

Maurizio Loreti

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Padova

**Introduzione alle
Esperimentazioni di Fisica I**

**Guida Pratica
alle Esperienze**



Giugno 2007
(Edizione privata fuori commercio)

Questo libro è stato completamente composto e stampato dall'autore. Sono stati adoperati i programmi T_EX di Donald E. Knuth e L^AT_EX di Leslie Lamport (nella versione L^AT_EX 2_ε) ed i caratteri PostScript della famiglia Lucida disegnati da Bigelow & Holmes e distribuiti dalla Y&Y Inc.

IMPORTANTE

Questo testo non è ancora definitivo.

Viene mantenuto sotto CVS, e questo mi permette di risalire a tutti i cambiamenti successivi a partire dalla data e dall'ora in cui T_EX è stato eseguito:

il 6 giugno 2007 alle 09:37.

Maurizio Loreti

Indice

1	Misura degli angoli interni del triangolo	1
2	Misure ripetute: le biglie	5
2.1	Il nonio	7
2.2	Esecuzione dell'esperimento	7
2.3	Verifica della formula dell'errore della media	11
2.4	La legge sulla varianza delle combinazioni lineari	12
2.5	Accordo con la distribuzione normale	14
3	Misure di durata con il pendolo	17
3.1	Il pendolo semplice	17
3.2	Il pendolo composto	19
3.3	L'esperienza	20
4	Misure con la guidovia	25
4.1	Il piano inclinato (in assenza di attrito)	26
4.2	Studio dell'attrito viscoso	32
4.3	Il piano inclinato (tenendo conto dell'attrito)	38
4.4	Gli urti	39
5	L'esperienza del volano	43
5.1	Brevi note sul filo ideale	51
6	Il pendolo reversibile di Kater	55
7	L'estensimetro	63
8	Il viscosimetro a caduta	73
8.1	La teoria	73
8.2	L'esperienza	75
8.2.1	La bilancia di Mohr-Westphal	81
9	Le esperienze di calorimetria	83
9.1	La bilancia	83
9.1.1	Determinazione dinamica del centro delle oscillazioni	84
9.1.2	Determinazione della sensibilità	84

9.1.3	La pesata semplice	85
9.1.4	La pesata con tara	85
9.2	Il calorimetro delle mescolanze	86
9.2.1	Calore specifico di un corpo solido	86
9.2.2	Calore di fusione del ghiaccio	90
10	L'equazione di stato dei gas	97
10.1	L'attrezzatura sperimentale	97
10.2	La procedura sperimentale	99
10.2.1	Le operazioni preliminari	99
10.2.2	L'acquisizione dei dati	101
10.2.3	Il cambiamento della temperatura	101
10.3	L'elaborazione dei dati	102
10.4	Se le cose non tornano	107

Elenco delle figure

1a	Misura degli angoli interni di 100 triangoli: l'istogramma dei dati e la curva normale.	3
2a	Lo strumento usato per le misure ripetute.	6
2b	Rappresentazione schematica del nonio al decimo di divisione.	7
2c	Misure ripetute dell'altezza di una colonna di palline di vetro: il diagramma temporale.	9
2d	Misure ripetute dell'altezza di una colonna di palline di vetro: i dati disposti in istogramma.	10
2e	Misure ripetute dell'altezza di una colonna di palline di vetro: istogrammi di somme e differenze.	13
3a	Rappresentazione schematica del pendolo semplice e del pendolo composto.	17
3b	Misure di durata con il pendolo: i dati.	21
4a	Rappresentazione schematica delle forze agenti su di un corpo che scivola (in assenza di attrito) su di un piano inclinato.	26
4b	Misure sul piano inclinato: i grafici di $v = v(t)$	29
4c	In alto, l'accelerazione in funzione dell'angolo di inclinazione del piano; in basso il valore stimato di g , sempre in funzione dell'angolo α	31
4d	Misure sull'attrito: i grafici di $v = v(x)$ per la slitta scarica.	36
4e	Misure sull'attrito: i grafici di $v = v(x)$ per la slitta carica.	37
4f	Urto totalmente anelastico e caso generale.	39
5a	Il volano: apparato sperimentale.	44
5b	Esperienza del volano: il moto in fase di accelerazione.	47
5c	Esperienza del volano: il moto in fase di decelerazione.	50
5d	Il volano: il filo reale.	52
6a	Rappresentazione schematica del pendolo reversibile di Kater.	55
6b	Il pendolo di Kater: misure preliminari, ogni 10 cm.	57
6c	Il pendolo di Kater: misure ogni centimetro.	59
6d	Il pendolo di Kater: misure finali.	60

7a	L'estensimetro: rappresentazione schematica dello strumento.	64
7b	Gli estensimetri: alcuni dei grafici degli allungamenti in funzione della forza applicata.	67
7c	Il modulo di Young per tutti gli estensimetri dotati di filo di acciaio. . .	69
7d	La costante elastica K in funzione del diametro del filo, ed il rapporto R in funzione della sua lunghezza.	70
7e	Il prodotto P in funzione del diametro del filo, ed il rapporto R in funzione della sua lunghezza.	71
8a	Nella figura superiore, la velocità in funzione del tempo per $v_0 = 0$ (linea continua) e $v_0 = v_L/3$ (linea punteggiata); in quella inferiore, lo spazio percorso in funzione del tempo e l'asintoto $s(t) = v_L(t - \tau)$	76
8b	Il tempo impiegato in funzione dello spazio percorso per le sfere dal diametro minore (1.5 mm).	77
8c	Grafici tempo-spazio relativi a quattro diametri delle sfere per i quali si dispone di più determinazioni.	78
8d	L'inverso della velocità limite in funzione dell'inverso del quadrato dei diametri.	79
8e	Rappresentazione schematica della bilancia di Mohr-Westphal.	81
9a	Rappresentazione schematica della bilancia.	84
9b	Il calorimetro delle mescolanze.	87
9c	Calore specifico di un corpo solido: andamento della temperatura nel tempo.	91
9d	Calore di fusione del ghiaccio: andamento della temperatura nel tempo.	94
10a	Lo strumento per l'esperienza sui gas.	98
10b	L'interno dello strumento.	98
10c	La schermata del programma di acquisizione.	100
10d	La pressione minima in funzione della temperatura.	102
10e	Uno dei grafici di V in funzione di $1/p$	104
10f	Tutti i grafici dei 6 campioni.	105
10g	Il coefficiente angolare B delle rette in funzione della temperatura. . . .	106

Elenco delle tabelle

1.1	Misura degli angoli interni di 100 triangoli: i risultati.	1
1.2	Misura degli angoli interni di 100 triangoli: i parametri statistici del campione.	2
1.3	Le classi di frequenza dei dati di figura 1a, assieme alle previsioni basate sulla funzione normale.	2
2.1	Misure ripetute dell'altezza di una colonna di palline di vetro: i dati (misure 1-50).	8
2.2	Misure ripetute dell'altezza di una colonna di palline di vetro: i parametri statistici.	8
2.3	Misure ripetute dell'altezza di una colonna di palline di vetro: risultati sui dati raggruppati.	11
2.4	Misure ripetute dell'altezza di una colonna di palline di vetro: dati di somme e differenze.	12
2.5	Le classi di frequenza dei risultati delle misure "bianche", di quelle "nera" e delle loro somme e differenze; assieme alle previsioni basate sulla funzione normale.	15
3.1	Misure di durata con il pendolo: i risultati.	22
4.1	Misure sul piano inclinato: i dati.	27
4.2	Misure sul piano inclinato: velocità istantanee e tempi.	28
4.3	Misure sul piano inclinato: l'interpolazione lineare.	29
4.4	Misure sul piano inclinato: i risultati per g	30
4.5	Misure sull'attrito: i dati (slitta scarica).	34
4.6	Misure sull'attrito: i dati (slitta carica).	35
4.7	Misure sull'attrito: i risultati dell'interpolazione lineare.	35
4.8	Misure sull'attrito: i risultati della media pesata.	35
4.9	Misure sul piano inclinato tenendo conto degli attriti: i risultati.	39
4.10	Esperienza degli urti: misure e risultati.	41
5.1	Esperienza del volano: i dati presi in fase di accelerazione.	46
5.2	Esperienza del volano: i risultati dell'interpolazione lineare.	48
5.3	Esperienza del volano: le misure in fase di decelerazione.	49
5.4	Esperienza del volano: i dati forniti dal laboratorio ed i risultati finali.	50

6.1	Il pendolo di Kater: misure preliminari, ogni 10 cm.	57
6.2	Il pendolo di Kater: misure ogni centimetro.	58
6.3	Il pendolo di Kater: misure finali.	58
6.4	Il pendolo di Kater: i risultati.	61
7.1	Gli estensimetri: i valori di riferimento per il modulo di Young.	67
7.2	Gli estensimetri: i valori misurati del modulo di Young.	68
8.1	I valori sperimentali: il diametro della sfera D (espresso in trentaduesimi di pollice ed in centimetri); $1/D^2$ (in cm^{-2}); e l'inverso della velocità limite (in s/cm).	79
8.2	La densità dell'acqua a varie temperature (con quattro cifre decimali significative).	82
9.1	Determinazione del calore specifico di un corpo solido: andamento della temperatura del calorimetro in funzione del tempo.	90
9.2	Calore specifico di un corpo solido: valori misurati e risultato finale. . .	90
9.3	Determinazione del calore di fusione del ghiaccio: andamento della temperatura del calorimetro in funzione del tempo.	93
9.4	Calore di fusione del ghiaccio: valori misurati e risultato finale.	93

Capitolo 1

Misura degli angoli interni del triangolo

Lo scopo è quello di verificare come si distribuiscono le misure ripetute di una grandezza fisica attorno al valore vero della grandezza stessa: in questo caso la somma dei tre angoli interni di un triangolo, nota a priori dalla geometria euclidea come 180 gradi sessagesimali.

Si disegnano dei triangoli (in genere sessanta bastano, volendo se ne possono usare di più), servendosi di una matita od una penna a punta fine e numerandoli in sequenza; poi se ne misurano gli angoli interni col goniometro. Si apprezza ad occhio il decimo di grado, si sommano i valori dei tre angoli di ogni triangolo e si costruisce una tabella come la 1.1:

179.3	180.1	179.5	179.7	179.1	179.9	179.7	179.9	179.8	180.4
180.0	179.8	179.6	179.9	180.1	180.2	180.8	180.9	180.5	180.0
180.2	181.3	180.5	180.8	180.2	179.8	180.2	179.8	180.7	180.7
179.9	179.3	180.4	179.9	180.0	179.9	181.2	181.0	180.1	179.6
180.2	179.3	179.8	180.8	181.2	181.0	180.3	180.0	180.1	180.1
180.2	180.1	180.2	180.3	179.5	179.9	181.1	180.1	179.7	180.7
180.4	180.1	179.3	179.7	180.6	180.5	179.4	179.3	180.3	180.7
179.7	179.9	180.3	180.0	180.0	179.4	180.0	180.2	180.0	180.3
180.0	179.7	179.7	180.0	179.6	180.4	179.9	180.3	180.0	181.2
179.0	179.9	180.1	180.7	179.9	180.0	180.0	179.7	179.7	180.0

TABELLA 1.1 – Misura degli angoli interni di 100 triangoli: i risultati.

La conoscenza a priori del risultato può influenzare lo sperimentatore: per questo motivo è opportuno che i vari componenti di un gruppo si alternino alla misura, o che comunque i vari angoli appartenenti ad uno stesso triangolo non siano misurati in successione.

Oltre questa, altre cause di errore sono insite nel disegno stesso dei triangoli (lati non perfettamente rettilinei e di spessore non nullo), nel posizionamento del gonio-

metro sul disegno e nella stima del decimo di grado; normalmente si tratta di errori di tipo casuale, ma il comportamento del misuratore può trasformarli in errori sistematici. Delle misure si calcola:

- la tendenza centrale, ovvero la media aritmetica, la moda (se esiste) e la mediana;
- la dispersione, ossia l'errore quadratico medio e la semidispersione massima.

Si guarda se vi sono misure da scartare (quelle eventuali che differiscano dal valore medio per più di tre volte σ), ed in caso affermativo si ricalcola senza di esse la media aritmetica e l'errore quadratico medio (non è necessario occuparsi ancora delle altre grandezze, che in pratica nella fisica non vengono mai usate).

Infine si riportano i dati in istogramma, e si disegna la curva di Gauss che corrisponde ai valori ottenuti per media ed errore quadratico medio; per i dati descritti in tabella 1.1, ad esempio, si vedano la tabella 1.2 e la figura 1a (nessuna misura nel nostro caso va scartata).

Moda	180.0
Mediana	180.0
Media	180.092
Semidispersione massima	1.15
Errore quadratico medio	0.4855
Errore della media	0.0486
Risultato	180.092 ± 0.049

TABELLA 1.2 - Misura degli angoli interni di 100 triangoli: i parametri statistici del campione.

Confrontando la curva con l'istogramma si dà un giudizio sul loro accordo; infine si calcola l'errore della media e si controlla che il risultato sia compatibile con 180° . Per i dati qui riportati come esempio, l'andamento dell'istogramma *sembra* grosso modo Gaussiano; ma, come riprova, è però meglio usare il *test del χ^2* . Nella tabella

α	O_i	P_i	A_i
< 179.5	9	0.09225	9.2253
179.5 179.6	9	0.08787	8.7870
179.7	10	0.05909	5.9089
179.8	3	0.06835	6.8347
179.9	11	0.07578	7.5779
180.0	14	0.08054	8.0540
180.1	10	0.08205	8.2053

α	O_i	P_i	A_i
180.2	8	0.08013	8.0132
180.3	6	0.07501	7.5014
180.4	4	0.06731	6.7314
180.5	3	0.05790	5.7901
180.6 180.7	6	0.8548	8.5476
> 180.7	11	0.08823	8.8231

TABELLA 1.3 - Le classi di frequenza dei dati di figura 1a, assieme alle previsioni basate sulla funzione normale.

1.3 abbiamo riportato: il numero O_i di eventi osservati per ognuna delle classi di

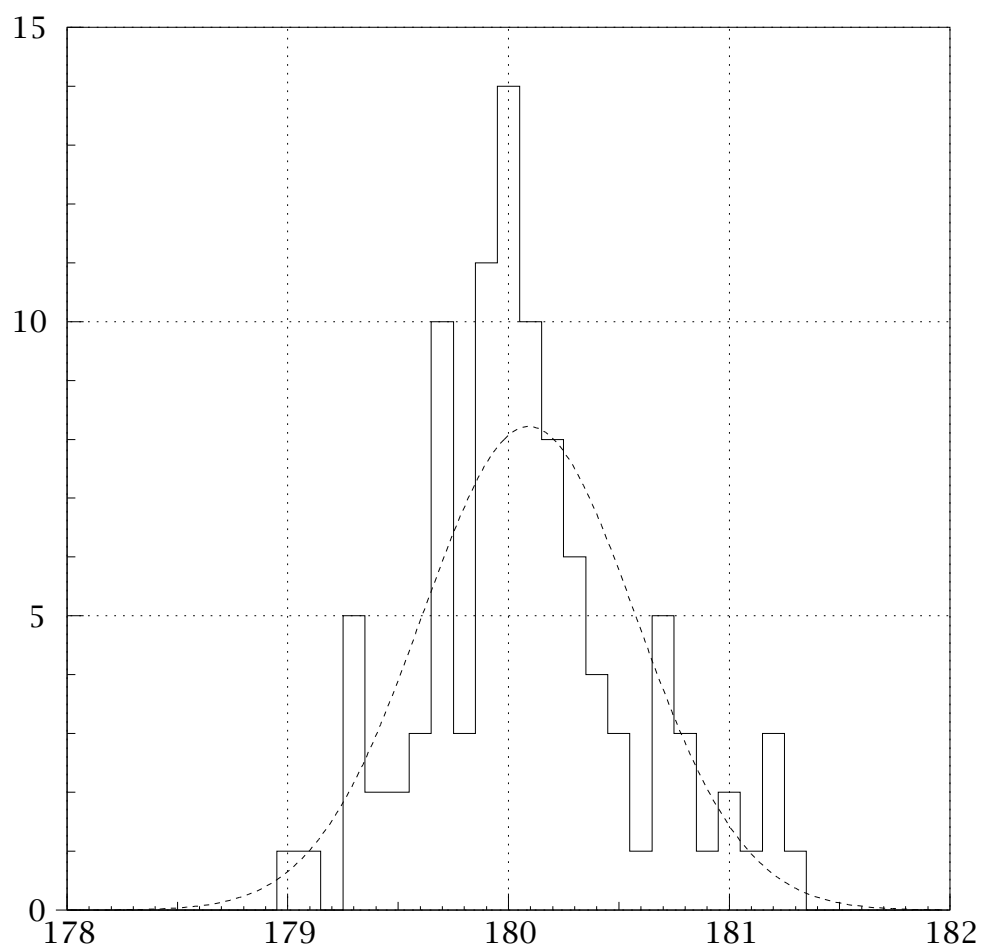


FIGURA 1a - Misura degli angoli interni di 100 triangoli: l'istogramma dei dati e la curva normale.

frequenza della figura 1a; la probabilità P_i che una misura debba cadere in quella classe (ricavata integrando la funzione normale); ed infine il numero medio di eventi attesi $A_i = 100 \cdot P_i$. Si sono inoltre già raggruppate assieme alcune classi di frequenza, in modo che il numero di eventi attesi sia ovunque almeno pari a 5.

Come sappiamo la variabile casuale

$$X = \sum_i \frac{(A_i - O_i)^2}{A_i} \approx 17.0 \quad (1.1)$$

(la sommatoria, nell'equazione (1.1), si intende estesa alle 13 righe della tabella 1.3) deve essere distribuita come il χ^2 a 10 gradi di libertà; la probabilità X assuma un valore maggiore o uguale a 17.0 per motivi attribuibili alle sole fluttuazioni casuali è allora del 7.4%; e quindi l'ipotesi che la distribuzione delle misure sia quella normale è in realtà soddisfatta in modo assai mediocre.

Per quanto attiene alla compatibilità con il valore vero noto a priori, anch'essa risulta mediocre:

$$\frac{|\bar{x} - 180|}{\sigma_{\bar{x}}} = 1.88$$

e forse qualche errore sistematico è stato introdotto dai misuratori. Si noti anche come risulti a posteriori giustificato l'aver spinto la precisione delle misure al decimo di grado; l'errore sulla somma di tre angoli è inferiore al mezzo grado e, se ad ognuno di essi può essere attribuito lo stesso errore, questo vale $0.4855/\sqrt{3} \approx 0.28^\circ$, appunto dell'ordine del decimo.

Capitolo 2

Misure ripetute: le biglie

Lo strumento usato per la seconda esperienza è raffigurato in figura 2a: si tratta di un cilindro in plexiglass trasparente che contiene al proprio interno una colonna di 13 biglie di vetro, ed è imperniato in modo da poter essere ruotato attorno ad un asse orizzontale.

Sulle due estremità della colonna di biglie (che sono contrassegnate da differenti colori, bianco e nero, che permettono di distinguerle) appoggiano delle superfici di metallo; ognuna di queste è poi collegata, attraverso un'asta, ad una scala (graduata dallo 0 al 10) mobile con essa. Queste scale si affacciano su altre due, che sono invece solidali con lo strumento e graduate in millimetri; il compito del misuratore è quello di valutare, al decimo di divisione, la posizione dello zero della scala mobile rispetto a questa scala fissa.

La grandezza fisica che viene misurata è, a meno di una costante che dipende dalla geometria dello strumento, l'altezza della colonna di biglie (sempre riferendosi alla figura 2a, quello che si misura è $x = p + a - b$); la necessità di distinguere le due estremità è connessa ad una possibile asimmetria dell'apparecchio (diversi valori di a e b dai due lati), in conseguenza della quale i risultati che si ottengono dalla parte bianca e da quella nera potrebbero a priori essere differenti.

Ruotando lo strumento, le biglie all'interno cambiano casualmente la loro posizione: la cattiva definizione sia del diametro delle biglie (che non sono perfettamente sferiche) che di quello del cilindro di plexiglass (a sua volta non perfettamente regolare) causeranno di volta in volta fluttuazioni del valore della grandezza misurata. Il comporsi di queste fluttuazioni con gli altri errori (casuali) introdotti dal misuratore permette di ottenere, abbastanza rapidamente, dati distribuiti secondo la legge normale¹ attorno ad un valore centrale (il valore medio dell'altezza delle biglie, meno la costante geometrica relativa allo strumento).

¹Visto che un eventuale assestamento delle biglie può avvenire solo verso il basso, c'è in realtà il sospetto che la distribuzione delle misure possa avere una leggera asimmetria; ma essa non è in pratica avvertibile.

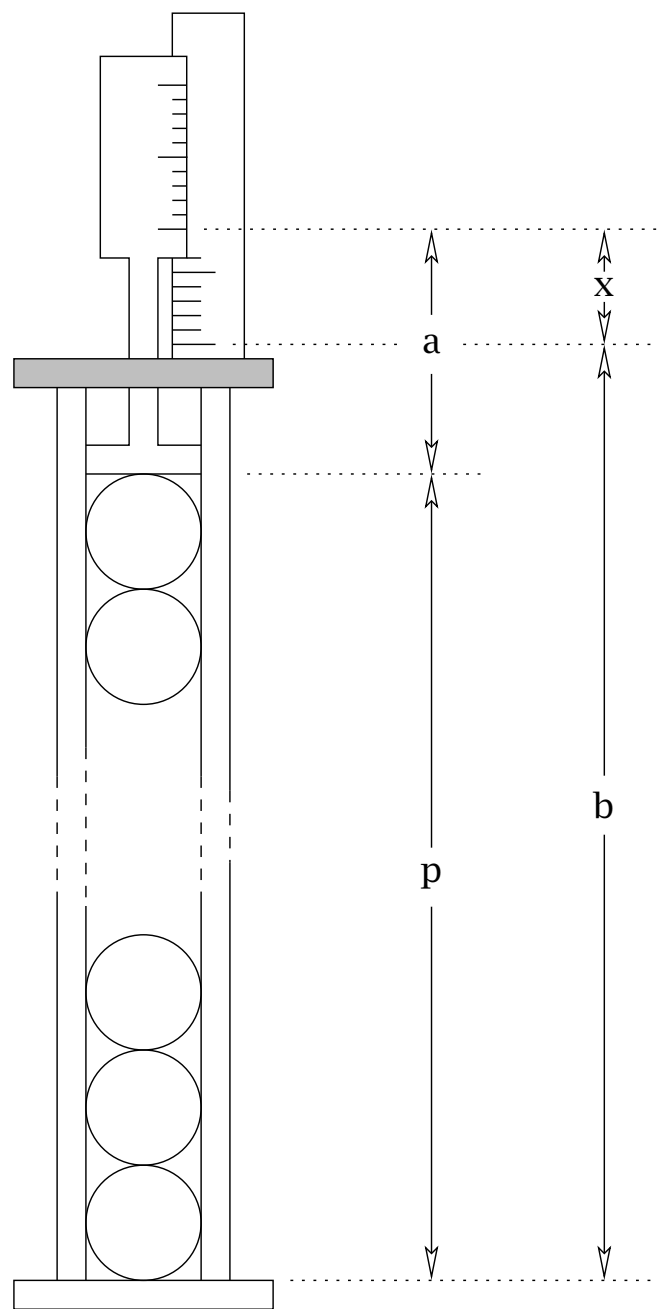


FIGURA 2a - Lo strumento usato per le misure ripetute.

2.1 Il nonio

L'assieme delle due scale affiancate, quella fissa e quella mobile, costituisce un *nonio*: ossia un artificio meccanico che permette di valutare agevolmente la frazione di divisione.

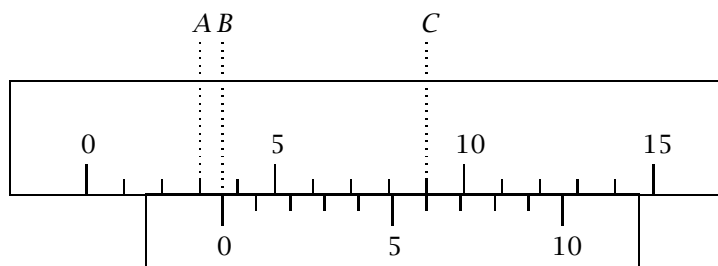


FIGURA 2b – Rappresentazione schematica del nonio al decimo di divisione.

La scala mobile è costruita² prendendo un segmento lungo 9 mm e dividendolo in 10 parti; così che ogni unità della scala del nonio è lunga 0.9 volte quella della scala fissa.

Facendo riferimento alla figura 2b, si vede che la lunghezza del segmento *AB* (ovverosia la frazione di divisione che si intende stimare) è uguale alla differenza delle lunghezze degli altri due segmenti *AC* e *BC*, in cui *C* è la posizione in cui una delle graduazioni della scala mobile è allineata esattamente con una della scala fissa.

Indicato con *N* il numero d'ordine della graduazione del nonio in *C*, e con *U* ed *U'* le unità della scala fissa e mobile rispettivamente (per noi *U* = 1 mm ed *U'* = 0.9 mm) vale la

$$|AB| = |AC| - |BC| = NU - NU' = N(U - U') = N \cdot 0.1 \text{ mm}$$

ed insomma *la frazione di millimetro che si intende stimare è data dal numero d'ordine di quella graduazione del nonio che coincide con una della scala fissa.*

2.2 Esecuzione dell'esperimento

Si raccolgono *almeno* 200 misure dalla parte bianca e 200 dalla parte nera, che indicheremo con i simboli *B_i* ed *N_i*, costruendo una tabella in cui le misure compaiono nell'ordine temporale in cui sono state effettuate; per un esempio, riferirsi alla tabella 2.1 (che però, per economizzare spazio, non contiene tutte i 400 dati ma solo una parte).

²Le indicazioni costruttive sul nonio valgono per questa misura, in cui interessa il *decimo* di divisione; qualora si volesse valutare una frazione differente dell'unità, la lunghezza della scala mobile e la maniera di suddividerla dovranno essere opportunamente variate. Ad esempio, per un nonio al ventesimo di divisione (mezzo decimo) la scala mobile è lunga 19 unità e divisa in 20 parti.

	B	N	B	N	B	N	B	N	B	N
1	7.5	7.4	7.7	7.3	7.5	7.5	8.0	7.7	7.7	7.2
2	7.6	7.7	7.5	7.6	7.7	7.6	7.8	7.9	7.7	7.2
3	7.5	7.2	7.7	7.3	7.5	7.1	7.9	7.6	7.6	7.7
4	7.9	7.2	7.5	7.3	8.0	7.6	7.8	7.3	7.7	7.7
5	7.9	7.5	7.5	7.7	7.6	7.5	7.8	7.5	8.0	7.9
6	7.8	7.3	8.1	7.3	7.6	6.9	7.7	7.2	7.7	7.1
7	7.8	7.4	7.6	7.4	7.8	7.5	8.1	7.2	7.5	7.6
8	7.7	7.3	8.0	7.8	8.0	7.6	7.7	7.6	7.6	7.3
9	7.9	7.4	8.0	7.6	7.8	7.3	7.6	7.6	7.7	7.3
10	8.0	7.3	7.5	7.4	7.6	7.0	7.7	7.4	7.5	7.4

TABELLA 2.1 - Misure ripetute dell'altezza di una colonna di palline di vetro: i dati (misure 1-50).

Il primo controllo sui dati si fa (separatamente per le misure “bianche” e per quelle “nera”) costruendo dei *diagrammi temporali*: ovverosia dei grafici in cui in ordinata si riporta il valore ottenuto, ed in ascissa il tempo (o meglio, il numero d'ordine della misura); qui si veda la figura 2c.

Il motivo è quello di mettere in evidenza un qualche cambiamento sistematico avvenuto col tempo nello strumento di misura: tipicamente ogni tanto avviene che una delle aste che sostengono i nonii si svitino, determinando un aumento costante delle misure ottenute.

Calcolati media aritmetica ed errore quadratico medio (tabella 2.2), si controlla se

	\bar{x}	σ	$\sigma_{\bar{x}}$	Risultato
Bianco	7.7690	0.1935	0.0137	7.769 ± 0.014
Nero	7.4555	0.2166	0.0153	7.456 ± 0.015

TABELLA 2.2 - Misure ripetute dell'altezza di una colonna di palline di vetro: i parametri statistici.

ci sono misure da scartare (qui non ve ne sono); quindi si disegna (figura 2d) l'istogramma dei dati con la Gaussiana di riferimento. Come si vede l'accordo con la teoria è buono; i risultati per \bar{B} e \bar{N} non sono tra loro compatibili:

$$\frac{|\bar{B} - \bar{N}|}{\sqrt{\sigma_B^2 + \sigma_N^2}} = 15.24$$

e questo vuol dire che lo strumento è effettivamente asimmetrico.

I due errori quadratici medi dovrebbero essere uguali, essendo le stesse le cause d'errore dalla parte bianca e da quella nera: calcolando gli errori di σ_B e di σ_N otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_B = 0.1935 \pm \frac{0.1935}{\sqrt{2 \cdot 199}} = 0.1935 \pm 0.0097 \\ \sigma_N = 0.2166 \pm \frac{0.2166}{\sqrt{2 \cdot 199}} = 0.2166 \pm 0.0109 \end{array} \right.$$

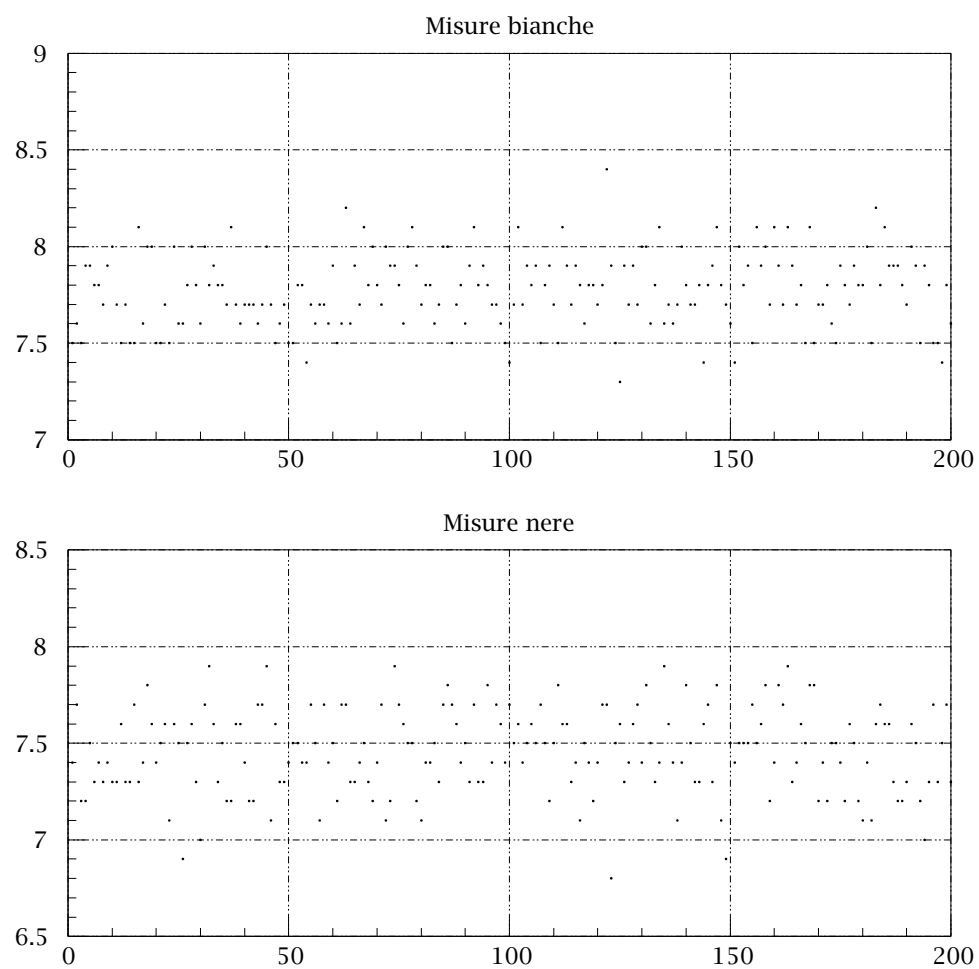


FIGURA 2c - Misure ripetute dell'altezza di una colonna di palline di vetro: il diagramma temporale.

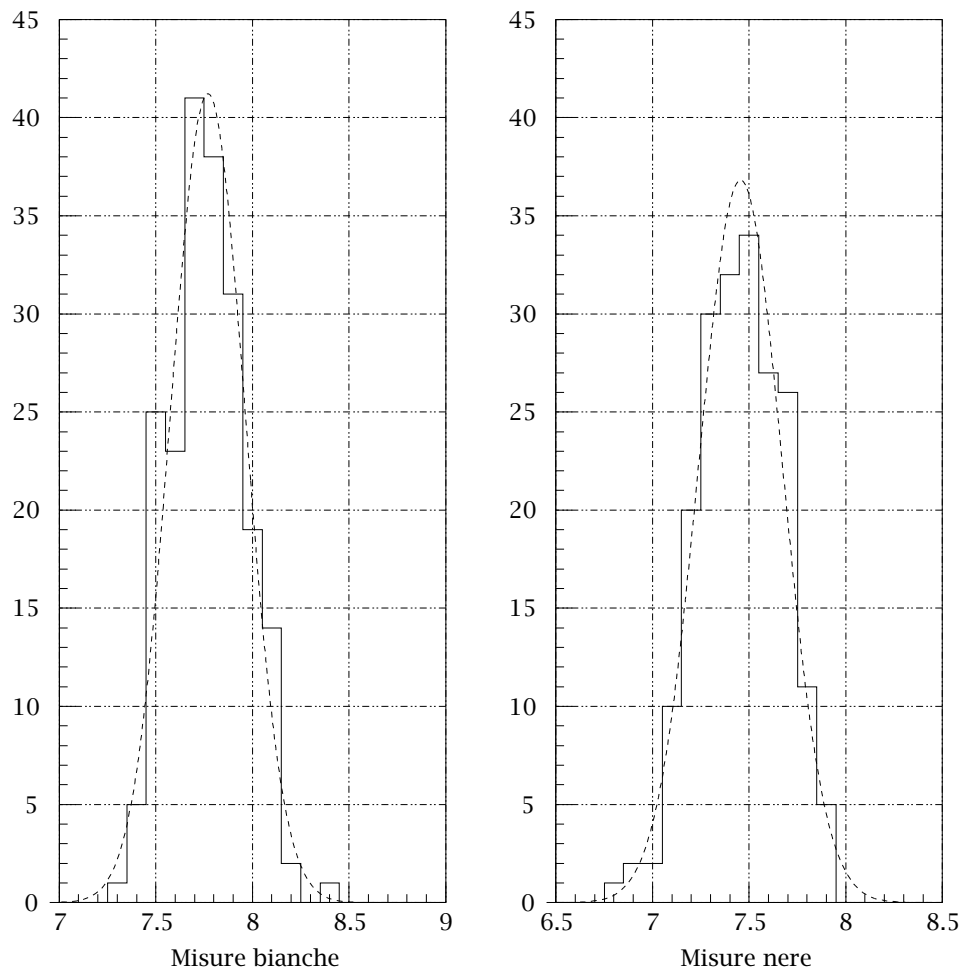


FIGURA 2d - Misure ripetute dell'altezza di una colonna di palline di vetro: i dati disposti in istogramma.

ed il “fattore di compatibilità” tra i due scarti risulta

$$\frac{|0.1935 - 0.2166|}{\sqrt{0.0097^2 + 0.0108^2}} = 1.59$$

ovverosia abbastanza buono.

