第五篇　机械振动和机械波

第五章　机械振动

5.1　一个小球和轻弹簧组成的系统，按

$$x=0.05\cos\left(8\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\quad \text{(SI)}$$

的规律振动。求(1)振动的角频率、周期、振幅、初相、最大速率及最大加速度；(2)$t=1\text{s},2\text{s},10\text{s}$ 等时刻的相；(3)分别画出位移、速度，加速度与时间的关系曲线。

解　(1)　　$A=0.05\text{m}\quad \varphi=\dfrac{\pi}{3}$

$$\omega=8\pi\ \text{rad/s}\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=0.25\text{s}$$

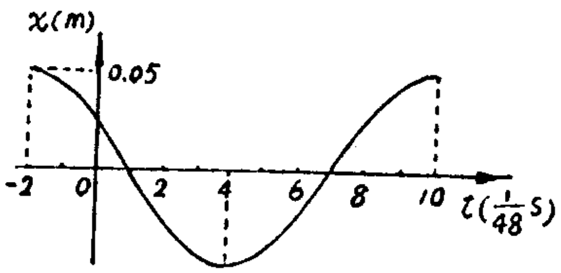
$$v_m=\omega A=0.4\pi\ \text{m/s}=1.26\text{m/s}$$

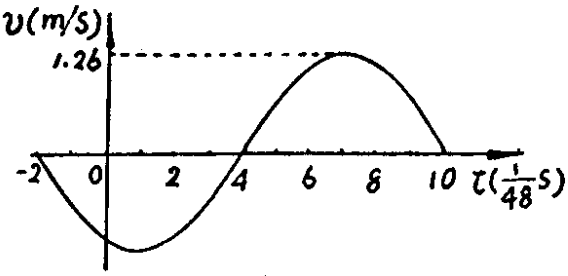
$$a_m=\omega^2 A=3.2\pi^2\text{m/s}^2=31.6\text{m/s}^2$$

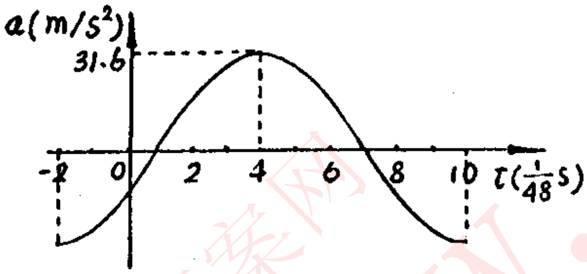
(2)位相$=\omega t+\varphi=8\pi t+\dfrac{\pi}{3}$

$t=1\text{s}$、2s 和 10s 时相位为$\dfrac{25}{3}\pi$、$\dfrac{49}{3}\pi$ 和$\dfrac{241}{3}\pi$

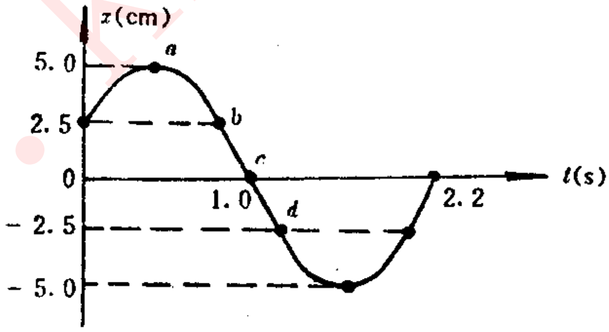
(3)







5.2 已知一个谐振子的振动曲线如题 5.2 图所示，试由图线求(1) a、b、c、d、e 各状态相应的相位；(2)振动表达式；(3)画出旋转矢量图。



解(1)

状态	a	b	c	d	e
位相	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$

(2)由图知：$A=0.05\text{m}$，$T=2.4\text{s}$

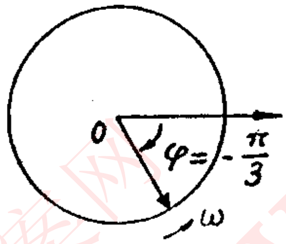
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{5}{6}\pi\ \mathrm{rad/s}$$

由旋转矢量图知 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$

故振动表达式为

$$x=0.05\cos\left(\frac{5}{6}\pi t-\frac{\pi}{3}\right)\quad (\mathrm{SI})$$

(3)旋转矢量图为:



5.3 物体作简谐振动,其振动表达式

$$x=6.0\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\quad (\mathrm{SI})$$

试求这物体在 $t=2.0\mathrm{s}$ 时的位移、速度、加速度、和相位;并求这物体的振动周期。

解 已知:$x=6\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{3}\right)(\mathrm{SI})$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-18\sin\left(3\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-54\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$

$t=2\mathrm{s}$ 时,$x=3\mathrm{m}$ $v=-49\mathrm{m/s}$ $a=-266\mathrm{m/s^2}$

$$位相\ \omega t+\varphi=6\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{19}{3}\pi$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2}{3}\mathrm{s}=0.67\mathrm{s}$$

5.4 一物体作谐振动。已知 $a_{max}=13\ \mathrm{m/s^2}$,$T=0.94\mathrm{s}$ 及初相 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$。(1)试写出位移 x、速度 v 和加速度 a 的表达式;(2)求当 $t=$

0.54s 时的位移、速度和加速度。

解 (1)

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=6.7\text{rad/s}$$

$$A=\frac{a_m}{\omega^2}=0.29\text{m}$$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$x=0.29\cos\left(6.7t+\frac{\pi}{2}\right)\quad(\text{SI})$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$=-1.9\sin\left(6.7t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$=-13\cos\left(6.7t+\frac{\pi}{2}\right)$$

(2) $t=0.54\text{s}$ 时

$$\left(6.7t+\frac{\pi}{2}\right)=5.19\text{rad}=297.3°$$

$$x=0.13\text{m}$$

$$v=1.7\text{m/s}$$

$$a=-6.0\text{m/s}^2$$

5.5 已知物体的振动表达式是

$$x=0.20\cos(3t)\quad(\text{SI})$$

试求当物体离平衡位置 5cm 时的速度和加速度；当 $x=0$ 时，再求解速度和加速度。

解 (1) $x=0.20\cos3.0t=0.05\text{m}$

$$\cos3.0t=0.25$$

$$\sin3.0t=\pm\sqrt{1-(\cos3.0t)^2}=\pm0.968$$

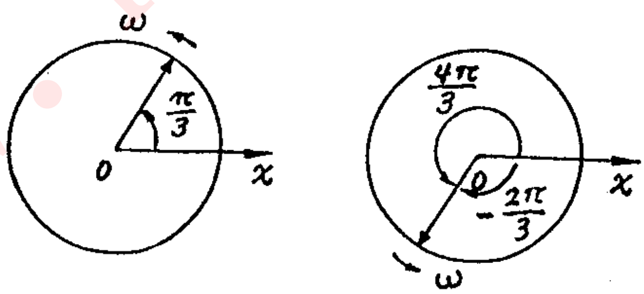
故 $v=-\omega A\sin\omega t=-3.0\times0.20\sin3.0t=\pm0.58\text{m/s}$

$$a=-\omega^2 A\cos\omega t=-3.0^2\times0.20\cos3.0t=-0.45\text{m/s}^2$$

(2)
$$x=0.20\cos 3.0t=0$$
$$\cos 3.0t=0$$
$$\sin 3.0t=\pm 1$$
故
$$v=-3.0\times 0.20\sin 3.0t=\pm 0.60\text{m/s}$$
$$a=-3.0^2\times 0.2\cos 3.0t=0$$

