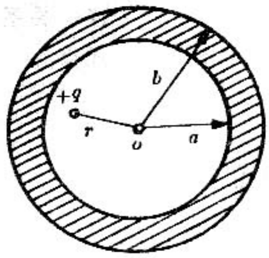
10.1　有一内外半径分别为 a 和 b 的球形金属空腔，带电量为 $+Q$，空腔内与球心 o 相距 r 处有一点电荷 $+q$（如图所示）。求球心 o 处的电势。



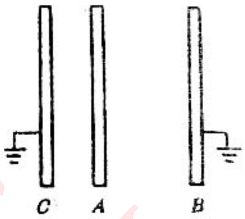
题 10.1 图

解　由于静电感应，球壳内表面带电为 $-q$，外表面带电为 $Q+q$，根据电势叠加原理

$$U_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

10.3　如图所示，三块平行平板 A、B 和 C，面积均为 200cm^2，A、B 间相距 4mm，A、C 间相距 2mm。若使 A 板带电 3×10^{-7}C，B、C 板均接地（边缘效应忽略不计），求：(1)B 和 C 板上感应电荷各为多少？(2)A 板电势为多少？



题 10.3 图

解　设 A、B、C 三板上电荷面密度分别为 σ_A、σ_B、σ_C，由高斯定理可知，$\sigma_A=\sigma_B+\sigma_C$，三板上电荷亦为，$Q_A=Q_B+Q_C$。

(1)因为 $U_{AB}=U_{AC}$，所以

$$\frac{\sigma_B}{\varepsilon_0}\cdot d_{AB}=\frac{\sigma_C}{\varepsilon_0}\cdot d_{AC}$$

得到

$$\sigma_B=\frac{1}{2}\sigma_C$$

故有

$$\sigma_B=\frac{1}{3}\sigma_A$$

$$\sigma_C=\frac{2}{3}\sigma_A$$

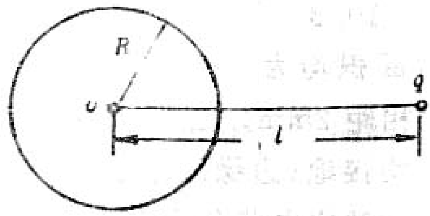
代入数据

$$Q_B=\frac{1}{3}Q_A=\frac{1}{3}\times3.0\times10^{-7}$$
$$=1.0\times10^{-7}\text{C}$$
$$Q_C=\frac{2}{3}Q_A=\frac{2}{3}\times3.0\times10^{-7}$$
$$=2.0\times10^{-7}\text{C}$$

(2)A 板电势

$$U_A=\frac{\sigma_C}{\varepsilon_0}d_{AC}=\frac{Q_C}{\varepsilon_0 S}d_{AC}$$
$$=\frac{2.0\times10^{-7}\times2\times10^{-3}}{8.85\times10^{-12}\times200\times10^{-4}}$$
$$=2.26\times10^{3}\text{V}$$

10.4 在半径为 R 的中性金属球壳外有一点电荷 q，与球心 o 相距 l，如图所示。设它们离地和其他物体都很远，试问：(1) 球内各点电势多大？(2) 若把金属球壳接地，则球上的感应电荷 q' 有多大？



题 10.4

解 (1) 金属球壳是个等势体，由电势叠加原理

$$U_o = U_q + U_{感}$$

$$U_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

$$U_{感} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int dq' = 0$$

故

$$U_o = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}$$

(2) 球壳接地后，$U'_0 = 0$

同时

$$U'_o = U_q + U_{感}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int dq'$$

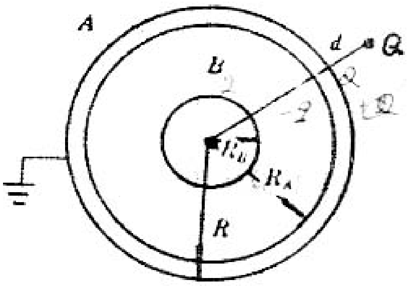
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$= 0$$

