

引用格式: 张晨, 张皓. 基于月球借力的低能 DRO 入轨策略[J]. 航空学报, 2023, 44(2): 326507. ZHANG C, ZHANG H. Lunar-gravity-assisted low-energy transfer from Earth into Distant Retrograde Orbit (DRO)[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2023, 44(2): 326507 (in Chinese). doi: 10.7527/S1000-6893.2022.26507

基于月球借力的低能 DRO 入轨策略

张晨*, 张皓

中国科学院 空间应用工程与技术中心, 北京 100094

摘 要: 在地月空间的远距离逆行轨道(DRO)部署月球轨道站可显著降低月球开发成本,并可作为未来小行星探测和载人火星任务的跳板。月球轨道站的在轨建造和货物补给任务中,提高航天器入轨质量是重要问题。从地球至DRO的转移轨道可以采用弱稳定边界(WSB)转移轨道降低入轨脉冲,但是直接抵达WSB需要较高的火箭发射脉冲。研究了基于月球借力的弱稳定边界DRO入轨策略,首先通过“近月点庞加莱图”和“ v 无穷匹配”获得较好的轨道初值,接着采用“多步打靶”在星历下对转移轨道进行修正,上述方法有效提高了该类型转移轨道的计算效率。对于共振比2:1的DRO轨道,总脉冲最优解的地球发射脉冲3.127 km/s(与直接抵达WSB相比降低60~70 m/s),飞行总时间102.88 d, DRO入轨脉冲仅需66.1 m/s。

关键词: N 体问题; DRO轨道; 轨道优化; 弱稳定边界; 庞加莱截面; 月球借力

中图分类号: V412.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-6893(2023)02-326507-12

随着航天技术的发展,人类的生存空间逐渐由近地空间拓展到地月空间,2017年美国国家航空航天局(National Aeronautics and Space Administration, NASA)提出的“阿尔忒弥斯(Artemis)”任务^[1]将首次实现人类在月球及其轨道上的长期居留,并为未来复杂的载人火星任务奠定基础。2021年中国与俄罗斯就建设国际月球科研站达成了合作协议^[2]。可以预见在未来很长一段时间内,地月空间都将是人类航天活动的主要内容。在地月空间部署大型月球轨道站可以显著降低月球开发成本并作为其他深空任务的跳板^[3-5],停泊轨道的选择不能以单方面性能作为评价指标,而应权衡各种任务场景以达到综合性能最优。其中近直线晕轨道(Near Rectilinear Halo Orbit, NRHO)和远距离逆行轨道(Distant

Retrograde Orbit, DRO)是两类适合部署月球轨道站的三体周期轨道族,这两类轨道具有一定的相似性,但侧重点略有不同,NRHO适合用于载人登月任务,而DRO更能兼顾后续的小行星及火星任务,本文仅对基于DRO的月球轨道站部署策略展开研究。

近年来多个任务围绕地月三体系统中的DRO轨道展开,这类轨道具有长期稳定性好和入轨代价低的特点。例如“小行星重定向任务(Asteroid Redirect Mission, ARM)^[6]”计划从小行星上抓取一块巨石并拖曳至DRO轨道上,DRO当中的某些轨道具有长达100 a的稳定性而不需要进行频繁的轨道维持。Artemis的首星^[7]将把猎户座飞船送入25.5 d的任务轨道,其中6 d将位于DRO轨道。面向未来DRO月球轨道站的在轨建造和

收稿日期: 2021-10-13; 退修日期: 2021-11-15; 录用日期: 2022-02-28; 网络出版时间: 2022-03-08 14:21

网络出版地址: <https://hkxb.buaa.edu.cn/CN/Y2023/V44/I2/326507>

基金项目: 国家重点研发计划(2018YFB1900605); 中国科学院重点部署项目(ZDRW-KT-2019-1-0102); 航天飞行动力学国家级重点实验室基金(6142210200302)

* 通信作者. E-mail: chenzzhang@csu.ac.cn

货物补给任务,提高DRO入轨质量是重要问题。

1987年Belbruno^[8]提出的弱稳定边界(Weak Stability Boundary, WSB)转移技术在深空任务中获得巨大成功,WSB转移依靠多个引力体的相互作用,利用混沌区域所展现的一些新的动力学特性降低飞行器入轨脉冲。WSB转移最早用于奔月轨道设计,通过选择合适的地球发射条件,卫星首先抵达日地引力混沌的弱稳定边界(大约3~5倍地月距),卫星在这个区域无动力飞行时,太阳引力将近地点从地球附近抬升至月球轨道附近,当卫星从外部返回月球时被低能捕获^[9],尽管这种方法需要80~120 d的飞行时间,但是能够节省大约25%的月球制动脉冲。1991年WSB转移首次应用于日本Hiten^[10]卫星的营救任务,随后GRAIL(Gravity Recovery and Interior Laboratory)^[11]、ESMO(the European Student Moon Orbiter)^[12]、CAPSTONE(Cislunar Autonomous Positioning System Technology Operations and Navigation Experiment)^[13]、KPLOR(Korea Pathfinder Lunar Orbiter)^[14]等任务都采用或计划采用WSB转移技术。

国内外学者围绕WSB转移轨道的设计方法展开了内容丰富的研究,Koon等^[15]通过平动点附近的不变流形对WSB的转移机理进行了解释,并采用双三体流形拼接方法构建了低能奔月轨道。Yagasaki^[16]在四体简化模型下将地月WSB转移问题转换成非线性规划问题,通过数值迭代求解了地月低能转移轨道。WSB转移不仅适用于地月低能转移,也适用于DRO、NRHO、 $L_{4/5}$ 等地月空间典型周期轨道。Xu M和Xu S J^[17]、Tan等^[18]利用 $L_{1/2}$ 附近不变流形设计了基于WSB转移的DRO入轨策略。Scheuerle等^[19]基于多步打靶和数值延拓在四体简化模型下计算了地球至DRO的低能转移轨道。Zhang和Hou^[20]在双圆四体模型下设计了地球至 $L_{4/5}$ 的低能转移轨道。

为了最大化飞行器入轨质量,一些学者指出在WSB转移轨道的地球出发段增加月球借力(Lunar Gravity Assist, LGA)能够有效降低火箭发射能量。为方便描述,将这种类型的转移轨道称为“LGA+WSB”转移方式。“LGA+WSB”最

早出现于Belbruno和Miller在1993年发表的文章^[10]。Toppato^[21]在双圆四体模型下探索了两脉冲地月低能转移轨道的全局解空间,并对不同转移方式进行了分类,指出“LGA+WSB”转移方式具有较低的火箭发射脉冲。Parrish等^[13]针对“CAPSTONE”任务对2种NRHO入轨方案进行了对比,其中“WSB”方案火箭发射脉冲较高但是发射窗口宽松(每天都有发射窗口)，“LGA+WSB”方案火箭发射脉冲较低但是发射窗口紧张(一个月一次)。上述研究没有针对敏感的月球借力进行单独设计和优化,转移轨道中仅有很少一部分呈现“LGA+WSB”的转移方式,数值计算效率较低。Scheuerle等^[19]在双圆四体模型下从“WSB”延拓得到“LGA+WSB”转移轨道,但没有在星历模型下进行修正。Tselousova等^[22]在双圆四体模型下基于轨道拼接的思路设计了“LGA+WSB”转移轨道,设计过程较为繁琐且没有在星历下实现。