2.3 Verifica della formula dell'errore della media

Si raggruppano i dati (sempre separatamente per le misure “bianche” e “nere”, e prendendoli nello stesso ordine in cui sono stati ottenuti) in 20 gruppi di 10 misure; poi si calcolano le medie aritmetiche all'interno di ogni gruppo (vedi la tabella 2.3).

	B'	N'	B'	N'	B'	N'	B'	N'
1	7.76	7.37	7.67	7.47	7.80	7.50	7.84	7.51
2	7.71	7.47	7.82	7.40	7.78	7.43	7.79	7.60
3	7.71	7.36	7.86	7.45	7.81	7.47	7.75	7.36
4	7.81	7.50	7.75	7.53	7.79	7.52	7.88	7.40
5	7.67	7.44	7.74	7.52	7.75	7.40	7.69	7.41

$\sigma_{B'} = 0.0600$ $\sigma_{N'} = 0.0649$
--

TABELLA 2.3 – Misure ripetute dell'altezza di una colonna di palline di vetro: risultati sui dati raggruppati.

Indichiamo con B'_i e N'_i ($i = 1, \dots, 20$) le medie dei gruppi; a questo punto si calcola l'errore quadratico medio $\sigma_{B'}$ dei 20 numeri B' (e, sempre separatamente, quello $\sigma_{N'}$ degli N'). Se consideriamo le 200 misure B come una popolazione (finita) di media \bar{B} ed errore quadratico medio σ_B , i gruppi selezionati si possono pensare come campioni estratti da questa popolazione ed aventi dimensione 10; i numeri B'_i , come medie di campioni di dimensione 10 estratti dalla popolazione dei B_i ; e la teoria prevede che l'errore quadratico medio dei B' e quello dei B siano legati dalla

$$\sigma_{B'} = \frac{\sigma_B}{\sqrt{10}}$$

Se confrontiamo il valore effettivo dell'errore quadratico medio $\sigma_{B'}$ con la previsione teorica, non dobbiamo aspettarci di trovare un accordo esatto (che si avrebbe soltanto qualora considerassimo le medie di *tutti* i campioni di dimensione 10 che possiamo estrarre a caso dalle 200 misure originarie); ma ci aspettiamo che entro i rispettivi errori il valore sperimentale e la stima teorica risultino compatibili. Considerando anche gli errori, i valori sperimentali sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{B'} = 0.0600 \pm \frac{0.0600}{\sqrt{2 \cdot 19}} = 0.0600 \pm 0.0097 \\ \sigma_{N'} = 0.0649 \pm \frac{0.0649}{\sqrt{2 \cdot 19}} = 0.0649 \pm 0.0105 \end{array} \right.$$

quelli teorici sono (per gli errori di σ_B e σ_N il calcolo è stato fatto alla fine del paragrafo 2.2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_B}{\sqrt{10}} = \frac{0.1935 \pm 0.0097}{\sqrt{10}} = 0.0612 \pm 0.0031 \\ \frac{\sigma_N}{\sqrt{10}} = \frac{0.2166 \pm 0.0109}{\sqrt{10}} = 0.0685 \pm 0.0034 \end{array} \right.$$

ed i “fattori di compatibilità” valgono

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|0.0600 - 0.0612|}{\sqrt{0.0097^2 + 0.0031^2}} = 0.16 \\ \frac{|0.0649 - 0.0685|}{\sqrt{0.0105^2 + 0.0034^2}} = 0.33 \end{array} \right.$$

ossia l'accordo è ottimo sia per i gruppi di misure “bianche” che per quelli di misure “nere”.

2.4 La legge sulla varianza delle combinazioni lineari

Con le variabili casuali B_i ed N_j si possono costruire poi delle semplici combinazioni lineari, ovverosia le somme e le differenze delle misure stesse. Per assicurarsi che le variabili combinate siano statisticamente indipendenti è opportuno sommare e sottrarre non misure “bianche” e “nere” corrispondenti; ma piuttosto sommare e sottrarre, ad esempio, B_1 e N_{101} , B_2 e N_{102} , e così via.

Infatti un singolo capovolgimento dello strumento non fa variare di molto la posizione reciproca delle biglie, e sussiste il sospetto che ad una misura B_i particolarmente grande (o piccola) segua una misura N_i anch'essa particolarmente grande (o piccola)³.

	\bar{x}	σ	$\sigma_{\bar{x}}^2$	$\sigma_{\bar{x}}$	Risultato
Somme	15.2245	0.2954	0.0873	0.0209	15.224 ± 0.021
Differenze	0.3135	0.2853	0.0814	0.0202	0.314 ± 0.020

TABELLA 2.4 – Misure ripetute dell'altezza di una colonna di palline di vetro: dati di somme e differenze.

Per le somme e le differenze S_i e D_i si calcolano le consuete grandezze statistiche (tabella 2.4), e si riportano in istogramma i valori assieme alla Gaussiana di riferimento; questo per verificare che combinazioni lineari di variabili normali sono anch'esse normali (figura 2e). Infine si confrontano le varianze σ_S^2 e σ_N^2 con la previsione teorica σ_T^2 : questa è ovviamente la stessa per entrambe le combinazioni lineari,

³Per controllo, occorrerebbe riportare in grafico punti aventi per coordinate valori corrispondenti (B_i, N_i) e verificare se la pendenza della retta interpolante è compatibile con lo zero entro gli errori stimati; i nostri dati non mostrano significativa correlazione tra loro.

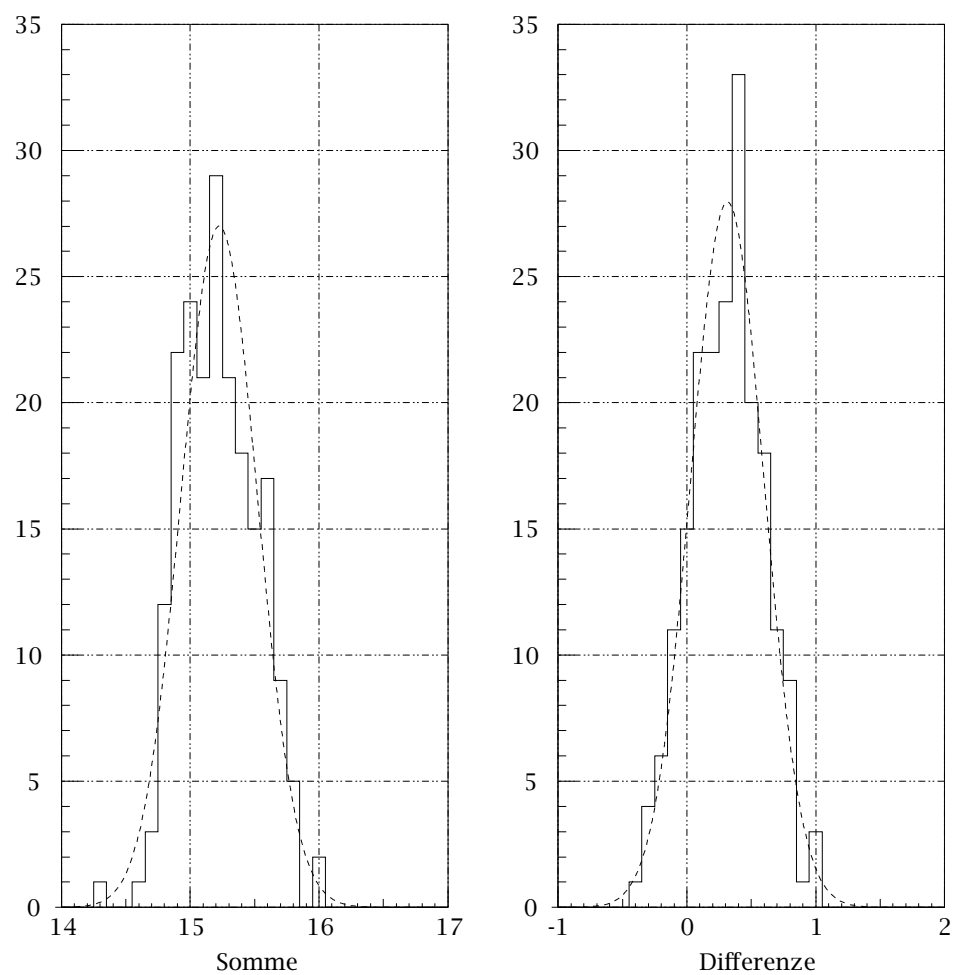


FIGURA 2e - Misure ripetute dell'altezza di una colonna di palline di vetro: istogrammi di somme e differenze.

ovverosia

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_B^2 & = & 0.1935^2 = 0.0374 \\ \sigma_N^2 & = & 0.2166^2 = 0.0469 \\ \sigma_T^2 & = & \sigma_B^2 + \sigma_N^2 = 0.0843 \end{array} \right.$$

ma al solito non dobbiamo aspettarci di trovare perfetto accordo, non avendo considerato *tutte* le possibili combinazioni lineari di una misura B_i con una N_j , ma solo un loro particolare sottoinsieme; mentre richiediamo invece che le stime teoriche ed i valori sperimentali siano compatibili entro gli errori. Per le previsioni teoriche calcoliamo:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_B^2 & = & 0.0374 \pm \sqrt{\frac{2}{199}} 0.0374 = 0.0374 \pm 0.0038 \\ \sigma_N^2 & = & 0.0469 \pm \sqrt{\frac{2}{199}} 0.0469 = 0.0469 \pm 0.0047 \\ \sigma_T^2 & = & 0.0843 \pm \sqrt{0.0038^2 + 0.0047^2} = 0.0843 \pm 0.0060 \end{array} \right.$$

mentre i valori sperimentali sono:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_S^2 & = & 0.0873 \pm \sqrt{\frac{2}{199}} 0.0873 = 0.0873 \pm 0.0087 \\ \sigma_D^2 & = & 0.0814 \pm \sqrt{\frac{2}{199}} 0.0814 = 0.0814 \pm 0.0082 \end{array} \right.$$

ed i fattori di compatibilità valgono

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{|0.0873 - 0.0843|}{\sqrt{0.0087^2 + 0.0060^2}} & = & 0.28 \\ \frac{|0.0814 - 0.0843|}{\sqrt{0.0082^2 + 0.0060^2}} & = & 0.28 \end{array} \right.$$

(cioè l'accordo è ottimo per entrambi i campioni).

2.5 Accordo con la distribuzione normale

Per finire, analogamente a quanto fatto nell'esperienza precedente, controlliamo se i nostri dati sono compatibili con l'ipotesi che la popolazione di provenienza segua la legge normale di distribuzione degli errori.

La variabile casuale che rappresenta l'accordo tra i dati e la nostra ipotesi è la stessa definita nell'equazione (1.1); nella tabella 2.5 sono elencati i valori relativi alle misure “bianche”, a quelle “nere”, ed alle loro somme e differenze (si sono raggruppate alcune classi di frequenza in modo da avere sempre almeno 5 eventi per classe, e le previsioni sono basate sugli integrali della distribuzione normale).

Misure “bianche”

α	O_i	P_i	A_i
< 7.5	6	0.04958	9.9161
7.5	25	0.07923	15.8462
7.6	23	0.14043	28.0853
7.7	41	0.19164	38.3288
7.8	38	0.20140	40.2797
7.9	31	0.16298	32.5961
8.0	19	0.10156	20.3118
> 8.0	17	0.07318	14.6360

Misure “nere”

α	O_i	P_i	A_i
< 7.1	5	0.03058	6.1160
7.1	10	0.04860	9.7202
7.2	20	0.09216	18.4326
7.3	30	0.14174	28.3477
7.4	32	0.17679	35.3574
7.5	34	0.17884	35.7671
7.6	27	0.14672	29.3445
7.7	26	0.09763	19.5256
7.8	11	0.05268	10.5366
> 7.8	5	0.03426	6.8523

Somme

α	O_i	P_i	A_i
< 14.7	2	0.02546	5.0920
14.7	3	0.02801	5.6030
14.8	12	0.04822	9.6438
14.9	22	0.07401	14.8020
15.0	24	0.10130	20.2599
15.1	21	0.12364	24.7289
15.2	29	0.13458	26.9166
15.3	21	0.13063	26.1267
15.4	18	0.11308	22.6151
15.5	15	0.08728	17.4567
15.6	17	0.06008	12.0163
15.7	9	0.03688	7.3761
> 15.7	7	0.03681	7.3630

Differenze

α	O_i	P_i	A_i
< -0.2	5	0.02411	4.8226
-0.2	6	0.02799	5.5975
-0.1	11	0.04918	9.8368
0.0	15	0.07653	15.3067
0.1	22	0.10545	21.0902
0.2	22	0.12865	25.7307
0.3	24	0.13898	27.7968
0.4	33	0.13295	26.5897
0.5	20	0.11261	22.5220
0.6	18	0.08446	16.8917
0.7	11	0.05609	11.2178
0.8	9	0.03298	6.5965
> 0.8	4	0.03000	6.0009

TABELLA 2.5 - Le classi di frequenza dei risultati delle misure “bianche”, di quelle “nere” e delle loro somme e differenze; assieme alle previsioni basate sulla funzione normale.

Qui sotto sono riportati, per i quattro casi esaminati: il valore della X definita nella (1.1); il numero di gradi di libertà ν ; e la probabilità di ottenere, per motivi puramente casuali, valori non inferiori ad X (calcolata usando la distribuzione del χ^2 a ν gradi di libertà). L'accordo è pessimo per le misure "bianche", cattivo per le somme ed ottimo per misure "nere" e differenze.

	X	ν	$P(\%)$
B	13.33	5	2.04
N	3.70	7	81.33
S	17.20	10	7.00
D	4.22	10	93.66

Capitolo 3

Misure di durata con il pendolo

Lo scopo di questa esperienza è quello di mettere a confronto tre metodi differenti per la misura del periodo di un pendolo: la misura diretta e due differenti tipi di misura indiretta.

3.1 Il pendolo semplice

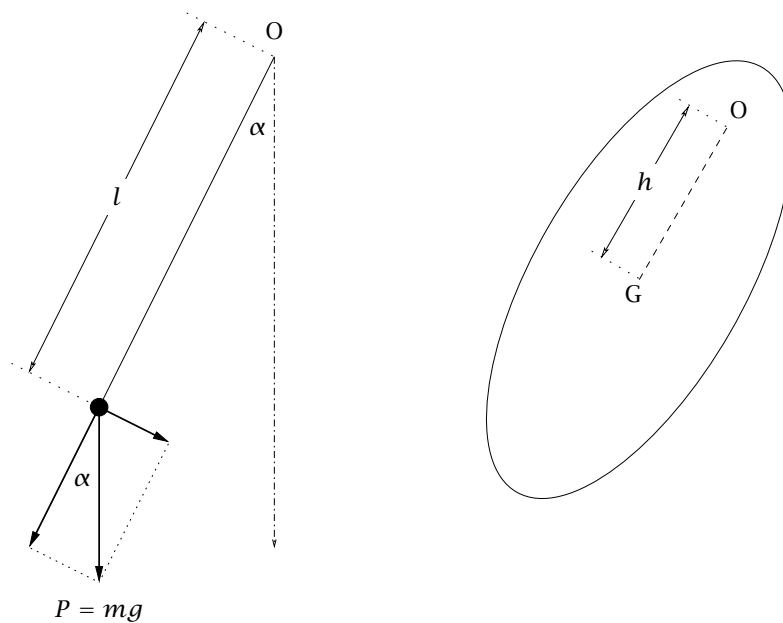


FIGURA 3a - Rappresentazione schematica del pendolo semplice e del pendolo composto.

Il pendolo semplice è costituito da un punto materiale P di massa m , sospeso ad un filo flessibile, inestensibile e senza peso, vincolato con l'altro estremo a ruotare senza attrito attorno ad un punto fisso O (vedi la figura 3a). Se il pendolo semplice è inizialmente in quiete e scostato di un angolo $\alpha > 0$ dalla posizione di equilibrio, si può facilmente ricavare l'equazione del moto: l'unica forza attiva in ogni istante è infatti la componente normale alla direzione del filo, di modulo $mg \sin \theta$ (ove θ , con $|\theta| < |\alpha|$, è il valore corrente dell'angolo del pendolo con la verticale).

Purtroppo questa equazione non ammette una soluzione analitica esatta; nel limite però delle *piccole oscillazioni*, qualora si possa ritenere che sia

$$\sin \alpha \simeq \alpha \quad \text{e} \quad \cos \alpha \simeq 1$$

(e quindi a maggior ragione $\sin \theta \simeq \theta$ e $\cos \theta \simeq 1$) una soluzione esatta esiste: il moto del pendolo è, in queste condizioni, un moto *periodico* ed *armonico*, con periodo

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

indipendente sia dalla massima ampiezza α delle oscillazioni che dalla massa del pendolo m (*isocronismo* del pendolo).

Se l'ampiezza delle oscillazioni non si può (o non si vuole) considerare piccola, l'equazione del moto si può risolvere integrandola per serie: si sviluppa ossia $\sin \alpha$ in serie di McLaurin,

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \dots$$

e si trascurano tutti i termini da un certo punto in avanti (si ottiene la soluzione delle piccole oscillazioni quando non si considerano i termini di ordine superiore al primo—od anche al secondo, volendo, visto che quello in α^2 è identicamente nullo).

A qualunque livello di approssimazione, comunque, il moto del pendolo è effettivamente periodico (anche se non armonico); se vogliamo ricavare il valore del suo periodo T , si può applicare il teorema della conservazione dell'energia tra la posizione estrema α e quella generica θ :

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = m g l (\cos \theta - \cos \alpha)$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \alpha) = \frac{8\pi^2}{T_0^2} (\cos \theta - \cos \alpha) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{2 (\cos \theta - \cos \alpha)} \end{aligned}$$

e, separando le variabili ed integrando,

$$\begin{aligned} dt &= \frac{T_0}{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}} \\ \int_0^{\frac{T}{4}} dt &= \frac{T}{4} = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}} \end{aligned}$$

per giungere finalmente alla

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \mathcal{I}$$

dove con \mathcal{I} si è indicato l'integrale definito

$$\mathcal{I} = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}}$$

Per calcolare il valore di \mathcal{I} si può usare la tecnica dell'integrazione per serie (dopo aver espresso le variabili θ ed α in funzione di altre che assicurino una più rapida convergenza dello sviluppo): alla fine dei calcoli si trova che il risultato vale

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \alpha^2 + \frac{9}{1024} \alpha^4 + \dots \right) \quad (3.1)$$

in cui il primo termine corrisponde alla soluzione delle piccole oscillazioni.

Il periodo del pendolo, quindi, *dipende dall'ampiezza* massima α delle oscillazioni, secondo la legge 3.1; se ci fermiamo al secondo termine nello sviluppo in serie (quello in α^2), introduciamo un errore relativo (sistematico) sul periodo dato approssimativamente da

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{T - T_0}{T_0} \approx \frac{9}{1024} \alpha^4$$

che è dell'ordine di una parte su mille già per oscillazioni di 33° (0.58 radianti), e scende ad una parte su diecimila al di sotto di 19° (0.33 radianti): a tutti gli effetti, nelle normali situazioni di laboratorio ($\theta \sim 10^\circ$ ed un errore relativo di 8×10^{-6}) si può ritenere che il periodo del pendolo in funzione dell'ampiezza massima α sia dato *esattamente* dalla

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right) \quad (3.2)$$

Questo vuol dire anche che, per ogni $\alpha > 0$, si compie, usando per il periodo la formula delle piccole oscillazioni, un *errore sistematico* ΔT che vale

$$\Delta T = T - T_0 = T_0 \frac{\alpha^2}{16} \quad \text{cioè} \quad \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\alpha^2}{16} \quad (3.3)$$

e che può risultare o meno trascurabile a seconda delle condizioni sperimentali e del valore di T_0 .

3.2 Il pendolo composto

Il *pendolo composto* è costituito da un corpo rigido libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso, non verticale e non passante per il baricentro; la legge del moto del pendolo composto è, per le piccole oscillazioni,

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (3.4)$$

in cui si è indicato con I il momento d'inerzia rispetto all'asse di oscillazione, e con h la distanza dell'asse stesso dal baricentro; per oscillazioni non piccole vale la stessa legge prima vista nella 3.1:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \alpha^2 + \frac{9}{1024} \alpha^4 + \dots \right)$$

ed il pendolo composto si comporta quindi *esattamente* come un pendolo semplice avente lunghezza pari a

$$l = \frac{I}{mh} \quad (3.5)$$

(che prende il nome di *lunghezza ridotta* del pendolo composto).

3.3 L'esperienza

Il pendolo si muove con moto periodico; quindi le sue oscillazioni costituiscono un fenomeno fisico perfettamente ripetibile ad intervalli di tempo rigorosamente costanti. La durata delle oscillazioni (il periodo) in realtà varia con la loro ampiezza secondo la 3.2: ma essa si può ritenere in prima approssimazione costante nel relativamente breve intervallo di tempo necessario alla misura dei dati, anche se l'attrito sul coltello di sospensione in realtà la riduce progressivamente nel tempo.

Gli errori sono introdotti quindi dal solo sperimentatore, nell'atto di avviare e di arrestare manualmente il cronometro; e si possono pertanto ritenere di entità *costante*, in particolare indipendenti dal numero di oscillazioni di cui si misura la durata complessiva. Se questa assunzione è da ritenersi valida, quale è la tecnica migliore, oltretutto quella che introduce gli errori più piccoli possibili, per misurare il periodo T del pendolo, fatta l'ipotesi ulteriore di avere a disposizione un intervallo di tempo prefissato?

Se indichiamo con Δt il tempo a disposizione dello sperimentatore, qualora egli si prefigga di misurare la durata totale di M oscillazioni potrà effettuare un massimo di

$$N = \frac{\Delta t}{M \cdot T}$$

determinazioni; e, attribuendo ad ognuna di esse un errore σ (per ipotesi indipendenti da M), la loro media aritmetica (che rappresenta la miglior stima dell'osservatore per il valore di $M \cdot T$) avrà errore

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sigma \sqrt{\frac{M \cdot T}{\Delta t}} = C \sqrt{M}$$

Il valore del periodo ricavato da tale media aritmetica (dividendola per M) avrà a sua volta un errore

$$\frac{\bar{\sigma}}{M} = \frac{C}{\sqrt{M}}$$

inversamente proporzionale alla radice di M , e dunque tanto più piccolo quanto più M è grande: in conclusione la maniera migliore di ottenere il periodo del pendolo è quella di misurare la durata di quante più oscillazioni è possibile e poi di dividere per il loro numero (sempre però che siano verificate le due condizioni date, di errore indipendente dal numero di oscillazioni considerate e di tempo costante a disposizione).

In questa esperienza si confrontano valori del periodo ottenuti con tre differenti metodi: dapprima si misura per 100 volte la durata di una oscillazione; poi per 50 volte la durata di due oscillazioni; ed infine per 25 volte la durata di quattro oscillazioni del pendolo (così da mantenere costante il tempo necessario alla misura di ogni campione).

Il cronometro viene regolato su una sensibilità di un millesimo di secondo; infatti la prontezza dei riflessi dei misuratori varia in genere tra 5 e 10 centesimi di secondo: e la cifra dei centesimi è dunque significativa.

Indichiamo con U_i ($i = 1, \dots, 100$); D_i ($i = 1, \dots, 50$); e Q_i ($i = 1, \dots, 25$) i risultati di tali misure. Si calcolano per prima cosa, sui tre campioni separatamente, media aritmetica ed errore quadratico medio; si controlla se vi sono misure da scartare, ed eventualmente si ripete il calcolo; infine si ricava l'errore quadratico medio della media.

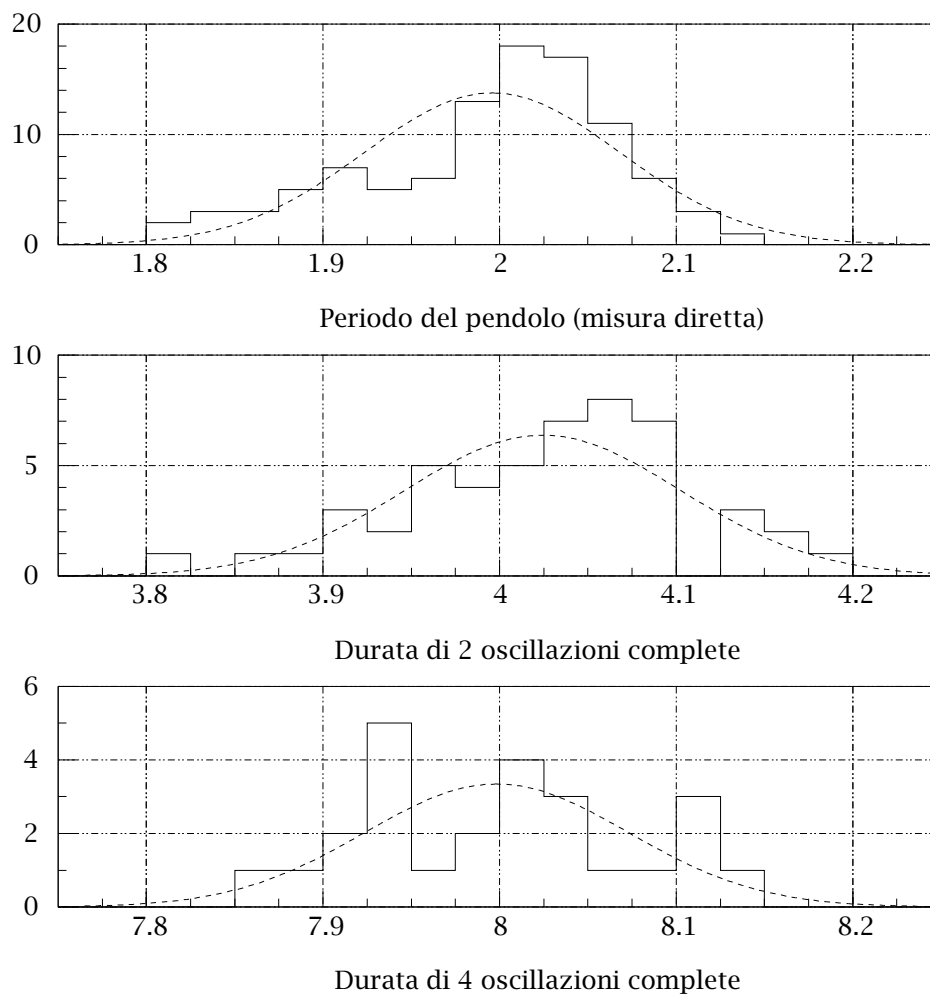


FIGURA 3b - Misure di durata con il pendolo: i dati.

Per brevità non diamo una tabella completa dei risultati delle singole misure: ri-

Campione	\bar{x}	σ	$\sigma_{\bar{x}}$	Risultato
U	1.9958	0.072518	0.007252	1.9958 ± 0.0072
D	4.0244	0.078250	0.011066	4.024 ± 0.011
Q	7.9983	0.074581	0.014916	7.998 ± 0.015

TABELLA 3.1 - Misure di durata con il pendolo: i risultati.

portiamo solo gli istogrammi dei dati (figura 3b) e le grandezze statistiche (tabella 3.1).

Dagli istogrammi, in cui sono disegnate anche le Gaussiane di riferimento, si vede sia che l'andamento dei dati è grossolanamente normale (anche se vi sono grosse fluttuazioni da attribuirsi allo scarso numero di misure), e che le ampiezze delle Gaussiane sono effettivamente circa uguali. Non ha molto senso, visto lo scarso numero di misure, fare il test del χ^2 per l'accordo tra dati e distribuzione normale — meno forse per il primo campione, per il quale tale accordo è assai cattivo ($X \approx 15.72$ da confrontare con la distribuzione del χ^2 a 7 gradi di libertà).

Gli errori quadratici medi sono, a parte questo accordo stimato ad occhio, *realmente* compatibili entro gli errori? Calcolando anche questi ultimi,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_U & = & 0.072518 \pm \frac{0.072518}{\sqrt{2 \cdot 99}} = 0.0725 \pm 0.0052 \\ \sigma_D & = & 0.078250 \pm \frac{0.078250}{\sqrt{2 \cdot 49}} = 0.0782 \pm 0.0079 \\ \sigma_Q & = & 0.074581 \pm \frac{0.074581}{\sqrt{2 \cdot 24}} = 0.0746 \pm 0.0108 \end{array} \right.$$

ed i livelli di compatibilità sono

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{|0.0725 - 0.0746|}{\sqrt{0.0052^2 + 0.0108^2}} & = & 0.18 \\ \frac{|0.0746 - 0.0782|}{\sqrt{0.0108^2 + 0.0079^2}} & = & 0.27 \end{array} \right.$$

ossia ottimi. I valori stimati del periodo valgono

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T_U & = & 1.9958 \pm 0.0072 \\ T_D & = & \frac{4.0244}{2} \pm \frac{0.011}{2} = 2.0122 \pm 0.0055 \\ T_Q & = & \frac{7.9983}{4} \pm \frac{0.015}{4} = 1.9996 \pm 0.0037 \end{array} \right.$$

e sono anch'essi sufficientemente compatibili tra loro:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{|1.9958 - 1.9996|}{\sqrt{0.0072^2 + 0.0037^2}} & = & 0.47 \\ \frac{|1.9996 - 2.0122|}{\sqrt{0.0037^2 + 0.0055^2}} & = & 1.9 \end{array} \right.$$

Effettivamente il valore del periodo con l'errore più piccolo è stato ottenuto dal campione in cui è stata misurata la durata del maggior numero di oscillazioni (4); anche se esso ha le dimensioni più ridotte.

Capitolo 4

Misure con la guidovia

La “guidovia” è uno strumento costituito da una *guida* in alluminio a sezione rettangolare, cava internamente e munita nella sua faccia superiore di una serie di forellini dai quali fuoriesce un flusso di aria generato da un apposito compressore; l'inclinazione della guida stessa può essere variata a piacere servendosi di una vite, ogni giro della quale corrisponde ad un cambiamento dell'angolo con l'orizzontale di $5'$ ($1/12$ di grado, circa 1.5 mrad).

Sopra di essa possono essere poste delle *slitte* in plexiglass, aventi dimensioni leggermente superiori a quelle della guida; esse vengono sostenute dal flusso d'aria prodotto dal compressore, in modo da eliminare del tutto il contatto tra le superfici affacciate e da ridurre per quanto possibile l'attrito sulla slitta in movimento. Ogni banco ha a disposizione cinque slitte, differenti per caratteristiche, ed inoltre: un disco di ottone, che può essere fissato al di sopra delle slitte; ed una serie di tre spessori in alluminio di dimensioni crescenti.

Alla guida sono poi fissati dei *traguardi* di misura, la cui posizione può essere riferita ad un regolo graduato solidale con la guida, ognuno dei quali porta un emettitore ed un rivelatore di infrarossi in grado di generare un segnale elettrico al passaggio della slitta, allo scopo di avviare (od arrestare) un cronometro elettronico della sensibilità di 10^{-4} s. La guida è inoltre munita ad una estremità di una elettrocalamita, normalmente eccitata e disinseribile tramite l'azione di un apposito pulsante.

La guidovia viene usata per una serie di tre esperienze; ogni gruppo deve usare *la stessa* guidovia per tutte, ed a questo scopo gli strumenti sono numerati per distinguerli. Preliminarmente ad ogni esperienza, bisogna trovare la posizione della vite per cui la guida è orizzontale: si procede per approssimazioni successive, ruotando la vite fino a che la slitta non rimane immobile una volta lasciata libera; badando, in questa operazione, che le due estremità della slitta stessa non siano esattamente sopra ai forellini da cui fuoriesce l'aria.

Questa operazione, generalmente, si ripete tre volte: al centro della guida, ed alle due estremità della regione di misura (nelle posizioni di 40 cm e 120 cm sul regolo graduato); dopo di che la vite si regola in una posizione intermedia tra tutte quelle trovate, allo scopo di avere la guidovia “mediamente orizzontale” su tutta la

sua lunghezza.

La semidispersione massima tra le tre posizioni della vite può essere assunta come errore σ_α sulla conoscenza dell'angolo di inclinazione α della guida: una volta trovato σ_α espresso in frazioni di giro della vite, lo si trasforma in radianti moltiplicando prima per $1/12$ (numero di gradi che corrisponde ad un giro) e poi per $\pi/180$ (numero di radianti in un grado). σ_α è dell'ordine di 10^{-4} rad, e ci si può limitare a calcolarlo nella prima esperienza.

Trovata la posizione di orizzontalità, non bisogna più muovere la guidovia (visto che il tavolo non è garantito perfettamente piano); è bene poi assicurarsi che la slitta si muova senza problemi sia con che senza il disco di ottone, ed in ogni punto della guida: senza cioè che si corichi di lato (troppa pressione) o che strisci (poca pressione). La posizione del compressore che dà un comportamento accettabile si mantiene poi per tutte le tre esperienze con la guidovia.

4.1 Il piano inclinato (in assenza di attrito)

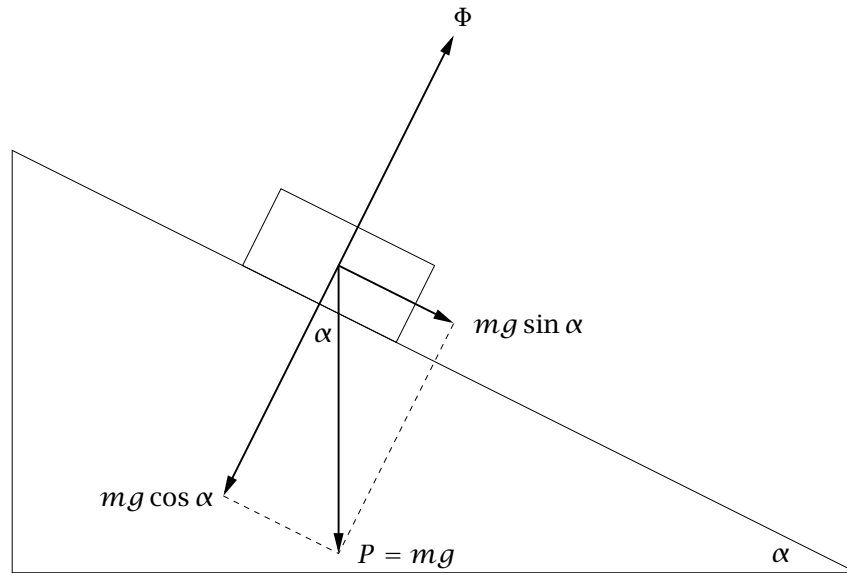


FIGURA 4a - Rappresentazione schematica delle forze agenti su di un corpo che scivola (in assenza di attrito) su di un piano inclinato.

Le forze agenti su di un corpo che scivola (senza attrito) su di un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale sono schematizzate nella figura 4a; la componente normale al piano stesso della forza peso, di modulo $mg \cos \alpha$, viene equilibrata dalla reazione del vincolo Φ : l'unica forza attiva è quindi la componente parallela al piano inclinato della forza peso, che ha un modulo di valore $mg \sin \alpha$ costante. Il moto del corpo è quindi *uniformemente accelerato*, con accelerazione data da $a = g \sin \alpha$; velocità e spazio percorso dal corpo in funzione del tempo sono date dalle

$$\begin{cases} v &= v_0 + a t \\ s &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{cases} \quad (4.1)$$

Un primo scopo dell'esperienza consiste nella verifica di questa legge del moto: la maniera più conveniente di farlo è quella di misurare la velocità della slitta in vari punti della guidovia, assieme ai tempi impiegati a raggiungere tali velocità; e verificare poi che il grafico di v in funzione di t è dato effettivamente da una linea retta.

