

Analyse

Isabelle Gallagher et Pierre Gervais

December 3, 2016

Contents

| | | |
|------------|--|-----------|
| I | Topologie des espaces vectoriels normés | 2 |
| 1 | Espaces vectoriels normés : premières définitions | 2 |
| 1.1 | Distances et normes | 2 |
| 1.2 | Ouverts et fermés | 4 |
| 2 | Applications continues | 10 |
| 3 | Applications uniformément continues, applications linéaires continues | 12 |
| 4 | Espaces produits | 13 |
| | | |
| II | Compacité et complétude | 14 |
| 5 | Sous-suites et compacité | 14 |
| 6 | Compacité en dimension finie | 17 |
| 7 | Applications de la compacité | 18 |
| 8 | Suites de Cauchy | 19 |
| 9 | Parties complètes et espaces de Banach | 20 |
| 10 | Applications | 23 |
| | | |
| III | Fonctions dérivables | 24 |
| 11 | Rappels sur les fonctions dérivables réelles | 24 |

| | |
|--|---------------|
| 12 Fonctions dérivables à valeurs dans un espace de Banach | 26 |
| 12.1 Inégalité des accroissements finis | 27 |
| 12.2 Dérivées successives et inégalités de Taylor | 28 |
| 12.3 Application au séries de fonctions | 29 |
| IV Applications différentiables | 31 |
| 13 Applications différentiables | 31 |
| 13.1 Différentielles | 31 |
| 14 Dérivées partielles en dimension finie | 32 |
| 14.1 Application de classe \mathcal{C}^1 | 33 |
| 14.2 Accroissements finis | 35 |
| V Extrema et différentielles secondes | 36 |
| 15 Condition nécessaire d'extremum pour un application différentiable | 36 |
| 16 Différentielle seconde | 36 |
| 17 Dérivées partielles d'ordre 2 : Matrice hessienne | 37 |
| 18 Formules de Taylor | 39 |
| 19 Condition suffisante pour avoir un extremum | 41 |
| VI Séries de Fourier | 42 |
| 20 Convergence en moyenne quadratique | 42 |

Part I

Topologie des espaces vectoriels normés

On considèrera aussi les corps \mathbb{R} ou \mathbb{C}

1 Espaces vectoriels normés : premières définitions

1.1 Distances et normes

Définition 1. Étant donné un ensemble E , une *distance sur E* est une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. d est *définie positive* : $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2. d est symétrique : $d(x, y) = d(y, x)$
3. d vérifie l'inégalité triangulaire : $\forall z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Exemple 1.

- $E = \mathbb{R}$ et $d(x, y) = |x - y|$
- $E = \mathbb{R}^2$ et $d\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$

Remarque 1. Par l'inégalité triangulaire, on déduit

- $d(x, z) \geq d(x, y) - d(y, z)$
- $d(x, z) \geq d(z, y) - d(x, y)$

d'où $|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z)$

Définition 2. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, une *norme* sur E est une application notée N ou $\|\cdot\|$ telle que

1. $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ (*homogénéité*)

Proposition 1. Une fonction $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une norme si et seulement si :

1. elle est homogène
2. elle est définie
3. elle vérifie l'inégalité triangulaire

Preuve 1.

\implies

Soit $\|\cdot\|$ une norme.

1. \checkmark
2. $\|x\| = d(x, 0)$ où $d(x, y) = \|x - y\|$, donc $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \iff d(x, 0) = 0 \iff x = 0$
3. $\|x + y\| = d(x + y, 0) = d(x, -y)$, or $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ donc $d(x, -y) \leq d(x, 0) + d(0, -y)$
D'où $\|x + y\| \leq d(x, 0) + d(0, -y) \leq \|x\| + \|-y\| \leq \|x\| + \|y\|$

\impliedby

Soit $\|\cdot\|$ vérifiant les trois propriétés, alors soit $d(x, y) = \|x - y\|$ et montrons que d est une distance.

1. $d(x, y) \geq 0$ car $\|x - y\| \geq 0$ par (2). $d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - y)\| = \|y - x\| = d(y, x)$
3. $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \leq d(x, z) + d(z, y)$

□

Exemple 2.

1. Dans \mathbb{R}^n , on définit les normes $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$, $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}$ et $\|x\|_\infty = \max_k \|x_k\|$
2. Dans \mathbb{R}^n muni d'un produit scalaire, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
3. Soit A un ensemble et F un espace vectoriel normé, et $\mathcal{B}(A, F)$ les fonctions bornées de A dans F , alors $\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$ est une norme.
4. Sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|$, $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$

Définition 3. Deux normes N_1 et N_2 sont dites *équivalentes* s'il existe des constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que $\forall x \in E, C_1 N_2(x) \leq N_1(x) \leq C_2 N_2(x)$

Exemple 3. Par exemple dans \mathbb{R}^n , les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. En effet

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \leq 2\|x\|_\infty$$

et $\|x_i\| \geq \|x\|_\infty, i = 1, 2$

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes ! Cela n'est en revanche pas vraie en dimension infinie.

1.2 Ouverts et fermés

Définition 4. Soit E un espace vectoriel normé, on appelle *boule fermée* de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\overline{\mathcal{B}}(x, r) = \{u \in E \mid \|x - u\| \leq r\}$, et la *boule ouverte* de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{B}(x, r) = \{u \in E \mid \|x - u\| < r\}$.

Définition 5. Soit $X \subseteq E$

1. On dit que $U \subseteq X$ est un *ouvert* de X si $\forall x \in U, \exists r > 0 : \mathcal{B}(x, r) \cap X \subseteq U$
2. On dit que $F \subseteq X$ est un *fermé* de X si son complémentaire dans X est un ouvert de X .

Remarque 2.

1. Un ouvert dans X n'est pas nécessairement ouvert dans E , comme montré dans le deuxième exemple de la figure ci-dessus.
2. Un ouvert de E sera appelé un **ouvert**, de même pour les fermés.
3. Toute boule ouverte est un ouvert.
4. Toute boule fermée est un fermé.

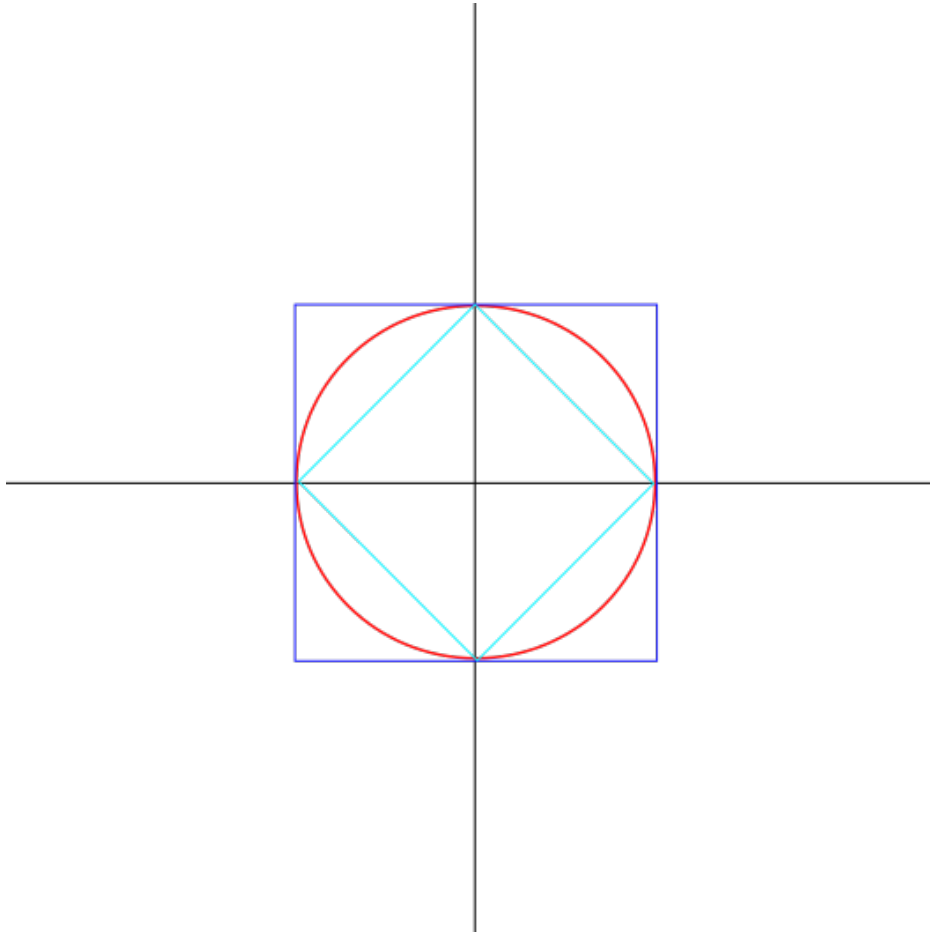


Figure 1: Différentes boules unités

En bleu : $\mathcal{B}_\infty(0, 1)$

En rouge : $\mathcal{B}_2(0, 1)$

En turquoise : $\mathcal{B}_1(0, 1)$

Preuve 2. On considère une boule ouverte $\mathcal{B}(x_0, r)$, montrons que c'est un ouvert.

Soit $x \in \mathcal{B}(x_0, r)$, alors $\|x - x_0\| < r$. On cherche r' tel que $\mathcal{B}(x, r') \subseteq \mathcal{B}(x_0, r)$ donc r' doit vérifier

$$\|x - y\| < r' \implies \|x_0 - y\| < r$$

Mais $\|x_0 - y\| \leq \|x - y\| + \|x - x_0\| < \|x - y\| + r$.

Soit $\delta = r - \|x - x_0\| > 0$, on pose alors $r' = \frac{\delta}{2} > 0$, alors $\|x_0 - y\| \leq r' + \|x - x_0\| \leq r' + r - \delta < r$

□

Proposition 2. *L'intersection de deux ouverts est un ouvert et toute réunion d'ouverts est un ouvert.*

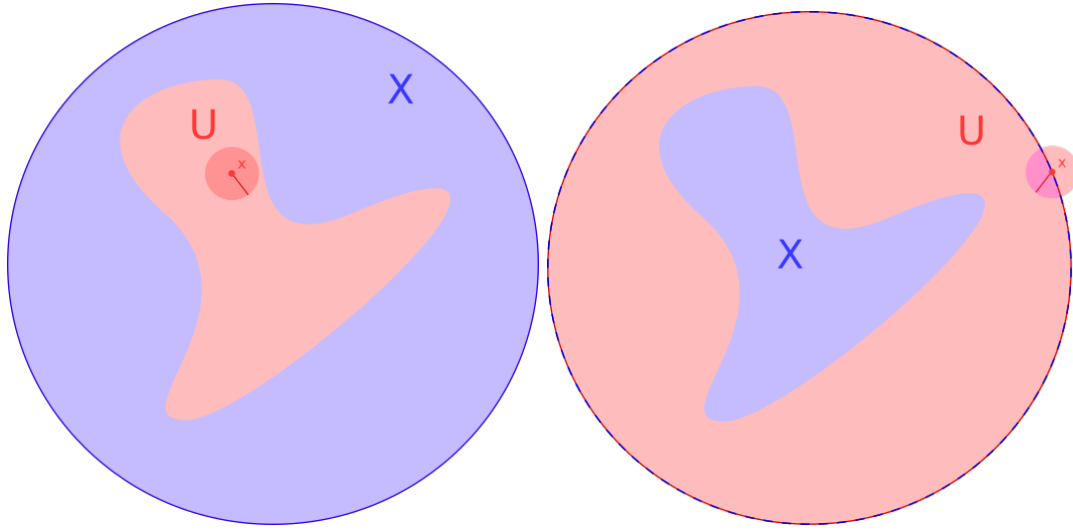


Figure 2: Deux exemples d'ouverts

Preuve 3. Soient U et U' deux ouverts, montrons que $U \cap U'$ est un ouvert.

Soit $x \in U \cap U'$, il existe $r > 0$ et $r' > 0$ tels que $\mathcal{B}(x, r) \subseteq U$ et $\mathcal{B}(x, r') \subseteq U'$.

On pose $\tilde{r} = \min(r, r')$ et on a $\mathcal{B}(x, \tilde{r}) \subseteq U \cap U'$

□

Preuve 4. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts, montrons que $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert.

Soit $x \in U$, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$, il existe donc r tel que $\mathcal{B}(x, r) \subseteq U_{i_0}$ car U_{i_0} est ouvert, d'où $\mathcal{B}(x, r) \subseteq U$.

