Analyse

Isabelle Galagher et Pierre Gervais

October 1, 2016

Contents

Part I
Topologie des espaces vectoriels normés

1 Espaces vectoriels normés : premières définitions

1.1 Distances et normes

Définition 1. Étant donné un ensemble E, une *distance sur* E est une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. d est *définie positive* : $d(x,y) \geqslant 0$ et $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. d est symétrique : $d(x,y) = d(y,x)$
3. d vérifie l'*inégalité triangulaire* : $\forall z \in E,\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Exemple 1.

- $E = \mathbb{R}$ et $d(x,y) = |x-y|$
- $E = \mathbb{R}^2$ et $d\left(\binom{a}{b}, \binom{c}{d}\right) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

Remarque 1. Par l'inégalité triangulaire, on déduit

- $d(x,z) \geqslant d(x,y) - d(y,z)$
- $d(x,z) \geqslant d(z,y) - d(x,y)$

d'où $|d(x,y) - d(z,y)| \leqslant d(x,z)$

Définition 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, une *norme* sur E est une application notée N ou $\|\cdot\|$ telle que

1. $(x,y) \longmapsto \|x-y\|$ est une distance
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in E,\ \|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ (*homogénéité*)

Proposition 1. *Une fonction* $\|\cdot\| \ : \ E \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une norme si et seulement si :*

1. *elle est homogène*
2. *elle est définie*
3. *elle vérifie l'inégalité triangulaire*

Preuve 1.

$\Longrightarrow$

Soit $\|\cdot\|$ une norme.

1. ✓
2. $\|x\| = d(x,0)$ où $d(x,y) = \|x-y\|$, donc $\|x\| \geqslant 0$ et $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow d(x,0) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $\|x+y\| = d(x+y,0) = d(x,-y)$, or $\forall x,y,z \in E,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ donc $d(x,-y) \leqslant d(x,0) + d(0,-y)$
   D'où $\|x+y\| \leqslant d(x,0) + d(0,-y) \leqslant \|x\| + \|-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

$\Longleftarrow$

Soit $\|\cdot\|$ vérifiant les trois propriétés, alors soit $d(x,y) = \|x-y\|$ et montrons que d est une distance.

1. $d(x,y) \geqslant 0$ car $\|x-y\| \geqslant 0$ par (2). $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \|x-y\| = 0 \Longleftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(x-y)\| = \|y-x\| = d(y,x)$
3. $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leqslant \|x-z\| + \|z-x\| \leqslant d(x,y) + d(z,y)$

□

Exemple 2.

1. Dans $\mathbb{R}^n$, on définit les normes $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$, $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$ et $\|x\|_\infty = \max_k \|x_k\|$
2. Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'un produit scalaire, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
3. Soit A un ensemble et F une espace vectoriel normé, et $\mathcal{B}(A,F)$ les fonctions bornées de A dans F, alors $\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$ est une norme.

4. Sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|$, $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2}$ et$\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$

Définition 3. Deux normes N_1 et N_2 sont dites *équivalentes* s'il existe des constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que $\forall x \in E,\ C_1 N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant C_2 N_2(x)$

Exemple 3. Par exemple dans $\mathbb{R}^n$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. En effet

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \leqslant 2\|x\|_\infty$$

et $\|x_i| \geqslant \|x\|_\infty,\ i = 1, 2$

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes ! Cela n'est en revanche pas vraie en dimension infinie.

1.2 Ouverts et fermés

Définition 4. Soit E un espace vectoriel normé, on appelle *boule fermée* de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\overline{\mathcal{B}}(x,r) = \{u \in E \mid \|x - u\| \leqslant r\}$, et la *boule ouverte* de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{B}(x,r) = \{u \in E \mid \|x - u\| < r\}$.

Définition 5. Soit $X \subseteq E$

1. On dit que $U \subseteq X$ est un *ouvert* de X si $\forall x \in U,\ \exists r > 0\ :\ \mathcal{B}(x,r) \cap X \subseteq U$

2. On dit que $F \subseteq X$ est un *fermé* de X si son complémentaire dans X est un ouvert de X.

Remarque 2.

1. Un ouvert dans X n'est pas nécessairement ouvert dans E, comme montré dans le deuxième exemple de la figure ci-dessus.

