

Teoria delle interazioni fondamentali

Matteo Abis

26 novembre 2011

1 Teorie di gauge

Definizione (Teoria di gauge). una teoria quantistica di campi invariante sotto trasformazioni locali di un gruppo di Lie, detto gruppo *di gauge*. Le trasformazioni sono locali se i parametri dipendono dal punto dello spazio-tempo.

1.1 Prototipo: l'elettrodinamica quantistica

campi: un campo spinoriale $\psi(x)$, un campo vettoriale $A^\mu(x)$;

trasformazioni di gauge: sotto l'azione degli elementi del gruppo di gauge $U(1)$ i campi trasformano come

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= e^{-ie\alpha(x)}\psi(x) \\ A^{\mu'}(x) &= A^\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x);\end{aligned}$$

rinormalizzabilità: compaiono nella lagrangiana soltanto termini con dimensione $d \leq 4$.

La lagrangiana più generale compatibile con questi requisiti è dunque:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi$$

1.2 Teorie di gauge non abeliane

Discutiamo nel dettaglio la costruzione di una generica teoria di gauge, seguendo gli stessi passi che ci hanno portato alla formulazione dell'elettrodinamica quantistica. È necessario innanzitutto identificare i componenti fondamentali della teoria.

gruppo di gauge G : deve essere un

- gruppo di Lie. Sia n la sua dimensione;
- compatto, perché le rappresentazioni siano unitarie;
- semplice, ovvero senza sottogruppi invarianti non banali. Questa richiesta non è fondamentale e sarà eliminata in seguito.

campi di spin $1/2$ e spin 0 : genericamente indicati con il multipletto φ .

proprietà di trasformazione dei campi: il multipletto dei campi deve trasformare come una rappresentazione R del gruppo G . Detti t_R^a ($a = 1, \dots, n$) i generatori del gruppo in tale rappresentazione, e α_a i parametri della trasformazione

$$\varphi'(x) = \Omega\varphi = e^{-i\alpha_a t_R^a}\varphi(x).$$

È talvolta utile considerare trasformazioni infinitesime

$$\delta\varphi = -i\alpha_a t_R^a \varphi.$$

Introduciamo infine le costanti di struttura dell'algebra di Lie f_c^{ab}

$$[t^a, t^b] = i f_c^{ab} t^c$$

Una volta specificati gli ingredienti, la teoria segue immediatamente dall'applicazione di una procedura quasi meccanica:

1. determinazione della lagrangiana $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ più generale invariante per il gruppo G sotto trasformazioni globali, ovvero indipendenti dal punto dello spazio-tempo;
2. promozione delle trasformazioni globali in trasformazioni locali. A questo punto i termini con le derivate non trasformano più come i campi e la lagrangiana non è più invariante:

$$(\partial_\mu \varphi)' = (\partial_\mu \Omega) \varphi + \Omega (\partial_\mu \varphi) \neq \Omega (\partial_\mu \varphi). \quad (1)$$

Si introduce dunque una *derivata covariante*, che trasforma come i campi, D_μ

$$D_\mu \varphi = (\partial_\mu + i A_{a\mu} t^a) \varphi$$

dove abbiamo introdotto un campo vettoriale reale *di gauge* $A_\mu = i A_{a\mu} t^a$, che è un elemento dell'algebra di Lie del gruppo G . Vogliamo infatti che questo termine cancelli il primo addendo della (1), che è un elemento dell'algebra di Lie. Imponendo quindi la legge di trasformazione già valida per i campi

$$(D_\mu \varphi)' = \Omega D_\mu \varphi$$

$$(\partial_\mu + A'_\mu) \Omega \varphi = (\partial_\mu \Omega) \varphi + \Omega (\partial_\mu \varphi) + A'_\mu \Omega \varphi = \Omega (\partial_\mu \varphi) + \Omega A_\mu \varphi$$

$$(A'_\mu \Omega - \Omega A_\mu + \partial_\mu \Omega) \varphi = 0$$

otteniamo la legge di trasformazione per i campi di gauge, moltiplicando a destra per Ω^{-1} :

$$A'_\mu = \Omega A_\mu \Omega^{-1} - (\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1}. \quad (2)$$