□

Proposition 3. Soit $X \subseteq E$, tout ouvert U de X s'écrit sous la forme $U = X \cap \tilde{U}$, où \tilde{U} est un ouvert.

De même pour tout fermé F de X s'écrit $F = X \cap \tilde{F}$ où \tilde{F} est un fermé.

Preuve 5. Soit \tilde{U} un ouvert de E , alors $\tilde{U} \cap X$ est un ouvert de X par construction.

Inversement soit U ouvert de X , alors $\forall x \in U$, $\exists r(x) > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r(x)) \cap X \subseteq U$

Soit alors $\tilde{U} = \bigcup_{x \in U} \mathcal{B}(x, r(x))$, alors \tilde{U} est un ouvert et $U = X \cap \tilde{U}$

□

Définition 6. Une suite à valeurs dans E est dite *convergente vers* $x \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Celle-ci est unique et on la note $\lim_n x_n = x$.

On remarquera qu'une suite convergente est bornée.

Preuve 6. Soient x et y deux limites de la suite convergente $(x_n)_n$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un rang N à partir duquel $\|x_n - x\| < \varepsilon$ et $\|y_n - x\| < \varepsilon$, d'où

$$\|x - y\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - y\| < 2\varepsilon$$

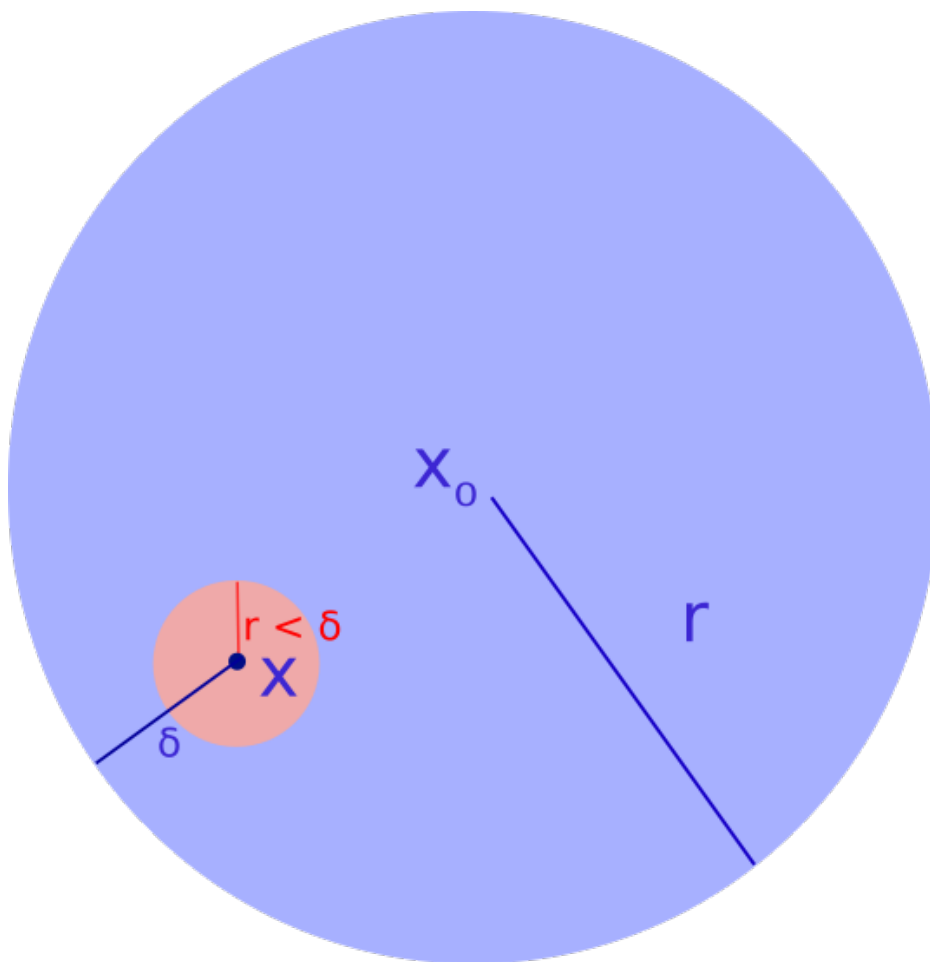


Figure 3: Construction de la boule ouverte

Cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$ donc $x = y$.

□

Remarque 3. On rappelle que dans \mathbb{R} , toute suite majorée croissante est convergente.

Soit $A = \{x_n \mid n \geq 0\}$, et on note $l = \sup A$.

Soit $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon$ ne majore pas A donc il existe un rang N à partir duquel $x_n \geq l - \varepsilon$, mais on a aussi $x_n \leq l$ pour tout n , on a ainsi à partir de N l'encadrement $l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon$.

On a de plus que $\lim_n x_n = \sup\{x_n \mid n \geq 0\}$

Remarque 4. Si une suite est convergente pour une norme, alors elle l'est pour toute norme équivalente à celle-ci.

Cela n'est pas vrai en général si les normes ne sont pas équivalentes.

Sur l'ensemble des fonctions continue sur $[0, 1]$ on définit les normes

$$\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)| \text{ et } \|f\| = \int_0^1 |f|$$

On considère la suite de fonction $f_n : x \mapsto x^n$, on a

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f_n(x)| = 1$$

mais $\|f_n\| = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, les normes ne sont pas équivalentes.

Définition 7. On appelle *valeur d'adhérence* de x_n toute limite d'une sous-suite (suite extraite) de (x_n) .

Et on appelle *point d'accumulation* d'une suite (x_n) un point x tel que $\forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n > N : \|x_n - x\| < \varepsilon$.

Proposition 4. *Tout point d'accumulation d'une suite convergente (x_n) est une valeur d'adhérence, et réciproquement.*

Preuve 7. Valeur d'adhérence \implies point d'accumulation :

Soit x une valeur d'adhérence de (x_n) , il existe une fonction entière strictement croissante φ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n > N, \|x_{\varphi(n)} - x\| < \varepsilon$$

donc x est un point d'accumulation. ✓

Point d'accumulation \implies valeur d'adhérence : Réciproquement, soit x un point d'accumulation d'une suite (x_n) , on construit par récurrence φ telle que x soit la limite de $(x_{\varphi(n)})_n$ par

$$\varphi(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \min\{k > \varphi(n-1) \mid \|x_k - x\| < 2^{-n}\}, & n > 0 \end{cases}$$

L'application est bien strictement croissante.

Montrons à présent que $y_n = x_{\varphi(n)}$ converge vers x :

soit $\varepsilon \in]0, 1[$, on cherche N tel que pour tout $n > N$, $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Pour $N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$ on a

$$\forall n > N, \|y_n - x\| < 2^{-n} < \varepsilon$$

$(y_n)_n$ est bien une suite convergeant vers x . ✓

Proposition 5. *Soit E un espace vectoriel normé et $F \subseteq E$.*

F est fermé si et seulement si F contient la limite de toutes ses suites convergentes.

Preuve 8. F fermé $\implies F$ contient les limites de ses suites

Soit (x_n) une suite convergente de F de limite x . Montrons que $x \in F$.

Supposons par l'absurde $x \notin F$, alors $x \in F^C$ qui est ouvert. Il existe donc $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subseteq (E \setminus F)$, mais il existe un rang à partir duquel $\|x_n - x\| < \frac{r}{2}$, c'est à dire $x_n \in \mathcal{B}(x, r)$, ce qui contredit $\mathcal{B}(x, r) \subseteq F^C$. ✓

F contient les limites de ses suites $\implies F$ est fermé Montrons que F^C est fermé, ce qui est équivalent au fait que F soit fermé. Soit $u \in F^C$, on pose $r = \inf_{f \in F} \|f - u\|$.

Supposons par l'absurde que r soit nul, alors pour tout $n > 0$ il existerait un élément $f_n \in F$ tel que $\|u - f_n\| < \frac{1}{n}$. Cela définit alors une suite $(f_n)_n$ à valeurs dans F convergente vers $u \notin F$, ce qui contredit le fait que F contienne ses limites.

On a alors $\mathcal{B}_r(u) \subseteq F^C$, F^C est donc effectivement ouvert. ✓

Définition 8. Soit X une partie d'un espace vectoriel normé E .

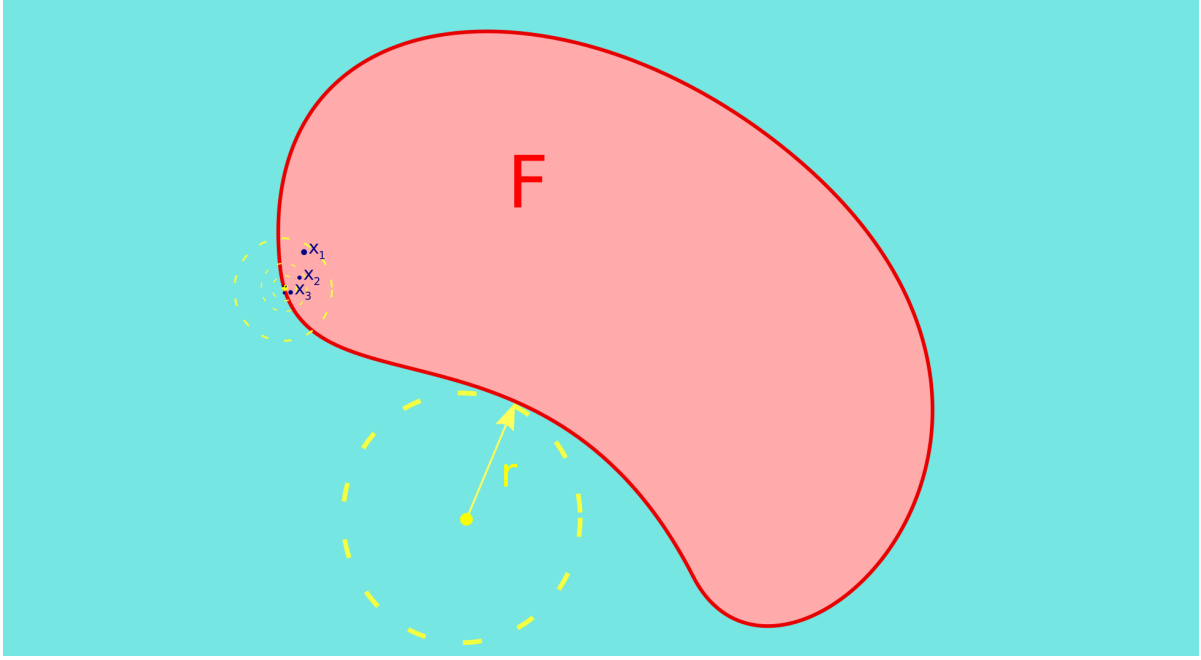


Figure 4: Une partie contenant ses limites est fermée

Si on avait $r = \inf_{f \in F} \|u - f\| = 0$, alors on aurait $u \in F$ car toute boule ouverte centrée en u s'intersecterait avec le fermé F .

- L'intérieur de X est le plus grand ouvert inclus dans X noté $\overset{\circ}{X}$.
- L'adhérence de X est le plus petit fermé contenant X noté \overline{X} .
- La frontière de X est l'ensemble $\partial X = Fr(X) = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X}$

Exemple 4. Si $X =]0, 1]$ sur \mathbb{R} alors $\overset{\circ}{X} =]0, 1[$, $\overline{X} = [0, 1]$ et $Fr(X) = \{0, 1\}$.

Remarque 5. X est ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{X} = X$ et X est fermé si et seulement si $\overline{X} = X$.

En effet, pour X ouvert, $\overset{\circ}{X}$ est le plus grand ouvert contenu dans X , donc X .

Réciproquement si $X = \overset{\circ}{X}$, l'intérieur d'une partie étant un ouvert on a bien que X est ouvert.

Preuve 9. Intérieur

Soit $\overset{\circ}{X}$ l'ensemble des $x \in X$ tels qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subseteq X$, alors $\overset{\circ}{X}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans X .

En effet, $\overset{\circ}{X}$ est ouvert dans X par définition, donc $\overset{\circ}{X} \subseteq$ "réunion des ouverts de X ".

Soit U un ouvert de X , montrer que $U \subseteq \overset{\circ}{X}$.

Soit $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subseteq U$ car U est ouvert. Donc $x \in \overset{\circ}{X}$.

