# 简介

主要为浙江大学中级宏观经济学课程学习、考试总结的高教版《高级宏观经济学》一书中的公式；

祝考试顺利！

# 单期

## 静态模型

**偏好：** 稻田条件

**技术：** 一次齐次

### 消费者最优化行为

$$\max_{c,l} \quad u(c,l)$$
$$\text{s.t.} \quad c = w(h-l) + (1+r)k_0 + \pi, \ 0 \le l \le h$$
$$\frac{u_2}{u_1} = w$$

消费与闲暇的边际替代率等于工资率

### 厂商最优化行为

$$\pi = zf(k_d, n_d) - (1+r)k_d + (1-\delta)k_d - wn_d, \ \delta = 1$$
$$\max_{k_d, n_d} \quad [zf(k_d,n_d) - (1+r)k_d - wn_d]$$
$$zf_1 = 1 + r$$
$$zf_2 = w$$

当生产函数为一次齐次时，**欧拉定律：**

$$zf(k,n) = zf_1 k + zf_2 n$$

规模报酬不变时，**最大化利润为零：**

$$zf(k,n) - (1+r)k - wn = 0$$

### 竞争均衡

始终满足：

$$c - y + w[n_d - (h-l)] + (1+r)(k_d - k_s)$$

劳动市场、消费品市场和资本租赁市场：

$$h - l = n_d \tag{1}$$
$$c = y \tag{2}$$
$$k_s = k_0 = k_d \tag{3}$$

**瓦尔拉斯定理：**(1)、(2)、(3)中任两个出清，另一个也出清。

## 帕累托最优

万能的计划者：

$$\begin{aligned} \max_{c,l} \quad & u(c,l) \\ \text{s.t.} \quad & c = zf(k_0,(h-l)) \\ & zf_2 = \frac{u_2}{u_1} \end{aligned}$$

消费者预算约束线 / 消费可能性曲线

## 比较静态分析

设生产技术：$y = zn$

最优化问题：$\max\limits_{l} \quad u[z(h-l),l]$

一阶条件：$-zu_1[z(h-1),l] + u_2[z(h-1),l] = 0$

均衡工作：$w = \frac{\partial y}{\partial n} = z$

$$\frac{dl}{dz} = \frac{u_1 + z(h-l)u_{11} - (h-l)u_{21}}{z^2 u_{11} - 2zu_{12} + u_{22}}$$

分母小于0，分子不确定

# 政府行为

假设政府将其购买的消费品全部销毁

政府预算约束：$g = \tau$

生产函数：$y = zn$

$$\begin{aligned} w(c,l,g) &= u(c,l) + v(g) \\ v(g) &= 0 \end{aligned}$$

## 消费者与厂商最优化行为

消费者：

$$\begin{aligned} \max_{c,l} \quad & u(c,l) \\ \text{s.t.} \quad & c = w(h-l) - \tau \\ & -wu_1 + u_2 = 0 \end{aligned}$$

厂商：

$$\max_{n}(z-w)n$$
$$w=z$$

## 竞争均衡与比较静态分析

$$-zu_1[(z(h-l)-g),l]+u_2[(z(h-l)-g),l]=0$$
$$\frac{dl}{dg}=\frac{-zu_{11}+u_{12}}{z^2u_{11}-2u_{12}+u_{22}}<0$$
$$\frac{dc}{dg}=\frac{zu_{12}-u_{22}}{z^2u_{11}-2u_{12}+u_{22}}<0$$

# 习题答案

1. $l=\frac{2}{3}h; l=\frac{1}{2}h$
2. $l=\frac{1-\theta}{1-\theta+\alpha\theta}h$
3. 略
4. ？？？什么垃圾题目，****
5.

# 两期

实际利率：$r$

贴现利率：$\rho$

贴现因子：$\beta=\frac{1}{1+\rho}$

$t$ 期债券购买数：$b_t$

# 纯两期

**偏好：** $\nu(c_1,c_2)=u(c_1)+\beta u(c_2)$

**禀赋：** $\sum_{i=1}^{N}y_{1i}=Y_1$，$\sum_{i=1}^{N}y_{2i}=Y_2$

## 消费者最优化行为

$$\max_{c_1,c_2,b_1}\quad u(c_1)+\beta u(c_2)$$
$$\text{s.t.}\quad c_1+b_1=y_1\text{，}c_2=y_2+b_1(1+r)$$

**欧拉方程：** $\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)}=\beta(1+r)$

取 $u(c_t)=ln(c_t)$:

$$c_1 = \frac{y_2 + y_1(1+r)}{(1+\beta)(1+r)}$$
$$c_2 = [y_2 + y_1(1+r)](\frac{\beta}{1+\beta})$$
$$b_1 = y_1 - \frac{y_2 + y_1(1+r)}{(1+\beta)(1+r)}$$

比较静态分析：

$$\frac{\partial c_2}{\partial r} = \frac{y_1\beta}{1+\beta} > 0$$

## 市场均衡

资本市场与商品市场条件

$$\sum_{i=1}^{n} b_{1i} = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_{1i} + \sum_{i=1}^{n} c_{2i} = Y_1 + Y_2$$
$$\frac{Y_2}{Y_1} = 1 + g$$

得到：

$$b_{1i} = y_{1i} - \frac{y_{2i} + y_{1i}(1+r)}{(1+\beta)(1+r)}$$
$$r^* = \frac{Y_2}{\beta Y_1} - 1$$
$$1 + r^* = (1+\rho)(1+g)$$
$$r^* \approx \rho + g$$

比较静态分析：

$$\frac{\partial r^*}{\partial Y_2} = \frac{1}{\beta Y_1} > 0$$

## 考虑资本

**偏好：** $\nu(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2)$

**技术：** $y = zf(k)$，稻田条件

**禀赋：** $k_0$

## 消费者最优化行为

预算约束方程：

$$c_1 + s_1 = (1+r_1)k_1^s + \pi_1$$
$$c_2 = (1+r_2)s_1 + \pi_2$$

效用最大化：

$$\max_{c_1,c_2,s_1} \quad u(c_1)+\beta u(c_2)$$
$$\text{s.t.} \quad c_1+s_1=(1+r_1)k_1^s+\pi_1,\ c_2=(1+r_2)s_1+\pi_2$$
$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)}=\beta(1+r_2)$$

