Factorisation de Cholesky

RECOPIER L'INTRO

A symétrique et définie positive (def > 0)

Remarque 1 A est symérique et définie positive si et seulement si :

1. ${}^tA = A$
2. ${}^tXAX \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
3. ${}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0$

A définie positive $\Rightarrow$ A inversible A symétrique $\Rightarrow$ A diagonalisable. $\exists P/A = P^{-1}DP$
A symétrique et définie positive $\Rightarrow$ toutes les valeurs propres de A sont positives et réelles.

Theoreme 1 *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Il existe (au moins) une matrice réelle triangulaire inférieure T telle que :*

$$A = T\,{}^tT$$

De plus, si on impose que les éléments diagonaux de T soient tous positifs, alors la factorisation $A = T\,{}^tT$ est unique.

Preuve 1 (Existence) Notons Δ_k la sous-matrice d'éléments $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq k$. Δ_k sont inversibles car elles sont symétriques et définies positives. Donc d'après le théorème 1 du précédent chapitre :

$$A = LU \text{ avec } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ - & \ddots & \dots & 0 \\ - & - & \ddots & 0 \\ - & - & - & 1 \end{pmatrix}$$

trou

Notons $D = diag(u_{ij})$. On a $A = {}^tA = {}^tU\,{}^tL = {}^tUD^{-1}D\,{}^tL$ Par unicité de la factorisation LU, il vient $D\,{}^tL = U$ et donc

$$A = LD\,{}^tL$$

$\Rightarrow$ A et D ont la même signature.

A symétrique définie positive

$\Rightarrow$ Toutes les valeurs propres de A sont positives.

$\Rightarrow$ Toutes les valeurs propres de D sont positives

$\Leftrightarrow u_{ii} > 0 \forall i$

Si $\delta_i = \sqrt{u_{ii}}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \delta_n \end{pmatrix} = diag(\sqrt{u_{ii}})$

$D = \Delta^2 = \Delta\, {}^t\Delta$

$\Rightarrow A = L\Delta\, {}^t\Delta\, {}^tL = (L\Delta)\, {}^t(L\Delta)$