Teoria delle interazioni fondamentali

Matteo Abis

26 novembre 2011

1 Teorie di gauge

Definizione (Teoria di gauge)**.** una teoria quantistica di campi invariante sotto trasformazioni locali di un gruppo di Lie, detto gruppo *di gauge*. Le trasformazioni sono locali se i parametri dipendono dal punto dello spazio-tempo.

1.1 Prototipo: l'elettrodinamica quantistica

campi: un campo spinoriale $\psi(x)$, un campo vettoriale $A^\mu(x)$;

trasformazioni di gauge: sotto l'azione degli elementi del gruppo di gauge $U(1)$ i campi trasformano come

$$\psi'(x) = e^{-ie\alpha(x)}\psi(x)$$
$$A^{\mu'}(x) = A^\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x);$$

rinormalizzabilità: compaiono nella lagrangiana soltanto termini con dimensione $d \leqslant 4$.

La lagrangiana più generale compatibile con questi requisiti è dunque:

$$\mathscr{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi$$

1.2 Teorie di gauge non abeliane

Discutiamo nel dettaglio la costruzione di una generica teoria di gauge, seguendo gli stessi passi che ci hanno portato alla formulazione dell'elettrodinamica quantistica. È necessario innanzitutto identificare i componenti fondamentali della teoria.

gruppo di gauge G: deve essere un

- gruppo di Lie. Sia n la sua dimensione;
- compatto, perché le rappresentazioni siano unitarie;
- semplice, ovvero senza sottogruppi invarianti non banali. Questa richiesta non è fondamentale e sarà eliminata in seguito.

campi di spin ½ e spin 0: genericamente indicati con il multipletto φ.

proprietà di trasformazione dei campi: il multipletto dei campi deve trasformare come una rappresentazione R del gruppo G. Detti t_R^a $(a = 1, \dots, n)$ i generatori del gruppo in tale rappresentazione, e α_a i parametri della trasformazione

$$\varphi'(x) = \Omega\varphi = e^{-i\alpha_a t_R^a}\varphi(x).$$

È talvolta utile considerare trasformazioni infinitesime

$$\delta\varphi = -i\alpha_a t_R^a \varphi.$$

Introduciamo infine le costanti di struttura dell'algebra di Lie f_c^{ab}

$$[t^a, t^b] = i f_c^{ab} t^c$$

Una volta specificati gli ingredienti, la teoria segue immediatamente dall'applicazione di una procedura quasi meccanica:

1. determinazione della lagrangiana $\mathscr{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$ più generale invariante per il gruppo G sotto trasformazioni globali, ovvero indipendenti dal punto dello spazio-tempo;
2. promozione delle trasformazioni globali in trasformazioni locali. A questo punto i termini con le derivate non trasformano più come i campi e la lagrangiana non è più invariante:

$$(\partial_\mu\varphi)' = (\partial_\mu\Omega)\varphi + \Omega(\partial_\mu\varphi) \neq \Omega(\partial_\mu\varphi). \tag{1}$$

Si introduce dunque una *derivata covariante*, che trasforma come i campi, D_μ

$$D_\mu\varphi = (\partial_\mu + iA_{a\mu}t^a)\varphi$$

dove abbiamo introdotto un campo vettoriale reale *di gauge* $A_\mu = iA_{a\mu}t^a$, che è un elemento dell'algebra di Lie del gruppo G. Vogliamo infatti che questo termine cancelli il primo addendo della (1), che è un elemento dell'algebra di Lie. Imponendo quindi la legge di trasformazione già valida per i campi

$$\begin{gathered}(D_\mu\varphi)' = \Omega D_\mu\varphi \\ (\partial_\mu + A'_\mu)\Omega\varphi = (\partial_\mu\Omega)\varphi + \Omega(\partial_\mu\varphi) + A'_\mu\Omega\varphi = \Omega(\partial_\mu\varphi) + \Omega A_\mu\varphi \\ (A'_\mu\Omega - \Omega A_\mu + \partial_\mu\Omega)\varphi = 0\end{gathered}$$

