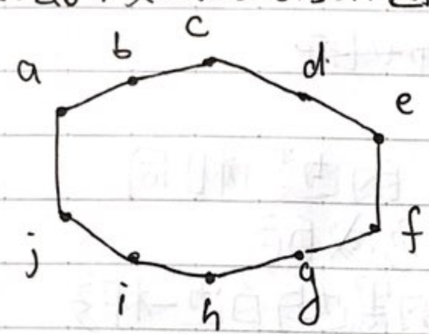
No.

Date

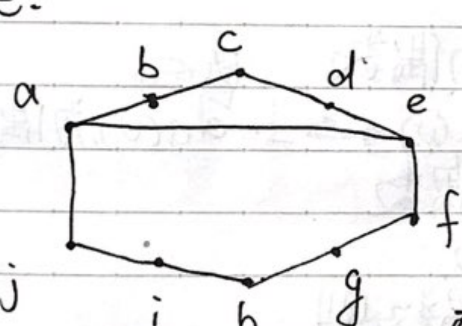
题六 用反证法。假设Petersen图是H图，则存在欧拉回路：



因为Petersen图中共有10个点15条边，所以还有5条边，每条边连接 ~~若这5条边都是~~ 2个点。由于Petersen图中不存在长度为4的圈

1° 若这5条边都是连接欧拉回路中相对的点（即a连f，b连g等）则图中必有长度为4的圈，这在Petersen图中是不可能的

2° 那么必然有一条边连接在回路中相距4的两点，不妨设a连e：



则此时与 ~~b相连~~ a相邻的j ~~便无点可连，否则~~ 无论与哪点相连，都会出现一个长度为3或4的圈，这在Petersen图中也不成立。

综上，Petersen图不是H图

题三 ∵ 连通~~图G~~ 图G每个顶点度数为偶数

∴ G为欧拉图，存在欧拉环游W

∵ G有偶数条边

∴ W中有偶数条边

沿着W，将~~相邻的边~~各边染成黑色或白色，相邻的边染成

No.

Date

不同的颜色.

则 $\forall v \in G$ ~~进入v与离开v的~~

$\because$ v的度数为偶数

$\therefore$ 在W中进入v与离开v的边数相同

又这些边分别被染成黑色或白色

$\therefore$ 对每个顶点，与之相连的黑边与白边一样多

题四 (1) 证明：若G是偶图，则

G的点集可分为两个非空子集X和Y，每条边一端在X中，一端在Y中

由与X中的点的关联的边组成的边集 $E(X)=E(Y)=E(G)$

$\because G=(V,E)$ 为Euler图

$\therefore$ G中每个点度数都为偶数

又 $\because E(X)=\sum d_G(v)$ 且 $\forall v \in G$ $d_G(v)$ 为偶数

$\therefore E(X)=E(G)$ 为偶数

即 $m=|E|$ 为偶数

~~(2) 证明：若 $n=|V|$ 是偶数，则~~

~~$n=2k$，$k\in N_+$~~

~~$\because G=(V,E)$ 是Euler图~~

~~$\therefore \forall v \in G$，$d_G(v)$ 为偶数~~

~~$d_G(v)=2k_i$，$k\in N_+$~~

~~由握手定理 $\therefore m=\frac{\sum d_G(v)}{2}=\frac{2(k_1+k_2+\cdots+k_n)}{2}$~~

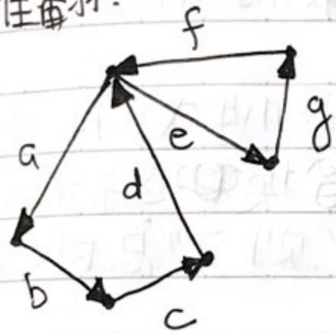
~~$=k_1+k_2+\cdots+k_n$~~

Campus

No.

Date

(2) 推翻：



这个图是Euler图

$n=|V|=6$ 是偶数

$m=|E|=7$ 不是偶数

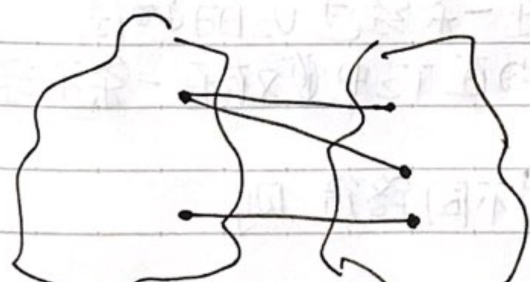
(3) 如上图，在Euler图G中，e,f相关联，但不可能连续出现在某条Euler回路里，

若不然，回路中在访问e,f前与访问e,f后~~访问的边~~ ~~都为g~~ 都只能访问g，不可能访问到abcd.

