第十五章　电磁场与电磁波

15.1　试证明平板电容器中位移电流可以表示为 $I_d=C\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$（略去边缘效应）

证明　按定义

$$I_d=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{S})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\sigma\cdot S)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

而平行板上 $q=CU$，所以

$$I_d=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

15.2　一圆形极板的平板电容器极板半径为 5.0cm。在充电时，其电场强度的变化率为 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=1.0\times10^{12}\mathrm{V/m\cdot s}$。

(1)求两极间的位移电流 I_d；

(2)求极板边缘的磁感应强度 B。

解　(1)

$$I_d=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D\cdot\pi R^2)$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon_0E\cdot\pi R^2)$$

$$=\pi R^2\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

$$=\pi\times0.05^2\times8.85\times10^{-12}\times1.0\times10^{12}$$

$$=7.0\times10^{-2}\mathrm{A}$$

(2)由

$$\oint_L\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=I_i+I_d=I_d$$

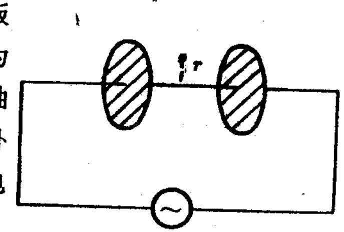
得

$$H=\frac{I_d}{2\pi R}$$

因此

$$B=\mu_0H=\frac{\mu_0I_d}{2\pi R}=2.8\times10^{-7}\mathrm{T}$$

15.3　一平板电容器两圆形极板的面积均为 A，其间距为 d。一电阻为 R、长度为 d 的细直导线沿电容器的轴线放置，并将两极板连接起来。极板外部引线与一电压 $V=V_0\sin\omega t$ 的交流电源连接。求：



解 15.3 图

(1)细导线中的电流大小；

(2)穿过电容器的位移电流大小；

(3)电容器的外部引线上的电流大小；

(4)在电容器中距轴为 r 处的磁感应强度。

解　(1)　$i=\dfrac{V}{R}=\dfrac{V_0\sin\omega t}{R}$

(2)　$I_d=\dfrac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varepsilon_0\dfrac{V_0\sin\omega t}{d}\cdot A\right)=\dfrac{A\varepsilon_0V_0\omega}{d}\cos\omega t$

(3)　$I=i+I_d=\dfrac{V_0\sin\omega t}{R}+\dfrac{A\varepsilon_0V_0\omega}{d}\cos\omega t$

(4)　$\oint_L\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=i+I_d'$

I_d' 为回路 L 所包围的位移电流，因为

$$j_d=\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\varepsilon_0}{d}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\varepsilon_0V_0\omega\cos\omega t}{d}$$

$$I_d'=\pi r^2\cdot j_d$$

故

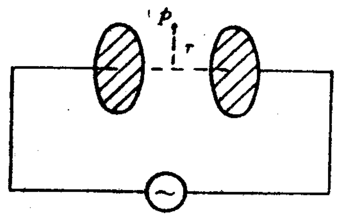
$$H_r=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{V_0\sin\omega t}{rR}+\frac{\varepsilon_0\pi V_0\omega r\cos\omega t}{d}\right)$$

$$B_r=\mu_0H_r=\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{V_0\sin\omega t}{rR}+\frac{\varepsilon_0\pi V_0\omega r}{d}\cos\omega t\right)$$

15.4　在平板电容器两极板间各点的交变电场强度 $E=720\sin10^5\pi t\,\mathrm{V/m}$。求：

(1)电容器中的位移电流密度；

(2)电容器内距中心联线 $r=10^{-2}$m 的 p 点在 $t=0$ 和 $t=\frac{1}{2}\times10^{-5}$s 时磁场强度的大小。



题 15.4 图

解　(1)

$$j_d=\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=720\times10^5\pi\varepsilon_0\cos10^5\pi t$$

(2)由 $\oint_L \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum I+I_d$，得

$$H_p\cdot2\pi r=\pi r^2\cdot j_d$$

$$H_p=\frac{j_d\cdot r}{2}=3.6\times10^5\pi\varepsilon_0\cos10^5\pi t$$

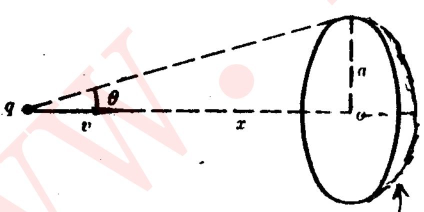
$t=0$ 时

$$H_p=3.6\times10^5\times\pi\times8.85\times10^{-12}=1.0\times10^{-5}\mathrm{A/m}$$