为了提高星历模型下的“LGA+WSB”转移轨道设计效率,为了避免复杂动力学环境对转移轨道收敛性所带来的影响,使用“近月点庞加莱图”和“ ν 无穷匹配”获得转移轨道初值,再通过“多步打靶”在星历下修正转移轨道。改进的方法充分优化了月球借力参数,有效改善了“LGA+WSB”转移方式的计算效率,所得到的转移轨道满足地球发射约束和高精度动力学约束。

本文结构如下:第1节介绍火箭发射能量和载荷质量的关系;第2节为动力学模型和状态转移矩阵;第3节介绍DRO轨道;第4节介绍“LGA+WSB”转移方式的特点;第5节介绍LGA至DRO轨道段的设计方法;第6节介绍近地球轨道(Low Earth Orbit, LEO)至LGA轨道段的设计方法;第7节介绍多步打靶技术;第8节为数值仿真;第9节为结论。

1 火箭发射能量和载荷质量

假设卫星初始位于近地圆形停泊轨道,沿切向施加脉冲抬升远地点高度。卫星在近地点的速度模表示为

$$v_p = \sqrt{\frac{2\mu_E}{r_p} - \frac{2\mu_E}{(r_a + r_p)}} \quad (1)$$

式中: r_a 和 r_p 分别为远地点和近地点地心距; μ_E 为地球引力常数。卫星在近地点的脉冲为

$$\Delta v_{\text{dep}} = v_p - \sqrt{\frac{\mu_E}{r_p}} \quad (2)$$

发射能量 C_3 表示为

$$C_3 = 2 \left(\frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu_E}{r_p} \right) \quad (3)$$

假设卫星近地点高度为 200 km, 图 1 展示了 LEO 发射脉冲 Δv_{dep} 和发射能量 C_3 随远地点地心距 r_a 的变化曲线。当发射脉冲 $\Delta v_{\text{dep}} = 3.1313$ km/s 时远地点能够抵达月球 (r_a 约为 4×10^5 km), 发射能量 C_3 约为 -2.03 (km)²/s²。发射脉冲为 [3.194 3, 3.206 3] km/s 时远地点抵达 WSB 区域 r_a 约为 $[1.2, 2.0] \times 10^6$ km, 发射能量 C_3 约为 $[-0.66, -0.39]$ (km)²/s²。

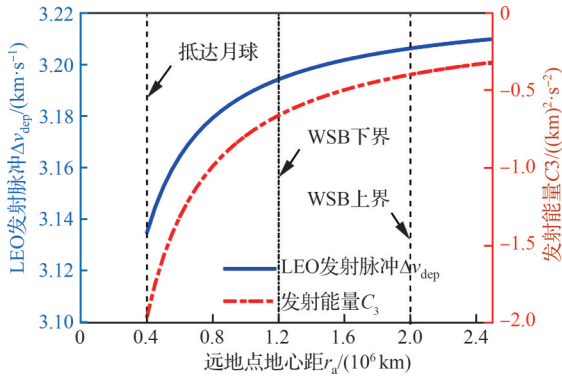


图 1 Δv_{dep} 和 C_3 随远地点高度变化曲线

Fig 1 Δv_{dep} and C_3 according to apogee radius

采用国外公开的火箭运力曲线^[23], 图 2 展示了猎鹰 9 Block 2 火箭载荷质量随发射能量的变

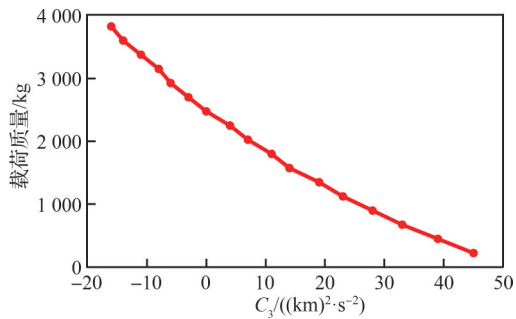


图 2 猎鹰 9 载荷质量随 C_3 变化曲线

Fig 2 Rocket capability according to characteristic energy C_3 of Falcon 9 Block 2

化曲线。猎鹰 9 发射地月转移轨道的载荷质量为 2 619.77 kg, 直接发射至 WSB 的载荷质量为 [2 500.24, 2 519.34] kg。因而如果先将卫星发射至地月转移轨道, 再借助月球借力将远地点抬升至 WSB, 则能够节省 60~70 m/s 的速度脉冲, 提升载荷质量 100.43~119.53 kg。

2 星历模型和状态转移矩阵

在深空任务设计时, 经常使用高精度的 N 体星历模型对转移轨道进行设计和修正。图 3 展示了 N 体星历模型示意图, 其中 k 为中心天体, i 为卫星, j 为其他摄动天体。定义卫星状态 $\mathbf{x} = [\mathbf{r}_{ki}, \mathbf{v}_{ki}]^T$, 卫星的动力学方程表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ki} \\ -\mu_k \frac{\mathbf{r}_{ki}}{r_{ki}^3} - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i, k}}^N \mu_j \left(\frac{\mathbf{r}_{kj}}{r_{kj}^3} + \frac{\mathbf{r}_{ji}}{r_{ji}^3} \right) \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: \mathbf{r}_{ki} 为卫星 i 相对于中心天体 k 的位置矢量; \mathbf{v}_{ki} 为卫星 i 相对于中心天体 k 的速度矢量; \mathbf{r}_{kj} 为摄动天体 j 相对中心天体 k 的位置矢量, 可以通过 JPL 的 DE430 星历获得; \mathbf{r}_{ji} 为卫星 i 相对摄动天体 j 的位置矢量, 表示为

$$\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}_{ki} - \mathbf{r}_{kj} \quad (5)$$

可以发现摄动天体的位置矢量随历元变化, 因而 N 体动力学模型是历元的函数。

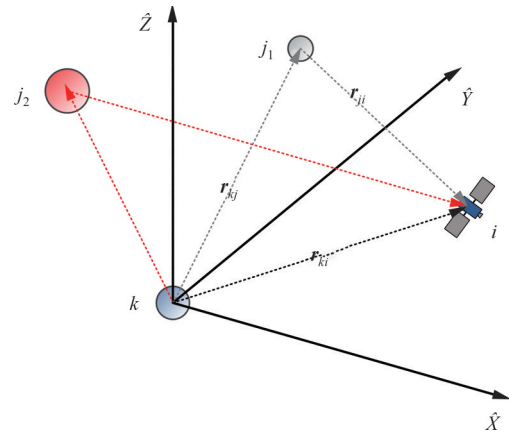


图 3 N 体星历模型

Fig 3 N -body ephemeris model

轨道修正经常使用状态转移矩阵这一概念, 状态转移矩阵在一阶程度上刻画了初始状态改变量对终端状态改变量所产生的影响^[24]。状态

转移矩阵的动力学方程表示为

$$\dot{\Phi}(t_0, t) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Phi(t_0, t) = \mathbf{A} \Phi(t_0, t) \quad (6)$$

$$\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I} \quad (7)$$

式中: \mathbf{I} 为单位矩阵; Φ 为状态转移矩阵; $f(\mathbf{x})$ 为卫星动力学方程; \mathbf{A} 为动力学方程对状态求偏导得到的矩阵; t_0 为初始时刻, t 为转移时刻。定义 \mathbf{y} 为状态变量 \mathbf{x} 和状态转移矩阵 Φ 构成的列向量, 其动力学方程表示为

