Chapitre 5 : Dérivation

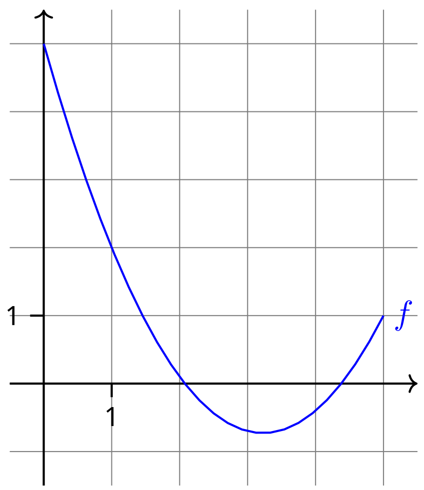
Définition : Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un nombre dans I, et $h \neq 0$, tel que $a + h \in \mathrm{I}$. Alors, le rapport

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

est le **taux d'accroissement** de f entre a et $a + h$.

Exemple



Sur le graphique ci-dessus :

- $\tau_0(1) = \dfrac{f(0+1) - f(0)}{1} = \dfrac{2-5}{1} = -3$
- $\tau_1(4) = \dfrac{f(1+4) - f(1)}{4} = \dfrac{1-2}{4} = -0{,}25$

Exemple

Si f est la fonction telle que $f(x) = x^2$, on peut calculer l'expression de $\tau_a(h)$:

$$\begin{aligned}
\tau_a(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\
&= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\
&= \frac{2ah + h^2}{h} \\
&= 2a + h
\end{aligned}$$

Remarque

Le taux d'accroissement de f entre a et b correspond à la **pente** de la droite passant par $(a;f(a))$ et $(b;f(b))$.

Définition : Nombre dérivé

Si le taux d'accroissement $\tau_a(h)$ admet une limite lorsque h tend vers 0, on dit que f est **dérivable** en a.
La limite est alors appelée le nombre dérivée de f en a : on note

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

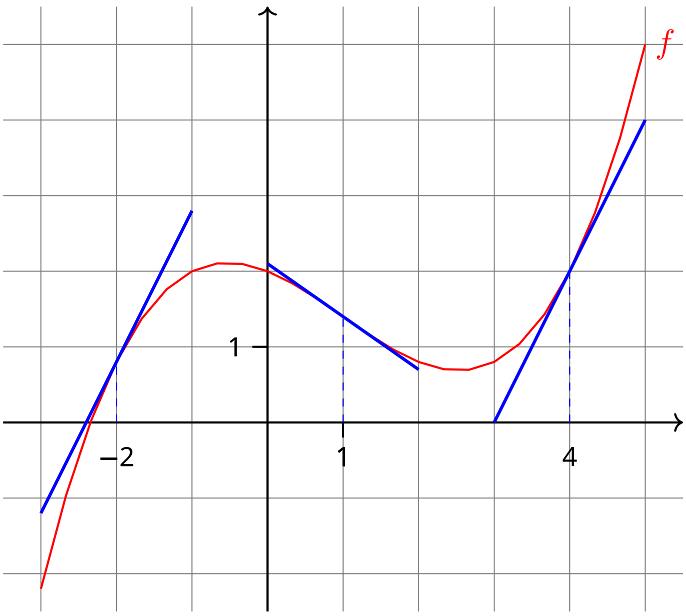
Remarque

Le nombre dérivé de f en a correspond à la **pente** de la droite *tangente* à la courbe de f au point a.

Exemple

Soit f la fonction telle que $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 - 0{,}4x + 2$.

- Graphiquement :



On peut déterminer graphiquement la pente de la tangente, et obtenir ainsi le nombre dérivé :

  - $f'(-2) = 2$
  - $f'(1) = 0{,}7$
  - $f'(4) = 2$

- Par le calcul :
  On admet que pour tout $h \neq 0$, on a

$$\tau_2(h) = -0{,}4 + 0{,}3h + 0{,}1h^2$$

Alors f est dérivable en 2, car $\tau_2(h)$ admet une limite lorsque h tend vers 0,
Et $f'(2) = \lim_{h\to 0}(-0{,}4 + 0{,}3h + 0{,}1h^2) = -0{,}4$.

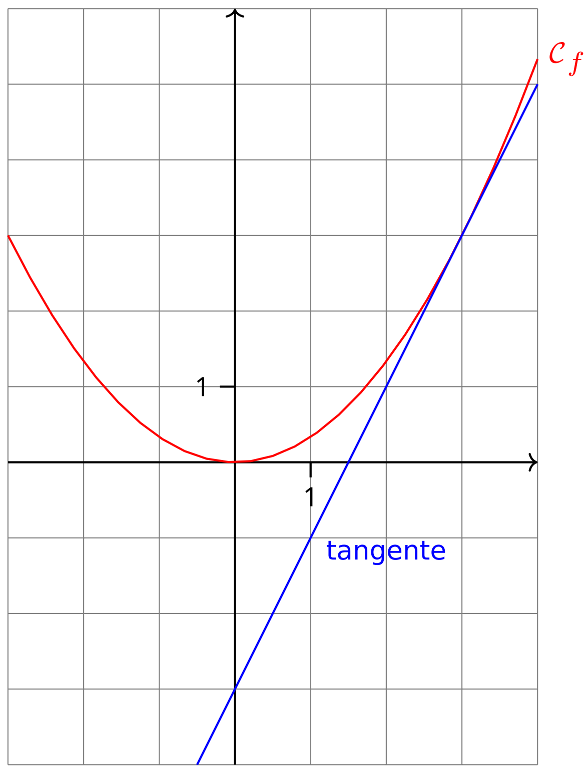
Propriété : Équation de la tangente

La tangente à la courbe de f au point $(a; f(a))$ a pour équation

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$

Exemple

La courbe ci-dessous est la courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$.



On a alors :

- $f'(3) = 2$
- $f(3) - 3 \times f'(3) = -3$

Ainsi l'équation de la tangente à la courbe en 3 est

$$y = 2x - 3$$

Définition : Fonction dérivée

Si pour toute abscisse x, le nombre dérivé $f'(x)$ de f existe,

Alors on dit que f est **dérivable**, et on appelle **fonction dérivée** de f la fonction f' qui à x associe le nombre $f'(x)$.

Dérivée des fonctions de référence

On admet la dérivée des fonctions suivantes :

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) = c$ avec c un nombre réel	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Ces dérivées sont à connaître !