

# Teoria delle interazioni fondamentali

Matteo Abis

24 novembre 2011

## 1 Teorie di gauge

**Definizione** (Teoria di gauge). una teoria quantistica di campi invariante sotto trasformazioni locali di un gruppo di Lie, detto gruppo *di gauge*. Le trasformazioni sono locali se i parametri dipendono dal punto dello spazio-tempo.

### 1.1 Prototipo: l'elettrodinamica quantistica

**campi:** un campo spinoriale  $\psi(x)$ , un campo vettoriale  $A^\mu(x)$ ;

**trasformazioni di gauge:** sotto l'azione degli elementi del gruppo di gauge  $U(1)$  i campi trasformano come

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= e^{-ie\alpha(x)}\psi(x) \\ A^{\mu'}(x) &= A^\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x);\end{aligned}$$

**rinormalizzabilità:** compaiono nella lagrangiana soltanto termini con dimensione  $d \leq 4$ .

La lagrangiana più generale compatibile con questi requisiti è dunque:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi$$

### 1.2 Teorie di gauge non abeliane

Discutiamo nel dettaglio la costruzione di una generica teoria di gauge, seguendo gli stessi passi che ci hanno portato alla formulazione dell'elettrodinamica quantistica. È necessario innanzitutto identificare i componenti fondamentali della teoria.

**gruppo di gauge  $G$ :** deve essere un

- gruppo di Lie. Sia  $n$  la sua dimensione;
- compatto, perché le rappresentazioni siano unitarie;
- semplice, ovvero senza sottogruppi invarianti non banali. Questa richiesta non è fondamentale e sarà eliminata in seguito.

**campi di spin  $1/2$  e spin  $0$ :** genericamente indicati con il multipletto  $\varphi$ .

**proprietà di trasformazione dei campi:** il multipletto dei campi deve trasformare come una rappresentazione  $R$  del gruppo  $G$ . Detti  $t_R^a$  ( $a = 1, \dots, n$ ) i generatori del gruppo in tale rappresentazione, e  $\alpha_a$  i parametri della trasformazione

$$\varphi'(x) = \Omega\varphi = e^{-i\alpha_a t_R^a}\varphi(x).$$

È talvolta utile considerare trasformazioni infinitesime

$$\delta\varphi = -i\alpha_a t_R^a \varphi.$$

Introduciamo infine le costanti di struttura dell'algebra di Lie  $f_c^{ab}$

$$[t^a, t^b] = i f_c^{ab} t^c$$

Una volta specificati gli ingredienti, la teoria segue immediatamente dall'applicazione di una procedura quasi meccanica:

1. determinazione della lagrangiana  $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$  più generale invariante per il gruppo  $G$  sotto trasformazioni globali, ovvero indipendenti dal punto dello spazio-tempo;
2. promozione delle trasformazioni globali in trasformazioni locali. A questo punto i termini con le derivate non trasformano più come i campi e la lagrangiana non è più invariante:

$$(\partial_\mu \varphi)' = (\partial_\mu \Omega) \varphi + \Omega (\partial_\mu \varphi) \neq \Omega (\partial_\mu \varphi). \quad (1)$$

Si introduce dunque una *derivata covariante*, che trasforma come i campi,  $D_\mu$

$$D_\mu \varphi = (\partial_\mu + i A_{a\mu} t^a) \varphi$$

dove abbiamo introdotto un campo vettoriale reale *di gauge*  $A_\mu = i A_{a\mu} t^a$ , che è un elemento dell'algebra di Lie del gruppo  $G$ . Vogliamo infatti che questo termine cancelli il primo addendo della (1), che è un elemento dell'algebra di Lie. Imponendo quindi la legge di trasformazione già valida per i campi

$$(D_\mu \varphi)' = \Omega D_\mu \varphi$$

$$(\partial_\mu + A'_\mu) \Omega \varphi = (\partial_\mu \Omega) \varphi + \Omega (\partial_\mu \varphi) + A'_\mu \Omega \varphi = \Omega (\partial_\mu \varphi) + \Omega A_\mu \varphi$$

$$(A'_\mu \Omega - \Omega A_\mu + \partial_\mu \Omega) \varphi = 0$$

otteniamo la legge di trasformazione per i campi di gauge, moltiplicando a destra per  $\Omega^{-1}$ :

$$A'_\mu = \Omega A_\mu \Omega^{-1} - (\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1}. \quad (2)$$