otteniamo la legge di trasformazione per i campi di gauge, moltiplicando a destra per Ω^{-1}:

$$A'_\mu = \Omega A_\mu \Omega^{-1} - (\partial_\mu\Omega)\Omega^{-1}. \tag{2}$$

La (2) si può capire meglio in termini dei campi $A_{a\mu}$ scrivendola per trasformazioni infinitesime:

$$\begin{aligned} iA'_{a\mu}t^a &= (1 - i\alpha_b t^b)A_{c\mu}t^c(1 + i\alpha_b t^b) - [\partial_\mu(1 - i\alpha_a t^a)(1 + \cdots)] \\ &= iA_{a\mu}t^a + \alpha_a A_{c\mu}[t^b, t^c] + i\partial_\mu\alpha_a t^a \\ &= i(A_{a\mu} + \partial_\mu\alpha_a)t^a + if_a^{bc}t^a \\ A'_{a\mu} &= A_{a\mu} + \partial_\mu\alpha_a + f_a^{bc}\alpha_b A_{c\mu}. \end{aligned} \tag{3}$$

Vediamo dunque che, rispetto al caso abeliano dell'elettrodinamica quantistica, si introduce un nuovo termine nella trasformazione dei campi di gauge di teorie non abeliane. Tecnicamente, i campi di gauge trasformano nella rappresentazione aggiunta di G, i cui generatori sono i $(t_A^b)_a^c = if_a^{bc}$.

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= -i(t_R^a)\alpha_a\varphi && \text{campi di materia} \\ \delta A_{a\mu} &= -i(t_A^b)_a^c\alpha_b A_{c\mu} && \text{campi di gauge.} \end{aligned}$$

Poiché i campi di gauge trasformano in modo non banale sotto l'azione del gruppo, essi trasportano una carica. La lagrangiana così ottenuta $\mathscr{L}(\varphi, D_\mu\varphi)$ è ora invariante per trasformazioni locali.

3. si completa la lagrangiana con un termine cinetico per i campi di gauge, analogamente al termine $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ in QED.

   Nel caso non abeliano:

$$\begin{aligned}
([D_\mu, D_\nu]\varphi)' &= \Omega[D_\mu, D_\nu]\varphi = \Omega[D_\mu, D_\nu]\Omega^{-1}\varphi' \\
[D_\mu, D_\nu]\varphi &= (\partial_\mu + A_\mu)(\partial_\nu + A_\nu)\varphi - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \underbrace{\partial_\mu\partial_\nu\varphi + A_\nu(\partial_\mu\varphi) + A_\mu(\partial_\nu\varphi)}_{\text{simmetrico, si cancella}} + (\partial_\mu A_\nu)\varphi + A_\mu A_\nu\varphi - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \underbrace{\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + [A_\mu, A_\nu]\}}_{:=F_{\mu\nu}}\varphi
\end{aligned}$$

$$F'_{\mu\nu} = \Omega F_{\mu\nu}\Omega^{-1}$$

   O, in termini dei campi $A_{a\mu}$

$$F_{a\mu\nu} = \partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu} - f_a^{bc} A_{b\mu}A_{c\nu}. \tag{4}$$

   Possiamo ora inserire un termine cinetico invariante di gauge e definito positivo. Questo perché vogliamo che l'hamiltoniana abbia un minimo. Tale termine sarà proporzionale, con una costante k alla traccia

$$k\,\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -kF_{a\mu\nu}F_b^{\mu\nu}\,\mathrm{tr}(t^a t^b)$$

   Per un generico gruppo compatto $K^{ab} = \mathrm{tr}(t_R^a t_R^b)$ è definita positiva. Infatti $K^{ab}u_a u_b = \mathrm{tr}((t_R^a u_a)^2) \geq 0$ perché i generatori sono hermitiani.

