第一篇　力　学

第一章　质点运动学

1.1　质点的运动方程为 $x=5+4t-t^2$(SI)，求 $t_1=1\text{s}$ 到 $t_2=6\text{s}$ 这段时间内的(1)平均速度；(2)平均速率。

解　(1)　$\bar{v}=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\dfrac{-7-8}{6-1}\text{m/s}=-3\text{ m/s}$

(2)折返点

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4-2t=0$$

$$t=2\text{s}\quad x_m=9\text{ m}$$

故路程为

$$\Delta l=|x_m-x_1|+|x_2-x_m|$$
$$=(|9-8|+|-7-9|)\text{m}=17\text{ m}$$
$$\bar{v}=\frac{\Delta l}{\Delta t}=\frac{17}{6-1}\text{ m/s}=3.4\text{ m/s}$$

1.2　质点的运动方程为 $x=4+2t-0.5t^3$(SI)。求 $t=2\text{s}$ 时的坐标，速度和加速度。

解

$$x=4+2t-0.5t^3$$
$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2-1.5t^2$$
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-3t$$

故　$t=2\text{s}$ 时

$$x=4\text{ m}$$
$$v=-4\text{ m/s}$$
$$a=-6\text{ m/s}^2$$

1.3　质点的运动方程为$\boldsymbol{r}=(3t-4t^2)\boldsymbol{i}+(-6t^2+t^3)\boldsymbol{j}$(SI)。求$t=3$ s时，质点的位矢、速度和加速度。

解

$$\boldsymbol{r}=(3t-4t^2)\boldsymbol{i}+(-6t^2+t^3)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(3-8t)\boldsymbol{i}+(-12t+3t^2)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-8\boldsymbol{i}+(-12+6t)\boldsymbol{j}$$

故　$t=3$s 时

$$\boldsymbol{r}=(-27\boldsymbol{i}-27\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$
$$\boldsymbol{v}=(-21\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s}$$
$$\boldsymbol{a}=(-8\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s^2}$$

1.4　质点的运动方程为$x=10t, y=5t^2$(SI)。求：(1)轨道方程；(2)$t_1=1$s 到 $t_2=3$s 这段时间内的平均速度；(3)$t_1=1$s 时的速度和加速度。

解　(1)

$$\begin{cases}x=10t\\ y=5t^2\end{cases}$$

故轨道方程为

$$y=\frac{x^2}{20}$$

(2)

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{t_2-t_1}$$
$$=\frac{(30\boldsymbol{i}+45\boldsymbol{j})-(10\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j})}{3-1}\ \mathrm{m/s}$$
$$=(10\boldsymbol{i}+20\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s}$$

(3)

$$v = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 10\boldsymbol{i} + 10t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 10\boldsymbol{j}$$

故 $t=1\mathrm{s}$ 时

$$\boldsymbol{v} = (10\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s}$$

$$\boldsymbol{a} = 10\boldsymbol{j}\ \mathrm{m/s^2}$$

1.5 质点的运动方程为 $x = R\cos\omega t, y = R\sin\omega t, z = ct$，式中 R、ω 和 c 均为常量。求：(1)运动方程的矢量表达式；(2)运动轨道；(3)速度和加速度。

解 (1)

$$\boldsymbol{r} = R\cos\omega t\ \boldsymbol{i} + R\sin\omega t\ \boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}$$

(2)

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$z = ct$$

故轨道为螺旋线。

(3)

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\omega R\sin\omega t\ \boldsymbol{i} + \omega R\cos\omega t\ \boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 R(\cos\omega t\ \boldsymbol{i} + \sin\omega t\ \boldsymbol{j})$$

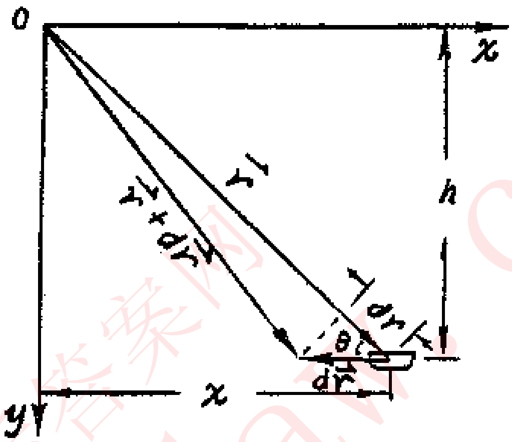
1.6 高为 h 的湖岸上，以恒定速率 u 收绳，通过绳子拉船靠岸。求船与岸的水平距离为 x 时，船的速度和加速度的大小。