$\overset{\circ}{X}$ est donc ouvert, contenu dans X . Il contient tous les ouverts de X , donc c'est le plus grand de X , d'où le résultat. \square

Proposition 6. On caractérise l'adhérence d'une partie X comme étant l'ensemble des limites de sous-suites de X .

Preuve 10. Soit A l'ensemble des limites de suites convergentes à valeurs dans X .

A est un fermé contenant X Pour tout $x \in X$, x peut être la limite d'une suite à valeur dans X , c'est à dire $x \in A$ et donc $X \subseteq A$.

Cela signifie en particulier que A contient les limites de ses suites : c'est un fermé. ✓

A est le plus petit fermé contenant X

Montrons que A est minimal, c'est-à-dire que pour tout fermé F vérifiant $X \subseteq F \subseteq A$, on a $F = A$.

F est un fermé contenant X , donc il contient X et les limites des suites convergentes à valeurs dans X , c'est à dire A . ✓

A est donc le plus petit fermé contenant X , c'est à dire $A = \overline{X}$

2 Applications continues

Définition 9. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, soient $X \subseteq E$, $Y \subseteq F$ et f une application de X dans Y .

On dit que f est continue en un point $x \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (\forall u, \|x - u\| < \delta \implies \|f(x) - f(u)\| < \varepsilon)$$

Théorème 1. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si pour toute suite (y_n) convergeant vers x_0 , la suite $(f(y_n))_n$ converge vers $f(x_0)$.

Exercice 1. Le démontrer

Théorème 2. Soit une application $f : X \longrightarrow Y$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur X
2. l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X
3. l'image réciproque de tout fermé de Y est un fermé de X .

Preuve 11. **1. \implies 2.** Soit f continue sur X et U un ouvert de Y . Montrer que $f^{-1}(U) = V$ est un ouvert de X .

Soit $x \in f^{-1}(U)$, alors $f(x) \in U$, il existe donc $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(f(x), r) \subseteq U$.

Or il existe $\delta > 0$ tel que pour $\|x - u\| < \delta$, on a $\|f(x) - f(u)\| < \frac{r}{2}$.

Ainsi si $y \in \mathcal{B}(x, \frac{\delta}{2})$ alors $f(y) \in \mathcal{B}(f(x), r) \subseteq U$, donc $y \in f^{-1}(U)$.

$f^{-1}(U)$ est donc un ouvert. ✓

2. \implies 1. Soit $\varepsilon > 0$, on veut trouver $\delta > 0$ tel que si $\|x - y\| < \delta$, alors $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Soit $x \in X$, alors $\mathcal{B}_\varepsilon(f(x))$ est un ouvert de Y , on sait que $f^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(f(x)))$ est un ouvert de X contenant x , il existe donc $\delta > 0$ tel que $\mathcal{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(f(x)))$.

Autrement dit, si $\|x - y\| < \delta$ alors $y \in f^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(f(x)))$, c'est-à-dire $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. ✓

1. \iff 2. On le démontre en passant au complémentaire. ✓

□

Corollaire 1. Soient $X \subseteq E$, $Y \subseteq F$ et f une application de X dans Y .

1. On suppose que f est continue, alors la restriction de f à $X' \subseteq X$ notée $f|_{X'}$ est continue.
2. Si X' est un ouvert de X et si $f|_{X'}$ est continue alors f est continue en tout point de X' .
3. Soient f et g avec $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ avec E, F, G des espaces vectoriels normés. Si f et g sont continues alors $g \circ f$ est continue.

Remarque 6. L'hypothèse que X' soit ouvert est nécessaire pour le point 2.

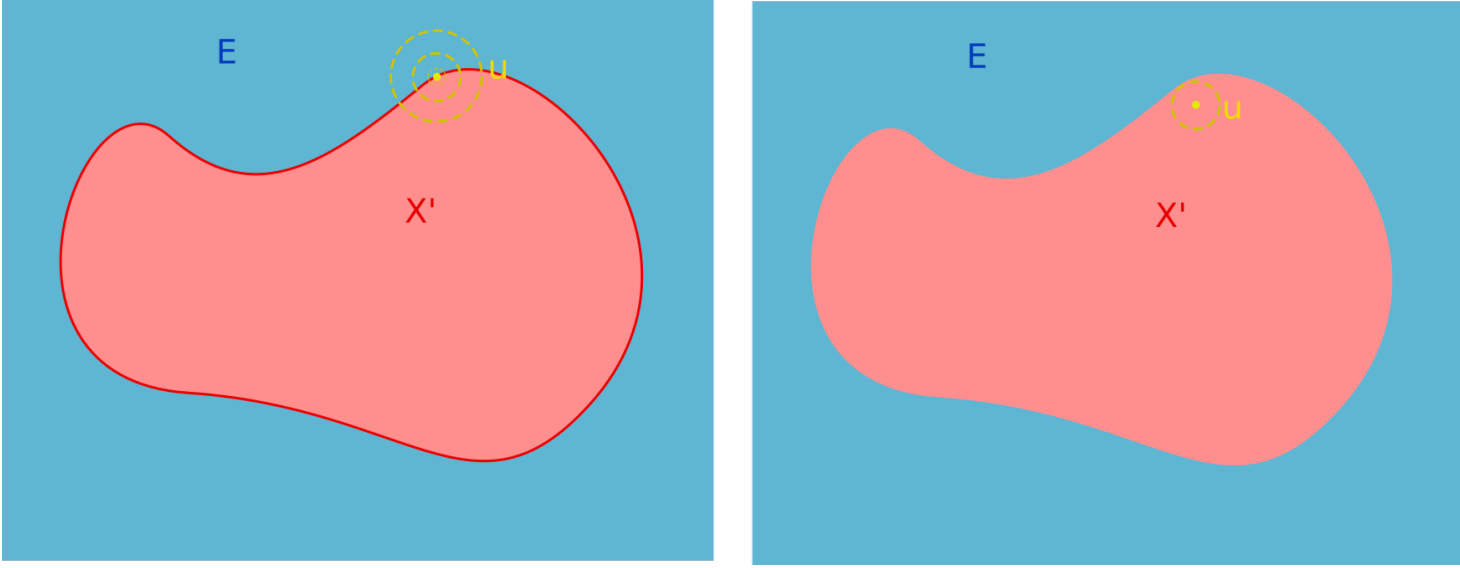


Figure 5: Restriction continue sur une partie non-ouverte ou ouverte

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ u & \longmapsto \text{rouge si } u \in X', \text{ bleu sinon} \end{cases}$$

- A gauche, $f|_{X'}$ est continue mais f n'est pas continue sur X' car on ne peut pas trouver une boule ouverte de X' autour du point u .
- A droite, on peut trouver une boule ouverte autour de u car X' est ouvert.

Preuve 12. Point 1. Soit $X' \subseteq X$ et V un ouvert de Y , montrons que $(f|_{X'})^{-1}(V)$ est un ouvert de X' .

f est continue sur donc il existe U ouvert de E tel que $f^{-1}(V) = X \cap U$.

Mais alors $(f|_{X'})^{-1}(V) = X' \cap X \cap U = X' \cap U$ qui est un ouvert de X' .

Donc $f|_{X'}$ est continue. ✓

Point 2. $f|_{X'}$ est continue, soit $x \in X'$, montrons que f est continue en x .

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $y \in X'$ et $\|x - y\| < \delta$ alors $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

Comme X' est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_r(x) \subseteq X'$.

On choisit $\delta' \leq \min\{r, \delta\}$, alors $\forall y \in \mathcal{B}_{\delta'}(x)$, $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$, donc f est continue en x . ✓

Point 3. ✓

3 Applications uniformément continues, applications linéaires continues

Définition 10. Une application $f : E \longrightarrow F$ est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon, \exists \delta > 0 : \forall x, y \in E, (\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon)$$

Remarque 7. Si est uniformément continue alors elle est continue, la réciproque est cependant fausse.

Définition 11. Une fonction f est *k-lipschitzienne* si

$$\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Théorème 3. Soit $\varphi : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors les propriétés suivantes ont équivalences :

1. φ est continue
2. φ est continue en 0
3. φ est uniformément continue
4. φ est bornée sur $\mathcal{B}_1(0)$
5. φ est k-lipschitzienne.

Preuve 13. Montrons $2. \implies 4. \implies 5. \implies 3. \implies 1. \implies 2.$

1. \implies 2. ✓

2. \implies 4. f est continue en 0, donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\| < \delta \implies \|f(x)\| < \varepsilon$
Soit $x \in \mathcal{B}_1(0)$ avec $x \neq 0$, on a :

$$\|x\| < 1$$

$$\|\delta x\| < \delta$$

$$\|f(\delta \cdot x)\| < \varepsilon$$

$$\|f(x)\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$$

✓

4. \implies 5. Supposons que f soit majoré par $M > 0$ sur la boule unité.

Soient $x \neq y \in E$, on a

$$x - y = (x - y) \cdot \frac{\|x - y\|}{\|x - y\|}$$

$$f(x - y) = \|x - y\| \underbrace{f\left(\frac{x - y}{\|x - y\|}\right)}_{\in \mathcal{B}_1(0)}$$

$$f(x - y) = \|x - y\| \cdot M$$

f est M -lipschitzienne. ✓

5. \implies 3. \iff 1. \implies 2. ✓

Définition 12. Soit f une application lipschitzienne, on appelle *constante de Lipschitz de f* ou *norme d'opérateur de f* la valeur $\|f\| = \inf\{k > 0 \mid f \text{ est } k\text{-lipschitzienne}\} = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|$

La norme d'opérateur est comme son nom l'indique une norme, en particulier

$$\forall x, y \in E, \|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$$

Proposition 7. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}_C(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F . C'est un espace vectoriel normé si on le munit de la norme d'opérateur.

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{L}_C(E, E), \|\varphi \circ \psi\| \leq \|\varphi\| \|\psi\|$$

Remarque 8. On peut étendre ces résultats aux applications bilinéaires : soient E, E' et F trois espaces vectoriels normés, et $f : E \times E' \longrightarrow F$ bilinéaire continue, sa norme d'opérateur est définie par

$$\|f\| = \sup\{\|f(x, y)\| \mid \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$$

On a en particulier $\|f(x, y)\| \leq \|f\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$

4 Espaces produits

Définition 13. Soient (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux espaces vectoriels normés, on construit des normes sur $E_1 \times E_2$ en posant

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_1 &= N_1(x) + N_2(y) \\ \|(x, y)\|_2 &= \sqrt{N_1^2(x) + N_2^2(y)} \\ \|(x, y)\|_\infty &= \max\{N_1(x), N_2(y)\} \end{aligned}$$

On a les relations

$$\|(x, y)\|_\infty \leq \|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_1 \leq 2\|(x, y)\|_\infty$$

Exemple 5. Soit E un espace vectoriel normé, on munit $E \times E$ de la norme définie par $N(x, y) = \|x\| + \|y\|$ et on définit une distance $d(u, v) = \|u - v\|$

d est lipschitzienne :

$$|d(x, y) - d(x', y')| = \|\|x - y\| - \|x' - y'\|\|$$

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq \|\|(x - y) - (x' - y')\|\|$$

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq \|\|(x - x') + (y' - y)\|\|$$

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq \|(x - x')\| + \|(y' - y)\|$$

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq N((x - x') + (y' - y))$$

d est donc 1-lipschitzienne.

Proposition 8. Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés, alors :

1. Les projections $\pi_1 : \begin{cases} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_1 \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{cases}$ et $\pi_2 : \begin{cases} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_2 \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{cases}$ sont lipschitziennes.
2. Une application $f : Y \longrightarrow E_1 \times E_2$ notée $f = (f_1, f_2)$ avec $f_1 : Y \longrightarrow E_1$ et $f_2 : Y \longrightarrow E_2$ est continue si et seulement si f_1 et f_2 sont continues.
3. Si $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ est continue alors pour tout $x \in E_1$, l'application $f_x : \begin{cases} E_2 & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & f(x, y) \end{cases}$ est continue et de même $f_y : \begin{cases} E_1 & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x, y) \end{cases}$ est continue pour tout $y \in E_2$.

Preuve 14. 1. Soit $(x, y) \in E_1 \times E_2$, alors $\pi_1(x, y) = x$, donc $\pi_1(x, y) - \pi_1(x', y') = x - x'$ et donc $\|\pi_1(x, y) - \pi_1(x', y')\| = \|x - x'\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\| = N_1(x - x', y - y')$
 π_1 est 1-lipschitzienne.