La pendenza di questa retta (che numericamente misura l'accelerazione del moto) dovrà risultare proporzionale al seno dell'angolo di inclinazione del piano (od all'angolo stesso, purchè piccolo) ed indipendente dalla massa della slitta; essa si può calcolare eseguendo sui punti misurati un'interpolazione lineare con il metodo dei minimi quadrati, e dall'accelerazione si può risalire poi al valore di g attraverso la

$$g = \frac{a}{\sin \alpha} \quad (4.2)$$

Le misure si effettuano in questo modo: si prendono innanzi tutto quattro differenti campioni, che corrispondano sia a differenti inclinazioni della guida che a differenti masse con la stessa inclinazione. In pratica si usano 15', 30' e 45' di inclinazione (3, 6 e 9 giri della vite rispetto all'orizzontalità) con la slitta scarica; e si ripetono le misure a 45', aggiungendo sulla slitta la massa addizionale di ottone.

Per ognuno di questi campioni si fissa il traguardo che avvia il cronometro sulla posizione $x_1 = 40$ cm (prima il moto può essere perturbato) e lo si lascia in tale posizione; il traguardo che arresta il cronometro si pone successivamente nelle coordinate $x_2 = 50, 60, \dots, 120, 130$ cm.

Si usa quella delle slitte che porta alle estremità dei piccoli segmenti di filo di ferro: la si libera disinserendo l'elettrocalamita con il pulsante (occorre lasciarlo premuto fino a che la slitta non si è allontanata); e si misura per cinque volte consecutive il tempo impiegato a percorrere il tratto delimitato dai due traguardi.

Nella tabella 4.1 sono riportati i risultati: per brevità, non tutte le cinque misure ripetute relative ad ogni intervallo, ma solo la loro media aritmetica; nei vari campioni, la sigla "S" sta per "slitta scarica" e "C" sta per "slitta carica della massa addizionale".

x_2	15' S	30' S	45' S	45' C
50	0.6615	0.4675	0.3804	0.3803
60	1.2274	0.8647	0.7038	0.7029
70	1.7326	1.2205	0.9923	0.9902
80	2.1960	1.5427	1.2541	1.2520
90	2.6219	1.8417	1.4977	1.4937
100	3.0216	2.1219	1.7261	1.7204
110	3.3947	2.3872	1.9413	1.9340
120	3.7588	2.6382	2.1451	2.1369
130	4.1012	2.8799	2.3406	2.3295

TABELLA 4.1 - Misure sul piano inclinato: i dati.

Se usiamo il simbolo $t(x_1, x_2)$ per indicare il tempo impiegato dalla slitta a percorrere il tratto tra le coordinate x_1 ed $x_2 > x_1$, la velocità media in questo segmento risulta

$$\bar{v}(x_1, x_2) = \frac{x_2 - x_1}{t(40, x_2) - t(40, x_1)} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

ed essendo la relazione tra velocità e tempo di tipo lineare (la $v = v(t)$ già ricavata nella formula 4.1), questa velocità media deve coincidere con la velocità istan-

tanea della slitta all'istante \bar{t} esattamente intermedio tra quelli ($t_1 \equiv t(40, x_1)$ e $t_2 \equiv t(40, x_2)$) in cui essa attraversa i punti di coordinate x_1 ed x_2 . Infatti:

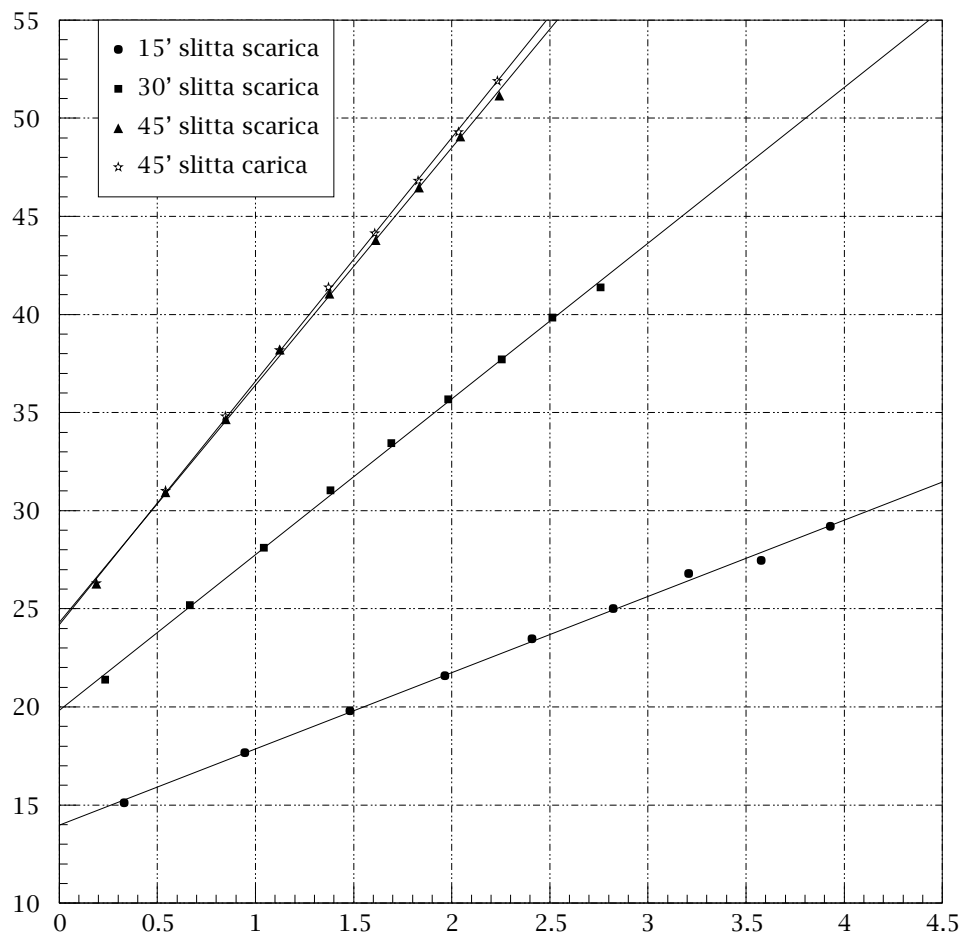
$$\begin{aligned}
 \bar{v}(x_1, x_2) &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \\
 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (v_0 + at) dt \\
 &= \frac{v_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} \\
 &= v_0 + a \frac{t_1 + t_2}{2} \\
 &= v\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \\
 &= v(\bar{t})
 \end{aligned}$$

x_1-x_2	15' S		30' S	
	\bar{t}	\bar{v}	\bar{t}	\bar{v}
40-50	0.3308	15.1167	0.2337	21.3922
50-60	0.9444	17.6728	0.6661	25.1762
60-70	1.4800	19.7910	1.0426	28.0994
70-80	1.9643	21.5815	1.3816	31.0405
80-90	2.4089	23.4808	1.6922	33.4493
90-100	2.8217	25.0188	1.9818	35.6811
100-110	3.2081	26.8039	2.2546	37.6960
110-120	3.5768	27.4590	2.5127	39.8406
120-130	3.9300	29.2073	2.7590	41.3736

x_1-x_2	45' S		45' C	
	\bar{t}	\bar{v}	\bar{t}	\bar{v}
40-50	0.1902	26.2854	0.1902	26.2936
50-60	0.5421	30.9253	0.5416	31.0020
60-70	0.8481	34.6572	0.8465	34.8044
70-80	1.1232	38.1971	1.1211	38.1912
80-90	1.3759	41.0543	1.3729	41.3736
90-100	1.6119	43.7790	1.6071	44.1228
100-110	1.8337	46.4684	1.8272	46.8165
110-120	2.0432	49.0773	2.0354	49.2902
120-130	2.2429	51.1457	2.2332	51.9049

TABELLA 4.2 - Misure sul piano inclinato: velocità istantanee e tempi.

Divisa idealmente la nostra guida in tanti intervalli di 10 centimetri da $x = 40$ ad $x = 130$, calcoliamo \bar{v} e \bar{t} per ognuno di essi (tabella 4.2); poi riportiamo in grafico la velocità della slitta in funzione del tempo (figura 4b).

FIGURA 4b - Misure sul piano inclinato: i grafici di $v = v(t)$.

	A	B	σ_v	σ_A	σ_B
15' S	13.9824	3.8853	0.2262	0.1684	0.0656
30' S	19.8329	7.9352	0.2174	0.1621	0.0898
45' S	24.3112	12.0892	0.2096	0.1563	0.1065
45' C	24.1800	12.4142	0.1427	0.1065	0.0729

TABELLA 4.3 - Misure sul piano inclinato: l'interpolazione lineare.

Si nota a prima vista come i dati siano effettivamente allineati; e questo conferma l'ipotesi che il moto della slitta sia uniformemente accelerato. Sul grafico sono riportate anche le rette interpolanti i punti sperimentali, che possono servire da riferimento per decidere sull'effettiva linearità della funzione $v = v(t)$; i coefficienti delle rette interpolanti, assieme agli errori sulle ordinate (ricavati a posteriori) ed agli errori sui coefficienti stessi, sono in tabella 4.3.

E' interessante notare come gli errori sulle velocità *diminuiscano* all'aumentare della pendenza; le cause di errore nella misura sono sostanzialmente dovute al posizionamento dei traguardi ed alle piccole perturbazioni esterne (correnti d'aria, vibrazioni del tavolo); e queste ultime sono tanto più sensibili quanto più la velocità della slitta è piccola. Anche la massa addizionale ha l'effetto di rendere la slitta più stabile, diminuendo così l'entità dell'errore.

Quello che ci interessa nella tabella 4.3 è la pendenza della retta interpolante, che rappresenta numericamente l'accelerazione del moto: in particolare si nota che il fattore di compatibilità tra i due campioni (45' S e 45' C) riferiti alla stessa pendenza ma a differente massa è troppo elevato:

$$\frac{|12.0892 - 12.4142|}{\sqrt{0.1065^2 + 0.0729^2}} = 2.5$$

quindi i nostri dati sono mal compatibili con l'ipotesi dell'indipendenza dell'accelerazione del moto dalla massa; in pratica questo vuol dire che la presenza dell'attrito non è trascurabile, e che esso incide in maniera differente nei due casi.

L'accelerazione di gravità si ricava dalla formula 4.2; per l'errore, si può applicare sempre alla 4.2 la legge di propagazione (che dà un risultato *approssimato*, non essendo g lineare rispetto ad α):

$$\begin{aligned}\sigma_g^2 &= \left(\frac{\partial g}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sin \alpha}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{a}{\sin^2 \alpha} \cos \alpha\right)^2 \sigma_\alpha^2 \\ &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left[\sigma_a^2 + \frac{a^2 \sigma_\alpha^2}{\tan^2 \alpha} \right] \\ &= g^2 \left[\frac{\sigma_a^2}{a^2} + \frac{\sigma_\alpha^2}{\tan^2 \alpha} \right]\end{aligned}$$

Nella tabella 4.4 sono riportati i risultati finali: si nota immediatamente che essi

	g	σ_g	Risultato
15' S	890.452	75.712	890 ± 76
30' S	909.319	39.260	909 ± 39
45' S	923.572	26.913	924 ± 27
45' C	948.404	26.925	948 ± 27

TABELLA 4.4 - Misure sul piano inclinato: i risultati per g .

sono tutti inferiori al valore noto, che è (a Padova) di 980.6 cm/s^2 ; e questo è ovviamente da imputarsi all'aver trascurato la presenza degli attriti. I valori calcolati sono comunque tutti compatibili tra loro.

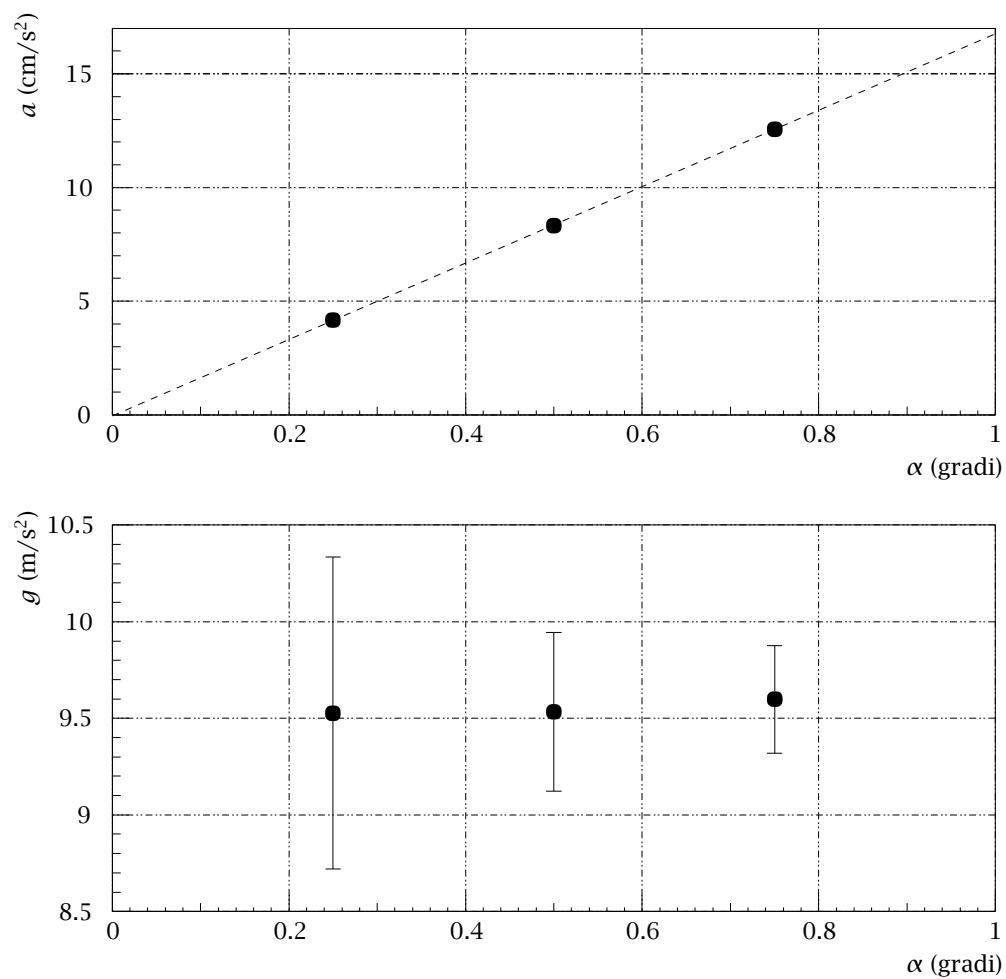


FIGURA 4c - In alto, l'accelerazione in funzione dell'angolo di inclinazione del piano; in basso il valore stimato di g , sempre in funzione dell'angolo α .

Per quanto attiene alla dipendenza dell'accelerazione del moto dall'angolo di inclinazione del piano, nella figura 4c sono riportati i valori stimati di a in funzione dell'angolo α^1 (gli errori su a sono talmente piccoli da non risultare visibili con la scala del disegno); è evidente la dipendenza lineare che esiste tra le due variabili. La proporzionalità tra a e $\sin \alpha$ implica anche che il loro rapporto (il valore stimato di g) debba avere valori compatibili nei tre campioni che si riferiscono alla slitta scarica; cosa che in effetti si verifica (vedere sempre la figura 4c).

4.2 Studio dell'attrito viscoso

La forza di attrito che agisce sulla slitta, per quanto piccola, non può in alcuni casi essere trascurata: si tratta di attrito di tipo viscoso dovuto alla presenza dell'aria; ed esso, secondo la teoria (purché il regime di moto si possa considerare laminare) deve essere direttamente proporzionale alla velocità della slitta stessa ed obbedire quindi alla formula (*legge di Stokes*)

$$F_a = -bv$$

(con b costante).

Quando la forza di attrito è l'unica attiva (slitta in moto su di un piano orizzontale) il secondo principio della dinamica ci permette di ottenere

$$\begin{aligned} F_a = -bv &= m \frac{dv}{dt} \quad , \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} v \\ \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} &= -\frac{b}{m} \int_0^t dt \\ [\ln v]_{v_0}^v &= -\frac{b}{m} [t]_0^t \quad , \quad \ln \left(\frac{v}{v_0} \right) = -\frac{b}{m} t \end{aligned}$$

ed infine

$$v = v_0 \cdot \exp \left(-\frac{b}{m} t \right)$$

per la velocità in funzione del tempo; la dipendenza della velocità dallo spazio percorso si ricava invece considerando che

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{b}{m} v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{b}{m}$$

(ricordando che $dx/dt = v$). Infine

$$v = v_0 - \frac{b}{m} x \tag{4.3}$$

indicando stavolta con v_0 la velocità nel punto di ascissa $x = 0$. La maniera migliore di controllare la validità della legge del moto è quella quindi di verificare l'andamento rettilineo di v rispetto ad x ; dal grafico, con il metodo dei minimi quadrati, si potrà poi ricavare la pendenza della retta (il coefficiente $-b/m$) con il relativo errore.

¹Per questi valori di α si può usare senza problemi l'angolo stesso al posto del seno.

Si procede in questo modo: dopo aver regolato la vite in modo che la guida sia in media orizzontale nel tratto utilizzato per la misura, si usa una slitta differente da quella dell'esperienza precedente e sulla quale è montato, ad una estremità, un piccolo magnete permanente. Quando il circuito dell'elettrocalamita è aperto, essa aderisce alla slitta; chiudendolo, invece, l'elettrocalamita ed il magnete permanente si respingono: e la slitta si mette in moto con velocità iniziale sempre costante.

Si prendono quattro campioni di misure, uno in queste condizioni e gli altri interponendo tra l'elettrocalamita ed il magnete uno dei tre spessori di alluminio dati a corredo: la loro eventuale presenza serve a variare la velocità iniziale del moto. Per ognuno di questi campioni si prendono 5 misure ripetute del tempo impiegato a percorrere un tratto di 20 cm lungo la guidovia, sistemando i traguardi di misura inizialmente nella posizione 40-60, poi in quella 50-70, e così via fino all'ultima posizione 110-130; e l'esperienza deve essere inoltre ripetuta due volte, indipendentemente, tenendo prima la slitta scarica e usando poi il peso addizionale di ottone.

Ottenuti questi dati, per ognuno degli intervalli di misura si calcola prima la media aritmetica delle misure ripetute e poi la velocità media: i risultati sono nelle tabelle 4.5 e 4.6; i simboli usati per identificare i campioni sono composti da un numero da 0 a 3 (per indicare o nessuno spessore, od uno dei tre spessori di alluminio in ordine crescente) e o dalla lettera "S" (slitta scarica) o "C" (slitta carica).

La formula 4.3 mostra che la velocità è lineare in funzione dello spazio percorso; e, ripetendo lo stesso ragionamento fatto prima a proposito del moto sul piano inclinato, la velocità media in ogni intervallo deve poi essere esattamente uguale alla velocità istantanea nel suo punto di mezzo.

Nelle figure 4d e 4e, rispettivamente per la slitta scarica e per quella carica, si è riportata in grafico la velocità in funzione della posizione lungo la guidovia: ed è immediato riconoscere che i punti misurati si dispongono approssimativamente su rette parallele, permettendoci così di ritenere sperimentalmente verificata la legge del moto.

A questo punto è opportuno osservare che i punti misurati nel tratto finale della guidovia (e che sono riportati nelle figure 4d e 4e con dei simboli differenti) mostrano un andamento che non si adatta a quello individuato dagli altri; questo è presumibilmente da imputare ad un qualche errore sistematico introdotto dallo strumento, per esempio una deformazione della guida nella sua parte finale, oppure ad un flusso non uniforme dell'aria compressa su tutta la sua lunghezza.

A causa di questo sospetto, soltanto i primi sei punti di ogni campione sono stati utilizzati per l'interpolazione lineare con una retta di equazione $y = A + Bx$ allo scopo di ricavare il valore numerico del coefficiente angolare $B \equiv -b/m$ (con il relativo errore); i risultati sono riportati nella tabella 4.7.

Il passo successivo consiste nel controllare che le quattro rette relative alla slitta scarica (e le quattro relative alla slitta carica) siano effettivamente parallele; ovvero sia che le loro pendenze siano tra loro compatibili entro gli errori stimati. Alla fine si fa la media pesata delle pendenze, per ricavare il valore finale del coefficiente $-b/m$ nei due casi: i risultati finali sono in tabella 4.8.

E' da notare che, caricando la slitta con il disco d'ottone, non solo se ne aumenta la massa; ma si aumenta anche l'attrito (ossia il valore di b) per la conseguente diminuzione dello spessore del cuscino d'aria che la sostiene: e non si può a priori ipotizzare alcun rapporto tra i valori del quoziente $-b/m$ per la slitta scarica e quella carica.

x_1-x_2	0 S		1 S	
	\bar{t}	\bar{v}	\bar{t}	\bar{v}
40-60	1.0002	9.9982	1.2528	7.9824
50-70	1.0101	9.8996	1.2672	7.8915
60-80	1.0233	9.7725	1.2790	7.8187
70-90	1.0331	9.6792	1.2991	7.6974
80-100	1.0451	9.5681	1.3287	7.5260
90-110	1.0642	9.3969	1.3454	7.4328
100-120	1.0700	9.3458	1.3736	7.2799
110-130	1.0827	9.2363	1.3701	7.2986

x_1-x_2	2 S		3 S	
	\bar{t}	\bar{v}	\bar{t}	\bar{v}
40-60	1.4945	6.6911	2.1634	4.6224
50-70	1.5086	6.6285	2.1951	4.5555
60-80	1.5425	6.4830	2.2787	4.3885
70-90	1.5694	6.3718	2.3165	4.3169
80-100	1.6039	6.2350	2.4379	4.1018
90-110	1.6369	6.1090	2.4953	4.0075
100-120	1.6498	6.0613	2.5654	3.8980
110-130	1.6570	6.0351	2.4472	4.0863

TABELLA 4.5 – Misure sull'attrito: i dati (slitta scarica).

x_1-x_2	0 C		1 C	
	\bar{t}	\bar{v}	\bar{t}	\bar{v}
40-60	1.4248	7.0184	1.7902	5.5861
50-70	1.4442	6.9243	1.8403	5.4338
60-80	1.4613	6.8431	1.8684	5.3523
70-90	1.4751	6.7790	1.8738	5.3367
80-100	1.5009	6.6627	1.9216	5.2039
90-110	1.5237	6.5628	1.9698	5.0766
100-120	1.5337	6.5201	1.9953	5.0118
110-130	1.5259	6.5535	1.9534	5.1192

x_1-x_2	2 C		3 C	
	\bar{t}	\bar{v}	\bar{t}	\bar{v}
40-60	2.1581	4.6338	3.2172	3.1083
50-70	2.2324	4.4794	3.5329	2.8306
60-80	2.2811	4.3839	3.6233	2.7599
70-90	2.3278	4.2959	3.8060	2.6274
80-100	2.3938	4.1775	3.9563	2.5276
90-110	2.4672	4.0531	4.1584	2.4048
100-120	2.4917	4.0134	4.1759	2.3947
110-130	2.4371	4.1032	3.9203	2.5508

TABELLA 4.6 - Misure sull'attrito: i dati (slitta carica).

	A	B	σ_y	σ_A	σ_B
0 S	10.5964	-0.0117	0.0227	0.0417	0.0005
1 S	8.5746	-0.0113	0.0309	0.0568	0.0007
2 S	7.3203	-0.0120	0.0220	0.0405	0.0005
3 S	5.2979	-0.0129	0.0380	0.0699	0.0009
0 C	7.4685	-0.0089	0.0147	0.0271	0.0004
1 C	6.0286	-0.0093	0.0383	0.0703	0.0009
2 C	5.1724	-0.0111	0.0182	0.0334	0.0004
3 C	3.6866	-0.0130	0.0548	0.1007	0.0013

TABELLA 4.7 - Misure sull'attrito: i risultati dell'interpolazione lineare.

	$p = b/m$	σ_p
S	0.01226	0.00029
C	0.00989	0.00026

TABELLA 4.8 - Misure sull'attrito: i risultati della media pesata.

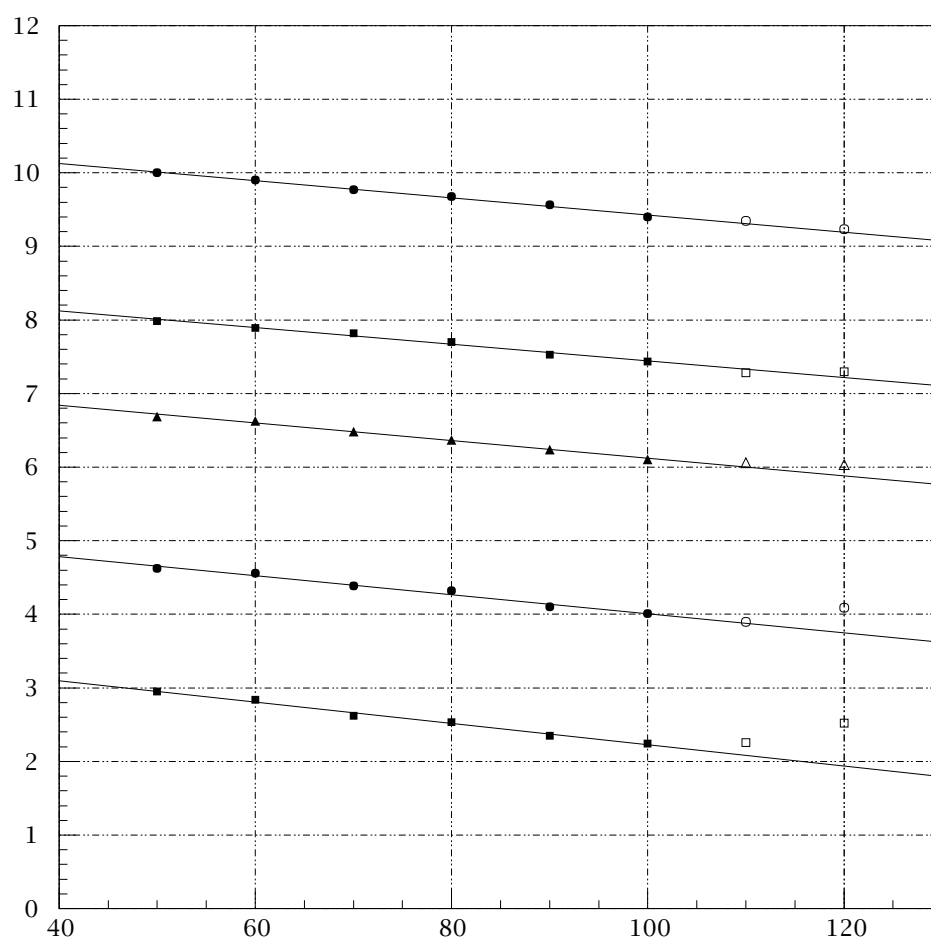
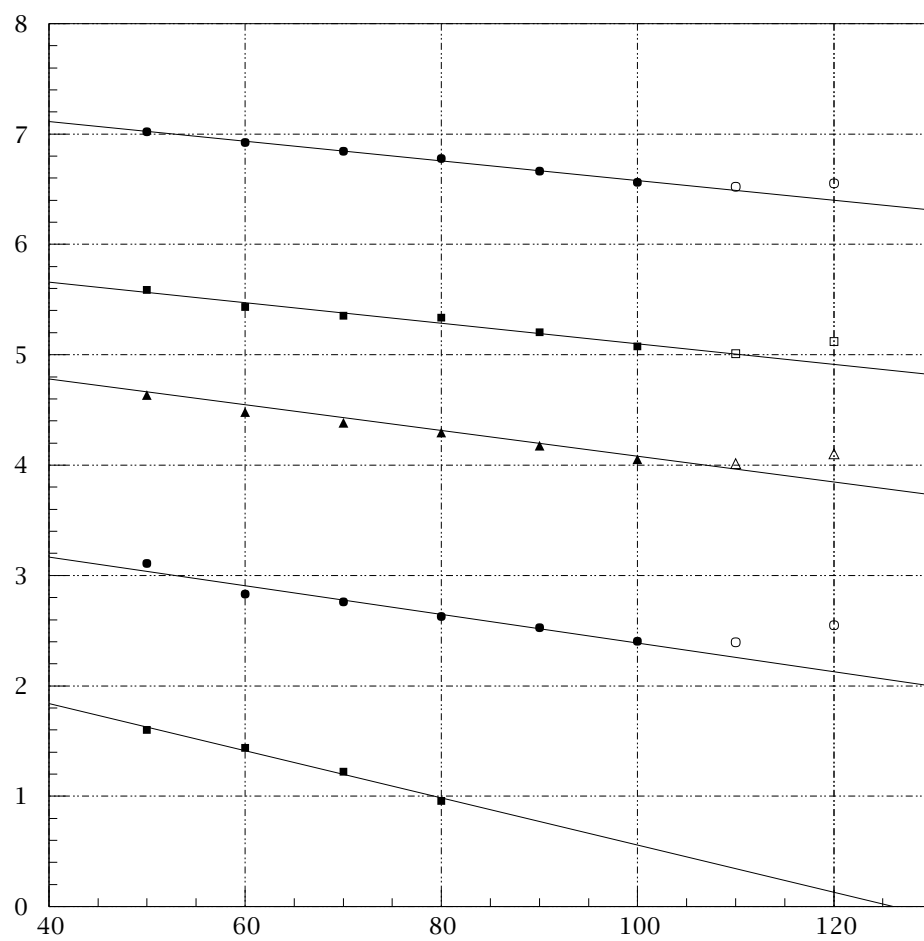


FIGURA 4d - Misure sull'attrito: i grafici di $v = v(x)$ per la slitta scarica.

FIGURA 4e - Misure sull'attrito: i grafici di $v = v(x)$ per la slitta carica.

4.3 Il piano inclinato (tenendo conto dell'attrito)

Una volta noto il valore numerico del coefficiente $-b/m$, la sua conoscenza può essere usata per integrare i dati dell'esperienza del piano inclinato. Se si tiene conto anche della presenza della forza di attrito viscoso, infatti l'equazione del moto si deve scrivere

$$F = ma = mg \sin \alpha - bv$$

e considerando, in prima approssimazione, la velocità v come costante durante il moto, da essa si ricava

$$a = \frac{F}{m} = g \sin \alpha - \frac{b}{m} v = a_0 - \frac{b}{m} v \equiv a_0 - pv$$

(in cui si è indicato con $a_0 = g \sin \alpha$ il valore che avrebbe avuto l'accelerazione in assenza di attrito, e con p il valore del rapporto b/m); un valore per g più aderente a quello reale si può quindi ottenere dai dati dell'esperienza del piano inclinato usando la formula

$$g \equiv \frac{a_0}{\sin \alpha} = \frac{a + pv}{\sin \alpha} = g_0 + \frac{pv}{\sin \alpha} = g_0 + c \quad (4.4)$$

(in cui g_0 rappresenta il valore non corretto per la presenza degli attriti ottenuto in precedenza, e

$$c = \frac{pv}{\sin \alpha} \quad (4.5)$$

è la correzione complessiva dovuta all'attrito).

L'indipendenza dell'accelerazione dalla massa del corpo si può invece verificare confrontando i due valori ottenuti (a parità di inclinazione della guidovia e con diverse masse della slitta) per a_0 :

$$a_0 = a + \frac{b}{m} v \equiv a + pv \quad (4.6)$$

Nell'equazione 4.6, a rappresenta l'accelerazione reale; ed a_0 (come già notato) è il valore che avrebbe avuto l'accelerazione in assenza di attriti. Come valore da attribuire a v in tutte queste formule, si può usare quello della velocità media durante il moto:

$$v = \frac{v(40, 50) + v(120, 130)}{2} \quad (4.7)$$

Per il calcolo degli errori, applichiamo la formula di propagazione alle relazioni 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7:

$$\begin{aligned} \sigma_g^2 &= \sigma_{g_0}^2 + \sigma_c^2 \\ \left(\frac{\sigma_c}{c}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\sin \alpha}}{\sin \alpha}\right)^2 \\ \sigma_c^2 &= c \cdot \left[\left(\frac{\sigma_p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\alpha}}{\tan \alpha}\right)^2 \right] \\ \sigma_v^2 &= \frac{1}{4} \sigma_v^2 + \frac{1}{4} \sigma_v^2 = \frac{1}{2} \sigma_v^2 \end{aligned}$$

(per l'ultima formula, ricordiamo che nell'interpolazione lineare abbiamo assunto che le velocità abbiano tutte quante lo stesso errore); i risultati sono nella tabella 4.9.

	v	σ_v	a_0	σ_{a_0}	g	σ_g	Risultato
15' S	22.16	0.16	4.157	0.066	952.72	80.67	953 ± 81
30' S	31.38	0.15	8.320	0.090	953.41	41.05	953 ± 41
45' S	38.72	0.15	12.564	0.107	959.84	27.89	960 ± 28
45' C	39.10	0.10	12.801	0.074	977.94	27.74	978 ± 28

TABELLA 4.9 - Misure sul piano inclinato tenendo conto degli attriti: i risultati.

Per quanto attiene al calcolo di g , come si vede, i valori ottenuti sono più vicini al risultato noto di 980.6 cm/s^2 ; gli errori sono comunque elevati e dell'ordine del $5 \div 10\%$. I valori di a_0 per i due ultimi casi hanno poi un fattore di compatibilità pari a 1.8; l'accordo è quindi buono.

4.4 Gli urti

Negli urti, essendo in gioco soltanto forze interne, la quantità di moto totale del sistema si conserva.

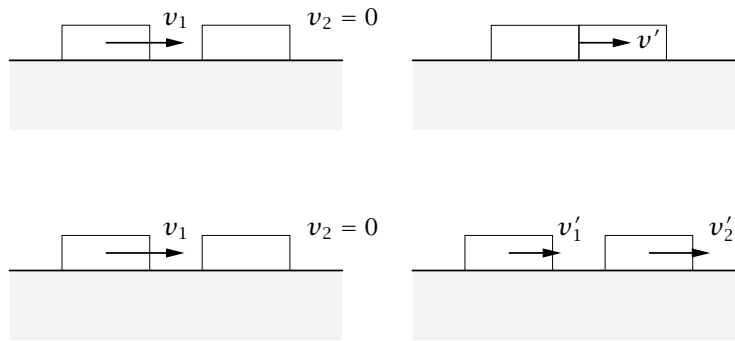


FIGURA 4f - Urto totalmente anelastico e caso generale.

Supponiamo di considerare il caso di un urto *totalmente anelastico* tra un corpo “1”, dotato di velocità iniziale v_1 , ed un corpo “2” in quiete; indicando con v' la velocità del complesso dei due corpi dopo l'urto, deve risultare

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v' \quad \text{cioè} \quad v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Nel caso generale, in cui i due corpi si separano dopo l'urto assumendo velocità che indicheremo rispettivamente con v'_1 e v'_2 , il principio di conservazione della quantità di moto impone che sia

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

e questa relazione da sola non è sufficiente a determinare lo stato del sistema dopo l'urto. Se si assume però che questo sia anche *elastico*, in esso si conserva l'energia cinetica del sistema:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

Ricaviamo dalla prima equazione v'_1

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 - m_2 v'_2}{m_1}$$

e sostituiamo nella seconda (dopo aver eliminato dai due membri il fattore costante $\frac{1}{2}$):

$$m_1 v_1^2 = \frac{(m_1 v_1 - m_2 v'_2)^2}{m_1} + m_2 v'^2_2$$

moltiplicando per m_1 e sviluppando, risulta

$$m_1^2 v_1^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v'^2_2 - 2m_1 m_2 v_1 v'_2 + m_1 m_2 v'^2_2$$

semplificando e dividendo per $m_2 v'_2$ si ottiene

$$m_2 v'_2 - 2m_1 v_1 + m_1 v'_2 = 0$$

da cui

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Sostituendo nell'espressione prima trovata per v'_1 si trova infine facilmente

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

Per l'esperienza si hanno a disposizione due coppie di slitte, che portano rispettivamente alle estremità del velcro o delle molle metalliche; inoltre il solito disco di ottone, la cui massa è circa uguale a quella di ognuna delle due slitte.

