Economia Matemática II

1 Derivadas: Aplicações

1.1 Diferenciação Implícita

1. Encontre y' pela diferenciação implícita de $3x^2 + 2y = 5$. Cheque resolvendo a equação para y e então diferenciando.

2. Para a equação $x^2y = 1$, encontre dy/dx e d^2y/dx^2 pela diferenciação implícita.

3. Encontre dy/dx e d^2/dx^2 por diferenciação implícita quando:

   (a) $x - y + 3xy = 2$

   (b) $y^5 = x^6$

4. Suponha que y seja uma função diferenciável de x que satisfaz a equação $2x^2 + 6xy + y^2 = 18$. Encontre y' e y'' no ponto $(x, y) = (1, 2)$.

5. Para cada equação a seguir, responda: se $y = f(x)$ é uma função diferenciável que satisfaz a equação, qual é y'. Assuma a uma constante positiva.

   (a) $x^2 + y^2 = a^2$

   (b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

   (c) $x^4 - y^4 = x^2y^3$

   (d) $e^{xy} - x^2y = 1$

1.2 Exemplos Econômicos

1. De acordo com um estudo, a quantidade demandada Q de manteiga em Estocolmo durante o período de 1925 a 1937 estava relacionada ao preço pela equação $Q \cdot P^{1/2} = 38$. Encontre dQ/dP por diferenciação implícita. Cheque a resposta usando um método diferente para calcular a derivada.

2. Considere uma firma maximizadora de lucros produzindo um produto único. Se a firma obtem um preço fixo p por unidade vendida, seu lucro vendendo q unidades é $\pi(q) = pq - c(q)$, em que $c(q)$ é a função de custo. Assuma que $c'(q) > 0$ e $c''(q) > 0$. Assuma que $q = q^* > 0$ maximiza os lucros com respeito a q desde que $p = c'(q^*)$. Assim, no ponto ótimo, o custo marginal deve ser igual ao preço.

   (a) Por diferenciação implícita de $p = c'(q^*)$, encontre uma expressão para dq^*/dp.

   (b) Comente sobre o sinal de $dq*/dp$.

3. Considere a equação $Ap^{-\alpha}r^{-\beta} = S$ em que A, α, β e S são constantes positivas. O lado esquerdo da equação expressa a demanda por um produto como uma função decrescente do preço p e da taxa de juros r. Em equilíbrio, esta demadna deve igual uma quantidade ofertada fixa S.

   (a) Tome o logarítmo natural de ambos os lados e encontre dp/dr por diferenciação implícita.

   (b) Como o preço de equilíbrio reage a um aumento na taxa de juros?

1.3 Diferenciando a Inversa

1. A função definida para todo x por $f(x) = e^{2x-2}$ tem uma inversa g. Encontre x tal que $f(x) = 1$. Então, encontre $g'(1)$. Cheque o resultado encontrando uma fórmula para g.

2. Seja f definida por $f(x) = \ln(2 + e^{x-3})$, para todo x.
   (a) Mostre que f é estritamente crescente e encontre a imagem de f.
   (b) Encontre uma expressão para a função inversa g de f. Onde g é definida?
   (c) Verifique que $f'(3) = 1/g'(f(3))$.

1.4 Aproximações Lineares

1. Encontre a aproximação linear para $F(K) = AK^{\alpha}$ em torno de $K = 1$.

2. Encontre a aproximação linear para as seguintes funções em torno de $x = 0$:
   (a) $f(x) = (1 + x)^{-1}$
   (b) $f(x) = (1 + x)^{5}$
   (c) $f(x) = (1 - x)^{1/4}$

3. Se um montante K é devido para o cartão de crédito em que a taxa de juros anual é de $p\%$, então, ao menos que algum pagamento seja feito antes, depois de t anos o saldo devedor será $K_t = K(1 + p/100)^t$ (desconsiderando multas). Usando a aproximação $\ln(1 + p/100) \approx p/100$, prove que $\ln K_t \approx \ln K = pt/100$. Encontre a taxa de juros percentual p na qual o saldo devedor dobra depois de t anos.

4. Considere a função $g(x) = A(1 + \mu)^{a/(1+b)} - 1$ em que A, a e b são constantes positivas. Encontre a aproximação linear em torno do ponto $\mu = 0$.