2. Si f est continue, alors $\pi_1 \circ f = f_1$ est continue comme composée d'applications continues.

De même $f_2 = \pi_2 \circ f$ est continue.

Inversement, supposons que $f_1 : Y \longrightarrow E_1$ et $f_2 : Y \longrightarrow E_2$ sont continues.

Montrons que $f = (f_1, f_2) : \begin{cases} Y & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \\ x & \longmapsto & (f_1(x), f_2(x)) \end{cases}$

Soit $(x_n)_n$ une suite de Y convergeant vers $x \in Y$, montrons que $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.

Comme f_1 est continue, $(f_1(x_n))_n$ converge $f_1(x)$ et de même pour f_2 .

Donc $f(x_n)_n$ converge vers $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$

3. Se démontre de même par caractérisation séquentielle de la continuité.

Remarque 9. Une fonction peut être continue de chaque variable sans être continue du couple de variables, par exemple

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \longmapsto & 0 \end{cases}$$

f est continue pour x et y fixé, mais $\forall \varepsilon > 0$, $f(\varepsilon, \varepsilon) = \frac{1}{2}$ f n'est donc pas continue car $f(0, 0) = 0$.

Part II

Compacité et complétude

5 Sous-suites et compacité

Théorème 4. Bolzano-Weierstrass

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

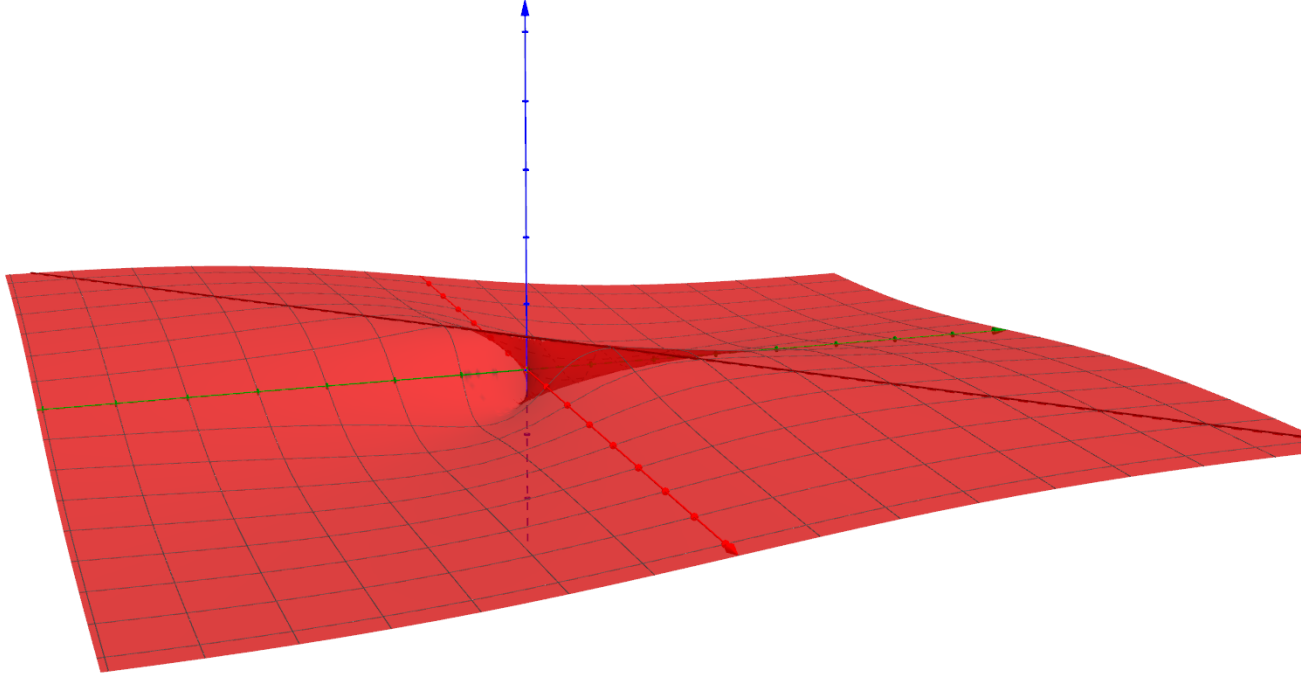


Figure 6: $\left(x, y, \frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ et $(t, t, f(t, t))$

Preuve 15. Soit $(x_n)_n$ bornée par $M > 0$, on définit pour tout $n \geq 0$ l'ensemble $Y_n = \{x_k \mid k \geq n\}$ et $y_n = \sup Y_n$.

On a alors pour tout n , $Y_{n+1} \subseteq Y_n$ et donc $y_{n+1} \leq y_n$.

$(y_n)_n$ est donc une suite minorée par $-M$ décroissante, elle converge ainsi vers une limite $\ell = \inf\{y_n \mid n \geq 0\}$.

Construisons une suite $(x_{k_n})_n$ à l'aide d'une suite strictement croissante $(k_n)_n$ d'entiers tels que :

$$\forall n \geq 1, |x_{k_n} - \ell| \leq \frac{1}{n}$$

On choisit $k_0 = 1$ et on suppose avoir construit : $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$.

Par définition de la suite $(y_n)_n$, il existe un entier p_n tel que :

$$0 \leq y_{p_n} - \ell \leq \frac{1}{n}$$

Mais $(y_k)_k$ est décroissante, alors $\forall k \geq p_n$ on a $0 \leq y_k - \ell \leq \frac{1}{n}$.

y_{p_n} étant une borne supérieure, il existe $k_n \geq p_n$ tel que $y_{p_n} - \frac{1}{n} \leq x_{k_n} \leq y_{p_n}$, ce qui donne :

$$y_{p_n} - \ell - \frac{1}{n} \leq x_{k_n} - \ell \leq y_{p_n} - \ell$$

En particulier on a :

$$-\frac{1}{n} \leq x_{k_n} - \ell \leq \frac{1}{n}$$

□

Définition 14. Une partie de X d'un espace vectoriel normé est *compacte* si toute suite à valeurs dans X admet une sous-suite convergente dans X .

Exemple 6. Toute partie finie d'un espace vectoriel normé est compacte.

Proposition 9. *Toute partie compacte d'un espace vectoriel normé E est fermée et bornée.*

Preuve 16. Soit X une partie compacte de E .

X est fermée Soit $(x_n)_n$ une suite de X convergeant vers ℓ .

Comme X est compact, $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergente dans X , donc la limite de $(x_n)_n$ appartient à X . ✓

X est bornée Sinon il existe une suite non-bornée dans X dont aucune sous-suite ne converge. ✓

□

Remarque 10. La réciproque est fausse en général.

Proposition 10. *Si E est de dimension finie, les compacts de E sont les fermés bornés.*

Preuve 17. Soit $F \subseteq E$ un fermé borné et $(x_n)_n$ une suite à valeur dans F .

F est borné, donc $(x_n)_n$ l'est aussi, or par la généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass en dimension finie, $(x_n)_n$ admet une sous-suite $(y_n)_n$ convergente vers un élément y .

Or F est fermé, donc $y \in F$.

F est bien compact.

□

Proposition 11. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés, X une partie de E et f une application continue de X dans F .*

Si X est un compact de E alors $f(X)$ est un compact de F .

Remarque 11. L'image réciproque d'un compact n'est pas nécessairement un compact, par exemple $\sin^{-1}([0, 1]) = \mathbb{R}$ et pour l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 1 \end{cases}$ on a $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}$

Preuve 18. Soit X un compact de E et $(y_n)_n$ une suite de $f(X)$, soit alors $(x_n)_n$ tel que $y_n = f(x_n)$, qui est une suite de X .

Comme X est compact, on peut extraire une sous-suite convergente de $(x_n)_n$ de limite $\ell \in X$.

Par continuité de f , la suite $(y_n)_n$ converge vers $f(\ell)$ et comme $f(\ell) \in f(X)$, on a bien que $f(X)$ est compact.

□

Corollaire 2. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue avec X compact de E , alors f est bornée et atteint ses bornes.*

6 Compacité en dimension finie

Lemme 1. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie d .

Soit $(e_i)_{i \leq d}$ une base de E et soit la norme sur E

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq d} |x_i| \text{ où } x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$$

Alors toute partie K compacte de E est incluse dans un ensemble de la forme :

$$\left\{ \sum_{i=1}^d x_i e_i \mid x_i \in [a_i, b_i] \right\}$$

Lemme 2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie d de base $e = (e_i)_{i \leq d}$.

Alors les parties compactes de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sont les parties fermées bornées pour cette norme dans \mathbb{R}^d .

Preuve 19. Soit X un fermé borné de E , alors X est inclus dans un ensemble de la forme $K = \left\{ \sum_{i=1}^d x_i e_i \mid x_i \in [a_i, b_i] \right\}$.

Montrons que X est compact. Soit $(x_n)_n$ une suite de X , alors $(x_n)_n$ est une suite de K qui est un compact, donc (x_n) possède une sous-suite convergente dans K et comme X est fermé, sa limite est dans X . □

Corollaire 3. Tout sous-ensemble fermé d'un compact est compact.

Théorème 5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie d , toutes les normes sur E sont équivalentes.

Preuve 20. Soit E de base $e = (e_i)_{i \leq n}$

Soit N une norme sur E et $\|x\|_\infty$ définie pour tout $x = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d$ par $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$

$N(x) \leq C_2 \|x\|_\infty$ Soit $x \in E$, on a :

$$N(x) = N\left(\sum_i x_i e_i\right)$$

$$N(x) \leq \sum_i N(x_i e_i)$$

$$N(x) \leq \sum_i |x_i| N(e_i)$$

$$N(x) \leq \sum_i |x_i| \leq C_2 \|x\|_\infty$$

avec $C_2 = \sum_i N(e_i)$ ✓

$\|x\|_\infty \leq \beta N(x)$ Par l'inégalité triangulaire, on a $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ et d'après l'étape précédente, $|N(x) - N(y)| \leq C_2 \|x - y\|_\infty$, N est donc continue sur E .

Comme la sphère unité \mathcal{S}_1^∞ est compacte (car bornée et fermé dans E) $N|_{\mathcal{S}_1^\infty}$ est continue et $N|_{\mathcal{S}_1^\infty}(\mathcal{S}_1^\infty)$ est bornée, il existe donc un x_0 tel que $\forall x \in \mathcal{S}_1^\infty, N(x) \geq N(x_0)$.

On pose $C_1 = N(x_0)$ et on a :

$$\forall x \in E, N(x) = \|x\|_\infty \cdot N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geq C_1 \|x\|_\infty$$

. ✓

□

Théorème 6. Soient E et F des espaces vectoriels normés de dimension finie, et $\varphi : E \longrightarrow F$.
Si φ est linéaire, alors elle continue.

Preuve 21. Soit e une base de E et $\|\cdot\|_\infty$ la norme associée.
Soit N une norme sur F et $x \in E$.

$$N(\varphi(x)) = N\left(\varphi\left(\sum_i x_i e_i\right)\right)$$

$$N(\varphi(x)) = N\left(\sum_i x_i \varphi(e_i)\right)$$

$$N(\varphi(x)) = \sum_i |x_i| N(\varphi(e_i))$$

$$N(\varphi(x)) \leq \|x\|_\infty \sum_i N(\varphi(e_i))$$

φ est donc bien continue.

7 Applications de la compacité

Théorème 7. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et K un compact de E .
Alors toute application $f : K \longrightarrow F$ continue est uniformément continue.

Preuve 22. Supposons que f n'est pas uniformément continue, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe x et y dans K tels que $\|x - y\| \leq \delta$ et $\|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon$.

En particulier, pour tout $n > 0$, il existe x_n et y_n dans K tels que $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$ et $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon$.

Alors $(x_n)_n$ possède une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente dans K vers une limite $x \in K$.

De même pour $(y_{\varphi(n)})$ qui possède une sous-suite $(y_{(\varphi \circ \psi)(n)})$ qui converge vers une limite $y \in K$.

Soient $x'_n = x_{(\varphi \circ \psi)(n)}$ et $y'_n = y_{(\varphi \circ \psi)(n)}$.

Alors $\|x'_n - y'_n\| \leq \frac{1}{(\varphi \circ \psi)(n)} \leq \frac{1}{n}$.