## 厂商最优化行为

$$\max_{k_1,k_2} \quad \begin{aligned} \pi_1 &= zf(k_1^d)-(1+r_1)k_1^d+(1-\delta)k_1^d \\ \pi_2 &= zf(k_2^d)-(1+r_2)k_2^d+(1-\delta)k_2^d \end{aligned}$$
$$\text{s.t.} \quad \delta=1$$
$$zf'(k_1^d)=1+r_1$$
$$zf'(k_2^d)=1+r_2$$

## 市场均衡

$$k_1^s=k_0=k_1^d$$
$$k_2^s=s_1=k_2^d$$
$$c_1+c_2=k_0+[zf(k_1^d)-k_1^d]+[zf(k_2^d)-k_2^d]$$

可得：

$$c_1+c_2=zf(k_1^d)+zf(k_2^d)-k_2^d$$

由瓦尔拉斯定理可忽略第三个市场（商品市场）出清条件

## 计划最优

$$\max_{c_1,c_2,k_2} \quad u(c_1)+\beta u(c_2)$$
$$\text{s.t.} \quad c_1=zf(k_0)-k_2,\ c_2=zf(k_2)$$
$$-u'[zf(k_0)-k_2]+z\beta u'[zf(k_2)]f'(k_2)=0$$

# 考虑资本和劳动

**偏好：** $\begin{aligned} v(c_1,c_2,l_1,l_2) &= u(c_1,l_1)+\beta u(c_2,l_2) \\ &= u(c_1)+u(l_1)+\beta u(c_2)+\beta u(l_2) \end{aligned}$

**技术：** $y=zf(k,n)$，稻田条件

**禀赋：** $k_0$，$h$

## 消费者最优化行为

$$
\begin{gathered}
\max_{c_1,c_2,l_1,l_2,s_1} \quad u(c_1)+u(l_1)+\beta u(c_2)+\beta u(l_2) \\
\text{s.t.} \quad c_1+s_1=w_1(h-l_1)+(1+r_1)k_1^s+\pi_1 \\
c_2+s_2=w_2(h-l_2)+(1+r_2)k_2^s+\pi_2 \\
k_1^s=k_0 \\
k_2^s=s_1 \\
s_2=0 \\
n_1^s+l_1=h \\
n_2^s+l_2=h
\end{gathered}
$$

得到:

$$
\begin{gathered}
\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)}=\beta(1+r_2) \\
\frac{u'(l_1)}{u'(c_1)}=w_1 \\
\frac{u'(l_2)}{u'(c_2)}=w_2
\end{gathered}
$$

## 厂商最优化行为

$$
\begin{gathered}
\pi_1=zf(k_1^d,n_1^d)-w_1n_1^d-(1+r_1)k_1^d+(1-\delta)k_1^d \\
\pi_2=zf(k_2^d,n_2^d)-w_2n_2^d-(1+r_2)k_2^d+(1-\delta)k_2^d
\end{gathered}
$$

得到:

$$
\begin{gathered}
zf_1(k_1^d,n_1^d)=1+r_1 \\
zf_2(k_1^d,n_1^d)=w_1 \\
zf_1(k_2^d,n_2^d)=1+r_2 \\
zf_2(k_2^d,n_2^d)=w_2
\end{gathered}
$$

## 市场均衡

$$
\begin{gathered}
k_1^s=k_0=k_1^d \\
k_2^s=s_1=k_2^d \\
n_1^s=h-l_1 \\
n_2^s=h-l_2 \\
c_1+c_2=zf(k_1^d,n_1^d)+zf(k_2^d,n_2^d)-k_2^d
\end{gathered}
$$

## 计划最优

$$
\begin{gathered}
\max_{c_1,l_1,c_2,l_2,k_2} \quad u(c_1)+u(l_1)+\beta u(c_2)+\beta u(l_2) \\
\text{s.t.} \quad c_1+k_2=zf[k_0,(h-l_1)], \; c_2=zf[k_2,(h-l_2)]
\end{gathered}
$$

得到:

$$\frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)} = zf_1[k_2,(h-l_2)] \quad \text{(欧拉方程)}$$
$$\frac{u'(l_1)}{u'(c_1)} = zf_2[k_0,(h-l_1)]$$
$$\frac{u'(l_2)}{u'(c_2)} = zf_2[k_2,(h-l_2)]$$

# 三期

**偏好：** $v(c_1,c_2,c_3)=u(c_1)+\beta u(c_2)+\beta^2 u(c_3)$

**技术：** $y=f(k)$，稻田条件

**禀赋：** $k_0$

# 计划最优

$$\max_{c_1,c_2,c_3,k_1,k_2} \quad u(c_1)+\beta u(c_2)+\beta^2 u(c_3)$$
$$\text{s.t.} \quad c_1+k_1=f(k_0), c_2+k_2=f(k_1), c_3+k_3=f(k_2)$$

因为活动只为三期，$k_3=0$ 一定成立

## 第三期

$$v_3(k_2)=\max_{c_3,k_3} \quad u(c_3)$$
$$\text{s.t.} \quad c_3+k_3=f(k_2)1$$

$k_2$ 在第二期已经确定

政策函数:

$$k_3=g(k_2)=0$$

得到:

$$c_3^*=f(k_2)-g(k_2)=f(k_2)$$

间接效用函数（值函数）:

$$v_3(k_2)\equiv u(c_3^*)=u(f(k_2))$$

求导:

$$\frac{\partial v_3(k_2)}{\partial k_2}=u'(f(k_2))f'(k_2)$$

### 第二期

$$
\begin{aligned}
v_2(k_1) = \max_{c_2,k_2} \quad & u(c_2) + \beta v_3(k_2) \\
\text{s.t.} \quad & c_2 + k_2 = f(k_1)
\end{aligned}
$$

$k_1$在第一期已经确定

一阶条件：

$$
u'(c_2) = \beta \frac{\partial v_3}{\partial k_2}(k_2) \Rightarrow u'(c_2) = \beta u'(c_3) f'(k_2) \Rightarrow u'(f(k_1) - k_2) = \beta u'(f(k_2)) f'(k_2)
$$

由一阶条件得政策函数：

$$
k_2 = g(k_1)
$$

间接效用函数（值函数）：

$$
v_2(k_1) = u(c_2^*) + \beta v_3(k_2^*) = u(f(k_1) - g(k_1)) + \beta v_3(g(k_1))
$$

求导：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_2(k_1)}{\partial k_1} &= u'(c_2^*)[f'(k_1) - \frac{\partial k_2^*}{\partial k_1}] + \beta \frac{\partial v_3(k_2^*)}{\partial k_2} \cdot \frac{\partial k_2^*}{\partial k_1} \\
&= u'(c_2^*) f'(k_1) + [\beta \frac{\partial v_3(k_2^*)}{\partial k_2} - u'(c_2^*)] \cdot \frac{\partial k_2^*}{\partial k_1} \\
&= u'(c_2^*) f'(k_1) \\
&= u'(f(k_1) - g(k_1)) f'(k_1)
\end{aligned}
$$