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \text{vec}(\dot{\Phi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}) \\ \text{vec}(\mathbf{A}\Phi) \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中: $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ 为卫星状态和状态转移矩阵的动力学方程; “vec” 是将矩阵变为列向量的算子。

3 DRO 轨道

DRO 是圆型限制性三体问题 (Circular Restricted Three-Body Problem, CRTBP) 中一类稳定的平面轨道族^[25-28], 在旋转坐标系下该轨道沿顺时针 (逆行) 运动。图 4 展示了 DRO 轨道族, 轨道颜色用于区分轨道周期, $L_1 \sim L_5$ 为 5 个平动点, 图中距离单位 $1 \text{ LU} = 384\,400 \text{ km}$ 。可以发现振幅越小的 DRO 轨道周期越短。DRO 共振比是指轨道周期与月球公转周期之比, 具有典型共振比的周期轨道通常可保证卫星与地球、月球具有周期性的几何关系, 在数值仿真中用到了共振比 2:1 的 DRO 轨道。

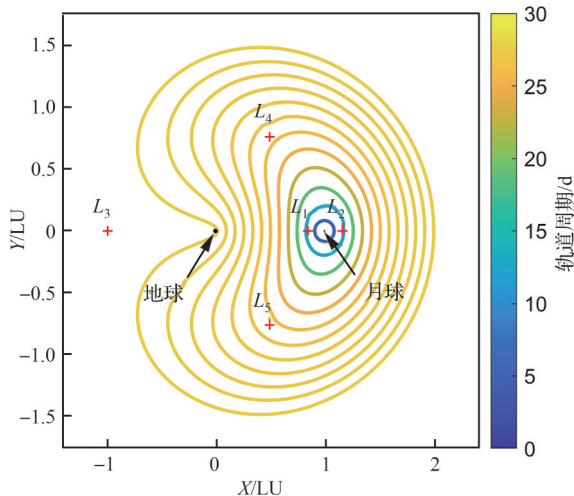


图 4 CRTBP 下的 DRO 轨道族

Fig 4 DRO family in CRTBP

以 CRTBP 的 DRO 轨道作为初值, 使用多步打靶可获得星历下的 DRO 轨道, 定义 $\mathbf{x}_{\text{dro}}^*(\tau^*)$ 为 DRO 参考状态, 则在星历模型下数值积分可以得到 DRO 轨道上任意一点的状态 \mathbf{x}_{dro} , 表示为

$$\mathbf{x}_{\text{dro}} = \varphi_{\text{eph}}(\mathbf{x}_{\text{dro}}^*, \tau^*; \tau) \quad (9)$$

式中: φ_{eph} 表示以 $\mathbf{x}_{\text{dro}}^*$ 为初值, 从 τ^* 到 τ 积分星历模型所得到的解。

4 转移轨道设计

基于月球借力的低能 DRO 入轨策略可简单描述为, 卫星初始位于近地圆形停泊轨道, 施加第 1 次脉冲后进入地月转移轨道 (Lunar Transfer Orbit, LTO) 并掠飞月球, 卫星通过月球借力抬升远地点高度并改变轨道倾角, 之后抵达地月 3~5 倍距的弱稳定边界, 卫星在这里持续受到太阳引力的影响并抬升近地点高度, 当再次返回地月空间时施加第 2 次脉冲并进入 DRO 轨道, 希望优化轨道转移策略使得两次脉冲和最小。图 5 展示了 “LGA+WSB” 的 DRO 入轨示意图, 其中, Δv_{arr} 为 DRO 入轨速度脉冲矢量; Δv_{dep} 为 LEO 发射脉冲矢量。

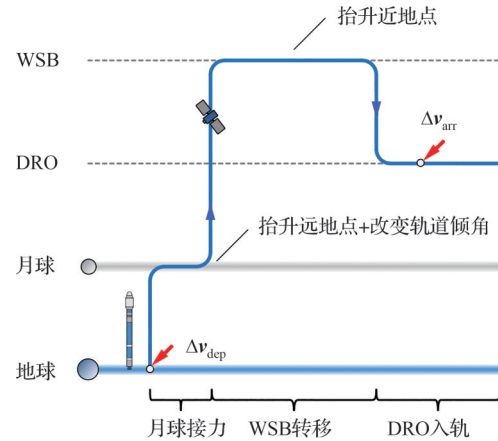


图 5 LGA+WSB 的 DRO 入轨示意图

Fig 5 Illustration of LGA+WSB transfer into DRO

“LGA+WSB” 的转移方式能够有效降低任务总脉冲, 但是复杂的动力学环境和月球借力给转移轨道设计带来解空间庞大和数值敏感等问题。本文将分别设计 “LGA 至 DRO 轨道段” 和 “LEO 至 LGA 轨道段”, 再使用多步打靶技术修正整条转移轨道。

5 LGA至DRO轨道段

本节将构造近月点庞加莱图,使得转移轨道从DRO逆向积分先抵达WSB再抵达近月点。图6展示了DRO入轨时刻示意图,卫星在DRO入轨时刻的状态 $\mathbf{x}(\tau_f)$ 表示为

$$\mathbf{x}(\tau_f) = [\mathbf{r}_{\text{dro}}, \mathbf{v}_{\text{dro}} + \Delta\mathbf{v}_{\text{arr}}]^\top \quad (10)$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_{\text{dro}}}{|\mathbf{v}_{\text{dro}}|}, \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{r}_{\text{dro}} \times \mathbf{v}_{\text{dro}}}{|\mathbf{r}_{\text{dro}} \times \mathbf{v}_{\text{dro}}|}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \quad (11)$$

$$\Delta\mathbf{v}_{\text{arr}} = \Delta v_{\text{arr}} [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} \cos(\beta) \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \sin(\alpha) \\ \sin(\beta) \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中: $\mathbf{x}_{\text{dro}} = [\mathbf{r}_{\text{dro}}, \mathbf{v}_{\text{dro}}]^\top$ 为入轨时刻DRO的状态; \mathbf{r}_{dro} 为入轨时刻DRO位置矢量; \mathbf{v}_{dro} 为入轨时刻DRO速度矢量; $\Delta\mathbf{v}_{\text{arr}}$ 为入轨脉冲矢量; Δv_{arr} 为入轨脉冲矢量的模; $\alpha \in [0, 2\pi)$ 为 $\Delta\mathbf{v}_{\text{arr}}$ 在 \mathbf{e}_1 — \mathbf{e}_2 平面的投影与 \mathbf{e}_1 的夹角; $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ 为 $\Delta\mathbf{v}_{\text{arr}}$ 与 \mathbf{e}_1 — \mathbf{e}_2 平面的夹角。