5.6 水平弹簧振子，振幅 $A=2.0\times10^{-2}$ m，周期 $T=0.50$s。当 $t=0$ 时，(1)物体过 $x=1.0\times10^{-2}$m 处，向负方向运动；(2)物体过 $x=-1.0\times10^{-2}$m 处，向正方向运动，试分别写出以上两种情况下振动的表达式。

解
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=4\pi\ \text{rad}$$
(1)
$$\varphi=\frac{\pi}{3}$$
$$x=2\times10^{-2}\cos(4\pi t+\frac{\pi}{3})\quad \text{(SI)}$$
(2)
$$\varphi=\frac{4\pi}{3}\text{或}-\frac{2\pi}{3}$$
$$x=2\times10^{-2}\cos(4\pi t-\frac{2\pi}{3})\quad \text{(SI)}$$



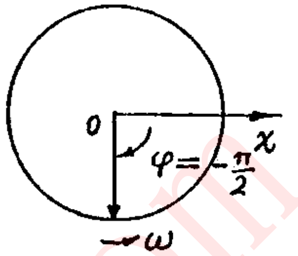
5.7 某物体作谐振动，周期 $T=1.8$s。在初始时刻，$x_0=0$，$v_0=0.35$m/s。(1)试写出这物体位移、速度和加速度的表达式；(2)画出在 $t=0$ 到 $t=3.0$s 的间隔内的 x-t，v-t 和 a-t 图。

解　(1)　$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{10\pi}{9}$

$=3.5\text{rad/s}$

$$\varphi=-\frac{\pi}{2}$$

$$A=\frac{v_0}{-\omega\sin\varphi}=0.10\text{m}$$



$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$=0.10\cos(3.5t-\frac{\pi}{2})\quad(\text{SI})$$

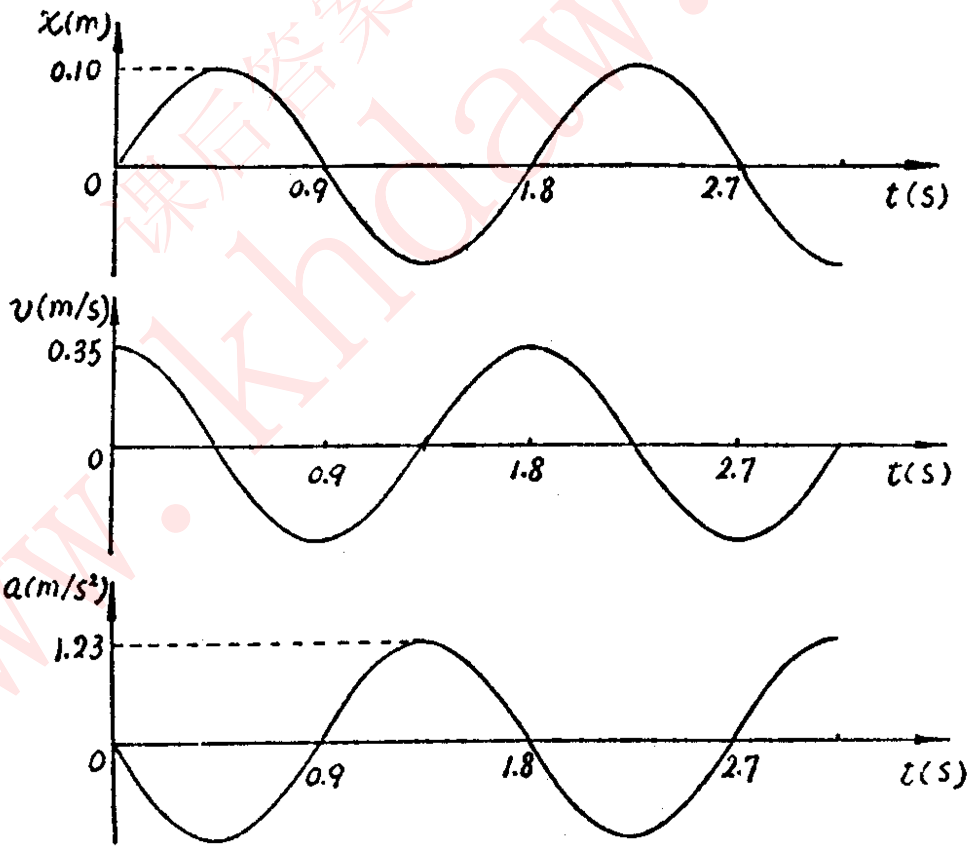
$$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$=-0.35\sin(3.5t-\frac{\pi}{2})\quad(\text{SI})$$

$$a=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$=-1.22\cos(3.5t-\frac{\pi}{2})\quad(\text{SI})$$

(2)

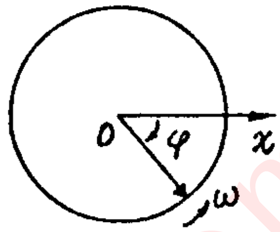


5.8 系在弹簧上的质点的振动频率为 3Hz。在 $t=0$，这质点的位移为0.20m，速度为 4.0m/s。(1)试写出这质点振动的表达式；(2)

何时这质点第一次到达转向点？此时的加速度有多大？

解 (1) $\omega=2\pi\nu=6\pi\ \text{rad/s}$

$$\begin{cases}x_0=A\cos\varphi=0.20\text{m}\\ v_0=-\omega A\sin\varphi=4.0\text{m/s}\end{cases}$$



$$A=\sqrt{x_0^2+(-\frac{v_0}{\omega})^2}=0.29\text{m}$$

$$\varphi=\tan^{-1}(\frac{-v_0/\omega}{x_0})=\begin{cases}-46.7°\\ 133.3°(删去)\end{cases}$$

振动表达式 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$=0.29\cos(6\pi t-46.7°)\quad(\text{SI})$$

(2)第一次转向点：$\omega t+\varphi=6\pi t-46.7°=0$

故 $$t=\frac{46.7}{6\times180}s=0.043\text{s}$$

或由旋转矢量图 $\frac{T}{2\pi}=\frac{t}{46.7°}\qquad T=\frac{1}{\nu}=\frac{1}{3}\text{s}$

