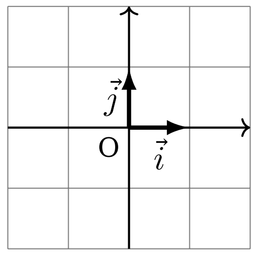
Chapitre 6 : Vecteurs dans un repère

Définition : Base orthonormée

Soit O un point du plan, et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dont les directions sont perpendiculaires et dont les normes sont égales à 1.
On dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une **base orthonormée** du plan et que $(\text{O} ; \vec{i},\vec{j})$ est un **repère orthonormé** du plan.

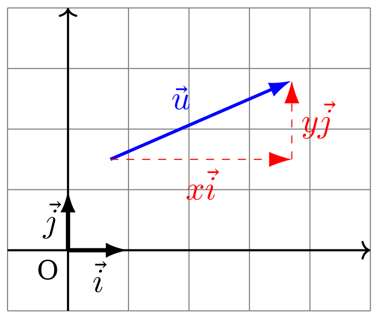


Propriété : Coordonnées d'un vecteur

Si $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée du plan et u est un vecteur, il existe un unique couple de réels $(x ; y)$ tel que :

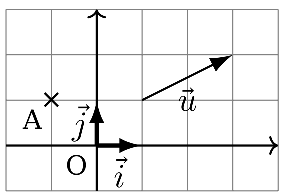
$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

On dit que le vecteur $\vec{u}$ a pour **coordonnées** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.



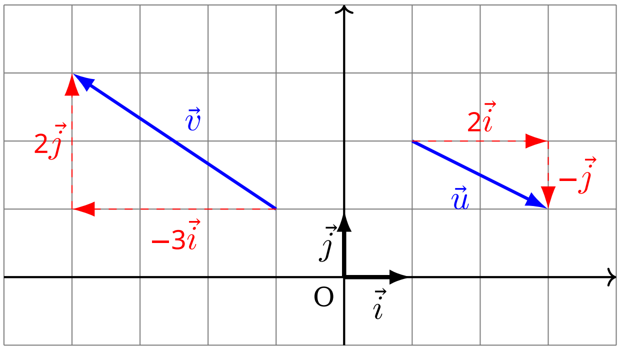
Remarque

- Cela revient à décomposer le vecteur $\vec{u}$ en sa composante horizontale et verticale.
- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales.
- On écrit les coordonnées d'un point à l'horizontale, et celles d'un vecteur à la verticale :



A(−1;1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemple



Dans le repère ci-dessus, on a

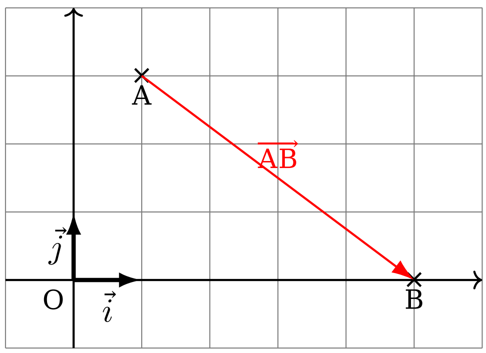
- $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$, donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.
- $\vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$, donc $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

Propriété : Coordonnées d'un vecteur à partir de points

Soient $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\ ;\ y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\ ;\ y_\mathrm{B})$ deux points du plan.
Alors le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix}x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}\\y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}\end{pmatrix}$$

Exemple



Dans le repère ci-dessus, on a les points $\mathrm{A}(1\ ;\ 3)$ et $\mathrm{B}(5\ ;\ 0)$.
Donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}5-1\\0-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

Propriété : Norme d'un vecteur

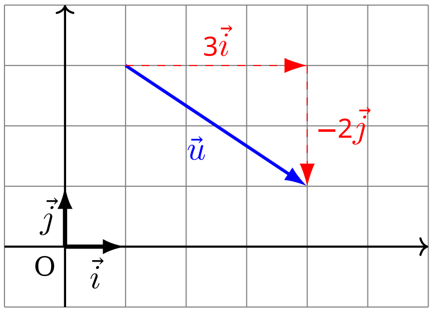
Si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, sa norme est égale à $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

Remarquons que cela revient à calculer la distance entre les deux extrémités du vecteur.



Propriété : Somme de vecteurs

Si on a deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$. Alors $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3+(-1)\\-5+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Propriété : Produit d'un vecteur par un réel

Si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et k est un nombre réel, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$. Alors le vecteur $-3\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-3\times(-2)\\-3\times 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-15\end{pmatrix}$.

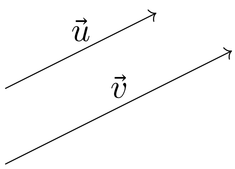
Définition : Colinéarité

Si deux vecteurs ont la même direction, on dit qu'ils sont **colinéaires**.

Propriété : Colinéarité

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, de manière équivalente, on a :

- $\vec{u} = k\vec{v}$, avec k un nombre réel ;
- Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles ;
- $x \times y' = x' \times y$



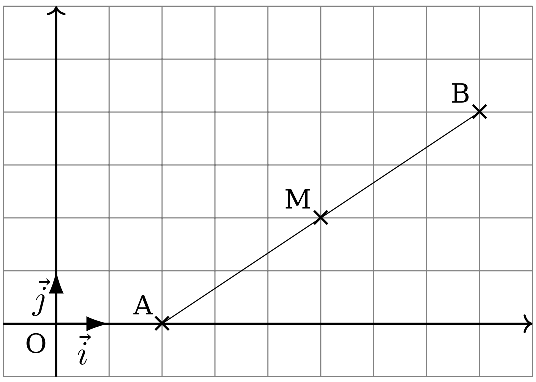
Exemple

Les vecteurs $\begin{pmatrix}6\\15\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}$ sont colinéaires, car $6\times 10 = 4\times 15 (= 60)$.

Propriété : Milieu d'un segment

Si on a deux points $\mathrm{A}(x_\mathrm{A};y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B};y_\mathrm{B})$, le milieu M du segment $[\mathrm{AB}]$ a pour coordonnées $\mathrm{M}\left(\dfrac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2};\dfrac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}\right)$.

Exemple



Sur la figure ci-dessus, on a $\mathrm{A}(2;0)$ et $\mathrm{B}(8;4)$. Ainsi le milieu de $[\mathrm{AB}]$ a pour coordonnées $\mathrm{M}\left(\dfrac{2+8}{2};\dfrac{0+4}{2}\right) = (5;2)$.