2. Un ouvert de E sera appelé un **ouvert**, de même pour les fermés.

3. Toute boule ouverte est un ouvert.

4. Toute boule fermée est un fermé.

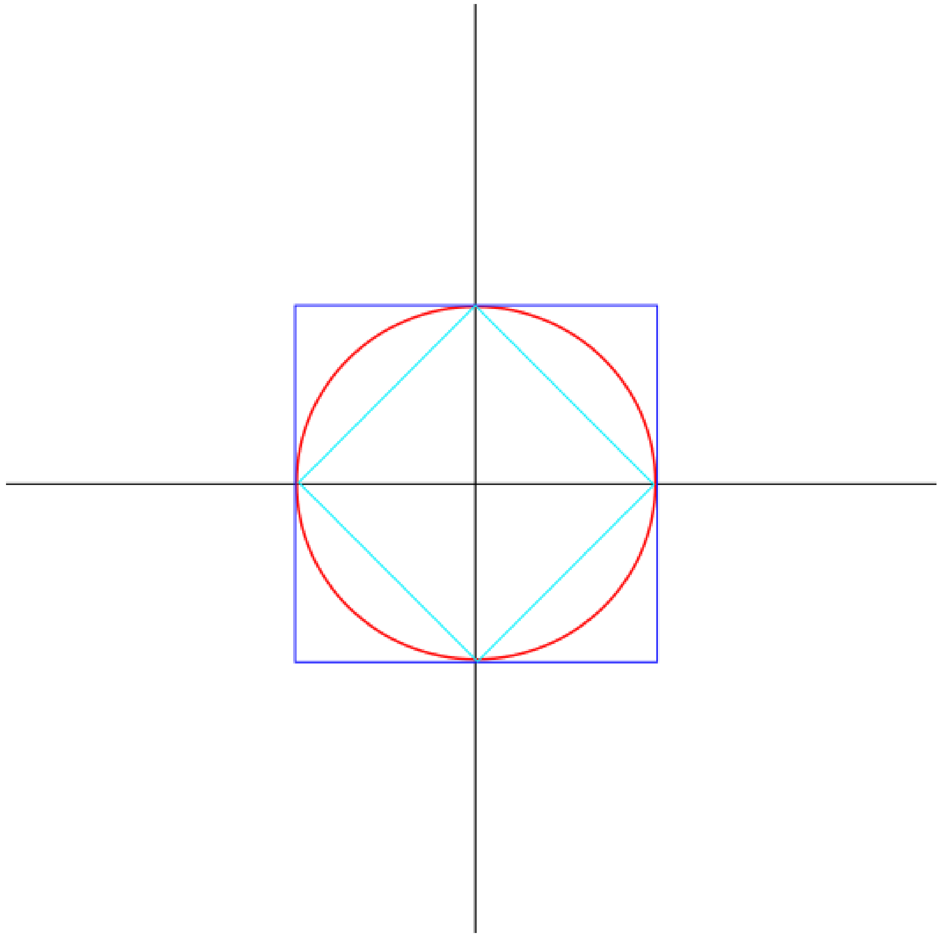

Figure 1: Différentes boules unités
En bleu : $\mathcal{B}_\infty(0,1)$
En rouge : $\mathcal{B}_2(0,1)$
En turquoise : $\mathcal{B}_1(0,1)$

Preuve 2. On considère une boule ouverte $\mathcal{B}(x_0,r)$, montrons que c'est un ouvert.

Soit $x \in \mathcal{B}(x_0,r)$, alors $\|x - x_0\| < r$. On cherche r' tel que $\mathcal{B}(x,r') \subseteq \mathcal{B}(x_0,r)$ donc r' doit vérifier

$$\|x - y\| < r' \Longrightarrow \|x_0 - y\| < r$$

.

Mais $\|x_0 - y\| \leqslant \|x - y\| + \|x - x_0\| < \|x - y\| + r$.