Dopo aver disposto con cura la guidovia orizzontale in corrispondenza del punto in cui si vuole far avvenire l'urto, si misura per cinque volte il tempo che impiegano a percorrere un tratto di 10 cm sia la slitta "proiettile" (tanto immediatamente prima che immediatamente dopo l'urto stesso), sia la slitta "bersaglio" (dopo l'urto); e si calcolano i rapporti tra le velocità con i rispettivi errori.

Le cause di errore sono molteplici: sia errori casuali dovuti alle perturbazioni esterne ed al fatto che la slitta urtata non è perfettamente ferma al momento dell'urto; sia errori sistematici, dovuti alla non perfetta orizzontalità della guidovia, agli attriti, ed alla non perfetta identità tra le masse delle due slitte e del disco di ottone.

Gli errori sulle velocità calcolate si possono questa volta stimare unicamente usando la formula della propagazione, assumendo come errore sulla distanza (10 cm) la sensibilità dello strumento (1 mm); i risultati sono in tabella 4.10: la compatibilità con i valori teorici è talvolta assai scadente.

Urto anelastico	Urto elastico $m_1 = m_2$
$v = 15.379 \pm 0.074 \text{ cm/s}$ $v' = 7.879 \pm 0.097 \text{ cm/s}$ $r = v'/v = 0.512 \pm 0.013$ Valore teorico: $r^* = 0.5$ Accordo: $ r - r^* /\sigma_r = 0.9$	$v_1 = 17.786 \pm 0.059 \text{ cm/s}$ $v'_2 = 17.562 \pm 0.065 \text{ cm/s}$ $r_1 = v'_2/v_1 = 0.9874 \pm 0.0049$ Valore teorico: $r_1^* = 1.0$ Accordo: $ r_1 - r_1^* /\sigma_{r_1} = 2.6$
Urto elastico $m_2 = 2m_1$	Urto elastico $m_1 = 2m_2$
$v_1 = 17.786 \pm 0.059 \text{ cm/s}$ $v'_1 = 5.594 \pm 0.083 \text{ cm/s}$ $v'_2 = 11.694 \pm 0.073 \text{ cm/s}$ $r_1 = v'_1/v_1 = 0.3145 \pm 0.0048$ $r_2 = v'_2/v_1 = 0.6575 \pm 0.0046$ Valori teorici: $r_1^* = 1/3$ $r_2^* = 2/3$ Accordo: $ r_1 - r_1^* /\sigma_{r_1} = 3.9$ $ r_2 - r_2^* /\sigma_{r_2} = 2.0$	$v_1 = 12.468 \pm 0.104 \text{ cm/s}$ $v'_1 = 4.348 \pm 0.312 \text{ cm/s}$ $v'_2 = 16.427 \pm 0.197 \text{ cm/s}$ $r_1 = v'_1/v_1 = 0.349 \pm 0.025$ $r_2 = v'_2/v_1 = 1.318 \pm 0.019$ Valori teorici: $r_1^* = 1/3$ $r_2^* = 4/3$ Accordo: $ r_1 - r_1^* /\sigma_{r_1} = 0.6$ $ r_2 - r_2^* /\sigma_{r_2} = 0.8$

TABELLA 4.10 - Esperienza degli urti: misure e risultati.

Capitolo 5

L'esperienza del volano

Il *volano* è sostanzialmente un corpo rigido vincolato a ruotare attorno ad un asse fisso, cui è collegato da un sistema di cuscinetti a sfere; un peso in ottone, al quale è fissato un filo di refe che si può avvolgere attorno ad un cilindro munito di una scanalatura elicoidale e solidale al volano stesso, viene poi sfruttato per applicare una forza di momento noto rispetto all'asse di rotazione. Gli scopi di questa esperienza sono: la verifica della legge del moto; la misura del momento d'inerzia del volano rispetto all'asse di rotazione; la misura del momento delle forze d'attrito (sempre rispetto all'asse fisso).

Le forze applicate al sistema fisico del volano, rappresentato schematicamente nella figura 5a, sono: *sul peso*, la forza di gravità di modulo $P = mg$ e la tensione del filo di modulo T' ; *sul volano*, la tensione del filo T ed il momento delle forze di attrito M_a .

Trattandosi di attrito tra corpi solidi (rotolamento delle sfere dei cuscinetti), il momento delle forze d'attrito che agiscono sull'asse del volano si può ritenere indipendente dalle condizioni del moto: quindi M_a è una *costante*. Le equazioni del moto, per il peso ed il volano, sono dunque:

$$\begin{cases} mg - T' = ma \\ Tr - M_a = I \frac{d\omega}{dt} \end{cases} \quad (5.1)$$

in cui si è indicata con a l'accelerazione del peso; con I il momento d'inerzia del volano; e con ω la sua velocità angolare.

Se il filo che connette il peso al volano si può considerare *di massa trascurabile*, risulterà in conseguenza $T = T'$; inoltre la velocità angolare del volano ω , la velocità lineare del peso v e la sua accelerazione a sono legate tra loro (se il filo si può considerare anche *inestensibile*) dalla relazione

$$\omega = \frac{v}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dv}{dt} = \frac{a}{r} \quad (5.2)$$

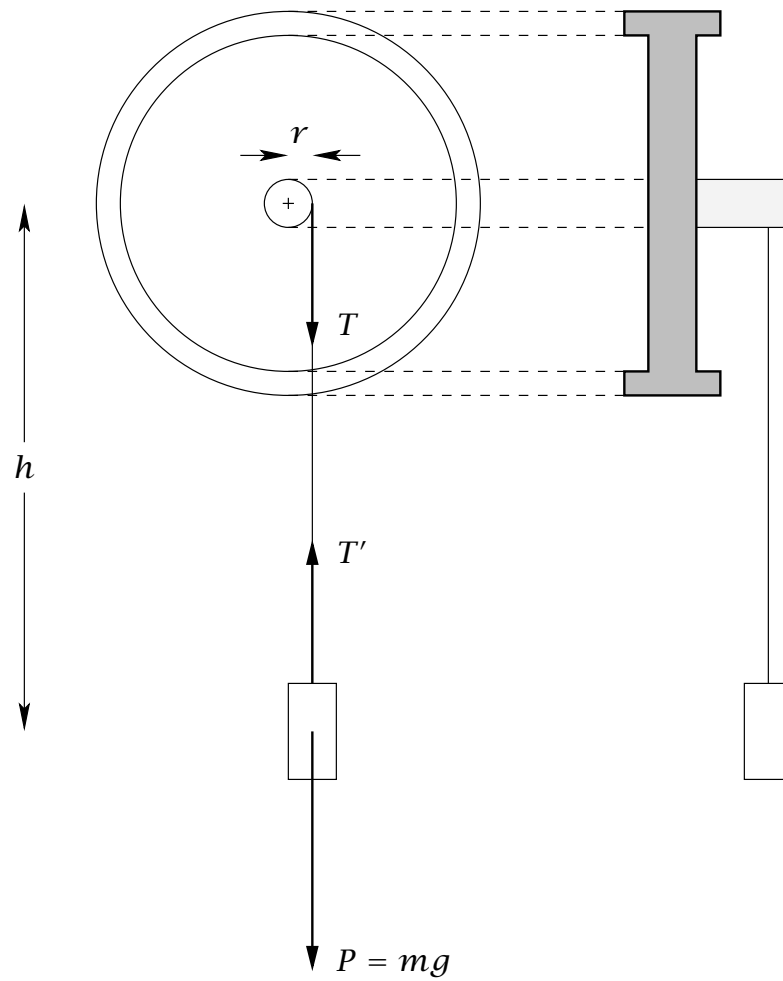


FIGURA 5a - Il volano: apparato sperimentale.

e, sostituendo la 5.2 nel sistema 5.1, avremo

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ Tr - M_a = \frac{I}{r} a \end{cases} \quad (5.3)$$

Per risolvere il sistema 5.3, si può ad esempio ricavare dalla sua prima equazione la tensione del filo $T = m(g - a)$, e sostituire nella seconda:

$$mr(g - a) - M_a = \frac{Ia}{r}$$

da cui

$$a(I + mr^2) = (mrg - M_a)r$$

ed infine

$$a = \frac{(mrg - M_a)r}{I + mr^2} \quad (5.4)$$

Essendo tutte le grandezze da cui a dipende costanti al variare delle condizioni del moto, l'accelerazione del peso sarà *costante* e pertanto il suo moto *uniformemente accelerato*: così come sarà uniformemente accelerato il moto del volano, vista la proporzionalità tra l'accelerazione angolare $d\omega/dt$ ed a . Se si contano i tempi dall'istante in cui si mette in moto il sistema, la velocità v e lo spazio s percorso dal peso sono date in ogni istante dalle

$$v = at \quad \text{e} \quad s = \frac{1}{2}at^2$$

in cui a ha il valore trovato nella 5.4. Sempre se il filo si può considerare *inestensibile*, lo spazio percorso dal peso è legato all'angolo ϕ di cui è ruotato il volano; risulta in effetti

$$s = \frac{1}{2}at^2 = r\phi \quad (5.5)$$

per cui la velocità angolare ω del volano, espressa in funzione del tempo, è data dalla

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{r} = \frac{at}{r} \\ \omega(t) &= \frac{a}{r}t = \frac{mrg - M_a}{I + mr^2}t = \alpha t \end{aligned}$$

in cui si è posto per brevità

$$\alpha = \frac{mrg - M_a}{I + mr^2}$$

Non è sperimentalmente complicato misurare ω di giro in giro; per verificare la validità della legge del moto che abbiamo appena ricavato si potrebbe riportare in grafico ω in funzione di t e controllare che l'andamento sia lineare. Nella tabella 5.1 ci sono i dati, ottenuti in questo modo: si avvolge il filo di refe attorno al cilindro solidale al volano, e si lascia quest'ultimo libero di ruotare nello stesso istante in cui

Giri	Tempi parziali t_i (s)					Medie \bar{t} (s)	Errori $\sigma_{\bar{t}}$ (s)
1	18.554	18.604	18.651	18.670	18.549	18.606	0.025
2	26.437	26.506	26.452	26.441	26.334	26.434	0.028
3	32.471	32.446	32.376	32.373	32.299	32.393	0.030
4	37.475	37.559	37.447	37.417	37.317	37.443	0.039
5	41.907	42.061	41.854	41.838	41.333	41.799	0.123
6	45.879	45.949	45.858	45.851	45.752	45.858	0.032
7	49.561	49.713	49.502	49.489	49.435	49.540	0.048
8	52.982	53.137	52.963	52.905	52.869	52.971	0.046
9	56.182	56.389	56.100	56.160	56.084	56.183	0.055
10	59.232	59.382	59.163	59.177	59.068	59.204	0.052
11	62.067	62.250	62.062	62.043	61.969	62.078	0.046
12	64.848	64.981	64.842	64.784	64.703	64.832	0.046

TABELLA 5.1 - Esperienza del volano: i dati presi in fase di accelerazione.

si avvia il cronometro; in corrispondenza della fine di ognuno dei giri compiuti dal volano si preme il tasto dei tempi parziali e si prende nota del valore indicato. Questo procedimento continua per tutte le 12 rotazioni che precedono il distacco del peso dal volano; e viene inoltre ripetuto cinque volte.

Fatte le medie delle cinque misure ripetute, da esse si potrebbero ricavare i tempi t_i impiegati per compiere ognuno dei 12 giri oggetto delle misure (per il primo di essi si dispone di una misura diretta, per gli altri occorre calcolare la differenza tra due misure) e, da essi, le velocità angolari medie $\omega_i = 2\pi/t_i$ per ogni giro.

Essendo $\omega(t)$ lineare in t , esse devono corrispondere alla velocità istantanea raggiunta nell'istante intermedio di ognuno dei dodici giri: che si calcolerebbe come semisomma di due tempi parziali successivi o, per il primo giro, dividendo per due la relativa durata; la tecnica sarebbe quindi del tutto analoga a quella usata per l'esperienza del piano inclinato, e permetterebbe di ricavare le ascisse e le ordinate di punti che rappresentano il moto del volano sul piano $\{\omega, t\}$, che si riporterebbero poi in diagramma cartesiano.

Il problema è che gli errori quadratici medi sui tempi parziali (riportati nell'ultima colonna) mostrano sì (a parte il quinto giro, dove vi è una misura abbastanza differente dalle altre) un andamento lievemente crescente con n , ma sostanzialmente non differiscono molto l'uno dall'altro e si mantengono dello stesso ordine di grandezza; se si volessero riportare in ordinata le velocità angolari, tuttavia, bisognerebbe considerare che il loro errore dipende anche dalla precisione con cui l'osservatore riesce a identificare la fine di ognuno dei giri (insomma, dipende dall'errore sull'angolo di 2π che figura a numeratore).

Gli errori sui tempi sono dell'ordine dell'un per mille; ed errori confrontabili, sugli angoli, corrisponderebbero a meno di mezzo grado. La causa preponderante di errore dovrebbe essere quindi legata all'apprezzamento degli angoli, ed è ragionevole supporre che cresca di giro in giro con l'aumentare della velocità angolare.

E' dunque più conforme alle ipotesi dei minimi quadrati controllare la validità della legge del moto riferendoci direttamente ai tempi trascorsi: dalla 5.5, esprimendo

l'angolo di rotazione in funzione dei giri del volano, si ricava

$$\frac{1}{2}at^2 = 2\pi rn$$

e da questa

$$t = 2\sqrt{\frac{\pi r}{a}}\sqrt{n} = \vartheta\sqrt{n}$$

in cui si è posto per brevità

$$\vartheta = 2\sqrt{\frac{\pi r}{a}} = 2\sqrt{\frac{\pi(I + mr^2)}{mrg - M_a}} \quad (5.6)$$

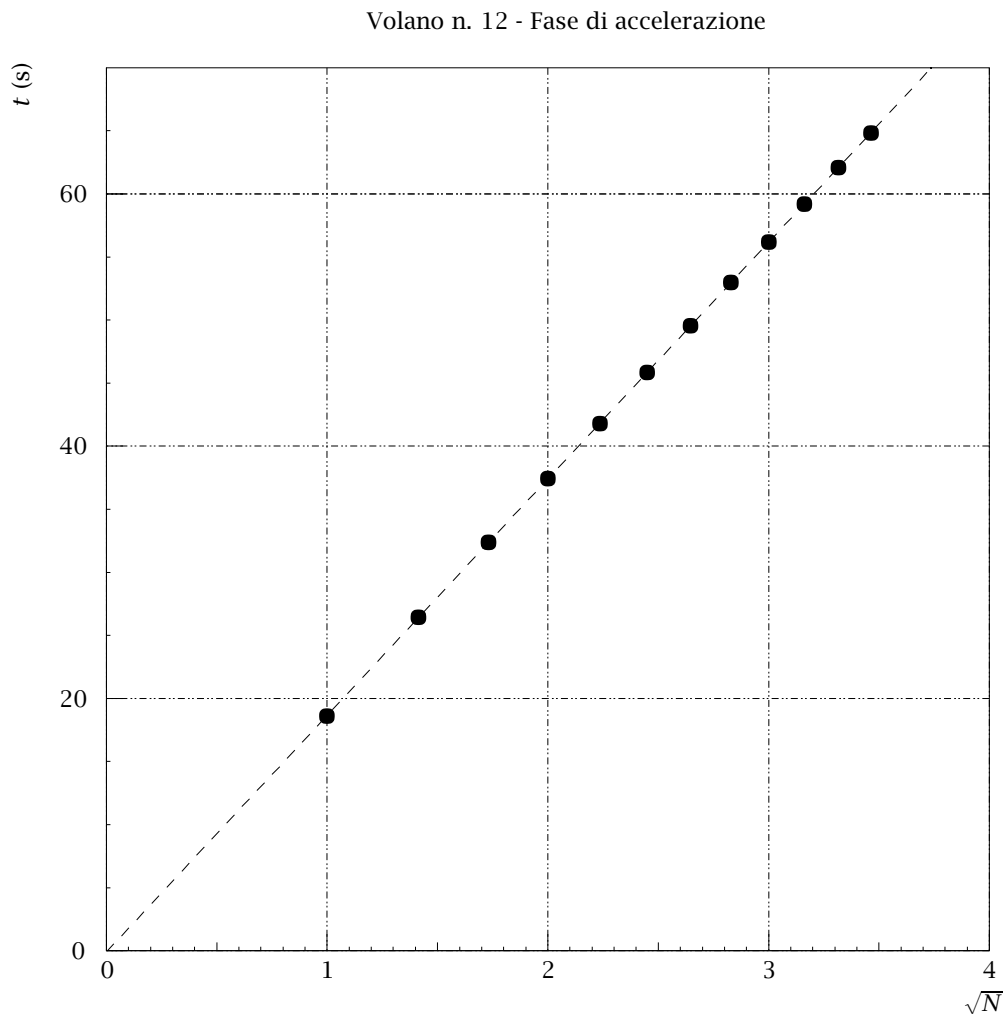


FIGURA 5b – Esperienza del volano: il moto in fase di accelerazione.

Nella figura 5b sono riportati in grafico i tempi misurati in funzione di \sqrt{n} ; l'osservata linearità del grafico comprova, come già detto, la legge del moto. La pendenza della retta, cioè il valore di ϑ , si può ricavare (con il relativo errore) dai dati, effettuando un'interpolazione lineare ed usando poi la formula dell'errore a posteriori; i risultati sono in tabella 5.2.

Fase	A	B	μ_y	μ_A	μ_B
Accelerazione	-0.10453	18.75602	0.03138	0.03089	0.01212
Decelerazione	2.41877	-0.001958	0.00150	0.00121	0.000013

TABELLA 5.2 - Esperienza del volano: i risultati dell'interpolazione lineare.

Anche se la retta *dovrebbe* passare per l'origine degli assi coordinati, è preferibile effettuare l'interpolazione con una generica retta di equazione $t = t_0 + \vartheta \sqrt{n}$ e verificare poi che l'intercetta t_0 abbia valore (entro gli errori stimati) compatibile con lo zero; se non lo fosse, questo dovrebbe essere attribuito al modo in cui il misuratore libera il volano contemporaneamente all'avvio del cronometro—e per i particolari scopi di questa esperienza ciò non è rilevante.

Il momento d'inerzia I del volano si può ricavare sperimentalmente dalla formula 5.6, una volta noto il valore di ϑ ; bisogna però conoscere anche il valore del momento delle forze d'attrito M_a . Per misurare quest'ultimo si può studiare il moto del sistema nella sua fase di decelerazione, ossia dopo che il peso si è staccato: l'energia iniziale del sistema stesso è l'energia cinetica posseduta dal volano all'atto del distacco del peso, e viene gradualmente trasformata in calore attraverso l'intervento delle forze di attrito; il cui lavoro è proporzionale al momento M_a ed all'angolo di rotazione del volano.

Il momento delle forze d'attrito M_a è, in ogni istante, legato al valore dell'accelerazione angolare (ora negativa) dalla

$$-M_a = I \frac{d\omega}{dt}$$

Integrando,

$$\omega(t) = \omega_{\max} - \frac{M_a}{I} t = \omega_{\max} + \beta t$$

in cui si è posto

$$\beta = -\frac{M_a}{I} \quad (5.7)$$

e si è indicato con ω_{\max} la velocità angolare del volano all'istante $t = 0$ in cui il peso si stacca: β si può agevolmente ricavare sperimentalmente misurando ω in funzione del tempo dopo il distacco del peso, ed interpolando; il relativo errore si ottiene ancora “a posteriori”.

In questo caso, visto che la velocità angolare diminuisce molto lentamente, si prendono tempi parziali ogni 10 giri a partire dal distacco del peso di ottone; le misure sono molto precise, e gli errori sulle velocità angolari dovrebbero essere tutti confrontabili visto che esse non variano apprezzabilmente nel corso di questa fase. Si

continua fino ad avere un numero di punti sufficienti ad individuare con precisione una retta sul piano (sei per il nostro caso), e ripetendo cinque volte il procedimento; nella tabella 5.3 ci sono sia i risultati della singole misure che le coordinate dei

Giri	Tempi parziali (s)					Medie (s)	Diff. (s)
10	26.22	26.29	26.18	26.25	26.20	26.23	26.23
20	53.12	53.10	53.02	53.09	53.04	53.07	26.85
30	80.61	80.63	80.43	80.56	80.49	80.54	27.47
40	108.77	108.82	108.52	108.73	108.59	108.69	28.14
50	137.59	137.68	137.36	137.62	137.47	137.54	28.86
60	167.23	167.37	166.89	167.22	167.04	167.15	29.61

i	t_i (s)	ω_i (rad/s)
10	13.115	2.395
20	39.650	2.340
30	66.805	2.287
40	94.615	2.233
50	123.115	2.177
60	152.345	2.122

TABELLA 5.3 – Esperienza del volano: le misure in fase di decelerazione.

punti da riportare in grafico sul piano $\{\omega, t\}$; in figura 5c il diagramma cartesiano, ed ancora nella tabella 5.2 la pendenza della retta con l'errore.

L'osservata linearità di ω in funzione di t convalida poi questa seconda legge del moto e conferma così sperimentalmente che M_a si può effettivamente considerare costante, almeno nei limiti della nostra sensibilità strumentale. Una volta misurato β , si può dalla 5.7 ricavare il valore di M_a e, sostituendo nella precedente 5.6, ottenere il momento d'inerzia del volano I : risulta

$$M_a = -\beta I \quad (5.8)$$

e finalmente

$$I = \frac{mr(g\vartheta^2 - 4\pi r)}{4\pi - \vartheta^2\beta} \quad (5.9)$$

Passando al calcolo dell'errore, notiamo che I è stato da noi ricavato come funzione di ϑ , β , m ed r : l'errore su I si otterrà dagli errori su queste quattro grandezze attraverso la formula di propagazione applicata alla 5.9. Ora, r si può considerare con buona approssimazione esente da errore (o, per essere più precisi, il termine che contiene $\partial I / \partial r$ risulta trascurabile rispetto agli altri); indicati con σ_m , σ_ϑ e σ_β gli errori rispettivi di m , ϑ e β , la formula da usare è la

$$\sigma_I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial \vartheta}\right)^2 \sigma_\vartheta^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial \beta}\right)^2 \sigma_\beta^2}$$

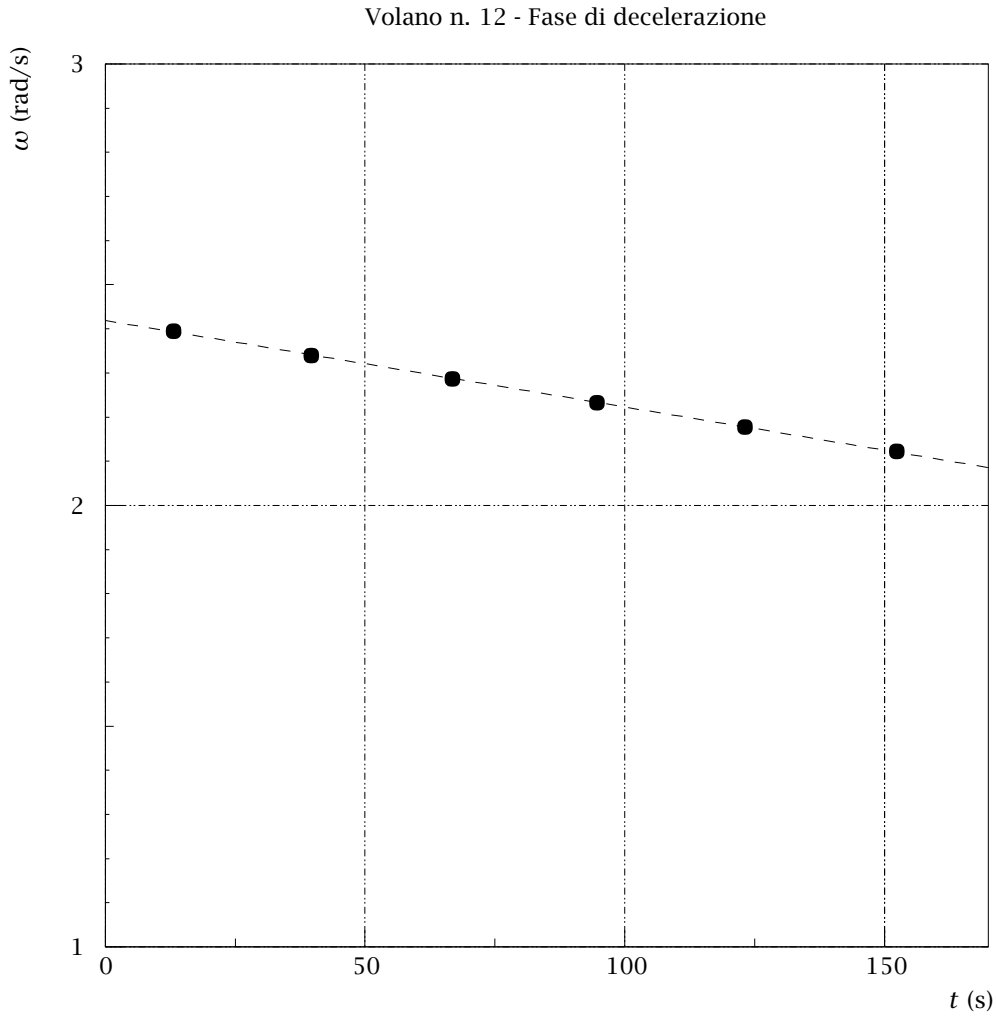


FIGURA 5c - Esperienza del volano: il moto in fase di decelerazione.

Dati		
r	18.95	mm
m	34 ± 0.5	gr
I	0.164	Kg · m ²

Risultati		
ϑ	18.756 ± 0.012	s
β	-0.001958 ± 0.000013	rad/s ²
I	0.1676 ± 0.0025	Kg · m ²
M_a	0.000326 ± 0.000010	N · m

TABELLA 5.4 - Esperienza del volano: i dati forniti dal laboratorio ed i risultati finali.

(formula *approssimata*) con

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I}{\partial m} = \frac{r(g\alpha^2 - 4\pi r)}{4\pi - \vartheta^2\beta} \\ \frac{\partial I}{\partial \vartheta} = \frac{2mr g\vartheta(4\pi - \vartheta^2\beta) + 2\vartheta\beta mr(g\vartheta^2 - 4\pi r)}{(4\pi - \vartheta^2\beta)^2} \\ \quad = \frac{8\pi mr\vartheta(g - \beta r)}{(4\pi - \vartheta^2\beta)^2} \\ \frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{mr\vartheta^2(g\vartheta^2 - 4\pi r)}{(4\pi - \vartheta^2\beta)^2} \end{array} \right.$$

Per ultimo, il momento delle forze di attrito M_a si ottiene dalla 5.8; il suo errore è dato da

$$\sigma_{M_a} = M_a \sqrt{\left(\frac{\sigma_\beta}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2}$$

ed i risultati sono nella tabella 5.4. Come si può vedere, il valore trovato per I è ben compatibile (1.5σ) con quello fornito dal laboratorio; è da notare infine che l'errore di 500 milligrammi attribuito alla massa m è comprensivo anche della massa del filo.

5.1 Brevi note sul filo ideale

Un filo “ideale” si assume essere *privo di massa, inestensibile* e perfettamente *flessibile*; solo sfruttando queste proprietà abbiamo potuto risolvere il sistema 5.1, nelle cui due equazioni compaiono quattro incognite (T , T' , a ed ω). Ci poniamo ora la seguente domanda: se il filo non può essere considerato ideale, è ancora possibile risolvere il sistema 5.1 e ricavare quindi le equazioni del moto “reale” del volano?

Se il filo non fosse inestensibile, non ci sarebbe più alcun legame tra il moto del volano e quello del peso; quindi rimarremmo con un sistema composto da tre equazioni in quattro incognite (mancherebbe in sostanza la 5.2) e quindi impossibile da risolvere. È in sostanza *necessario* considerare il filo inestensibile; questo non è un problema, visto che quello in dotazione lo è con ottima approssimazione.

Facciamo ora riferimento alla figura 5d, in cui sono rappresentate separatamente le tre parti che compongono il nostro sistema: il volano, il peso, ed il filo che li collega; se quest'ultimo è dotato di massa, nel suo baricentro sarà applicata una forza $m'g$ (indichiamo con m' la massa della parte *svolta* del filo). Il filo esercita una forza di modulo T sul volano (diretta verso il basso), ed il volano a sua volta esercita una forza avente lo stesso modulo T (ma diretta verso l'alto) sul filo; allo stesso modo il filo esercita una forza di modulo T' sul peso che a sua volta esercita una forza uguale e contraria sul filo.

Applicando alla parte *svolta* del filo il secondo principio della dinamica (e ricordando che la sua massa m' non è costante nel tempo, ma varia invece di istante in istante) abbiamo che

$$T' + m'g - T = \frac{d}{dt}(m'v) = m'a + \frac{dm'}{dt}v \quad (5.10)$$

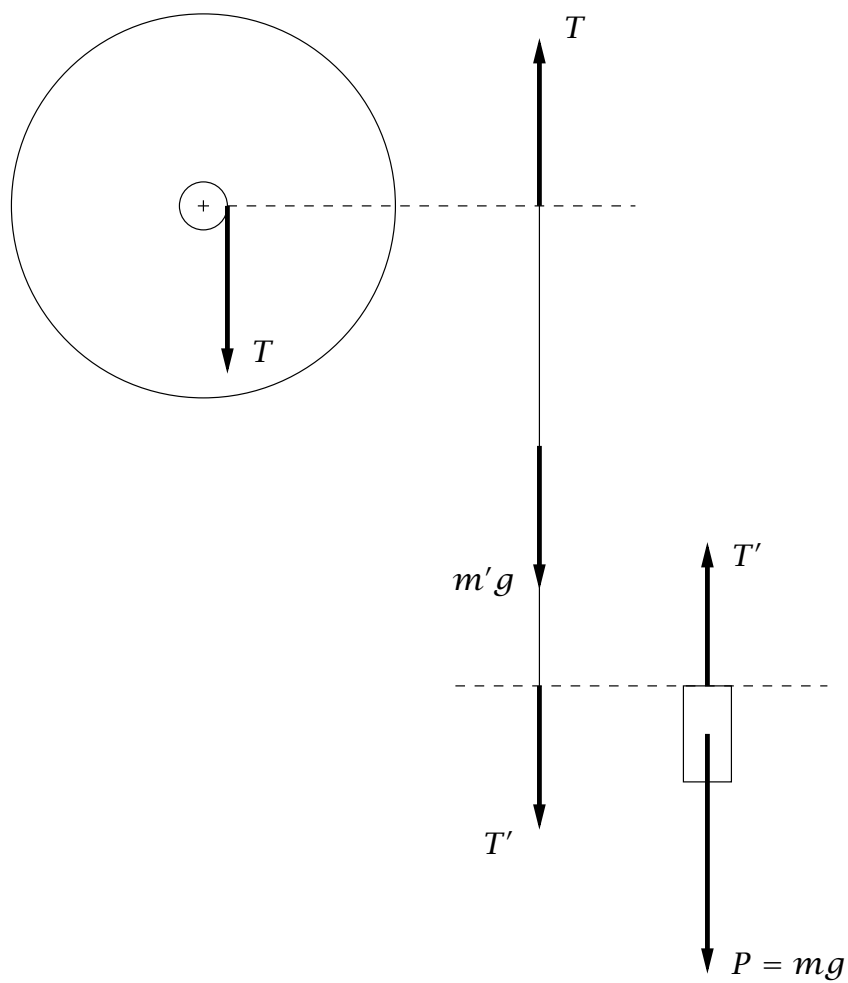


FIGURA 5d - Il volano: il filo reale.

in cui v è la velocità del filo (e del peso d'ottone). E' immediato, sempre considerando la 5.10, vedere che se e solo se il filo è privo di massa ($m' \equiv 0$) risulta $T = T'$ in ogni istante; altrimenti la relazione tra queste due incognite è molto più complicata.

Sempre se il filo è dotato di massa, inoltre, la parte avvolta di filo contribuisce ad aumentare il momento d'inerzia del volano di un fattore $m''r^2$ (in cui m'' è appunto la massa della parte avvolta di filo, che varia anch'essa di istante in istante); e l'equazione del moto del volano andrebbe scritta

$$Tr - M_a = \frac{d}{dt} [(I + m''r^2) \omega]$$

Sia m' che m'' devono poi essere espresse in funzione del tempo, ad esempio come $m' = m_0 + \rho s$, ove ρ è la densità lineare del filo ed s la lunghezza della sua parte svolta (la cui derivata prima rispetto a t è v , e la cui derivata seconda è a).

In conclusione: se il filo viene considerato dotato di massa, è ancora possibile scrivere delle equazioni del moto per il nostro sistema fisico; solo che queste non ammettono più una soluzione semplice, e risulta quindi molto più conveniente considerare il filo come ideale e la sua massa come una perturbazione di quella del peso d'ottone, aumentando artificiosamente in conseguenza l'errore attribuito a quest'ultima per tenerne conto.

Capitolo 6

Il pendolo reversibile di Kater

Il pendolo reversibile di Kater è un particolare pendolo composto (rappresentato schematicamente nella figura 6a); esso ha come caratteristica quella di poter essere fatto oscillare attorno a due assi diversi e tra loro paralleli, passanti per i due coltelli in O ed O' ; col simbolo G si è indicata invece la posizione del baricentro.

La configurazione del pendolo di Kater rispetto agli assi di oscillazione può essere variata dallo sperimentatore agendo su una delle due masse, e precisamente quella che si trova tra i due coltelli, che si può spostare e fissare riferendone la posizione ad una sottostante scala graduata (l'altra massa, all'estremità del pendolo, è invece fissa e non può essere spostata).

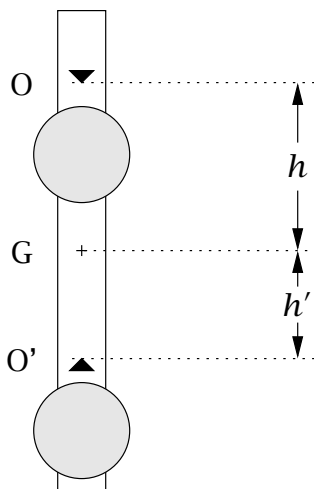


FIGURA 6a - Rappresentazione schematica del pendolo reversibile di Kater.