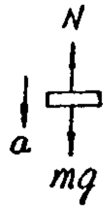
故 $$t=\frac{|\varphi|}{2\pi}T=\frac{46.7}{360}\times\frac{1}{3}=0.043\text{s}$$

此时 $$a=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi)$$
$$=-\omega^2A=-103\text{m/s}^2$$

5.9 某机器内的活塞按正弦方式上下振动，振幅为10cm。设有一个垫圈偶尔遗落在活塞上。假定机器运转速率不断增大，问活塞振动频率达何值时，垫圈就不再平稳地留在活塞上面？

解 最上方

$$mg-N=ma=m\omega^2A$$



离开活塞 $$N=m(g-\omega^2A)\leqslant0$$

得 $$\omega\geqslant\sqrt{\frac{g}{A}}=9.9\text{rad/s}$$

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}\geqslant1.58\text{Hz}$$

5.10 一竖直悬挂的弹簧，当挂上质量为8克物体后，其伸长量为39.2mm；现将该物体由平衡位置向下拉1.0cm，并给予向上的初

速度 50cm/s；试求振动的表达式(设坐标向下为正方向)。

解
$$k=\frac{mg}{l}=2\text{N/m}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=15.8\text{rad/s}$$

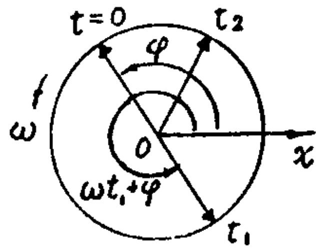
设振动为
$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

则
$$A=\sqrt{x_0^2+(-\frac{v_0}{\omega})^2}=3.3\times10^{-2}\text{m}$$

$$\varphi=\text{tg}^{-1}\frac{(-v_0/\omega)}{x_0}=72.5^\circ=\frac{2\pi}{5}$$

故
$$x=3.3\times10^{-2}\cos(15.8t+\frac{2\pi}{5})\quad(\text{SI})$$

5.11 质量为 0.01kg 的物体沿 x 轴作谐振动，振幅 $A=10$cm，周期 $T=4.0$s。$t=0$ 时位移 $x_0=-5.0$cm，且物体朝 x 负向运动。求(1)$t=1.0$s 时物体的位移和物体受的力；(2)$t=0$ 之后何时物体第一次到达 $x=5.0$cm 处？(3)第二次和第一次经过 $x=5.0$cm 处的时间间隔。



解 (1)
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}\text{rad/s}$$

$$\varphi=\frac{2}{3}\pi$$

故
$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$
$$=0.1\cos(\frac{\pi}{2}t+\frac{2\pi}{3})$$

$$a=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi)=-(\frac{\pi^2}{4})\times0.1\cos(\frac{\pi}{2}t+\frac{2\pi}{3})$$

$t=1$s 时
$$x=-8.7\times10^{-2}\text{m}$$
$$F=ma=2.1\times10^{-3}\text{N}$$

(2)
$$\frac{T}{360}=\frac{t_1}{180}$$

故 $$t_1=\frac{T}{2}=2\text{s}$$

或 $$\omega t_1+\varphi=\frac{\pi}{2}t_1+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$$

得 $$t_1=2\text{s}$$

(3) $$\omega t_2+\varphi=\frac{\pi}{2}t_1+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}$$

得 $$t_2=\frac{10}{3}\text{s}$$

故 $$\Delta t=t_2-t_1=\frac{4}{3}s=1.3\text{s}$$

或： $$\frac{T}{360}=\frac{\Delta t}{120}\quad \Delta t=\frac{T}{3}=\frac{4}{3}\text{s}$$

5.12 将一质量可忽略的弹簧挂在天花板上，下端系一物体。使这物体从弹簧未被拉伸的位置释放，它便上下振动。其最低位置在初始释放位置下方 10cm 处。试求(1)振动的频率；(2)物体在初始位置下方 8.0cm 处的速率。当一个 0.3kg 的砝码系于这物体下面，系统的振动频率就变成原来的一半，试问(3)第一个物体质量有多大？(4)两个物体系于弹簧后，其新的平衡位置在何处？

解 (1) $$k=\frac{m_1g}{A_1}$$

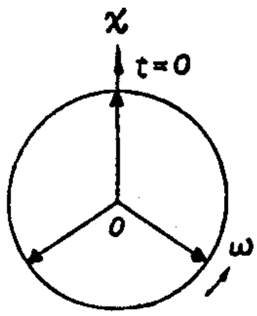
$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m_1}}=\sqrt{\frac{g}{A_1}}=14\text{rad/s}$$

$$\nu_1=\frac{\omega}{2\pi}=2.23\text{Hz}$$

(2)设向上为 x 正向，平衡位置为原点，则 $\varphi=0$

$$x=A_1\cos\omega t=0.05\cos 14t$$

$$v=-\omega_1A_1\sin\omega_1 t=-0.7\sin 14t$$



$x=-0.03\text{m}$ 时

$$\cos(14t)=\frac{x}{A}=-0.6$$

$$\sin(14t)=\pm\sqrt{1-\cos^2(14t)}=\pm 0.8$$

故 $$v=-0.7\times(\pm0.8)=\begin{cases}-0.56\ \text{m/s}\\+0.56\ \text{m/s}\end{cases}$$

(3) $$\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m_1}}$$

故 $$m_1=\frac{m_2}{3}=0.1\text{kg}$$

(4) $$(m_1+m_2)g=kl$$

故 $$l=\frac{(m_1+m_2)g}{k}=\frac{m_1+m_2}{m_1}A_1=0.2\text{m}$$

即未伸长时弹簧下端下方 0.2m 处。

5.13 一根轻质弹簧，一端固定，另一端系一物体，其振动频率为 γ。如这根弹簧两端固定，中间剪断后，将同一物体嵌入并系在一起，试问这时的振动频率。

解 设半根弹簧的倔强系数为 k

(1)原来：物体位移 x 时，受恢复力为：

$$F=-kx_1=-kx_2$$

(x_1 和 x_2 为半根弹簧伸长)弹簧总位移 x 为

$$x=x_1+x_2=-\frac{F}{k}-\frac{F}{k}=-\frac{F}{k/2}$$

即 $$F=-\left(\frac{k}{2}\right)x$$

故作无限尼自由振动时 $\omega=\sqrt{\dfrac{k/2}{m}}$

(2)物体嵌中间：物体位移 x 时，受恢复力为

$$F=-(kx+kx)=-(2k)x$$

故作无阻尼自由振动时 $\omega'=\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

于是 $$\frac{\nu'}{\nu}=\frac{\omega'}{\omega}=2$$

5.14 将一质量为 2.0kg 的物体挂在弹簧上，待静止后再施以 2N 的拉力，则弹簧再伸长 4cm，如这拉力突然移去，该物体将作谐振

动。试求(1)这物体的最大动能;(2)振动的频率。

解 (1)

$$mg=kl$$

$$mg+f=k(l+A)$$

故

$$k=\frac{f}{A}=50\text{N/m}$$

最大动能 $E_{k\max}=\frac{1}{2}mv_m^2=\frac{1}{2}kA^2=0.04\text{J}$

(2)

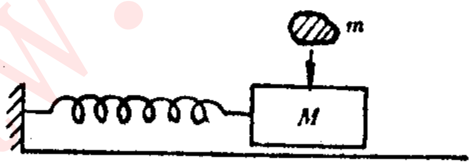
$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=5\text{rad/s}$$

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=0.80\text{Hz}$$

5.15 如图所示,在水平面上有一弹簧振子(物体质量为 M),其谐振动的表达式为

$$x=A\sin\omega t$$

在 $t=t_1$ 时刻,一块质量为 m 的粘土自由下落到物体上,并马上粘住。试问(1)振动周期变为多大?(2)振幅变为多大?