   Scegliamo allora la base in cui $K^{ab} = C\delta^{ab}$ è diagonale e multiplo dell'identità. Infine, per analogia con la QED, fissiamo la costante $k = 1/4C$.

$$\begin{aligned}
-kF_{a\mu\nu}F_b^{\mu\nu}\,\mathrm{tr}(t^a t^b) &= -kCF_{a\mu\nu}F^{a\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4}\{(\partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu})(\partial_\mu A^{a\nu} - \partial_\nu A^{a\mu}) + \underbrace{\cdots}_{\text{parte non abeliana}}\}
\end{aligned}$$

Siamo pronti per scrivere la lagrangiana più generale per una teoria di gauge, ora che abbiamo una parte invariante locale sotto il gruppo G e un termine cinetico per i nuovi campi vettoriali. Possiamo ancora fissare il peso relativo g^2 di questi due termini.

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\varphi, D_\mu\varphi) - \frac{1}{4g^2}F_{a\mu\nu}F^{a\mu\nu}$$

Questo peso relativo ha il significato di costante di accoppiamento tra i campi φ a spin 0 e $1/2$ e i campi vettoriali. Infatti ridefinendo i campi A_μ:

$$\begin{aligned}
A_{a\mu} &\longrightarrow gA_{a\mu} \\
\mathscr{L} &\longrightarrow \mathscr{L}(\varphi, D'_\mu\varphi) - \frac{1}{4}F'_{a\mu\nu}F'^{\mu\nu} \\
&\text{dove} \\
D'_\mu\varphi &= (\partial_\mu + igA_{a\mu}t^a)\varphi \\
F'_{a\mu\nu} &= \partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu} - gf_a^{bc}A_{b\mu}A_{c\nu}
\end{aligned}$$

Quest'ultimo termine mette anche in evidenza il fatto che, in una teoria non abeliana, compaiono dei termini di interazione tra bosoni di gauge.

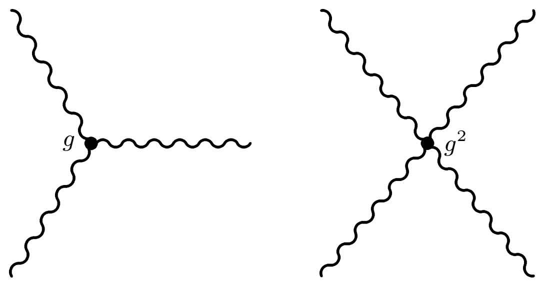

Figura 1: Interazioni a tre e quattro bosoni, che derivano dai nuovi termini nella lagrangiana per teorie non abeliane.

1.3 Esempio: la cromodinamica quantistica

gruppo: $G = SU(3)$

campi e trasformazioni: spinori di Dirac q che trasformano con la rappresentazione fondamentale 3 di $SU(3)$. Quindi q è un oggetto di dimensione 3 e possiamo scrivere esplicitamente l'indice *di colore* $c = 1, 2, 3$.

$$q'_c = e^{-i\alpha_a \lambda^a} q_c.$$

I generatori λ_a sono le otto matrici di Gell-Mann.

Con la procedura ora descritta si ricava subito la lagrangiana della QCD:

1. scriviamo la lagrangiana più generale con invarianza globale

$$\mathscr{L} = i\bar{q}_c \gamma^\mu \partial_\mu q_c - m\bar{q}_c q_c;$$

2. rendiamo l'invarianza locale introducendo la derivata covariante e i campi di gauge $G_{a\mu}$:

$$D_\mu q = (\partial_\mu + ig_s G_{a\mu}\lambda^a)q$$

3. completando con i termini cinetici:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G^{a\mu\nu} + i\bar{q}\gamma^\mu(\partial_\mu + ig_s G_{a\mu}\lambda^a)q - m\bar{q}q$$

4. resta solo da estendere al caso di sei sapori di quark $f = u$, d,. . . ,t.

$$\mathscr{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G^{a\mu\nu} + \sum_f [i\bar{q}_f \gamma^\mu(\partial_\mu + ig_s G_{a\mu}\lambda^a)q_f - m\bar{q}_f q_f]$$

2 Rottura spontanea di simmetria

2.1 Il teorema di Goldstone

Con la rottura spontanea di una simmetria globale in una teoria quantistica di campi, compaiono particelle di spin 0 e massa nulla, detti bosoni di Goldstone.