所以

$$q' = -\frac{R}{l}q$$

10.5 一接地导体球壳 A，其内、外半径分别为 R_A 和 R，内有一半径为 R_B 的同心导体球 B，带电量为 q，已知 $R_A = 2R_B$，$R = 3R_B$。今在距



题 10.5 图

球心 o 为 $d=4R_B$ 处，放一电量为 Q 的点电荷，设球壳离地很远，并与地相连。试问：(1)球壳 A 带的总电量是多少？(2)若用导线将 A 与 B 相连，球壳 A 的带电量又是多少？

解 (1)由于静电感应，球壳 A 内表面带电为 $-q$。设外表面带电为 Q'，对球心 o，电势为

$$U_O=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_B}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_O R_A}+\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

又根据电势定义

$$U_O=\int_{R_B}^{R_A}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_B}-\frac{1}{R_A}\right)$$

则有

$$\frac{Q'}{R}+\frac{Q}{d}=0$$

$$Q'=-\frac{R}{d}Q=-\frac{3}{4}Q$$

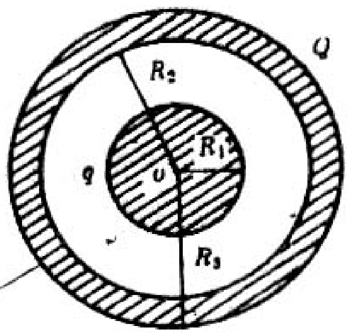
因此球壳 A 带的总电量为

$$Q_1=-q+Q'=-q-\frac{3}{4}Q$$

(2)球壳 B 上 $+q$ 与球壳 A 内表面 $-q$ 中和，所以

$$Q_2=-\frac{3}{4}Q$$

10.6 半径为 R_1 的导体球带有电荷 q，球外有一个内、外半径为 R_2、R_3 的同心导体球壳，壳上带有电荷 Q(见题图)。(1)求两球的电势 U_1 和 U_2；(2)若用导线将导体球和球壳相连，则 U_1 和 U_2 是多少？(3)设外球离地面很远，在情形(1)中若内球接地，U_1 和 U_2 又是多少？



题 10.6 图

解 (1)由于静电感应，外球壳内表面带电为 $-q$，外表面带电为 $Q+q$，根据电势

叠加原理

$$U_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$U_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$=\frac{Q+R}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

(2)导体球与球壳相连，因此

$$U_1=U_2=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

(3)内球接地，$U_1=0$。设内球带电为 q'，则外球壳内表面为 $-q'$，外表面为 $Q+q'$，因此有

$$U_1=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=0$$

解得

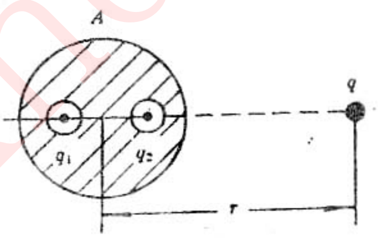
$$q'=-\frac{R_1R_2Q}{R_1R_2+R_3(R_2-R_1)}$$

故

$$U_2=-\int_{R_1}^{R_2}\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=-\frac{q'(R_2-R_1)}{4\pi\varepsilon_0 R_1R_2}$$

$$=\frac{(R_2-R_1)Q}{4\pi\varepsilon_0[R_1R_2+R_3(R_2-R_1)]}$$

10.8 如图所示，在半径为 R 的金属球 A 内有两个球形空腔，此金属球整体上不带电。在两空腔中心各放置一点电荷 q_1 和 q_2。此外，在金属球 A 外很远处放置一点电荷 $q(r>>R)$。问作用在 q_1、q_2、q 上的静电力各为多少？



题 10.8 图

解 由于静电感应，两空腔内表面将分别带电 $-q_1$ 和 $-q_2$，金属球 A 外表面带电量为 q_1+q_2，同时由于金属球内部(空腔除外)场强处处为零，

