Economia Matemática II

1 Diferenciação

1.1 Inclinação, Tangente e Derivada

1. Seja $f(x) = 4x^2$. Mostre que $f(5+h) - f(5) = 40h + 4h^2$, implicando que

$$\frac{f(5+h) - f(5)}{h} = 40 + 4h$$

para $h \neq 0$. Use este resultado para encontrar $f'(5)$.

2. A função de demanda por um produto com preço p é dada pela fórmula $D(p) = a - bp$. Determine $dD(p)/dp$.

3. O custo de produção de x unidades de um produto é dado pela fórmula $c(x) = p + qx^2$. Determine $c'(x)$.

4. Para cada caso abaixo, encontre a inclinação da tangente no gráfico de f no ponto especificado.
   (a) $f(x) = 3x + 2$, em $(0, 2)$
   (b) $f(x) = x^2 - 1$, em $(1, 0)$.
   (c) $f(x) = 2 + 3/x$, em $(3, 3)$.
   (d) $f(x) = x^3 - 2x$, em $(0, 0)$.
   (e) $f(x) = x + 1/x$, em $(-1, -2)$.
   (f) $f(x) = x^4$, em $(1, 1)$

5. Dada a função $y = 4x^2 + 9$:
   (a) Calcule o quociente de diferenças como uma função de x e Δx.
   (b) Calcule a derivada dy/dx.
   (c) Calcule $f'(3)$ e $f'(4)$.

6. Dada a função $y = 5x^2 + 4x$:
   (a) Calcule o quociente de diferenças como uma função de x e Δx.
   (b) Calcule a derivada dy/dx.
   (c) Calcule $f'(2)$ e $f'(3)$.

7. Dada a função $y = 5x - 2$. Calcule o quociente de diferenças $\Delta y/\Delta x$. Que tipo de função ele é?

1.2 Funções Crescentes e Decrescentes

1. Determine onde $f(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$ é crescente e onde é decrescente.

2. Mostre algebricamente que $f(x) = x^3$ é estritamente crescente, estudando o sinal de

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = (x_2 - x_1)\left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2\right].$$

1.3 Taxa de Variação

1. Seja $c(x) = x^2 + 3x + 100$ a função de custo de uma firma. Mostre que quando x varia de 100 para $100 + h$, em que $h \neq 0$, a taxa média de variação por unidades do produto é

$$\frac{c(100 + h) - c(100)}{h} = 203 + h.$$

2. Se a função de custo de uma firma é $c(x) = \bar{c} + cx$, forneça a interpretação econômica dos parâmetros $\bar{c}$ e c.

3. Se a poupança total é uma função $S(Y)$ do produto nacional Y, então $S'(Y)$ é chamada *propensão marginal a poupar*. Encontre a propensão marginal a poupar para as seguintes funções:
   (a) $S(Y) = \bar{S} + sY$.
   (b) $S(Y) = 100 + 0.1Y + 0.0002Y^2$.

4. Resolva:
   (a) A função de lucro de uma firma é $\pi(q) = 24q - q^2 - 5$. Encontre o lucro marginal, e o valor q^* de q que maximiza os lucros.
   (b) A função de receita de uma firma é $R(q) = 500q - \frac{1}{3}q^3$. Encontre a receita marginal.
   (c) Para uma função de custo particular $c(q) = -q^3 + 214.2q^2 - 7900q + 320700$, encontre o custo marginal.

1.4 Regras Simples de Diferenciação

1. Calcule as derivadas das seguintes funções:
   (a) $y = 5$.
   (b) $y = x^4$.
   (c) $y = 9x^{10}$.
   (d) $y = \pi^7$.

2. Suponha que $g'(x)$ seja conhecida. Encontre expressões para as derivadas das seguintes funções:
   (a) $2g(x) + 3$
   (b) $-(1/6)g(x) + 8$
   (c) $(g(x) - 5)/3$

3. Explique por que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

   Então, use esta fórmula para encontrar $f'(a)$ quando $f(x) = x^2$.

4. Para cada uma das seguintes funções, encontre a função $F(x)$ tendo $f(x)$ como sua derivada:
   (a) $f(x) = x^2$
   (b) $f(x) = 2x + 3$
   (c) $f(x) = x^a$, para $a \neq -1$

1.5 Soma, Produto e Quociente

1. Diferencie com respeito à x as seguintes funções:
   (a) $x + 1$
   (b) $x + x^2$
   (c) $3x^5 + 2x^4 + 5$
   (d) $8x^4 + 2\sqrt{x}$
   (e) $(2x^2 - 1)(x^4 - 1)$
   (f) $\frac{1}{x^6}$
   (g) $\frac{x+1}{x-1}$

2. Para cada uma das seguintes funções, determine os intervalos onde ela é crescente:
   (a) $y = 3x^2 - 12x + 13$
   (b) $y = \frac{1}{4}(x^4 - 6x^2)$
   (c) $y = \frac{x^2 - x^3}{2(x+1)}$

3. Se $f(x) = \sqrt{x}$, então $f(x) \cdot f(x) = x$. Diferencie esta equação usando a regra do produto para encontrar uma formula para $f'(x)$.