Donc $x = y$, mais f est continue en x , donc $f(x'_n)$ converge vers $f(x)$ et $f(y'_n)$ converge vers $f(x)$, ce qui est contradictoire avec le fait que $\|f(x'_n) - f(y'_n)\| \geq \varepsilon$.

8 Suites de Cauchy

Définition 15. Une suite $(x_n)_n$ est dite *de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall m, n \in \mathbb{N}, (m, n \geq N \implies \|x_m - x_n\| \leq \varepsilon)$$

et de manière équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall m, n \in \mathbb{N}, (m \geq N \implies \|x_m - x_{m+n}\| \leq \varepsilon)$$

Remarque 12. Une définition équivalente d'une suite de Cauchy est une suite $(x_n)_n$ telle que $\delta(A_k) \longrightarrow 0, (k \rightarrow \infty)$ où $A_k = \{x_n | n \geq k\}$ et $\delta(X) = \sup_{x, y \in X} \|x - y\|$.

Proposition 12. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application uniformément continue sur E , si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de E , alors $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy de F .

Preuve 23. Il s'agit de vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tous $m, n > N$ on a $\|f(x_n) - f(x_m)\| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in E$, on a $\|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Comme $(x_n)_n$ est de Cauchy, il existe N tel que si $m, n > N$ alors $\|x_m - x_n\| < \delta$ et par suite $\|f(x_m) - f(x_n)\| < \varepsilon$. \square

Proposition 13. Soit E un espace vectoriel normé.

1. Toute suite de Cauchy est bornée.
2. Toute suite convergente est de Cauchy.
3. Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
4. Si une suite de Cauchy admet une sous-suite convergente, alors elle converge.

Preuve 24. Point 1 Soit N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\|x_n - x_N\| < 1$, alors $\|x_n\| - \|x_N\| < 1$ d'où $\|x_n\| < 1 + \|x_N\|$ et donc $\|x_n\| \leq \max(\|x_0\|, \dots, \|x_{N-1}\|, 1 + \|x_N\|)$ ✓

Point 4 On suppose qu'il existe une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente vers une limite ℓ .

Soit $\varepsilon > 0$, il existe N et N' tels que :

$$\forall n \geq N, \|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et :

$$\forall n, m \geq N' \|x_n - x_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On note $N_0 = \max(N, N')$, si $m \geq N_0$ et $n \geq N_0$, alors $\|x_m - \ell\| \leq \|x_m - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \varepsilon$. ✓

Corollaire 4. Dans un compact, toute suite de Cauchy est convergente.

Remarque 13. En dimension infini, les parties fermées et bornées ne sont pas forcément compactes.

Soit E l'ensemble des polynômes sur \mathbb{R} muni de la norme :

$$\|P\| = \sum_{i=0}^n |a_i|, \text{ avec } n \text{ le degré de } P$$

Soit la suite $(P_n)_n = (X^n)_n$, alors pour tout n , $\|P_n\| = 1$

$(P_n)_n$ est une suite de \mathcal{B}_1 , or celle-ci est bornée et fermée dans E , mais $\|P_n - P_m\| = 2$ si $n \neq m$.

Donc $(P_n)_n$ n'est pas de Cauchy, et n'admet aucune sous-suite convergente. \mathcal{B}_1 n'est donc pas de Cauchy.

9 Parties complètes et espaces de Banach

Définition 16. On dit qu'une partie X d'un espace vectoriel normé E est *complète* si toute suite de Cauchy dans X converge dans X . On dit aussi que X est complet.

Proposition 14.

1. Toute partie compacte est complète.
2. Tout espace vectoriel de dimension finie est complet.
3. Toute partie complète d'un espace vectoriel normé est fermée.
4. Toute partie fermée d'un complet est complète.

Preuve 25. Point 2 Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de E de dimension finie, alors elle est bornée, donc elle admet une sous-suite convergente (car E est de dimension finie), et donc $(x_n)_n$ converge. ✓

Point 3 Soit $(x_n)_n$ une suite convergente de X complet, montrons que la limite ℓ de $(x_n)_n$ est dans X .

$(x_n)_n$ est convergente donc elle est de Cauchy. Comme X est complet $(x_n)_n$ converge dans X , d'où le résultat par unicité de la limite. ✓

Point 4 Soit F un ensemble fermé de X complet, montrons que F est complet.

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de F montrons que $(x_n)_n$ converge dans F .

Comme $F \subseteq X$ qui est complet alors $(x_n)_n$ converge dans X .

Comme F est fermé et que $(x_n)_n$ converge, sa limite est dans F . ✓

Définition 17. Si E est un espace vectoriel normé complet alors on dit que E est un *espace de Banach*.

Exemple 7. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[X], \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R}), \mathbb{C}$ sont complets.

1. \mathbb{Q} n'est pas complet (dans \mathbb{R}).

Considérons la suite

$$x_0, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$$

$(x_n)_n$ est bornée par 1 et 2, elle admet donc une sous-suite convergente convergente dans \mathbb{R} de limite ℓ vérifiant $\ell = 1 + \frac{1}{\ell}$, donc $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On rappelle qu'une série $\sum x_n$ est normalement convergente si $(\sum \|x_n\|)_n$ est convergente.

Proposition 15. Soit E un espace vectoriel normé, alors E est de Banach si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

Preuve 26. \implies Soit $(x_n)_n$ telle que $\sum x_n$ soit normalement convergente.

On note $S_n = \sum_{i=0}^n x_i$ et on montre que $(S_n)_n$ converge dans E .

Soient $n > m$, alors $S_n - S_m = \sum_{i=m+1}^n x_i$ et donc $\|S_n - S_m\| \leq \sum_{i=m+1}^n \|x_i\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_i\|$.

Sachant que $\sum \|x_k\|$ converge, on a que $\sum_{i=m+1}^{\infty} \|x_i\| \rightarrow 0, (m \rightarrow \infty)$.

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un N tel que pour tout $m \geq N$ on a $\sum_{k \geq m+1} \|x_k\| \leq \varepsilon$, d'où

$$\forall m \geq N, \forall n \geq 0, \|S_n - S_m\| \leq \varepsilon$$

Donc $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy. Comme E est de Banach, elle converge. ✓

⇐ Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans E , montrons qu'elle converge dans E .

$(x_n)_n$ étant de Cauchy, pour tout $k \geq 0$, il existe N_k tel que pour tout $n, m \geq N_k$ on a $\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k}$

On pose $y_k = x_{N_{k+1}} - x_{N_k}$, alors $\|y_k\| \leq 2^{-k}$ donc $\sum_{k \geq 0} \|y_k\|$ converge.

Mais alors $\sum_{k \geq 0} y_k$ converge dans E par hypothèse.

On écrit alors :

$$\sum_{i=0}^k y_i = y_0 + y_1 + \dots + y_k$$

$$\sum_{i=0}^k y_i = x_{N_{k+1}} - x_{N_0}$$

Donc $x_{N_{k+1}} = x_{N_0} + \sum_{i=0}^k y_i$, alors $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergente, donc elle converge. ✓

□

Proposition 16. Une partie de X d'un espace vectoriel normé E est complète si et seulement si toute suite décroissante de fermés non-vides de E , dont le diamètre tend vers 0 a une intersection non-vide.

Preuve 27. ⇒ Soit $X \subseteq E$ complet et une suite $(F_n)_n$ telle que :

$$\begin{cases} \forall n, F_n \neq \emptyset \\ \forall n, F_{n+1} \subseteq F_n \\ \delta(F_n) \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty) \end{cases}$$

Pour tout n , on choisit un élément x de F_n , cette suite est de Cauchy car le diamètre des F_n tend vers 0 : en effet si $n > m$, alors $x_n \in F_n$ et $\|x_n - x_m\| \leq \delta(F_m)$.

Mais alors $(x_n)_n$ converge dans X , puisque X est complet.

Soit x sa limite, montrons que $x \in \bigcap_{n \geq 0} F_n$.

Soit m et soit la suite $(x_n)_{n \geq m}$. Cette suite converge vers x et par ailleurs c'est une suite de F_m .

Comme F_m est fermé, on a $x \in F_m$, d'où $x \in \bigcap_{m \geq 0} F_m = \bigcap_{m \geq 0} F_m$

C'est d'ailleurs l'unique élément de l'intersection puisque $\delta(F_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ✓

⇐ Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de X , montrons que $(x_n)_n$ converge dans X .

Pour tout m on définit le fermé $F_m = \{x_n | n \geq m\}$.

Alors la famille des F_m est décroissante, les fermés sont non-vides et $\delta(F_m) \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$ car $(x_n)_n$ est de Cauchy.

L'intersection des F_m est formée de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) , par hypothèse cet ensemble est non-vide, donc $(x_n)_n$ possède au moins une sous-suite convergente, donc $(x_n)_n$ converge car elle est de Cauchy. ✓

□

Théorème 8. Soit A un ensemble et X une partie complète d'un espace vectoriel normé E , alors :

1. $\mathcal{F}_b(A, X)$ est un espace de Banach s'il est muni de la norme uniforme.
2. Si de plus A est compact, alors l'ensemble $\mathcal{C}(A, X)$ des fonctions continues de A dans X est un espace de Banach.

Preuve 28. Point 1 Soit (f_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{F}_b(A, X)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour tous $m, n \geq N$, on a $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$.

Alors en particulier pour tout $x \in A$, $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$, donc pour tout $x \in A$ la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans X , donc elle converge vers une limite $f(x)$ car X est complet.

Il faut vérifier que $f \in \mathcal{F}_b(A, X)$.

On reprend $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$ pour passer à la limite $n \rightarrow \infty$ avec $m > N$ fixé, alors $\|f(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$ et donc $\|f(x)\| < \varepsilon + \|f_m(x)\|$.

Donc $f \in \mathcal{F}_b(A, X)$ avec $\|f\| \leq \varepsilon + \|f_m\|$.

Enfin il faut vérifier que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\| = 0$, ce qui est vrai car $\sup_x \|f(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon$ dès que $m > N$. ✓

Point 2 On remarque que $\mathcal{C}(A, X) \subseteq \mathcal{F}_b(A, X)$ car A est compact.

Donc il suffit de montrer que $\mathcal{C}(A, X)$ est fermé pour la norme uniforme, ce qui est vrai par la limite uniforme de fonctions continues. ✓

□

Théorème 9. Soient E et F deux espaces vectoriels normés avec F complet, alors l'ensemble $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F munie de la norme d'opérateur est un espace de Banach.

Preuve 29. On sait que $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace vectoriel normé, il ne reste qu'à démontrer qu'il est complet.

Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy à valeur dans $\mathcal{L}_c(E, F)$, montrons qu'elle converge vers un élément u de $\mathcal{L}_c(E, F)$.

On sait que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n, m, (n, m \geq N \implies \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon)$$

Ce qui veut dire que

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|u_n(x) - u_m(x)\| \leq \varepsilon$$

Donc pour tout x , $(u_n(x))_n$ est une suite de Cauchy, et sachant F complet on peut poser $u(x) = \lim_n u_n(x)$.

Il reste à démontrer que u est une application linéaire et que :

$$\lim_n \|u_n - u\| = 0$$

ce qui impliquera entre autre la continuité de u .

- Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, u_n est linéaire alors par passage à la limite :

$$u_n(x + \lambda y) = u_n(x) + \lambda u_n(y) \longrightarrow u(x) + \lambda u(y) \quad (n \rightarrow \infty)$$

- En passant à la limite en m , on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : (n \geq N \implies \sup_{\|x\| \leq 1} \|u_n(x) - u(x)\| \leq \varepsilon)$$

Ainsi $\lim_n \|u_n - u\| = 0$, et de plus elle est bornée grâce au théorème précédent.

10 Applications

Théorème 10. *Théorème de Riesz*

Soit E un espace vectoriel normé, alors E est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée de E est compacte.

Preuve 30. Montrons que si la boule unité fermée est compacte, alors E est de dimension finie.

Supposons par l'absurde que E de dimension infinie et que sa boule unité fermée B soit compacte.

On construira par récurrence une suite $(x_n)_n$ de Cauchy de B telle que $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$, ce qui contredira le fait que la boule unité fermée soit compacte car cette suite ne possède aucune sous-suite convergente.

On pose $x_0 = 0$ et on suppose construits x_0, \dots, x_n dans B tels que $\|x_i - x_j\| \geq \frac{1}{2}$ pour tous $i, j \leq n$.