La (2) si può capire meglio in termini dei campi $A_{a\mu}$ scrivendola per trasformazioni infinitesime:

$$\begin{aligned} i A'_{a\mu} t^a &= (1 - i \alpha_b t^b) A_{c\mu} t^c (1 + i \alpha_b t^b) - [\partial_\mu (1 - i \alpha_a t^a) (1 + \dots)] \\ &= i A_{a\mu} t^a + \alpha_a A_{c\mu} [t^b, t^c] + i \partial_\mu \alpha_a t^a \\ &= i (A_{a\mu} + \partial_\mu \alpha_a) t^a + i f_a^{bc} t^a \\ A'_{a\mu} &= A_{a\mu} + \partial_\mu \alpha_a + f_a^{bc} \alpha_b A_{c\mu}. \end{aligned} \quad (3)$$

Vediamo dunque che, rispetto al caso abeliano dell'elettrodinamica quantistica, si introduce un nuovo termine nella trasformazione dei campi di gauge di teorie non abeliane. Tecnicamente, i campi di gauge trasformano nella rappresentazione aggiunta di G , i cui generatori sono i $(t_A^b)_a^c = i f_a^{bc}$.

$$\delta\varphi = -i(t_R^a)\alpha_a\varphi \quad \text{campi di materia}$$

$$\delta A_{a\mu} = -i(t_A^b)_a^c \alpha_b A_{c\mu} \quad \text{campi di gauge.}$$

Poiché i campi di gauge trasformano in modo non banale sotto l'azione del gruppo, essi trasportano una carica. La lagrangiana così ottenuta $\mathcal{L}(\varphi, D_\mu \varphi)$ è ora invariante per trasformazioni locali.

3. si completa la lagrangiana con un termine cinetico per i campi di gauge, analogamente al termine $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ in QED.

Nel caso non abeliano:

$$\begin{aligned}
([D_\mu, D_\nu]\varphi)' &= \Omega[D_\mu, D_\nu]\varphi = \Omega[D_\mu, D_\nu]\Omega^{-1}\varphi' \\
[D_\mu, D_\nu]\varphi &= (\partial_\mu + A_\mu)(\partial_\nu + A_\nu)\varphi - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \underbrace{\partial_\mu\partial_\nu\varphi + A_\nu(\partial_\mu\varphi) + A_\mu(\partial_\nu\varphi)}_{\text{simmetrico, si cancella}} + (\partial_\mu A_\nu)\varphi + A_\mu A_\nu\varphi - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \underbrace{\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + [A_\mu, A_\nu]\}}_{:=F_{\mu\nu}} \varphi \\
F'_{\mu\nu} &= \Omega F_{\mu\nu} \Omega^{-1}
\end{aligned}$$

O, in termini dei campi $A_{a\mu}$

$$F_{a\mu\nu} = \partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu} - f_a^{bc} A_{b\mu} A_{c\nu}. \quad (4)$$

Possiamo ora inserire un termine cinetico invariante di gauge e definito positivo. Questo perché vogliamo che l'hamiltoniana abbia un minimo. Tale termine sarà proporzionale, con una costante k alla traccia

$$k \operatorname{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -k F_{a\mu\nu} F_b^{\mu\nu} \operatorname{tr}(t^a t^b)$$

Per un generico gruppo compatto $K^{ab} = \operatorname{tr}(t_R^a t_R^b)$ è definita positiva. Infatti $K^{ab} u_a u_b = \operatorname{tr}((t_R^a u_a)^2) \geq 0$ perché i generatori sono hermitiani.

Scegliamo allora la base in cui $K^{ab} = C\delta^{ab}$ è diagonale e multiplo dell'identità. Infine, per analogia con la QED, fissiamo la costante $k = 1/4C$.

$$\begin{aligned}
-k F_{a\mu\nu} F_b^{\mu\nu} \operatorname{tr}(t^a t^b) &= -k C F_{a\mu\nu} F^{a\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4} \{ (\partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu})(\partial_\mu A^{a\nu} - \partial_\nu A^{a\mu}) + \underbrace{\dots}_{\text{parte non abeliana}} \}
\end{aligned}$$

Siamo pronti per scrivere la lagrangiana più generale per una teoria di gauge, ora che abbiamo una parte invariante locale sotto il gruppo G e un termine cinetico per i nuovi campi vettoriali. Possiamo ancora fissare il peso relativo g^2 di questi due termini.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, D_\mu\varphi) - \frac{1}{4g^2} F_{a\mu\nu} F^{a\mu\nu}$$