1.6 Regra da Cadeia

1. Use a regra da cadeia para encontrar dy/dx para os seguintes casos
   (a) $y = 5u^2$, onde $u = 1 + x^2$
   (b) $y = u - u^6$, onde $u = 1 + 1/x$

2. Se Y é uma função de K, e K é uma função de t, encontre a fórmula para a derivada de Y com respeito a t em $t = t_0$.

3. Se $Y = F(K)$ e $K = h(t)$, encontre a fórmula para dY/dt.

4. Considere a função de demanda $x = b - \sqrt{ap - c}$, onde a, b e c são constantes positivas, x é a quantidade demandada, e p o preço, para $p > c/a$. Calcule dx/dp.

5. Suponha um investimento de \$ 1000 à uma taxa de juros de $p\%$ ao ano. Seja $g(p)$ o quanto de recurso disponível depois de dez anos.
   (a) Forneça uma intrepretação econômica de:
      i. $g(5) \approx 1629$
      ii. $g'(5) \approx 155$
   (b) Para checar os números na alternativa anterior, encontre uma fórmula para $g(p)$, então compute $g(5)$ e $g'(5)$.

6. Se $f(x) = \sqrt{x}$, então $f(x) \cdot f(x) = x$. Diferencie esta equação usando a regra do produto para encontrar uma formula para $f'(x)$.

1.7 Derivadas de Ordem Mais Alta

1. Calcule a segunda derivada de:
   (a) $y = x^5 - 3x^4 + 2$
   (b) $y = \sqrt{x}$
   (c) $y = (1 + x^2)^{10}$

2. Encontre d^2y/dx^2 quando $y = \sqrt{1 + x^2} = (1 + x^2)^{1/2}$.

3. Calcule
   (a) y'' para $y = 3x^3 + 2x - 1$
   (b) y''' para $y = 1 - 2x^2 + 6x^3$
   (c) d^3z/dt^3 para $z = 120t - (1/3)t^3$
   (d) $f^{(4)}(1)$ para $f(z) = 100z^{-4}$

4. Encontre $g''(2)$ quando $g(t) = \frac{t^2}{t-1}$.

5. Encontre fórmulas para y'' e y''' quando $y = f(x)g(x)$.

6. Se $u(y)$ denota a utilidade de um indivíduo com renda (ou consumo) y, então $R = -yu''(y)/u'(y)$ é o coeficiente relativo de aversão ao risco. Calcule R para as seguintes funções utilidades, onde A_1, A_2 e ρ são constantes positivas com $\rho \neq 1$, e assuma $y > 0$:
   (a) $u(y) = A_1 y$
   (b) $u(y) = \sqrt{y}$
   (c) $u(y) = A_1 - A_2 y^{-2}$
   (d) $u(y) = A_1 + A_2 \frac{y^{1-\rho}}{1-\rho}$

7. Examine a concavidade/convexidade da função de produção $Y = AK^a$, definida para todo $K \geq 0$, onde $A > 0$ e $a > 0$.

8. Suponha que duas funções u e g são ambas crescentes e côncavas, com $u' \geq 0$, $u'' \leq 0$, $g' \geq 0$, $g'' \leq 0$. Mostre que a função composta $f(x) = g(u(x))$ é também crescente e côncava.

1.8 Funções Exponenciais

1. Encontre a primeira derivada de:
   (a) $y = e^x + x^2$
   (b) $y = 5e^x - 3x^3 + 8$
   (c) $y = x^3 e^x$
   (d) $y = \frac{x+x^2}{e^x+1}$

2. Encontre a primeira e a segunda derivada de:
   (a) $y = e^{-3x}$

(b) $y = 2e^{x^3}$

(c) $y = e^{1/x}$

(d) $y = 5e^{2x^2-3x+1}$

3. Encontre $g''(2)$ quando $g(t) = \frac{t^2}{t-1}$.

4. Encontre os intervalos onde as seguintes funções são crescentes:

   (a) $y = x^2/e^{2x}$

   (b) $y = e^x - e^{3x}$

1.9 Funções Logarítmicas

1. Encontre a primeira e a segunda derivada de:

   (a) $y = \ln x + 3x - 2$

   (b) $y = x^2 - 2\ln x$

   (c) $y = x^3 \ln x$

   (d) $y = \frac{\ln x}{x}$

2. Encontre as derivada de:

   (a) $y = x^3(\ln x)^2$

   (b) $y = (\ln x)^{10}$

   (c) $y = (\ln x + 3x)^2$

3. Determine o domínio da função definida por $y = \ln(x+1)$.

4. Use a diferenciação logarítmica para encontrar $f'(x)/f(x)$ quando

   (a) $f(x) = x^{2x}$

   (b) $f(x) = \sqrt{x-2}(x^2+1)(x^4+6)$

   (c) $f(x) = \Big((x+1)/(x-1)\Big)^{1/3}$