Ricordiamo che il moto sia del pendolo semplice che di quello composto sono già stati descritti per sommi capi nei capitoli 3.1 e 3.2; vogliamo adesso determinare se è possibile, per particolari posizioni della massa mobile, che i due periodi di oscillazione T e T' (relativi ad O ed O' rispettivamente) possano essere uguali. Indicando con l ed l' le due lunghezze ridotte, la 3.4 ci dà (supponendo che le oscillazioni possano essere considerate *piccole*)

$$\begin{cases} T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \\ T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}} \end{cases} \quad (6.1)$$

Sfruttando il teorema di Steiner-Huygens, la 3.5 che definisce la lunghezza ridotta si può scrivere

$$l = \frac{I}{mh} = \frac{I_G + mh^2}{mh} = h + \frac{I_G}{mh} \quad (6.2)$$

(ed analogamente per l'). Dovendo essere ovviamente $l = l'$, sfruttando la 6.2 otteniamo

$$h + \frac{I_G}{mh} = h' + \frac{I_G}{mh'}$$

cioè (moltiplicando entrambi i membri per mhh')

$$mh'h^2 - (I_G + mh'^2)h + I_Gh' = 0$$

Risolvendo questa equazione di secondo grado rispetto ad h , si trova che essa ammette le due soluzioni reali e distinte

$$h = h' \quad \text{e} \quad h = \frac{I_G}{mh'}$$

Nel primo caso l'interpretazione fisica è che i due assi di oscillazione sono simmetrici rispetto al baricentro del pendolo; nel secondo, che implica anche

$$h' = \frac{I_G}{mh} \quad \Rightarrow \quad l = h + \frac{I_G}{mh} = h + h'$$

la distanza tra i due assi di oscillazione è *pari alla lunghezza ridotta*.

Nel pendolo reversibile di Kater la prima situazione è da escludere per la costruzione dello strumento; quella della due masse che è fissa lo rende infatti *asimmetrico*, in modo che il baricentro non possa mai cadere nel punto di mezzo tra i due coltelli. Quindi, se i periodi di oscillazione attorno ai due assi sono uguali e di valore T , indicando con l la distanza tra O e O' (che è facilmente misurabile), si può ricavare il valore dell'accelerazione di gravità dalla

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

L'errore di g sarà poi (dalla formula per i prodotti di potenze):

$$\left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_g = g \sqrt{\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2}$$

x (cm)	$10T$ (s)	$10T'$ (s)
10	22.236	20.378
20	20.368	20.065
30	19.396	19.829
40	19.034	19.718
50	18.998	19.663
60	19.297	19.640
70	19.646	19.775
80	20.130	20.001
90	20.669	20.572

TABELLA 6.1 - Il pendolo di Kater: misure preliminari, ogni 10 cm.

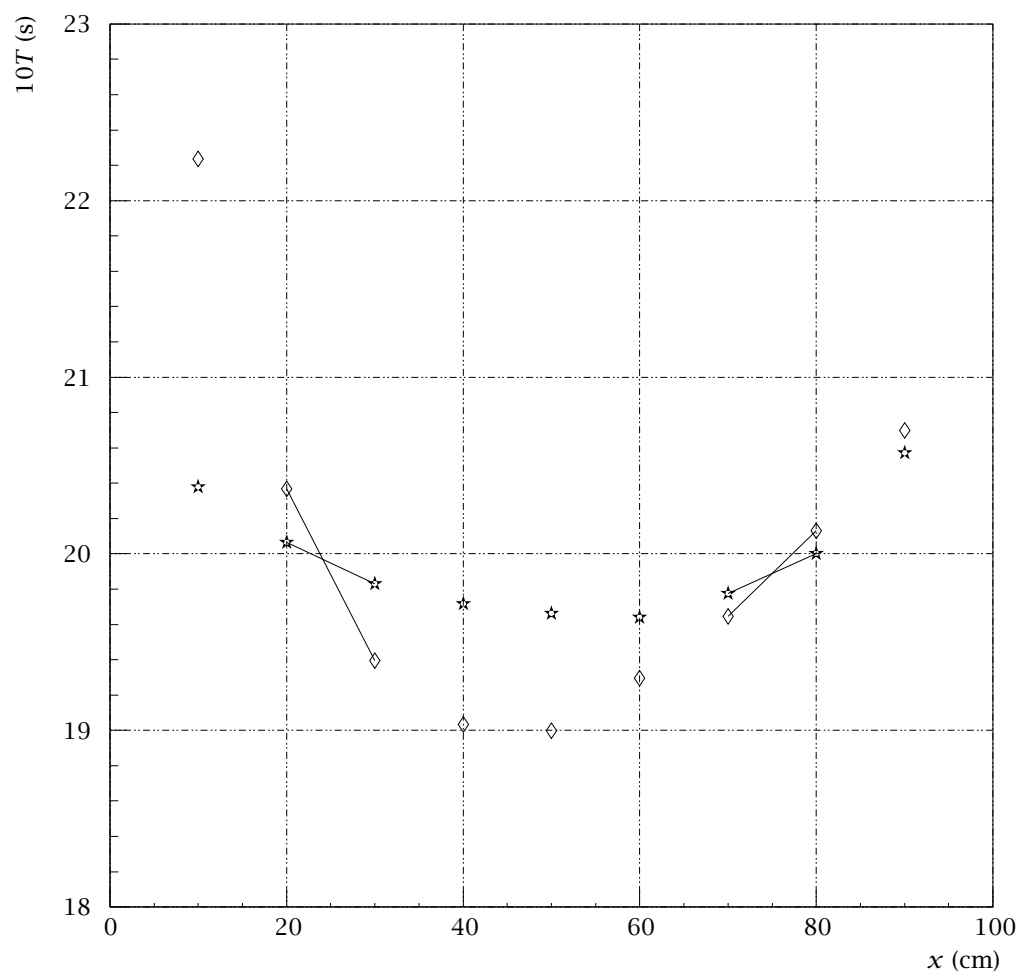


FIGURA 6b - Il pendolo di Kater: misure preliminari, ogni 10 cm.

La distanza l tra i due coltelli (con il relativo errore σ_l) è fornita dal laboratorio; quindi basta trovare la posizione della massa mobile per cui risulti $T = T'$, e misurare il periodo in queste condizioni. Si inizia misurando la durata di 10 oscillazioni rispetto ai due assi, variando di volta in volta la posizione della massa mobile a passi di 10 cm (tabella 6.1); e si riportano poi queste misure in grafico in funzione della posizione x della massa stessa (figura 6b).

E' evidente che esistono *due* valori di x per cui $T = T'$, che si possono rozzamente stimare dal grafico approssimando le funzioni $T(x)$ e $T'(x)$ con delle spezzate; dalla figura 6b si ricava $x \approx 24$ cm oppure $x \approx 76$ cm.

x (cm)	$50T$ (s)	$50T'$ (s)
22	100.56	100.18
23	99.99	100.04
24	99.46	99.87
25	99.11	99.79

TABELLA 6.2 - Il pendolo di Kater: misure ogni centimetro.

Il secondo passo (tabella 6.2 e figura 6c) consiste nel misurare la durata di 50 oscillazioni partendo da uno di questi valori, e spostando la massa mobile di un centimetro alla volta; conviene esplorare la zona attorno a quella delle due intersezioni in cui le due curve si incrociano sotto l'angolo maggiore e che è, come si sa dalla figura 6b, la prima: si vede abbastanza chiaramente che l'intersezione delle due curve si ha poco prima di $x = 23$ cm.

Si conclude misurando la durata di 100 oscillazioni, per tre valori di x centrati su questa stima da noi fatta e variati a passi di 0.5 cm (tabella 6.3 e figura 6d); si tracciano a occhio due rette interpolanti attraverso i punti misurati, e si guarda per che valore dell'ordinata avviene l'intersezione tra esse.

x (cm)	$100T$ (s)	$100T'$ (s)
22.5	200.66	200.17
23.0	200.16	200.08
23.5	199.70	199.99

TABELLA 6.3 - Il pendolo di Kater: misure finali.

Le cause d'errore sono molteplici: oltre i normali errori casuali introdotti dallo sperimentatore, c'è anche un errore sistematico legato all'uso delle formule 6.1 per il periodo, che sono *approssimate* e valide solo per le *piccole* oscillazioni. Ma quando una oscillazione si può ritenere piccola? Per questo occorre che l'errore sistematico, che abbiamo valutato nella formula 3.3 in

$$\Delta T = T_0 \frac{\alpha^2}{16}$$

non sia rilevabile dal nostro metodo di misura; in pratica che risulti minore dell'errore casuale di misura del periodo.

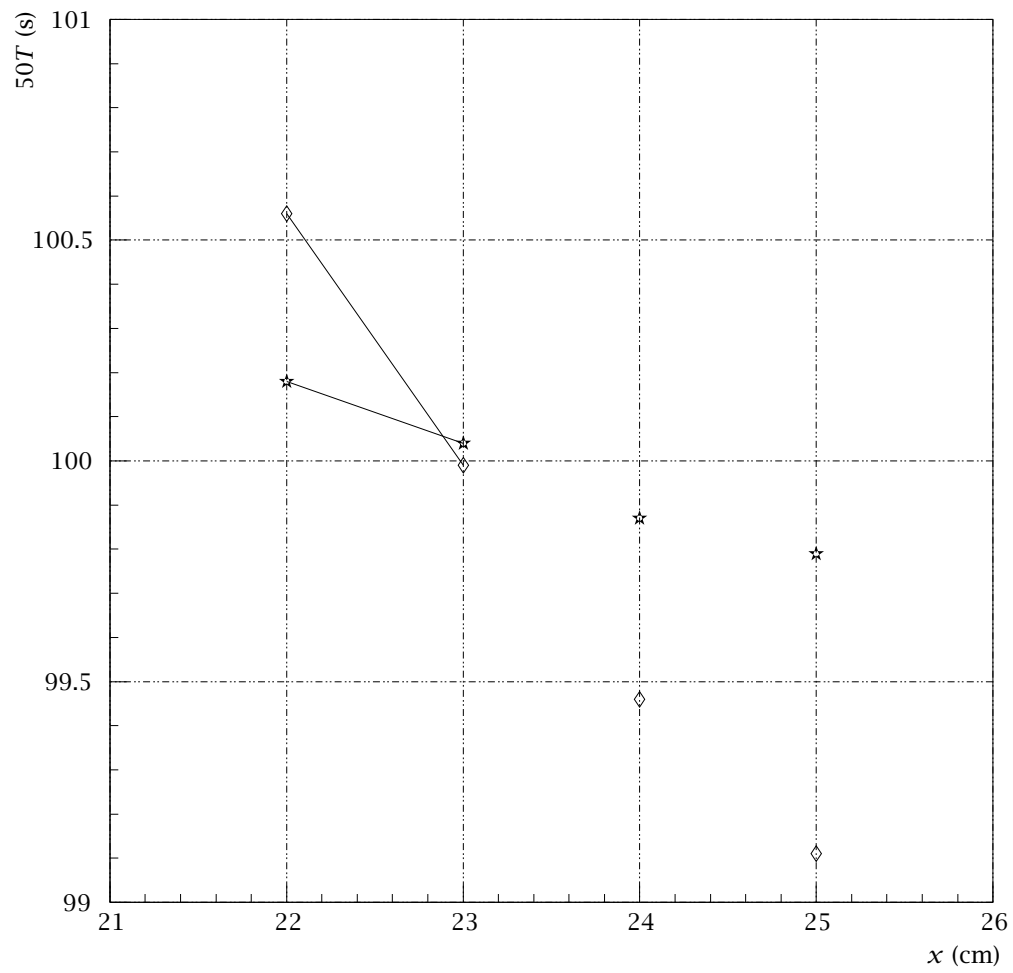


FIGURA 6c – Il pendolo di Kater: misure ogni centimetro.

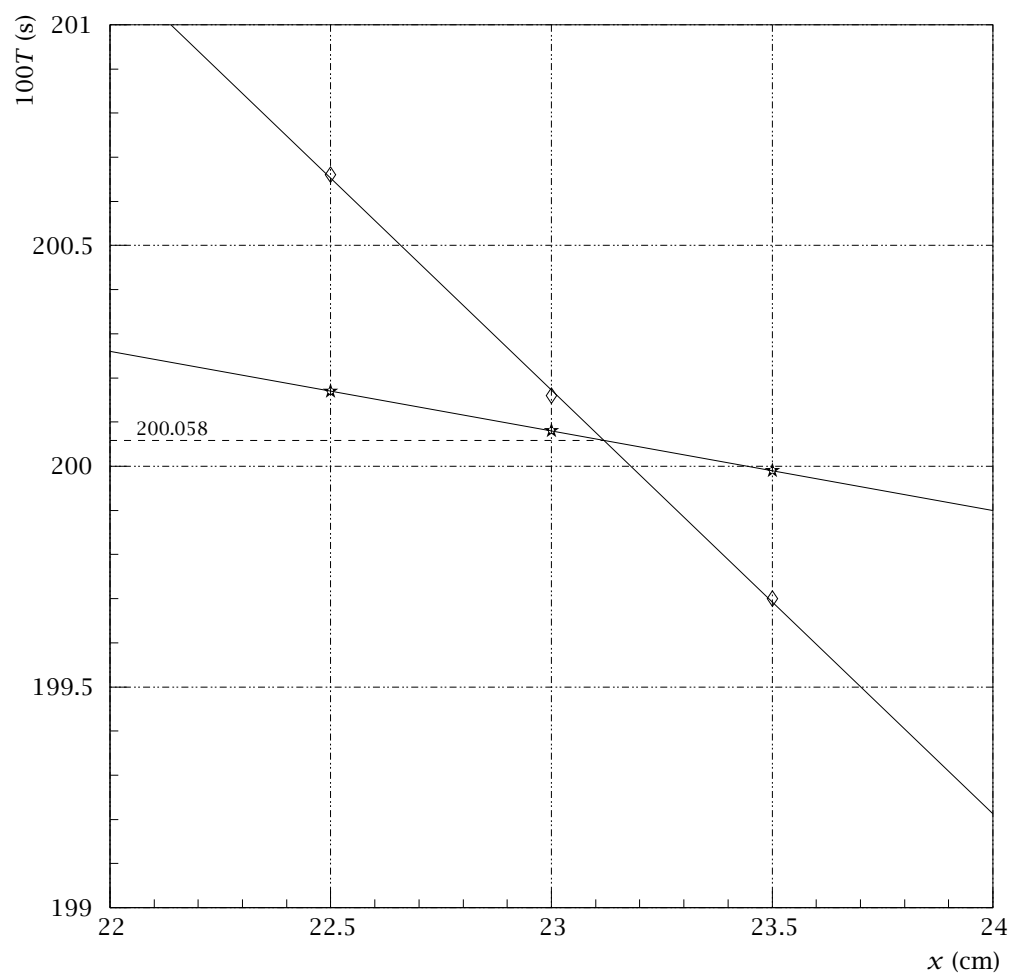


FIGURA 6d - Il pendolo di Kater: misure finali.

Per valutare l'ordine di grandezza della massima elongazione α ammissibile, stimiamo in 0.1 s l'errore casuale su ogni misura di durata; il periodo, che è dell'ordine di 2 s e viene stimato a partire da 100 oscillazioni, avrà quindi un errore casuale¹ dell'ordine di 10^{-3} s: e quindi il limite delle piccole oscillazioni per il nostro esperimento è

$$\begin{aligned}\Delta T &\sim 2 \frac{\alpha^2}{16} = \frac{\alpha^2}{8} \\ \Delta T &< \sigma_T \sim 10^{-3} \text{ s} \\ \alpha &< \sqrt{8 \cdot 10^{-3}} \sim 0.09 \text{ rad}\end{aligned}$$

Altre cause d'errore sono: l'attrito viscoso dell'aria sul pendolo e la spinta di Archimede (sistematici, ma trascurabili); l'arrotondamento delle spigolo dei coltelli, che fa sì che gli assi di oscillazione non siano sull'estremità del coltello stesso (errore sistematico, ancora trascurabile); e l'errore di misura sulla distanza tra i due coltelli, casuale e stimato in $\sigma_l = 0.2$ mm. L'attrito statico sul coltello invece, non alterando la legge del moto ma riducendo soltanto progressivamente l'ampiezza delle oscillazioni, non è causa di errore se esse già in partenza si possono considerare piccole.

Dati e risultati		
l	994.5 ± 0.2	mm
$100T$	200.06 ± 0.07	s
T	2.0006 ± 0.0007	s
g	980.96 ± 0.71	cm/s ²

TABELLA 6.4 – Il pendolo di Kater: i risultati.

Nella tabella 6.4 ci sono i risultati finali; come errore sulla durata di 100 oscillazioni è stato usato uno degli errori quadratici medi ricavati dalle precedenti esperienze sul pendolo descritte nel capitolo 3.3 (il maggiore, valutato in 0.07 s): da esse infatti abbiamo ricavato anche che l'errore di ogni misura di durata non dipende dal numero di oscillazioni considerato.

¹Questo non è del tutto esatto: T_0 viene ricavato utilizzando 6 misure, l'errore di ognuna delle quali è dell'ordine di grandezza di 10^{-3} secondi; ed avrà quindi un errore più piccolo di un fattore circa $\sqrt{6} \sim 2.4$ che non ne altera l'ordine di grandezza.

Capitolo 7

L'estensimetro

Un corpo solido (per esempio un prisma od un cilindro retto) che sia vincolato ad avere una delle sue facce in una posizione prefissata, quando viene sottoposto all'azione di una forza (e della relativa reazione vincolare) si deforma: e l'entità di tale deformazione è approssimativamente proporzionale al modulo della forza applicata, almeno fino a che la forza stessa non supera certi valori caratteristici del corpo (limiti di elasticità e di rottura). Questo comportamento è stato scoperto e studiato da Robert Hooke¹, ed un corpo per cui la deformazione segua una legge esattamente lineare (legge di Hooke) in funzione della forza applicata si dice *elastico*.

In definitiva, se un cilindro retto (per esempio un filo) di materiale perfettamente elastico è sottoposto a due forze di modulo uguale F applicate sulle sue basi, aventi direzione perpendicolare alle basi stesse e verso opposto l'una all'altra, la legge di Hooke impone che si allunghi o si accorci di una quantità

$$\Delta x = x - x_0 = K \cdot F$$

dove x_0 rappresenta la lunghezza del corpo non soggetto ad alcuna sollecitazione; inoltre la forza F va presa con segno positivo quando il suo verso è tale da provocare un allungamento, e negativo altrimenti.

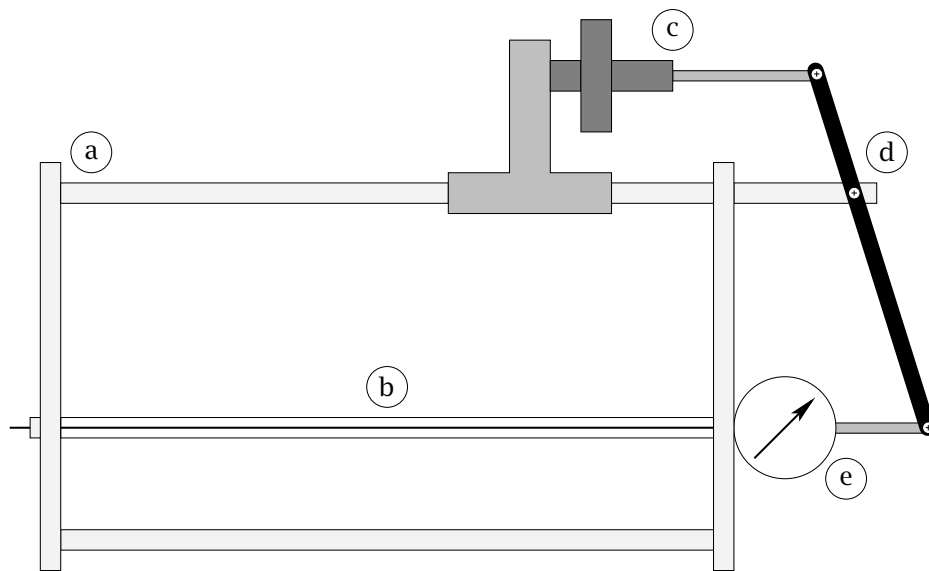
Semplici considerazioni di similitudine geometrica poi permettono di capire che la *costante elastica* K deve dipendere in modo direttamente proporzionale dalla lunghezza del corpo a riposo, ed in modo inversamente proporzionale dalla sua sezione; per cui la legge di Hooke per l'allungamento di un filo elastico è data, in definitiva, dalla formula

$$\Delta x = \frac{1}{E} \frac{x_0}{S} F \quad (7.1)$$

in cui la costante (positiva) E dipende dal materiale di cui il filo è costituito. E si chiama *modulo di Young*, ed ha le dimensioni di una forza per unità di area (per cui si misura in Newton su metro quadro, o in dine su centimetro quadro).

L'estensimetro (rappresentato schematicamente nella figura 7a) è un apparecchio che permette di applicare delle forze note ad una estremità di un filo elastico il cui

¹R. Hooke - De Potentia Restitutiva, 1678.



Legenda:

- | | |
|----|---|
| a: | Intelaiatura rigida |
| b: | Filo elastico (protetto da un cilindro di plexiglass) |
| c: | Dinamometro regolabile |
| d: | Leva moltiplicatrice |
| e: | Comparatore |

FIGURA 7a - L'estensimetro: rappresentazione schematica dello strumento.

altro estremo è vincolato, e di misurarne il conseguente allungamento. Nel contesto del corso viene utilizzato: per la verifica sperimentale della legge di Hooke; per la determinazione del modulo di Young di sostanze differenti; e per la verifica della proporzionalità tra la costante elastica e la lunghezza o la sezione del filo, a parità di altre condizioni.

La lunghezza del filo non sollecitato ed il suo diametro vengono forniti direttamente dal laboratorio, assieme ai relativi errori; gli allungamenti del filo vengono invece letti su di un comparatore (o *minimetro*) che amplifica, con un opportuno gioco di ingranaggi, lo spostamento di un'asta solidale all'estremità del filo stesso, trasmettendolo ad una lancetta rotante. Un giro completo della lancetta corrisponde ad 1 mm di allungamento, ed il minimetro permette di apprezzare il centesimo di millimetro (10 μm); per allungamenti superiori al millimetro si considera un piccolo quadrante interno, la cui lancetta è collegata ad un ingranaggio del primo stadio di amplificazione.

La forza applicata è generata da una molla tarata (*dinamometro*), e si può variare agendo su una ghiera rotante; il valore della forza si legge su una scala, graduata di 100 in 100 grammi: la forza viene applicata al filo attraverso una leva, per cui il suo valore effettivo è quello letto sulla scala *moltiplicato per 4* (in questo modo la forza è espressa in grammi-peso; se la si desidera in dine, bisogna anche moltiplicare per il relativo fattore di conversione: 980 dine/g).

Non si compie nessuna misura in assenza completa di forze applicate, perché bisogna essere ben certi che il filo sia teso; per questo motivo si parte dal valore di 200 g sulla scala, e si prosegue di 100 in 100 g fino a 1200 g (sempre sulla scala)²: quindi quello che si misura, in realtà, è la differenza tra la lunghezza x del corpo soggetto all'azione di una forza F , e la lunghezza x_I che esso aveva assunto quando era invece soggetto alla forza iniziale F_I . È facile vedere, partendo dalla 7.1, che tra queste grandezze intercorre la relazione

$$x - x_I = K (F - F_I) = \frac{x_0}{ES} (F - F_I)$$

Visto che si tratta di eseguire una misura differenziale, si può per convenienza azzerare la scala del minimetro (ruotandone la ghiera) fino a portarne lo zero a coincidere con la lettura iniziale x_I ; in questo modo sul minimetro si leggeranno poi direttamente le differenze $x - x_I$. La sezione del filo si può poi calcolare, noto il diametro, attraverso la

$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

ed il diametro D viene (per ogni estensimetro) fornito dal laboratorio, assieme al relativo errore.

Una volta raggiunto il valore massimo della forza, si torna indietro diminuendola ancora di 100 in 100g fino a tornare al valore iniziale di 200g; ed, eseguite tutte queste operazioni, si riporta in grafico il valore misurato dell'allungamento $x - x_I$ in funzione della forza applicata $F - F_I$ (corretta per la presenza della leva!), e con il metodo dell'interpolazione lineare (usando tutti i punti misurati, ottenuti sia aumentando che diminuendo la forza applicata senza considerare separatamente queste due fasi) si determina la costante elastica K con il relativo errore.

Anche se si sa che la retta *dovrebbe* passare per l'origine degli assi coordinati, conviene usare la formula generale e controllare poi che il valore calcolato dell'intercetta

²Alcuni estensimetri possono raggiungere soltanto i 1100 g.

sia compatibile con 0 entro gli errori stimati. Se non lo è, presumibilmente il gioco interno degli ingranaggi del minimetro ha introdotto un errore sistematico nella fase dell'azzeramento iniziale; errore che tuttavia non ha alcuna importanza per gli scopi della nostra esperienza.

Altre cause d'errore sono: l'osservatore (errori casuali nella lettura del minimetro e nella regolazione della molla); la possibile imperfetta taratura della molla, o della leva; attriti tra le varie parti meccaniche dell'estensimetro; errori casuali nelle misure della lunghezza a riposo e della sezione del filo compiuti dal laboratorio. Il modulo di Young si ricava dalla

$$E = \frac{x_0}{SK} = \frac{4x_0}{\pi D^2 K}$$

e la formula per il calcolo degli errori (prodotti di potenze) è la

$$\frac{\sigma_E}{E} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x_0}}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_K}{K}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2}$$

Avendo a disposizione dati ottenuti da estensimetri che montano fili che differiscano *solo* per la sezione (o la lunghezza) del filo, si può verificare la dipendenza della costante elastica da tali parametri: per questo basta riportare in grafico K in funzione di x_0 o di $1/D^2$ e controllare la linearità dei punti sul piano cartesiano. Alternativamente, a parità di materiale e sezione ci si aspetta che (K essendo direttamente proporzionale a x_0) il rapporto

$$R = \frac{K}{x_0} \quad (7.2)$$

abbia un valore *costante*; basta quindi controllare che i valori di R per questi estensimetri siano compatibili tra loro entro gli errori di misura, dati dalla

$$\sigma_R = R \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{K}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x_0}}{x_0}\right)^2}$$

A parità di materiale e lunghezza, invece, la proporzionalità inversa di K alla sezione (e quindi al quadrato del diametro D) si verifica controllando la compatibilità dei valori dei prodotti,

$$P = KD^2 \quad (7.3)$$

i cui errori si possono stimare in

$$\sigma_P = P \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{K}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2}$$

Le dimensioni di K sono quelle di una lunghezza divisa per una forza; K nel sistema MKS si misura in metri su Newton, R in N^{-1} e P in $m^3 N^{-1}$.

Sono a disposizione degli studenti 19 estensimetri, 16 dei quali montano fili di acciaio; due altri hanno dei fili di tungsteno (che è la sostanza con il più alto valore del modulo di Young), e l'ultimo ha un filo di ottone: i valori teorici del modulo di Young sono riportati in tabella 7.1. Dei 16 con filo in acciaio, 8 hanno fili della stessa lunghezza (95cm) e differente sezione (il loro diametro varia da 0.229mm a 0.432mm); gli altri hanno tutti fili dello stesso diametro (0.279 mm) e lunghezza che varia tra 30 e 95 cm.

Nella figura 7b sono riprodotti 4 dei 19 grafici che rappresentano l'allungamento del filo in funzione della differenza tra la forza applicata e quella iniziale; sono poi

Modulo di Young (teorico)	
Acciaio:	$E = 20 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$
Ottone:	$E = 9.31 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$
Tungsteno:	$E = 38 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$

TABELLA 7.1 - Gli estensimetri: i valori di riferimento per il modulo di Young.

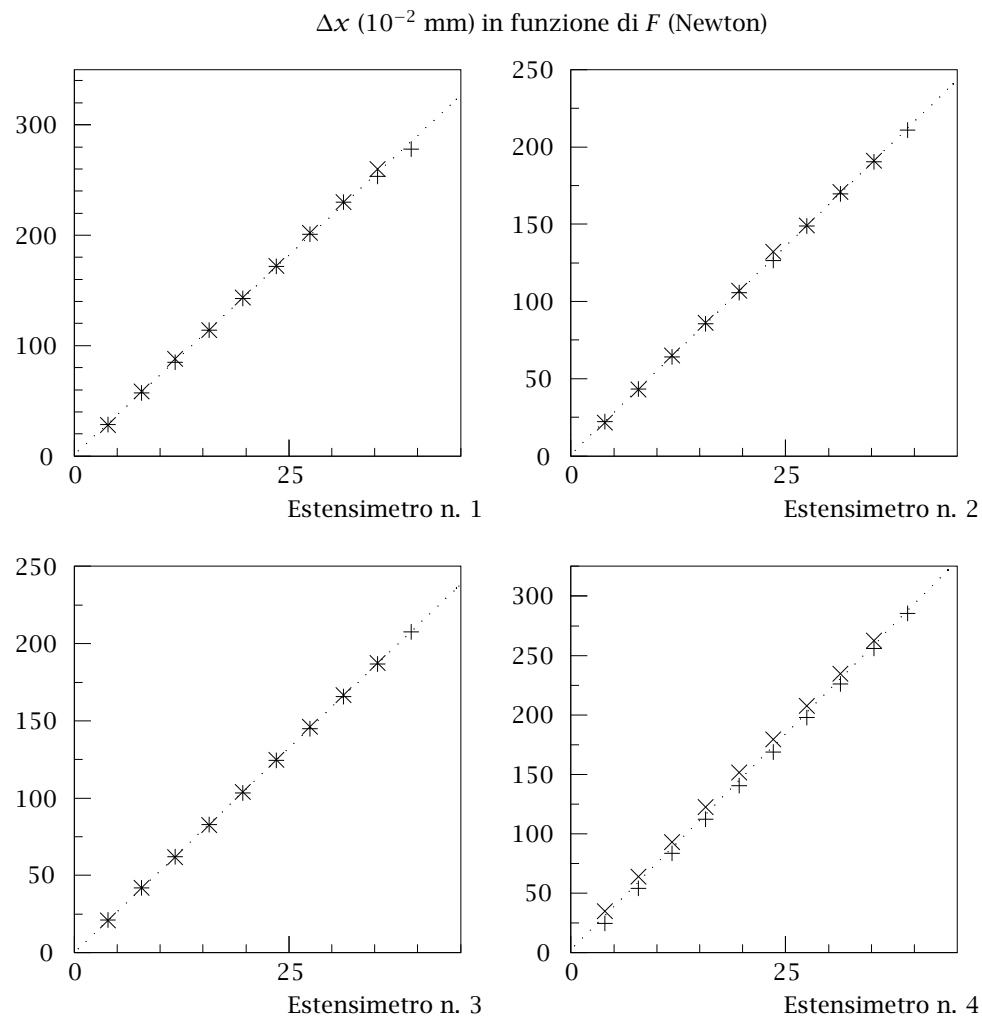


FIGURA 7b - Gli estensimetri: alcuni dei grafici degli allungamenti in funzione della forza applicata.

state effettuate le interpolazioni lineari per ricavare la costante elastica con il relativo errore, e da essi si sono ricavati il modulo di Young E , per gli estensimetri con il filo di acciaio, il prodotto P od il rapporto R definiti nelle equazioni 7.3 e 7.2.

Per non appesantire eccessivamente il testo, non abbiamo incluso né le tabelle dei dati né quelle contenenti i risultati dell'interpolazione lineare; ci limitiamo a notare che nella grande maggioranza dei casi le intercette sono compatibili con lo zero teorico. Altra cosa da notare è che le deformazioni misurate allungando ed accorciando il filo sono in genere le stesse all'infuori di un paio di casi (uno dei quali, relativo all'estensimetro numero 4, è riportato nella figura 7b; le due situazioni corrispondono a simboli differenti sul grafico): questo dovrebbe essere dovuto agli attriti, e comunque la retta interpolante tutti i dati sperimentali ha ancora intercetta compatibile con zero.

Modulo di Young		
Materiale	E (10^{10} N/m ²)	$\frac{ E - E^* }{\sigma_E}$
Acciaio	20.51 ± 0.11	4.64
Tungsteno	37.9 ± 1.5	0.07
Ottone	9.62 ± 0.19	1.58

TABELLA 7.2 – Gli estensimetri: i valori misurati del modulo di Young.

Nella tabella 7.2 ci sono i risultati per i moduli di Young (quando più di un estensimetro monta fili della stessa sostanza, abbiamo usato la media pesata) assieme ai fattori di compatibilità calcolati rispetto ai valori noti: il valore relativo all'acciaio (che ha comprensibilmente un errore molto piccolo, dell'ordine dello 0.5%, visto che è stato ricavato da ben 17 misure) è completamente incompatibile con il valore teorico; ma questo deve essere considerato semplicemente un numero “di riferimento”, visto che l'acciaio è una lega e che differenti qualità di acciaio hanno differenti proprietà elastiche. Nella figura 7c sono riportati i moduli di Young degli estensimetri con filo d'acciaio (che risultano ben compatibili tra loro); è stata messa in evidenza, nel grafico, la media pesata complessiva.

Nella figura 7d le costanti elastiche degli stessi estensimetri sono state separate in due gruppi, contenenti rispettivamente fili con la stessa sezione o fili con la stessa lunghezza: i grafici mostrano K in funzione di $1/S$ a parità di materiale e lunghezza a riposo, e K in funzione di x_0 a parità di materiale e sezione. La linearità delle relazioni reciproche risulta evidente; si nota tuttavia che, mentre nel primo grafico la retta interpolante sembra anche passare per l'origine, nel secondo invece la sua intercetta parrebbe positiva. L'impressione non è però confermata dal calcolo effettivo dei coefficienti delle rette interpolanti e dei relativi errori: le intercette valgono rispettivamente -0.03 ± 0.11 e 0.12 ± 0.12 , e sono quindi entrambe ben compatibili con lo zero.

Nella figura 7e, invece, si confrontano i prodotti $P = KS$ ed i rapporti $R = K/x_0$ prima definiti nelle equazioni 7.3 e 7.2 rispettivamente. Mentre i primi appaiono ben compatibili tra loro, per i secondi sembra chiaro che gli errori sono stati sottostimati; questo fatto, ed una intercetta positiva nel secondo dei grafici di figura 7d, potrebbero

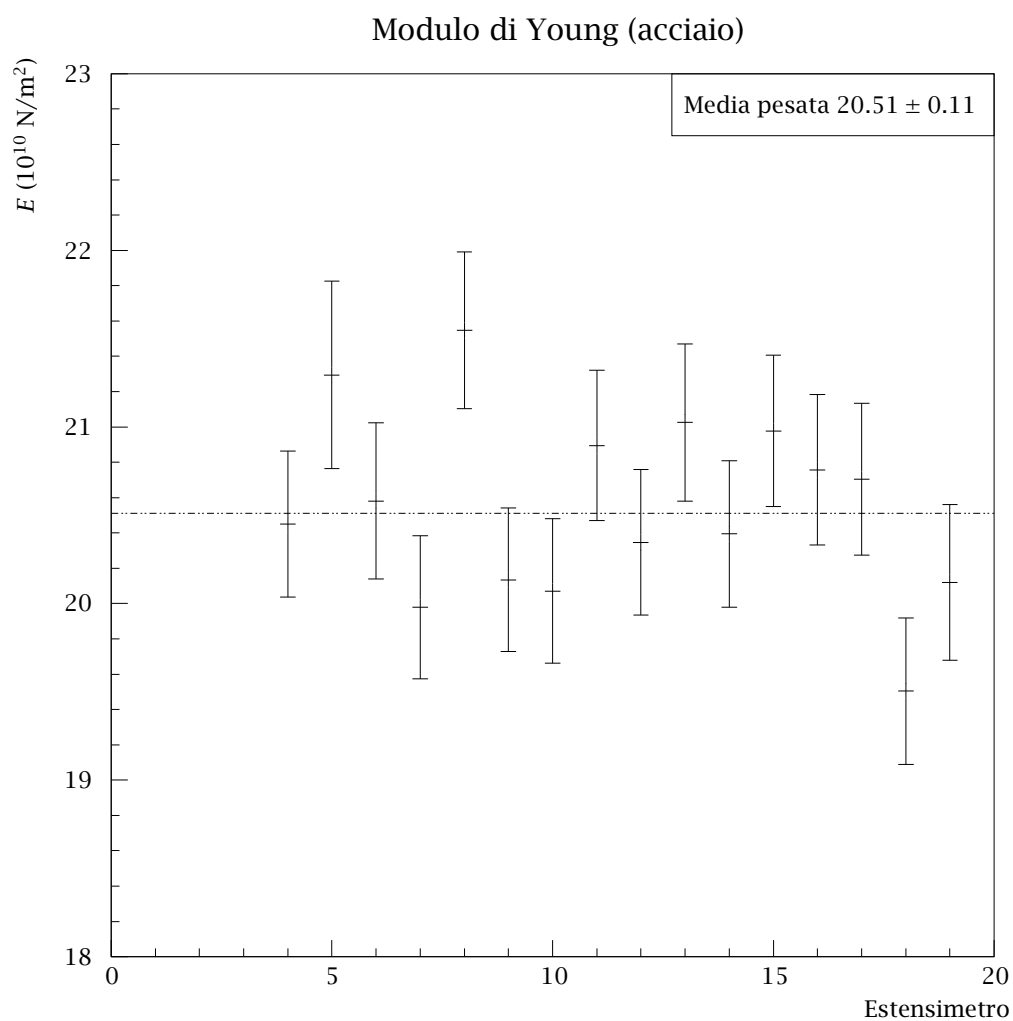


FIGURA 7c - Il modulo di Young per tutti gli estensimetri dotati di filo di acciaio.