解 (1)选坐标系如图

$$v = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r/\cos\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{\cos\theta}$$

$$= u\sqrt{1 + \left(\frac{h}{x}\right)^2}$$

(2) $$a = \frac{dv}{dt} = u\frac{d}{dt}\sqrt{1 + (\frac{h}{x})^2} = \frac{h^2u^2}{x^3}$$



解 1.6 图

1.7 质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=(10-5t^2)\boldsymbol{i}+10t\boldsymbol{j}$(SI)。求：$t=1$ 时质点的(1)位矢的模；(2)速度的模；(3)加速度的模；(4)切向加速度的模；(5)法向加速度的模。

解 (1)

$$\boldsymbol{r} = (10 - 5t^2)\boldsymbol{i} + 10t\boldsymbol{j}$$

故 $t=1$s 时

$$\boldsymbol{r} = 5\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j}$$

$$|\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{5^2 + 10^2}\ \mathrm{m} = 11.2\ \mathrm{m}$$

(2)

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -10t\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j}$$

$t=1$s 时

$$\boldsymbol{v} = (-10\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j})\ \mathrm{m/s}$$

$$|v| = v = \sqrt{10^2 + 10^2}\ \mathrm{m/s} = 14.1\ \mathrm{m/s}$$

(3)

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -10j$$

$$|a| = a = 10\ \mathrm{m/s^2}$$

(4) $$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-10t)^2 + 10^2} = 10\sqrt{t^2 + 1}$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{10t}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

故 $t = 1\mathrm{s}$ 时

$$a_\tau = \frac{10}{\sqrt{2}}\mathrm{m/s^2} = 7.07\mathrm{m/s^2}$$

(5)

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 7.07\ \mathrm{m/s^2}$$

1.8 物体以加速度 $a = -kv^2$(SI)沿 x 轴运动，$t=0$ 时物体位于原点，初速度为 v_0。求 t 时刻的速度和运动方程。

解

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \int_0^t -k\mathrm{d}t$$

故 $$v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}$$

(2)因

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \frac{v_0 \mathrm{d}t}{1 + kv_0 t}$$

故 $$x = \frac{1}{k}\ln(1 + kv_0 t)$$

1.9 质点在 xoy 平面内运动，加速度分量为 $a_x=-4\mathrm{si}$
$=3\cos t$(SI)，$t=0$ 时，$x_0=0$，$y_0=3\mathrm{m}$，$v_{0x}=4\mathrm{m/s}$，$v_{0y}=0$。求：(1
$\frac{\pi}{4}$s 时速度的模；(2)轨道方程。

解 (1)

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-4\sin t\ i+3\cos t\ j$$

$$\int_{4i}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t(-4\sin t\ i+3\cos t\ j)\mathrm{d}t$$

$$v=4\cos t\ i+3\sin t\ j$$

故 $t=\frac{\pi}{4}$s 时

$$v=2.83i+2.12j$$

$$v=\sqrt{2.83^2+2.12^2}\mathrm{m/s}=3.54\ \mathrm{m/s}$$

(2)

$$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=4\cos t\ i+3\sin t\ j$$

$$\int_{3j}^{r}\mathrm{d}r=\int_0^t(4\cos t\ i+3\sin t\ j)\mathrm{d}t$$

得

$$r=4\sin t\ i+(6-3\cos t)j$$

即

$$\begin{cases}x=4\sin t\\ y=6-3\cos t\end{cases}$$

$$t=\cos^{-1}\frac{6-y}{3}$$

$$x=4\sqrt{1-\left(\frac{6-y}{3}\right)^2}$$

故

$$y=6-3\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}$$

1.10 甲车以初速度 1m/s 和加速度 2m/s^2沿平直道路运动，甲车出发后 2s，乙车从同一地点沿同一方向出发，以初速度 10m/s 和加速度 1m/s^2运动。试问经多长时间两车相遇？这时离出发点多远？