所以 $F_{q_1}=F_{q_2}=0$

因为 $r\gg R$

$$F_A=F_q=\frac{q(q_1+q_2)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

10.9 两块面积均为 S 且靠得很近的平行导体平板 A 和 B，分别带电 Q_A 和 Q_B(如图)。求两块板的四个导体表面的电荷密度 σ_1、σ_2、σ_3 和 σ_4。忽略边缘效应。

解 因为电荷守恒，所以有

$$\sigma_1S+\sigma_2S=Q_A \tag{①}$$

$$\sigma_3 S+\sigma_4 S=Q_B \qquad ②$$

设场强向右为正，导体板 A 内部场强为

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0 \qquad ③$$

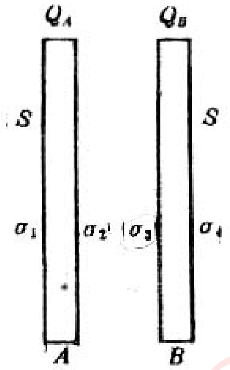
同理，B 板内场强也为零

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0 \qquad ④$$

联立①、②、③、④解得

$$\sigma_1=\sigma_4=\frac{Q_A+Q_B}{2S}$$

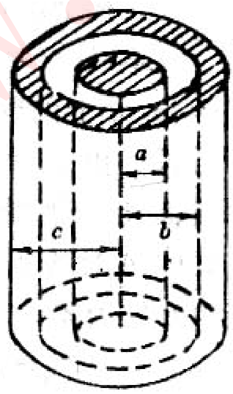
$$\sigma_2=-\sigma_3=\frac{Q_A-Q_B}{2S}$$



题 10.9 图

说明平行导体平板带电规律是相对两面等值异号，相背两面等值同号。

10.10　一均匀带电的无限长圆柱导体，其电荷面密度为 σ，半径为 a，导体外有内半径为 b、外半径为 c 的同轴导体圆筒，如图所示。求：(1)空间场强 E 的分布；(2)当外圆柱体接地时，内圆柱体的电势。



题 10.10 图

解　(1)由高斯定理得到场强分布为

$r>a,\quad E=0$

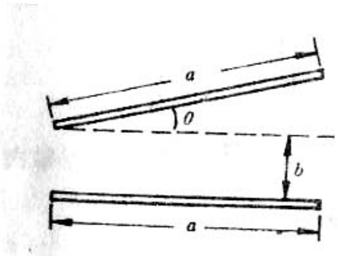
$$a<r<b,\quad E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{2\pi a\times 1\times\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{a\sigma}{\varepsilon_0 r}$$

$b<r<c,\quad E=0$

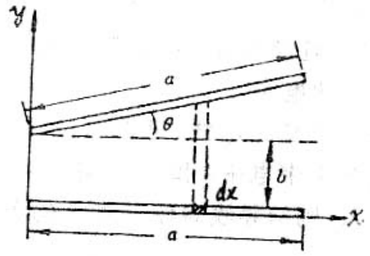
$$r>c,\quad E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{a\sigma}{\varepsilon_0 r}$$

(2)当外圆柱接地时，$U_{外}=0$，所以

$$U_{内}=U_{ab}=\int_a^b\frac{a\sigma}{\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$



题 10.12 图



解 10.12 图

10.12　如图所示，一电容器的两极板都是边长为 a 的正方形金属平板，两板不是严格平行，而有一夹角 θ。证明：当 θ 很小时，忽略边缘效应，它的电容为 $C=\frac{\varepsilon_0 a^2}{b}(1-\frac{a\theta}{2b})$。

证明　建立如图坐标系，该电容器可近似认为是由许多板面积 $dS=a dx$，板间距 $y=b+x\mathrm{tg}\theta$ 的小平行板电容器并联而成，则

$$dC=\frac{\varepsilon_0 dS}{y}=\frac{\varepsilon_0 a dx}{b+x\mathrm{tg}\theta}$$

$$C=\int_0^a \frac{\varepsilon_0 a dx}{b+x\mathrm{tg}\theta}=\frac{\varepsilon_0 a}{\mathrm{tg}\theta}\ln(1+\frac{a\mathrm{tg}\theta}{b})$$