Esempio: campo scalare complesso

La lagrangiana per il campo scalare complesso, con una simmetria globale $U(1)$ è:

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= (\partial_\mu\varphi)^\dagger(\partial^\mu\varphi) - V(|\varphi|^2) \\ &= (\partial_\mu\varphi)^\dagger(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^\dagger\varphi - \lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2\end{aligned}$$

Dove $\lambda > 0$ perché l'energia abbia un minimo. Ora, con $m^2 > 0$ otteniamo la solita teoria del campo scalare complesso, mentre il caso $m^2 < 0$ è più interessante.

Consideriamo infatti il caso $m^2 < 0$. Scriviamo il campo con le sue componenti reali. In termini di queste componenti, la simmetria $U(1)$ diventa una simmetria per rotazioni $SO(2)$.

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$$
$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo i minimi dell'hamiltoniana $\mathscr{H} = |\dot{\varphi}|^2 + |\nabla\varphi|^2 + V(|\varphi|^2)$. La parte con le derivate si annulla per φ costante, cerchiamo quindi i minimi del potenziale.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} &= m^2\varphi_i^2 + \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi_i \\ &= \varphi_i(m^2 + \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)). \end{aligned}$$

Quindi le derivate si annullano per

1. $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$
2. $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = -\dfrac{m^2}{\lambda} =: v$

Calcolando la matrice delle derivate seconde si verifica facilmente che solo la seconda possibilità corrisponde a un minimo, e che gli autovalori in questo caso sono 0 e 1. Inoltre, parametrizziamo i campi attorno al minimo

$$\begin{aligned} v_1 &= v\cos\theta \\ v_2 &= v\sin\theta. \end{aligned}$$

Scegliendo un minimo abbiamo una rottura spontanea di simmetria. Espandiamo la lagrangiana intorno a questo minimo:

$$V = V(2.) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}|_{2.}(\varphi_1 - v_1) + \frac{\partial V}{\partial \varphi_2}|_{2.}(\varphi_2 - v_2)}_{=0 \text{ nel minimo}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j}|_{2.}\underbrace{(\varphi_i - v_i)}_{=:\varphi_i'}\underbrace{(\varphi_j - v_j)}_{=:\varphi_j'}$$

Con le ridefinizioni dei campi φ_i' possiamo scrivere la lagrangiana come

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_1'\partial^\mu\varphi_1' + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_2'\partial^\mu\varphi_2' + \frac{1}{2}2\lambda v^2 \begin{pmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_1'\partial^\mu\varphi_1' + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_2'\partial^\mu\varphi_2' + \lambda v^2(\cos\theta\varphi_1' + \sin\theta\varphi_2')^2 \end{aligned}$$

Con un cambio di variabili finale possiamo ridefinire i campi e la lagrangiana con

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix}$$
$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1\partial^\mu\varphi_1 + \partial_\mu\varphi_2\partial^\mu\varphi_2) - \lambda v^2\varphi_1^2$$

In questi termini, la lagrangiana descrive due campi scalari: φ_1 con massa $m_1 = 2\lambda v^2$ e φ_2 con massa nulla, detto bosone di Goldstone. Possiamo ora enunciare il teorema in generale.