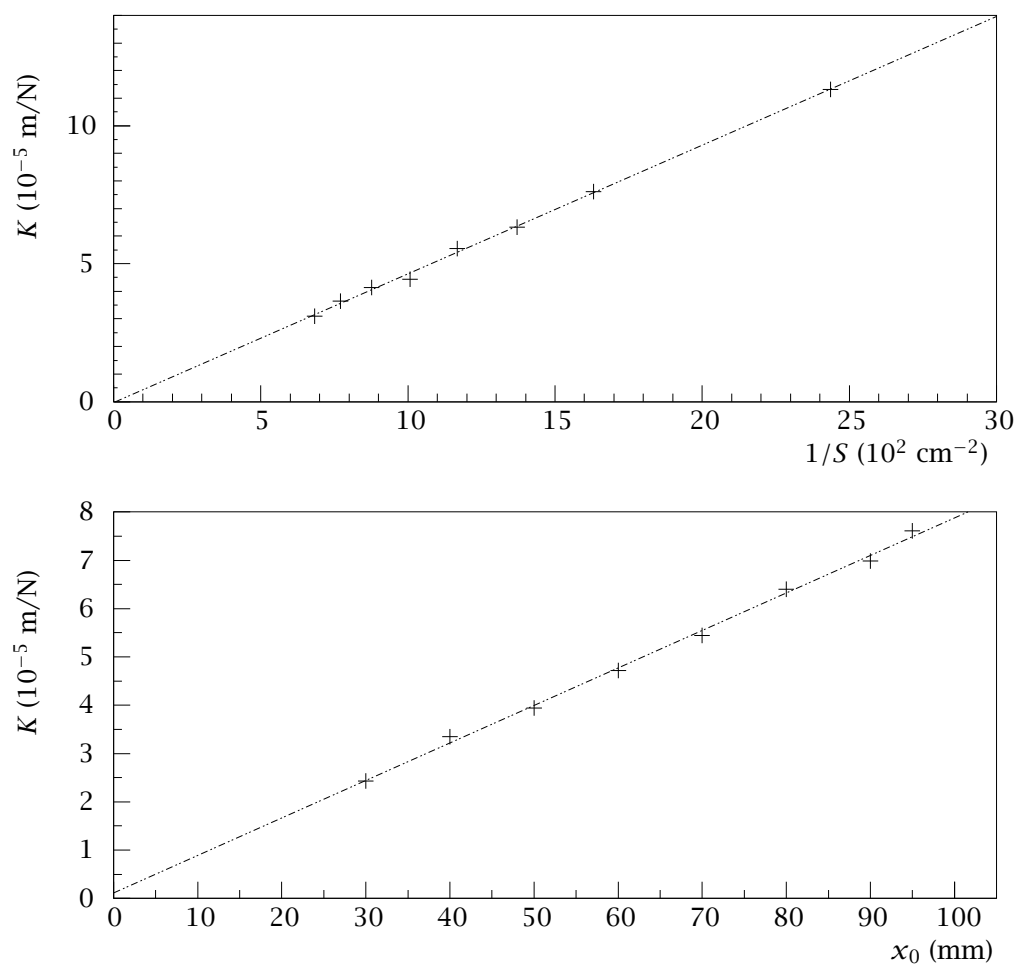


FIGURA 7d - Nella figura superiore: la costante elastica K in funzione dell'inverso della sezione del filo, a parità di materiale e lunghezza; in quella inferiore: K in funzione della lunghezza del filo, a parità di materiale e sezione.

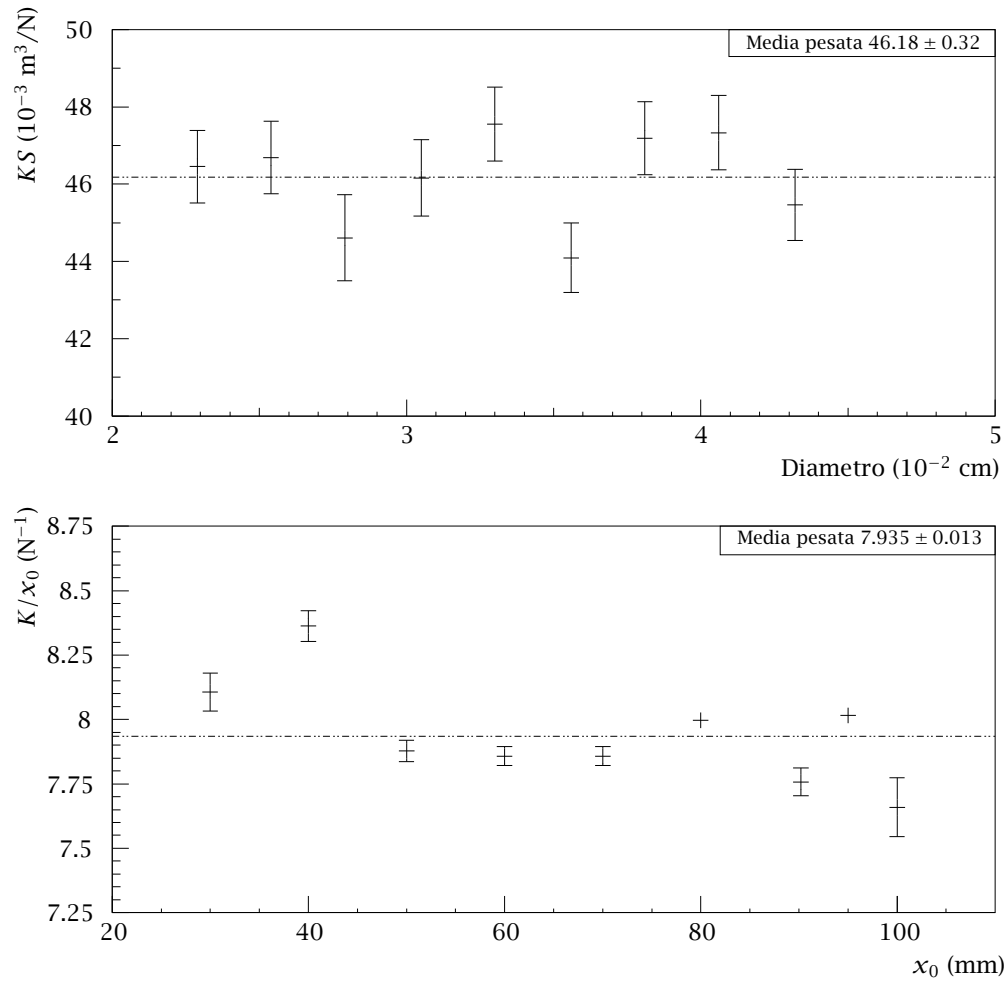


FIGURA 7e - Nella figura superiore: il prodotto P (definito nella 7.3) in funzione del diametro del filo, a parità di materiale e lunghezza; in quella inferiore: il rapporto R (definito nella 7.2) in funzione della lunghezza del filo, a parità di materiale e sezione.

essere legati ad un piccolo allungamento del filo, quando è sollecitato, anche nel tratto che rimane all'interno dei morsetti che ne serrano le estremità.

Come nota finale, osserviamo che, nel calcolo degli errori a posteriori per le interpolazioni lineari sui grafici degli allungamenti del filo in funzione della forza applicata, in parecchi estensimetri l'errore sulle ordinate (appunto gli allungamenti) è dell'ordine dei millesimi di millimetro; ha senso quindi, nella misura, spingersi fino alla stima ad occhio del decimo di divisione sul comparatore.

Capitolo 8

Il viscosimetro a caduta

8.1 La teoria

Si lascia cadere, sotto l'azione della forza peso, un corpo *sferico* in un mezzo fluido; applicando a questo fenomeno il secondo principio della dinamica

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

(le forze agenti sono il peso, la spinta di Archimede e l'attrito viscoso) ne ricaviamo

$$\frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_0) g - 6\pi\eta r v = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \frac{dv}{dt}$$

in cui abbiamo indicato: con ρ e ρ_0 le densità del corpo e del fluido rispettivamente; con η la viscosità del fluido; ed infine con r il raggio del corpo. Abbiamo inoltre assunto che il regime di moto sia laminare, e che si possa quindi esprimere la forza di attrito viscoso F_A mediante la *legge di Stokes*

$$F_A = 6\pi\eta r v \quad (8.1)$$

Semplificando e separando dv/dt , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} r^2 (\rho - \rho_0) g - 3\eta v &= \frac{2}{3} r^2 \rho \frac{dv}{dt} \\ \frac{dv}{dt} &= g \frac{\rho - \rho_0}{\rho} - \frac{9\eta}{2\rho r^2} v = -\frac{9\eta}{2\rho r^2} \left[v - \frac{2\rho r^2}{9\eta} g \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right] \end{aligned}$$

ed infine

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau} (v - v_L)$$

se si definiscono, per brevità,

$$\tau = \frac{2\rho r^2}{9\eta} \quad \text{e} \quad v_L = \frac{2r^2 g}{9\eta} (\rho - \rho_0) \quad (8.2)$$

Integrando, si ricava dapprima

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v - v_L} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

(in cui v_0 è la velocità iniziale, al tempo $t = 0$); poi

$$\ln \frac{v - v_L}{v_0 - v_L} = -\frac{t}{\tau}$$

ed infine

$$v = v_L + (v_0 - v_L) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8.3)$$

In questa formula v_L (che *non dipende da* v_0) rappresenta la *velocità limite*; è chiaro infatti che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v = v_L$$

nel caso particolare, poi, che risulti $v_0 = 0$, la formula (8.3) diventa

$$v = v_L \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

È lecito assumere la validità della (8.1) nella nostra situazione sperimentale? Questo dipende dal valore del *numero di Reynolds* \mathcal{R} , una costante *adimensionale* definita come

$$\mathcal{R} = \frac{2\rho_0 r}{\eta} v$$

se \mathcal{R} risulta molto inferiore a 2000 il moto si può ritenere sia laminare. In ogni caso, comunque,

$$\mathcal{R} < \mathcal{R}_L = \frac{2\rho_0 r}{\eta} v_L = \frac{2\rho_0 r}{\eta} \frac{2r^2 g}{9\eta} (\rho - \rho_0) = \frac{4}{9} \frac{r^3 g}{\eta^2} \rho_0 (\rho - \rho_0)$$

Nel nostro caso il fluido usato è sapone liquido, di densità $\rho_0 \approx 1.032 \text{ gr/cm}^3$ e viscosità (fortemente dipendente dalla temperatura) attorno ai 20 poise¹; le sferette sono di acciaio ($\rho = 7.87 \text{ gr/cm}^3$) e hanno raggi variabili tra i valori $r_{\min} \approx 0.08 \text{ cm}$ ed $r_{\max} \approx 0.36 \text{ cm}$. Nel caso più sfavorevole, che corrisponde a $r = r_{\max}$, si ottiene $\mathcal{R}_L \approx 1$; ed il moto si può quindi *sicuramente* considerare laminare.

Ammettendo di partire dalla quiete ($v_0 = 0$), la costante di tempo τ dell'esponenziale rappresenta il tempo necessario perché il corpo raggiunga la frazione $1 - 1/e \approx 63\%$ della velocità limite; dopo un tempo $t = n\tau$ la velocità vale

$$v = v(n\tau) = v_L (1 - e^{-n})$$

¹La viscosità, dimensionalmente, equivale ad una forza moltiplicata per una lunghezza e divisa per un'area ed una velocità; si misura in Ns/m^2 nel sistema MKS, o, più comunemente, si usa l'unità CGS, detta *poise*, che equivale a $1 \text{ dina} \cdot \text{s} / \text{cm}^2 = 10^{-1} \text{ Ns} / \text{m}^2$.

e dunque

$$\left| \frac{v - v_L}{v_L} \right| = e^{-n}$$

per cui la velocità limite si può pensare praticamente raggiunta per $t \gtrsim t_L = 3\tau$. È anche da sottolineare come assumere $v_0 = 0$ sia conservativo: se la pallina entrasse nel liquido con velocità iniziale $v_0 > 0$, la velocità limite verrebbe praticamente raggiunta in un tempo inferiore a t_L ; nella figura 8a è riportato il grafico di $v = v(t)$ sia per $v_0 = 0$ che per $v_0 = v_L/3$.

Quanto vale lo spazio percorso in funzione del tempo, $s = s(t)$? Se si assume $s(0) = v(0) = 0$, vale la

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t v(t) dt = v_L \int_0^t (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) dt = v_L \left[t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^t \\ s(t) &= v_L \left(t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau \right) \end{aligned}$$

e, in particolare, dopo un tempo $t = n\tau$,

$$s(n\tau) = (n - 1 + e^{-n}) v_L \tau$$

Risulta

$$v_L \tau = \frac{2r^2 g}{9\eta} (\rho - \rho_0) \cdot \frac{2\rho r^2}{9\eta} = \frac{4}{81} \frac{r^4 g}{\eta^2} \rho (\rho - \rho_0)$$

e, ricordando l'espressione di \mathcal{R}_L ,

$$v_L \tau = \frac{1}{9} \frac{\rho}{\rho_0} r \mathcal{R}_L$$

La velocità limite si può pensare raggiunta *dopo uno spazio percorso*

$$s_L = s(t_L) = (2 + e^{-3}) v_L \tau = \frac{2 + e^{-3}}{9} \frac{\rho}{\rho_0} r \mathcal{R}_L$$

nella figura 8a abbiamo riportato il grafico di $s = s(t)$ assieme all'asintoto corrispondente a $t \rightarrow \infty$. Nel caso più sfavorevole ($\mathcal{R}_L = 1$ e $r = 0.36$ cm), la costante di tempo e la velocità limite valgono rispettivamente $\tau \approx 0.011$ s e $v_L \approx 9.64$ cm/s; e quest'ultima si può pensare in pratica raggiunta dopo uno spazio percorso $s_L \approx 0.22$ cm.

8.2 L'esperienza

Si lasciano cadere sfere di acciaio (aventi differenti diametri) in un recipiente cilindrico contenente il liquido, cercando di mantenere la traiettoria quanto più possibile vicina al suo asse verticale. Alcune sfere hanno i diametri espressi in frazioni di pollice ($1'' = 2.54$ cm), e che variano assumendo tutti i valori interi compresi tra un minimo di 2 ed un massimo di 9 trentaduesimi di pollice; altre hanno i diametri espressi nelle consuete unità metriche, e che valgono 1.5 mm e 2 mm.

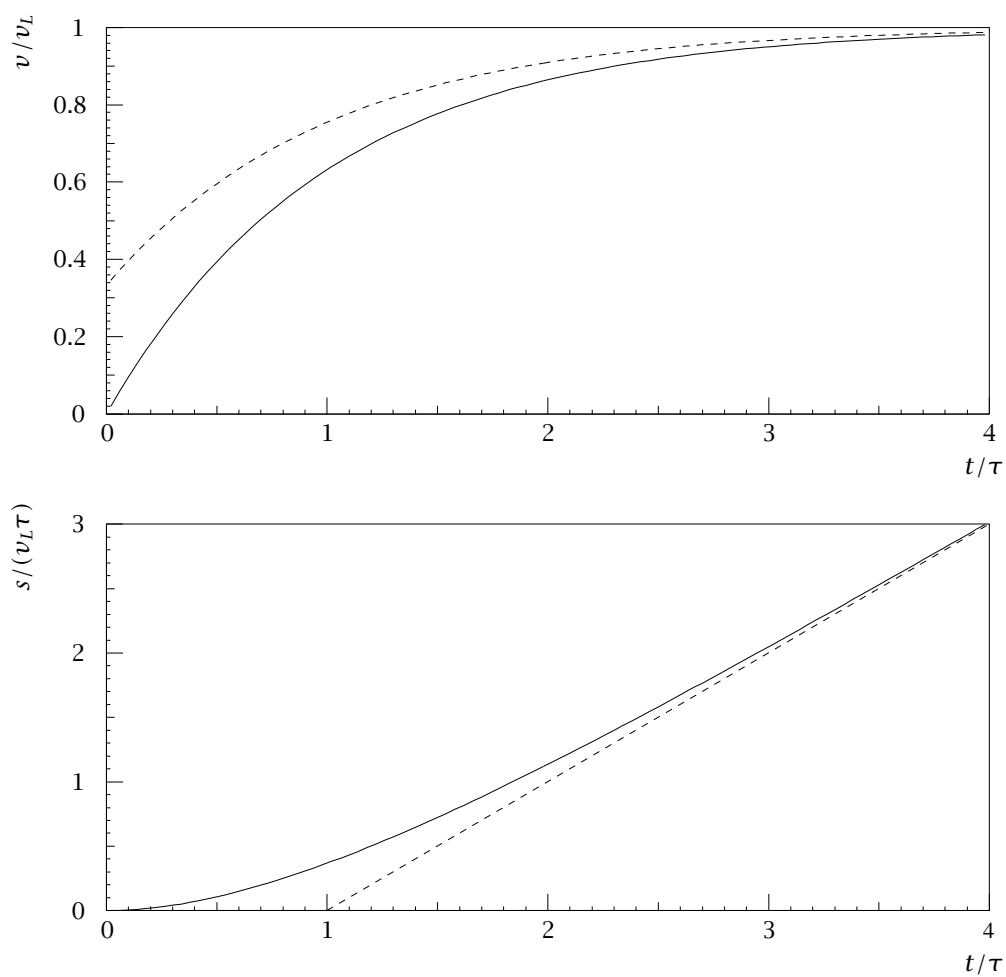


FIGURA 8a - Nella figura superiore, la velocità in funzione del tempo per $v_0 = 0$ (linea continua) e $v_0 = v_L/3$ (linea punteggiata); in quella inferiore, lo spazio percorso in funzione del tempo e l'asintoto $s(t) = v_L(t - \tau)$.

Per ognuna delle sfere si misurano i tempi di caduta, usando a tale scopo i riferimenti incisi sulla faccia esterna del recipiente: questi coprono un tratto di lunghezza complessiva 50cm a intervalli di 5 cm. È opportuno truardare verso uno sfondo chiaro, e manovrare il cronometro in corrispondenza del passaggio (alla quota osservata) dell'estremità *inferiore* delle sferette.

Per le quattro sfere dal diametro più piccolo ($D = 1.5 \text{ mm}$, $D = 2''/32$, $D = 2 \text{ mm}$ e $D = 3''/32$) è possibile registrare i tempi parziali ogni 5 cm; per le due successive ($D = 4''/32$ e $D = 5''/32$) ogni 10 cm; e per tutte le altre si prende nota solamente del tempo necessario a percorrere l'intero tratto di 50 cm. Il maggior numero di dati compensa in qualche modo le maggiori fluttuazioni dei tempi che si hanno per le sfere più piccole; gli errori di misura si mantengono così dello stesso ordine di grandezza.

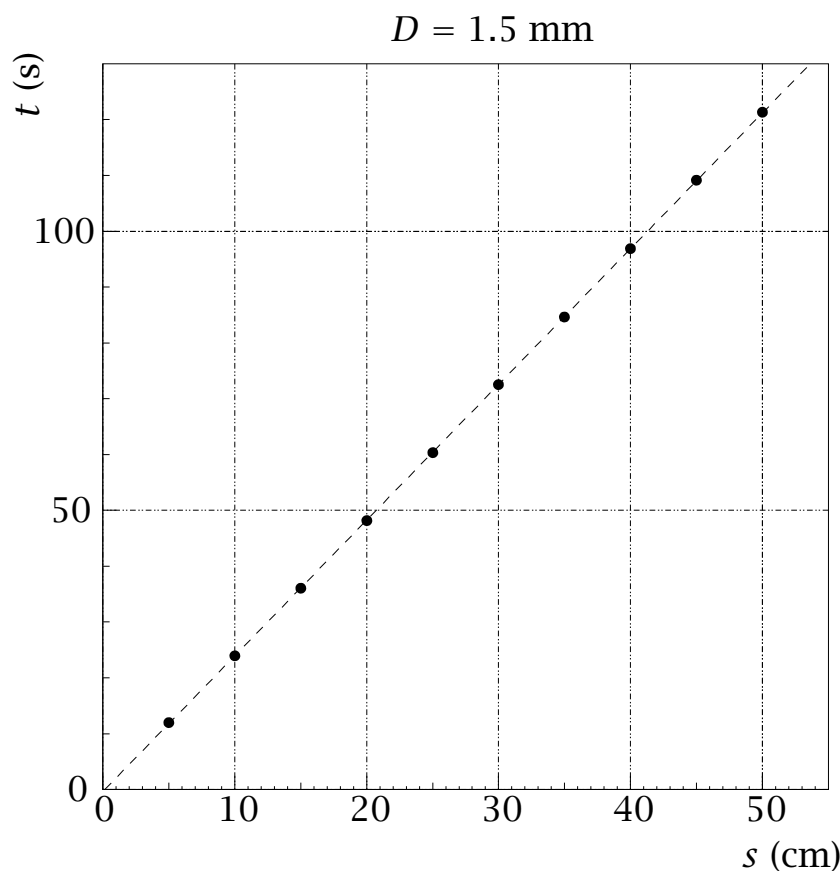


FIGURA 8b - Il tempo impiegato in funzione dello spazio percorso per le sfere dal diametro minore (1.5 mm).

Per ogni diametro si lasciano cadere 5 sfere, e si usano per ogni distanza le medie aritmetiche dei 5 tempi misurati. Nella figura 8b si è riportato in grafico il tempo impiegato in funzione della distanza percorsa dalle sfere aventi il diametro più piccolo (1.5 mm); poi, nella figura 8c, ci sono gli analoghi grafici per le quattro sfere aventi diametro 2, 3, 4 e 5 trentaduesimi di pollice. Si può controllare osservando l'ottima linearità dei dati come la velocità si mantenga sempre apprezzabilmente costante

(anche se in tutti i grafici il segno dei residui si distribuisce sempre in tre sequenze, che fanno sospettare una dipendenza espressa da una curva avente concavità verso l'alto).

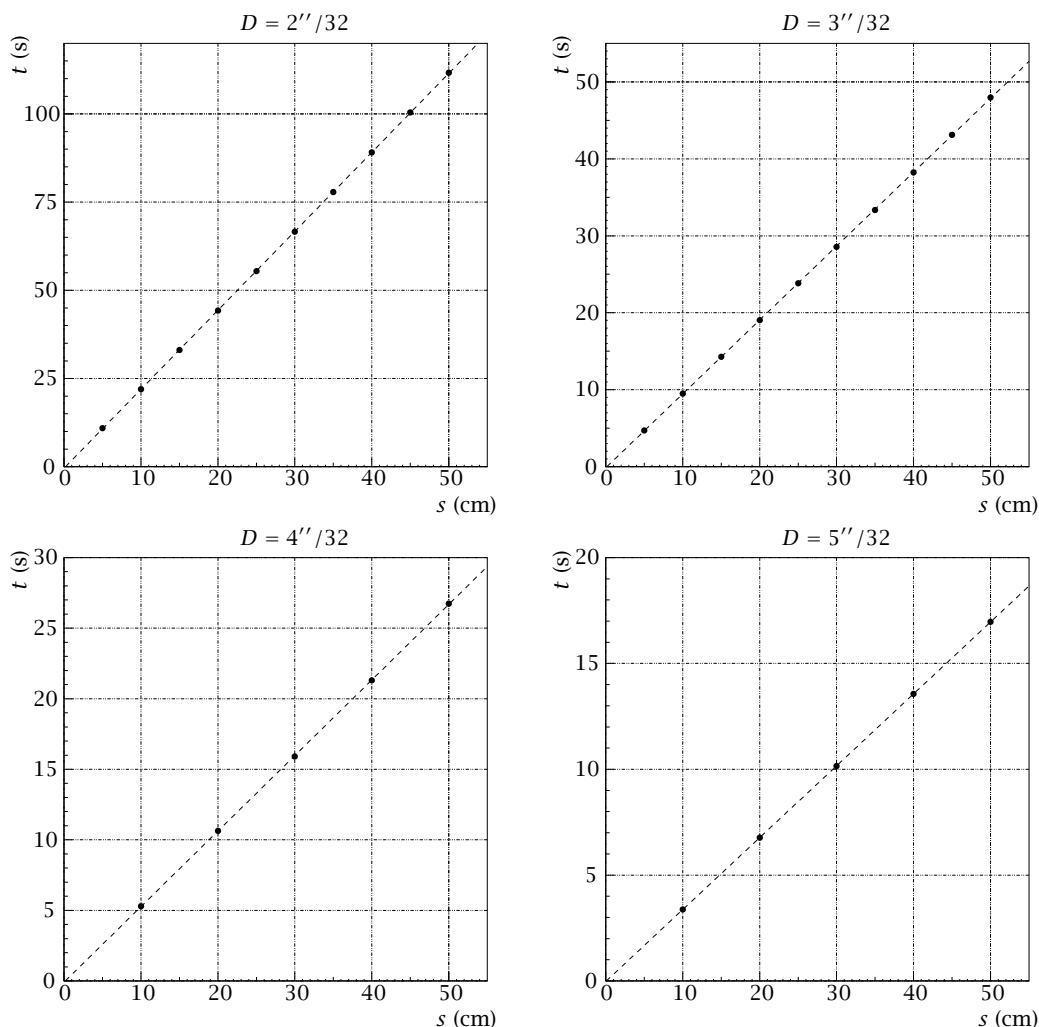


FIGURA 8c – Grafici tempo-spazio relativi a quattro diametri delle sfere per i quali si dispone di più determinazioni.

Nella figura 8d è invece riportato in grafico l'inverso della velocità limite (che è stato calcolato attraverso la pendenza della retta interpolante per le prime sei sfere; dividendo invece l'unico tempo misurato e la distanza per le altre) in funzione dell'inverso dei quadrati dei diametri delle sfere (espressi in centimetri). I valori numerici sono invece riassunti nella tabella 8.1.

Si può vedere come la legge di Stokes si possa ritenere verificata, per la parte che dà la dipendenza della forza di attrito dal raggio della sfera, almeno nei limiti della nostra accuratezza sperimentale. Comunque in questa esperienza sono presenti anche svariate cause di errore sistematico presenti, più esattamente:

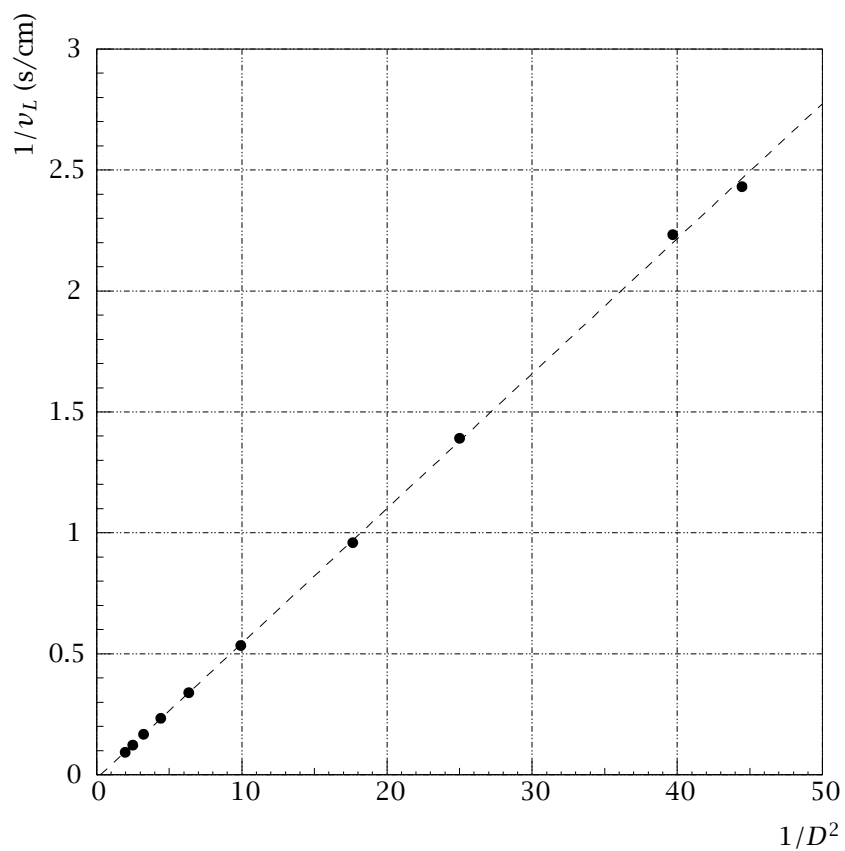


FIGURA 8d - L'inverso della velocità limite in funzione dell'inverso del quadrato dei diametri.

D (1''/32)	D (cm)	D^{-2} (cm ⁻²)	v_L^{-1} (s/cm)
	0.15	44.4444	2.4316
2	0.1588	39.6801	2.2329
	0.2	25.0000	1.3903
3	0.2381	17.6356	0.9595
4	0.3175	9.9200	0.5347
5	0.3969	6.3488	0.3394
6	0.4763	4.4089	0.2330
7	0.5556	3.2392	0.1667
8	0.6350	2.4800	0.1228
9	0.7144	1.9595	0.9324

TABELLA 8.1 - I valori sperimentali: il diametro della sfera D (espresso in trentaduesimi di pollice ed in centimetri); $1/D^2$ (in cm⁻²); e l'inverso della velocità limite (in s/cm).

1. Le sfere trascinano all'interno del liquido delle bolle d'aria, che si staccano quasi subito dalle più piccole ma rimangono a lungo nella scia delle più grandi; per queste ultime la forza d'attrito risulta quindi sensibilmente maggiore di quanto previsto dalla (8.1).
2. Nella caduta le sfere possono incontrare delle bolle lasciate da quelle che le hanno precedute; è quindi opportuno eseguire le misure per valori crescenti dei diametri.
3. La legge di Stokes è valida per il moto attraverso un mezzo infinitamente esteso; se la parete del recipiente è ad una distanza dalla sfera confrontabile con il suo diametro, la forza di attrito è, ancora, maggiore di quanto previsto dalla (8.1).
4. Il liquido si può essere stratificato, separandosi per densità crescenti con la profondità; in queste condizioni sia la spinta di Archimede che la viscosità non sono costanti.

L'equazione della retta interpolante i dati della figura 8d è del tipo $y = A + Bx$, dove intercetta e pendenza valgono

$$A = -0.0147 \pm 0.0080 \quad \text{e} \quad B = 0.05577 \pm 0.00037 \quad (8.4)$$

(si nota immediatamente come il termine noto A sia compatibile con lo zero, da cui dista $\lambda = 1.84$ errori quadratici medi).

Se si volesse determinare sperimentalmente la viscosità del fluido, il valore B della pendenza della retta interpolante i dati della figura 8d non è sufficiente (anche la densità ρ_0 del liquido è ignota); a questo si può ovviare o usando un secondo insieme di sfere aventi densità differente, o misurando direttamente ρ_0 . Si è seguita quest'ultima strada, usando la bilancia di Mohr-Westphal (vedi in proposito il successivo capitolo 8.2.1) e trovando $\rho_0 = 1.032 \pm 0.001 \text{ gr/cm}^3$; a $\rho = 7.87 \text{ gr/cm}^3$ si può invece attribuire un errore di 0.005 gr/cm^3 .

Dalla seconda delle (8.2) si ricava facilmente, sostituendo dapprima $r = D/2$ ed indicando poi sempre con B il rapporto sperimentale D^2/ν_L :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2r^2 g}{9\nu_L} (\rho - \rho_0) \\ &= \frac{D^2 g}{18\nu_L} (\rho - \rho_0) \\ &= \frac{Bg}{18} (\rho - \rho_0) \end{aligned}$$

per l'errore, invece,

$$\begin{aligned} \sigma_\eta &= \eta \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\rho-\rho_0}}{\rho - \rho_0}\right)^2} \\ &= \eta \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2 + \frac{\sigma_\rho^2 + \sigma_{\rho_0}^2}{(\rho - \rho_0)^2}} \end{aligned}$$

e da queste si ricava infine

$$\eta = 20.78 \pm 0.14 \text{ poise}$$

8.2.1 La bilancia di Mohr-Westphal

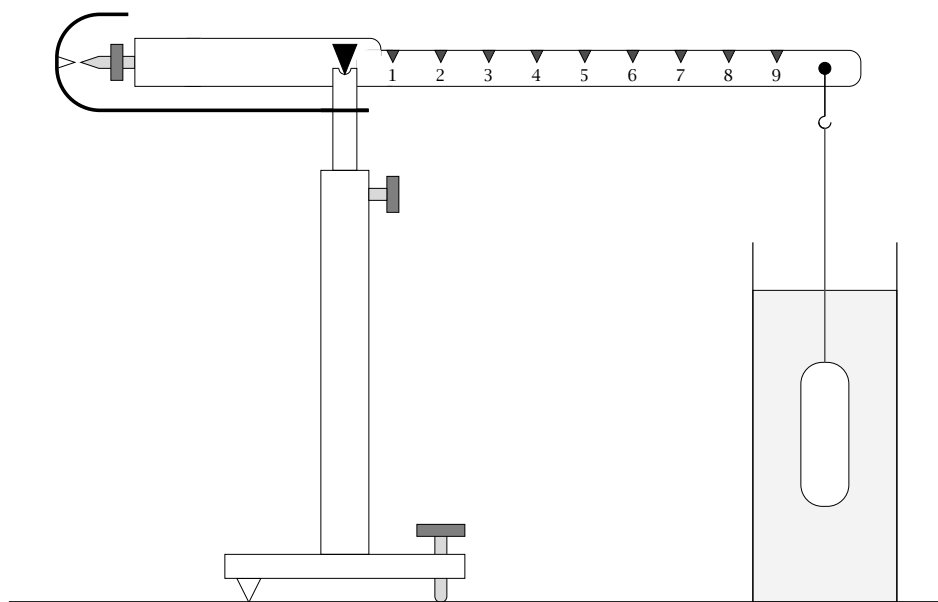


FIGURA 8e - Rappresentazione schematica della bilancia di Mohr-Westphal.