当 θ 很小时，$\mathrm{tg}\theta\to 0$，$\frac{a\mathrm{tg}\theta}{b}\to\frac{a\theta}{b}\ll 1$，故有

$$\ln(1+\frac{a\mathrm{tg}\theta}{b})\approx\ln(1+\frac{a\theta}{b})$$

$$\approx\frac{a\theta}{b}-\frac{1}{2}\frac{a^2\theta^2}{b^2}$$

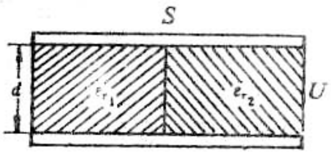
所以

$$C=\frac{\varepsilon_0 a}{\mathrm{tg}\theta}\ln(1+\frac{a\mathrm{tg}\theta}{b})$$

$$=\frac{\varepsilon_0 a}{\theta}(\frac{a\theta}{b}-\frac{1}{2}\frac{a^2\theta^2}{b^2})$$

$$=\frac{\varepsilon_0 a^2}{b}(1-\frac{a\theta}{2b})$$

10.15　一板面积 $S=20\text{cm}^2$ 的平板电容器，其两板间的距离 $d=3\text{mm}$，板间左右各半地充有两种不同的均匀电介质（如图所示），它们的相对介电常数分别为 $\varepsilon_{r1}=4$ 和 $\varepsilon_{r2}=6$。若在两极板间加上 $U=15\text{V}$ 的电势差，忽略边缘效应。求：(1)各介质中的电位移矢量；(2)各介质中的电场强度；(3)各介质中的极化强度矢量；(4)电容器的电容。



题 10.15 图

解　因是平行板电容器，

$$E=\frac{U}{d}=5\times10^3\text{V/m}$$

(1) $D_1=\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}E$

$=1.77\times10^{-7}\text{C/m}^2$

$D_2=\varepsilon_0\varepsilon_{r_2}E$

$=2.66\times10^{-7}\text{C/m}^2$

(2) $E_1=E_2=E=5\times10^3\text{V/m}$

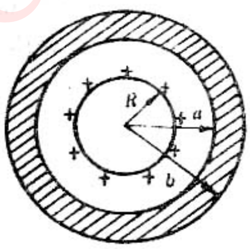
(3) $P_1=D_1-\varepsilon_0E_1=1.33\times10^{-7}\text{C/m}^2$

$P_2=D_2-\varepsilon_0E_2=2.21\times10^{-7}\text{C/m}^2$

(4) $C=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{\sigma_1S_1+\sigma_2S_2}{U}=\dfrac{D_1\dfrac{S}{2}+D_2\dfrac{S}{2}}{U}$

$=2.95\times10^{-11}\text{F}$

10.19　一半径为 R 的导体球带电 Q；球外有一层均匀电介质做成的同心球壳，其内外半径分别为 a 和 b，如图所示。设电介质的相对介电常数为 ε_r，求：(1)电介质内外的场强和电位移分布；(2)电介质内的极化强度 P 和介质表面的极化电荷面密度 σ'。



题 10.19 图

解　(1)据高斯定理有

$r<R$，　$D=0$，　$E=0$

$R<r<a$，　$D=\dfrac{Q}{4\pi r^2}$，　$E=\dfrac{D}{\varepsilon_0}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$

$a<r<b$，　$D=\dfrac{Q}{4\pi r^2}$，　$E=\dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_rr^2}$

$r>b$，　$D=\dfrac{Q}{4\pi r^2}$，　$E=\dfrac{D}{\varepsilon_0}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$

(2)介质内 $P=D-\varepsilon_0E=D(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r})$

$=\dfrac{(\varepsilon_r-1)Q}{4\pi\varepsilon_rr^2}$

因为

$$\sigma'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$$

$$\sigma_a'=-P_a=-\frac{(\varepsilon_r-1)Q}{4\pi\varepsilon_ra^2},\qquad \sigma_b'=P_b=\frac{(\varepsilon_r-1)Q}{4\pi\varepsilon_rb^2}$$