### 第一期

$$
\begin{aligned}
v_1(k_0) = \max_{c_1,k_1} \quad & u(c_1) + \beta v_2(k_1) \\
\text{s.t.} \quad & c_1 + k_1 = f(k_0)
\end{aligned}
$$

一阶条件：

$$
u'(c_1) = \beta \frac{\partial v_2}{\partial k_1}(k_1) \Rightarrow u'(c_1) = \beta u'(c_2) f'(k_1) \Rightarrow u'(f(k_0) - k_1) = \beta u'(f(k_1) - g(k_1)) f'(k_1)
$$

政策函数：

$$
k_1 = g(k_0)
$$

间接效用函数（值函数）：

$$
v_1(k_0) = u(c_1^*) + \beta v_2(k_1^*) = u(f(k_0) - g(k_0)) + \beta v_2(g(k_0))
$$

已知 $k_0$，计算出 $k_1$、$k_2$ 以及 $k_3 (k_3 = 0)$

# 无限期

**偏好：** $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$

**技术：** $y_t = F(k_t, n_t)$，稻田条件，$k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t$

**禀赋：**$k_0$

**资源约束：**$c_t + i_t \le y_t \quad n_t \le 1$

# 动态规划

## 竞争均衡

$$
\max_{\{c_t, n_t, i_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)
$$

$$
\text{s.t.} \quad
\begin{aligned}
& c_t + i_t \le F(k_t, n_t) && (1) \\
& k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t && (2) \\
& n_t \le 1 && (3) \\
& \lim_{t\to\infty} \frac{k_t}{(1+\rho)^t} = 0 && (4) \\
& 0 \le c_t, 0 \le k_t, 0 \le k_0, \text{给定}
\end{aligned}
$$

1、3：资源约束条件，取等

2：资本累积方程

4：横截性条件

## 计划最优

$$
\begin{aligned}
&\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
&\text{s.t.} \quad k_{t+1} + c_t = f(k_t)
\end{aligned}
$$

## 贝尔曼方程

$$
\begin{aligned}
v(k_t) &= \max_{c_t, k_{t+1}} \{u(c_t) + \beta v(k_{t+1})\} \\
\text{s.t.} &\quad k_{t+1} + c_t = f(k_t)
\end{aligned}
$$

预算约束条件又称转换方程/运动方程

$k_t$：状态变量

$k_{t+1}$，$c_t$：控制变量

$k_t$ 与 $k_{t+1}$ 间的关系：政策函数

$v(k_t)$：值函数（间接效用函数）

求解靠猜，解不一定唯一

# 计划经济下的最优

$$v(k_1)=\max_{c_t,k_{t+1}}[u(c_t)+\beta v(k_{t+1})]$$
$$\text{s.t.}\quad k_{t+1}+c_t=f(k_t),\lim_{t\to\infty}\frac{k_t}{(1+\rho)^t}=0$$

# 贝尔曼方程推导欧拉方程

若值函数是可微、凹的

$$v(k_t)=\max_{k_{t+1}}\{u[f(k_t)-k_{t+1}]+\beta v(k_{t+1})\}$$

一阶条件（对 $k_{t+1}$ 求导）：

$$-u'[f(k_t)-k_{t+1}]+\beta v'(k_{t+1})=0$$

对贝尔曼方程两边求关于 $k_t$ 的偏导，并应用包络定理：

$$v'(k_t)=u'[f(k_t)-k_{t+1}][F_1(k_t,1)+(1-\delta)]$$

其中：$f(k)=F(k,1)+(1-\delta)k$

将上式往后挪一期：

$$v'(k_{t+1})=u'[f(k_{t+1})-k_{t+2}][F_1(k_{t+1},1)+(1-\delta)]$$

将上式代入一阶条件：

$$-u'(c_t)+\beta u'(c_{t+1})[F_1(k_{t+1},1)+1-\delta]=0$$

# 动态模型学

约束方程：

$$k_{t+1}=f(k_t)-c_t=F(k_t,1)+(1-\delta)k_t-c_t\equiv H(k_t,c_t)$$

代入欧拉方程：

$$k_{t+1}=H(k_t,c_t)$$
$$c_{t+1}=P(k_t,c_t)$$

## c的动态学

当 $c_{t+1}=c_t$ 时：

$$F_1(k_{k+1},1)=\rho+\delta$$

所以存在唯一 $k^*$ 使上式成立

$$
\begin{aligned}
& k_{t+1} < k^* \\
\Leftrightarrow & \delta + \rho < F_1(k_{t+1}) \\
\Leftrightarrow & 1 + \rho < F_1(k_{t+1}) + 1 - \delta \\
\Leftrightarrow & 1 < \beta[F_1(k_{t+1}) + 1 - \delta] \\
\Leftrightarrow & \frac{u'(c_t)}{[F_1(k_{k+1}) + 1 - \delta]} < \beta u'(c_t) \\
\Leftrightarrow & \beta u'(c_{t+1}) < \beta u'(c_t) \\
\Leftrightarrow & c_{t+1} > c_t
\end{aligned}
$$

### k的动态学

当 $k_{t+1} = k_t$ 时:

$$
\begin{aligned}
c_t &= F(k_t, 1) - \delta k_t \\
\frac{dc}{dk} &= F_1(k, 1) - \delta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& k_{t+1} > k_t \\
\Leftrightarrow & F(k_t, 1) + (1 - \delta) k_t - c_t > k_t \\
\Leftrightarrow & c_t < F(k_t, 1) - \delta k_t
\end{aligned}
$$

## 稳定均衡解

$$
F_1(k^*, 1) = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta
$$

## 拉格朗日方法推导欧拉方程

$$
\begin{aligned}
\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} & \quad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\
\text{s.t.} & \quad c_t + k_{t+1} = f(k_t) \\
& \quad k_0 > 0, \text{给定}
\end{aligned}
$$

拉格朗日求解:

$$
\begin{aligned}
& l = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t [f(k_t) - c_t - k_{t+1}] \\
& (FOC_{c_t}) \quad \frac{\partial l}{\partial c_t} = \beta^t u'(c_t) - \lambda_t \\
& (FOC_{k_{t+1}}) \quad \frac{\partial l}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1} f'(k_{t+1}) = 0
\end{aligned}
$$

