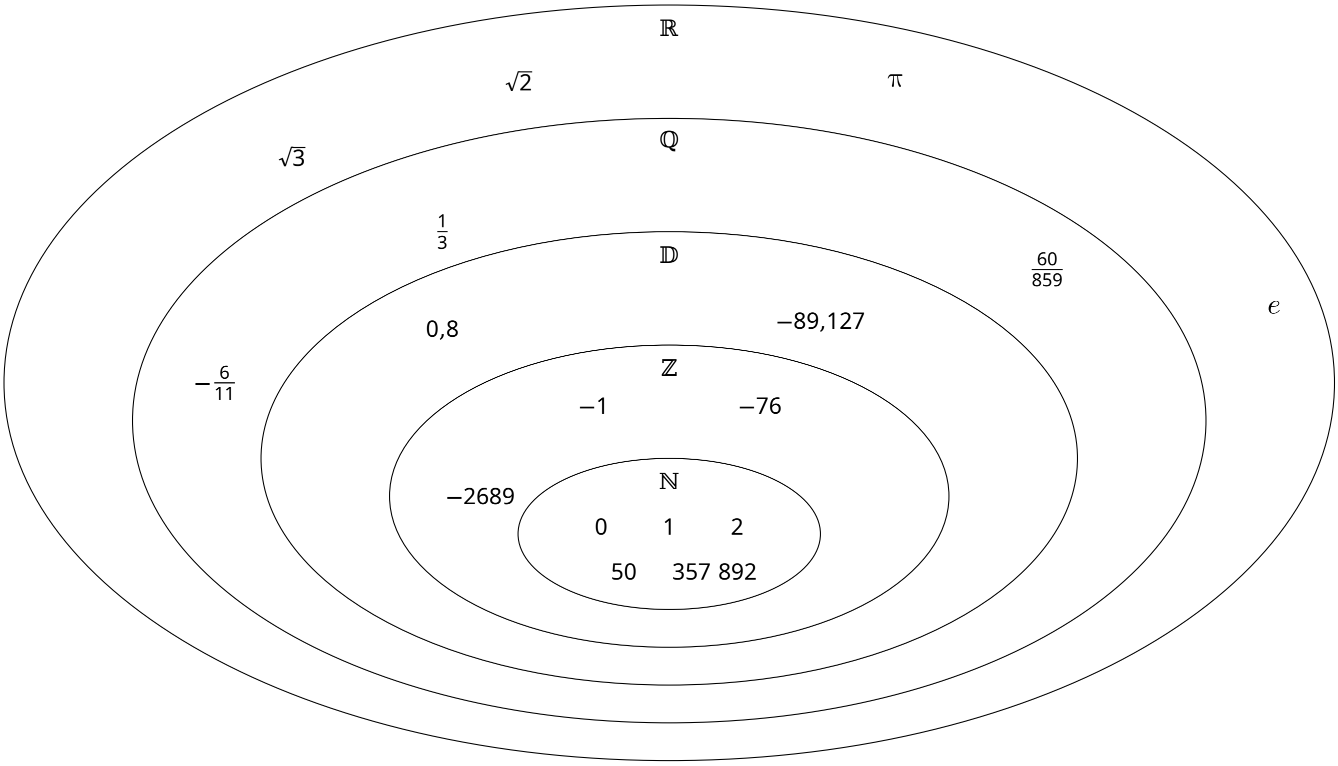
- Si on considére une droite graduée, l'ensemble des abscisses des points de cette droite forme l'ensemble des nombres réels.
- Alternativement, un nombre réel est un nombre qui peut s'écrire comme un entier suivi d'un nombre fini ou infini de chiffres après la virgule.



On note l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Remarque

Tout nombre rationnel est un nombre réel.
On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Exemple

- Exemple d'entiers naturels : 0 ; 1 ; 2 ; 50 ; 357 ; 892 ...
- Exemple d'entiers relatifs mais pas naturels : −1 ; −76 ; −2689 ...
- Exemple de nombres décimaux mais pas d'entiers relatifs : 0,8 ; −89,127 ...
- Exemple de nombres rationnels mais pas décimaux : $\frac{6}{11}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{60}{859}$ ...
- Exemple de nombres réels mais pas rationnels : $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; π ; e ...

2 Intervalles

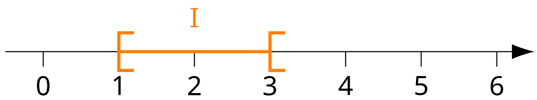
Définition : Intervalle de $\mathbb{R}$

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$.

- L'**intervalle** $[a;b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq a$ et $x \leq b$.
  On dit que a et b sont les **bornes** de cet intervalle.
  L'**amplitude** de cet intervalle est $b - a$.
- L'**intervalle** $]-\infty;b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leq b$.
- L'**intervalle** $[a;+\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq a$.

Pour exclure une des bornes d'un intervalle, il faut utiliser un crochet tourné vers l'extérieur.
Ainsi $[a;b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq a$ et $x < b$.

Exemple



Sur la droite ci-dessus, I est l'intervalle [1,3[.
Ainsi :

- I contient par exemple 1, 2 ou encore 1,5.

- I ne contient pas 3, 0 ou encore 5,6.

3 Vocabulaire des ensembles

Définition : Ensemble, éléments

Un **ensemble** contient des **éléments**.
Si e est un élément dans E, on note $\boxed{e \in \mathrm{E}}$.
Si un élément e n'est pas dans E, on note $\boxed{e \notin \mathrm{E}}$.

Exemple

- $1 \in \{1,2,3\}$, $2 \in \{1,2,3\}$, et $3 \in \{1,2,3\}$. En revanche, $4 \notin \{1,2,3\}$.

Définition : intersection, union

Soient A et B deux ensembles. On note

- $\boxed{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}$ l'**intersection** de A et de B, l'ensemble dont les éléments sont dans A et dans B. On prononce « A **inter** B ».
- $\boxed{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}$ l'**union** de A et de B, l'ensemble dont les éléments sont dans A ou dans B. On prononce « A **union** B ».

Exemple

- $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$
- $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$
- $[-1;+\infty[\cap]-\infty;1] = [-1;1]$

Définition : sous-ensemble

Si tous les éléments de B sont dans A, on dit que B est un **sous-ensemble** de A, et on note $\boxed{\mathrm{B} \subset \mathrm{A}}$
Sinon, on note $\boxed{\mathrm{B} \not\subset \mathrm{A}}$.

Exemple

- $\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$
- $\{1,2,4\} \not\subset \{1,2,3\}$, car $4 \notin \{1,2,3\}$.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$