

Relazione di Laboratorio: il pendolo

Ilaria Brivio (582116)
brivio.ilaria@tiscali.it

Matteo Abis (584206)
webmaster@latinblog.org

25 gennaio 2008

1 Obiettivo dell'esperienza

L'obiettivo primario dell'esperienza è il confronto di vari metodi di raccolta di dati sperimentali e la loro analisi, con particolare attenzione alla stima del “valor vero” e degli errori casuali e sistematici, per stabilire quale possa essere il modo migliore per misurare il periodo di oscillazione del pendolo, a parità di condizioni e tempo a disposizione.

2 Descrizione dell'apparato strumentale

Lo strumento è un pendolo, costituito da una barra di metallo a cui sono fissate due masse: una 60 cm al di sotto del sostegno e un contrappeso al di sopra. Il pendolo oscilla su un coltello di acciaio temprato largo $5 \cdot 10^{-2}$ mm.

Nella prima parte dell'esperienza è stato utilizzato un cronometro manuale, con sensibilità di 10^{-3} s. Nella seconda parte, invece, il cronometro era dotato di un sistema di rilevazione automatico, ovvero una fotocellula sensibile al passaggio del pendolo nel punto più basso della traiettoria di oscillazione. Tale sistema ha una sensibilità di 10^{-4} s ed è programmato in modo da registrare la durata di un periodo intero.

3 Descrizione della metodologia di misura

Sono stati registrati manualmente tre campioni di dati: un primo di 120 misure di una singola oscillazione completa [riferimento tabella], un secondo di 52 misure di due oscillazioni [riferimento tabella] e un terzo campione di 28 misure di quattro oscillazioni [riferimento tabella]. Il tempo qui misurato come periodo è l'intervallo tra due arresti consecutivi del pendolo sullo stesso lato.

Con l'apparato automatico sono state raccolte prima 100, poi 999 misure. Il sistema rileva il tempo trascorso tra due passaggi consecutivi del pendolo nel punto più basso del suo movimento, ed è programmato per salvare dati relativi a un'oscillazione completa, e non ai semiperiodi.

4 Risultati sperimentali ed elaborazione dati

I tempi registrati nei campioni sono riportati nelle tabelle [riferimenti]. Per ogni campione è stato elaborato un istogramma suddividendo i dati in classi di frequenza dell'ampiezza di 15 ms, messo a confronto con una distribuzione casuale gaussiana. Sono stati inoltre calcolati media aritmetica \bar{x} , l'errore quadratico medio σ e l'errore della media $\sigma_{\bar{x}}$. Nel campione relativo alle misure manuali della singola oscillazione, è stato individuato un valore esterno all'intervallo $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$ e quindi escluso.

n. misure \times osc.	\bar{x} (ms)	σ	$\sigma_{\bar{x}}$	risultato
120 \times 1	1936.47	63.64	5.81	1936.5 \pm 5.8
52 \times 2	3859.51	88.07	12.10	3859.5 \pm 12.1
28 \times 4	7711.79	88.09	16.65	7711.8 \pm 16.7
100 (auto)	1927.21	0.09	0.01	1927.21 \pm 0.01

Ovvero, riportando i valori a un'oscillazione:

120	1936.5	\pm 5.8	ms
52	1929.7	\pm 6.0	ms
28	1927.9	\pm 4.1	ms
100a	1927.21	\pm 0.01	ms

È stata calcolata la compatibilità λ di tali risultati, secondo la formula:

$$\lambda_{i,j} = \frac{|\bar{x}_i - \bar{x}_j|}{\sqrt{\sigma_{\bar{x}_i}^2 + \sigma_{\bar{x}_j}^2}}$$

Con i seguenti risultati:

λ	120	52	28
100a	1.59	0.42	0.18
28	1.19	0.25	
52	0.80		

La compatibilità si dice buona se ha valore compreso tra 0 e 1, mediocre tra 1 e 2 e scarsa tra 2 e 3. I dati sono stati anche organizzati in istogrammi e confrontati con la curva gaussiana:

$$f(x) = \frac{N\Delta x}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma}\right)^2\right\}$$

Dove Δx è l'ampiezza delle classi di frequenza (15 ms), N il numero totale di osservazioni e \bar{x} la media aritmetica.