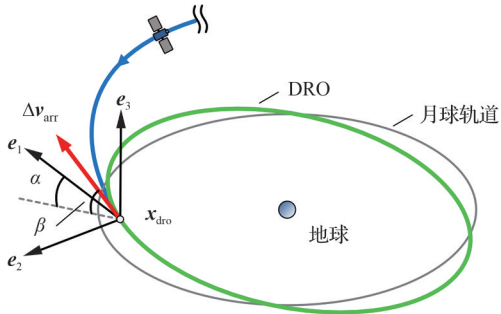


图6 DRO入轨示意图

Fig 6 Illustration of DRO insertion

图7展示了DRO出发的近月点庞加莱图,转移轨道远地点抵达WSB的约束表示为

$$\mathbf{r}^\top \mathbf{v} = 0 \quad (13)$$

$$\mathbf{r}^\top \mathbf{a} + \mathbf{v}^\top \mathbf{v} < 0 \quad (14)$$

$$1.2 \times 10^6 \text{ km} < \|\mathbf{r}\| < 2 \times 10^6 \text{ km} \quad (15)$$

式中: \mathbf{v} 为卫星速度矢量; \mathbf{r} 为卫星位置矢量; \mathbf{a} 为卫星加速度。转移轨道抵达近月点的约束表示为

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_M)^\top (\mathbf{v} - \mathbf{v}_M) = 0 \quad (16)$$

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_M)^\top (\mathbf{v} - \mathbf{v}_M) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_M)^\top (\mathbf{a} - \mathbf{a}_M) > 0 \quad (17)$$

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M\| < 5 \times 10^4 \text{ km} \quad (18)$$

式中: \mathbf{r}_M 、 \mathbf{v}_M 和 \mathbf{a}_M 分别为月球的位置、速度和加速度。受火箭滑行时间的限制,一些任务只能在月球升/降交点附近进行引力辅助,转移轨道的近月点还需满足以下约束

$$\|\mathbf{r}_z\| < 1 \times 10^5 \text{ km} \quad (19)$$

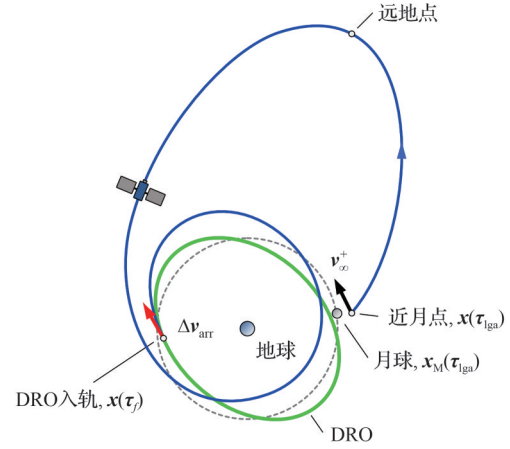


图7 DRO出发的近月点庞加莱图

Fig 7 Illustration of perilune Poincare map of DRO

由于卫星以双曲线轨道掠飞月球,卫星离开月球影响球的双曲线剩余速度 \mathbf{v}_∞^* 表示为

$$\begin{cases} \mathbf{v}_\infty^* = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\tau_{\text{lga}}) - \mathbf{x}_M(\tau_{\text{lga}}) \end{cases} \quad (20)$$

式中: $\mathbf{x}(\tau_{\text{lga}})$ 为卫星在近月点的状态; $\mathbf{x}_M(\tau_{\text{lga}})$ 为月球状态; $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{v}}]^\top$ 为卫星相对月球状态。

下面介绍 \mathbf{v}_∞^* 的计算方法,以月球为中心构造B平面,如图8所示,定义 \mathbf{v}_∞^* 为进入月球影响球的双曲线剩余速度, $\hat{\mathbf{S}}$ 为 \mathbf{v}_∞^* 的单位矢量, σ 为 \mathbf{v}_∞^* 和 \mathbf{v}_∞ 的夹角。

双曲线剩余速度的模表示为

$$v_\infty = \sqrt{\bar{v}^2 - 2\mu_M/\bar{r}} \quad (21)$$

式中: μ_M 为月球引力常数; \bar{v} 为卫星相对月球速度矢量的模; \bar{r} 为卫星位置矢量的标量。偏心率矢量 \mathbf{e} 表示为

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\mu_M} \left(\left(\bar{v}^2 - \frac{\mu}{\bar{r}} \right) \bar{\mathbf{r}} - (\bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \bar{\mathbf{v}} \right) \quad (22)$$

$\hat{\mathbf{S}}$ 与 \mathbf{e} 的夹角 λ 表示为

$$\lambda = \arccos(1/e) \quad (23)$$

其中: e 为偏心率的标量大小。

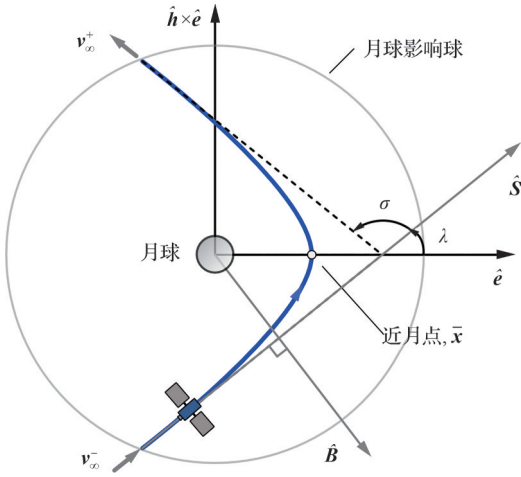


图 8 月球借力 and B 平面

Fig 8 Illustration of lunar gravity assist and B-plane

卫星离开影响球的双曲线剩余速度 v_{∞}^{+} 表示为

$$v_{\infty}^{+} = v_{\infty} \left[\cos(\pi - \lambda) \hat{e} + \sin(\pi - \lambda) \frac{\hat{h} \times \hat{e}}{\|\hat{h} \times \hat{e}\|} \right] \quad (24)$$

式中: \hat{h} 为角动量的单位矢量; \hat{e} 为偏心率单位矢量。

6 LEO 至 LGA 轨道段

构造 LEO 至 LGA 的转移轨道,期望在降低地球发射脉冲的同时,优化月球借力参数,使得借力后的双曲线剩余速度与 v_{∞}^{+} 相匹配。在二体简化模型下构造全局优化问题为

$$\begin{cases} \text{Find:} & \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n \\ \text{Minimize:} & J(\mathbf{z}) \\ \text{Subject to:} & \mathbf{z}_{\text{lr}} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{z}_{\text{ur}} \end{cases} \quad (25)$$

式中: $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ 是优化变量; $J: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是目标函数; $\mathbf{z}_{\text{lr}} \in \mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{z}_{\text{ur}} \in \mathbf{R}^n$ 是优化变量边界。优化变量 \mathbf{z} 表示为

$$\mathbf{z} = [\Omega, \omega, \eta, \gamma, \rho]^T \quad (26)$$

式中: Ω 和 ω 分别为 LTO 的升交点赤经和近地点幅角; η 是 LTO 的飞行时间; γ 和 ρ 分别为月球引力辅助的相位角和月心距。表 1 列出了优化变量和取值范围。

假设地球圆形停泊轨道的地心距为 R^* , 轨道倾角为 i^* , 通过 Ω 和 ω 得到卫星在 LTO 的出发状态 $\mathbf{x}(\tau_1)$, 基于二体圆锥曲线拼接假设, 求解