Soit $F_n = \text{Vect}(x_0, x_1, \dots, x_n)$, alors $\dim F_n \leq n + 1$, sachant E de dimension infinie, il existe un élément $a \in E \setminus F_n$.

On note $d(a, F_n) = \min_{f \in F_n} \|a - f\|$, et soit b tel que $\|a - b\| \leq 2 \cdot d(a, F_n)$.

Posons $x_{n+1} = \frac{a-b}{\|a-b\|}$, alors $x_{n+1} \in B$.

Il reste à vérifier que : $\forall k \leq n, \|x_{n+1} - x_k\| \geq \frac{1}{2}$

On remarque que $d(a, F_n) = d(a - b, F_n)$, en effet :

$$d(a - b, F_n) = \min_{f \in F_n} \|a - b - f\| = \min_{f \in F_n} \|a - (b + f)\| = \min_{b+f \in F_n} \|a - (b + f)\| = \min_{f' \in F_n} \|a - f'\|$$

De même $d(\frac{a-b}{\|a-b\|}, F_n) = \frac{d(a-b, F_n)}{\|a-b\|}$.

Donc $d(x_{n+1}, F_n) = \frac{1}{\|a-b\|} d(a - b, F_n) = \frac{1}{\|a-b\|} d(a, F_n) \geq \frac{1}{\|a-b\|} \cdot \frac{\|a-b\|}{2} \geq \frac{1}{2}$

Enfin on a $\forall k \leq n, d(x_n, F_n) \leq \|x_{n+1} - x_k\|$

Théorème 11. *Théorème du point fixe*

Soit E un espace vectoriel normé et X une partie complète de E non-vide.

Soit $f : X \rightarrow X$ une application contractante, c'est-à-dire k -Lipschitzienne avec $0 < k < 1$, alors :

1. f possède un unique point fixe z_0
2. pour tout point $x \in X$, la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

converge vers z_0 .

Preuve 31. Soit $x \in X$ et la suite $(x_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Montrons que cette suite converge.

Comme X est complet, il suffit de vérifier que $(x_n)_n$ est de Cauchy :

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\|$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k \cdot \|x_n - x_{n-1}\| = k \cdot \|f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})\|$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k \cdot \|f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})\| = k^2 \cdot \|x_{n-1} - x_{n-2}\|$$

...

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$$

Soient n et m , on a :

$$\|x_{n+m} - x_n\| = \|x_{n+m} - x_{n+m-1} + x_{n+m-1} \dots + x_{n+1} - x_n\|$$

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \sum_{j=1}^m \|x_{n+j} - x_{n+j-1}\|$$

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leq \sum_{j=1}^m k^{n+j-1} \|x_1 - x_0\| = k^n \sum_{j=1}^{\infty} k^{j-1} \|x_1 - x_0\|$$

Donc comme $k < 1$, on a que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, et X étant complet on en déduit que $(x_n)_n$ converge dans X vers un élément $0 \in X$.

Montrons que $f(z_0) = z_0$ puis que z_0 est l'unique point fixe de f .

On sait que $x_{n+1} = f(x_n)$, comme f est continue et donc par passage à la limite $z_0 = f(z_0)$.

z_0 est de plus unique car si on a deux points fixes z et z' , on a $\|z - z'\| = \|f(z) - f(z')\| \leq k \cdot \|z - z'\|$, donc nécessairement $z = z'$ car $0 < k < 1$.

□

Part III

Fonctions dérivables

11 Rappels sur les fonctions dérivables réelles

Définition 18. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .

Soi $x_0 \in I$, on dit que f est dérivable en x_0 si :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est fini.

Cette limite s'appelle la dérivée de f en x et se note $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

La fonction f est *dérivable sur* I si elle est dérivable en tout point de I et on note f' ou $\frac{df}{dx}$ la fonction dérivée $x \mapsto f'(x)$.

Propriété 1.

- Une fonction dérivable est continue

- Soient f et g dérivables sur un même intervalle, alors on a :

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(\lambda f)' = \lambda f'$
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$

Proposition 17. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve 32. On peut supposer que x_0 est un maximum local, pour $h > 0$ assez petit on a

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

et

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \geq 0$$

et en passant à la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

□

Théorème 12. *Théorème de Rolle*

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$, s'il existe a et b tels que $f(a) = f(b)$ alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve 33. f est continue sur $[a, b]$ donc bornée et atteint ses bornes, on pose alors :

$$m = \min_{[a, b]} f$$

$$M = \max_{[a, b]} f$$

et soit x_0 tel que $f(x_0) = m$ et x_1 tel que $f(x_1) = M$.

Si $x_0 = x_1$, c'est que la fonction est constante, et donc $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$, alors $m = M$.

Sinon, ce sont des extremums locaux et par la proposition précédente, la dérivée s'annule en ce point.

□

Théorème 13. *Théorème des accroissements finis*

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Preuve 34. Appliquer le théorème de Rolle à $\phi : t \mapsto f(t) - f(a) - \frac{t-a}{b-a}(f(b) - f(a))$

Corollaire 5. - Si $f' \geq 0$ alors f est croissante.

- Si $f' \leq 0$ alors f est décroissante.

- Si $f' = 0$ alors f est constante.

Corollaire 6. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f' > 0$.
Alors $f(I)$ est ouvert, f est bijective de I sur $f(I)$ et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Preuve 35. Montrons que f^{-1} est dérivable.

Soit $x_0 \in I$ et $x \in I$, on pose $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$.

Alors si $y \rightarrow y_0$ on a $x \rightarrow x_0$ par continuité de f^{-1} .

On veut calculer

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - (f^{-1})'(y_0)}{y - y_0}$$

alors par $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
on a

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - (f^{-1})'(y_0)} = f'(x_0)$$

et comme $f'(x_0) > 0$ on a

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - (f^{-1})'(y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

12 Fonctions dérivables à valeurs dans un espace de Banach

Définition 19. Soit E un espace de Banach, I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow E$.

On dit que f est *dérivable en un point* $x_0 \in I$ si la limite suivant existe et est finie :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Cette valeur est notée $f'(x_0)$.

On dit que f est *dérivable sur* I si elle est dérivable en tout point de I et on note

$$f' : \begin{cases} I & \rightarrow E \\ x_0 & \mapsto f'(x_0) \end{cases}$$

On peut naturellement définir la somme et le produit de dérivées de fonctions dérivables de I dans E .

De plus, si on a deux fonctions dérivables $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow E$, alors $g \circ f$ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)'(x) = f'(x)(g \circ f')(x)$.

Théorème 14. Soit $f : I \rightarrow E$ avec I un intervalle de \mathbb{R} et E un espace de Banach de dimension finie d .

Soit (e_1, \dots, e_d) une base de E et soient $f_1, \dots, f_d : I \rightarrow \mathbb{R}$ les coordonnées de f dans cette base.

Alors f est dérivable en $x_0 \in E$ si et seulement si les fonctions f_1, \dots, f_d sont dérivables en x_0 , et on a

$$f'(x_0) = f'_1(x_0)e_1 + \dots f'_d(x_0)e_d$$

\therefore

12.1 Inégalité des accroissements finis

Le théorème de Rolle n'est pas vrai si $E \neq \mathbb{R}$, par exemple

$$f : \begin{cases} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{cases}$$

On a pour tout t : $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$, donc $\|f'(t)\|_2 = 1$, f' ne s'annule pas alors que $f(0) = f(2\pi)$.

Les accroissements finis ne sont pas valables non-plus.

Théorème 15. Soit $f : [a, b] \longrightarrow E$ continue, et dérivable sur $]a, b[$, et $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$ telle que $\forall x \in]a, b[, \|f'(x)\| \leq h'(x)$

Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq h(b) - h(a)$.

Preuve 36. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varphi_\varepsilon : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_\varepsilon(t) = \|f(t) - f(a)\| + h(a) - h(t) - \varepsilon(t - a)$, elle vérifie $\varphi_\varepsilon(a) = 0$

On définit l'ensemble borné contenant a

$$E_\varepsilon = \{t \in [a, b] \mid \varphi_\varepsilon(t) \leq \varepsilon\}$$

Si on montre que $b \in E_\varepsilon$ alors le théorème est démontré, en effet si $b \in E_\varepsilon$ alors $\|f(b) - f(a)\| - (h(b) - h(a) + \varepsilon(b - a)) \leq \varepsilon$ et en faisant tendre ε vers 0 : $\|f(b) - f(a)\| - (h(b) - h(a)) \leq 0$.

On a $E_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^{-1}([-\infty, \varepsilon])$ donc comme φ_ε est continue, E_ε est fermé et contient sa borne supérieure, notée c . Celle-ci est inférieure ou égale à b , on suppose par l'absurde $c < b$.

Comme $\varphi_\varepsilon(a) = 0$, il existe $t' > a$ tel que $[a, t'] \subseteq E_\varepsilon$ car φ_ε est continue, ainsi $c > a$.

Comme f et h sont dérivables en c , il existe $t > c$ suffisamment proche de c tel que

$$\frac{\|f(t) - f(c)\|}{t - c} \leq \|f'(c)\| + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \frac{h(t) - h(c)}{t - c} \geq h'(c) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|f(t) - f(c)\| \leq (t - c) \left(\|f'(c)\| + \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad \text{et} \quad (t - c) \left(h'(c) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq h(t) - h(c)$$

et par hypothèse $\|f'(c)\| \leq h'(c)$, alors

$$\|f(t) - f(c)\| \leq (t - c) \left(h'(c) + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

$$\|f(t) - f(c)\| \leq (t - c) \left(h'(c) - \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \right)$$

$$\|f(t) - f(c)\| \leq (t - c) \left(h'(c) - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \varepsilon(t - c)$$

$$\|f(t) - f(c)\| \leq (h(t) - h(c)) + \varepsilon(t - c)$$

On sait que $c \in E_\varepsilon$ et donc vérifie $\|f(c) - f(a)\| \leq h(c) - h(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon$, et en sommant les deux inégalités on obtient

$$\|f(t) - f(a)\| \leq \|f(c) - f(a)\| + \|f(t) - f(c)\| \leq h(c) - h(a) + \varepsilon(c - a) + h(t) - h(c) + \varepsilon(t - c) + \varepsilon$$

$$\|f(c) - f(a)\| \leq h(t) - h(a) + \varepsilon(t - a) + \varepsilon$$

$$\varphi_\varepsilon(t) = \|f(c) - f(a)\| - (h(t) - h(a) + \varepsilon(t - a)) \leq \varepsilon$$

Mais alors $\varphi_\varepsilon(t) \leq \varepsilon$, donc $t \in E_\varepsilon$, ce qui contredit le fait que c soit la borne supérieure de E_ε , donc $c = b$. □

En particulier, en prenant h une primitive de f' on obtient

$$\|f(b) - f(a)\| \leq h(b) - h(a) \leq \sup_{x \in [a, b]} |h'(x)|(b - a) = \|f'\|_\infty(b - a)$$

Corollaire 7. Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue et dérivable sur $]a, b[$.

S'il existe une constante $k > 0$ tel que $\forall x \in]a, b[$, alors f est k -lipschitzienne.

Preuve 37. On suppose $x > y$, on définit $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = kx$, par l'inégalité des accroissements finis on a alors

$$\|f(x) - f(y)\| \leq h(x) - h(y) \leq k(x - y)$$

12.2 Dérivées successives et inégalités de Taylor

Théorème 16. *Théorème de Taylor-Lagrange*

Soit $n \geq 0$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], E)$, on pose

$$M = \sup_{x \in [a, b]} \|f^{(n+1)}(x)\|$$

Alors on a l'inégalité suivante :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k \right\| \leq M \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

Preuve 38. Par récurrence sur n :

$n = 0$: $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a)$ par le corollaire précédent ✓

$n \geq 1$ On définit la fonction $\varphi = f'$ qui est de classe \mathcal{C}^n puisque f est \mathcal{C}^{n+1} .