Soit $\delta = r - \|x - x_0\| > 0$, on pose alors $r' = \frac{\delta}{2} > 0$, alors $\|x_0 - y\| \leqslant r' + \|x - x_0\| \leqslant r' + r - \delta < r$

□

Proposition 2. *L'intersection de deux ouverts est un ouvert et toute réunion d'ouverts est un ouvert.*

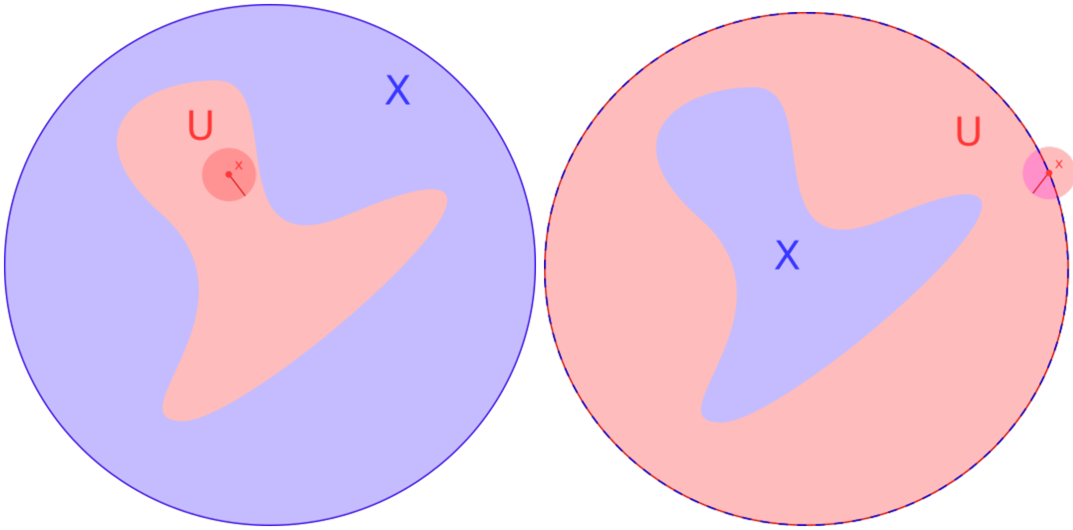

Figure 2: Deux exemples d'ouverts

Preuve 3. Soient U et U' deux ouverts, montrons que $U \cap U'$ est un ouvert.
Soit $x \in U \cap U'$, il existe $r > 0$ et $r' > 0$ tels que $(B)(x, r) \subseteq U$ et $\mathcal{B}(x, r') \subseteq U'$.
On pose $\widetilde{r} = \min(r, r')$ et on a $\mathcal{B}(x, \widetilde{r}) \subseteq U \cap U'$

□

Preuve 4. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts, montrons que $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert.

Soit $x \in U$, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$, il existe donc r tel que $\mathcal{B}(x, r) \subseteq U_{i_0}$ car U_{i_0} est ouvert, d'où $\mathcal{B}(x, r) \subseteq U$.

□

Proposition 3. *Soit $X \subseteq E$, tout ouvert U de X s'écrit sous la forme $U = X \cap \widetilde{U}$, où $\widetilde{U}$ est un ouvert.*
De même pour tout fermé F de X s'écrit $F = X \cap \widetilde{F}$ où $\widetilde{F}$ est un fermé.

Preuve 5. Soit $\widetilde{U}$ un ouvert de E, alors $\widetilde{U} \cap X$ est un ouvert de X par construction.
Inversement soit U ouvert de X, alors $\forall x \in U,\ \exists r(x) > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r(x)) \cap X \subseteq U$
Soit alors $\widetilde{U} = \bigcup_{x \in U} \mathcal{B}(x, r(x))$, alors $\widetilde{U}$ est un ouvert et $U = X \cap U$ □

Définition 6. Une suite à valeurs dans E est dite *convergente vers* $x \in E$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $\|x_n - x\| < \epsilon$.
Celle-ci est unique et on la note $\lim_n x_n = x$.

On remarquera qu'une suite convergente est bornée.