表 1 LEO 至 LGA 轨道段优化变量

Table 1 Variables of LEO to LGA segment

变量	取值范围
Ω/rad	$[0, 2\pi)$
ω/rad	$[0, 2\pi)$
η/d	$[3, 6]$
γ/rad	$[0, 2\pi)$
ρ/km	$[1\,838, 20\,000]$

Lambert 问题得到地球出发脉冲 Δv_{dep} 和卫星进入月球影响球的双曲线剩余速度 V_{∞}^{-} 。图 9 展示了

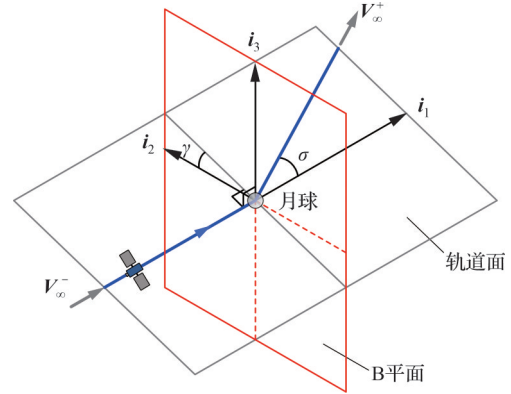


图 9 B 平面和月球借力参数

Fig 9 B-plane and lunar gravity assist parameters

B 平面和月球借力参数, 其中 i_1, i_2, i_3 为坐标系的单位矢量。通过 γ 和 ρ 得到月球借力后的双曲线剩余速度 V_{∞}^{+} , 计算过程如下:

$$\sigma = 2 \arcsin \left[1 / \left(1 + \rho \|V_{\infty}^{-}\|^2 / \mu_M \right) \right] \quad (27)$$

式中: μ_M 为月球引力常数。

$$i_1 = V_{\infty}^{-} / \|V_{\infty}^{-}\| \quad (28)$$

$$i_2 = i_1 \times v_M / \|i_1 \times v_M\| \quad (29)$$

$$i_3 = i_1 \times i_2 \quad (30)$$

$$V_{\infty}^{+} = \|V_{\infty}^{-}\| \begin{bmatrix} \cos \sigma \\ \sin \sigma \cos \gamma \\ \sin \sigma \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (31)$$

为了降低地球出发脉冲 Δv_{dep} 并使得 v_{∞}^{+} 和 V_{∞}^{+} 尽可能接近, 构造目标函数

$$J(\mathbf{z}) = \Delta v_{\text{dep}} + \|v_{\infty}^{+} - V_{\infty}^{+}\| \quad (32)$$

需要说明的是, 式(32)使得月球借力前后的 2 段轨道通过 v 无穷进行匹配 (不是位置速度拼接)。当全局优化问题收敛后, 可得到星历模型

下的“LGA+WSB”转移轨道初值,计算过程不再赘述。

7 多步打靶修正

多体系统复杂的动力学环境使得转移轨道对初值非常敏感,多步打靶技术可以扩大收敛域并提高算法的鲁棒性。图 10 展示了多步打靶示意图,整条轨道被 n 个离散点分割为 $n-1$ 条轨道段,多步打靶变量 \mathbf{X} 表示为

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \dots, \mathbf{x}_n^0, T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}]^T \quad (33)$$

式中: \mathbf{x}_n^0 为离散点状态; T_n 为飞行时间; τ_n 为历元时刻; β_n 为松弛变量。

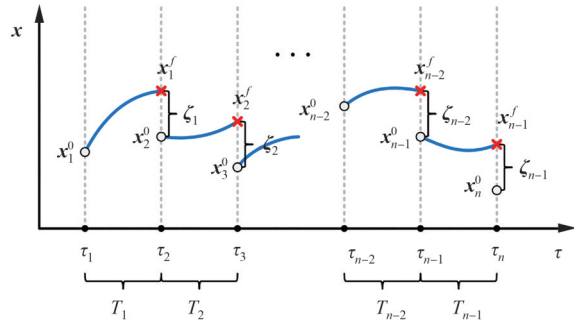


图 10 多步打靶示意图

Fig 10 Illustration of multiple shooting

第 j 段轨道满足状态连接约束:

$$\zeta_j = \mathbf{x}_j^f(\mathbf{x}_j^0, \tau_j, T_j) - \mathbf{x}_{j+1}^0 = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (34)$$

第 j 段轨道满足时间连接约束:

$$\begin{aligned} \varsigma_j &= \tau_j + T_j - \tau_{j+1} = 0 \\ j &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (35)$$

第 j 段轨道满足飞行时间为正的不等式约束:

$$T_j > 0 \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (36)$$

引入松弛变量 β_j 可将式(36)变为等式约束:

$$\xi_j = T_j - \beta_j^2 = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (37)$$

第 1 个节点满足边界约束:

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \begin{bmatrix} R(\mathbf{x}_1^0) - R^* \\ i(\mathbf{x}_1^0) - i^* \end{bmatrix} = 0 \quad (38)$$

式中: R^* 和 i^* 为 LEO 的地心距和轨道倾角。

第 n 个节点满足边界约束:

$$\boldsymbol{\psi}_n = \mathbf{r}_n^0 - \mathbf{r}_{\text{dro}}(\tau_n) = 0 \quad (39)$$

式中: \mathbf{r}_n^0 为第 n 个节点的位置矢量; $\mathbf{r}_{\text{dro}}(\tau_n)$ 为 DRO 在 τ_n 时刻的位置矢量。多步打靶约束 $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ 表示为^[24]

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^f(\mathbf{x}_1^0, \tau_1, T_1) - \mathbf{x}_2^0 \\ \mathbf{x}_2^f(\mathbf{x}_2^0, \tau_2, T_2) - \mathbf{x}_3^0 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n-1}^f(\mathbf{x}_{n-1}^0, \tau_{n-1}, T_{n-1}) - \mathbf{x}_n^0 \\ \tau_1 + T_1 - \tau_2 \\ \tau_2 + T_2 - \tau_3 \\ \vdots \\ \tau_{n-1} + T_{n-1} - \tau_n \\ T_1 - \beta_1^2 \\ T_2 - \beta_2^2 \\ \vdots \\ T_{n-1} - \beta_{n-1}^2 \\ \boldsymbol{\psi}_1 \\ \boldsymbol{\psi}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_n \end{bmatrix} = 0 \quad (40)$$

至此,当得到雅克比矩阵 $\mathbf{J}(\mathbf{X})$,使用最小二乘更新方程对打靶变量 \mathbf{X}^{k+1} 进行修正(见式(41)),收敛后即可得到转移轨道。在星历修正中,动力学模型仅考虑日、地、月引力场,行星状态通过 JPL 的 DE430 星历计算。

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \mathbf{J}(\mathbf{X}^k)^T (\mathbf{J}(\mathbf{X}^k) \mathbf{J}(\mathbf{X}^k)^T)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}^k) \quad (41)$$

卫星在任务过程中共施加两次脉冲,分别为火箭发射脉冲 $\Delta \mathbf{v}_{\text{dep}}$ 和卫星平台施加的 DRO 入轨脉冲 $\Delta \mathbf{v}_{\text{arr}}$,任务脉冲总表示为

$$\Delta \mathbf{v}_{\text{all}} = \Delta \mathbf{v}_{\text{dep}} + \Delta \mathbf{v}_{\text{arr}} \quad (42)$$

$$\Delta \mathbf{v}_{\text{dep}} = \|\mathbf{v}_1^0\| - \sqrt{\mu_E / R^*} \quad (43)$$

$$\Delta \mathbf{v}_{\text{arr}} = \|\mathbf{v}_n^0 - \mathbf{v}_{\text{dro}}(\tau_n)\| \quad (44)$$