Questo peso relativo ha il significato di costante di accoppiamento tra i campi φ a spin 0 e $1/2$ e i campi vettoriali. Infatti ridefinendo i campi A_μ :

$$\begin{aligned}
A_{a\mu} &\longrightarrow g A_{a\mu} \\
\mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L}(\varphi, D'_\mu\varphi) - \frac{1}{4} F'_{a\mu\nu} F'^{a\mu\nu} \\
&\text{dove} \\
D'_\mu\varphi &= (\partial_\mu + ig A_{a\mu} t^a)\varphi \\
F'_{a\mu\nu} &= \partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu} - g f_a^{bc} A_{b\mu} A_{c\nu}
\end{aligned}$$

Quest'ultimo termine mette anche in evidenza il fatto che, in una teoria non abeliana, compaiono dei termini di interazione tra bosoni di gauge.

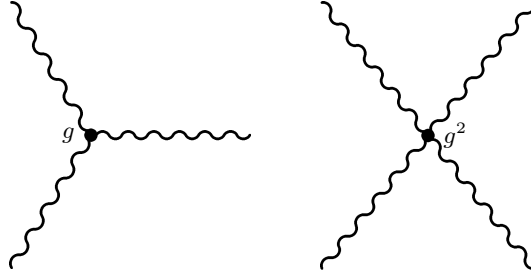


Figura 1: Interazioni a tre e quattro bosoni, che derivano dai nuovi termini nella lagrangiana per teorie non abeliane.

1.3 Esempio: la cromodinamica quantistica

gruppo: $G = SU(3)$

campi e trasformazioni: spinori di Dirac q che trasformano con la rappresentazione fondamentale 3 di $SU(3)$. Quindi q è un oggetto di dimensione 3 e possiamo scrivere esplicitamente l'indice di colore $c = 1, 2, 3$.

$$q'_c = e^{-i\alpha_a \lambda^a} q_c.$$

I generatori λ_a sono le otto matrici di Gell-Mann.

Con la procedura ora descritta si ricava subito la lagrangiana della QCD:

1. scriviamo la lagrangiana più generale con invarianza globale

$$\mathcal{L} = i\bar{q}_c \gamma^\mu \partial_\mu q_c - m\bar{q}_c q_c;$$

2. rendiamo l'invarianza locale introducendo la derivata covariante e i campi di gauge $G_{a\mu}$:

$$D_\mu q = (\partial_\mu + ig_s G_{a\mu} \lambda^a) q$$

3. completando con i termini cinetici:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G^{a\mu\nu} + i\bar{q} \gamma^\mu (\partial_\mu + ig_s G_{a\mu} \lambda^a) q - m\bar{q} q$$

4. resta solo da estendere al caso di sei sapori di quark $f = u, d, \dots, t$.

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G^{a\mu\nu} + \sum_f [i\bar{q}_f \gamma^\mu (\partial_\mu + ig_s G_{a\mu} \lambda^a) q_f - m\bar{q}_f q_f]$$

2 Rottura spontanea di simmetria

2.1 Il teorema di Goldstone

Con la rottura spontanea di una simmetria globale in una teoria quantistica di campi, compaiono particelle di spin 0 e massa nulla, detti bosoni di Goldstone.

Esempio: campo scalare complesso

La lagrangiana per il campo scalare complesso, con una simmetria globale $U(1)$ è:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial_\mu \varphi)^\dagger (\partial^\mu \varphi) - V(|\varphi|^2) \\ &= (\partial_\mu \varphi)^\dagger (\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2 \end{aligned}$$

Dove $\lambda > 0$ perché l'energia abbia un minimo. Ora, con $m^2 > 0$ otteniamo la solita teoria del campo scalare complesso, mentre il caso $m^2 < 0$ è più interessante.

Consideriamo infatti il caso $m^2 < 0$. Scriviamo il campo con le sue componenti reali. In termini di queste componenti, la simmetria $U(1)$ diventa una simmetria per rotazioni $SO(2)$.