Nella figura 8e è rappresentata schematicamente la *bilancia di Mohr-Westphal*, uno strumento usato in laboratorio per misurare la densità dei liquidi; le parti che la compongono sono fabbricate in modo che essa sia in equilibrio in aria, ed una piccola massa collegata al braccio mobile (*giogo*) può appunto essere usata per allinearla esattamente con un riferimento (solidale con la parte fissa della bilancia).

Sul lato superiore del giogo sono praticate delle tacche, che dividono in dieci parti uguali la distanza tra il fulcro e l'estremità del giogo stesso; estremità cui è collegato un cilindro (*immersore*) che deve essere introdotto nel liquido per la misura, e che contiene al proprio interno un termometro.

La bilancia è poi corredata da quattro *cavalieri*: due grandi (tra loro uguali); inoltre uno medio ed uno piccolo aventi masse, rispettivamente, un decimo ed un centesimo di quella dei grandi. Il cavaliere grande ha una massa tale da equilibrare esattamente la spinta di Archimede esercitata sull'immersore quando quest'ultimo viene introdotto in acqua distillata² a 4°C; in tali condizioni, appoggiando il cavaliere sul gancio cui è appeso l'immersore, la bilancia deve tornare in equilibrio.

Se invece la densità del liquido in cui si trova l'immersore fosse, ad esempio, di 0.8 g/cm³, l'equilibrio verrebbe raggiunto con il cavaliere grande sull'ottava divisione del giogo: insomma, la posizione di questo cavaliere all'equilibrio dà *la prima cifra dopo la virgola* della densità (o corrisponde all'unità se il cavaliere si trova sopra l'immersore); e gli altri due cavalieri possono essere analogamente usati per trovare la seconda e la terza cifra decimale della densità.

È da notare che né il cavaliere medio né quello piccolo devono essere messi in

²In altre parole, essendo 1 g/cm³ la densità del liquido, la massa del cavaliere (in grammi) è numericamente uguale al volume dell'immersore (in centimetri cubi).

corrispondenza dell'immersore; questo equivarrebbe a togliere quel cavaliere e ad avanzare di una posizione quello immediatamente superiore per dimensioni.

T (°C)	ρ (g / cm ³)	T (°C)	ρ (g / cm ³)	T (°C)	ρ (g / cm ³)
1	0.9999	11	0.9996	21	0.9980
2	1.0000	12	0.9995	22	0.9978
3	1.0000	13	0.9994	23	0.9976
4	1.0000	14	0.9993	24	0.9973
5	1.0000	15	0.9991	25	0.9971
6	1.0000	16	0.9990	26	0.9968
7	0.9999	17	0.9988	27	0.9965
8	0.9999	18	0.9986	28	0.9963
9	0.9998	19	0.9984	29	0.9960
10	0.9997	20	0.9982	30	0.9957

TABELLA 8.2 - La densità dell'acqua a varie temperature (con quattro cifre decimali significative).

La prima operazione da compiere consiste nell'equilibrare la bilancia in aria; *solo per misure di precisione*, si può a questo punto introdurre l'immersore in acqua distillata e controllare la taratura della bilancia misurandone la densità, che va confrontata con la tabella 8.2 (la temperatura si legge sul termometro dell'immersore)³.

Si introduce infine l'immersore nel liquido in esame, si ritrova l'equilibrio e si prende nota della densità guardando le posizioni dei cavalieri; come errore di misura si assume la sensibilità dello strumento, $\sigma = 0.001 \text{ g/cm}^3$.

³Se la tabella indica per l'acqua una densità ρ^* ma la bilancia ne misura una *differente* ρ' , per prima cosa se ne ricontra l'equilibrio in aria; se la differenza persiste, può essere attribuita ad una errata associazione tra cavalieri ed immersore: e l'errore sistematico verrà corretto moltiplicando tutte le densità misurate per un fattore ρ^*/ρ' .

Capitolo 9

Le esperienze di calorimetria

Col calorimetro delle mescolanze (o di Regnault), che verrà di seguito descritto, nel corso di Esperimentazioni vengono fatte due misure di calorimetria: la determinazione del calore specifico di un corpo solido e quella del calore di fusione del ghiaccio. Preliminarmente, però, occupiamoci dello strumento che verrà usato in entrambe queste esperienze per misurare le masse: la bilancia.

9.1 La bilancia

La bilancia (si veda in proposito la schematizzazione di figura 9a) è costituita da una parte rigida detta *giogo*, di massa m_G , libera di ruotare attorno ad un asse fisso passante per O (*fulcro*); sia G il baricentro del giogo, ad una distanza l_G da O .

Alle estremità dei due *bracci* del giogo, di lunghezza l_1 e l_2 (supporremo poi che in prima approssimazione risulti $l_1 \approx l_2 = l$), agiscono le forze peso dovute sia ai piatti che alle eventuali masse su essi poste; una differenza tra tali forze, applicate in A_1 e A_2 , tende a far ruotare la bilancia: e la rotazione si arresta quando il momento dovuto a $m_G g$ equilibra quello dovuto alla differenza di carico tra i piatti. Per costruzione, la bilancia permette rotazioni del giogo di angoli α limitati a valori molto piccoli; la condizione di equilibrio è che risulti

$$m_1 g l_1 \cos \alpha + m_G g l_G \sin \alpha = m_2 g l_2 \cos \alpha$$

Semplificando, raccogliendo e ricordando che α è piccolo, otteniamo

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{m_2 l_2 - m_1 l_1}{m_G l_G} \approx \frac{l}{m_G l_G} \Delta m = \sigma \Delta m$$

In sostanza l'angolo α di cui ruota la bilancia all'equilibrio è proporzionale alla differenza di carico $\Delta m = m_2 - m_1$; la costante di proporzionalità σ prende il nome di *sensibilità* della bilancia: ed abbiamo ora dimostrato che essa dipende dalla lunghezza dei bracci, dalla distanza tra baricentro e fulcro del giogo, e dalla massa del giogo stesso.

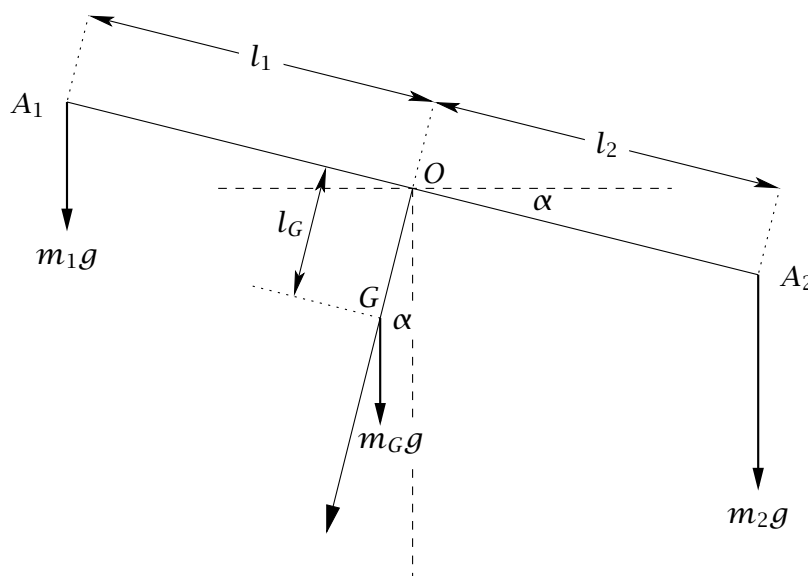


FIGURA 9a - Rappresentazione schematica della bilancia.

9.1.1 Determinazione dinamica del centro delle oscillazioni

La posizione α in cui tende a portarsi il giogo viene normalmente determinata *dinamicamente*, cioè senza attendere che il giogo si fermi, per evitare che l'attrito presente sul fulcro (in genere abbastanza elevato) possa influenzare la posizione finale di equilibrio. A tale scopo si prende nota della massima elongazione raggiunta dall'indice nei due sensi per un numero *dispari* di oscillazioni successive (normalmente 3 o 5); si fa separatamente la media delle rilevazioni di destra e di sinistra, e poi la media di questi due risultati: quest'ultima ci dà la posizione centrale attorno alla quale oscilla l'indice.

Questo metodo è fondato sulla presunzione che lo smorzamento delle oscillazioni del giogo segua una legge di natura *lineare*, cosa effettivamente (almeno in prima approssimazione) verificata.

9.1.2 Determinazione della sensibilità

Per ogni pesata viene per prima cosa determinata (dinamicamente) la posizione α_0 attorno alla quale oscilla il giogo a piatti scarichi (posizione *di zero* della bilancia); in genere essa è distinta dallo zero della scala dell'indice.

Posti dei corpi di massa incognita m_1 ed m_2 sui piatti, se la bilancia ritorna su questa stessa posizione di zero si può affermare che m_1 e m_2 sono uguali¹; normalmente però si riesce a portare la bilancia solo in una posizione vicina a quella di zero, ma non esattamente coincidente con essa. La differenza di massa presente in tali

¹E questo indipendentemente dall'uguaglianza della massa dei piatti, ma purché i due bracci si possano considerare *di uguale lunghezza*.

condizioni tra i due piatti può essere stimata, se si conosce la sensibilità σ , a partire dalla deviazione $\alpha - \alpha_0$ tra la posizione di equilibrio ora raggiunta e quella iniziale di zero; la sensibilità si può misurare direttamente aggiungendo un leggero sovraccarico su uno dei due piatti (normalmente qualche decina di milligrammi) e rilevando il conseguente spostamento dell'indice.

È importante che la sensibilità (che si esprime di norma in divisioni per milligrammo) sia misurata in condizioni *di carico*, perché essa varia (anche se di poco) col variare delle masse presenti sui piatti: il motivo è una differente situazione di flessione dei bracci, che modifica l_G . La conoscenza della sensibilità serve non solo a correggere la pesata, ma anche per la determinazione dell'errore: normalmente le pesate non vengono ripetute, e si assume come loro errore la massa che corrisponde ad una divisione sulla scala della bilancia, cioè *l'inverso della sensibilità*.

9.1.3 La pesata semplice

La pesata semplice consiste nel compiere la seguente serie di operazioni:

1. Si determina (dinamicamente) la posizione di zero, α_0 .
2. Si pone su un piatto la massa da pesare e sull'altro un insieme m di pesi prelevati dalla pesiera, fino a tornare in una posizione α_1 , determinata sempre dinamicamente, vicina a quella di zero.
3. Si pone un sovraccarico δ su uno dei piatti, e si misura la sensibilità: se in queste condizioni la bilancia si porta in una posizione (al solito determinata dinamicamente) α_2 , la sensibilità vale $\sigma = |\alpha_2 - \alpha_1| / \delta$.
4. Si corregge la pesata per la differenza tra posizione di equilibrio e posizione di zero: la correzione è $\delta_m = |\alpha_0 - \alpha_1| / \sigma$, da aggiungere o sottrarre ad m a seconda della situazione.
5. Si attribuisce al risultato un errore σ_m pari all'inverso della sensibilità: $\sigma_m = 1/\sigma$.

9.1.4 La pesata con tara

La pesata semplice è affetta da un errore di tipo *sistematico*: infatti l'uguaglianza delle masse viene dedotta da quella dei momenti delle forze peso, assumendo implicitamente che i due bracci siano di uguale lunghezza. Per eliminare questa causa di errore, conviene effettuare le pesate con il *metodo della tara*; questo consiste nella seguente serie di operazioni:

1. Si determina (dinamicamente) la posizione di zero della bilancia.
2. Si pone su uno dei piatti un oggetto (la *tara*) di massa m_T vicina alla portata della bilancia, e si determina m_T : questo si fa mettendo sull'altro piatto un insieme di pesi tale da ritornare approssimativamente sulla posizione di zero, determinando poi la sensibilità e correggendo, come già spiegato nel paragrafo 9.1.3; sia P il risultato finale.

3. Lasciando la tara dove si trova, si pone sull'altro piatto il corpo di massa m_x incognita con un insieme di pesi tale da ritornare approssimativamente alla posizione di zero, e correggendo per la sensibilità della bilancia (già nota dal punto precedente: il carico infatti non è cambiato); sia P' il risultato.
4. La massa del corpo è data dalla differenza $P - P'$.

Infatti per le condizioni di equilibrio risulta

$$\begin{cases} m_T l_1 = P l_2 & \text{(Punto 2)} \\ m_T l_1 = (m_x + P') l_2 & \text{(Punto 3)} \end{cases}$$

da cui si ricava immediatamente

$$P l_2 = (m_x + P') l_2 \quad \Rightarrow \quad m_x = P - P'$$

indipendentemente dall'uguaglianza delle lunghezze dei bracci. L'errore di m_x è poi dato dall'inverso della sensibilità della bilancia moltiplicato per $\sqrt{2}$, visto che ad ognuna delle determinazioni P e P' è da attribuirsi lo stesso errore $1/\sigma$.

9.2 Il calorimetro delle mescolanze

Il calorimetro di Regnault (o delle mescolanze) è costituito da un ambiente isolato termicamente dall'esterno, e nel quale si fanno avvenire processi termodinamici controllando le variazioni della temperatura interna in relazione alle varie fasi dei processi stessi.

In pratica si tratta di un vaso Dewar all'interno del quale sono contenuti: un vasetto di rame stagnato in cui fare avvenire i processi da studiare; un agitatore (sempre in rame stagnato) che serve a mantenere quanto più possibile uniforme la temperatura all'interno del vaso stesso; ed un termometro che pesca in questo recipiente e che è leggibile dall'esterno. Nel coperchio sono inoltre praticati tre fori: per l'introduzione di oggetti dall'esterno, e per il passaggio sia dell'agitatore che del termometro.

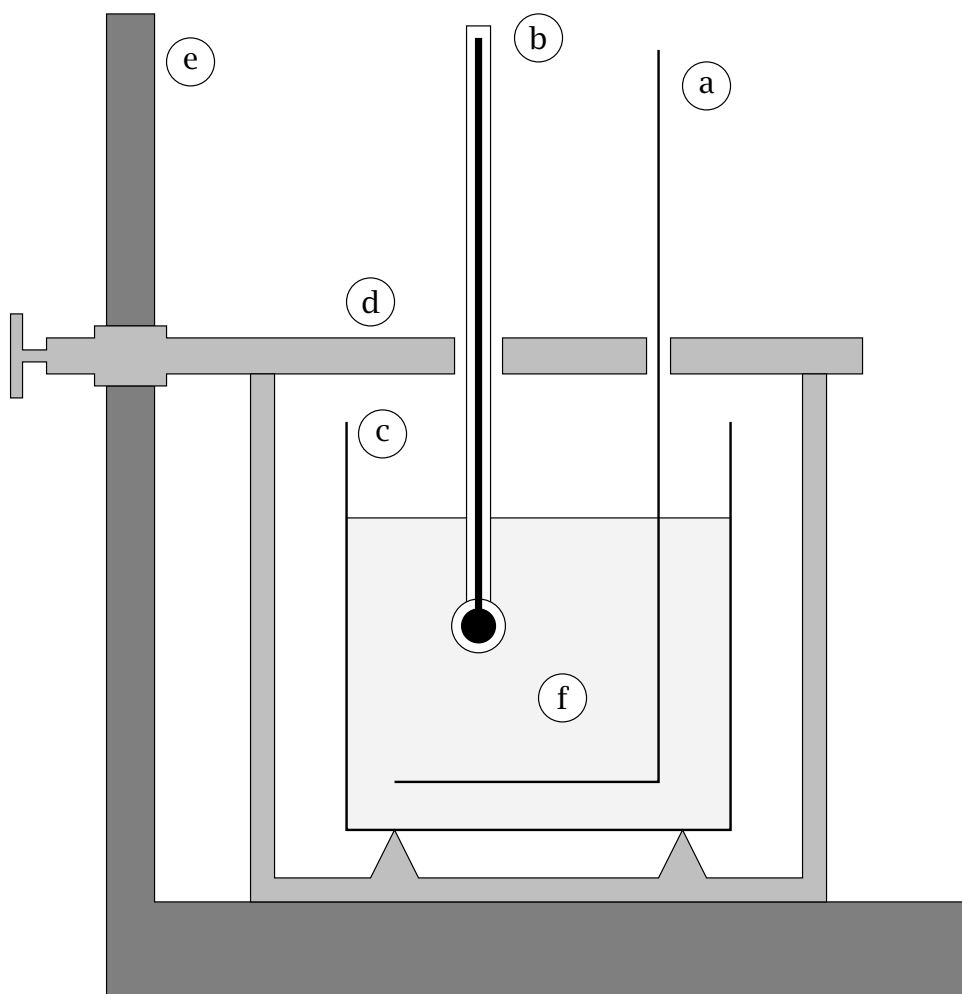
9.2.1 Calore specifico di un corpo solido

Se un corpo scambia una certa quantità di calore Q con l'ambiente, la sua temperatura varia di una quantità ΔT ad essa approssimativamente proporzionale: la costante di proporzionalità K prende il nome di *capacità termica*. Essa è, a sua volta, proporzionale alla massa m del corpo stesso secondo un fattore c che dipende sia dalla sostanza da cui esso è costituito sia dalle modalità della trasformazione, e che prende il nome di *calore specifico*. In formule,

$$Q = K \cdot \Delta T \quad \text{e} \quad Q = mc \cdot \Delta T$$

Per determinare il calore specifico di un corpo solido mediante il calorimetro delle mescolanze, le operazioni da eseguire in sequenza sono:

1. Si prende il campione della sostanza in esame e se ne determina la massa m_x ; lo si introduce poi in un riscaldatore che lo porterà gradualmente ad una temperatura T_1 .



Legenda:

- | | |
|----|------------------------|
| a: | Agitatore |
| b: | Termometro |
| c: | Vasetto calorimetrico |
| d: | Coperchio scorrevole |
| e: | Sostegno del coperchio |
| f: | Acqua |

FIGURA 9b - Il calorimetro delle mescolanze.

2. Si estrae il vasetto calorimetrico con l'agitatore, e se ne determina la massa complessiva m_r .
3. Si riempie il vasetto calorimetrico, sempre contenente l'agitatore, con acqua distillata alla temperatura ambiente T_0 ; e si misura la massa complessiva $m_r + m_a$. Per differenza si ricava poi la massa m_a dell'acqua.
4. Riposto il recipiente nel calorimetro e richiusolo, si prende innanzi tutto nota di T_0 ; vi si introduce poi il campione a temperatura T_1 , che scambierà calore con l'ambiente calorimetrico fino a raggiungere una temperatura finale di equilibrio T .

Il campione, nel processo esaminato, ha ceduto una quantità di calore data da $Q = m_x c_x (T_1 - T)$. Nell'ipotesi che l'ambiente calorimetrico sia perfettamente isolato, esso deve essere stato assorbito: dal vasetto e dall'agitatore in rame; dall'acqua distillata; e dal termometro. Indicando con c_r il calore specifico del rame, con c_a quello dell'acqua e con K la capacità termica del termometro, dovrà pertanto risultare

$$\begin{aligned} m_x c_x (T_1 - T) &= m_r c_r (T - T_0) + m_a c_a (T - T_0) + K (T - T_0) \\ &= C (T - T_0) \end{aligned}$$

La costante $C = m_r c_r + m_a c_a + K$ (che rappresenta la capacità termica totale dell'ambiente calorimetrico) prende il nome di *equivalente in acqua del calorimetro*. Se si vuole ricavare il calore specifico c_x del campione, questo è dato da

$$c_x = \frac{C (T - T_0)}{m_x (T_1 - T)}$$

Alcune costanti sono date dal laboratorio stesso:

$$\begin{array}{lll} c_r & = & 0.093 \quad \text{cal/(gr } ^\circ\text{C)} \\ c_a & = & 1 \quad \text{cal/(gr } ^\circ\text{C)} \\ K & = & 2.2 \pm 0.05 \quad \text{cal/}^\circ\text{C} \end{array}$$

(c_r si suppone privo di errore, o meglio è noto con un errore che si propaga sul risultato in maniera trascurabile rispetto agli errori delle altre grandezze fisiche da cui dipende c_x ; c_a è invece fissato dalla scelta delle unità di misura).

Per il calcolo dell'errore si può usare la formula di propagazione:

$$\sigma_C^2 = c_a^2 \sigma_{m_a}^2 + c_r^2 \sigma_{m_r}^2 + \sigma_K^2$$

e

$$\sigma_{c_x}^2 = \left(\frac{\partial c_x}{\partial C} \right)^2 \sigma_C^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial m_x} \right)^2 \sigma_{m_x}^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial T_0} \right)^2 \sigma_{T_0}^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial T_1} \right)^2 \sigma_{T_1}^2 + \left(\frac{\partial c_x}{\partial T} \right)^2 \sigma_T^2$$

Risultando poi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c_x}{\partial C} = \frac{(T - T_0)}{m_x (T_1 - T)} = \frac{c_x}{C} \\ \frac{\partial c_x}{\partial m_x} = \frac{C (T - T_0)}{(T_1 - T)} \left(-\frac{1}{m_x^2} \right) = -\frac{c_x}{m_x} \\ \frac{\partial c_x}{\partial T_0} = -\frac{C}{m_x (T_1 - T)} = -\frac{c_x}{(T - T_0)} \\ \frac{\partial c_x}{\partial T_1} = -\frac{C (T - T_0)}{m_x (T_1 - T)^2} = -\frac{c_x}{(T_1 - T)} \\ \frac{\partial c_x}{\partial T} = \frac{C m_x (T_1 - T) + C m_x (T - T_0)}{m_x^2 (T_1 - T)^2} = \\ = \frac{C}{m_x (T_1 - T)} + \frac{C (T - T_0)}{m_x (T_1 - T)^2} = \frac{c_x}{(T - T_0)} + \frac{c_x}{(T_1 - T)} \end{array} \right.$$

sostituendo si ha

$$\sigma_{c_x}^2 = c_x^2 \left[\frac{\sigma_C^2}{C^2} + \frac{\sigma_{m_x}^2}{m_x^2} + \frac{\sigma_{T_0}^2}{(T - T_0)^2} + \frac{\sigma_{T_1}^2}{(T_1 - T)^2} + \sigma_T^2 \left(\frac{1}{T - T_0} + \frac{1}{T_1 - T} \right)^2 \right]$$

Il riscaldatore è tarato per una temperatura finale di 100°C, che viene raggiunta per fasi successive di aumenti più o meno rapidi: è controllato internamente da un microprocessore, che mostra continuamente sul display la temperatura della resistenza interna T_R , quella del campione T_C (quest'ultima letta da un sensore che trova alloggiamento nella zona interna del campione stesso); ed infine lo stato operativo (ON/OFF) che corrisponde a resistenza alimentata o non alimentata. Il riscaldatore può restare acceso anche senza contenere il campione; l'unica cautela deve essere quella di *non introdurvi assolutamente acqua*.

In questa esperienza sono presenti due fonti di errore *sistematico*: innanzi tutto il calorimetro non è perfettamente isolato dall'esterno; inoltre la temperatura iniziale T_1 del campione viene letta quando questo è ancora nel riscaldatore, ed all'atto dell'introduzione nel calorimetro si è abbassata di una certa quantità a causa del trasporto in aria.

Il primo errore può essere corretto stimando l'entità delle perdite di calore del calorimetro: si riporta a tale scopo in grafico la temperatura interna in funzione del tempo t dall'istante dell'introduzione del campione. Questa sale rapidamente fino ad un massimo, poi decresce lentamente con andamento approssimativamente lineare; se si fa l'ipotesi che le perdite di calore siano costanti nel tempo, si può correggere l'errore prendendo come valore della temperatura di equilibrio T non quello più elevato letto sul termometro, ma quello ottenuto estrapolando indietro all'istante $t = 0$ la retta delle temperature discendenti. Occorre allora misurare l'andamento della temperatura in funzione del tempo, eseguire una interpolazione lineare sui punti dal massimo in avanti, ed usare come valore di T l'intercetta di questa retta interpolante.

Il secondo errore può essere corretto prendendo come temperatura iniziale del campione T_1 non il valore letto sul termometro del riscaldatore, ma quest'ultimo diminuito di un fattore $\Delta = 1.5 \pm 1.0^\circ\text{C}$ (stimato sulla base di valori di c_x ottenuti in passato).

Gli errori sulle masse sono dati dall'inverso della sensibilità della bilancia durante la pesata; per l'acqua, la cui massa è calcolata per differenza, bisogna usare la formula di propagazione dell'errore. L'errore sulla temperatura T_1 è dato essenzialmente dalla correzione effettuata, e come errori per T e T_0 si può usare la sensibilità dello strumento: insomma, si può assumere che sia $\sigma_{T_1} = 1^\circ\text{C}$ e $\sigma_T = \sigma_{T_0} = 0.1^\circ\text{C}$.

t (s)	T ($^\circ\text{C}$)	t (s)	T ($^\circ\text{C}$)
0	22.60	210	28.40
15	27.20	270	28.38
30	28.20	330	28.31
45	28.50	350	28.29
60	28.50	450	28.23
75	28.50	510	28.20
90	28.50	570	28.18
150	28.45	630	28.10

TABELLA 9.1 - Determinazione del calore specifico di un corpo solido: andamento della temperatura del calorimetro in funzione del tempo.

Nella tabella 9.1 sono riportate le temperature misurate in funzione del tempo; dapprima le si è registrate ogni 15 secondi, fino al raggiungimento del massimo; e poi meno frequentemente, più o meno ogni minuto, fino a che il valore rilevato non si è abbassato di qualche decimo rispetto al massimo, e cercando di stimare ad occhio la frazione di divisione.

m_r	=	56.051 \pm 0.045	gr
m_x	=	81.813 \pm 0.051	gr
m_a	=	111.745 \pm 0.360	gr
T_0	=	22.6 \pm 0.1	$^\circ\text{C}$
T_1	=	98.7 \pm 1.0	$^\circ\text{C}$
T	=	28.55 \pm 0.1	$^\circ\text{C}$
c_x	=	0.124 \pm 0.005	cal/(gr $^\circ\text{C}$)

TABELLA 9.2 - Calore specifico di un corpo solido: valori misurati e risultato finale.

Nell'interpolazione lineare (i primi tre punti del grafico, identificati da un simbolo differente, non sono stati utilizzati) non si è calcolato l'errore a posteriori sui coefficienti, visto che si attribuirà a priori un errore di 0.1°C all'intercetta T ; nella figura 9c ci sono, riportati in grafico, gli stessi punti della tabella 9.1 ed infine, nella tabella 9.2, le altre grandezze misurate ed il risultato: che ci si aspetta essere nell'ordine di 0.11 o $0.12 \text{ cal}/(\text{gr } ^\circ\text{C})$, quindi abbastanza compatibile col nostro valore.

9.2.2 Calore di fusione del ghiaccio

Se un corpo di massa m subisce un cambiamento di fase, perché il processo si compia è necessario lo scambio di una quantità di calore Q proporzionale ad m :

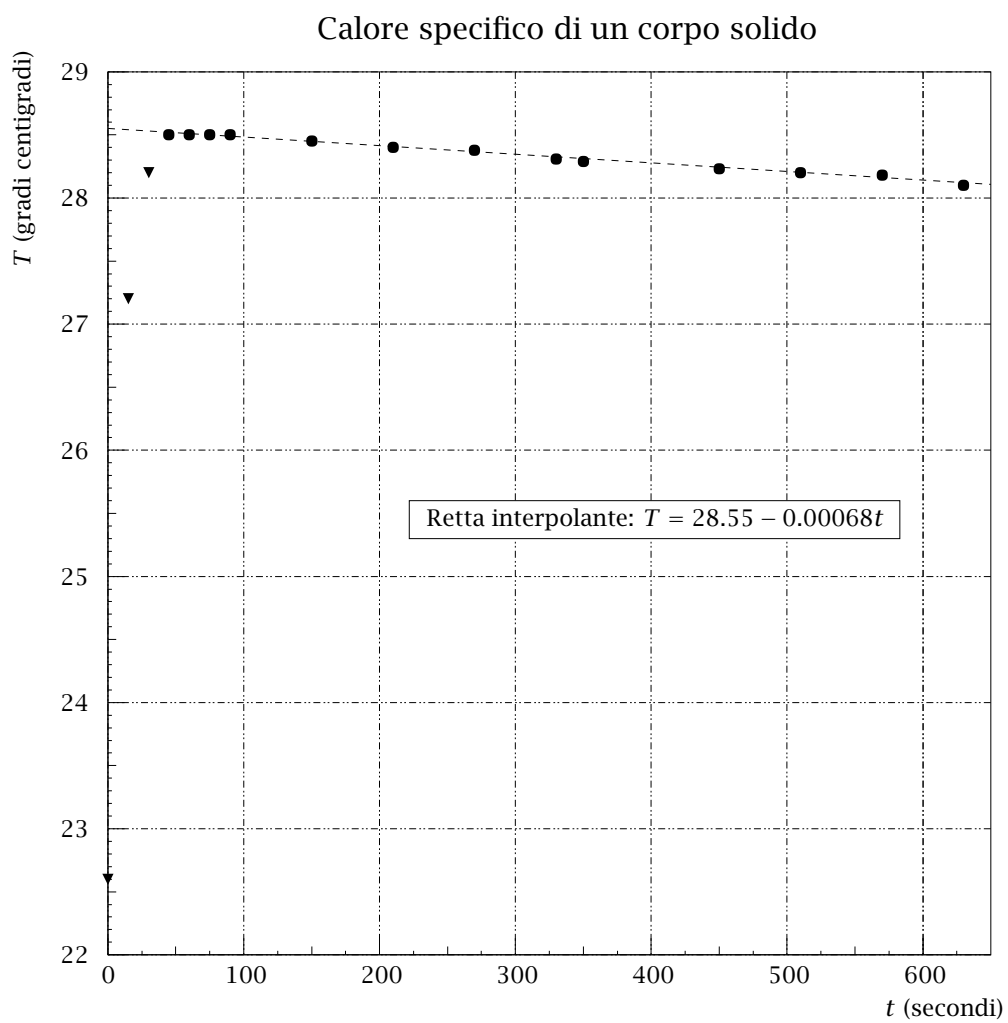


FIGURA 9c - Calore specifico di un corpo solido: andamento della temperatura nel tempo.

$Q = mc$; la costante di proporzionalità c prende il nome di *calore latente* della trasformazione. Per misurare il calore latente di fusione del ghiaccio con il calorimetro delle mescolanze bisogna compiere le seguenti operazioni:

1. Si estrae il vasetto calorimetrico con l'agitatore, e se ne determina la massa complessiva m_r .
2. Si riempie il vasetto calorimetrico, sempre contenente l'agitatore, con acqua distillata a temperatura ambiente T_0 ; e si misura poi la massa complessiva $m_r + m_a$. Per differenza si ricava la massa m_a dell'acqua.
3. Riposto il recipiente nel calorimetro e richiusolo, si prende nota di T_0 ; si introduce una certa quantità di ghiaccio (fondente, quindi alla temperatura esatta di 0°C) che si scioglierà, assorbendo calore dall'ambiente calorimetrico che si porterà ad una temperatura finale di equilibrio T .
4. Si estrae il vasetto calorimetrico e l'agitatore e si misura la massa complessiva $m_r + m_a + m_x$; per differenza si determina la massa del ghiaccio m_x .

Il bilancio termico si scrive

$$m_x c + m_x c_a T = (m_r c_r + m_a c_a + K)(T_0 - T) = C(T_0 - T) \quad (9.1)$$

(C è sempre l'equivalente in acqua del calorimetro), da cui si ricava

$$c = \frac{C(T_0 - T)}{m_x} - T c_a$$

Per il calcolo dell'errore abbiamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c}{\partial C} = \frac{T_0 - T}{m_x} \\ \frac{\partial c}{\partial m_x} = -\frac{C(T_0 - T)}{m_x^2} \\ \frac{\partial c}{\partial T_0} = \frac{C}{m_x} \\ \frac{\partial c}{\partial T} = -\frac{C}{m_x} - 1 = -\frac{C + m_x}{m_x} \end{array} \right.$$

e risulta infine

$$\sigma_c^2 = \frac{(T_0 - T)^2}{m_x^2} \sigma_C^2 + \frac{C^2(T_0 - T)^2}{m_x^4} \sigma_{m_x}^2 + \frac{C^2}{m_x^2} \sigma_{T_0}^2 + \frac{(C + m_x)^2}{m_x^2} \sigma_T^2$$

Per l'equivalente in acqua del calorimetro C , che si ricava con la stessa formula già trovata nel paragrafo 9.2.1, l'errore sarà ancora dato dalla

$$\sigma_C^2 = c_a^2 \sigma_{m_a}^2 + c_r^2 \sigma_{m_r}^2 + \sigma_K^2$$

Gli errori *casuali* sulla misura diretta delle masse sono ancora dati dall'inverso della sensibilità della bilancia; per quelle masse che sono calcolate per differenza, come m_a ed m_x , bisogna usare la formula di propagazione dell'errore. Per quanto riguarda le temperature si può usare come errore la sensibilità dello strumento, ed assumere che sia $\sigma_{T_0} = \sigma_T = 0.1^\circ\text{C}$.

Cause di errori *sistematici* in questa esperienza sono: il non perfetto isolamento termico del calorimetro ed il conseguente scambio di calore con l'esterno; il fatto che si sia introdotto nel calorimetro non solo ghiaccio ma anche una certa quantità di acqua a 0°C depositata sulla sua superficie; il fatto che una piccola quantità d'acqua sia rimasta depositata sul bulbo del termometro quando si è prelevato il vaso calorimetrico per eseguire la pesata finale; ed infine la condensazione di vapore acqueo sulla parete laterale del vaso calorimetrico prima della pesata finale. Per correggere il primo di questi errori è opportuno (così come si è fatto nell'esperienza precedente) determinare il grafico della temperatura in funzione del tempo, interpolare i punti dal minimo in avanti con una retta ed usare l'intercetta di tale retta come valore di T ; il secondo ed il quarto errore non sono né eliminabili né quantificabili neppure approssimativamente, mentre il terzo è trascurabile.

t (s)	T (°C)	t (s)	T (°C)
0	21.50	90	12.40
10	17.50	100	12.40
20	16.50	110	12.40
30	15.50	170	12.50
40	14.50	230	12.55
50	13.70	250	12.60
60	13.00	350	12.65
70	12.70	410	12.75
80	12.50	470	12.80

TABELLA 9.3 - Determinazione del calore di fusione del ghiaccio: andamento della temperatura del calorimetro in funzione del tempo.

Nella tabella 9.3 e nella figura 9d ci sono le temperature lette sul termometro del calorimetro in funzione del tempo; nella tabella 9.4 le altre grandezze misurate ed il risultato finale. Si sa che il calore di fusione del ghiaccio vale 79.7 cal/gr, e la nostra misura è abbastanza compatibile con questo dato; gli errori casuali sono meno importanti in questa esperienza che nella precedente, essendo la precisione del risultato dell'ordine del 2%, soprattutto in conseguenza della maggiore escursione termica realizzata nel calorimetro.

m_r	=	58.632 ± 0.036	gr
m_a	=	126.980 ± 0.037	gr
m_x	=	13.693 ± 0.015	gr
T_0	=	21.5 ± 0.1	°C
T	=	12.30 ± 0.1	°C
c	=	78.2 ± 1.5	cal/gr

TABELLA 9.4 - Calore di fusione del ghiaccio: valori misurati e risultato finale.