Teorema (di Goldstone)**.**

- *Sia $\mathscr{L}(\varphi, \chi)$ una lagrangiana con campi reali di spin 0 φ e campi di spin 1/2 χ;*
- *$\mathscr{L}$ invariante globale sotto l'azione di un gruppo G.*
- *$\varphi_i = v_i$ configurazione costante che minimizza l'energia;*
- *infine diciamo $H < G$ la simmetria residua, ovvero il sottogruppo di G che lascia invariata la configurazione di equilibrio.*

Allora la matrice delle derivate seconde di V ha esattamente $\dim(G) - \dim(H)$ *autovalori nulli, che corrispondono a particelle di massa nulla e spin* 0 *(bosoni di Goldstone).*

Dimostrazione. La lagrangiana è:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi_i \partial^\mu \varphi_i - V(\varphi) + \underbrace{\dots}_{\text{dipendenza da } \chi}$$

e, nella configurazione di minimo vale:

$$0 = \delta V = \frac{\partial V}{\partial \varphi_i}\delta\varphi_i = \frac{\partial V}{\partial \varphi_i}(-i\alpha_a t^a_{ij}\varphi_j) \quad \forall \alpha_a$$

e deve essere anche nulla l'espressione:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} t^a_{ij}\varphi_j = 0.$$

Derivando rispetto a φ_k

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} t^a_{ij}\varphi_j + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \varphi_i}}_{=0 \text{ nel minimo}} t^a_{ik} = 0$$

Quindi rimane:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} t^a_{ij} v_j = 0$$

da cui si legge che $t^a_{ij}v_j$ è un autovettore relativo all'autovalore 0. Contiamo correttamente gli autovettori indipendenti. Ordiniamo i generatori mettendo prima i generatori del gruppo H: $t^a_{ij} = \{t^1, \dots, t^{\dim(H)}, \dots t^{\dim(G)}\}$.

Se $a = 1, \dots, \dim(H)$ allora $h = e^{-i\alpha_a t^a} \in H$ e, per ipotesi, $hv = v$. Per una trasformazione infinitesima dunque $(1 - i\alpha_a t^a)v = v$, da cui si legge $t^a v = 0$.. Restano dunque $\dim(G) - \dim(H)$ autovettori non nulli linearmente indipendenti.

La matrice delle derivate seconde del potenziale diventa ovviamente la matrice di massa. Espandendo intorno alla configurazione di equilibrio $\varphi_i = v_i$ e ridefinendo $\varphi'_i = \varphi_i - v_i$, otteniamo le equazioni del moto:

$$\left(_{ij} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}|_{\varphi = v} \right) \varphi'_j = 0$$

Da cui si vede che il sistema ha $\dim(G) - \dim(H)$ particelle a spin e massa nulli, dette appunto bosoni di Goldstone. □

Esempio: i mesoni pseudoscalari leggeri

Non sono mai stati osservati i bosoni di Goldstone a spin 0 e massa nulla. Tuttavia la teoria si può applicare a un'approssimazione della QCD. Considerando solo i quark leggeri $q = (u, d, s)$, la lagrangiana ricavata nel paragrafo 1.3:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}G_{a\mu\nu}G^{a\mu\nu} + i\bar{q}\gamma^\mu D_\mu q - \bar{q}mq$$

Se trascuriamo le masse dei quark leggeri, otteniamo una lagrangiana invariante sotto un gruppo di simmetria più ampio. Infatti scompare l'unico termine che mescola le chiralità *left*e *right*, che ora possono trasformare con due fasi indipendenti. Il gruppo diventa quindi $G = SU(3)_L \times SU(3)_R$.

Tuttavia, non esistono multipletti dinamici con masse molto simili. Questo fa pensare che la simmetria sia spontaneamente rotta. Il ruolo dei campi scalari in questa teoria è giocato dai bilineari fermionici $\bar{q}q = \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s$.