$t=\frac{1}{2}\times10^{-5}$s 时

$$H_p=0$$

15.5　如图所示，电荷 $+q$ 以速度 v 向 o 点运动(电荷到 o 的距离以 x 表示)。在 o 点处作一半径为 a 的圆，圆面与 v 垂直，试计算通过此圆面的位移电流。



题 15.5 图

$S_{球冠}=2\pi Rh=2\pi\sqrt{x^2+a^2}(\sqrt{x^2+a^2}-$

解　先求出圆平面边缘处点电荷 q 产生的磁场大小为

$$B=\frac{\mu_0qv}{4\pi r^2}\sin\theta=\frac{\mu_0qva}{4\pi r^3}$$

$$H=\frac{B}{\mu_0}=\frac{qva}{4\pi r^3}$$

$\Phi_D=\varepsilon_0ES_{球冠}$

$I_d=\frac{d\Phi_D}{dt}$

方向沿圆周切向。

由安培环路定理

$$\oint_l\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=I+I_d$$

积分回路 L 为圆平面的圆周。

同时因为　$I=0$

故

$$I_d=\oint_L\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=H\cdot2\pi a$$

$$=\frac{qva^2}{2r^3}=\frac{qva^2}{2(x^2+a^2)^{3/2}}$$

说明：本题也可先求点电荷在圆平面处 D，再求通过圆平面的通量 Φ_D，则 $I_d=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}$。但数学上显得繁琐。

15.6　一个平面无线电波的电场强度最大值为 100×10^{-6}V/m，试问其磁场强度的最大值是多少？

解　由平面电磁波性质

$$\frac{E_0}{H_0}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

$$H_0=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0$$

$$=\sqrt{\frac{8.85\times10^{-12}}{4\pi\times10^{-7}}}\times100\times10^{-6}$$

$$=2.65\times10^{-7}\mathrm{A/m}$$

15.7　有一平面电磁波在真空中传播，电磁波通过某点时该点

电场强度 $E=50\text{V/m}$。试求该时刻该点 B 和 H 的大小，以及电磁场能量体密度 w 和坡印亭矢量 S 的大小。

解

$$H=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E=0.133\text{A/m}$$

$$B=\mu_0H=\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E=1.67\times10^{-7}\text{T}$$

$$w=w_e+w_m$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\mu_0H^2$$

$$=\varepsilon_0E^2=2.21\times10^{-8}\text{J/m}^3$$

由定义

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

$$S=EH=50\times0.133=6.65\text{J/m}^2\cdot\text{s}$$

15.8 太阳射到地球上的能流约为 1.4KW/m^2。求：

(1)这种强度的电磁波的 E 和 B 的最大值；

(2)太阳辐射的总功率(地球与太阳之间的距离为 1.5×10^{11} m)。

解 (1)由题意 $\bar{S}=1.4\times10^3\text{J/m}^2\cdot\text{s}$，因为

$$\frac{E}{H}=\frac{E_0}{H_0}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

而 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$

$$\bar{S}=\frac{1}{2}E_0H_0=\frac{E_0^2}{2\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}$$

所以

$$E_0=\sqrt{2\bar{S}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}=1027$$

$$=1.03\times10^3\text{V/m}$$

$$B_0=\mu_0H_0=\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E_0=3.42\times10^{-6}\text{T}$$

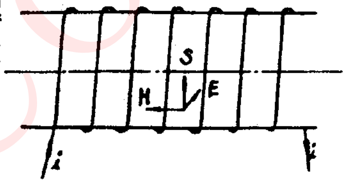
(2) $$P=\bar{S}\cdot4\pi r^2=1.4\times10^3\times4\pi\times(1.5\times10^{11})^2$$

$$=3.96\times10^{26}\text{J/s}$$

15.9 一个半径为 a 的长直螺线管，每单位长度有 n 匝，载有正在增加的电流 I。试求：

(1)在螺线管内距轴线为 r 处一点的涡旋电场强度；

(2)该点的坡印亭矢量的大小及方向。



解 15.9 图

解 (1)螺线管内 $H=nI$，$B=\mu_0nI$，又

$$\oint_L \boldsymbol{E}_{涡}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$E_{涡}\cdot2\pi r=-\mu_0n\frac{dI}{dt}\cdot\pi r^2$$

故

$$E_{涡}=-\frac{\mu_0nr}{2}\frac{dI}{dt}$$

负号表示 $\boldsymbol{E}$ 阻碍电流增加，即 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 组成左旋关系，如图所示。

