

Intervalle de confiance

Othmane AJDOR

2018-2019

Table des matières

1	Intervalle de confiance	3
1.1	Sondage	3
1.2	definition	3

1 Intervalle de confiance

1.1 Sondage

Comment modéliser les réponses obtenues lors d'un sondage ?

Soit n = nombre de sondés à 2 choix \rightarrow généralisation

Pour la personne n_i , $X_i = 1$ ou 0 (p ou $1 - p$)

Supposant les élections entre Le Pen et Macron, si le sondage est effectué après un rally de Macron et aux personnes qui étaient présentes, le sondage n'aura pas de sens.

On fait l'hypothèse que ce qu'une personne pense est différent de ce pense une autre. De ce fait, elles sont indépendantes.

Le résultat obtenu après le sondage peut être modélisé par $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X_i$ où X représente le nombre de X_i à 1 sur les n .

Cette variable aléatoire suit une loi binomiale $B(n; p)$.

Soit $n = 1000$ et $X = 600$, alors on estime p à l'aide de :

$$E(X) = np$$

$$E(X_i) = np$$

$$E(X_i) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, x_i \text{ sont les valeurs des } X_i.$$

$$P_{est} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

1.2 définition

On appelle intervalle de confiance de seuil α pour un paramètre θ inconnu un intervalle I dont au moins une des bornes est une variable aléatoire réelle telle que : $P(\theta \in I) = 1 - \alpha$.

Plus le seuil est faible, plus l'intervalle est grand.

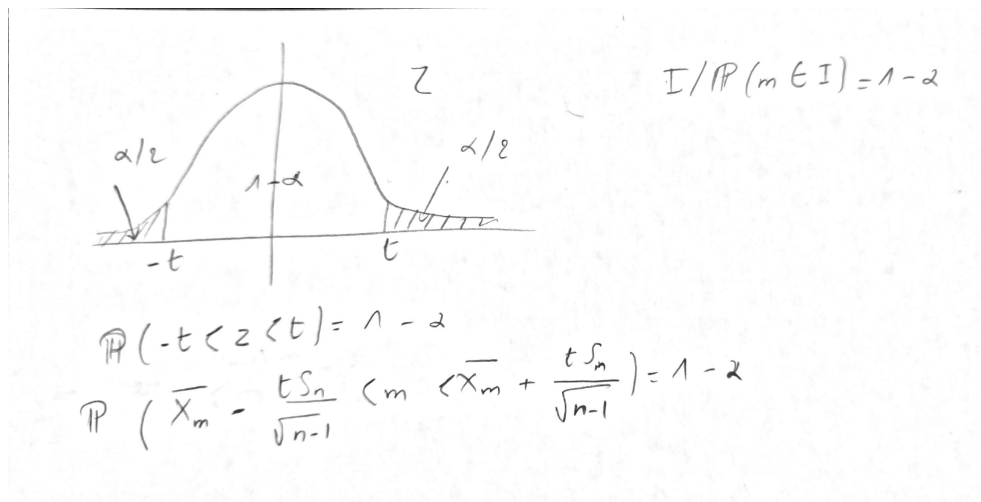
On prend souvent α à 5% ou alors 1% pour les risques sanitaires où on veut limiter les risques.

1.2.1 Exemple : IC pour la moyenne d'une loi normale

$$\text{Soit } n = 20 \quad \bar{x}_n = 64 \quad s_n = 5 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

IC est obtenu à l'aide d'une fonction pivotale. C'est une VA qui dépend des choses qui nous intéressent, ici n mais dont on connaît parfaitement les lois. Elle nous permet de faire des calculs de probabilités.

Si les $X_i \sim N(m, \sigma^2)$ et sont indépendantes, alors $Z = \sqrt{(n-1)} \frac{\bar{X}_n}{S_n}$ suit une loi de Student(n-1).



Soit $n = 20$, $\bar{x}_n = 64$, $s_n = 5$, $t_{5\%} = 2.1$, $t_{5\%} = 2.9$

$$P\left(\frac{t S_m}{\sqrt{m-1}} < \bar{X}_m - m < \frac{t S_m}{\sqrt{m-1}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X}_m - \frac{t S_m}{\sqrt{m-1}} < m < \bar{X}_m + \frac{t S_m}{\sqrt{m-1}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\begin{cases} S_m = 5 \\ \mu m = 64 \\ m = 20 \end{cases}$$

$$k_{5\%} = 2,1$$

$$k_{1\%} = 2,9$$

$$64 - \frac{2,1 \times 5}{\sqrt{20-1}} = 61,59$$

$$64 - \frac{2,9 \times 5}{\sqrt{20-1}} = 60,7$$

$$IC_{5\%} = [61,59, 64,4]$$

$$IC_{1\%} = [60,7, 67,3]$$

$$IC_{1\%} = [60.7, 67.3]$$

$$IC_{5\%} = [61, 66]$$