式中: \mathbf{v}_1^0 为第 1 个节点的速度矢量; \mathbf{v}_n^0 为第 n 个节点的速度矢量; $\mathbf{v}_{\text{dro}}(\tau_n)$ 为 DRO 在 τ_n 时刻的速度矢量。

8 数值仿真

将在星历模型下设计基于月球借力的低能 DRO 转移轨道,仿真参数参见表 2。其中,时间单位中的 jd 为儒略日,tdb 为太阳系质心动力学

表 2 数值仿真参数
Table 2 Simulation parameters

参数	数值
地月质量参数 μ	0.012 151
太阳质量常数 $\mu_S/((\text{km})^3 \cdot \text{s}^{-2})$	132 712 440 017.987 0
地球质量常数 $\mu_E/((\text{km})^3 \cdot \text{s}^{-2})$	398 600.432 896 939 2
月球质量常数 $\mu_M/((\text{km})^3 \cdot \text{s}^{-2})$	4 902.800 582 147 764
重力加速度 $g_0/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	9.806 65
地球平均半径 R_E/km	6 378
月球平均半径 R_M/km	1 738
归一化距离单位 LU/km	384 400
归一化时间单位 TU/d	4.348 113 05
归一化速度单位 VU/d	1.023 232 81
粒子种群数	200
粒子群迭代数	200
多步打靶离散点 n	20
LEO地心距 R^*/km	6 578
LEO轨道倾角 $i^*/(^{\circ})$	28.5
DRO历元 $\tau^*/(\text{jd}, \text{tdb})$	2 460 096.482 613 85
DRO初值 $\mathbf{r}_{\text{dro}}^*(\tau^*)/\text{km}$	$[-276\ 870.471\ 840\ 84,$ $-141\ 758.243\ 742\ 15,$ $-59\ 274.294\ 275\ 02]$
DRO初值 $\mathbf{v}_{\text{dro}}^*(\tau^*)/(\text{km} \cdot \text{s}^{-1})$	$[0.740\ 021\ 87,$ $-0.999\ 801\ 19,$ $-0.567\ 720\ 67]$

时。计算流程如下：

1) 网格化 DRO 入轨时间 τ_f 和入轨速度脉冲 $\Delta \mathbf{v}_{\text{arr}}$, 获得不同的 DRO 入轨状态 $\mathbf{x}(\tau_f)$, 参见式(9)和式(10)。

2) 从 $\mathbf{x}(\tau_f)$ 出发逆向积分动力学模型, 参见式(8), 使得卫星先抵达 WSB 再抵达近月点(构造近月点庞加莱图), 参见式(13)~式(18), 计算月球借力后的双曲线剩余速度 \mathbf{v}_{∞}^+ , 参见式(20)~式(24)。

3) 固定 LGA 至 DRO 轨道段, 使用粒子群优化 LEO 至 LGA 轨道段, 最小化地球出发脉冲 $\Delta \mathbf{v}_{\text{dep}}$ 并使得 \mathbf{v}_{∞}^+ 和 \mathbf{V}_{∞}^+ 尽可能接近(即 \mathbf{v} 无穷匹配), 参见式(25)~式(32)。

4) 使用多步打靶修正, 得到“LGA+WSB”类型的 DRO 转移轨道, 参见式(33)~式(41)。

根据以上计算流程, 构建 1×10^7 个 DRO 入

轨状态, 从 DRO 逆向积分能够先抵达 WSB 再抵达近月点的仅有 1 511 条转移轨道。图 11 展示了近月点庞加莱图, 图中每个圆点都代表一条转移轨道, 圆点颜色用于区分 DRO 入轨脉冲。

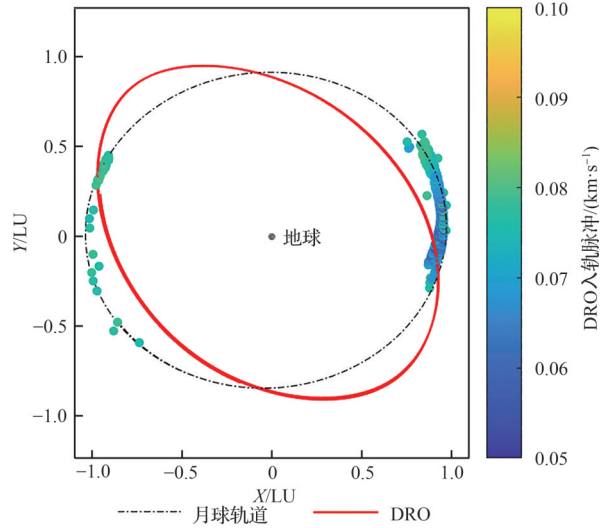


图 11 近月点庞加莱图

Fig 11 Perilune Poincare map

进一步对比“ \mathbf{v} 无穷匹配”策略对计算效率的改进效果。首先对于图 11 上的每一个点, 继续逆向积分并在近地点终止, 得到不使用“ \mathbf{v} 无穷匹配”的转移轨道初值。图 12 展示了这些初值的近地点庞加莱图, X 轴为近地点地心距, Y 轴为近地点轨道倾角, 红色十字为期望的 LEO 地心距和轨道倾角, 可以发现敏感的月球借力使得红色十字附近几乎没有接近的转移轨道。如果对图 12 直

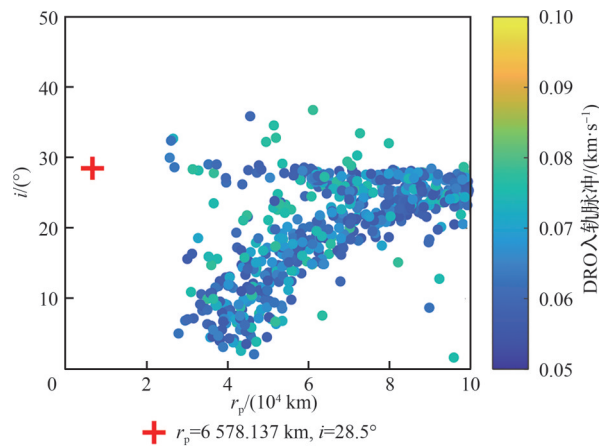


图 12 近地点庞加莱图

Fig 12 Perigee Poincare map

接使用多步打靶轨道修正,则仅有49条收敛的转移轨道。

接着采用“ ν 无穷匹配”策略获得转移轨道初值,再使用多步打靶修正整条轨道,最终获得了743条收敛的转移轨道。图13展示了这些收敛解的散点图,其中每个圆点都为一条收敛轨道,圆点颜色用于区分DRO入轨脉冲,红色圆圈为收敛解的帕累托前沿,红色五角星为脉冲最低解。在数值仿真中采用Matlab编程语言,计算设备为高性能工作站,CPU为64核心处理器,内存为256 G,计算总时间约为8 h。