解 以出发地为原点，前进方向为 x 轴正方向，甲车出发时为 $t=0$。设 t 时刻两车相遇，则

$$v_{0甲}t + \frac{1}{2}a_{甲}t^2 = v_{0乙}(t-2) + \frac{1}{2}a_{乙}(t-2)^2$$

即

$$t + t^2 = 10(t-2) + \frac{1}{2}(t-2)^2$$

解得

$$t = 3.4\ \text{s} \quad 或\ 10.6\ \text{s}$$

t 值代入

$$x = v_{0甲}t + \frac{1}{2}a_{甲}t^2$$

得

$$x = 15\ \text{m} \quad 或\ 123\ \text{m}$$

1.11 斜抛物体的最大高度与飞行距离相等，求抛射角。

解 设 t 时刻达最高点，则

$$v_0\sin\alpha - gt = 0$$

最大高度

$$H = v_0\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

飞行距离

$$L = v_0\cos\alpha\, 2t$$

按题意

$$H = L$$

解得

$$\alpha = 76^\circ$$

1.12 子弹以初速 200m/s 与水平成 60°射出。求:(1)轨道最高点的曲率半径;(2)$t=4s$ 时,子弹速度的大小和方向。

解 (1)最高点时

$$v = v_0 \cos\alpha$$

$$\frac{v^2}{\rho} = g$$

故 $$\rho = \frac{(v_0\cos\alpha)^2}{g} = \frac{(200\cos 60^\circ)^2}{9.8}\text{m} = 1.02 \times 10^3\ \text{m}$$

(2)

$$\begin{cases} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = v_0\sin\alpha - gt \end{cases}$$

$t=4s$ 时

$$\begin{cases} v_x = 100\ \text{m/s} \\ v_y = 134\ \text{m/s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 167\ \text{m/s} \\ \theta = \text{tg}^{-1}\dfrac{v_y}{v_x} = 53.3^\circ \text{(与水平夹角)} \end{cases}$$

1.13 炮弹以 15°的仰角发射,正好击中水平距离 2000m、高 46m 处山坡上的目标。问:(1)经过多长时间击中目标?(2)炮弹的出口速度多大?

解 (1)设经过时间 t 击中目标,则

$$\begin{cases} L = v_0\cos\alpha\ t \\ h = v_0\sin\alpha\ t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

解得

$$t = \sqrt{\frac{2(L\text{tg}\alpha - h)}{g}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\times(2000\text{tg}15°-46)}{9.8}}\text{s}=10\ \text{s}$$

(2)

$$v_0=\frac{L}{\cos\alpha\ t}=207\ \text{m/s}$$

1.14 质点以初速度 2.5m/s 和切向加速度 1.34m/s²沿半径为 4m 的圆周运动。求：$t_1=0$到 $t_2=2$s 这段时间内质点的(1)路程和平均速率；(2)位移和平均速度的模。

解 (1)路程

$$\Delta l=v_0t_2+\frac{1}{2}a_\tau t_2^2$$

$$=(2.5\times2+\frac{1}{2}\times1.34\times2^2)\text{m}$$

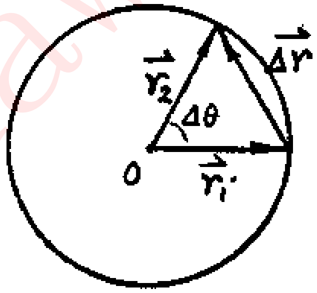
$$=7.68\ \text{m}$$

平均速率

$$\bar{v}=\frac{\Delta l}{\Delta t}=\frac{7.68}{2-0}=3.84\ \text{m/s}$$

(2)$t_1=0$到 $t_2=2$s 内角位移为

$$\Delta\theta=\frac{\Delta l}{R}=1.92\ \text{rad}$$



解 1.14图

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{R^2+R^2-2R^2\cos\Delta\theta}=6.55\ \text{m}$$

故平均速度的模为

$$|\bar{v}|=\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t}=3.28\ \text{m/s}$$

1.15 汽车沿半径为 50m 的圆形公路行驶，自然坐标系中，汽车的运动方程为 $l=10+10t-0.5t^2$(SI)。求 $t=5$s 时，汽车的速率以及切向加速度、法向加速度和总加速度的大小。

解

$$v=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=10-t$$

$t=5\text{s}$ 时

$$v = 5 \text{ m/s}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -1 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 0.5 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 1.1 \text{ m/s}^2$$

1.16 质点沿半径为 0.1m 的圆周运动，角坐标为 $\theta=3+t^2$ (SI)。问：何时总加速度的模等于切向加速度模的 2倍？此时速率多大？

解

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 2t$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = 2$$

$$v = \omega R = 0.2t$$

$$a_\tau = \beta R = 0.2$$

$$a_n = \omega^2 R = 0.4t^2$$

按题意

$$\frac{a}{a_\tau} = \frac{\sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}{a_\tau} = \sqrt{1 + (\frac{a_n}{a_\tau})^2} = \sqrt{1 + 4t^4} = 2$$