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo i minimi dell'hamiltoniana $\mathcal{H} = |\dot{\varphi}|^2 + |\nabla\varphi|^2 + V(|\varphi|^2)$. La parte con le derivate si annulla per φ costante, cerchiamo quindi i minimi del potenziale.

$$V = \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = m^2 \varphi_i^2 + \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi_i$$

$$= \varphi_i(m^2 + \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)).$$

Quindi le derivate si annullano per

1. $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$
2. $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = -\frac{m^2}{\lambda} =: v$

Calcolando la matrice delle derivate seconde si verifica facilmente che solo la seconda possibilità corrisponde a un minimo, e che gli autovalori in questo caso sono 0 e 1. Inoltre, parametrizziamo i campi attorno al minimo

$$v_1 = v \cos \vartheta$$

$$v_2 = v \sin \vartheta.$$

Scegliendo un minimo abbiamo una rottura spontanea di simmetria. Espandiamo la lagrangiana intorno a questo minimo:

$$V = V(2.) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}|_2(\varphi_1 - v_1) + \frac{\partial V}{\partial \varphi_2}|_2(\varphi_2 - v_2)}_{=0 \text{ nel minimo}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} |_2 \underbrace{(\varphi_i - v_i)}_{=: \varphi'_i} \underbrace{(\varphi_j - v_j)}_{=: \varphi'_j}$$

Con le ridefinizioni dei campi φ'_i possiamo scrivere la lagrangiana come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi'_1 \partial^\mu \varphi'_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi'_2 \partial^\mu \varphi'_2 + \frac{1}{2} 2\lambda v^2 \begin{pmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi'_1 \partial^\mu \varphi'_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi'_2 \partial^\mu \varphi'_2 + \lambda v^2 (\cos \vartheta \varphi'_1 + \sin \vartheta \varphi'_2)^2$$

Con un cambio di variabili finale possiamo ridefinire i campi e la lagrangiana con

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2) - \lambda v^2 \varphi_1^2$$

In questi termini, la lagrangiana descrive due campi scalari: φ_1 con massa $m_1 = 2\lambda v^2$ e φ_2 con massa nulla, detto bosone di Goldstone. Possiamo ora enunciare il teorema in generale.

Teorema (di Goldstone).

- Sia $\mathcal{L}(\varphi, \chi)$ una lagrangiana con campi reali di spin 0 φ e campi di spin $1/2$ χ ;
- \mathcal{L} invariante globale sotto l'azione di un gruppo G .
- $\varphi_i = v_i$ configurazione costante che minimizza l'energia;
- infine diciamo $H < G$ la simmetria residua, ovvero il sottogruppo di G che lascia invariata la configurazione di equilibrio.

Allora la matrice delle derivate seconde di V ha esattamente $\dim(G) - \dim(H)$ autovalori nulli, che corrispondono a particelle di massa nulla e spin 0 (bosoni di Goldstone).

Dimostrazione. La lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_i \partial^\mu \varphi_i - V(\varphi) + \underbrace{\dots}_{\text{dipendenza da } \chi}$$

e, nella configurazione di minimo vale:

$$0 = \delta V = \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i = \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} (-i \alpha_a t_{ij}^a \varphi_j) \quad \forall \alpha_a$$

e deve essere anche nulla l'espressione:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} t_{ij}^a \varphi_j = 0.$$

Derivando rispetto a φ_k

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} t_{ij}^a \varphi_j + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \varphi_i}}_{=0 \text{ nel minimo}} t_{ik}^a = 0$$

Quindi rimane:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} t_{ij}^a v_j = 0$$

da cui si legge che $t_{ij}^a v_j$ è un autovettore relativo all'autovalore 0. Contiamo correttamente gli autovettori indipendenti. Ordiniamo i generatori mettendo prima i generatori del gruppo H : $t_{ij}^a = \{t^1, \dots, t^{\dim(H)}, \dots, t^{\dim(G)}\}$.

Se $a = 1, \dots, \dim(H)$ allora $h = e^{-i \alpha_a t^a} \in H$ e, per ipotesi, $h v = v$. Per una trasformazione infinitesima dunque $(1 - i \alpha_a t^a) v = v$, da cui si legge $t^a v = 0$. Restano dunque $\dim(G) - \dim(H)$ autovettori non nulli linearmente indipendenti.