La (2) si può capire meglio in termini dei campi  $A_{a\mu}$  scrivendola per trasformazioni infinitesime:

$$\begin{aligned} i A'_{a\mu} t^a &= (1 - i \alpha_b t^b) A_{c\mu} t^c (1 + i \alpha_b t^b) - [\partial_\mu (1 - i \alpha_a t^a) (1 + \dots)] \\ &= i A_{a\mu} t^a + \alpha_a A_{c\mu} [t^b, t^c] + i \partial_\mu \alpha_a t^a \\ &= i (A_{a\mu} + \partial_\mu \alpha_a) t^a + i f_a^{bc} t^a \\ A'_{a\mu} &= A_{a\mu} + \partial_\mu \alpha_a + f_a^{bc} \alpha_b A_{c\mu}. \end{aligned} \quad (3)$$

Vediamo dunque che, rispetto al caso abeliano dell'elettrodinamica quantistica, si introduce un nuovo termine nella trasformazione dei campi di gauge di teorie non abeliane. Tecnicamente, i campi di gauge trasformano nella rappresentazione aggiunta di  $G$ , i cui generatori sono i  $(t_A^b)_a^c = i f_a^{bc}$ .

$$\delta\varphi = -i(t_R^a)\alpha_a\varphi \quad \text{campi di materia}$$

$$\delta A_{a\mu} = -i(t_A^b)_a^c \alpha_b A_{c\mu} \quad \text{campi di gauge.}$$

Poiché i campi di gauge trasformano in modo non banale sotto l'azione del gruppo, essi trasportano una carica. La lagrangiana così ottenuta  $\mathcal{L}(\varphi, D_\mu \varphi)$  è ora invariante per trasformazioni locali.

3. si completa la lagrangiana con un termine cinetico per i campi di gauge, analogamente al termine  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  in QED.

Nel caso non abeliano:

$$\begin{aligned}
([D_\mu, D_\nu]\varphi)' &= \Omega[D_\mu, D_\nu]\varphi = \Omega[D_\mu, D_\nu]\Omega^{-1}\varphi' \\
[D_\mu, D_\nu]\varphi &= (\partial_\mu + A_\mu)(\partial_\nu + A_\nu)\varphi - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \underbrace{\partial_\mu\partial_\nu\varphi + A_\nu(\partial_\mu\varphi) + A_\mu(\partial_\nu\varphi)}_{\text{simmetrico, si cancella}} + (\partial_\mu A_\nu)\varphi + A_\mu A_\nu\varphi - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \underbrace{\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + [A_\mu, A_\nu]\}}_{:=F_{\mu\nu}} \varphi \\
F'_{\mu\nu} &= \Omega F_{\mu\nu} \Omega^{-1}
\end{aligned}$$

O, in termini dei campi  $A_{a\mu}$

$$F_{a\mu\nu} = \partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu} - f_a^{bc} A_{b\mu} A_{c\nu}. \quad (4)$$

Possiamo ora inserire un termine cinetico invariante di gauge e definito positivo. Questo perché vogliamo che l'hamiltoniana abbia un minimo. Tale termine sarà proporzionale, con una costante  $k$  alla traccia

$$k \operatorname{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -k F_{a\mu\nu} F_b^{\mu\nu} \operatorname{tr}(t^a t^b)$$

Per un generico gruppo compatto  $K^{ab} = \operatorname{tr}(t_R^a t_R^b)$  è definita positiva. Infatti  $K^{ab} u_a u_b = \operatorname{tr}((t_R^a u_a)^2) \geq 0$  perché i generatori sono hermitiani.