得:

$$
\begin{aligned}
f(k) &= F(k, 1) + (1 - \delta) k \\
u'(c_t) &= \beta u'(c_{t+1}) [F_1(k_{t+1}, 1) + 1 - \delta]
\end{aligned}
$$

## 分散经济下的最优

### 消费者

$$\max_{\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)$$
$$\text{s.t.} \quad c_t + k_{t+1} = w_t + (1+r_t)k_t$$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{k_{t+1}}{\prod_{t=0}^{t}(1+r_t)} = 0$$

贝尔曼方程求解：

$$v(k_1) = \max_{c_t,k_{t+1}}[u(c_t)+\beta v(k_{t+1})]$$
$$\text{s.t.} \quad c_t + k_{t+1} = w_t + (1+r_t)k_t$$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{k_{t+1}}{\prod_{t=0}^{t}(1+r_t)} = 0$$

得**欧拉方程**：

$$-u'(c_t)+\beta u'(c_{t+1})(1+r_{t+1}) = 0$$

与计划最优欧拉方程对比，若 $r_t = F_1(k_t,1)-\delta$，消费变动路径一致

### 厂商

$$\max_{k_t,n_t} \quad F(k_t,n_t)-w_t n_t-(1+r_t)k_t+(1-\delta)k_t$$

一阶条件：

$$F_1(k_t,n_t) = r_t+\delta$$
$$F_2(k_t,n_t) = w_t$$

### 竞争均衡

略

# 索洛增长模型

## 离散时间

**基本环境：**经济封闭，市场、生产唯一、时间离散

**技术：**

- $Y_t = F(K_t, A_t N_t)$
  $A_{t+1} = (1+g)A_t = (1+g)^{t+1}A_0$
- 生产函数严格准凹、二次可微、一次齐次、对每一个变量严格递增：
  $F(\lambda K,\lambda AN) = \lambda F(K,AN)$
- 密集形式的生产函数：$F(\frac{K}{AN},1) = \frac{1}{AN}F(K,AN)$
- $k = K/AN$，$y = Y/AN$，$f(k) = F(k,1) \Rightarrow y = f(k)$，$Y = ANf(k)$，满足稻田条件、
- 储蓄率？：$s = \frac{K_{t+1}-(1-\delta)K_t}{Y_t}$

**人口：** $N_{t+1}=(1+n)N_t=(1+n)^{t+1}N_0$

**禀赋：** $k_0$

## 动态学

$$
\begin{gathered}
K_{t+1}=(1-\delta)K_t+I_t \\
K_{t+1}=(1-\delta)K_t+sY_t \\
\frac{K_{t+1}}{A_tN_t}=(1-\delta)\frac{K_t}{A_tN_t}+sf(\frac{K_t}{A_tN_t},1) \\
\frac{(1+g)(1+n)K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}}=(1-\delta)\frac{K_t}{A_tN_t}+sf(\frac{K_t}{A_tN_t},1) \\
k_{t+1}=\frac{(1-\delta)k_t+sf(k_t)}{(1+g)(1+n)}\Leftrightarrow k_{t+1}=g(k_t),\ g(k)=\frac{(1-\delta)k+sf(k)}{(1+g)(1+n)}
\end{gathered}
$$

- $g(0)=0$
- 函数严格递增，$g'(k)>0$
- 严格凹函数，g''(k)<0
- 满足修正稻田条件：$\lim\limits_{k\to0}g'(k)=\infty$

  $\lim\limits_{k\to\infty}g'(k)=\frac{1-\delta}{(1+g)(1+n)}\in[0,1]$
- 平衡增长路径：人均有效资本维持在 $k^*$

### 人均有效层面

**人均有效资本：**

$$k^*=\frac{(1-\delta)k^*+sf(k)}{(1+g)(1+n)}$$

增长率为零

**人均有效消费：**

$$c^*=(1-s)f(k^*)$$

增长率为零

### 人均层面

稳定状态：平衡增长路径

定义：$\overline{k_t}=k_tA_t$，人均资本增长率 $\gamma$，技术进步速率 $g$

稳定时：$k_t\equiv\overline{k_t}/A_t=k^*$，$k_t=k_{t+i}=k^*$，$i\in[1,+\infty]$

得：

$$
\begin{gathered}
k_{t+i}=\frac{\overline{k_{t+i}}}{A_{t+i}}=\frac{(1+\gamma_{\bar{k}})^i}{(1+g)^i}\frac{\overline{k_t}}{A_t} \\
\frac{\overline{k_t}}{A_t}=k^*=k_{t+i}
\end{gathered}
$$

即：$\gamma_{\bar{k}}=g$

所有人均层面得变量以外生给定得技术进步速率 $g$ 增长

### 总量分析

稳定状态：平衡增长路径

定义：$k_t=K_t/A_tN_t$，人均资本增长率 $\gamma$，技术进步速率 $g$

稳定时：$k_t\equiv K_t/A_tN_t=k^*$，$k_t=k_{t+i}=k^*$，$i\in[1,+\infty]$

得：

$$
\begin{gathered}
k_{t+i}=\frac{K_{t+i}}{A_{t+i}N_{t+i}}=\frac{(1+\gamma_{\bar{k}})^i}{(1+g)^i(1+n)^i}\frac{K_t}{A_tN_t} \\
\frac{k_t}{A_tN_t}=k^*=k_{t+i}
\end{gathered}
$$

即：$\gamma_K=n+g+ng$，$ng$ 很小可以忽视

总量层面的变量以 $n+g$ 增长

## 连续时间

**基本环境：** $\dot{A}(t)=gA(t)$，$\dot{N}(t)=nN(t)$，意味着 $A(t)=A(0)e^{gt}$，$N(t)=N(0)e^{nt}$

## 动态学

资本累积方程：

$$
\dot{K}(t)=sY(t)-\delta K(t)
$$

由链式法则：

$$
\begin{aligned}
\dot{k}(t)&=\frac{\dot{K}(t)}{A(t)N(t)}-\frac{K(t)}{A(t)N(t)}\frac{\dot{N}(t)}{N(t)}-\frac{K(t)}{A(t)N(t)}\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \\
&=s\frac{Y(t)}{A(t)N(t)}-\delta k(t)-nk(t)-gk(t) \\
&=sf(k)-(n+g+\delta)k(t)
\end{aligned}
$$