5 Discussione dei risultati

L'indice di compatibilità rispetto alle misure automatiche, gli errori sulle misure e sulla media mostrano chiaramente che la stima migliore è quella data dalle osservazioni su più periodi consecutivi. Ciò è giustificato dal fatto che l'errore σ dovuto soprattutto al tempo di reazione dell'osservatore, è pressapoco costante su ogni misura, ma viene distribuito su un maggior numero di periodi, dunque influisce meno sulla stima della singola oscillazione. A conferma

Per quanto riguarda i grafici, la distribuzione casuale degli errori è più evidente nelle misure di singole oscillazioni (come si vede dal grafico 5.1) nonostante il picco sia spostato di circa 20 ms a

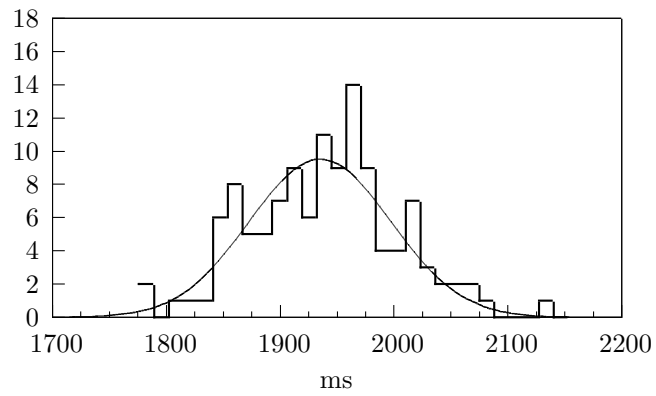


Grafico 5.1: Campione di 120 misure di un'oscillazione.

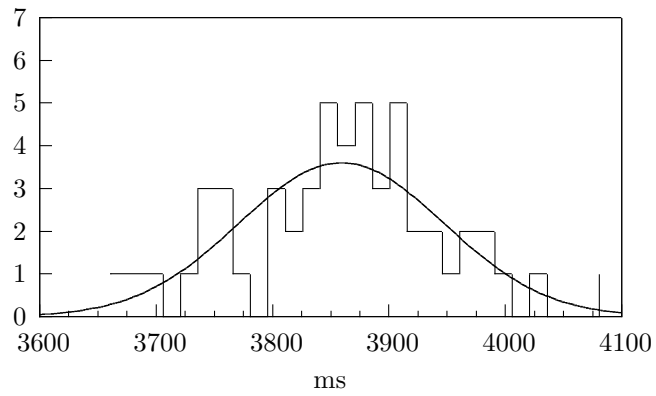


Grafico 5.2: Campione di 52 misure di due oscillazioni.

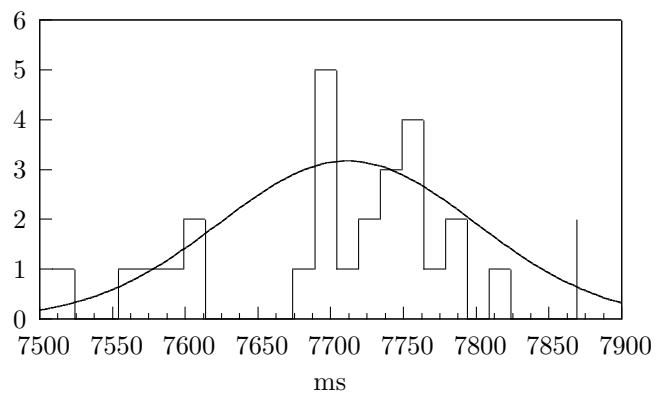


Grafico 5.3: Campione di 28 misure di quattro oscillazioni.