Preuve 6. Soient x et y deux limites de la suite convergente $(x_n)_n$.
Pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver un rang N à partir duquel $\|x_n - x\| < \epsilon$ et $\|y_n - x\| < \epsilon$, d'où

$$\|x - y\| \leqslant \|x - x_n\| + \|x_n - y\| < 2\epsilon$$

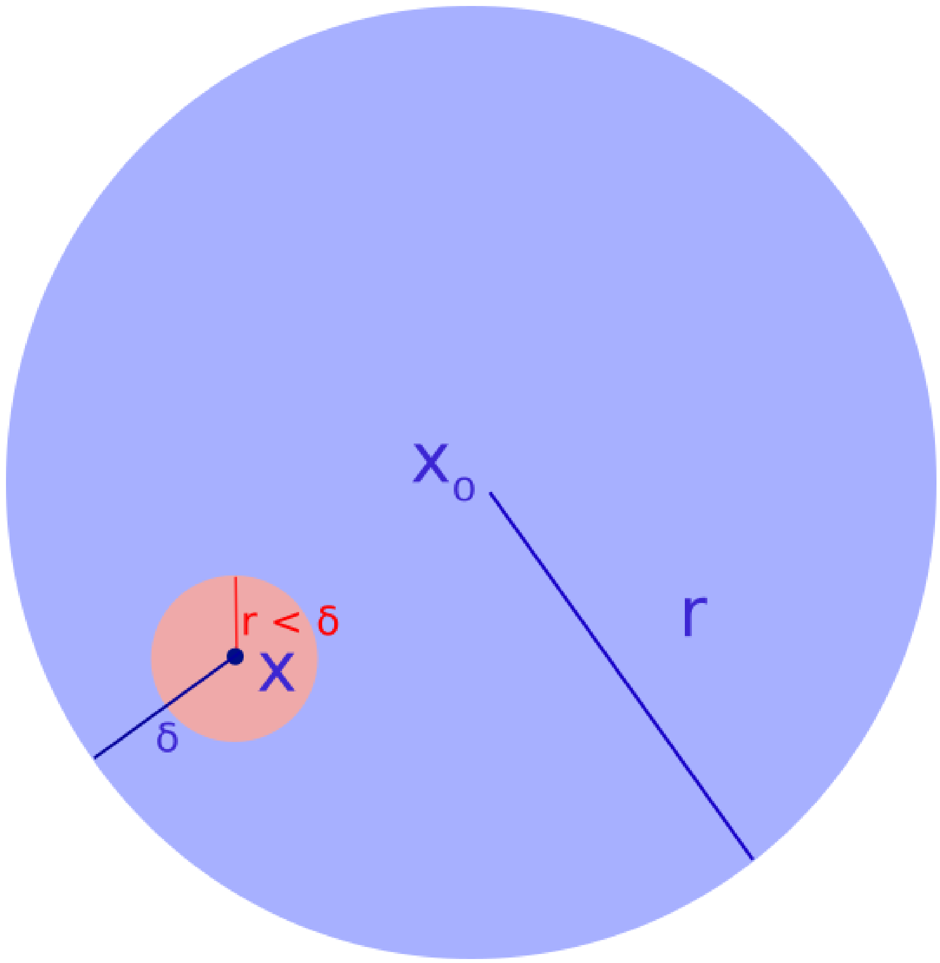

Figure 3: Construction de la boule ouverte

Cette inégalité est vraie pour tout $\epsilon > 0$ donc $x = y$.

$\square$

Remarque 3. On rappelle que dans $\mathbb{R}$, toute suite majorée croissante est convergente.

Soit $A = \{x_n \mid n \geqslant 0\}$, et on note $l = \sup A$.

Soit $\epsilon > 0$, $l - \epsilon$ ne majore pas A donc il existe un rang N à partir duquel $x_n \geqslant l - \epsilon$, mais on a aussi $x_n \leqslant l$ pour tout n, on a ainsi à partir de N l'encadrement $l - \epsilon \leqslant x_n \leqslant l + \epsilon$.

On a de plus que $\lim_n x_n = \sup\{x_n | n \geqslant 0\}$

Remarque 4. Si une suite est convergente pour une norme, alors elle l'est pour toute norme équivalente à celle-ci.

Cela n'est pas vrai en général si les normes ne sont pas équivalentes.

Sur l'ensemble des fonctions continue sur $[0, 1]$ on définit les normes

$$\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)| \text{ et } \|f\| = \int_0^1 |f|$$

On considère la suite de fonction $f_n \ : \ x \longmapsto x^n$, on a

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f_n(x)| = 1$$

mais $\|f_n\| = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$, les normes ne sont pas équivalentes.