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à φ sur $[a, x]$ avec $x < b$, alors on a

$$\left\| \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x - a)^k}{k!} \varphi^{(k)}(a) \right\| \leq \sup_{y \in [a, x]} \|\varphi^{(n)}(y)\| \frac{(x - a)^n}{n!}$$

$$\text{Or } \sup_{y \in [a, x]} \|\varphi^{(n)}(y)\| = \sup_{y \in [a, x]} \|f^{(n+1)}(y)\| \leq M$$

$$\text{On pose } g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a), \text{ donc } g'(x) = \varphi(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(x - a)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(a) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x - a)^k}{k!} \varphi^{(k)}(a)$$

et donc $\|g'(x)\| \leq M \frac{(x - a)^n}{n!}$, ainsi si $h(x) = M \frac{(x - a)^{n+1}}{(n+1)!}$ alors $\|g'(x)\| \leq h'(x)$

Par l'inégalité des accroissements finis on a donc

$$\|g(b) - g(a)\| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{Or } g(b) - g(a) = g(b) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a), \text{ d'où le théorème. } \checkmark$$

□

Théorème 17. *Théorème de Taylor-Young*

Si f est de classe \mathcal{C}^n sur I avec $n > 0$, alors pour tout $a \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon_n(x-a)$$

$$\text{Où } \lim_{u \rightarrow a} \varepsilon_n(u) = 0.$$

Preuve 39. On note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} \|f(x)\|$.

On définit $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ et $\varepsilon_n(u) = \frac{g(a+u)}{u^n}$, on a bien $g(x) = (x-a)^n \varepsilon_n(x-a)$.

g est de classe \mathcal{C}^n , et on a $g(a) = 0$, $g'(a) = f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(a-a)^k}{(k-1)!} f^{(k)}(a) = 0$ et de même pour tout $k \leq n$,

$$g^{(k)}(a) = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|g^{(n)}(u)\| \leq \varepsilon$ si $\|u-a\| \leq \delta$.

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$ à la fonction g on trouve pour $0 < u < \delta$:

$$\|g(a+u)\| = \left\| g(a+u) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^k}{k!} g^{(k)}(a) \right\| \leq \sup_{y \in [a, a+u]} \|g^{(n)}(y)\| \frac{u^n}{n!}$$

Donc $\|g(a+u)\| \leq \varepsilon \frac{u^n}{n!}$, mais $\varepsilon_n(u) = \frac{1}{u^n} g(a+u)$ donc pour $0 < u < \delta$ on a $\|\varepsilon_n(u)\| \leq \frac{\varepsilon}{n!} \leq \varepsilon$, d'où $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon_n(u) = 0$. □

12.3 Application au séries de fonctions

Théorème 18. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I un intervalle ouvert de \mathbb{R} vers un espace de Banach E .

On suppose que

1. il existe $x_0 \in I$ tel que $\sum \|f_n(x_0)\|$ converge

2. f_n est dérivable sur I et la série de dérivées converge normalement : $\sum \|f'_n(x)\|_\infty$ converge

Alors $\sum f_n(x)$ converge en tout point de I et la limite f de la série est dérivable avec $f'(x) = \sum f'_n(x)$

Preuve 40.

Convergence de $\sum f_n$

Démontrons la convergence de $\sum f_n(x)$ pour tout $x \in I$, comme E est complet il suffit de montrer que $\sum \|f_n(x)\|$ converge.

Par les accroissements finis, $\|f_n(x) - f_n(x_0)\| \leq \|f'_n\|_\infty |x - x_0|$ donc $\|f_n(x)\| \leq \|f_n(x_0)\| + \|f'_n\|_\infty \cdot |x - x_0|$

$$\sum \|f_n(x)\| \leq \sum \|f_n(x_0)\| + |x - x_0| \sum \|f'_n\|_\infty$$

$\sum f_n(x)$ est une série normalement convergente, donc convergente car E est complet. ✓

f est dérivable et $f'(x) = \sum f'_n(x)$

Soit $f(x) = \sum f_n(x)$, montrons que f est dérivable sur I .

On pose $\tau(h) = \left\| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum f'_n(x) \right\|$, montrons $\lim_0 \tau = 0$.

On peut écrire pour tout N :

$$\sum f'_n(x) = \sum_{n=0}^N f'_n(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} f'_n(x)$$

en gardant en tête que $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{\infty} \|f'_n\|_\infty = 0$

Pour tout $h > 0$ on a

$$\begin{aligned} \tau(h) &= \frac{1}{h} \left\| f(x+h) - f(x) - \sum h f'_n(x) \right\| \\ &= \left\| \sum f_n(x+h) - \sum f_n(x) - \sum h f'_n(x) \right\| \\ &= \left\| \sum (f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)) \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \left\| \sum_{n=0}^N f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x) \right\| + \frac{1}{h} \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x) \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \sum_{n=0}^N \|f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)\| + \frac{1}{h} \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)\| \\ &\leq \frac{1}{h} \sum_{n=0}^N (\|f_n(x+h) - f_n(x)\| + h \|f'_n(x)\|) + \frac{1}{h} \sum_{n=N+1}^{\infty} (\|f_n(x+h) - f_n(x)\| + h \|f'_n(x)\|) \\ &\leq \frac{1}{h} \sum_{n=0}^N (h \|f'_n\|_\infty + h \|f'_n(x)\|) + \frac{1}{h} \sum_{n=N+1}^{\infty} (h \|f_n\|_\infty + h \|f'_n(x)\|) \quad \text{par les accroissements finis} \\ &\leq \frac{1}{h} \sum_{n=0}^N 2h \|f'_n\|_\infty + \frac{1}{h} \sum_{n=N+1}^{\infty} 2h \|f_n\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{h} \sum_{n=0}^N 2h \|f'_n\|_\infty + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_\infty \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, pour N assez grand $\sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$, par ailleurs pour $\delta > 0$ assez petit, on a :

$$\forall n \leq N, \quad \left(0 < h < \delta \implies \left\| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2(N+1)} \right)$$

Finalement pour $|h| < \delta$, on a que $|\tau(h)| \leq (N+1)\frac{\varepsilon}{2(N+1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, d'où le théorème. ✓

Part IV

Applications différentiables

Dans ce chapitre on considérera deux espaces de Banach E et F de dimension quelconque et une application $f : E \longrightarrow F$.

Si T est une application linéaire, on notera $T \cdot x$ l'image de x par T .

On ne considérera que des applications linéaires continues.

On rappelle la notation de Landau : $f(x) = o(x)$ si et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0 telle que $\|f(x)\| \leq \|x\|\varepsilon(\|x\|)$

13 Applications différentiables

13.1 Différentielles

Lemme 3. Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue telle que $T \cdot x = o(x)$, alors $T = 0$.

Preuve 41. Il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\|T \cdot x\| = \varepsilon(\|x\|)\|x\|$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$.

si T était non-nulle alors il existerait $x_0 \neq 0$ tel que $T \cdot x_0 \neq 0$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a d'une part

$$\|T \cdot (\lambda x_0)\| = |\lambda| \|T \cdot x_0\|$$

et d'autre part

$$\|T \cdot (\lambda x_0)\| = \varepsilon(\lambda \|x_0\|) |\lambda| \|x_0\|$$

d'où l'identité $\|T \cdot x_0\| = \varepsilon(\lambda \|x_0\|) \|x_0\|$ ce qui est impossible car $\|T \cdot x_0\|$ est constant et $\varepsilon(\lambda \|x_0\|)$ tend vers 0 quand λ tend vers 0.

Définition 20. On dit que f est *différentiable* en $a \in E$ s'il existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(x) = f(a) + T \cdot (x - a) + o(x - a)$$

Remarque 14. Si f est différentiable en a , alors l'application linéaire T associée est unique, en effet s'il existe T_1, T_2 vérifiant la même égalité, alors

$$f(x) = f(a) + T_1 \cdot (x - a) + o(x - a) = f(a) + T_2 \cdot (x - a) + o(x - a)$$

$$T_1 \cdot (x - a) - T_2 \cdot (x - a) = o(x - a)$$

$$(T_1 - T_2) \cdot (x - a) = o(x - a)$$

alors $T_1 - T_2 = 0$ par le lemme précédent.

Cette application linéaire est appelée *différentielle* de f au point a et on la note T_a , $f'(a)$, $df(a)$ ou $\nabla f(a)$.

Proposition 18. Si f est différentiable en a , alors elle est continue en a .

Définition 21. Si f est différentiable en tout point d'un ouvert U de E alors on dit qu'elle est *différentiable sur* U , et l'application suivante est appelée *différentielle de f*

$$f' : \begin{cases} U & \longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a & \longmapsto f'(a) \end{cases}$$

Proposition 19. Les applications constantes sont différentiables, de différentielle nulle.

Les applications linéaires continues sont différentiables et si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $T' = T$.

Proposition 20. Supposons que $E = \mathbb{R}$, alors f est différentiable au point a de \mathbb{R} si et seulement si elle y est dérivable.

On a alors $T_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h \longmapsto f'(a)h$

Proposition 21.

- Si f et g sont deux fonctions différentiables, alors $f + g$ est différentiable, de différentielle $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- Si $f : E \longrightarrow K$ et $g : K \longrightarrow F$ sont deux applications différentiables alors $g \circ f$ est différentiable et $(g \circ f)'(x) = (g' \circ f) \circ f'(x)$

Preuve 42. Soit $a \in E$ et soit $b = f(a) \in K$, g est différentiable en b et f est différentiable en a , donc

$$g(y) = g(b) + g'(b) \cdot (y - b) + o(y - b)$$

$$g(f(x)) = g(b) + g'(b) \cdot (f(x) - b) + o(f(x) - b)$$

Or $f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + o(x - a)$

Donc $g \circ f(x) = g \circ f(a) + g'(f(a)) \cdot (f'(a) \cdot (x - a) + o(x - a))$

On voudrait montrer que $g \circ f(x) = (g \circ f)(a) + g'(f(a)) \circ f'(a)(x - a) + o(x - a)$

Pour conclure il suffit de montrer que

$$g'(f(a)) \cdot (o(x - a)) + o(f'(a) \cdot (x - a) + o(x - a)) = o(x - a)$$

De manière générale, si T est une application linéaire, alors $T \cdot o(x) = o(x)$, de même $o(T \cdot x) = o(x)$ et $o(o(x - a)) = o(x - a)$, d'où le résultat.

Proposition 22. Soit $F = F_1 \times F_2$, une application $f : E \longrightarrow F$ est différentiable si et seulement si chacune de ses deux coordonnées de $f = (f_1, f_2)$ sont différentiables et on a $f' = (f'_1, f'_2)$.

14 Dérivées partielles en dimension finie

Proposition 23. Si f est différentiable en $a \in E$, alors pour tout vecteur $b \in E$, la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow F$, $t \longmapsto f(a + tb)$ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = f'(a) \cdot b$

Preuve 43.

$$\varphi(t) - \varphi(0) = f(a + tb) - f(a)$$

$$= T_a \cdot tb + o(tb)$$

$$= tT_a \cdot b + o(t)$$

$$\text{donc } \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \longrightarrow T_a \cdot b, \quad (t \rightarrow 0)$$

Définition 22. Sous les hypothèses de la proposition le vecteur $f'(a) \cdot b$ est appelé *dérivée partielle* de f en a dans la direction b .

Si on suppose E de dimension finie n , de base $e = (e_1, \dots, e_n)$, alors f est une fonction de n variables (x_1, \dots, x_n) si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$ fixé, on considère la fonction φ de la proposition pour $b = e_1$, alors $\varphi(0) = f'(a) \cdot e_1$ est la dérivée partielle de f en a dans la direction e_1 , ce qui revient à dériver la fonction f par rapport à x_1 en laissant (x_2, \dots, x_n) fixes.

On note $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) = f'(a_1, \dots, a_n) \cdot e_1$

Plus généralement on définit la dérivée partielle de f dans la direction e_i au point $a = (a_1, \dots, a_n)$ par $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'(a_1, \dots, a_n) \cdot e_i$

ce qui revient à dériver la fonction f par rapport à x_i , les autres variables étant fixées.

Si F est de dimension finie alors on peut définir une base $h = (e'_1, \dots, e'_p)$ de F et écrire f dans cette base $f = f_1 e'_1 + \dots + f_n e'_n$. Alors si $h = (h_1, \dots, h_n)$ est un vecteur, alors

$$f'(a) \cdot h = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n e_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} h_i$$

Définition 23. On appelle *matrice jacobienne* de f au point a la matrice des dérivées partielles

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

le *déterminant jacobien* de f en a est le déterminant de $J_f(a)$.

Proposition 24. Si $f : E \longrightarrow K$ et $g : K \longrightarrow F$ sont différentiables alors $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) J_f(a)$

Exemple 8.

$$f : \begin{cases} E & \longrightarrow F \\ (x, y, z) & \longmapsto (x - y, yz) \end{cases}$$

On note $f_1(x, y, z) = x - y$ et $f_2(x, y, z) = yz$.