(2) $$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

$$S=E\cdot H=\frac{\mu_0n^2r}{2}I\frac{dI}{dt}$$

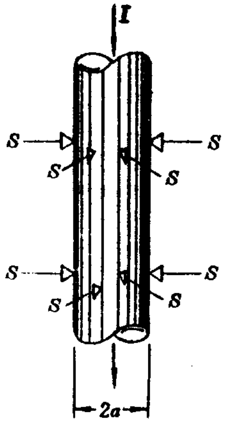
方向沿径向且指向轴线。

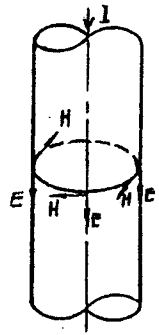
15.10 一圆柱形导体，其半径为 a，载有稳恒电流 I，取长为 l 的一段(见图)。已知其电阻率为 ρ。试证明：

(1)在该导体表面上，坡印亭矢量处处都与表面垂直并指向导体内部；

(2)坡印亭矢量对整个导体表面的积分等于导体内产生的焦耳热的功率。

证明 (1)因为 $\boldsymbol{j}=\gamma\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{E}$ 与电流 I 的流向一致并平行于轴，如图所示。





题 15.10 图　　　　解 15.10 图

由右螺旋定则可知，B 和 H 均为环绕电流的同心圆，由 $S=E\times H$ 可知，S 处处垂直表面并指向导体内部。

(2)因为
$$j=\frac{I}{\pi a^2}=\frac{1}{\rho}E$$
故
$$E=\frac{I\rho}{\pi a^2}$$
电阻为
$$R=\rho\frac{l}{\pi a^2}$$
所以
$$E=\frac{IR}{l}$$
同时由安培环路定理
$$H=\frac{I}{2\pi a}$$
$$S=EH=\frac{I^2R}{2\pi al}$$
$$P=\int S\mathrm{d}A=\int\frac{2I^2R}{2\pi al}\mathrm{d}A=\frac{I^2R}{2\pi al}\int\mathrm{d}A$$

$$=\frac{I^2R}{2\pi al}\cdot 2\pi al=I^2R$$

15.11　一平面电磁波的波长为 3.0m，在自由空间中沿 x 方向传播，电场 E 沿着 y 方向，振幅为 300V/m。试求：

(1)该电磁波的频率 f；

(2)磁场 B 的方向和振幅；

(3)电磁波的圆频率；

(4)电磁波的能流密度的平均值。

解　(1)
$$f=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\times10^8}{3.0}=10^8\text{Hz}$$

(2)根据 $S=E\times H$ 可判知 H 沿 z 轴正方向
$$B_0=\mu_0H_0=\mu_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0$$
$$=\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}E_0=\frac{E_0}{c}$$
$$=\frac{300}{3\times10^8}=1\times10^{-6}\text{T}$$

(3)
$$\omega=2\pi f=2\pi\times10^8=6.28\times10^8\text{rad/s}$$

(4)
$$S=EH=E_0H_0\cos^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi\right]$$
$$\bar{S}=\frac{1}{2}E_0H_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2=119\text{W/m}^2$$

15.12　一同轴电缆，内外导体间充满了相对介电常数为 $\varepsilon_r=2.25$ 的聚乙稀。求讯号在此电缆中传播的速度。

解　电磁波在介质中的传播速度
$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{8.85\times10^{-12}\times2.25\times4\pi\times10^{-7}\times1}}$$
$$=2.0\times10^8\text{m/s}$$

15.13　一广播电台的平均辐射功率 $\overline{P}=10\text{kW}$。假定向外辐射的能流均匀地分布在以电台为中心的半个球面上。求：

(1)求在距离电台 $r=10\text{Km}$ 处坡印亭矢量的平均值；

(2)若将上述距离处的电磁波看作平面波，试求该处电场强度和磁场强度的振幅。

解　(1)　$$\overline{S}=\frac{\overline{P}}{2\pi r^2}=\frac{10\times10^3}{2\pi\times(1.0\times10^4)^2}$$
$$=1.59\times10^{-5}\text{J/m}^2\cdot\text{s}$$

(2)　$$S=EH=E_0H_0\cos^2\left[\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)+\varphi\right]$$

又因为 $\overline{S}=\frac{1}{2}E_0H_0$，而

$$\frac{E_0}{H_0}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

所以

$$E_0=\sqrt{2\overline{S}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}\approx0.11\text{V/m}$$

$$H_0=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0=2.9\times10^{-4}\text{A/m}$$