Scegliamo allora la base in cui  $K^{ab} = C\delta^{ab}$  è diagonale e multiplo dell'identità. Infine, per analogia con la QED, fissiamo la costante  $k = 1/4C$ .

$$\begin{aligned}
-k F_{a\mu\nu} F_b^{\mu\nu} \operatorname{tr}(t^a t^b) &= -k C F_{a\mu\nu} F^{a\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4} \{ (\partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu})(\partial_\mu A^{a\nu} - \partial_\nu A^{a\mu}) + \underbrace{\dots}_{\text{parte non abeliana}} \}
\end{aligned}$$

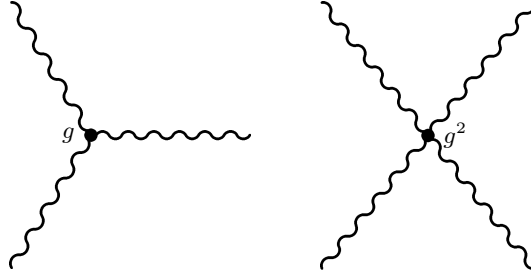
Siamo pronti per scrivere la lagrangiana più generale per una teoria di gauge, ora che abbiamo una parte invariante locale sotto il gruppo  $G$  e un termine cinetico per i nuovi campi vettoriali. Possiamo ancora fissare il peso relativo  $g^2$  di questi due termini.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, D_\mu\varphi) - \frac{1}{4g^2} F_{a\mu\nu} F^{a\mu\nu}$$

Questo peso relativo ha il significato di costante di accoppiamento tra i campi  $\varphi$  a spin 0 e  $1/2$  e i campi vettoriali. Infatti ridefinendo i campi  $A_\mu$ :

$$\begin{aligned}
A_{a\mu} &\longrightarrow g A_{a\mu} \\
\mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L}(\varphi, D'_\mu\varphi) - \frac{1}{4} F'_{a\mu\nu} F'^{a\mu\nu} \\
&\text{dove} \\
D'_\mu\varphi &= (\partial_\mu + ig A_{a\mu} t^a)\varphi \\
F'_{a\mu\nu} &= \partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu} - g f_a^{bc} A_{b\mu} A_{c\nu}
\end{aligned}$$

Quest'ultimo termine mette anche in evidenza il fatto che, in una teoria non abeliana, compaiono dei termini di interazione tra bosoni di gauge.



**Figura 1:** Interazioni a tre e quattro bosoni, che derivano dai nuovi termini nella lagrangiana per teorie non abeliane.

### 1.3 Esempio: la cromodinamica quantistica

**gruppo:**  $G = SU(3)$

**campi e trasformazioni:** spinori di Dirac  $q$  che trasformano con la rappresentazione fondamentale 3 di  $SU(3)$ . Quindi  $q$  è un oggetto di dimensione 3 e possiamo scrivere esplicitamente l'indice di colore  $c = 1, 2, 3$ .

$$q'_c = e^{-i\alpha_a \lambda^a} q_c.$$

I generatori  $\lambda_a$  sono le otto matrici di Gell-Mann.

Con la procedura ora descritta si ricava subito la lagrangiana della QCD:

1. scriviamo la lagrangiana più generale con invarianza globale

$$\mathcal{L} = i\bar{q}_\alpha \gamma^\mu \partial_\mu q_\alpha - m\bar{q}_\alpha q_\alpha;$$

2. rendiamo l'invarianza locale introducendo la derivata covariante e i campi di gauge  $G_{a\mu}$ :

$$D_\mu q = (\partial_\mu + ig_s G_{a\mu} \lambda^a) q$$

3. completando con i termini cinetici:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G^{a\mu\nu} + i\bar{q}\gamma^\mu (\partial_\mu + ig_s G_{a\mu} \lambda^a) q - m\bar{q}q$$

4. resta solo da estendere al caso di sei sapori di quark  $f = u, d, \dots, t$ .

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G^{a\mu\nu} + \sum_f [i\bar{q}_f \gamma^\mu (\partial_\mu + ig_s G_{a\mu} \lambda^a) q_f - m\bar{q}_f q_f]$$

## 2 Rottura spontanea di simmetria

### 2.1 Il teorema di Goldstone

Con la rottura spontanea di una simmetria globale in una teoria quantistica di campi, compaiono particelle di spin 0 e massa nulla, detti bosoni di Goldstone.