题 5.15 图

解 (1)

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{M}}$$

即

$$k=M\omega^2$$

$$\omega'=\sqrt{\frac{k}{M+m}}=\sqrt{\frac{M\omega^2}{M+m}}=\omega\sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

$$T'=\frac{2\pi}{\omega'}=\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{M+m}{M}}$$

(2) $t=t_1$ 时

$$x_1=A\sin\omega t_1$$

$$v_1=\omega A\cos\omega t_1$$

粘住过程,水平方向应用质点系动量定理:

$$-kx_1\Delta t=(M+m)v'-Mv_1$$

因马上粘住,Δt 很小,近似水平动量守恒:

$$(M+m)v'=Mv_1$$

$$v'=\frac{M}{M+m}\omega A\cos\omega t_1$$

振动过程机械能守恒

$$\frac{1}{2}(M+m)v'^2+\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}kA'^2$$

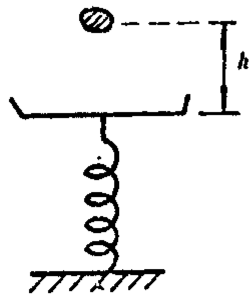
$M\omega^2=k$，$x_1=A\sin\omega t$，$v_1=\omega A\cos\omega t$，$v'=\dfrac{M}{M+m}v_1$ 代入，整理，

得 $$kA^2\left[\frac{M}{M+m}\cos^2\omega t_1+\sin^2\omega t_1\right]=kA'^2$$

因 $$\cos^2\omega t_1=1-\sin^2\omega t_1$$

故 $$A'=A\sqrt{\frac{M+m\sin^2\omega t_1}{M+m}}$$

***5.16** 如图所示，一质量为 m 的物体从弹簧秤盘上方高 h 处自静止自由下落，在接触秤盘后，两者一起运动。设弹簧及秤盘的质量忽略不计，弹簧的劲度系数为 k。已知 $m=0.5\text{kg}$、$h=1.5\text{cm}$、$k=490\text{N/m}$，试写出这物体作谐振动的表达式(以平衡位置为原点，向上为正方向)。



题 5.16 图

解 设 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=31.3\text{rad/s}$$

碰撞过程，冲力>>弹力，动量守恒

$$\begin{cases} v_0=-\omega A\sin\varphi=-\sqrt{2gh}=-0.54\text{m/s} \\ x_0=A\cos\varphi=\dfrac{mg}{k}=0.01\text{m} \end{cases}$$

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(-\frac{v_0}{\omega}\right)^2}=0.02\text{m}$$

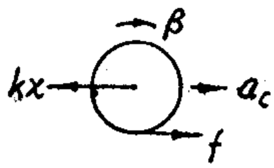
$$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{(-v_0/\omega}{x_0}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{3}\\[2ex]\dfrac{4\pi}{3}\text{（删去）}\end{cases}$$

故
$$x=0.02\cos(31.3t+\frac{\pi}{3})\quad(\mathrm{SI})$$

5.17 一个水平放置的轻弹簧系在实心圆柱体的轴上，使圆柱体可在水平面上作无滑动地滚动(见图)。试证：该柱体的质心作谐振动，并求振动的周期。已知弹簧的劲度系数为 k、圆柱体的质量为 M。

题 5.17 图

解
$$\begin{cases}f-kx=Ma_c\\[1ex]-fR=\dfrac{MR^2}{2}\beta\\[1ex]a_c=\beta R\end{cases}$$



解得
$$a_c=-(\frac{2k}{3M})x$$

故质心作谐振动

$$\omega=\sqrt{\frac{2k}{3M}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$$

由能量求解

总机械能为

$E=\frac{1}{2}MV_c^2+\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}k$

$=\frac{1}{2}MV_c^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\cdot(\frac{V_c}{R})^2+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}M\cdot V_c^2+\frac{1}{2}kX^2$

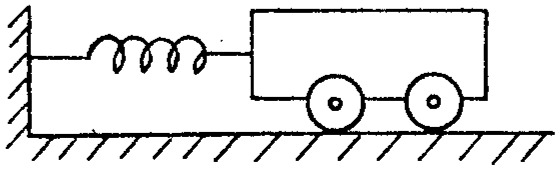
等效质量 $m=\frac{3}{2}M$.

$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

或
$$\begin{cases}-kx-f=Ma_c\\[1ex]fR=\dfrac{MR^2}{2}\beta\\[1ex]a_c=\beta R\end{cases}$$

解得
$$a_c=-(\frac{2k}{3M})x$$

*5.18　如图所示，一辆小车由车身和装在无摩擦的轴上的 4 个车轮所组成。设车身的质量为 m，每个轮子可看作半径为 R、质量为 M 的均匀圆盘。这小车在所系弹簧作用下在水平路面上作来回无滑动的滚动。设弹簧的劲度系数为 k，求这小车的振动频率。



题 5.18 图

解

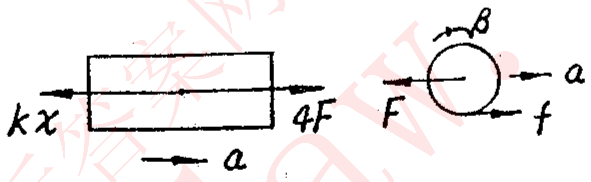
动能求解：

$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \cdot 4$

$+ 4 \cdot \frac{1}{2}J\omega^2$

$= \frac{1}{2}mv^2 + 2Mv^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}MR^2 \cdot v^2/R^2$

$\frac{1}{2}(m+6M)v^2$



$$\begin{cases} 4F - kx = ma \\ f - F = Ma \\ -fR = \dfrac{MR^2}{2}\beta \\ a = \beta R \end{cases}$$

解得
$$a = -\left(\frac{k}{m+6M}\right)x$$

故
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+6M}}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+6M}}$$

5.19　一根劲度系数 k 的弹簧的下端固定，上端系一轻绳。轻绳绕过定滑轮和质量为 m 的物体连接，如图所示。这定滑轮可看作是半径为 R、质量为 M 的圆盘，它可绕无摩擦的水平轴转动。试求这装置的振动周期。