La matrice delle derivate seconde del potenziale diventa ovviamente la matrice di massa. Espandendo intorno alla configurazione di equilibrio $\varphi_i = v_i$ e ridefinendo $\varphi'_i = \varphi_i - v_i$, otteniamo le equazioni del moto:

$$\left(i_{ij} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \Big|_{\varphi=v} \right) \varphi'_j = 0$$

Da cui si vede che il sistema ha $\dim(G) - \dim(H)$ particelle a spin e massa nulli, dette appunto bosoni di Goldstone. \square

Esempio: i mesoni pseudoscalari leggeri

Non sono mai stati osservati i bosoni di Goldstone a spin 0 e massa nulla. Tuttavia la teoria si può applicare a un'approssimazione della QCD. Considerando solo i quark leggeri $q = (u, d, s)$, la lagrangiana ricavata nel paragrafo 1.3:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G^{a\mu\nu} + i \bar{q} \gamma^\mu D_\mu q - \bar{q} m q$$

Se trascuriamo le masse dei quark leggeri, otteniamo una lagrangiana invariante sotto un gruppo di simmetria più ampio. Infatti scompare l'unico termine che mescola le chiralità *left* e *right*, che ora possono trasformare con due fasi indipendenti. Il gruppo diventa quindi $G = SU(3)_L \times SU(3)_R$.

Tuttavia, non esistono multipletti dinamici con masse molto simili. Questo fa pensare che la simmetria sia spontaneamente rotta. Il ruolo dei campi scalari in questa teoria è giocato dai bilineari fermionici $\bar{q}q = \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s$.

Una trattazione non perturbativa mostra in effetti che la configurazione di energia minima non si trova nell'origine $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \neq 0$. Qual è la simmetria residua H ? Un elemento di questo sottogruppo dovrebbe lasciare invariato:

$$\langle 0|\bar{q}_R q_L + \text{h.c.}|0\rangle \xrightarrow{G} \langle 0|\bar{q}_R \Omega_R^\dagger \Omega_L q_L + \text{h.c.}|0\rangle.$$

Ciò accade se e solo se le fasi con cui trasformano le parti *left* e *right* sono uguali. $\alpha_{aL} = \alpha_{aR} =: \alpha_a$. Risulta dunque che il gruppo H è $SU(3)$. Questo gruppo ha otto generatori, quindi la teoria avrà $8 + 8 - 8 = 8$ bosoni di Goldstone. Queste otto particelle con spin 0 e massa piccola sono gli otto mesoni pseudoscalari leggeri π , K e η .

2.2 Il meccanismo di Higgs

Il meccanismo di Higgs consente di dare massa ai bosoni di gauge attraverso la rottura spontanea di una simmetria continua *locale*. In questo modo, la teoria conserva l'invarianza di gauge.

Esempio: modello di Higgs abeliano

È la versione locale dell'esempio visto nel paragrafo 2.1 per il teorema di Goldstone. Sia φ un campo scalare complesso e $G = U(1)$ il gruppo di invarianza locale. Le trasformazioni sono dunque

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= e^{-i\alpha(x)}\varphi(x) \\ A'_\mu(x) &= A_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x).\end{aligned}$$

Ricordiamo anche la lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^\dagger(D^\mu\varphi) - V(|\varphi|^2) \\ V &= m^2\varphi^\dagger\varphi + \lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2.\end{aligned}$$

Con gli stessi passaggi del caso globale, con $\lambda > 0$ e $m^2 < 0$, troviamo la configurazione di minima energia, ovvero il valore di aspettazione del vuoto

$$\langle 0|\varphi|0\rangle := \langle\varphi\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}e^{i\vartheta}$$

essendo $\langle A_\mu\rangle = 0$ per mantenere l'invarianza di Lorentz. Mandiamo tutti i minimi nell'origine delle nuove coordinate, usando una rappresentazione polare con un modulo e una fase (due campi reali):

$$\varphi(x) = \frac{v + \sigma(x)}{\sqrt{2}}e^{i\vartheta}e^{i\frac{\xi(x)}{v}}$$

si vede che ho il minimo per $\sigma = \xi = 0$, e quindi $\varphi = ve^{i\vartheta}/\sqrt{2}$. Scriviamo la lagrangiana in termini di questi due nuovi campi:

$$\varphi^\dagger \varphi = \frac{(v + \sigma)^2}{2}$$

$$V = \frac{m^2}{2}(v + \sigma)^2 + \frac{\lambda}{4}(v + \sigma)^4$$

$$\begin{aligned} D_\mu \varphi &= (\partial_\mu + igA_\mu) \frac{v + \sigma}{\sqrt{2}} e^{i\vartheta} e^{i\frac{\xi}{v}} \\ &= e^{i\vartheta} e^{i\frac{\xi}{v}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \sigma + igA_\mu \frac{v + \sigma}{\sqrt{2}} + \frac{v + \sigma}{\sqrt{2}} i \frac{\partial_\mu \xi}{v} \right\} \\ &= e^{i\vartheta} e^{i\frac{\xi}{v}} \left\{ \frac{\partial_\mu \sigma}{\sqrt{2}} + ig \frac{v + \sigma}{\sqrt{2}} \left[A_\mu + \frac{\partial_\mu \xi}{gv} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + g^2 \frac{(v + \sigma)^2}{2} \left[A_\mu + \frac{\partial_\mu \xi}{gv} \right]^2 - V(\sigma)$$