Définition 7. On appelle *valeur d'adhérence* de x_n toute limite d'une sous-suite (suite extraite) de (x_n).

Et on appelle *point d'accumulation* d'une suite (x_n) un point x tel que $\forall \epsilon > 0, \ \forall N, \ \exists n > N \ : \ \|x_n - x\| < \epsilon$.

Proposition 4. *Tout point d'accumulation d'une suite convergente (x_n) est une valeur d'adhérence, et réciproquement.*

Preuve 7.

Valeur d'adhérence $\Longrightarrow$ point d'accumulation :

Soit x une valeur d'adhérence de (x_n), il existe une fonction entière strictement croissante ϕ telle que

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \ : \ \forall n > N, \ \|x_{\phi(n)} - x\| < \epsilon$$

donc x est un point d'accumulation. ✓

Point d'accumulation $\Longrightarrow$ valeur d'adhérence :

Réciproquement, soit x un point d'accumulation d'une suite (x_n), on construit par récurrence ϕ telle que x soit la limite de $(x_{\phi(n)})_n$ par

$$\phi(n) = \begin{cases} 0, \ n = 0 \\ \min\{k > \phi(n-1) \mid \|x_k - x\| < 2^{-n}\}, \ n > 0 \end{cases}$$

L'application est bien strictement croissante.

Montrons à présent que $y_n = x_{\phi(n)}$ converge vers x :

soit $\epsilon \in]0, 1[$, on cherche N tel que pour tout $n > N, \ \|x_n - x\| < \epsilon$.

Pour $N > \frac{\ln \epsilon}{\ln 2}$ on a

$$\forall n > N, \ \|y_n - x\| < 2^{-n} < \epsilon$$

$(y_n)_n$ est bien une suite convergeant vers x. ✓

Proposition 5. *Soit E un espace vectoriel normé et $F \subseteq E$.*

F est fermé si et seulement si F contient la limite de toutes ses suites convergentes.

Preuve 8.

F fermé $\Longrightarrow$ F contient les limites de ses suites

Soit (x_n) une suite convergente de F de limite x. Montrons que $x \in F$.

Supposons par l'absurde $x \notin F$, alors $x \in (E \backslash F)$ qui est ouvert. Il existe donc $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subseteq (E \backslash F)$, mais il existe un rang à partir duquel $\|x_n - x\| < \frac{r}{2}$, c'est à dire $x_n \in \mathcal{B}(x, r)$, ce qui contredit $\mathcal{B}(x, r) \subseteq (E \backslash F)$. ✓

F contient les limites de ses suites $\Longrightarrow$ F est fermé

On suppose à présent que F contient la limite de toute ses suites convergentes, montrons que F est fermée, donc que $E \backslash F$ est ouvert.

Soit $x \in (E\backslash F)$, montrons qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subseteq (E\backslash F)$.

Supposons que pour tout n, $\mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \nsubseteq (E\backslash F)$, c'est à dire quil existe $x_n \in F$ tel que $x_n \in \mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$

On a ainsi construit une suite de F convergente vers $x \in F$, donc par hypothèse $x \in F$, ce qui contredit le fait que x appartienne au complémentaire de F. ✓

□

Définition 8. Soit X une partie d'un espace vectoriel normé E.

- *L'intérieur de* X est le plus grand ouvert inclus dans X noté $\mathring{A}$.
- *L'adhérence de* X est le plus petit fermé contenant X noté $\overline{X}$.
- *La frontière de* X est l'ensemble $\partial X = Fr(X) = \overline{X}\backslash\mathring{X}$

Exemple 4. Si $X =]0, 1]$ sur $\mathbb{R}$ alors $\mathring{X} =]0, 1[$, $\overline{X} = [0, 1]$ et $Fr(X) = \{0, 1\}$.

Remarque 5. X est ouvert si est seulement si $\mathring{X} = X$ et X est fermé si et seulement si $\overline{X} = X$.

Exercice 1. Le montrer.

Preuve 9. Intérieur

Soit $\mathring{X}$ l'ensemble des $x \in X$ tels qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subseteq X$, alors $\mathring{X}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans X.

En effet, $\mathring{X}$ est ouvert dans X par définiton, donc $\mathring{X} \subseteq$ "réunion des ouverts de X".