#### Esempio: campo scalare complesso

La lagrangiana per il campo scalare complesso, con una simmetria globale  $U(1)$  è:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial_\mu \varphi)^\dagger (\partial^\mu \varphi) - V(|\varphi|^2) \\ &= (\partial_\mu \varphi)^\dagger (\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2 \end{aligned}$$

Dove  $\lambda > 0$  perché l'energia abbia un minimo. Ora, con  $m^2 > 0$  otteniamo la solita teoria del campo scalare complesso, mentre il caso  $m^2 < 0$  è più interessante.

Consideriamo infatti il caso  $m^2 < 0$ . Scriviamo il campo con le sue componenti reali. In termini di queste componenti, la simmetria  $U(1)$  diventa una simmetria per rotazioni  $SO(2)$ .

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo i minimi dell'hamiltoniana  $\mathcal{H} = |\dot{\varphi}|^2 + |\nabla\varphi|^2 + V(|\varphi|^2)$ . La parte con le derivate si annulla per  $\varphi$  costante, cerchiamo quindi i minimi del potenziale.

$$V = \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = m^2 \varphi_i^2 + \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi_i$$

$$= \varphi_i(m^2 + \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)).$$

Quindi le derivate si annullano per

1.  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$
2.  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = -\frac{m^2}{\lambda} =: v$

Calcolando la matrice delle derivate seconde si verifica facilmente che solo la seconda possibilità corrisponde a un minimo, e che gli autovalori in questo caso sono 0 e 1. Inoltre, parametrizziamo i campi attorno al minimo

$$v_1 = v \cos \theta$$

$$v_2 = v \sin \theta.$$

Scegliendo un minimo abbiamo una rottura spontanea di simmetria. Espandiamo la lagrangiana intorno a questo minimo:

$$V = V(2.) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}|_2(\varphi_1 - v_1) + \frac{\partial V}{\partial \varphi_2}|_2(\varphi_2 - v_2)}_{=0 \text{ nel minimo}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} |_2 \underbrace{(\varphi_i - v_i)}_{=: \varphi'_i} \underbrace{(\varphi_j - v_j)}_{=: \varphi'_j}$$

Con le ridefinizioni dei campi  $\varphi'_i$  possiamo scrivere la lagrangiana come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi'_1 \partial^\mu \varphi'_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi'_2 \partial^\mu \varphi'_2 + \frac{1}{2} 2\lambda v^2 \begin{pmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi'_1 \partial^\mu \varphi'_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi'_2 \partial^\mu \varphi'_2 + \lambda v^2 (\cos \theta \varphi'_1 + \sin \theta \varphi'_2)^2$$

Con un cambio di variabili finale possiamo ridefinire i campi e la lagrangiana con

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2) - \lambda v^2 \varphi_1^2$$

In questi termini, la lagrangiana descrive due campi scalari:  $\varphi_1$  con massa  $m_1 = 2\lambda v^2$  e  $\varphi_2$  con massa nulla, detto bosone di Goldstone. Possiamo ora enunciare il teorema in generale.

**Teorema** (di Goldstone).

- Sia  $\mathcal{L}(\varphi, \chi)$  una lagrangiana con campi reali di spin 0  $\varphi$  e campi di spin  $1/2$   $\chi$ ;
- $\mathcal{L}$  invariante globale sotto l'azione di un gruppo  $G$ .
- $\varphi_i = v_i$  configurazione costante che minimizza l'energia;
- infine diciamo  $H < G$  la simmetria residua, ovvero il sottogruppo di  $G$  che lascia invariata la configurazione di equilibrio.

Allora la matrice delle derivate seconde di  $V$  ha esattamente  $\dim(G) - \dim(H)$  autovalori nulli, che corrispondono a particelle di massa nulla e spin 0 (bosoni di Goldstone).