$f(k)$：为每单位劳动力的平均产量

$sf(k)$：每单位有效劳动的平均实际投资

$(n+g+\delta)k(t)$：使 $k$ 维持在其现有水平上所必需的投资量，即持平投资

# 比较静态分析

## 对产出

只有技术进步的变化有增长效应，其他所有外生变量的变化只有水平效应无增长效应（改变经济的平衡增长路径，不改变处于平衡增长路径时人均产量的增长率）

## 对消费

$$
\begin{gathered}
c^* = f(k^*) - sf(k^*) \\
sf(k^*) = (n+g+\delta)k^* \\
\frac{\partial c^*}{\partial s} = [f'(k^*(s,n,g,\delta)) - (n+g+\delta)]\frac{\partial k^*(s,n,g,\delta)}{\partial s} \\
\frac{\partial k^*(s,n,g,\delta)}{\partial s} > 0
\end{gathered}
$$

黄金资本存量（行为人将资本收入全部储蓄起来仅消费劳动收入）：

$$
\begin{gathered}
f'(k^*(s,n,g,\delta)) = n+g+\delta \\
s_g = \frac{(n+g+\delta)k_g^*}{f(k_g^*)} \\
s_g = \frac{f'(k_g^*)k_g^*}{f(k_g^*)}
\end{gathered}
$$

# 对产出影响的定量分析

产出的储蓄率弹性：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y^*}{\partial s} &= f'(k^*)\frac{\partial k^*(s,n,g,\delta)}{\partial s} \\
sf'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial s} + f(k^*) &= (n+g+\delta)\frac{\partial k^*}{\partial s} \\
\frac{\partial y^*}{\partial s} &= \frac{f'(k^*)f(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)} \\
\frac{\partial y^*}{\partial s}\frac{s}{y^*} &= \frac{s}{f(k^*)}\frac{f'(k^*)f(k^*)}{[(n+g+\delta) - sf'(k^*)]} \\
&= \frac{k^*f'(k^*)/f(k^*)}{1 - k^*f'(k^*)/f(k^*)} \\
&= \frac{\alpha_k(k^*)}{1-\alpha_k(k^*)}
\end{aligned}
$$

平衡增长路径上资本收入占总收入份额（资本产出弹性/资本收入份额）：$\alpha_k(k^*)$

大多数国家资本收入所占份额大约为1/3，产出的储蓄率弹性约为1/2

储蓄率的显著变化对于平衡增长路径上的产量水平只有较小的影响

## 对产出影响的速度分析

一阶泰勒级数近似（对动态学中方程求导）

$$\dot{k} \cong (\frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k}|_{k=k^*})(k-k^*)$$
$$\dot{k} = sf(k) - (n+g+\delta)k(t)$$

对 $k$ 求导：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k}|_{k=k^*} &= sf'(k^*) - (n+g+\delta) \\ &= \frac{(n+g+\delta)k^* f'(k^*)}{f(k^*)} - (n+g+\delta) \\ &= [\alpha_k(k^*) - 1](n+g+\delta)\end{aligned}$$

得：

$$\dot{k} \cong -[1-\alpha_k(k^*)](n+g+\delta)[k(t)-k^*]$$
$$k(t)\dot{-}k^* \cong -[1-\alpha_k(k^*)](n+g+\delta)[k(t)-k^*]$$

取：$x(t) = k(t) - k^*$，$\lambda = (1-\alpha_k)(n+g+\delta)$，即 $\dot{x}(t) \cong -\lambda x(t)$

$-\lambda$ 为 $x$ 的增长率且为常数，$x$ 的路径为 $x(t) \cong x(0)e^{-\lambda t}$

得：$k(t) - k^* \cong e^{-(1-\alpha_k)(n+g+\delta)t}(k(0)-k^*)$

规模报酬不变 $k$ 增加多少，人均有效产出 $y$ 也增加多少，即 $y(t) - y^* \cong e^{-\lambda t}(y(0)-y^*)$

$k$、$y$ 每年向 $k^*$ 、$y^*$ 移动剩余距离的 $\lambda \times 100\%$

# 经验应用

## 趋同性

$k$ 的增长率：

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{sf(k(t))}{k(t)} - (n+g+\delta)$$

其中：

$$\frac{\partial}{\partial k}\frac{sf(k)}{k} = \frac{s[kf'(k) - f(k)]}{k^2}$$

$kf'(k)$ 为人均有效资本 $k$ 的收入，$f(k)$ 代表人均有效资本 $k$ 的总收入，所以 $kf'(k) < f(k)$ （可同时除以 $k$ 考虑边际产出递减来得出）

## 增长因素分解

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \alpha_K(t)\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} + \alpha_N(t)\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} + R(t)$$

索洛剩余（全要素生产率）：$R(t) = \frac{A(t)}{Y(t)}\frac{\partial Y(t)}{\partial A(t)}\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}$

每个工人平均产量增长率：$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}=\alpha_K(t)[\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}-\frac{\dot{N}(t)}{N(t)}]+R(t)$

$$\gamma_Y=\alpha_K\gamma_K+\alpha_N\gamma_N+\alpha_A\gamma_A$$

# 环境与经济增长问题

## 自然资源和土地

$$Y(t)=K(t)^\alpha R(t)^\beta T(t)^\gamma[A(t)N(t)]^{1-\alpha-\beta-\gamma}$$

取对数求导：

$$\begin{aligned}g_Y(t)&=\alpha g_K(t)+\beta g_R(t)+\gamma g_T(t)+(1-\alpha-\beta-\gamma)[g_A(t)+g_N(t)]\\&=\alpha g_K(t)-\beta b+(1-\alpha-\beta-\gamma)[g_A(t)+g_N(t)]\end{aligned}$$

稳定增长路径：$g_Y=g_K$，用 $\dot{K}=SY-\delta K$ 证明

人均产出增长率：$g_{Y/N}=g_Y-g_N$

# 新古典增长模型

## 离散时间

**偏好：** $\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)$

**技术：** $Y_t=F(K_t,N_t)$，严格准凹、二次可微、一次齐次、对每一个变量都是严格递增的函数，即 $y_t=f(k_t)$

**人口：** $N_{t+1}=(1+n)N_t=(1+n)^{t+1}N_0$

**禀赋：** $K_0$

**资源约束：** $N_tc_t+K_{t+1}=(1-\delta)K_t+Y_t$

**储蓄率：** $s=\frac{K_{t+1}-(1-\delta)K_t}{Y_t}$

**分散经济下比例税结果与社会计划结果不同**

### 计划经济

$$\begin{gathered}v(k_t)=\max_{c_t,k_{t+1}}[u(c_t)+\beta v(k_{t+1})]\\\text{s.t.}\quad c_t+(1+n)k_{t+1}=(1-\delta)k_t+f(k_t)\\\lim_{t\to\infty}\frac{(1+n)^tk_t}{(1+\rho)^t}=0\end{gathered}$$