Una trattazione non perturbativa mostra in effetti che la configurazione di energia minima non si trova nell'origine $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \neq 0$. Qual è la simmetria residua H? Un elemento di questo sottogruppo dovrebbe lasciare invariato:

$$\langle 0|\bar{q}_R q_L + \text{h.c.}|0\rangle \xrightarrow{G} \langle 0|\bar{q}_R \Omega_R^\dagger \Omega_L q_L + \text{h.c.}|0\rangle.$$

Ciò accade se e solo se le fasi con cui trasformano le parti *left* e *right* sono uguali. $\alpha_{aL} = \alpha_{aR} =: \alpha_a$. Risulta dunque che il gruppo H è $SU(3)$. Questo gruppo ha otto generatori, quindi la teoria avrà $8 + 8 - 8 = 8$ bosoni di Goldstone. Queste otto particelle con spin 0 e massa piccola sono gli otto mesoni pseudoscalari leggeri π, K e η.

2.2 Il meccanismo di Higgs

Il meccanismo di Higgs consente di dare massa ai bosoni di gauge attraverso la rottura spontanea di una simmetria continua *locale*. In questo modo, la teoria conserva l'invarianza di gauge.

Esempio: modello di Higgs abeliano

È la versione locale dell'esempio visto nel paragrafo 2.1 per il teorema di Goldstone. Sia φ un campo scalare complesso e $G = U(1)$ il gruppo di invarianza locale. Le trasformazioni sono dunque

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= e^{-i\alpha(x)}\varphi(x) \\ A'_\mu(x) &= A_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha(x). \end{aligned}$$

Ricordiamo anche la lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^\dagger(D^\mu\varphi) - V(|\varphi|^2) \\ V &= m^2\varphi^\dagger\varphi + \lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2. \end{aligned}$$

Con gli stessi passaggi del caso globale, con $\lambda > 0$ e $m^2 < 0$, troviamo la configurazione di minima energia, ovvero il valore di aspettazione del vuoto

$$\langle 0|\varphi|0\rangle := \langle\varphi\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$$

essendo $\langle A_\mu\rangle = 0$ per mantenere l'invarianza di Lorentz. Mandiamo tutti i minimi nell'origine delle nuove coordinate, usando una rappresentazione polare con un modulo e una fase (due campi reali):

$$\varphi(x) = \frac{v + \sigma(x)}{\sqrt{2}}e^{i\theta}e^{i\frac{\xi(x)}{v}}$$

si vede che ho il minimo per $\sigma = \xi = 0$, e quindi $\varphi = ve^{i\theta}/\sqrt{2}$. Scriviamo la lagrangiana in termini di questi due nuovi campi:

$$\begin{aligned}
\varphi^\dagger\varphi &= \frac{(v+\sigma)^2}{2} \\
V &= \frac{m^2}{2}(v+\sigma)^2 + \frac{\lambda}{4}(v+\sigma)^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_\mu\varphi &= (\partial_\mu + igA_\mu)\frac{v+\sigma}{\sqrt{2}}e^{i\theta}e^{i\frac{\xi}{v}} \\
&= e^{i\theta}e^{i\frac{\xi}{v}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu\sigma + igA_\mu\frac{v+\sigma}{\sqrt{2}} + \frac{v+\sigma}{\sqrt{2}}i\frac{\partial_\mu\xi}{v}\right\} \\
&= e^{i\theta}e^{i\frac{\xi}{v}}\left\{\frac{\partial_\mu\sigma}{\sqrt{2}} + ig\frac{v+\sigma}{\sqrt{2}}\left[A_\mu + \frac{\partial_\mu\xi}{gv}\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + g^2\frac{(v+\sigma)^2}{2}\left[A_\mu + \frac{\partial_\mu\xi}{gv}\right]^2 - V(\sigma)$$

Ridefiniamo $A_\mu = A_\mu + \partial_\mu\xi/gv$. Non è una trasformazione di gauge perché non coinvolge il campo φ.

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{g^2}{2}(v+\sigma)^2A_\mu A^\mu - V(\sigma)$$

Leggiamo la fisica da questa lagrangiana:

- il campo ξ è sparito, non fa parte della fisica;
- è comparso un termine di massa per il campo A_μ, con $m_A^2 = g^2v^2$;
- ξ è sparito ma la teoria ha lo stesso numero di gradi di libertà di prima. Nel caso $m^2 > 0$ infatti, φ e A_μ trasportano ciascuno due gradi di libertà. Nel caso $m^2 < 0$ invece A_μ ha una massa e quindi tre gradi di libertà, con un solo grado di libertà per il campo reale σ.

