Chapitre 4 : Polynômes de degré 2 et 3

Définition : Polynôme de degré 2

Une **fonction polynôme de degré 2** est une fonction pouvant s'écrire sous la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Où a, b et c sont des nombres constants.

Définition : Racines

Une fonction de degré 2 peut *parfois* (mais pas tout le temps) s'écrire sous la forme

$$f(x) = a \times (x - r_1) \times (x - r_2)$$

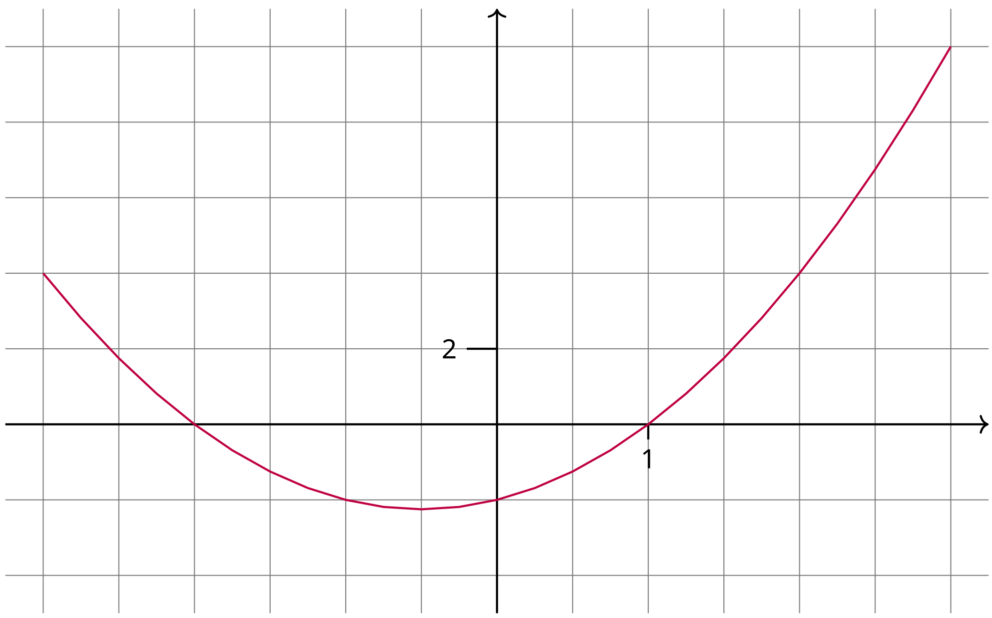
Dans ce cas, on dit que r_1 et r_2 sont les **racines** de f.

Exemple

Si on développe l'expression $(x + 2)(x - 1)$, on obtient $x^2 + x - 2$.
On dit que la fonction $f(x) = x^2 + x - 2$ s'écrit aussi $f(x) = (x + 2)(x - 1)$, et a pour racines -2 et 1.

Propriété

Si r_1 et r_2 sont les racines d'une fonction de degré 2 f, on a $f(r_1) = f(r_2) = 0$.



graphe de la fonction $f(x) = (x + 2)(x - 1)$

Propriété : Courbe d'une fonction de degré 2

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une fonction de degré 2, on peut trouver certaines propriétés de sa courbe :

- Si $a > 0$, les "bras" de la courbe sont dirigés vers le haut. Sinon, ils sont dirigés vers le bas.
- Le point le plus bas (si $a > 0$) ou haut (si $a < 0$) de la courbe a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$.
- La courbe est symétrique par rapport à l'axe $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Si on a de plus la forme factorisée de la fonction $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, on sait que les points $(r_1;0)$ et $(r_2;0)$ font partie de la courbe.

Propriété

Pour résoudre l'équation $x^2 = a$:

- Si $a > 0$, il y a deux solutions : $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, il n'y a qu'une solution : $x = 0$.
- Si $a < 0$, il n'y a pas de solution.

Propriété : Produit nul

Si on a $(ax + b)(cx + d) = 0$, alors

- Ou bien $ax + b = 0$, et alors $x = -\dfrac{b}{a}$;
- Ou bien $cx + d = 0$, et alors $x = -\dfrac{d}{c}$

Exemple

- Si on a $x(x + 1) = 0$, alors on a deux solutions :
  - Ou bien $x = 0$;
  - Ou bien $x + 1 = 0$, et alors $x = -1$.
- Si on a $(2x + 4)(10x - 5) = 0$, alors on a deux solutions :
  - Ou bien $2x + 4 = 0$, et alors $x = -2$;
  - Ou bien $10x - 5 = 0$, et alors $x = 0{,}5$.

Propriété

L'unique solution de l'équation $x^3 = a$ est $x = \sqrt[3]{a}$, appelée la **racine troisième de** a.
De plus,

- Si $a > 0$, $x > 0$
- Si $a = 0$, $x = 0$
- Si $a < 0$, $x < 0$