*Dimostrazione.* La lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_i \partial^\mu \varphi_i - V(\varphi) + \underbrace{\dots}_{\text{dipendenza da } \chi}$$

e, nella configurazione di minimo vale:

$$0 = \delta V = \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i = \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} (-i \alpha_a t_{ij}^a \varphi_j) \quad \forall \alpha_a$$

e deve essere anche nulla l'espressione:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_i} t_{ij}^a \varphi_j = 0.$$

Derivando rispetto a  $\varphi_k$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} t_{ij}^a \varphi_j + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \varphi_i}}_{=0 \text{ nel minimo}} t_{ik}^a = 0$$

Quindi rimane:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} t_{ij}^a v_j = 0$$

da cui si legge che  $t_{ij}^a v_j$  è un autovettore relativo all'autovalore 0. Contiamo correttamente gli autovettori indipendenti. Ordiniamo i generatori mettendo prima i generatori del gruppo  $H$ :  $t_{ij}^a = \{t^1, \dots, t^{\dim(H)}, \dots, t^{\dim(G)}\}$ .

Se  $a = 1, \dots, \dim(H)$  allora  $h = e^{-i \alpha_a t^a} \in H$  e, per ipotesi,  $h v = v$ . Per una trasformazione infinitesima dunque  $(1 - i \alpha_a t^a) v = v$ , da cui si legge  $t^a v = 0$ . Restano dunque  $\dim(G) - \dim(H)$  autovettori non nulli linearmente indipendenti.

La matrice delle derivate seconde del potenziale diventa ovviamente la matrice di massa. Espandendo intorno alla configurazione di equilibrio  $\varphi_i = v_i$  e ridefinendo  $\varphi'_i = \varphi_i - v_i$ , otteniamo le equazioni del moto:

$$\left( i_{ij} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \Big|_{\varphi=v} \right) \varphi'_j = 0$$

Da cui si vede che il sistema ha  $\dim(G) - \dim(H)$  particelle a spin e massa nulli, dette appunto bosoni di Goldstone.  $\square$

### Esempio: i mesoni pseudoscalari leggeri

Non sono mai stati osservati i bosoni di Goldstone a spin 0 e massa nulla. Tuttavia la teoria si può applicare a un'approssimazione della QCD. Considerando solo i quark leggeri  $q = (u, d, s)$ , la lagrangiana ricavata nel paragrafo 1.3:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G^{a\mu\nu} + i \bar{q} \gamma^\mu D_\mu q - \bar{q} m q$$

Se trascuriamo le masse dei quark leggeri, otteniamo una lagrangiana invariante sotto un gruppo di simmetria più ampio. Infatti scompare l'unico termine che mescola le chiralità *left* e *right*, che ora possono trasformare con due fasi indipendenti. Il gruppo diventa quindi  $G = SU(3)_L \times SU(3)_R$ .

Tuttavia, non esistono multipletti dinamici con masse molto simili. Questo fa pensare che la simmetria sia spontaneamente rotta. Il ruolo dei campi scalari in questa teoria è giocato dai bilineari fermionici  $\bar{q}q = \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s$ .

Una trattazione non perturbativa mostra in effetti che la configurazione di energia minima non si trova nell'origine  $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \neq 0$ . Qual è la simmetria residua  $H$ ? Un elemento di questo sottogruppo dovrebbe lasciare invariato:

$$\langle 0|\bar{q}_R q_L + \text{h.c.}|0\rangle \xrightarrow{G} \langle 0|\bar{q}_R \Omega_R^\dagger \Omega_L q_L + \text{h.c.}|0\rangle.$$

Ciò accade se e solo se le fasi con cui trasformano le parti *left* e *right* sono uguali.  $\alpha_{aL} = \alpha_{aR} =: \alpha_a$ . Risulta dunque che il gruppo  $H$  è  $SU(3)$ . Questo gruppo ha otto generatori, quindi la teoria avrà  $8 + 8 - 8 = 8$  bosoni di Goldstone. Queste otto particelle con spin 0 e massa piccola sono gli otto mesoni pseudoscalari leggeri  $\pi$ ,  $K$  e  $\eta$ .

## 2.2 Il meccanismo di Higgs

## 3 La lagrangiana della teoria elettrodebole