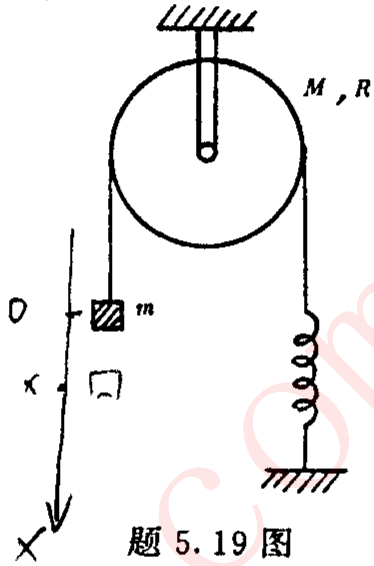
解　平衡时 $mg = k\lambda$

[illegible]

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{v^2}{R^2}=\frac{1}{2}(m+\frac{M}{2})v^2,\quad m'=m+\frac{M}{2}$$

以 m 的平衡位置为原点，向下为 x 轴正方向。

则 m 位移 x 时受力图如图



题 5.19 图

$$mg-\underset{F}{\cancel{T}}=ma$$

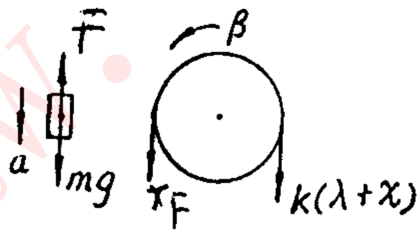
$$F\cancel{T}R-k(\lambda+x)R=\frac{MR^2}{2}\beta$$

$$a=\beta R$$

解得 $$a=-\left(\frac{k}{m+\frac{M}{2}}\right)x$$

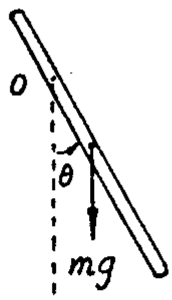
故 $$\omega=\sqrt{\frac{k}{m+\frac{M}{2}}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m+\frac{M}{2}}{k}}$$



5.20 把一根米尺悬挂起来作为一个复摆。设支点在 75cm 刻度处，试求小摆幅下的角频率。

解 角位移 θ 时



$$-mg\frac{l}{4}\sin\theta=J\beta$$

$$J=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2$$

小摆幅时 $$\beta=-\left(\frac{12g}{7l}\right)\sin\theta\approx-\left(\frac{12g}{7l}\right)\theta$$

故角频率 $$\omega=\sqrt{\frac{12g}{7l}}=4.1\text{rad/s}$$

5.21 一半径为 R 的均质细环悬挂在支点 P 处(见图)。当这细环在铅直面内作小幅度摆动，求其摆动周期。

解 角位移 θ 时

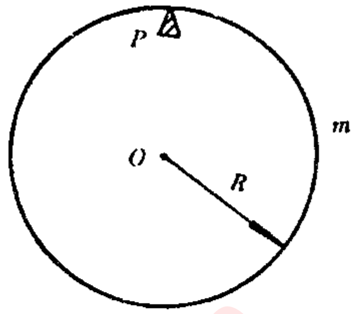
$$-mgR\sin\theta=J\beta$$

$$J=J_c+mh^2=mR^2+mR^2$$

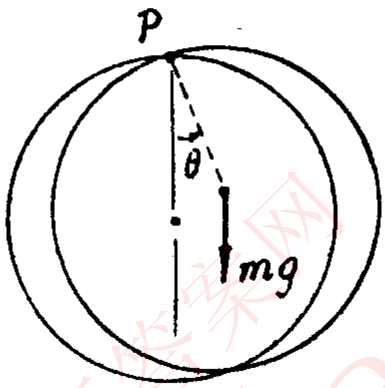
解得　　$\beta=-(\frac{g}{2R})\sin\theta\approx-(\frac{g}{2R})\theta$

故振动角频率　　$\omega=\sqrt{\frac{g}{2R}}$

周期　　$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$



题 5.21 图

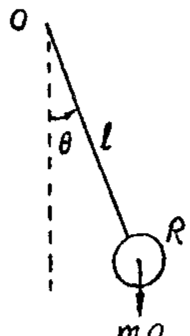


5.22　某物理摆是一个用长为 L 的轻绳悬起的匀质球形重锤。已知该球形锤的质量为 M、半径为 R。在微小摆幅下，试求这摆的周期。

解　角位移 θ 时

$$-mg(l+R)\sin\theta=J\beta$$

$$J=J_c+mh^2=\frac{2}{5}mR^2+m(l+R)^2$$

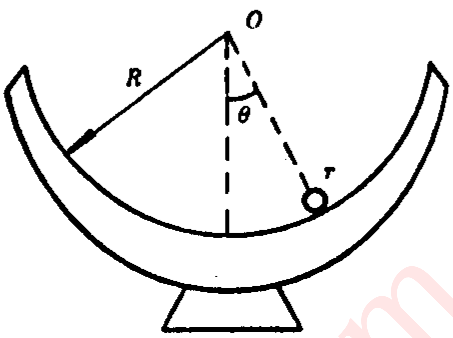


解得　$$\beta=-\frac{g(l+R)}{\frac{2}{5}R^2+(l+R)^2}\theta$$

故角频率　$$\omega=\sqrt{\frac{g(l+R)}{\frac{2}{5}R^2+(l+R)^2}}$$

周期　$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}R^2+(l+R)^2}{g(l+R)}}$$

5.23 如图所示，一个半径为 r 的实心小球在圆弧形碗底附近来回纯滚动。如小球来回运动所对应的角度 θ 很小，求周期。



题 5.23 图

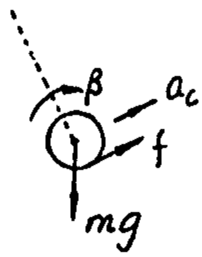
解 角位移 θ 时

$$\begin{cases} f-mg\sin\theta=ma_c \\ -fr=\dfrac{2mr^2}{5}\dfrac{a_c}{r} \end{cases}$$

解得 $a_c=-(\dfrac{5g}{7})\sin\theta\approx-(\dfrac{5g}{7})\theta$

小球质心绕球面中心 o 作圆周运动的角加速度 β 为

$$\beta=\frac{a_c}{R-r}=-\frac{5g}{7(R-r)}\theta$$



故来回滚动，θ 小时近似谐振动，角频率 ω 为

$$\omega=\sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

周期
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

5.24 质量为 m 的质点处于一维的势场中，其势能的表达式为

$$U(x)=\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}$$

式中 a 与 b 是常量。试求该物体作小振动的周期。

解 稳定平衡位置处，$\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}=0$，

即

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}=-\frac{2a}{x^3}+\frac{b}{x^2}=0$$