Soit U un ouvert de X, montrer que $U \subseteq X$.

Soit $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subseteq U$ ar U est ouvert. Donc $x \in \mathring{X}$.

$\mathring{X}$ est donc ouvert, contenu dans X. Il contient tous les ouverts de X, donc c'est le plus grand de X, d'où le résultat. □

Proposition 6. *On caractérise l'adhérence d'une partie X comme étant l'ensemble des limites de sous-suites de X.*

Preuve 10. Soit A l'ensemble des limites de suites convergentes à valeurs dans X.

A* est un fermé contenant *X

Pour tout $x \in X$, x peut être la limite d'une suite à valeur dans X, c'est à dire $x \in A$ et donc $X \subseteq A$.

Cela signifie en particulier que A contient les limites de ses suites : c'est un fermé. ✓

A* est le plus petit fermé contenant *X

Supposons que A ne soit pas minimal, soit B un fermé vérifiant

$$\begin{cases} X \subseteq B \\ B \subsetneq A \end{cases}$$

Il existe donc $a \in A$ tel que $a \notin B$, c'est à dire la limite d'une suite $(a_n)_n$ à valeurs dans X.

Or B est un fermé, donc il contient la limite de ses suites, dont (a_n), donc $a \in B$: **contradiction**.

A est donc minimal. ✓

A est donc le plus petit fermé contenant X, c'est à dire $A = \overline{X}$

2 Applications continues

Définition 9. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, soient $X \subseteq E$, $Y \subseteq F$ et f une application de X dans Y.

On dit que f est continue en un point $x \in X$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \;:\; (\forall u,\; \|x-u\| < \delta \Longrightarrow \|f(x)-f(u)\| < \epsilon)$$

Théorème 1. *Une application $f : X \longrightarrow Y$ est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si pour toute suite (y_n) convergeant vers x_0, la suite $(f(y_n))_n$ converge vers $f(x_0)$.*

Exercice 2. Le démontrer

Théorème 2. *Soit une application $f : X \longrightarrow Y$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue sur X*
2. *l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X*
3. *l'image réciproque de tout fermé de X est une fermé de X.*

Preuve 11.
1. $\Longrightarrow$ 2.
Soit f continue sur X et U un ouvert de Y. Montrer que $f^{-1}(U) = V$ est un ouvert de X.
Soit $x \in f^{-1}(U)$, alors $f(x) \in U$, il existe donc $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(f(x), r) \subseteq U$.
Or il existe $\delta > 0$ tel que pour $\|x-u\| < \delta$, on a $\|f(x)-f(y)\| < \frac{r}{2}$.
Ainsi si $y \in \mathcal{B}\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$ alors $f(y) \in \mathcal{B}(f(x), r) \subseteq U$, donc $y \in f^{-1}(U)$.
$f^{-1}(U)$ est donc un ouvert. ✓

2. $\Longrightarrow$ 1.
Soit ϵ, on veut trouver $\delta > 0$ tel que si $\|x-y\| < \delta$, alors $\|f(x)-f(y)\| < \epsilon$.
Soit $x \in X$, alors $\mathcal{B}_\epsilon(f(x))$ est un ouvert de de Y, on sait que $f^{-1}(\mathcal{B}_\epsilon(f(x)))$ est un ouvert de X contenant x, il existe donc $\delta > 0$ tel que $\mathcal{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(\mathcal{B}_\epsilon(f(x)))$.
Autrement dit, si $\|x-y\| < \delta$ alors $y \in f^{-1}(\mathcal{B}_\epsilon(f(x)))$, c'est-à-dire $\|f(x)-f(y)\| < \epsilon$. ✓

1. $\Longleftrightarrow$ 2.
On le démontre en passant au complémentaire. ✓

□

Corollaire 1. *Soient $X \subseteq E$, $Y \subseteq F$ et f une application de X dans Y.*

1. *On suppose que f est continue, alors la restriction de f à $X' \subseteq X$ notée $f_{|X'}$ est continue.*
2. *Si X' est un ouvert de X et si $f_{|X'}$ est continue alors f est continue en tout point de X'.*
3. *Soient f et g avec $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ avec E, F, G des espaces vectoriels normés. Si f et g sont continues alors $g \circ f$ est continue.*