求解思路：

- 对第一式右边求关于 $k_{t+1}$ 的偏导（最大化问题求导）
- 对第一式两边边求关于 $k_t$ 的偏导，再后挪一期（ $v$ 函数最大化）
- 将 $v'(k+1)$ 代入第一步的式子中可得欧拉方程

$$-(1+n)u'(c_t)+\beta u'(c_{t+1})[f'(k_{t+1})+(1-\delta)]=0$$

平衡增长路径：

定义：$c_t = c_{t+1} = c^*$，$k_t = k_{t+1} = k^*$，$c^*$ 、$k^*$ 为常数

$$f'(k^*) = \frac{(1+n)}{\beta} - (1-\delta)$$

近似处理：

$$f'(k^*) = \rho + n + \delta$$

## 分散经济

### 消费者的最优化行为

**预算约束：** $N_t c_t + K_{t+1} = w_t N_t + (1+r_t)K_t$

$$\begin{aligned} v(k_t) &= \max_{c_t, k_{t+1}} [u(c_t) + \beta v(k_{t+1})] \\ \text{s.t.} \quad c_t + (1+n)k_{t+1} &= w_t + (1+r_t)k_t \\ \lim_{t\to\infty} \frac{(1+n)^{t+1}k_{t+1}}{\prod_{t=0}^{t}(1+r_t)} &= 0 \end{aligned}$$

**欧拉方程：**

$$-(1+n)u'(c_t) + \beta u'(c_{t+1})(1+r_{t+1}) = 0$$

### 厂商的最优化行为

**利润函数：**

$$\pi = F(K_t, N_t) - w_t N_t - r_t K_t - \delta K_t$$

**一阶条件：**

$$\begin{aligned} r_t &= f'(k_t) - \delta \\ w_t &= f(k_t) - k_t f'(k_t) \end{aligned}$$

# 连续时间

风险回避型效用函数（CRRA）：

$$u(c(t)) = \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \ \theta > 0$$

$$u = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt$$

相对风险回避系数 $-cu''(c)/u'(c)$ 为 $\theta$

$\rho > 0$ 表示消费者的时间偏好率或主观贴现率

# 分散经济

## 消费者的最优化行为

**预算约束条件：**$\dot{K}(t)=w(t)N(t)+r(t)K(t)-C(t)$

**预算约束条件人均化处理：**$\dot{k}(t)=w(t)+r(t)k(t)-c(t)-nk(t)$

**现值形式的预算约束条件：**定义 $R(t)=\int_{\tau=0}^{t}r(\tau)d\tau$： 在0时刻投资1单位在 $t$ 时刻将产生 $e^{R(t)}$ 单位的产品；若 $r(t)$ 为固定的 $\bar{r}$，则 $R(t)=\bar{r}t$

$$\int_{t=0}^{\infty}e^{-R(t)}N(t)c(t)dt\leq K(0)+\int_{t=0}^{\infty}e^{-R(t)}N(t)w(t)dt$$
$$K(0)+\int_{t=0}^{\infty}e^{-R(t)}N(t)[w(t)-c(t)]dt\geq 0$$
$$\lim_{s\to\infty}\{K(0)+\int_{t=0}^{s}e^{-R(t)}N(t)[w(t)-c(t)]dt\}\geq 0$$

$s$ 时期消费者资本持有量：

$$K(s)=e^{R(s)}K(0)+\int_{t=0}^{s}e^{R(s)-R(t)}N(t)[w(t)-c(t)]dt\geq 0$$

现值形式的预算约束：

$$\lim_{s\to\infty}e^{-R(s)}K(s)\geq 0$$

由于 $K(s)=N(0)e^{ns}k(s)$：

$$\lim_{s\to\infty}e^{-R(s)}e^{ns}k(s)\geq 0$$

**最优化问题：**

$$\max\int_{t=0}^{\infty}e^{-\rho t}\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt$$
$$\text{s.t.}\quad \dot{k}(t)=w(t)+r(t)k(t)-c(t)-nk(t)$$

汉密尔顿方程：

$$H(t)=e^{-\rho t}\frac{c(t)^{1-\theta}-1}{1-\theta}+\lambda(t)[w(t)+r(t)k(t)-c(t)-nk(t)]$$

$\lambda$：协态变量，资本影子价格的现值

$\lambda(t)$：表示从0时刻来看，在t时刻增加一单位的资本存量所能带来的效用的增加量

一阶条件：

$$\frac{\partial H(t)}{\partial c(t)}=0$$
$$\frac{d\lambda(t)}{d(t)}=-\frac{\partial H(t)}{\partial k(t)}$$

横截条件：

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)k(t)=0$$

由一阶条件：

$$e^{-\rho t}c(t)^{-\theta}=\lambda(t)$$
$$\dot{\lambda}(t)=-[r(t)-n]\lambda(t)$$

由上述两式得欧拉方程：

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{r(t)-\rho-n}{\theta}$$

当经济稳定时，$\dot{c}(t)=0$，得更为一般的横截条件：

$$\lim_{t\to\infty}e^{-(r(t)-n)t}k(t)=0$$

对比前文 $\lim\limits_{s\to\infty}e^{-R(s)}e^{ns}k(s)\geq 0$

### 厂商最优化行为

**利润函数：**

$$\pi=F(K(t),N(t))-w(t)N(t)-r(t)K(t)-\delta K(t)$$

**一阶条件：**

$$r(t)=f'(k(t))-\delta$$
$$w(t)=f(k(t))-k(t)f'(k(t))$$

## 经济的动态学

### c的动态学

$$r(t)=f'(k(t))-\delta$$
$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{r(t)-\rho-n}{\theta}$$

得：

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{f'(k(t))-\rho-n-\delta}{\theta}$$

当 $k=k^*$ 时，$\dot{c}=0$

当 $k>k^*$ 时，$\dot{c}<0$

当 $k<k^*$ 时，$\dot{c}>0$

### k的动态学

$$
\begin{gathered}
w(t)=f(k(t))-k(t)f'(k(t)) \\
\dot{k}(t)=w(t)+r(t)k(t)-c(t)-nk(t) \\
r(t)=f'(k(t))-\delta
\end{gathered}
$$