Ridefiniamo $A_\mu = A_\mu + \partial_\mu \xi / gv$. Non è una trasformazione di gauge perché non coinvolge il campo φ .

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{g^2}{2} (v + \sigma)^2 A_\mu A^\mu - V(\sigma)$$

Leggiamo la fisica da questa lagrangiana:

- il campo ξ è sparito, non fa parte della fisica;
- è comparso un termine di massa per il campo A_μ , con $m_A^2 = g^2 v^2$;
- ξ è sparito ma la teoria ha lo stesso numero di gradi di libertà di prima. Nel caso $m^2 > 0$ infatti, φ e A_μ trasportano ciascuno due gradi di libertà. Nel caso $m^2 < 0$ invece A_μ ha una massa e quindi tre gradi di libertà, con un solo grado di libertà per il campo reale σ .

Notiamo che con la quantizzazione della teoria ci sono delle differenze rispetto al caso classico. Infatti lo stato di vuoto della teoria quantistica $|0\rangle$, che corrisponde al minimo dell'energia, è unico. Al contrario, nella teoria classica abbiamo infiniti minimi raggiungibili con trasformazioni di G . Quindi dovremmo avere $U|0\rangle \neq |0\rangle$ e quindi la carica del vuoto sarebbe $Q|0\rangle \neq 0$.

Questa apparente contraddizione si risolve osservando che nella teoria quantistica il segnale di rottura spontanea di simmetria è molto più sottile: non si può infatti costruire l'operatore Q perché $\int d^3x j^0 \rightarrow \infty$.

3 La lagrangiana della teoria elettrodebole

3.1 Parte bosonica

gruppo di gauge: $G = SU(2) \times U(1)$. I generatori T^1, T^2, T^3, Y soddisfano alle regole di commutazione

$$\begin{aligned} [T^a, T^b] &= i\epsilon^{abc} T^c \\ [T^a, Y] &= 0. \end{aligned}$$

campi di materia a spin 0: devono realizzare la rottura spontanea di $SU(2) \times U(1)$ in modo da dare massa ai bosoni W^\pm e Z , con un'invarianza residua $U(1)_{em}$ in modo da lasciare il fotone a massa nulla.

La scelta più semplice è un doppietto complesso di Higgs con ipercarica $Y = 1/2$, che trasforma sotto G come la rappresentazione $(2, 1/2)$:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi' = e^{-i\alpha_a \frac{\sigma^a}{2}} e^{-i\beta \frac{1}{2}} \varphi$$

Non è ora restrittivo, percorrendo le valli di minimo, raggiungere un minimo in cui $\langle \varphi \rangle = (0, v/\sqrt{2})$. Verifichiamo che c'è un'invarianza residua. Per una trasformazione infinitesima

$$(-i\alpha_a \frac{\sigma^a}{2} - i\beta \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \alpha_3 + \beta & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & -\alpha_3 + \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\frac{iv}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha_1 - i\alpha_2 \\ -\alpha_3 + \beta \end{pmatrix}$$

e tale variazione è nulla evidentemente se e solo se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = \beta = : \alpha$. Quindi c'è un sottogruppo $U(1)$ che lascia invariata la configurazione di minimo. Il generatore corrispondente è

$$Q = T^3 + Y = \frac{\sigma^3}{2} + \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dati questi ingredienti, con la procedura descritta nel paragrafo 1.2, è automatico scrivere la lagrangiana. Ad ognuno dei generatori del gruppo corrisponde un campo di gauge, con la corrispondente legge di trasformazione:

$$T_a \rightarrow W_{a\mu}$$

$$Y \rightarrow B_\mu$$

$$\delta W_{a\mu} = \varepsilon_{abc} \alpha^b W_\mu^c + \frac{\partial_\mu \alpha_a}{g}$$

$$\delta B_\mu = \frac{\partial_\mu \beta}{g'}.$$

Scriviamo subito la lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{bos}} = -\frac{1}{4} W_{a\mu\nu} W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)^\dagger (D^\mu \varphi) - V(\varphi)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig W_{a\mu} \frac{\sigma^a}{2} + i \frac{g'}{2} B_\mu$$

$$V(\varphi) = \mu^2 \varphi^\dagger \varphi + \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2$$