Remarque 6. L'hypothèse que X' soit ouvert est nécessaire pour le point 2., par exemple si $X = \mathbb{R}^2$ et

$$f \;:\; \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 0 \text{ si } y \neq 0, \text{ 1 sinon.} \end{array} \right.$$

f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$, mais $f_{|X'}$ est continue pour $X' = \mathbb{R} \times \{0\}$, qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Preuve 12.
Point 1.
Soit $X' \subseteq X$ et V un ouvert de Y, montrons que $\left(f_{|X'}\right)^{-1}(V)$ est un ouvert de X'.
f est continue sur donc il existe U ouvert de E tel que $f^{-1}(V) = X \cap U$.
Mais alors $\left(f_{|X'}\right)^{-1}(V) = X' \cap X \cap U = X' \cap U$ qui est un ouvert de X'.
Donc $f_{|X'}$ est continue. ✓

Point 2.
$f_{|X'}$ est continue, soit $x \in X'$, montrons que f est continue en x.
Soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $y \in X'$ et $\|x - y\| < \delta$ alors $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$
Comme X' est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_r(x) \subseteq X'$.
On choisit $\delta' \leqslant \min\{r, \delta\}$, alors $\forall y \in \mathcal{B}_{\delta'},\ \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$, donc f est continue en x. ✓

Point 3.
✓

3 Applications uniformément continues, applications linéaires continues

Définition 10. Une application $f\ :\ E \longrightarrow F$ est *uniformément continue* si

$$\forall \epsilon,\ \exists \delta > 0\ :\ \forall x, y \in E,\ (\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y\| < \epsilon)$$

Remarque 7. Si est uniformément continue alors elle est continue, la réciproque ets cependant fausse.

Définition 11. Une fonction f est *k-lipschitzienne* si

$$\forall x, y \in E,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|$$

Théorème 3. *Soit $\phi\ :\ E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors les propriétés suivantes ont équivalentes :*

1. *ϕ est continue*
2. *ϕ est continue en 0*
3. *ϕ est uniformément continue*
4. *ϕ est bornée sur $\mathcal{B}_1(0)$*
5. *ϕ est k-lipschitzienne.*

Preuve 13. Montrons 2. $\Longrightarrow$ 4. $\Longrightarrow$ 5. $\Longrightarrow$ 3. $\Longrightarrow$ 1. $\Longrightarrow$ 2.

1. $\Longrightarrow$ 2.
✓

2. $\Longrightarrow$ 4.
f est continue en 0, donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\| < \delta \Longrightarrow \|f(x)\| < \epsilon$

Soit $x \in \mathcal{B}_1(0)$ avec $x \neq 0$, on a :

$$\|x\| < 1$$

$$\|\delta x\| < \delta$$

$$\|f(\delta \cdot x)\| < \epsilon$$

$$\|f(x)\| < \frac{\epsilon}{\delta}$$

✓

4. $\Longrightarrow$ 5.

Supposons que f soit majoré par $M > 0$ sur la boule unité.
Soient $x \neq y \in E$, on a

$$x - y = (x-y) \cdot \frac{\|x-y\|}{\|x-y\|}$$

$$f(x-y) = \|x-y\| f \underbrace{\left(\frac{x-y}{\|x-y\|} \right)}_{\in \mathcal{B}_1(0)}$$

$$f(x-y) = \|x-y\| \cdot M$$

f est M-lipschitzienne. ✓

5. $\Longrightarrow$ 3. $\Longleftarrow$ 1. $\Longrightarrow$ 2.