得:

$$
\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+\delta)k(t)
$$

当 $c=c^*=f(k)-(n+\delta)k$，$\dot{k}=0$，$c$ 随 $k$ 递增，直到 $f'(k)=n+\delta$ （黄金律资本存量水平），然后随 $k$ 递减

当 $c>c^*$，$\dot{k}<0$

当 $c<c^*$，$\dot{k}>0$

### c与k结合

$$
\begin{gathered}
f'(k^*)=n+\rho+\delta \\
f'(k_{GR})=n+\delta
\end{gathered}
$$

得:

$$
k^*<k_{GR}
$$

### c的初始值

横截条件式限定c初始值不低于未来路径向稳定点收敛的初始值，该点以上 $k$ 最终为负，不可能。

### 鞍点路径

对于任意的 $k$ 的初始值都有唯一的 $c$ 的初始值

上述情况下，不同k下的点组成的路径，收敛于稳定值

### 转型动态中的储蓄率

稳定时：$s^*=1-c^*/f(k^*)$

柯布道格拉斯生产函数下：$s^*=\frac{\alpha(n+\delta)}{\rho+n+\delta}$

$s^*=1/\theta \Rightarrow s(t)=1/\theta$ 为固定的常数

$s^*>1/\theta \Rightarrow s(t)>1/\theta, \dot{s}(t)>0$

$s^*<1/\theta \Rightarrow s(t)<1/\theta, \dot{s}(t)<0$

# 福利

修正的黄金律资本存量：$k^*$

### 贴现率下降

$$
\begin{gathered}
\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{f'(k(t))-\rho-n-\delta}{\theta} \\
\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t)-(n+\delta)k(t)
\end{gathered}
$$

$c$ 跳跃，$k$ 不能跳跃

### 鞍点路径的斜率

$$
\begin{gathered}
\dot{c} \cong \frac{\partial \dot{c}}{\partial k}(k-k^*)+\frac{\partial \dot{c}}{\partial c}(c-c^*) \\
\dot{k} \cong \frac{\partial \dot{k}}{\partial k}(k-k^*)+\frac{\partial \dot{k}}{\partial c}(c-c^*)
\end{gathered}
$$

由 $\dot{c}=c \dot{-} c^*$、$\dot{k}=k \dot{-} k^*$：

$$
\begin{gathered}
c \dot{-} c^* \cong \frac{\partial \dot{c}}{\partial k}(k-k^*)+\frac{\partial \dot{c}}{\partial c}(c-c^*) \\
k \dot{-} k^* \cong \frac{\partial \dot{k}}{\partial k}(k-k^*)+\frac{\partial \dot{k}}{\partial c}(c-c^*)
\end{gathered}
$$

进一步计算得：

$$
\begin{gathered}
\frac{c \dot{-} c^*}{c-c^*} \cong \frac{f''(k^*)c^*}{\theta} \cdot \frac{k-k^*}{c-c^*} \\
\frac{k \dot{-} k^*}{k-k^*} \cong \rho-\frac{c-c^*}{k-k^*}
\end{gathered}
$$

取 $\mu=(c \dot{-} c^*)/(c-c^*)$，结合上式得：

$$
\mu=\frac{\rho \pm [\rho^2-4f''(k^*)c^*/\theta]^{1/2}}{2}
$$

# 财政政策

## 总额税

政府预算约束：

$$
\tau_t=g
$$

### 计划经济

$$
\begin{gathered}
v(k_t)=\max_{c_t,k_{t+1}}[u(c_t)+\beta v(k_{t+1})] \\
\text{s.t.} \quad c_t+(1+n)k_{t+1}+\tau_t=(1-\delta)k_t+f(k_t) \\
\lim_{t \to \infty}\frac{(1+n)^t k_t}{(1+\rho)^t}=0
\end{gathered}
$$

欧拉方程：

$$-(1+n)u'(c_t)+\beta u'(c_{t+1})[f'(k_{t+1})+(1-\delta)]=0$$

稳定状态下：

$$\begin{aligned} f'(k^*) &= \frac{1+n}{\beta}-(1-\delta) \\ c^* &= f(k^*)-(n+\delta)k^*-g \end{aligned}$$

政府支出1:1挤出个人消费，不影响资本累积

## 比例税

实际上消费者支付的税与其收入无关，政府支出固定为 $g$

政府平衡预算约束：

$$w_t = \frac{g}{(1-\delta)k_t+f(k_t)}$$

假设消费者并不知道这一点，者分散经济下的竞争均衡与社会计划最优结果不同

### 分散经济

$$\begin{aligned} v(k_t) &= \max_{c_t,k_{t+1}}[u(c_t)+\beta v(k_{t+1})] \\ \text{s.t.} \quad c_t+(1+n)k_{t+1} &= (1-w_t)[w_t+(1+r_t)k_t] \\ \lim_{t\to\infty}\frac{(1+n)^t k_t}{\prod_{t=0}^{t}(1+r_t)} &= 0 \end{aligned}$$

欧拉方程：

$$-(1+n)u'(c_t)+\beta u'(c_{t+1})(1-w_{t+1})(1+r_{t+1})=0$$

厂商最优化行为一阶条件：

$$\begin{aligned} r_t &= f'(k_t)-\delta \\ w_t &= f(k_t)-k_t f'(k_t) \end{aligned}$$

稳定状态：

$$\begin{aligned} f'(k^*) &= \frac{(1+n)}{\beta(1-w^*)}-(1-\delta) \\ w^* &= \frac{g}{(1-\delta)k^*+f(k^*)} \end{aligned}$$

# 代际交叠模型

**偏好：** $u(c_{1t},c_{2t+1})=u(c_{1t})+\beta u(c_{2t+1})$

**技术：** $Y_t = F(K_t, N_t)$

**人口：** 外生速率$\gamma_N = n$，$N_{t+1} = (1+n)N_t = (1+n)^{t+1}N_0$

**禀赋：** $t = 0$ 时，$N_0$ 个新出生的人口（初始人口），也有$N_0/(1+n)$ 个老年消费者活着（仅活一期），不参与经济活动但有 $K_0$ 单位的资本

**分散经济非帕累托最优**

# 分散经济

## 年轻消费者的最优化行为

风险回避型效用函数：

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \theta > 0$$

最优化：

$$\begin{aligned} \max_{c_{1t}, c_{2t+1}, s_t} \quad & \frac{c_{1t}^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta \frac{c_{2t+1}^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \\ \text{s.t.} \quad & c_{1t} + s_t = w_t \\ & c_{2t+1} = s_t(1 + r_{t+1}) \end{aligned}$$