Notiamo che con la quantizzazione della teoria ci sono delle differenze rispetto al caso classico. Infatti lo stato di vuoto della teoria quantistica $|0|$, che corrisponde al minimo dell'energia, è unico. Al contrario, nella teoria classica abbiamo infiniti minimi raggiungibili con trasformazioni di G. Quindi dovremmo avere $U|0| \neq |0|$ e quindi la carica del vuoto sarebbe $Q|0| \neq 0$.

Questa apparente contraddizione si risolve osservando che nella teoria quantistica il segnale di rottura spontanea di simmetria è molto più sottile: non si può infatti costruire l'operatore Q perché $\int d^3xj^0 \to \infty$.

3 La lagrangiana della teoria elettrodebole

3.1 Parte bosonica

gruppo di gauge: $G = SU(2) \times U(1)$. I generatori T^1, T^2, T^3, Y soddisfano alle regole di commutazione

$$\begin{aligned}
[T^a, T^b] &= i\varepsilon^{abc}T^c \\
[T^a, Y] &= 0.
\end{aligned}$$

campi di materia a spin 0: devono realizzare la rottura spontanea di $SU(2) \times U(1)$ in modo da dare massa ai bosoni W$^\pm$ e Z, con un'invarianza residua $U(1)_{em}$ in modo da lasciare il fotone a massa nulla.

La scelta più semplice è un doppietto complesso di Higgs con ipercarica $Y = 1/2$, che trasforma sotto G come la rappresentazione $(2, 1/2)$:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$$
$$\varphi' = e^{-i\alpha_a \frac{\sigma^a}{2}} e^{-i\beta \frac{1}{2}} \varphi$$

Non è ora restrittivo, percorrendo le valli di minimo, raggiungere un minimo in cui $\langle\varphi\rangle = (0, v/\sqrt{2})$. Verifichiamo che c'è un'invarianza residua. Per una trasformazione infinitesima

$$(-i\alpha_a \frac{\sigma^a}{2} - i\beta\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \alpha_3 + \beta & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & -\alpha_3 + \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\frac{iv}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha_1 - i\alpha_2 \\ -\alpha_3 + \beta \end{pmatrix}$$

e tale variazione è nulla evidentemente se e solo se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = \beta =: \alpha$. Quindi c'è un sottogruppo $U(1)$ che lascia invariata la configurazione di minimo. Il generatore corrispondente è

$$Q = T^3 + Y = \frac{\sigma^3}{2} + \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dati questi ingredienti, con la procedura descritta nel paragrafo 1.2, è automatico scrivere la lagrangiana. Ad ognuno dei generatori del gruppo corrisponde un campo di gauge, con la corrispondente legge di trasformazione:

$$T_a \to W_{a\mu}$$
$$Y \to B_\mu$$

$$\delta W_{a\mu} = \varepsilon_{abc}\alpha^b W^c_\mu + \frac{\partial_\mu \alpha_a}{g}$$
$$\delta B_\mu = \frac{\partial_\mu \beta}{g'}.$$

Scriviamo subito la lagrangiana

$$\mathscr{L}_{\text{bos}} = -\frac{1}{4} W_{a\mu\nu} W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + (D_\mu\varphi)^\dagger (D^\mu \varphi) - V(\varphi)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + igW_{a\mu}\frac{\sigma^a}{2} + i\frac{g'}{2}B_\mu$$
$$V(\varphi) = \mu^2 \varphi^\dagger\varphi + \lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2$$