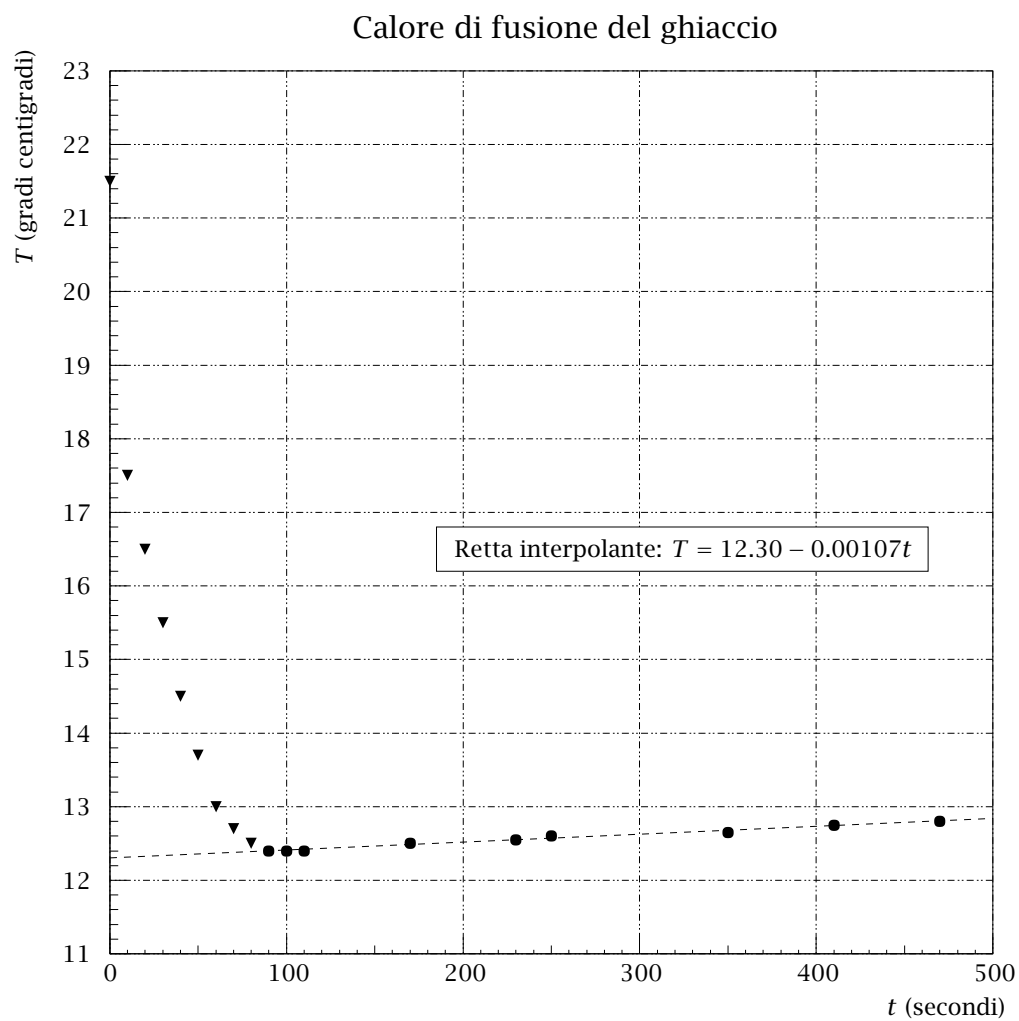


FIGURA 9d - Calore di fusione del ghiaccio: andamento della temperatura nel tempo.

Analisi dell'errore sistematico

Il volume dell'acqua persa sul bulbo del termometro e quello del vapore condensato sul vaso calorimetrico sono entrambi dell'ordine dei millimetri cubi (qualche goccia); quindi le loro masse, dell'ordine dei milligrammi, sono di un ordine di grandezza inferiori a quello degli errori casuali introdotti dall'osservatore nelle pesate.

Invece la quantità di acqua depositata sulla superficie del ghiaccio all'atto dell'introduzione di quest'ultimo nel calorimetro non è affatto trascurabile: facendo l'ipotesi che soltanto una percentuale ϵ della massa introdotta sia effettivamente ghiaccio ($0 < \epsilon \leq 1$; $1 - \epsilon$ è ovviamente la percentuale in massa dell'acqua), l'equazione del bilancio termico (9.1) diventa

$$m_x \epsilon c + m_x c_a T = (m_r c_r + m_a c_a + K)(T_0 - T) = C(T_0 - T)$$

e quella risolutiva per c

$$c = \frac{C(T_0 - T) - m_x c_a T}{m_x \epsilon}$$

Indicando con \bar{c} il valore del calore di fusione del ghiaccio ottenuto *senza* correggere per tener conto di questa causa di errore sistematico, il valore reale c è ad esso legato dalla

$$c = \frac{\bar{c}}{\epsilon}$$

e, quindi, la presenza di tale errore ci fa ottenere un risultato \bar{c} sistematicamente sbagliato *per difetto*: in percentuale, l'errore sistematico vale

$$\frac{c - \bar{c}}{c} = \frac{1 - \epsilon}{\epsilon}$$

Come ordine di grandezza, la massa dell'acqua introdotta può raggiungere facilmente il 10% del totale: quindi $\epsilon \sim 0.9$ e l'errore sistematico è più o meno dell'11%, ovvero attorno alle 9 cal/gr (ben superiore quindi all'errore casuale, che era, come già osservato, del 2% circa).

Capitolo 10

L'equazione di stato dei gas

La relazione

$$pV = nRT \quad (10.1)$$

(*equazione di stato dei gas*) esprime matematicamente il legame tra pressione, volume e temperatura assoluta per n moli di un gas perfetto; R è la *costante di stato*, che nel sistema MKS vale

$$R = 8.3136 \text{ J/(mole} \cdot ^\circ \text{K)} \quad (10.2)$$

Dalla (10.1) si ricavano come casi particolari le note leggi di *Boyle e Mariotte* (per le trasformazioni isoterme) e di *Gay-Lussac* (per le trasformazioni isobare e isocore).

10.1 L'attrezzatura sperimentale

L'attrezzatura sperimentale, visibile nelle figure 10a e 10b, è costituita da un vaso Dewar nel quale è sistemato un recipiente (una siringa monouso in plastica da 20cm^3) il cui volume può essere variato dall'esterno usando una manovella; esso è collegato a tre sensori i quali leggono i valori del volume, della pressione e della temperatura inviando i dati ad un computer: quest'ultimo li presenta in tempo reale sullo schermo usando un apposito programma.

L'interno del Dewar è riempito con un bagno termostatico (inizialmente una miscela di acqua e ghiaccio) ed è corredato da una resistenza (che può essere usata per aumentare la temperatura del bagno) e da un agitatore, entrambi visibili in figura 10b alla destra della siringa; la sbarretta verticale alla sua sinistra è invece il sensore di temperatura (immerso nel bagno). I tubicini collegano la siringa al sensore di pressione, sistemato esternamente; il sensore di volume è un semplice reostato solidale allo stantuffo.

L'equazione (10.1) può essere riscritta esprimendo il volume totale come somma esplicita di quello V del recipiente manipolato e di quello V_0 dei tubi che lo collegano



98

FIGURA 10a - L'apparecchio; sulla sinistra è visibile l'alimentatore della resistenza, e sul retro il circuito stampato con l'elettronica di controllo.



FIGURA 10b - La parte interna, con al suo centro la siringa monouso che costituisce il recipiente controllato.

al sensore di pressione, o *volume morto*¹:

$$p(V + V_0) = nRT \quad (10.3)$$

od anche, per considerare una relazione lineare nel caso particolare di trasformazioni isoterme,

$$V = \frac{nRT}{p} - V_0 = A + B \frac{1}{p}$$

definendo

$$A = -V_0 \quad \text{e} \quad B = nRT = nR(T_c - T_0) \quad (10.4)$$

ed usando la temperatura T_c in gradi centigradi in luogo di quella assoluta T ; $T_0 = -273.15^\circ\text{C}$ è lo *zero assoluto*.

10.2 La procedura sperimentale

Alcune note generali:

- ▶ L'alimentatore sul banco è collegato alla resistenza interna; deve essere acceso all'inizio dell'esperienza controllando la posizione delle manopole che regolano la corrente erogata (devono essere *tutte a fine corsa in senso orario*).
- ▶ Il Dewar che contiene l'apparecchiatura non deve essere aperto, per evitare la fuoriuscita dell'acqua all'interno.
- ▶ Il programma di acquisizione talvolta si blocca; se non si notano segni di attività (il numero dei punti acquisiti non cambia, o la spia che indica riscaldamento in atto non lampeggia) occorre terminarlo chiudendone la finestra e quindi riavviarlo.

10.2.1 Le operazioni preliminari

- Si accende il computer.
- Visto l'acquisizione dati è una operazione lunga, conviene disattivare lo *screen blanker*².
- Si porta il volume al massimo; si apre la valvola che mette in comunicazione l'ambiente interno con l'atmosfera, e la si richiude. Tutte le misure verranno così fatte *in compressione* e, se la siringa non fosse stagna, ne uscirà dell'aria; lavorando *in depressione* entrerebbe invece dell'acqua, che sarebbe poi impossibile eliminare dalla siringa.

¹È da notare come la (10.3) non descriva realisticamente il nostro sistema fisico, perché parte del volume morto è al di fuori della zona controllata termicamente e rimane alla temperatura ambiente; il suo uso comporta quindi l'introduzione di un errore sistematico.

²Nel menu principale si segue *Preferences*, poi *Look & Feel*, infine *Screen Saver*; si disabilita il bottone *Enable Screen Saver* e si esce.

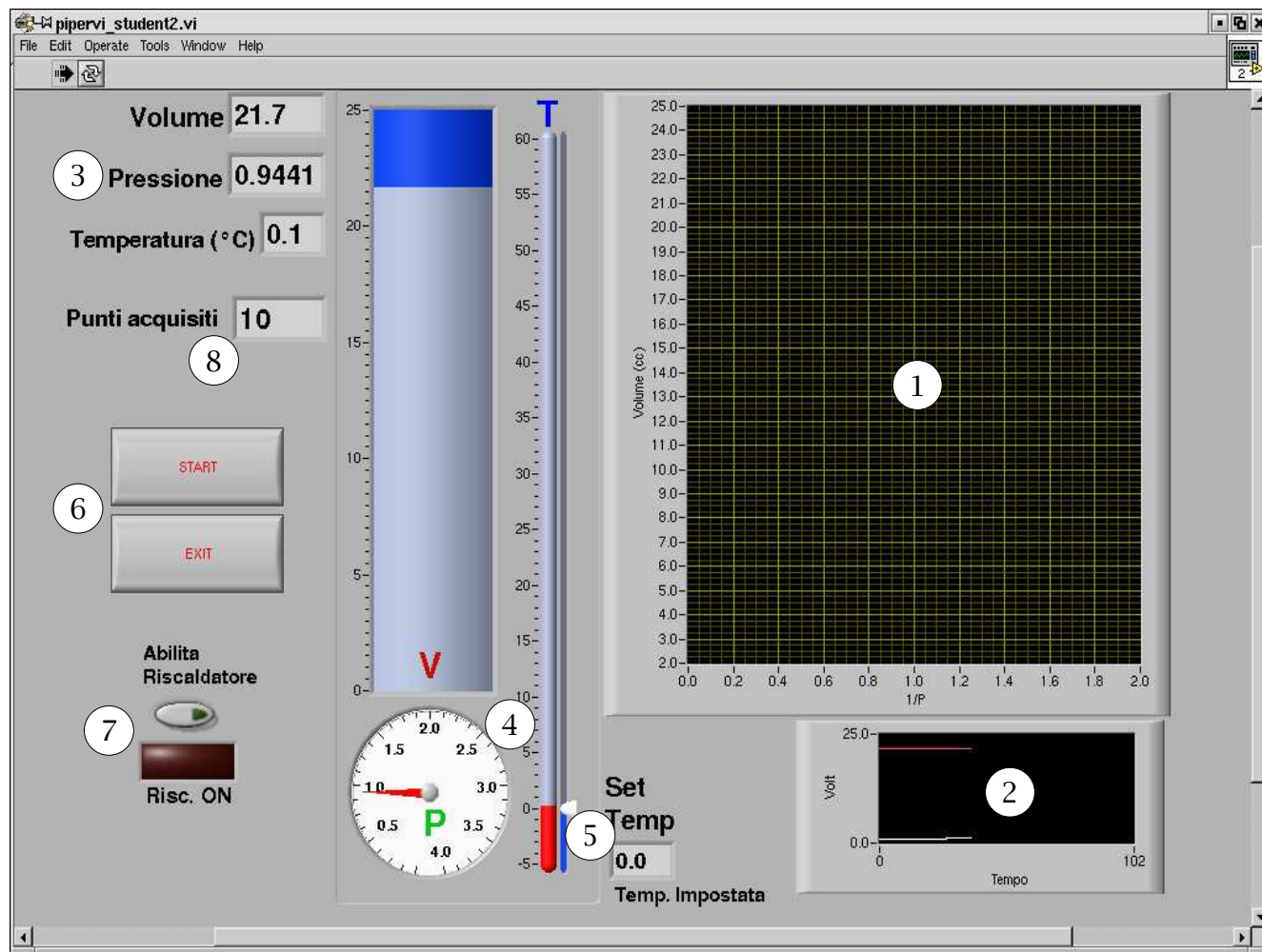


FIGURA 10c - La schermata del programma. LEGENDA: 1, diagramma del volume in funzione dell'inverso della pressione; 2, tensione sui due sensori di pressione e volume; 3, valori numerici di volume (cm^3), pressione (Kg/cm^2) e temperatura ($^{\circ}\text{C}$); 4, indicazione analogica dei valori di volume, pressione e temperatura; 5, cursore per la regolazione della temperatura interna e corrispondente valore numerico; 6, bottoni di avvio ed arresto dell'acquisizione dati; 7, bottone di attivazione della regolazione della temperatura ed indicatore di riscaldamento in atto; 8, numero dei valori di pressione e volume letti in memoria.

- Il Dewar è stato riempito di una miscela di acqua e ghiaccio da almeno un'ora, ed è possibile che lo strato più basso sia ad una temperatura leggermente maggiore di 0°C; è meglio manovrare l'agitatore per una decina di secondi.
- Si avvia il programma di acquisizione cliccando *una volta* sull'icona del desktop di nome PiPerVi; compare la schermata della figura 10c. La temperatura iniziale impostata per il termostato è 0°C; questo valore per ora **non** va cambiato, allo scopo di prendere il primo campione di misure alla più bassa temperatura possibile.
- Per prima cosa si **disabilita** l'attivazione della resistenza di riscaldamento.

10.2.2 L'acquisizione dei dati

1. Si clicca sul bottone di avvio; si agisce *lentamente* sulla manovella che cambia il volume, portandolo fino al minimo valore possibile e riportandolo poi, sempre *lentamente*, al massimo.
2. Si clicca sul bottone di stop, *lasciandolo premuto* per qualche secondo³; alla richiesta del nome di un file ove salvare i dati, se ne deve dare uno *che non corrisponda* ad un file già esistente⁴.
3. Si imposta una differente temperatura e, raggiuntala, si ripete la presa dati; questa va effettuata **6** volte, alle temperature di **15, 25, 35, 45 e 55°C** (oltre che alla temperatura iniziale).

10.2.3 Il cambiamento della temperatura

- a) si agisce sul cursore che seleziona la temperatura voluta;
- b) si abilita l'attivazione della resistenza di riscaldamento;
- c) si preme il bottone di start (la resistenza scalda solo dopo che questo bottone è stato premuto); la spia del riscaldamento si accende e lampeggia.
- d) **Si agita, lentamente ma con continuità.** La sola temperatura viene aggiornata; si attende che il valore impostato sia stato raggiunto (la spia si spegne).
- e) Si disabilita l'attivazione della resistenza di riscaldamento;
- f) si preme (sempre per qualche secondo) sul bottone di stop;
- g) alla richiesta del nome di un file su cui salvare i dati si preme *Cancel*;
- h) **si continua ad agitare**, lentamente ma con continuità, ancora per 30 secondi circa.

³Un solo rapido clic non basta, come salvaguardia contro un'attivazione accidentale.

⁴Il programma si rifiuta di sovrascrivere un file esistente, allo scopo di salvaguardare i dati presi in precedenza; ma questo avviene senza produrre alcun avviso, e i dati attualmente in memoria *andrebbero persi*.

10.3 L'elaborazione dei dati

In ognuno dei 6 campioni, i valori salvati su file sono (per ogni riga e leggendo da sinistra verso destra): l'inverso della pressione, misurata in Kg/cm^2 ; il volume, in cm^3 ; la temperatura, in gradi centigradi. Come temperatura effettiva per ogni campione si considererà la media di tutti i valori raccolti.

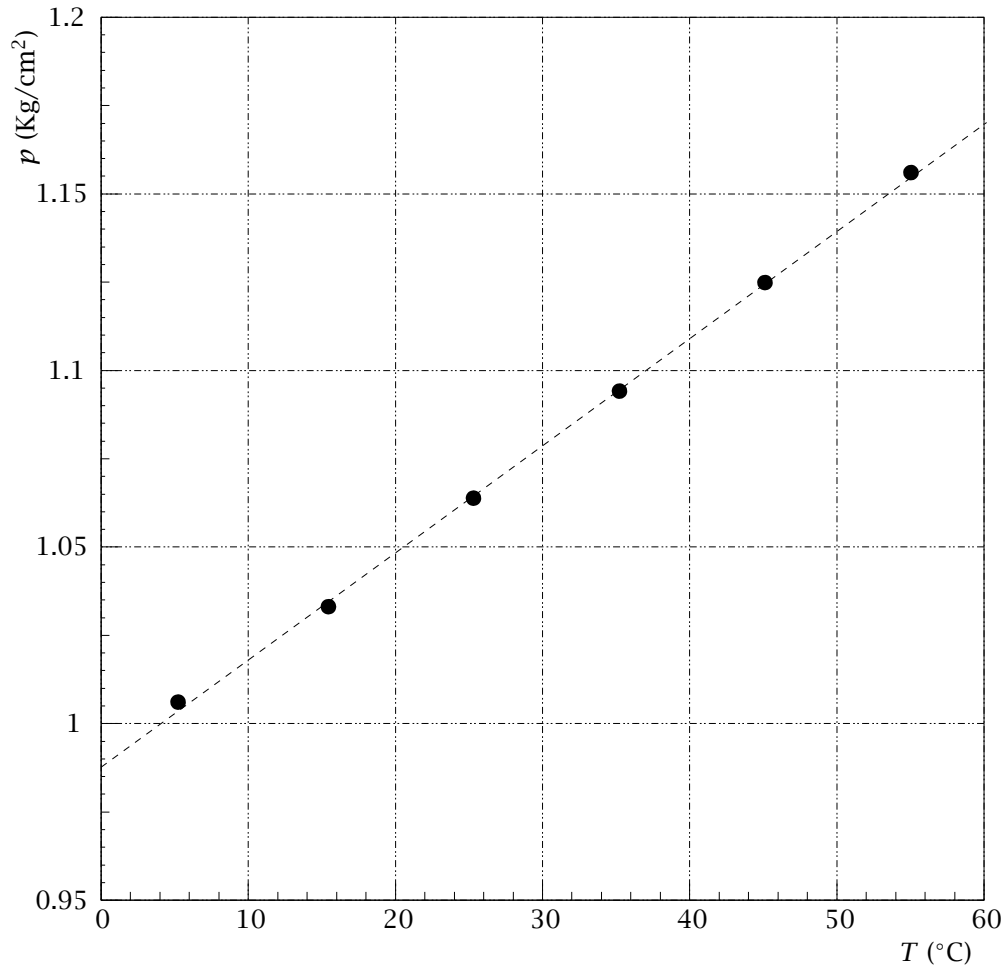


FIGURA 10d - La pressione minima in funzione della temperatura.

Un primo controllo sulla consistenza dei dati si può eseguire riportando in grafico in funzione della temperatura T_c il primo valore letto della pressione (quello che corrisponde al massimo volume):

T_c	p_{\min}
5.22	1.006
15.44	1.033
25.31	1.064
35.21	1.094
45.11	1.125
55.02	1.156

(i valori di p sono stati lasciati in Kg/cm^2). Osservando la figura 10d si vede che la dipendenza lineare prevista dalla (10.3) è abbastanza ben verificata; i dati dell'interpolazione lineare con una retta di equazione $p = a + bT_c$ sono

a	b	σ_y	σ_a	σ_b
0.9880	0.003035	0.001624	0.0014	0.000039

Nella figura 10e si è disposto in grafico il volume in funzione dell'inverso della pressione per il primo campione (i valori acquisiti sono 432): si nota subito che i punti sono ben allineati, ma che i valori letti nelle due fasi di compressione e di espansione non sono esattamente sovrapposti; ed inoltre che ci sono delle deviazioni dalla linearità ad entrambe le estremità dell'intervallo entro il quale varia il volume.

Il primo effetto è dovuto al fatto che la trasformazione del gas non è isoterma se non in prima approssimazione: l'aria si raffredda leggermente nella fase di espansione e si riscalda in quella di compressione. Il secondo effetto è invece dovuto al fatto che a fine corsa si riesce, per effetto dei giochi meccanici, a girare la manovella senza che le condizioni fisiche varino effettivamente.

Si individua la zona delle irregolarità; questa varia leggermente da campione a campione, ma tutti quanti sono ottimamente lineari nella zona evidenziata in figura 10e, e che è quella interna all'intervallo $V \in [6.4, 21.4]$. Dopo aver scartato i 95 punti che cadono al di fuori di tale intervallo, si effettua l'interpolazione lineare sui restanti 337; ed il tutto si ripete per gli altri campioni. I grafici sono in figura 10f, ed i risultati nella tabella seguente.

T_c	A	B	σ_y	σ_A	σ_B
5.22	-1.08280	24.3638	0.072297	0.014386	0.022368
15.44	-1.08807	25.0818	0.064514	0.013484	0.021360
25.31	-1.13342	25.8656	0.066429	0.012782	0.021105
35.21	-1.19553	26.6837	0.070153	0.014288	0.024063
45.11	-1.28273	27.4979	0.076209	0.016856	0.028708
55.02	-1.38652	28.3704	0.064804	0.012205	0.022114

Si nota subito come le intercette A , che secondo la (10.4) dovrebbero corrispondere al volume morto V_0 , non siano affatto tra loro compatibili: questo è conseguenza del fatto che la (10.3), come già detto, è solo approssimata. Le unità di misura non sono poi quelle consuete MKS, essendo A espresso in cm^3 e B in $\text{Kg} \cdot \text{cm}$: per tradurre B in $\text{N} \cdot \text{m}$ lo si moltiplica per 9.806×10^{-2} . I risultati sono:

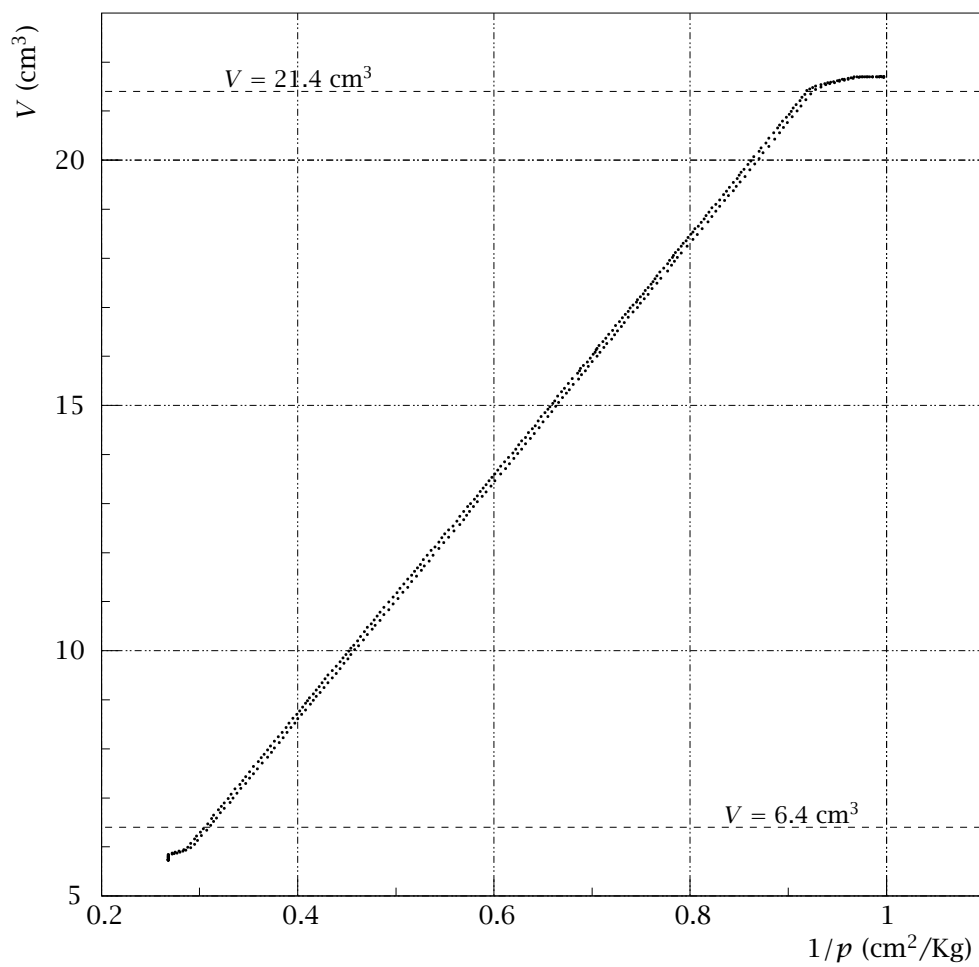


FIGURA 10e - Uno dei grafici di V in funzione di $1/p$ (quello relativo alla temperatura $T = 5.22^\circ\text{C}$).

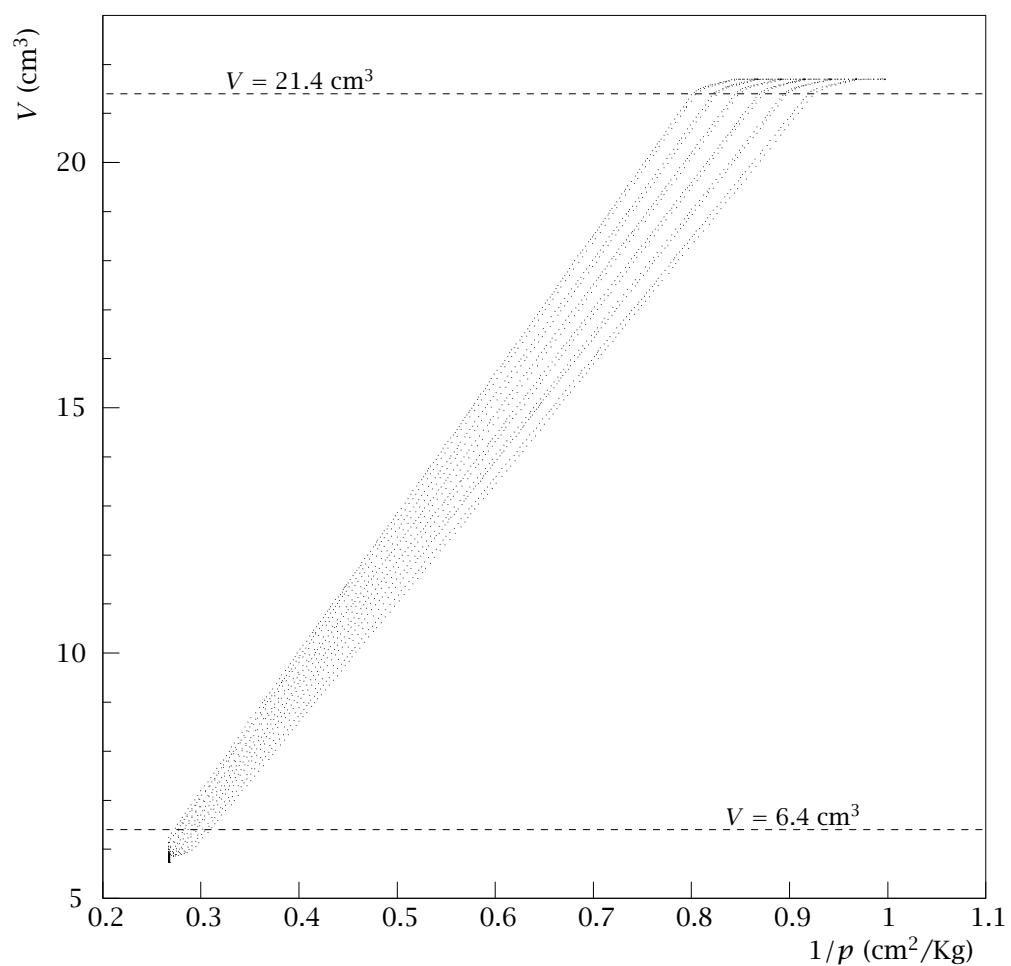


FIGURA 10f - Tutti i grafici dei 6 campioni misurati; procedendo da sinistra verso destra si passa ordinatamente da quello relativo alla temperatura più alta ($T = 55.02^\circ\text{C}$) a quello relativo alla temperatura più bassa ($T = 5.22^\circ\text{C}$).

T_c	$B \text{ (N} \cdot \text{m)}$
5.22	2.3891 ± 0.0022
15.44	2.4595 ± 0.0021
25.31	2.5364 ± 0.0021
35.21	2.6166 ± 0.0024
45.11	2.6964 ± 0.0028
55.02	2.7820 ± 0.0022

Le rette interpolanti sono, per ogni campione, in posizione intermedia tra le due linee *parallele* su cui si dispongono i punti misurati nelle fasi di compressione e di espansione: il valore stimato di B è quindi più o meno quello corretto, ma gli errori a posteriori vengono calcolati usando residui più grandi di quelli che si otterrebbero in condizioni ideali (con punti praticamente sovrapposti) e dunque sono *sistematicamente sovrastimati*.

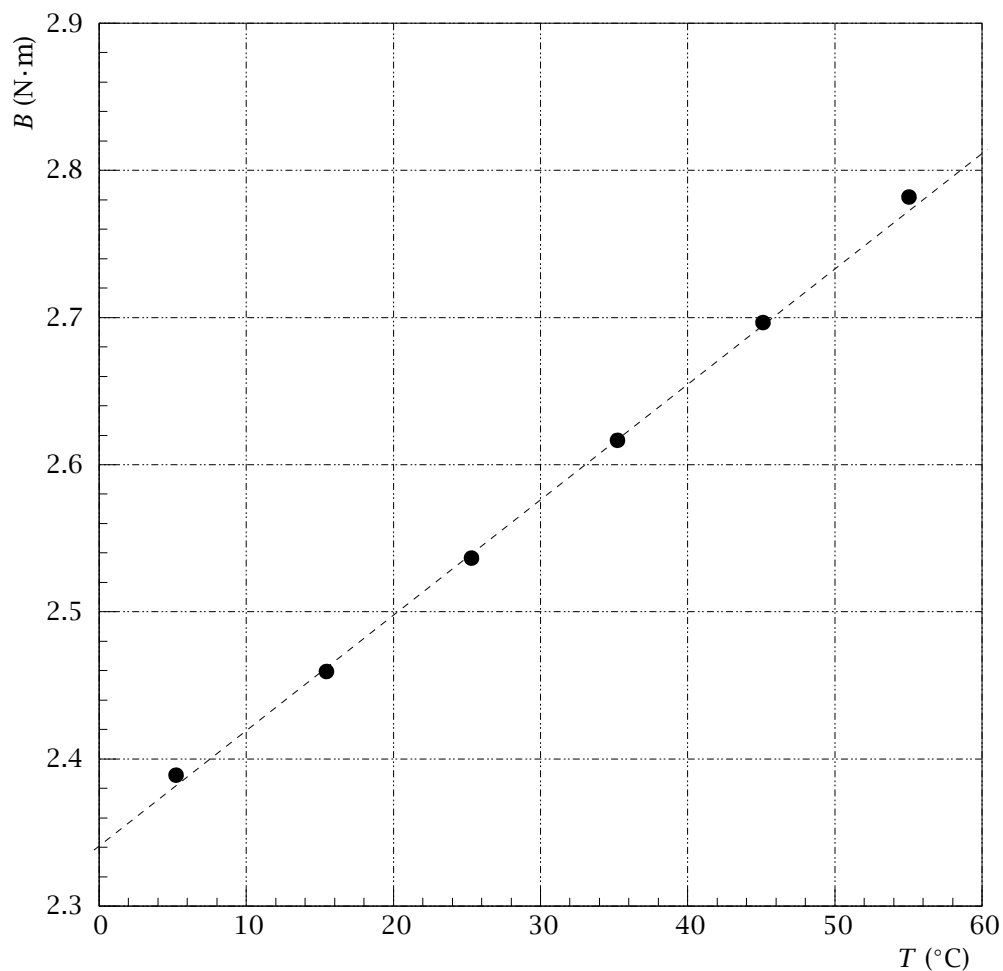


FIGURA 10g - Il coefficiente angolare B delle rette in funzione della temperatura.

Le pendenze B delle rette dovrebbero variare, come già visto nella (10.4), linear-

mente rispetto alle temperature: questo si verifica osservando il grafico di figura 10g. Posto

$$B = \alpha + \beta T_c$$

l'interpolazione lineare sui sei punti della figura 10g ci permette di ottenere:

α	β	σ_γ	σ_α	σ_β
2.34072	0.00791827	0.00562145	0.00468555	0.000135177

e, in conclusione,

$$\alpha = 2.3407 \pm 0.0047 \quad \text{e} \quad \beta = 0.00792 \pm 0.00014$$

La retta attraversa l'asse delle ascisse ($B = 0$) alla temperatura

$$T_0 = -\frac{\alpha}{\beta} = (-295.6 \pm 5.1)^\circ\text{C} \quad (10.5)$$

che dovrebbe rappresentare lo zero assoluto (il valore vero è, come già ricordato, -273.15°C); inoltre il coefficiente angolare β , diviso per il valore di R dato nella (10.2), ci può dare il numero di moli d'aria presenti nel recipiente,

$$n = \frac{\beta}{R} = \frac{0.00792 \pm 0.00014}{8.3136} = (9.52 \pm 0.16) \times 10^{-4} \text{moli}$$

10.4 Se le cose non tornano

1. L'equazione (10.3) è, come già detto, soltanto una prima approssimazione; ed il volume che rimane a temperatura ambiente non è trascurabile rispetto a quello monitorato e termostato.
2. Le dimensioni della siringa non sono costanti, ma variano con la temperatura per la dilatazione termica.
3. L'aria studiata contiene del vapore acqueo, che può condensarsi alle temperature più basse; variando così sia il volume a disposizione che il numero di moli di sostanza allo stato aereiforme.

Per questi motivi:

- le intercette delle rette interpolanti i vari campioni di figura 10f non coincidono;
- il valore (10.5) non è compatibile con quello vero;
- il segno dei residui dei punti interpolati sia nella figura 10d che in quella 10g sembra suggerire una dipendenza non lineare, con concavità rivolte verso l'alto.

Inoltre

4. Il recipiente monitorato è (come già detto) una siringa monouso da 20cm^3 , per la quale la tenuta del pistone è assicurata da guarnizioni di gomma e da un velo di olio di silicone. Col tempo quest'ultimo si asciuga e parte dell'aria interna può fuoriuscire quando si raggiungono le pressioni più elevate: queste arrivano quasi a 4 atmosfere, una condizione d'uso che non è prevista dal fabbricante nemmeno per la siringa nuova.