一阶条件/欧拉方程：

$$\begin{aligned} \beta c_{2t+1}^{-\theta} &= \frac{1}{1+r_{t+1}} c_{1t}^{-\theta} \\ \frac{c_{2t+1}}{c_{1t}} &= [\frac{1+r_{t+1}}{1+\rho}]^{1/\theta} \end{aligned}$$

预算约束条件：

$$c_{1t} + \frac{1}{1+r_{t+1}} c_{2t+1} = w_t$$

得：

$$\begin{aligned} c_{1t} &= \frac{(1+\rho)^{1/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta} + (1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}} w_t \\ s_t = s(w_t, r_{t+1}) &= \frac{(1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta} + (1+r_{t+1})^{(1-\theta)/\theta}} w_t \end{aligned}$$

## 厂商得最优化行为

$$\max_{K_t,N_t}[F(K_t,N_t)-w_tN_t-(1+r_t)K_t+(1-\delta)K_t]$$

假设 $\delta=1$，一阶条件：

$$F_1(K_t,N_t)-(1+r_t)=0$$
$$F_2(K_t,N_t)-w_t=0$$

若生成函数是一次齐次：

$$f'(k_t)-(1+r_t)=0$$
$$f(k_t)-k_tf'(k_t)-w_t=0$$

## 竞争均衡

$$K_{t+1}=N_ts(w_t,r_{t+1})$$
$$(1+n)k_{t+1}=s(w_t,r_{t+1})$$

得：

$$k_{t+1}=\frac{(f'(k_{t+1}))^{(1-\theta)/\theta}}{(1+\rho)^{1/\theta}+(f'(k_{t+1}))^{(1-\theta)/\theta}}\cdot\frac{[f(k_t)-k_tf'(k_t)]}{(1+n)}$$

稳定时：$k_{t+1}=k_t=k^*$

# 动态学

取 $f(k)=k^\alpha,f'(k)=\alpha k^{\alpha-1},\theta=1$，得（ $\theta=1$ 时效用函数退化为对数型）：

$$k_{t+1}=\frac{(1-\alpha)k_t^\alpha}{(1+n)(2+\rho)}\equiv Dk_t^\alpha$$

由于 $\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=Df'(k_t)$，当 $k_t$ 趋于0时，斜率趋于无穷大。

当经济实现稳定均衡时，即 $k_{t+1}=k_t=k^*$ 时：

$$k^*=[\frac{1-\alpha}{(1+n)(2+\rho)}]^{1/(1-\alpha)}$$

## 贴现率下降

## 收敛速度

$$k_{t+1} \cong Dk^{*\alpha} + \frac{dk_{t+1}}{dk_t}|_{k_t=k^*}(k_t - k^*)$$
$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}|_{k_t=k^*} = D\alpha k^{*(\alpha-1)}$$

由于 $k_{t+1} = k_t$，$D = k^{*(1-\alpha)}$，得：

$$k_{t+1} \cong k^* + \alpha(k_t - k^*)$$
$$k_t - k^* = \alpha(k_{t-1} - k^*)$$
$$k_t - k^* = \alpha^t(k_0 - k^*)$$

# 计划经济下的最优

$t$ 时期，社会计划者面临的资源约束条件：

$$c_{1t}N_t + c_{2t}N_{t-1} + K_{t+1} = F(K_t, N_t) + (1-\delta)K_t$$
$$(1+n)k_{t+1} + c_{1t} + \frac{c_{2t}}{1+n} = f(k_t) + (1-\delta)k_t$$

稳定状态下，$k_1 = k^*$，$c_{1t} = c_1^*$，$c_{2t} = c_2^*$

最优化：

$$\max\{u(c_1) + \beta u(c_2)\}$$
$$\text{s.t.} \quad c_1 + \frac{c_2}{1+n} = f(k) - (\delta+n)k$$
$$\max_{c_1,k}\{u(c_1) + \beta u[(1+n)(f(k) - (\delta+n)k - c_1)]\}$$

一阶条件：

$$u'(c_1) - \beta(1+n)u'(c_2) = 0$$
$$f'(k) = \delta + n$$

稳定状态下的竞争均衡一般不是社会最优，经济遭遇了动态无效。

# 动态无效

世代的无限性使得计划者拥有一条满足老年人消费的途径，这条途径无法通过市场的方式获得。计划经济中，计划者无需使老年人的消费取决于期资本存量以及资本的报酬率，而是可以以任何形式将用来消费的资源在年轻人和老年人之间进行分配。若不希望有人因这一变化而境况变坏，计划者可以要求下一代（年轻人）做相同的事情，并每期继续同一过程，以提高整个社会的福利。

此时，市场经济下的资源配置不是帕累托最优。

# 代际交叠模型中的政府

## 以税收融资的政府购买

$k_{t+1}$ 函数下移，$k^*$ 降低

## 以税收与债券融资的政府购买

$B_{t+1}$：政府在 $t$ 期发行的期限为一期、利率为 $r_{t+1}$ 的债券的数量

$$B_{t+1} = bN_t$$
$$T_t = \tau_t N_t$$

政府的预算约束：

$$(1+r_t)B_t + G_t = B_{t+1} + T_t$$
$$\frac{r_t - n}{1+n} b + g_t = \tau_t$$

通过最优化求解，使稳定状态下的竞争均衡解与社会计划者的最优解相同：

$$k^*(\hat{b}) = \hat{k}$$
$$f'(\hat{k}) = 1+n$$

# 社会养老保险问题

## 基本决策环境

人数：$\frac{N_t}{N_{t-1}} = 1+n$

$t$ 期出生的年轻人在老年时的收益：$b_{t+1} = (1+n)d_{t+1}$

## 基金制

约束条件：

$$c_{1t} + s_t^f = w_t - d_t$$
$$c_{2t} = (1+r_{t+1})s_t^f + b_{t+1}$$
$$b_{t+1} = (1+r_{t+1})d_t$$

基金制有无，不会改变行为人的决策

## 现收现付制度

约束条件：

$$c_{1t} + s_t^p = w_t - d_t$$
$$c_{2t} = (1+r_{t+1})s_t^p + b_{t+1}$$
$$b_{t+1} = (1+n)d_{t+1}$$

社会保险贡献会使私人储蓄减少（挤出效应）：$\frac{\partial s_t^P}{\partial d_t} < 0$

社会保险贡献会使资本运动轨迹向下移动（全微分）：$\frac{dk_{t+1}}{dd_t} < 0$

# 人口老龄化

定义：$n$ 减小