ПСАД. ВШЭ. Задачи на семинар №3.

19-20 сентября

1 Биномиальный критерий для доли

В этом задании для лучшего понимания внутренностей статистических тестов вам нужно будет самостоятельно реализовать биномиальный критерий для доли.

1. Вспомните, какое нулевое распределение имеет статистика числа успехов в выборке из распределения Бернулли с параметром p.

2. Напишете функцию, которая принмала бы на вход тройку чисел (np, nq, p_0), где np – число успехов, nq – число неудач в выборке размера $np + nq$, p_0 – значение параметра p, задающего нулевую гипотезу.

   Ваша функция должна возвращать значение достигаемого уровня значимости биномиального критерия для односторонней альтернативы $H_1\colon p > p_0$.

3. Визуально сравните поведение значения, выдаваемые вашей функцией со стандартной реализацией $binom.test(\cdot)$

2 Критерий Вальда

Поскольку оценка ММП $\widehat{\theta}$ асимптотически нормальна, одним из подходов к проверке гипотезы $H_0\colon \theta = \theta_0$ является подход на основе статистики Вальда Z_W. Нулевая гипотеза отвергается в пользу двусторонней альтернативы $H_1\colon \theta \neq \theta_0$ на уровне значимости α, если

$$|Z_W| = \frac{|\widehat{\theta} - \theta_0|}{\sqrt{\widehat{\mathbb{D}(\widehat{\theta})}}} > z_{1-\alpha/2}, \tag{1}$$

Обычно для того, чтобы найти $\widehat{\mathbb{D}\widehat{\theta}}$ пользуются также асимптотическми свойствами ММП оценок, откуда получают, что для регулярных моделей и несмещенных оценок $\widehat{\theta}$ верно, что

$$\widehat{\mathbb{D}\widehat{\theta}} \approx -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L(X,\theta)\right]^{-1}\Big|_{\theta=\widehat{\theta}} \qquad \to \qquad \widehat{\mathbb{D}\widehat{\theta}} \approx -\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L(X^n,\theta)\right)^{-1}\Big|_{\theta=\widehat{\theta}} \tag{2}$$

Вместо матожидания по случайной величине X в формуле выше берется ее приближение по данным, что асимптотически настолько же точно, что и истинное матожидание.

1. Запишите правдоподобие распределения $Pois(\lambda)$. При каком λ эта функция достигает максимума? Выведите оценку для дисперсии $\hat{\lambda}$.

2. Рассмотрим две выборки: $\mathbf{X}_1 = (3, 5, 6, 6, 7, 10, 13, 15, 18, 22)$ и $\mathbf{X}_2 = (9, 12)$.

   Изобразите на графике значение логарифма правдоподобия минус максимальное значение логарифма правдоподобия для обеих выборок в зависимости от λ. Можете ли вы провести аналогию с видом графика и значением дисперсии? Можно ли сказать по графику, какая из дисперсий меньше, а какая больше?

3. Получите значение дисперсии аналитически по обеим выборкам.

4. По выборке $\mathbf{X}_1$ проверьте с помощью критерия Вальда гипотезу $H_0\colon \lambda = 9$ против альтернативы $H_1\colon \lambda < 9$ на уровне значимости $\alpha = 0.05$.

3 Критерий отношения правдоподобия (LRT)

Этот критерий также основан на максимизации функции правдоподобия. Идея заключается в том, что значения θ, соответствующие большим значениям функции правдоподобия, более вероятно описывают истинное распределение данных, чем те θ, при которых этот функционал имеет небольшое значение.

Чтобы избавиться от влияния абсолютных значений, в LRT рассматривается статистика отношения значения функции правдоподобия в точке, соотвутствующей нулевой гипотезе $H_0\colon \theta = \theta_0$, к значению функции правдоподобия в точке $\widehat{\theta}$, соответствующей оценке ММП. То есть

$$\Lambda = \frac{L(X^n, \theta_0)}{L(X^n, \widehat{\theta})}, \qquad -2\log(\Lambda) = 2[\log L(X^n, \widehat{\theta}) - \log L(X^n, \theta_0)] \sim \chi^2_{1,1-\alpha} \tag{3}$$

Последний результат о том, что $-2\log(\Lambda) \sim \chi^2_{1,1-\alpha}$ принадлежит Уилксу и выполняется асимптотически (при больших размерах выборки).

Вам нужно:

1. Используя данные $\mathbf{X}_1 = (3, 5, 6, 6, 7, 10, 13, 15, 18, 22) \sim Pois$, нарисуйте график логарифма правдоподобия для параметра $\lambda = 2, \ldots, 30$
2. На графике отметьте уровень правдоподобия, соответствующий параметрам λ, при которых нулевая гипотеза отвергается
3. С помощью функции `uniroot` найдите точные значения λ_l, λ_r, соответствующие левой и правой границе региона, где нулевая гипотеза не отвергается на уровне α против двусторонней альтернативы $(2\log L(\mathbf{X}_1, \lambda) = 2\log L(\mathbf{X}_1, \widehat{\lambda}) - quantile(\chi^2_{1,0.95})\ )$

4 Score test

Оценка ММП доставляет максимум функции правдоподобия. Вблизи этой оценки функция правдопободия изменяется слабо (малая первая производная), а на большем удалении от точки максимума производная этой функции быстро возрастает. На поведении производной логарифма функции правдоподобия и основан так наызваемый score test, или критерий меток.

Пусть $H_0\colon \theta = \theta_0$, тогда, чем больше значение статистики S_0, тем больше данные свидетельствуют против нулевой гипотезы в пользу альтернативы $H_1\colon \theta \neq \theta_0$, где

$$S_0 = \frac{\partial}{\partial\theta} \log L(X^n, \theta)\bigg|_{\theta=\theta_0}, \qquad \widehat{\mathbb{D}S_0} \approx -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log L(X^n, \theta)\bigg|_{\theta=\theta_0} \tag{4}$$

Численный анализ того, насколько велико отклонение от нулевой гипотезы, проводится также асимптотически с помощью сравнения с нормальным распределением, то есть, нулевая гипотеза отклоняется против двусторонней альтернативы на уровне значимости α, если

$$\frac{|S_0|}{\sqrt{\widehat{\mathbb{D}S_0}}} \ > \ z_{1-\alpha/2} \tag{5}$$

1. Для данных $\mathbf{X}_1 = (3, 5, 6, 6, 7, 10, 13, 15, 18, 22) \sim Pois$ проверьте с помощью score test гипотезу $H_0\colon \lambda_0 = 9$ против альтернативы $H_1\colon \lambda_0 < 9$
2. Сравните уровень достигаемой значимости с уровнем, полученным в задаче проверки той же гипотезы, но критерием Вальда.