Scegliamo, come nell'esempio, il minimo con $\langle\varphi\rangle = (0, v/\sqrt{2}$. Bisogna scegliere una parametrizzazione per φ per leggere masse e accoppiamenti

$$\varphi(x) = e^{i\xi_a(x)\frac{\sigma^a}{v}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Come nel caso abeliano, gli ξ_a scompaiono, quindi scriviamo direttamente

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$V(\varphi) = \frac{\mu^2}{2}(v+h)^2 + \frac{\lambda}{4}(v+h)^4$$
$$= \text{cost.} + \underbrace{\lambda v^2 h^2}_{\text{termine di massa}} + \mathcal{O}(h^3)$$

Da cui si legge subito che il bosone di Higgs ha una massa $m_h = 2\lambda v^2$. Il termine cinetico dà ora una massa ai bosoni vettori

$$\begin{aligned}
D_\mu &= \partial_\mu + igW_{a\mu}\frac{\sigma^a}{2} + i\frac{g'}{2}B_\mu \\
D_\mu\varphi &= \left\{\frac{\partial_\mu h}{\sqrt{2}} + igW_{a\mu}\frac{\sigma^a}{2}\frac{v+h}{\sqrt{2}} + ig'\frac{v+h}{2\sqrt{2}}B_\mu\right\}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\
&= \left\{\frac{\partial_\mu h}{\sqrt{2}} + \frac{i}{2}\frac{v+h}{\sqrt{2}}(gW_{a\mu}\sigma^a + g'B_\mu)\right\}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_\mu\varphi^\dagger D^\mu\varphi &= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\frac{(v+h)^2}{8}(gW_a\sigma^a + g'B)^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\text{seleziona l'elemento 2,2 della matrice}} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{(v+h)^2}{8}[gW_a\sigma^a + g'B]^2_{22}.
\end{aligned}$$

Calcoliamo l'elemento di matrice richiesto

$$\begin{aligned}
[gW_a\sigma^a + g'B]^2_{22} &= \begin{pmatrix} gW_3 + g'B & g(W_1 - iW_2) \\ g(W_1 + iW_2) & -gW_3 + g'B \end{pmatrix}^2_{22} \\
&= \begin{pmatrix} g(W_1 + iW_2) & -gW_3 + g'B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g(W_1 - iW_2) \\ -gW_3 + g'B \end{pmatrix} \\
&= g^2(W_1^2 + W_2^2) + (gW_3 - g'B)^2.
\end{aligned}$$

Definizione (angolo di Weinberg)**.** Si definisce l'angolo θ di Weinberg con

$$\tan\theta := \frac{g'}{g}$$

Introduciamo delle nuove combinazioni dei campi, con l'angolo di Weinberg

$$\begin{aligned}
W^\pm_\mu &= \frac{W_1 \mp iW_2}{\sqrt{2}} \\
Z_\mu &= \cos\theta W_{3\mu} - \sin\theta B_\mu \\
A_\mu &= \sin\theta W_{3\mu} + \cos\theta B_\mu
\end{aligned}$$

In termini di questi quattro campi possiamo riscrivere:

$$D_\mu\varphi^\dagger D^\mu\varphi = \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h + \frac{g^2(v+h)^2}{4}W^+_\mu W^{-\mu} + (g^2 + g'^2)\frac{(v+h)^2}{8}Z_\mu Z^\mu.$$

Da questa lagrangiana possiamo leggere le masse:

$$\begin{aligned}
m_W^2 &= \frac{g^2v^2}{4} \\
m_Z^2 &= \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{4} \\
m_A^2 &= 0 \\
m_H &= 2\lambda v^2
\end{aligned}$$

Si noti che, come conseguenza diretta del fatto che il campo di Higgs trasforma come un doppietto, abbiamo una relazione tra le masse dei bosoni $m_W = m_Z\cos\theta$. Tale relazione è verificata con una precisione sperimentale del per mille.

Esercizio 1. *Trovare le interazioni che derivano dalla lagrangiana e dimostrare che vale*

$$g\sin\theta = g'\cos\theta = e.$$