故平衡位置为 $x=\dfrac{2a}{b}$

若以平衡位置为原点，x 正方向为 ζ 轴正方向，则：

$$U=\frac{a}{(\zeta+\frac{2a}{b})^2}-\frac{b}{(\zeta+\frac{2a}{b})}$$

当质点离ζ轴原点很小时，质点受回复力为

$$F=-k\zeta=-(\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\zeta^2})_0\zeta$$

故
$$k=(\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\zeta^2})_0=[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2}(\frac{a}{(\zeta-\frac{2a}{b})^2}-\frac{b}{(\zeta+\frac{2a}{b})})]_0$$

$$=(\frac{6a}{(\zeta+\frac{2a}{b})^4}-\frac{2b}{(\zeta+\frac{2a}{b})^3})_0=\frac{b^4}{8a^3}$$

振动角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{b^4}{8ma^3}}=\frac{b^2}{2a}\sqrt{\frac{1}{2ma}}$$

周期为
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4\pi a}{b^2}\sqrt{2ma}$$

5.25 某摆钟在地球上走得很准。如果这只摆钟被放在月球上，在那里，物体的重量只有地球上的1/6，试问在实际时间为1分钟内，该摆钟将滴答出多少秒？

解 钟摆在地面上

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{J}}=1\mathrm{Hz}$$

该摆在月球上，频率为

$$\nu'=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m(\frac{g}{6})l}{J}}=\frac{\nu}{\sqrt{6}}=0.41\mathrm{Hz}$$

即1分钟内振动次数为

$$0.41\times60=24.6$$

5.26 质量$m=0.5\mathrm{kg}$的物体挂在弹簧上，并沿竖直方向上下振动。在无阻尼的情况下，其振动周期为$T_0=0.4\pi\ \mathrm{s}$；在阻力与物体

运动速度成正比的某一媒质中，其振动周期为 $T=0.5\pi$ s。求物体在该阻尼媒质中振动速度为 10cm/s 时所受阻力。

解
$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=5\text{rad/s}$$
$$\omega'=\frac{2\pi}{T'}=4\text{rad/s}$$

因
$$\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

故阻尼系数为
$$\beta=\sqrt{\omega_0^2-\omega'^2}=3\ \text{rad/s}$$

又因
$$\beta=\frac{b}{2m}$$

故阻力为
$$f=-bv=-2m\beta v=-0.3\text{N}$$

5.27 一弹簧振子作阻尼振动。初始振幅为 120mm，经 2.4min 后，振幅减至 60mm。(1)问在何时，振幅将减至 30mm；(2)试计算阻尼系数 γ。

解 因
$$A_1=A_0e^{-\beta t_1}$$

故
$$\beta=-\frac{\ln(\frac{A_1}{A_0})}{t_1}=4.8\times10^{-3}\text{rad/s}$$

同理
$$A_2=A_0e^{-\beta t_2}$$
$$t_2=-\frac{\ln(\frac{A_2}{A_0})}{\beta}=\frac{\ln(\frac{A_2}{A_0})}{\ln(\frac{A_1}{A_0})}t_1=288\text{s}=4.8\text{min}$$

5.28 质量为 2.5kg 的物体系在劲度系数为 1250N/m 的弹簧上而构成一个弹簧振子。在 $t=0$，这物体从离平衡位置 2.8cm 处由静止开始释放，然后作弱阻尼的振动。已知式(5.27)的比例系数 $b=50$kg/s。试求(1)阻尼振动的角频率 ω；(2)阻尼振动表达式，即式(5.29)中的初始振幅 A 和初相 φ[提示：$\varphi\neq0$]；(3)在 $t=\frac{\pi}{10}$s 时的位

移和速度。

解 (1)弱阻尼振动表达式一般形式

$$x=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega' t+\varphi)$$

阻尼系数 $$\beta=\frac{b}{2m}=10\ \text{rad/s}$$

固有角频率 $$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{500}\text{rad/s}$$

故阻尼振动频率 $$\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=20\text{rad/s}$$

(2)阻尼振动速度 v 为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A_0\beta e^{-\beta t}\cos(\omega' t+\varphi)-A_0e^{-\beta t}\omega'\sin(\omega' t+\varphi)$$

代入初始条件：

$$\left.\begin{aligned}x_0&=A_0\cos\varphi=2.8\times10^{-2}\text{m}\\ v_0&=-A_0\beta\cos\varphi-A_0\omega'\sin\varphi=0\end{aligned}\right\}A_0\sin\varphi=\frac{-\beta x_0}{\omega'}$$

故 $$A_0=\sqrt{x_0^2+(-\frac{\beta x_0}{\omega'})^2}=3.13\times10^{-2}\text{m}$$

$$\varphi=\cos^{-1}(\frac{x_0}{A_0})=\begin{cases}+26.565°(\text{删去})\\-26.565°\end{cases}$$

因 $$A_0\sin\varphi=-\frac{\beta x_0}{\omega'}<0,\text{故 }\varphi=-26.6°$$

阻尼振动表达式 $x=3.13\times10^{-2}e^{-10t}\cos(20t-26.6°)$ (SI)

(3) $$t=\frac{\pi}{10}\text{s 时}$$

$$x=1.21\times10^{-3}\text{m}$$

$$v=4.65\times10^{-9}\text{m/s}\approx0$$

5.29 在上题中，如作用于这物体的驱动力为 $F=12\cos25t$(SI制)，试求(1)达稳态后的受迫振动的振幅、初相；(2)在共振($\omega=\omega_0$)时的振幅。

解 (1)由上题知：$\beta=10\text{rad/s}$ $\omega_0=\sqrt{500}\text{rad/s}$ $m=2.5\text{kg}$

稳态受迫振动振幅 $A=\dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}=9.31\times10^{-3}\text{m}$

初相
$$\varphi=\text{tg}^{-1}\left(\frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)=76°$$

即
$$x=9.31\times10^{-3}\cos(25t+76°)$$

(2)当 $\Omega=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ 时共振，代入 $A(\Omega)$式，得

$$A_{\max}=\frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}=0.012\text{m}=1.2\times10^{-2}\text{m}$$