此时

$$t = 0.93\text{s}$$

$$v = 0.19 \text{ m/s}$$

1.17 升降机原静止于地面上，若以加速度 1.2m/s^2竖直上升后 2s 时，升降机天花板上落下一个螺母。天花板与升降机底板相距 2.7m。求：(1)螺母从天花板落到底板所需时间；(2)这段时间内，螺母相对地面参照系下降的距离。

解 设升降机为 K' 系(o'在天花板处，$o'x'$轴竖直向下)；地面

为 K 系（o 在螺母落下处，ox 轴竖直向下）。

(1)在 K' 系中

$$a' = a - a_t = [9.8 - (-1.2)]\mathrm{m/s^2} = 11\ \mathrm{m/s^2}$$

设 t 时刻落到底板，则

$$h = \frac{1}{2}a't^2$$

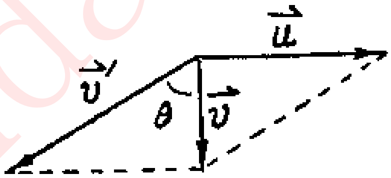
故
$$t = \sqrt{\frac{2h}{a'}} = \sqrt{\frac{2 \times 2.7}{11}}\mathrm{s} = 0.70\ \mathrm{s}$$

(2)在 K 系中，螺母下降距离为

$$x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$= [(-1.2 \times 2) \times 0.70 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times 0.70^2]\mathrm{m} = 0.72\ \mathrm{m}$$

1.18 雨滴相对地面竖直落下，列车以 20m/s 的速度在水平直铁轨上行驶，车上观察者看到雨滴的速率为 22m/s。求：(1)雨滴相对于地面的速率；(2)车上观察者测量，雨滴与竖直方向的夹角。



解 1.18图

解 以地面为 K 系，车为 K' 系，则

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$$

由图知，雨滴相对地面的速率为

$$v = \sqrt{v'^2 - u^2} = \sqrt{22^2 - 20^2}\mathrm{m/s} = 9.2\ \mathrm{m/s}$$

车上观察者测量，雨滴与竖直方向夹角为

$$\theta = \sin^{-1}\frac{u}{v'} = 65.4°$$

1.19 河宽 100m，东西向。河水以 3m/s 向正东流动。快艇从南岸码头出发，向正北行驶，艇相对水的速率为 4m/s。求：(1)

快艇相对地面的速度；(2)快艇将到达对岸何处？

解 (1)以地为 K 系(码头为原点，ox 轴向东，oy 轴向北)，河水为 K' 系(坐标 $x'o'y'$)，$t=0$时两坐标系重合，则艇对地速度为

$$v = u + v' = (3i + 4j)\ \mathrm{m/s}$$

即

$$\begin{cases} v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5\ \mathrm{m/s} \\ \theta = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{v_y}{v_x} = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{4}{3} = 53.1^\circ\ (\text{东偏北 } 53.1^\circ) \end{cases}$$

(2)设 t 时刻到达码头正对岸下游 x 处，则

$$\begin{cases} x = v_x t \\ y = l = v_y t \end{cases}$$

故
$$x = \frac{v_x}{v_y} l = \left(\frac{3}{4} \times 100\right)\mathrm{m} = 75\mathrm{m}$$

1.20 列车以 4.95m/s 沿水平铁轨作匀速直线运动。若以地面为 K 系(x 轴正方向沿车的前进方向，y 轴正方向竖直向上)，以车为 K' 系($x'o'y'$)，而且 $t=0$时，两坐标系恰好重合。此时，在 K 系中，从原点以初速 19.8m/s 竖直上抛一个小球。求：(1)在 K' 系中，小球的轨道方程；(2)在 K 系中和 K' 系中，小球的加速度。

解 (1)在 K' 系中，小球运动方程为

$$\begin{cases} x' = v_x' t = -4.95t \\ y' = v_0' t - \dfrac{1}{2} g t^2 = 19.8t - \dfrac{1}{2} \times 9.8t^2 \end{cases}$$

得轨道方程 $$y' = -4x' - \cancel{2}x'^2$$

0.2

(2)在 K' 中

$$a' = \frac{\mathrm{d}^2 r'}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[-4.95ti + \left(19.8t - \frac{1}{2} \times 9.8t^2\right)j\right]$$
$$= -9.8j\ \mathrm{m/s^2}$$

在 K 系中

$$\boldsymbol{r} = \left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right)\boldsymbol{j} = \left(19.8t - \frac{1}{2} \times 9.8t^2\right)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -9.8\boldsymbol{j}\ \mathrm{m/s^2}$$

故在 K' 系和 K 系中，加速度均为 $9.8\mathrm{m/s^2}$，方向竖直向下。