10.22 在相对介电常数为 ε_r 的无限大均匀电介质中，有一半径为 R_1 带电 Q 的导体球。求：(1)电场总能量；(2)电场能量的一半分布在半径多大的球面内？

解 (1)根据介质中高斯定理

$$r<R,\qquad D=0,\qquad E=0$$

$$r>R,\qquad D=\frac{Q}{4\pi r^2},\qquad E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

$$w=\frac{1}{2}DE=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r r^4}$$

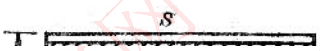
$$W=\int_R^{\infty}\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r r^4}\cdot 4\pi r^2\cdot \mathrm{d}r=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$$

(2)设在半径为 R_1 的球面内场强占总能量的一半，则

$$\frac{1}{2}W=\int_R^{R_1}\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r r^4}\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R}$$

$$R_1=2R$$



10.24 两个相同的空气电容器，其电容都是 $0.9\times10^{-9}F$，都充电到电压各为 900V 后断开电源，把其中之一浸入煤油中（$\varepsilon_r=2$），然后把两个电容器并联。求：(1)浸入煤油过程中能量的损失；(2)并联过程中能量的损失。

解 (1)充电后断开电源，每个电容器上电量均为

$$Q_1=Q_2=C_1U=0.9\times10^{-9}\times900$$

$$=8.1\times10^{-7}\mathrm{C}$$

其中一个电容器浸入煤油过程中能量变化为

$$\Delta W=\frac{Q_1^2}{2C_1'}-\frac{Q_1^2}{2C_1}=\frac{Q_1^2}{2\varepsilon_r C_1}-\frac{Q_1^2}{2C_1}$$

$$=-\frac{Q_1^2}{4C_1}=\frac{(8.1\times10^{-7})^2}{4\times0.9\times10^{-9}}$$

$$=1.82\times10^{-4}\mathrm{J}$$

能量损失为 1.82×10^{-4}J

(2)并联后，$Q=Q_1+Q_2=1.62\times10^{-6}$C

$$C=C_1'+C_2=3C_1=2.7\times10^{-7}\mathrm{F}$$

并联前后能量变化（包括浸入煤油过程）

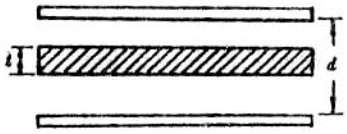
$$\Delta W=\frac{Q^2}{2C}-\frac{Q_1^2}{2C_1}-\frac{Q_2^2}{2C_2}$$

$$=-\frac{Q_1^2}{3C_1}=-2.43\times10^{-4}\mathrm{J}$$

能量共损失了 2.43×10^{-4}J。

10.28 空气电容器两极板的面积 $S=3\times10^{-2}\mathrm{m}^2$，极板间距 $d=3\times10^{-3}$m。在两极板间平行放置一面积与极板相同的金属板（见图），其厚度 $t=1\times10^{-3}$m。将电容器充电至电势差 $U_1=600$V 时与电

源断开。求：(1)抽出金属板需作之功；(2)抽出金属板后，两极板的相互作用。



题 10.28 图

解 (1)抽出金属板前后极板电荷 $Q=C_1U_1$ 不变，电容由原来的 $C_1=\frac{\varepsilon_0 S}{d-t}$ 变成 $C_2=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$

外力作功

$$A=W_2-W_1=\frac{Q^2}{2C_2}-\frac{Q^2}{2C_1}$$

$$=\frac{\varepsilon_0 S t U_1^2}{2(d-t)^2}$$

$$=1.2\times10^{-5}\text{J}$$

(2)电容器极板带电量为 Q，$\sigma=\frac{Q}{S}$，带电板之一在极板间产生的场强是均匀的

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

另一板所受作用力为

$$F=EQ=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}=\frac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2(d-t)^2}$$

$$=1.2\times10^{-2}\text{N}$$