1.5 Aproximação Polinomial

1. Encontre aproximações quadráticas para as seguintes funções
   (a) $f(x) = (1 + x)^5$ em torno de $x = 0$
   (b) $F(K) = AK^{\alpha}$ em torno de $K = 1$
   (c) $H(x) = (1 - x)^{-1}$ em torno de $x = 0$

2. Encontre a aproximação de Taylor de quinta ordem para $f(x) = \ln(1 + x)$ em torno de $x = 0$.

3. Encontre a aproximação de Taylor de segunda ordem para $f(x) = 5(\ln(1 + x) - \sqrt{1 + x})$ em torno de $x = 0$.

4. Um estudo de atitude em relação ao risco é baseado na seguinte aproximação:

$$U(y + m) \approx U(y) + U'(y)m + \frac{1}{2}U''(y)m^2$$

   para uma função utilidade, onde y é a renda inicial do consumidor, e m á prêmio aleatório. Explique como derivar esta aproximação.

1.6 Fórmula de Taylor

1. Use a aproximação $(1+x)^m \approx 1 + mx + (1/2)m(m-1)x^2$ e o fato de que $\sqrt[3]{25} = 3(1-2/27)^{1/3}$ para encontrar os valores de:

   (a) $\sqrt[3]{25}$
   (b) $\sqrt[5]{33}$

   Cheque estas aproximações usando uma calculadora.

2. Escreva a fórmula de Taylor com $n = 2$ para $f(x) = \ln(1+x)$.

3. Mostre que $\sqrt[3]{9} = 2(1+1/8)^{1/3}$. Use a fórmula de Taylor com $n = 2$ para calcular $\sqrt[3]{9}$ com três casas decimais.

1.7 Elasticidades

1. Encontre as elasticidades das funções dadas pelas seguintes fórmulas:

   (a) $3x^{-3}$
   (b) $-100x^{100}$
   (c) $\sqrt{x}$

2. Um estudo econômico sobre transportes considera a relação $T = 0.4K^{1.06}$, em que K é o gasto com a construção de rodovias, e T é uma medida do volume de tráfego. Encontre a elasticidade de T com respeito a K. Neste modelo, se o gasto aumenta em 1%, qual o aumento percentual (aproximado) do volume de tráfego.

3. Um estudo de sistemas de transporte em 37 cidades americanas estimou o tempo médio de deslocamento para o trabalho, m em minutos, como uma função do número de habitantes, N. O estudo encontrou que $m = e^{-0.02}N^{0.19}$. Escreva esta relação na forma log-linear. Qual é o valor de m quando $N = 480000$.

1.8 Continuidade

1. Sejam f e g definidas para todo x por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{para} \quad x \leq 0 \\ -x^2 & \text{para} \quad x > 0 \end{cases}$$

   e

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{para} \quad x \leq 2 \\ -x + 6 & \text{para} \quad x > 2 \end{cases}$$

   Desenhe um gráfico de cada função. f é contínua em $x = 0$? g é contínua em $x = 2$?

2. Determine os valores de x para os quais cada uma das funções definidas pelas seguintes fórmulas é contínua:

   (a) $x^5 + 4x$
   (b) $x/(1-x)$
   (c) $1/\sqrt{2-x}$
   (d) $x/(x^2+1)$
   (e) $(x^8 - 3x^2 + 1)/(x^2 + 2x - 2)$

1.9 Regra de L'Hopital

1. Use a regra de L'Hopital para encontrar
   (a) $\lim_{x\to 3} \frac{3x^2-27}{x-3}$
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x-(1/2)x^2}{3x^3}$
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x}-e^{-2x}+x}{x^2}$

2. Encontre os limites:
   (a) $\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+x}-2-x}{2\sqrt{1+x+x^2}-2-x}$

3. Encontre o erro no seguinte raciocínio:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{2x^2-2x} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+3}{4x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

4. Use a regra de L'Hopital para encontrar os seguintes limites
   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$
   (b) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$
   (c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-4x^3+6x^2-8x+8}{x^3-3x^2+4}$
   (d) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}$
   (e) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \ln\left(\frac{7x+1}{4x+4}\right)$
   (f) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x-x}{1-x+\ln x}$

5. Com $\beta > 0$ e $\gamma > 0$, encontre

$$\lim_{v\to 0^+} \frac{1-(1+v^\beta)^{-\gamma}}{v}.$$