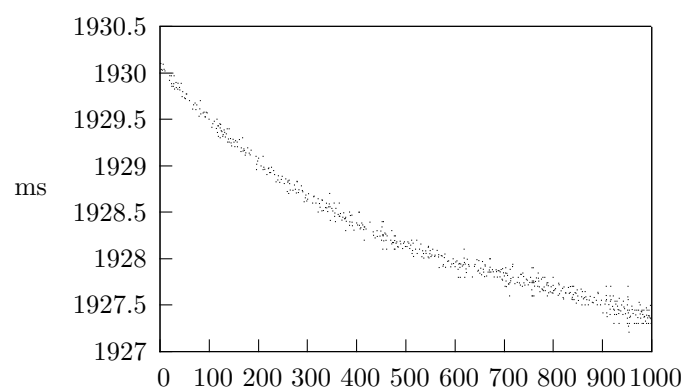


Grafico 5.4: Durata delle oscillazioni su 999 periodi, rilevazione automatica.

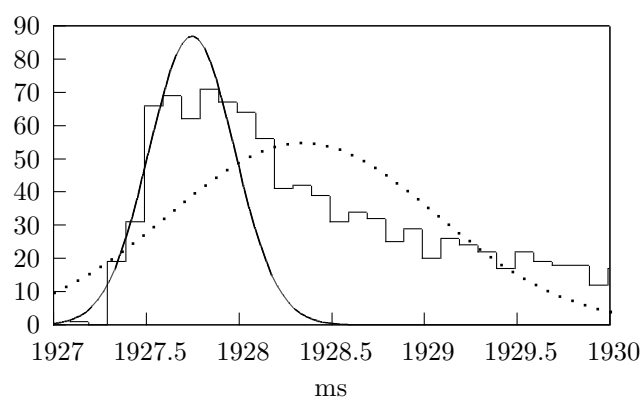


Grafico 5.5: Durata delle oscillazioni su 999 periodi con rilevazione automatica e classi di frequenza da 10^{-4} s. Tratteggiata la gaussiana con media ed errore relativi a tutte le misure, linea continua per la gaussiana sugli ultimi 500 dati.

destra. Il secondo grafico (5.2) rispetta meglio la stima centrale, anche se la scarsità di dati produce numerose irregolarità, che sono ancora più evidenti nel terzo istogramma (5.3) dove il picco di frequenza è quasi isolato. In tutti e tre i grafici si nota inoltre che la forma dell'istogramma presenta massimi secondari in eccesso di circa 50 ms.

Più interessante risulta il grafico delle 999 rilevazioni automatiche, in cui il massimo è nettamente spostato a sinistra e la distribuzione non è affatto simmetrica per la presenza di un errore sistematico dovuto all'approssimazione del periodo di oscillazione come indipendente dall'ampiezza dell'angolo. Una migliore approssimazione sarebbe infatti:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + \frac{9\alpha^4}{1024} + \dots \right)$$

Come testimonia anche il grafico 5.4 con le misure in ordine di rilevazione, il periodo diminuisce con lo smorzamento dell'oscillazione di circa 3 ms dopo 1000 periodi, ma non in modo lineare, ovvero in modo sempre meno marcato. Di conseguenza l'errore casuale è più evidente nelle ultime misure, che risultano più irregolari. Per lo stesso motivo l'istogramma delle frequenze si avvicina a una distribuzione casuale solo nella sua parte sinistra. Il grafico 5.5 mostra una gaussiana con i dati di tutte le 999 misure, evidentemente inadeguata a rendere conto della distribuzione per la presenza dell'errore sistematico, mentre la gaussiana relativa ai dati delle ultime 500 osservazioni risulta meglio centrata sul massimo e più coerente con le misure intorno.

6 Conclusioni

L'esperienza dimostra chiaramente che per misurare manualmente il periodo di un pendolo è utile raggruppare più oscillazioni in una stessa misura, per *diluire* l'effetto dell'imprecisione dovuta alla prontezza dell'operatore, che si può quantificare nell'ordine di grandezza di $10^{-1}s$. Una strumentazione elettronica permette invece di ridurre tali errori di tre ordini di grandezza rendendo possibile lo studio di errori sistematici dovuti allo smorzamento dell'ampiezza di oscillazione.