✓

Définition 12. Soit f une application lipschitzienne, on appelle *constante de Lipschitz de f* ou *norme d'opérateur de f* la valeur $\|f\| = \inf\{k > 0 \mid f \text{ est } k\text{-liptschitzienne}\} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\|$

La norme d'opérateur est comme son nom l'indique une norme, en particulier

$$\forall x, y \in E,\ \|f(x)\| \leqslant \|f\| \|x\|$$

Proposition 7. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, o note $\mathcal{L}_C(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. C'est un espace vectoriel normé si on le munit de la norme d'opérateur.*

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{L}_C(E, E),\ \|\phi \circ \psi\| \leqslant \|\phi\| \|\psi\|$$

Remarque 8. On peut étendre ces résultats aux applications bilinéaires : soient E, E' et F trois espaces vectoriels normés, et $f\ :\ E \times E' \longrightarrow F$ bilinéaire continue,sa norme d'opérateur est définie par

$$\|f\| = \sup\{\|f(x,y)\| \mid \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1\}$$

On a en particulier $\|f(x,y)\| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$

4 Espaces produits

Définition 13. Soient (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux espaces vectoriels normés, on construit des normes sur $E_1 \times E_2$ en posant

$$\|(x,y)\|_1 = N_1(x) + N_2(y)$$

$$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{N_1^2(x) + N_2^2(y)}$$

$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{N_1(x), N_2(y)\}$$

On a les relations

$$\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_2 \leqslant \|(x,y)\|_1 \leqslant 2\|(x,y)\|_\infty$$

Exemple 5. Soit E un espace vectoriel normé, on munit $E \times E$ de la norme définie par $N(x,y) = \|x\| + \|y\|$ et on définit une distance $d(u,v) = \|u - v\|$

d est lipschitzienne :

$$|d(x,y) - d(x',y')| = |\|x - y\| - \|x' - y'\||$$

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leqslant |\|(x-y) - (x'-y')\||$$

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leqslant |\|(x-x') + (y'-y)\||$$

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leqslant \|(x-x')\| + \|(y'-y)\|$$

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leqslant N((x-x') + (y'-y))$$

d est donc 1-lipschitzienne.

Proposition 8. *Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés, alors :*

1. *Les projections* $\pi_1 \ : \left\{ \begin{array}{lcl} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_1 \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \right.$ *et* $\pi_2 \ : \left\{ \begin{array}{lcl} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_1 \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array} \right.$ *sont lipschitziennes.*
2. *Une application $f \ : Y \longrightarrow E_1 \times E_2$ s'écrit sous la forme $f = (f_1, f_2)$ avec $f_1 \ : Y \longrightarrow E_1$ et $f_2 \ : Y \longrightarrow E_2$ est continue si et seulement si f_1 et f_2 sont continues.*
3. *Si $f \ : \ E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ est continue alors pour tout $x \in E_1$, l'application* $f_x \ : \left\{ \begin{array}{lcl} E_2 & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \right.$ *est continue et de même* $f_y \ : \left\{ \begin{array}{lcl} E_1 & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \right.$ *est continue pour tout $y \in E_2$.*

Preuve 14. 1. Soit $(x,y) \in E_1 \times E_2$, alors $\pi_1(x,y) = x$, donc $\pi_1(x,y) - \pi_2(x',y') = x' - y'$ et donc $\|\pi_1(x,y) - \pi_2(x',y')\| = \|x - x'\| \leqslant \|x - x'\| + \|y - y'\| = N_1(x - x', y - y')$

π_1 est 1-lipschitzienne.

2. Si f est continue, alors $\pi_1 \circ f = f_1$ est continue comme composée d'applications continues.

   De même $f_2 = \pi_2 \circ f$ est continue.

   Inversement, supposons que $f_1 \ : \ Y \longrightarrow E_1$ et $f_2 \ : \ Y \longrightarrow E_2$ sont continues.

   Montrons que $f = (f_1, f_2) \ : \ \left\{ \begin{array}{lll} Y & \longrightarrow & E \times E_2 \\ x & \longmapsto & (f_1(x), f_2(y) \end{array} \right.$

   Soit $(x_n)_n$ une suite de Y convergeant vers $x \in Y$, montrons que $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.

   Comme f_1 est continue, $(f_1(x_n))_n$ converge $f_1(x)$ et de même pour f_2.

   Donc $f(x_n)_n$ converge vers $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$

3. Se démontre de même par caractérisation séquentielle de la continuité.

Remarque 9. Une fonction peut être continue de chaque variable sans être continue du couple de variables, par exemple

$$f \ : \ \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \longmapsto & 0 \end{array} \right.$$

f est continue pour x et y fixé, mais $\forall \epsilon > 0, \ f(\epsilon, \epsilon) = \frac{1}{2}$ f n'est donc pas continue car $f(0,0) = 0$.