Scegliamo, come nell'esempio, il minimo con $\langle \varphi \rangle = (0, v/\sqrt{2})$. Bisogna scegliere una parametrizzazione per φ per leggere masse e accoppiamenti

$$\varphi(x) = e^{i\xi_a(x) \frac{\sigma^a}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Come nel caso abeliano, gli ξ_a scompaiono, quindi scriviamo direttamente

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$V(\varphi) = \frac{\mu^2}{2} (v + h)^2 + \frac{\lambda}{4} (v + h)^4$$

$$= \text{cost.} + \underbrace{\lambda v^2 h^2}_{\text{termine di massa}} + \mathcal{O}(h^3)$$

Da cui si legge subito che il bosone di Higgs ha una massa $m_h = 2\lambda v^2$. Il termine cinetico dà ora una massa ai bosoni vettori

$$\begin{aligned}
D_\mu &= \partial_\mu + igW_{a\mu}\frac{\sigma^a}{2} + ig'\frac{B_\mu}{2} \\
D_\mu\varphi &= \left\{ \frac{\partial_\mu h}{\sqrt{2}} + igW_{a\mu}\frac{\sigma^a}{2}\frac{v+h}{\sqrt{2}} + ig'\frac{v+h}{2\sqrt{2}}B_\mu \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \left\{ \frac{\partial_\mu h}{\sqrt{2}} + \frac{i}{2}\frac{v+h}{\sqrt{2}}(gW_{a\mu}\sigma^a + g'B_\mu) \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
D_\mu\varphi^\dagger D^\mu\varphi &= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{(v+h)^2}{8} (gW_a\sigma^a + g'B)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{seleziona l'elemento 2,2 della matrice}} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{(v+h)^2}{8} [gW_a\sigma^a + g'B]_{22}^2.
\end{aligned}$$

Calcoliamo l'elemento di matrice richiesto

$$\begin{aligned}
[gW_a\sigma^a + g'B]_{22}^2 &= \begin{pmatrix} gW_3 + g'B & g(W_1 - iW_2) \\ g(W_1 + iW_2) & -gW_3 + g'B \end{pmatrix}_{22}^2 \\
&= (g(W_1 + iW_2) \quad -gW_3 + g'B) \begin{pmatrix} g(W_1 - iW_2) \\ -gW_3 + g'B \end{pmatrix} \\
&= g^2(W_1^2 + W_2^2) + (gW_3 - g'B)^2.
\end{aligned}$$

Definizione (angolo di Weinberg). Si definisce l'angolo ϑ di Weinberg con

$$\tan \vartheta = \frac{g'}{g}$$

Introduciamo delle nuove combinazioni dei campi

$$\begin{aligned}
W_\mu^\pm &= \frac{W_1 \mp iW_2}{\sqrt{2}} \\
Z_\mu &= \cos \vartheta W_{3\mu} - \sin \vartheta B_\mu \\
A_\mu &= \sin \vartheta W_{3\mu} + \cos \vartheta B_\mu
\end{aligned}$$

In termini di questi quattro campi possiamo riscrivere:

$$D_\mu\varphi^\dagger D^\mu\varphi = \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{g^2(v+h)^2}{4}W_\mu^+W^{-\mu} + (g^2 + g'^2)\frac{(v+h)^2}{8}Z_\mu Z^\mu.$$

Da questa lagrangiana possiamo leggere le masse:

$$\begin{aligned}
m_W^2 &= \frac{g^2 v^2}{4} \\
m_Z^2 &= \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{4} \\
m_A^2 &= 0 \\
m_H^2 &= 2\lambda v^2
\end{aligned}$$

Si noti che, come conseguenza diretta del fatto che il campo di Higgs trasforma come un doppietto, abbiamo una relazione tra le masse dei bosoni $m_W = m_Z \cos \vartheta$. Tale relazione è verificata con una precisione sperimentale del per mille.

Esercizio 1. Trovare le interazioni che derivano dalla lagrangiana e dimostrare che vale

$$g \sin \vartheta = g' \cos \vartheta = e.$$