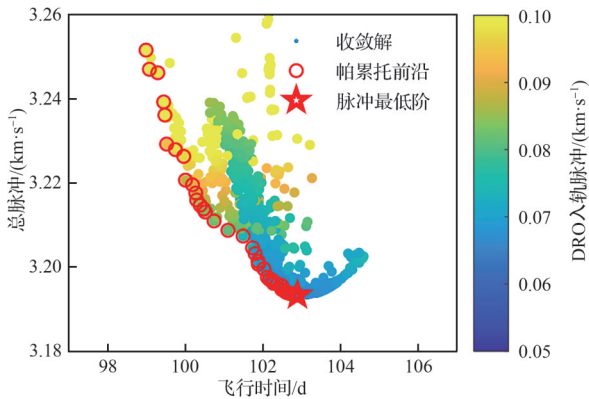
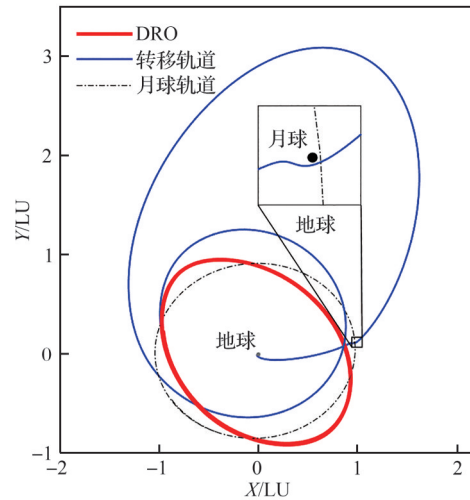


图13 多步打靶修正后的收敛解

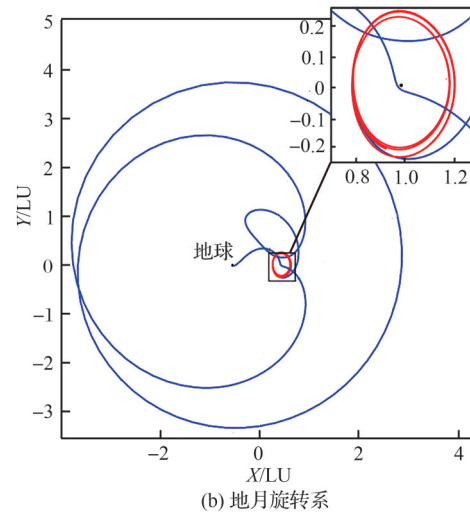
Fig 13 Converged solutions with multiple shooting

需要说明的是,“ ν 无穷匹配”策略能够在不改变月球借力后双曲线剩余速度的条件下,将图12的大多数近地点都移动到红色十字附近,从而有效改进了转移轨道初值。就本算例而言,“ ν 无穷匹配”策略将转移轨道收敛率提高了约15倍。此外,“ ν 无穷匹配”策略可以方便拓展到NRHO、 $L_{4/5}$ 等周期轨道的入轨任务设计,计算流程并无明显区别。

图14展示了图13中总脉冲最低解(红色五角星)的转移轨道,其中红色实线为DRO轨道,蓝色实线为地球至DRO转移轨道,灰色实线为月球轨道。观察图14(a),卫星从地球出发后进入地月转移轨道,月球借力后卫星弹射至WSB,当再次返回地月空间时,卫星以切向入轨的方式进入DRO轨道。观察图14(b),卫星从WSB返回地月空间时首先抵达 L_4 附近,之后在地月引力共同影响下抵达DRO并入轨。



(a) 地心赤道惯性系



(b) 地月旋转系

图14 总脉冲最低解的转移轨道

Fig 14 Best solution with minimum cost

表3展示了图13中脉冲最低解(红色五角星)的仿真结果,LEO出发脉冲仅需3.1273 km/s,DRO入轨脉冲66.1 m/s,任务总脉冲3.1934 km/s,任务总时间102.8803 d。

表4展示了LEO转移至GEO和DRO的对比,LEO轨道高度200 km,轨道倾角 28.5° ,卫星平台采用化学推进,比冲220 s。如果采用猎鹰9号Block 2型运载火箭,单次发射至多可将1704.2733 kg的载荷送入GEO轨道,可将2553.5768 kg的载荷送入DRO轨道,由于GEO需要1.8197 km/s的速度脉冲改变轨道倾角和轨道圆化,使得虽然DRO距离地球更远,但是入轨质量却更高,约为GEO的1.5倍。

表 3 总脉冲最低解的仿真结果
Table 3 Best solution with minimum cost

参数	数值
LEO出发脉冲/($\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$)	3.127 286 50
DRO到达脉冲/($\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$)	0.066 090 92
总脉冲/($\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$)	3.193 377 42
总时间/d	102.880 327 67
出发时间/(jd,tdb)	2 459 966.777 246 46
出发时卫星位置/km	[−6 467.153 118 231 2, −1 184.790 001 988 07, −209.953 275 562 116]
出发时卫星速度/($\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$)	[1.892 057 726 846 54, −9.407 190 176 785 86, −5.194 880 417 429 38]
近月点时间/(jd,tdb)	2 459 970.766 318 36
近月点卫星位置/km	[367 442.092 848 141, 42 046.615 513 482 8, −980.575 109 454 213]
近月点卫星速度/($\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$)	[1.270 167 875 014 64, 0.009 235 056 270 175 26, −0.023 871 760 089 912 7]
入轨时间/(jd,tdb)	2 460 069.657 574 13
入轨时卫星位置/km	[−239 144.207 929 066, −187 302.212 790 807, −85 040.874 971 346 8]
入轨时卫星速度/($\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$)	[0.881 503 757 995 025, −0.982 638 475 555 1, −0.534 365 964 086 031]
入轨时DRO位置/km	[−239 144.207 929 066, −187 302.212 790 807, −85 040.874 971 346 8]
入轨时DRO速度/($\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$)	[0.845 193 643 816 302, −0.927 576 393 506 761, −0.538 579 266 758 445]

表 4 LEO转移至GEO和DRO的对比
Table 4 Comparison between LEO to GEO and LEO to DRO

转移方式	火箭发射脉冲/ ($\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$)	卫星入轨脉冲/ ($\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$)	卫星入轨质 量/kg
LEO至GEO	2.426 0	1.819 7	1 704.273 3
LEO至DRO (LGA+WSB)	3.127 3	0.066 1	2 553.576 8

9 结 论

1) 改进了星历模型下的“LGA+WSB”转

移轨道设计方法,通过“近月点庞加莱图”和“ ν 无穷匹配”获得较好的轨道初值,有效提高了该类型转移轨道的计算效率。

2) 通过网格搜索获得了解空间的帕累托前沿,对于2:1 DRO轨道,总脉冲最低解的飞行时间102.880 3 d,地球发射脉冲3.127 3 km/s ,DRO入轨脉冲66.1 m/s 。