5.30 某小孩在荡秋千时，发现 8 个周期内其摆幅降到初值的 $1/e$，求这系统的 Q 值。

解
$$A=A_0e^{-\beta t}$$

按题意
$$A=A_0e^{-\beta(8T)}=\frac{A_0}{e}$$

故
$$\beta T=\frac{1}{8}$$

而品质因素
$$Q=2\pi\frac{E}{\Delta E}=\frac{\pi}{\beta T}=8\pi=25.1$$

5.31 试证：在共振($\Omega=\omega_0$)时，阻尼弹簧振子的受迫振动的振幅和最大速率分别为

$$A_{\max}=F_0/b\Omega$$
$$v_{\max}=F_0/b$$

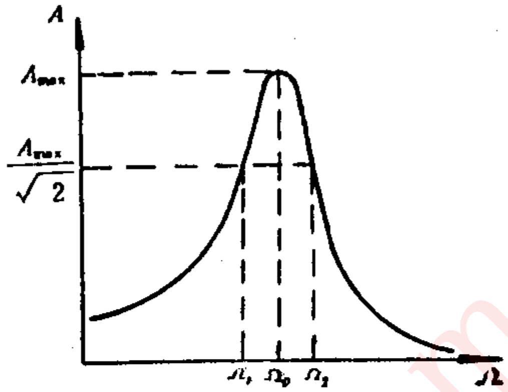
解 受迫振动

$$A=\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}$$

$\Omega=\omega_0$ 时
$$A_{\max}=\frac{F_0/m}{\sqrt{4\left(\frac{b}{2m}\right)^2\Omega^2}}=\frac{F_0}{b\Omega}$$

$$v_{\max}=\Omega A_{\max}=\frac{F_0}{b}$$

5.32 某受迫振动系统的共振曲线如图所示。当驱动力频率为 Ω_1 和 Ω_2 时，相应 $A=A_{max}/\sqrt{2}$。可以证明，驱动力的平均功率 P 与振幅平方成正比。所以在 Ω 轴上这两点，即 $\Omega=\Omega_1$ 和 $\Omega=\Omega_2$，相应的功率 $P=P_{max}/2$，故这两点称为半功率点。试证：两半功率点之间的宽度，即 $\Delta\Omega=(\Omega_2-\Omega_1)$ 与 Q 值有如下近似关系：$\Delta\Omega=\omega_0/Q$。这说明 Q 值越大，共振峰越尖锐。



题 5.32 图

解　受迫振动振幅为

$$A=\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}$$

共振时振幅为

$$A_{max}=\frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

半功率点

$$\frac{A^2}{A_{max}^2}=\frac{(\omega_0^2-\beta^2)\Omega^2}{\frac{(\omega_0^2-\Omega^2)^2}{4\beta^2\Omega^2}+1}=\frac{1}{2}$$

因 $\Delta\Omega$ 很小，$\Omega\approx\omega_0$，β^2/Ω^2 可忽略，故

$$\frac{(\omega_0^2-\Omega^2)^2}{4\beta^2\Omega^2}=1$$

或
$$(\Omega^2+2\beta\Omega-\omega_0^2)(\Omega^2-2\beta\Omega-\omega_0^2)=0$$

删去负根，得
$$\Omega_1=\sqrt{\omega_0^2+\beta^2}-\beta$$

$$\Omega_2=\sqrt{\omega_0^2+\beta^2}+\beta$$

故
$$\Delta\Omega=\Omega_2-\Omega_1=2\beta$$

而
$$Q=\frac{\omega'}{2\beta}\approx\frac{\omega_0}{2\beta}$$
因此
$$\Delta\Omega\approx\frac{\omega_0}{Q}$$

5.33 同方向两谐振动

$$x_1=4\cos(4\pi t+\frac{\pi}{6})$$
$$x_2=2\cos(4\pi t+\frac{5\pi}{6})$$

写出这两谐振动合成的谐振动表达式

解 设合振动为 $x=A\cos(4\pi t+\varphi)$

则
$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}=2\sqrt{3}\ \text{m}$$
$$\varphi=\text{tg}^{-1}\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}=\frac{\pi}{3}$$
故
$$x=2\sqrt{3}\cos(4\pi t+\frac{\pi}{3})\qquad(\text{SI})$$

5.34 两个同方向同频率的谐振动 $x_1=0.4\cos(2\pi t+\frac{\pi}{6})\text{m}$，$x_2=0.2\cos(2\pi t+\varphi_2)\text{m}$，试问：(1)$\varphi_2$ 为何值时合振动的振幅最大？并求出此振幅值；(2)φ_2 为何值时合振动的振幅最小？并求出此振幅值。

解 (1)$\varphi_2=2n\pi+\frac{\pi}{6}\qquad(n=0,\pm1,\cdots)$

$$A_{max}=A_1+A_2=0.6\text{m}$$

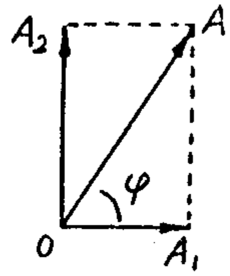
(2)$\varphi_2=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{6}\qquad(n=0,\pm1,\cdots)$

$$A_{min}=|A_1-A_2|=0.2\text{m}$$

5.35 若日光灯电路中灯管两端电压和镇流器两端的电压分别为

$$u_1=90\sqrt{2}\cos100\pi t\qquad\text{V}$$
$$u_2=200\sqrt{2}\cos(100\pi t+\frac{\pi}{2})\qquad\text{V}$$

试求日光灯电路两端的总电压 $U=u_1+u_2$ 的表达式。



解 由旋转矢量图知，

合振幅 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=310\text{V}$

$$\varphi=\text{tg}^{-1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)=65.8°$$

合振动 $u=u_1+u_2=310\cos(100\pi t+65.8°)$ (V)

5.36 两个同方向的谐振动、周期相同，振幅为 $A_1=0.05\text{m}$，$A_2=0.07\text{m}$，组成一个振幅为 $A=0.09\text{m}$ 的谐振动。求两个分振动的相位差。

解
$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

故
$$\varphi_2-\varphi_1=\cos^{-1}\frac{A^2-A_1^2-A_2^2}{2A_1A_2}=84.3°$$

5.37 设 3 个谐振动的表达式分别为

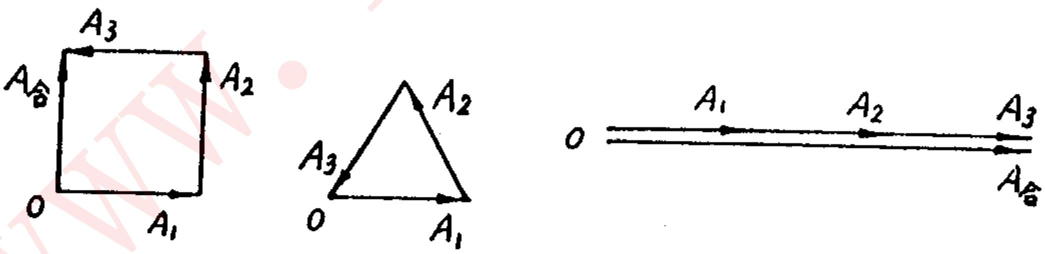
$x_1=A\cos\omega t$

$x_2=A\cos(\omega t+\delta)$

$x_3=A\cos(\omega t+2\delta)$

试用旋转矢量法分别求出 $\delta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{2}{3}\pi$，2π 时的合振动振幅。

解



5.38 三个同方向、同频率的谐振动为

$$x_1=0.04\cos\left(120\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$x_2=0.04\cos\left(120\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_3=0.04\cos\left(120\pi t+\frac{5\pi}{6}\right)$$

