Economia Matemática II

1 Integração

1.1 Integrais Indefinidas

1. Encontre as seguintes integrais:
   (a) $\int x^{13}dx$
   (b) $\int x\sqrt{x}dx$
   (c) $\int e^{-x}dx$
   (d) $\int 3e^{-2x}dx$

2. Na produção de um produto, o custo marginal de produzir x unidades é $c'x$ e os custos fixos são $c(0)$. Encontre a função de custo total $c(x)$ quando:
   (a) $c'(x) = 3x + 4$ e $c(0) = 40$
   (b) $c'(x) = ax + b$ e $c(0) = c_0$

3. Encontre as seguintes integrais:
   (a) $\int (t^3 + 2t - 3)dt$
   (b) $\int (x - 1)^2 dx$
   (c) $\int (x - 1)(x + 2)dx$
   (d) $\int (x + 2)^3 dx$

4. Mostre que
$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c.$$

1.2 Área e Integrais Definidas

1. Calcule a área limitada pelo gráfico das funções a seguir, no intervalo definido:
   (a) $f(x) = 3x^2$ em $[0, 2]$
   (b) $f(x) = x^6$ em $[0, 1]$
   (c) $f(x) = 1/x^2$ em $[1, 10]$

1.3 Propriedades das Integrais Definidas

1. Avalie as seguintes integrais
   (a) $\int_0^5 (x + x^2)dx$
   (b) $\int_{-4}^4 (x - 1)^3 dx$
   (c) $\int_1^2 (x^5 + x^{-5})dx$

2. Se $\int_a^b f(x)dx = 8$ e $\int_a^c f(x)dx = 4$, calcule $\int_c^b f(x)dx$?

3. Seja p, q, e r constantes positivas. Avalie a integral $\int_0^1 x^p(x^q + x^r)dx$.

1.4 Aplicações Econômicas

1. Assuma que a taxa de extração $u(t)$ de um poço de petróleo diminui exponencialmente ao longo do tempo, com $u(t) = \bar{u}e^{-at}$, em que $\bar{u}$ e a são constantes positivas. Dado o estoque inicial $x(0) = K$, encontre uma expressão $x(t)$ para a quantidade restante de óleo no instante t. Sob quais condições o poço nunca se esgotará?

2. Resolva a equação $S = \int_0^T e^{rt}dt$ para T.

3. Seja $K(t)$ o estoque de capital em uma economia no instante t. Então, o investimento líquido no instante t, $I(t)$, é dado pela taxa de crescimento $\dot{K}$ de $K(t)$.
   (a) Se $I(t) = 3t^2 + 2t + 5$, para $t \geq 0$, qual é o crescimento total no estoque de capital durante o intervalo de $t = 0$ até $t = 5$?
   (b) Se $K(t_0 = K_0$, encontre uma expressão para o crescimento total do estoque de capital de $t = t_0$ até $t = T$ quando a função de investimento $I(t)$ é dada com na alternativa anterior.

4. Suponha que as funções inversas de oferta e demanda seja, respectivamente, $p = g(q) = 20 + 0.1q$ e $p = f(q) = 200 - 0.2q$. Encontre o preço e a quantidade de equilíbrio, e calcule o excedente do consumidor e do produtor.

1.5 Integração por Partes

1. Use integração por partes para avaliar o segue:
   (a) $\int xe^{-x}dx$
   (b) $\int 3xe^{4x}dx$
   (c) $\int x \ln x dx$

2. Naturalmente, $f(x) = 1 \cdot f(x)$ para qualquer função $f(x)$. Use este fato e a integração por partes para provar que
$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx.$$
   Aplique esta fórmula para $f(x) = \ln x$.

3. Dado que $\rho \neq -1$, mostre que
$$\int x^\rho \ln x dx = \frac{x^{\rho+1}}{\rho+1}\ln x - \frac{x^{\rho+1}}{(\rho+1)^2} + c.$$

1.6 Integração por Substituição

1. Encontre as seguintes integrais
   (a) $\int (x^2 + 1)^8 2xdx$

(b) $\int (x+2)^{10} dx$
(c) $\int [(2x-1)/(x^2-x+8)] dx$

2. Encontre as seguinte integrais por meio de substituição apropriada:

(a) $\int x(2x^2+3)^5 dx$
(b) $\int x^2 e^{x^{3+2}} dx$
(c) $\int \frac{\ln(x+2)}{2x+4} dx$
(d) $\int x\sqrt{1+x} dx$
(e) $\frac{x^3}{(1+x^2)^3} dx$
(f) $\int x^5 \sqrt{4-x^3} dx$