3) 对比LEO至GEO和LEO至DRO转移轨道,尽管DRO距离地球更远,但是入轨质量可以达到GEO的约1.5倍。

参 考 文 献

- [1] National Aeronautics and Space Administration. NASA's lunar exploration program overview [EB/OL]. (2020-09-01) [2022-02-28]. https://www.nasa.gov/sites/default/files/atoms/files/artemis_plan-20200921.pdf.
- [2] 国家航天局. 中俄两国签署合作建设国际月球科研站谅解备忘录 [EB/OL]. (2021-03-09) [2022-02-28]. <http://www.cnsa.gov.cn/n6759533/c6811381/content.html>.
- [3] WHITLEY R, MARTINEZ R. Options for staging orbits in cislunar space [C]//2016 IEEE Aerospace Conference. Piscataway: IEEE Press, 2016.
- [4] CAPDEVILA L R, HOWELL K C. A transfer network linking Earth, Moon, and the triangular libration point regions in the Earth-Moon system [J]. Advances in Space Research, 2018, 62(7): 1826-1852.
- [5] 曾豪, 李朝玉, 彭坤, 等. 地月空间NRHO与DRO在月球探测中的应用研究 [J]. 宇航学报, 2020, 41(7): 910-919.
ZENG H, LI Z Y, PENG K, et al. Research on application of Earth-Moon NRHO and DRO for lunar exploration [J]. Journal of Astronautics, 2020, 41(7): 910-919 (in Chinese).
- [6] CONDON G L, WILLIAMS J. Asteroid redirect crewed mission nominal design and performance [C]//SpaceOps 2014 Conference. Reston: AIAA, 2014.
- [7] DAWN T F, GUTKOWSKI J, BATCHA A, et al. Trajectory design considerations for exploration mission 1: AIAA-2018-0968 [R]. Reston: AIAA, 2018.
- [8] BELBRUNO E. Lunar capture orbits, a method of constructing Earth Moon trajectories and the lunar GAS mission: AIAA-1987-1054 [R]. Reston: AIAA, 1987.
- [9] PARKER J S, ANDERSON R L. Low-energy lunar trajectory design: Parker/low-energy [M]. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2014.
- [10] BELBRUNO E A, MILLER J K. Sun-perturbed Earth-to-Moon transfers with ballistic capture [J]. Journal of

- Guidance, Control, and Dynamics, 1993, 16 (4) : 770-775.
- [11] ZUBER M T, SMITH D E, WATKINS M M, et al. Gravity field of the moon from the gravity recovery and interior laboratory (GRAIL) mission[J]. Science, 2013, 339(6120): 668-671.
- [12] WALKER R, CROSS M. The European student Moon orbiter (ESMO): A lunar mission for education, outreach and science[J]. Acta Astronautica, 2010, 66 (7-8): 1177-1188.
- [13] PARRISH N L, KAYSER E, UDUPA S, et al. Ballistic lunar transfers to near rectilinear halo orbit: Operational considerations: AIAA-2020-1466[R]. Reston: AIAA, 2020.
- [14] SONG Y J, KIM Y R, BAE J, et al. Overview of the flight dynamics subsystem for Korea pathfinder lunar orbiter mission[J]. Aerospace, 2021, 8(8): 222.
- [15] KOON W S, LO M W, MARSDEN J E, et al. Dynamical systems, the three-body problem and space mission design[M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2000: 1167-1181.
- [16] YAGASAKI K. Sun-perturbed Earth-to-Moon transfers with low energy and moderate flight time[J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2004, 90(3-4): 197-212.
- [17] XU M, XU S J. Exploration of distant retrograde orbits around Moon[J]. Acta Astronautica, 2009, 65 (5-6) : 853-860.
- [18] TAN M H, ZHANG K, LV M B, et al. Transfer to long term distant retrograde orbits around the Moon[J]. Acta Astronautica, 2014, 98: 50-63.
- [19] SCHEUERLE S T, MCCARTHY B P, HOWELL K C. Construction of ballistic lunar transfers leveraging dynamical systems techniques[C]//AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. Reston: AIAA, 2020.
- [20] ZHANG Z T, HOU X Y. Transfer orbits to the Earth-Moon triangular libration points[J]. Advances in Space Research, 2015, 55(12): 2899-2913.
- [21] TOPPUTO F. On optimal two-impulse Earth-Moon transfers in a four-body model[J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2013, 117(3): 279-313.
- [22] TSELOUSOVA A, TROFIMOV S, SHIROBOKOV M. Geometric approach to the design of lunar-gravity-assisted low-energy Earth-Moon transfers [C]//AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. Reston: AIAA, 2021.
- [23] Space Exploration Technologies Corporation. Falcon 9 launch vehicle payload user's guide [R]. Hawthorne: SpaceX, 2008.
- [24] ZIMOVAN E M. Characteristics and design strategies for near rectilinear halo orbits within the Earth-Moon system [D]. West Lafayette: Purdue University, 2017: 1-152.
- [25] HÉNON M. Numerical exploration of the restricted problem. V. Hill's case: Periodic orbits and their stability[J]. Astronomy and Astrophysics, 1969, (1):223-238.
- [26] BEZROUK C, PARKER J S. Long term evolution of distant retrograde orbits in the Earth-Moon system[J]. Astrophysics and Space Science, 2017, 362(9): 1-11.
- [27] WELCH C M, PARKER J S, BUXTON C. Mission considerations for transfers to a distant retrograde orbit [J]. The Journal of the Astronautical Sciences, 2015, 62 (2): 101-124.
- [28] CONTE D, CARLO M D, HO K, et al. Earth-Mars transfers through Moon distant retrograde orbits[J]. Acta Astronautica, 2018, 143: 372-379.

(责任编辑: 宋金超)

Lunar-gravity-assisted low-energy transfer from Earth into Distant Retrograde Orbit (DRO)

ZHANG Chen*, ZHANG Hao

Technology and Engineering Center for Space Utilization, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100094, China

Abstract: Deploying the space station on a stable periodic orbit (e.g., distant retrograde orbits, DROs) in the vicinity of the Moon can significantly reduce the lunar exploration cost, and the space station can also be used as a stepping-stone for manned asteroid or mars missions. Reducing fuel consumption is an important issue during construction and cargo resupply of the cislunar station. For transfer trajectory from Earth into DRO, DRO insertion cost can be effectively saved with the aid of weak stability Boundary (WSB) transfer, but reading WSB directly requires higher launch velocity. This paper aims at improving the numerical sensitivity of transfer trajectory which leverage Lunar Gravity Assist (LGA) and WSB transfer simultaneously. The initial guess of trajectories are obtained by “perilune Poincare map” and “ ν infinity matching” strategies, then multiple shooting with analytic gradient is applied under high fidelity model, better computational efficiency are obtained by applying improved methods. In numerical simulation, for the DRO with a resonant ratio of 2:1, for the minimum cost solution, the Earth launching injection is 3.127 km/s (60-70 m/s is reduced compared with directly launching into WSB). The time of flight is 102.88 d, and DRO insertion maneuver only needs 66.1 m/s.

Keywords: *N*-body problem; Distant Retrograde Orbit (DRO); trajectory optimization; weak stability boundary; Poincare map; lunar gravity assist

Received: 2021-10-13; **Revised:** 2021-11-15; **Accepted:** 2022-02-28; **Published online:** 2022-03-08 14:21

URL: <https://hkxb.buaa.edu.cn/CN/Y2023/V44/I2/326507>

Foundation items: National Key R&D Program of China (2018YFB1900605); Key Research Program of the Chinese Academy of Sciences (CAS) (ZDRW-KT-2019-1-0102); National Key Laboratory Fund of Aerospace Flight Dynamics (6142210200302)

* **Corresponding author.** E-mail: chen Zhang@csu.ac.cn