试求合振动的表达式。

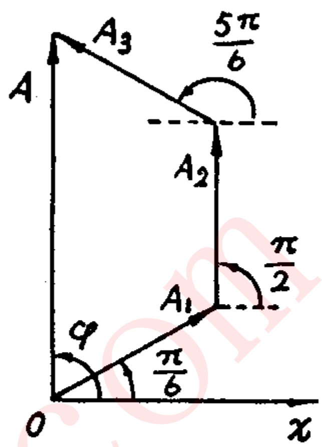
解　同方向同频率谐振动合成，合振动为谐振动。设合振动为

$$x=A\cos(120\pi t+\varphi)$$

由振幅矢量图知，合振动振幅和初位相分别为

$$A=2\times0.04\text{m}=0.08\text{m}$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2}$$



故 $$x=0.08\cos(120\pi t+\frac{\pi}{2})\quad(\text{SI})$$

5.39　质点分别参与下列三组相互垂直的谐振动（位移单位为厘米）

(1) $$\begin{cases}x=2\cos(8\pi t+\frac{\pi}{6})\\ y=2\cos(8\pi t-\frac{\pi}{6})\end{cases}$$

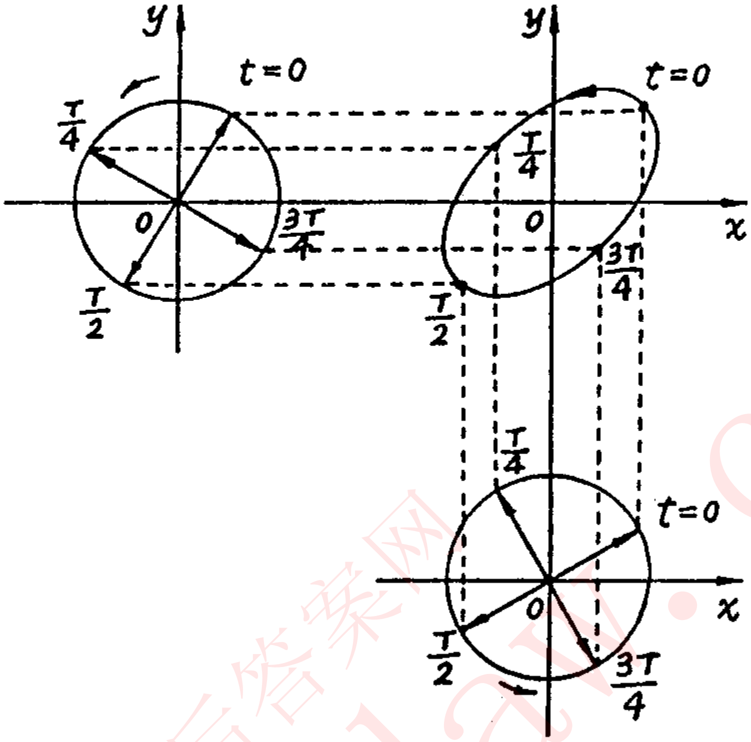
(2) $$\begin{cases}x=2\cos(8\pi t+\frac{\pi}{6})\\ y=2\cos(8\pi t-\frac{5\pi}{6})\end{cases}$$

(3) $$\begin{cases}x=2\cos(8\pi t+\frac{\pi}{6})\\ y=2\cos(8\pi t+\frac{2\pi}{3})\end{cases}$$

试判断质点运动的轨迹，并画出其草图。如是圆运动，并指出是顺时针或逆时针运动。

解(1)相互垂直同频率谐振动合成，$\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\pi}{3}$。合运动轨道为斜椭圆。逆时针方向绕行($-\pi<\varphi_2-\varphi_1<0$)。

(2)因 $$\varphi_2-\varphi_1=-\pi$$

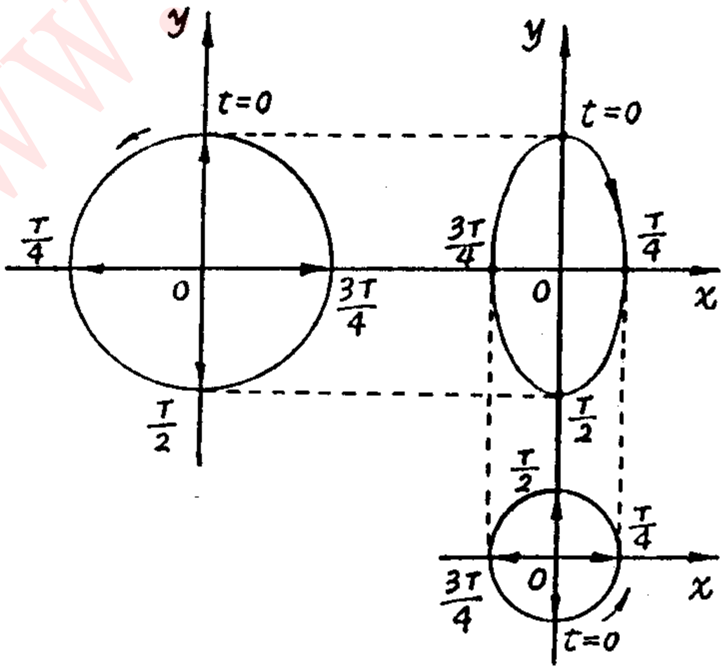


合运动为直线

(3) $$0<\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}<\pi, A_1=A_2,$$

故合运动轨道为圆，绕行方向顺时针。

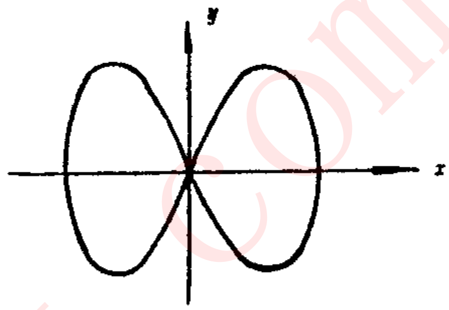
5.40 已知某质点参与如下相互垂直的谐振动：$x=A\cos(\omega t-$



$\frac{\pi}{2}$)和 $y=2A\cos\omega t$。试在 xy 平面上画出这质点运动轨迹的草图。并指出是逆时针还是顺时针绕向。

解　$A_y=2A_x$，$\varphi_2-\varphi_1=+\frac{\pi}{2}$，故是正椭圆，$y$ 方向长半轴为 x 方向的 2 倍，顺时针方向绕行。

5.41　某质点参与相互垂直的谐振动。设 $x=A_x\cos\omega_x t$ 和 $y=A_y\cos(\omega_y t+\varphi_y)$。其合运动的轨迹如图所示。试求(1)$A_x/A_y$；(2)$\omega_x/\omega_y$ 和(3)φ_y 之值。



题 5.41

解　由图知：

$$\frac{\omega_x}{\omega_y}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{A_x}{A_y}=\frac{1.35}{1.15}=\frac{1}{0.85}\qquad \varphi_y=\frac{\pi}{2}\text{或}-\frac{\pi}{2}$$