回路

题二 证明：

(1) 反证法。若存在一个割，其中最短的边不在某一最小生成树中。



那么这个割中必然有其他的边属于这个生成树（否则生成树被分为不连通的两个子图），而这些边的长度之和一定大于最短的边，那么如果用最短的边代替这些边，得到的生成树总长度小于原来的最小生成树，所以原假设不成立

KOKUYO

No.

Date

∴任何割中的最短的边在所有的最小生成树中

(2) 用反证法。

若存在一个圈，其最长边在某一最小生成树T中。则在该圈任取一条不在该树中的边，用其替换这条最长边，在得到的图T'中构建最小生成树T''，则 T''总长度

$w(T'') \leq w(T') < w(T)$

这与T是最小生成树矛盾.

∴任何圈中的最长边不在任何一棵最小生成树中.

1° 当k=3时.

题八 考虑3棵子树T_1, T_2, T_3的情况，假设三棵子树两两有公共顶点，但 $V(T_1) \cap V(T_2) \cap V(T_3) = \phi$

取T_1与T_2的一个公共顶点 v_1

再取T_1与T_3的一个公共顶点 v_2

~~两个点 v_1, v_2 不可能重合，否则~~

再取T_2与T_3的一个公共顶点 v_3

三个顶点两两不重合，否则 $V(T_1) \cap V(T_2) \cap V(T_3) \neq \phi$

那么在v_1与v_3之间存在一条经过v_2的路径

同时由于v_1与v_3均在T_2中，又存在一条不经过v_2的路径 ($v_2 \notin T_2$)

∴ v_1与v_3之间有两条不同路径，则

T不是一棵树

这与题目设定矛盾

∴ $V(T_1) \cap V(T_2) \cap \cdots \cap V(T_3) \neq \phi$

~~当k>3时~~

2° 当k=2时，显然成立

3° 当k>3时，若 ~~n=k-1~~ $n<k$ 时均成立，则当n=k时

强归纳法：

~~由于~~ $\cancel{V(T_1) \cap V(T_2) \cap \cdots \cap V(T_{k-1}) \neq \phi}$

~~令~~ $\cancel{T_1' = V(T_1) \cup V(T_2) \cup V(}$

~~令~~ $\cancel{T_1' = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_{k-2}}$

~~令~~ $\cancel{T_2' = T_{k-1}}$

~~令~~ $\cancel{T_3' = T_k}$

~~易得3棵子树两两有公共顶点,~~

~~则~~ $\cancel{V(T_1') \cap V(T_2') \cap V(T_3') \neq \phi}$

~~同理可得由~~

~~取~~ $\cancel{V(T_1) \cap V(T_2) \cap \cdots \cap V(T_{k-1})}$ ~~中的一个点~~ $\cancel{v_1}$

~~取~~ $\cancel{T_k}$ ~~中的一个点~~ $\cancel{v_2}$

~~可得由~~ 令 $T_1' = T_1 \cap T_2 \cap \cdots \cap T_{k-2}$

$T_2' = T_{k-1}$

$T_3' = T_k$

$\because V(T_1) \cap V(T_2) \cap \cdots \cap V(T_{k-1}) \neq \phi$

$\therefore$ 易得 $V(T_1') \cap V(T_2') \neq \phi$

$V(T_2') \cap V(T_3') \neq \phi$

又 $\because V(T_1) \cap V(T_2) \cap \cdots \cap V(T_{k-2}) \cap V(T_k) \neq \phi$

$\therefore V(T_1') \cap V(T_3') \neq \phi$

$\therefore$ 由前面的结论可得

$V(T_1') \cap V(T_2') \cap V(T_3') \neq \phi$

$\therefore V(T_1) \cap V(T_2) \cap \cdots \cap V(T_k) \neq \phi$

$\therefore$ 原命题得证

No.

Date

反证法。

题五 ∵ G是每边长度为1的连通偶图

∴V(G)可分为两个非空子集X和Y，每条边一端在X中，

一端在Y中

$\forall xy \in E(G)$，不妨设 $x \in X$，$y \in Y$.

假设 $\exists v \in V(G)$，v到x的最短路与 v到y最短路

一样长：

1° 若该长度为偶数，由于最短路上X中点Y中点间隔出

则 v 既与x同属X，

又与y同属Y.

显然与G是偶图的条件相悖

2° 若长度为奇数，同理可得不成立

∴v到x的最短路不可能和v到y最短路一样长。

Campus