15.14　一很长的均匀带电圆筒，半径为 R，长度为 L，电荷面密度为 σ。今施加一力矩，使该圆筒以角速度 $\omega(t)=\alpha t$（α 为常量）绕圆筒的轴旋转。

(1)求圆筒内的磁感应强度；

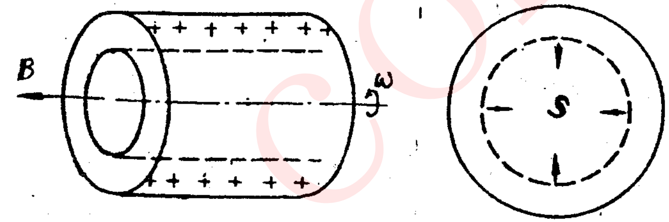
(2)求圆筒内表面上的电场强度 $\boldsymbol{E}$；

(3)求圆筒内表面上的坡印矢量 $\boldsymbol{S}$；

(4)证明进入圆筒内部体积的 S 通量等于 $\frac{\text{d}}{\text{d}t}\left(\frac{\pi R^2L}{2\mu_0}B^2\right)$。

解　(1)带电圆筒在转动时的等效电流为

$$I=q\cdot n=2\pi RL\sigma\cdot\frac{\omega}{2\pi}$$



解 15.14 图

$$=RL\sigma\alpha t$$

单位长度上载流 $j=\frac{I}{L}=R\sigma\alpha t$，此时圆筒可视为长直载流螺线管，内部 B 的大小为

$$B=\mu_0 ni=\mu_0 j=\mu_0R\sigma\alpha t$$

方向与轴平行且指向左端。

(2)　$$\oint_L \boldsymbol{E}_{涡}\cdot\text{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\text{d}\Phi_D}{\text{d}t}$$

$$E_{涡}\cdot2\pi R=-\frac{\text{d}}{\text{d}t}(\pi R^2\cdot B)$$

$$E_{涡}=-\frac{R}{2}\frac{\text{d}B}{\text{d}t}=-\frac{\mu_0R^2\sigma\alpha}{2}$$

负号表示 $E_{涡}$ 阻碍磁场增加，方向沿圆周切向。

(3)　$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}_{涡}\times\boldsymbol{H}$$

$$S=E_{涡}H=E_{涡}\frac{B}{\mu_0}$$

$$=\frac{\mu_0}{2}R^3\sigma^2\alpha^2t$$

方向沿半径指向轴线，如图所示。

(4)　$$P=\int\boldsymbol{S}\cdot\text{d}\boldsymbol{A}=S\cdot2\pi RL$$

$$=\frac{1}{\mu_0}\frac{R}{2}\frac{\text{d}B}{\text{d}t}B2\pi RL$$

$$=\frac{\text{d}}{\text{d}t}\left(\frac{\pi R^2L}{2\mu_0}B^2\right)$$　　得证

15.15　一振荡电路，由自感系数为 1.2×10^{-3}H 的线圈和电容为 3.0×10^{-8}F 的电容器所组成，线路中的电阻可以略去，求振荡频率。

解　振荡频率为

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{1.2\times10^{-3}\times3.0\times10^{-8}}}$$

$$=2.65\times10^{4}\text{Hz}$$

第十六章　光的干涉

16.1　杨氏双缝干涉实验中，两缝中心距离为 0.60mm，紧靠双缝的凸透镜的焦距为 2.5m，屏幕置于焦平面上。

(1)用单色光垂直照射双缝，测得屏上条纹的间距为 2.3mm。求入射光的波长。

(2)当用波长为 480nm 和 600nm 的两种光垂直照射时，问它们的第三级明条纹相距多远。

解　(1)杨氏双缝干涉的条纹间距

$$\Delta x=\frac{D}{d}\lambda$$

则

$$\lambda=\frac{d}{D}\Delta x=\frac{0.6\times10^{-3}\times2.3\times10^{-3}}{2.5}$$

$$=5.5\times10^{-7}\text{m}=550\text{nm}$$

(2)当光线垂直照射时，明纹中心位置

$$X=\frac{D}{d}k\lambda,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

λ_1、λ_2 两种光的第三级明纹相距

$$\Delta x=x_3-x_3'=\frac{D}{d}\cdot3(\lambda_2-\lambda_1)$$

$$=\frac{2.5\times3}{0.6\times10^{-3}}\times(600-480)\times10^{-9}$$

$$=1.50\times10^{-3}\text{m}=1.5\text{mm}$$

16.2　在杨氏双缝干涉实验中，若用折射率分别为 1.5 和 1.7 的　块透明薄膜覆盖双缝(膜厚相同)，则观察到第 7 级明纹移到了