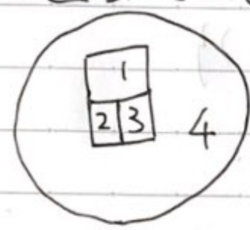
题一 最多可以将地球分成4个区域，使任何两个区域不相邻

证明：4个区域可以画成如下图



反证法。假设可以将地球分成5个区域，使任何两个区域不相邻

∵由平面图的可嵌入性，G可球面嵌入当且仅当G可平面嵌入。

∴划分成的5个区域可以画成平面图

∵由于四色定理，可以用4种颜色来给这些区域染色，使得每两个邻接区域染的颜色都不一样

∴至少有2个区域不相邻接

这与每两个区域都不相邻矛盾

∴最多可以将地球分成4个区域，使任何两个区域不相邻

题二 设 $G=(n,m)$ 是有10个顶点的5正则图，则

$n=10$

$m=\frac{10\times 5}{2}=25$

由Euler公式的推论知，对任何简单平面图G，有$m\le 3n-6$

而在G中

$3n-6=3\times 10-6=24<25=m$

∴有10个顶点的5正则图不是平面图

题三 证明:(1) 若G不连通, ~~则G至少存在两个连通分支H_1, H_2~~

~~$\chi(G)$~~ 设 H_1, H_2 为 G 的点色数最大的两个连通分支

则 $\chi(G) = \max\{\chi(H_1), \chi(H_2)\}$

设 $\chi(H_2) \le \chi(H_1)$ 则

$\exists\ v \in H_2$

$\chi(G-v) = \max\{\chi(H_1), \chi(H_2 - v)\} = \chi(H_1)$

$= \chi(G)$

∴ ~~若G连通,则∃~~ $\exists\ v \in V,\ \chi(G-v) \neq \chi(G)-1$

∴ 逆否命题成立:

若 $\forall v \in V,\ \chi(G-v) = \chi(G)-1$, G连通

(2) ∵ $\forall x, y \in V,\ \chi(G-x-y) = \chi(G)-2$

∴ 不存在2个节点 x, y, 使得在最小染色方案中 x, y 同色

(否则 $\chi(G-x-y) \ge \chi(G)-1$)

∴ 每个节点在G中都不同色

∴ 任意节点与其余节点都相邻

(否则对于节点v, 可以给它染上与v不相邻的u节点的同种颜色)

∴ G是完全图

题五 若G是H图，且为3正则图

∴每个顶点只与其他3个顶点相邻

∴对于~~在G中的H圈中~~，每个顶点连出的3条边，

有且只有2条在G中的圈中

（只有1条不构成圈，有3条会访问该顶点2次）

∴ 沿着该H圈，将圈中相邻的边染成2种不同的颜色

共使用2种颜色便可以满足要求，

对于每个顶点连出的第3条边，统一染成第3种颜色

∴使用3种颜色便可以对该H图染色

∴ 对于3正则图G，若G为H图，则G的边色数为3

逆否命题成立：3正则图G的边色数为4，则G不是H图

题六 反证法。假设存在一种颜色c，对于每一个c颜色的节点，

其邻居都不包含所有其他颜色，

∴那么对于这些节点中的每一个顶点v，我们可以找到在k种颜色中

与c不同，且没有被v的邻居用过的颜色C_v，并将v顶点

~~我们将每一个~~重新染成C_v色。

∴那么显然我们可以用k-1种（不需要c）颜色对原图染色

∴原图点色数至多为k-1，

这与点色数为k矛盾

∴原命题得证。