Soit $a = (a_1, a_2, a_3)$, on a

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 \end{pmatrix}$$

14.1 Application de classe \mathcal{C}^1

On sait qu'une fonction différentiable admet des dérivées partielles puisque $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'(a) \cdot e_i$, on se demande si la réciproque est vraie.

Considérons $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

Cette fonction n'est pas continue en $(0, 0)$, en effet $\forall x \in \mathbb{R}, f(x, x) = 1$, donc elle n'est pas différentiable en 0 .

Calculons les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Si $y \neq 0$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{2}{y}$

Par symétrie on calcule les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y)$

Enfin si $f_y(x) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = 0$, donc f admet des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 mais elle n'est pas différentiable.

Remarque 15. Les dérivées partielles de f ne sont pas continues en $(0, 0)$

Définition 24. Soit U un ouvert de E , une fonction $f : U \longrightarrow F$ est de *classe \mathcal{C}^1* si elle est différentiable et si sa différentielle $f' : U \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est continue.

On dit que f est de *classe \mathcal{C}^1* en a s'il existe un ouvert V contenant a tel que f est de classe \mathcal{C}^1 sur V .

Remarque 16. Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U ouvert de E de dimension finie, alors ses dérivées partielles sont continues sur U . En effet si (e_1, \dots, e_n) est une base de E alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'(a) \cdot e_i$.

En conclusion il suffit de démontrer que pour tout $i \leq n$, l'application $a \in U \mapsto f'(a) \cdot e_i$ est continue, ceci est dû au lemme suivant :

Lemme 4. Soit $\phi : U \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ et $h \in E$, alors si ϕ est continue l'application $a \mapsto \phi(a) \cdot h$ est continue.

En effet si $x \in E$ tend vers a , alors

$$\begin{aligned} \|\phi(x) \cdot h - \phi(a) \cdot h\| &= \|(\phi(x) - \phi(a)) \cdot h\| \\ &\leq \|\phi(x) - \phi(a)\| \|h\| \end{aligned}$$

et par continuité de ϕ , $\|\phi(x) \cdot h - \phi(a) \cdot h\|$ tend vers 0.

Théorème 19. Soit E de dimension finie n , U un ouvert de E et $f : E \longrightarrow F$, si f admet des dérivées partielles continues dans toutes les directions et en tout point de U , alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Preuve 44. Soit $a \in U$, on veut montrer qu'il existe $f'(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(a + \eta) = f(a) + f'(a) \cdot \eta + o(\eta)$.

Afin de simplifier la rédaction de la preuve, on supposera $n = 2$, et on écrira $a = (x_0, y_0)$ et $\eta = (h, k)$.

On pose $S = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $T = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, on montre que $f'(a) \cdot \eta = Sh + Tk$, c'est-à-dire qu'il faut montrer que $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Sh - Tk = o(\eta)$.

On pose la fonction suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & F \\ k & \longmapsto & f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - kT \end{cases}$$

elle est dérivable et

$$\varphi'(k) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + k) - T = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Par continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ il existe $\delta_1 > 0$ tel que $\|\varphi'(k)\| \leq \varepsilon$ si $|k| \leq \delta_1$, donc par les accroissements finis on a :

$$\|\varphi(k) - \varphi(0)\| = \|\varphi(k)\| \leq \varepsilon |k|$$

On choisit dorénavant $|k| \leq \delta_1$ et on considère ψ définie par

$$\psi(h) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0, k) - Sh$$

Alors ψ est dérivable et

$$\psi'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0 + k) - S = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Encore une fois par continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en (x_0, y_0) il existe $\delta_2 \leq \delta_1$ tel que si $|h| + |k| \leq \delta_2$ alors $\|\psi'(h)\| \leq \varepsilon$, on en déduit à nouveau par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \quad (|h| + |k| \leq \delta_2 \implies \|\psi(h)\| \leq \varepsilon|h|)$$

Mais alors

$$\begin{aligned} \|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Sh - Tk\| &\leq \|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - Sh\| \\ &\quad + \|f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Tk\| \\ &\leq \|\psi(h)\| + \|\varphi(k)\| \\ &\leq \varepsilon|h| + \varepsilon|k|, \quad \text{si } |h| + |k| \leq \delta_2 \\ &\leq \varepsilon(|h| + |k|) \end{aligned}$$

d'où f est différentiable en (x_0, y_0) .

Mais alors on peut écrire $f'(a) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et donc $a \mapsto f'(a) \cdot e_i$ est continue pour tout $i \leq n$.

□

14.2 Accroissements finis

Définition 25. On dit de $U \subseteq E$ qu'il est *convexe* si pour tout couple de points $(x, y) \in U \times U$, le segment $[x, y] := \{x + ty \mid t \in [0, 1]\}$ est inclus dans U .

Théorème 20. *Inégalité des accroissements finis* Soit U un ouvert convexe de E et f une application différentiable de U dans F .

On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\forall x \in U, \|f'(x)\| \leq M$

Alors pour tout $a \in U$ et tout $h \in E$ tels que $a + h \in U$, alors

$$\|f(a + h) - f(a)\| \leq M\|h\|$$

Preuve 45. On va appliquer l'inégalité des accroissements finis vue dans le chapitre précédent à

$$\phi : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow F \\ t & \longmapsto f(a + th) \end{cases}$$

comme U est convexe on a $a + th \in U$ pour $0 \leq t \leq 1$:

$$\phi'(t) = f'(a + th) \cdot h$$

Par hypothèse, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\|f'(a + th)\| \leq M$, donc

$$\|f'(a + th) \cdot h\| \leq M\|h\|$$

Donc $\|\phi'(t)\| \leq M\|h\|$ alors l'inégalité des accroissements finis on a :

$$\|\phi(1) - \phi(0)\| \leq M\|h\|$$

d'où le résultat.

Part V

Extrema et différentielles secondes

Dans tout ce chapitre on considère des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}

15 Condition nécessaire d'extremum pour un application différentiable

Proposition 25. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable, si f admet un extremum local en $x_0 \in U$ alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve 46. Soit $h \in E$, on calcule $f(a + th)$ avec t assez petit pour que $a + th \in U$.

Soit $\phi(t) := f(a + th)$ définie au voisinage de 0, ϕ admet un extremum en 0 donc $\phi'(0) = 0$, or $\phi'(t) = f'(a + th) = f'(a + th) \cdot h$, donc $\phi'(0) = f'(a) \cdot h$, on en déduit que pour tout h , $f'(a) \cdot h = 0$ et donc $f'(a) = 0$.

Remarque 17. La réciproque est fausse, par exemple $x \mapsto x^3$ ou $(x, y) \mapsto xy$

Définition 26. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable, on appelle point *critique* tout point où la dérivée s'annule.

Si $n = 1$ on détermine si un point critique est un extremum local en déterminant le signe de la dérivée seconde : si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \geq 0$ alors x_0 est un minimum local, et un maximum local si $f''(x_0) \leq 0$.

16 Différentielle seconde

Définition 27. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable, on dit qu'elle est deux fois différentiable si sa différentielle $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est différentiable, de différentielle $f'' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$

Lemme 5. Soient E et F deux espaces de Banach de dimension finie, pour toute application linéaire de $S \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$, l'application $T : E \times E \rightarrow F$ définie par

$$T(x, y) = (S \cdot x) \cdot y$$

est une application bilinéaire, dans $\mathcal{L}_2(E, F)$.

Cette correspondance $S \mapsto T$ est une bijection, sa réciproque associe à toute application bilinéaire T une application $S \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ définie par $(S \cdot x) \cdot y = T(x, y)$.

Définition 28. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux fois différentiable, sa différentielle seconde est l'application $f'' : U \rightarrow \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ via l'identification du lemme précédent.

On dit que f est de classe \mathcal{C}^2 si sa différentielle seconde est continue.

Remarque 18. On a donc dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) : \forall a \in U, f'(a + k) = f'(a) + f''(a) \cdot k + o(k)$

Exemple 9. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable, alors pour $g \in \mathbb{R}^2$, l'application suivante est différentiable : $\phi : \begin{cases} U & \longrightarrow \mathbb{R} \\ a & \longmapsto f'(a) \cdot h \end{cases}$ et on a pour tout vecteur $k \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \phi'(a) \cdot k &= f''(a) \cdot k \cdot h \\ &= f''(a)(k, h) \\ &= (f''(a) \cdot k) \cdot h \end{aligned}$$

En effet $\phi(a+k) = f'(a+k) \cdot h$, mais $f'(a+k) = f'(a) + f''(a) \cdot k + o(k)$, donc

$$\begin{aligned} \phi(a+k) &= f'(a) \cdot h + f''(a) \cdot k \cdot h + o(k) \cdot h \\ &= \phi(a) + f''(a) \cdot k \cdot h + o(k) \end{aligned}$$

Proposition 26. *La somme et le produit de deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 est de classe \mathcal{C}^2 , et de même pour la composée.*

17 Dérivées partielles d'ordre 2 : Matrice hessienne

On note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ la dérivée partielle d'ordre 2 de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans la direction e_j , si $i = j$ on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

Théorème 21. *Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 qui sont continues en tout point de U , alors f est deux fois différentiable.*

Preuve 47. On sait que pour tout i la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet des dérivées partielles continues dans toutes les directions.

Donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est différentiable et de classe \mathcal{C}^1 .

Par ailleurs on a

$$f'(a) \cdot h = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

Donc f' est de classe \mathcal{C}^1 , donc f est de classe \mathcal{C}^2 . □

Proposition 27. *Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 , on a pour tout h et :*

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) k_j h_i$$

Preuve 48. Soit $\phi(a) := f'(a) \cdot h$, alors on a vu que ϕ est différentiable et

$$\phi'(a) \cdot k = f''(a) \cdot k \cdot h$$

autrement dit $\phi(a) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$ et $\phi'(a) \cdot k = \sum_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(a) k_j$ et donc :

$$\begin{aligned} f''(a) \cdot k \cdot h &= \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j}(a) k_j \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} h_i k_j \end{aligned}$$

□

Théorème 22. *Symétrie de Schwartz*

Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur U , alors en tout point de x de U on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Remarque 19. L'hypothèse d'être de classe \mathcal{C}^∞ est nécessaire, par exemple $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$$

$$\text{mais } \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$

Preuve 49. On fait le calcul en $(0, 0)$ d.

Soit $\alpha := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$, on va montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \alpha$, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \alpha x + o(x)$$

Soit $f^*(x, y) := f(x, y) - \alpha xy$

$$\frac{\partial f^*}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \alpha y \text{ donc } \frac{\partial f^*}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x, y) - \alpha$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x_0| + |y_0| \leq \delta$ alors $\left| \frac{\partial f^*}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \right| \leq \varepsilon$

Soient x_0, y_0 fixés tels que $|x_0| + |y_0| \leq \delta$ et soient

$$g(x) = f^*(x, y_0) - f^*(x, 0)$$

$$l(y) = f^*(x_0, y) - f^*(0, y)$$

Enfin soit $\Delta = g(x_0) - g(0)$, alors $\Delta = l(y_0) - l(0)$.

Par le théorème des accroissements finis on a

$$|\Delta| \leq |x_0| \sup_{|x| \leq |x_0|} |g'(x)|$$

Si $|x| < |x_0|$ est suffisamment petit alors par le théorème des accroissements finis on a

$$\begin{aligned} |g'(x)| &\leq |y_0| \sup_{|y| \leq |y_0|} \left| \frac{\partial^2 f^*}{\partial y \partial x}(x, y) \right| \\ &\leq |y_0| \varepsilon \end{aligned}$$

D'où pour $|x_0| + |y_0| \leq \delta$ on a $|\Delta| \leq |x_0| |y_0| \varepsilon$, mais $l'(y) = \frac{\partial f^*}{\partial y}(x_0, y) - \frac{\partial f^*}{\partial y}(0, y)$

$$\text{Donc } l'(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) - \alpha x_0$$

donc on veut montrer que $l'(0)$ est un $o(x_0)$.

On calcule $\frac{|l(y_0) - l(0)|}{|y_0|} = \frac{|\Delta|}{|y_0|} \leq \varepsilon |x_0|$
On conclut que pour $|x_0| \leq \delta$

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} \leq \frac{|l(y_0) - l(0)|}{|y_0|} \leq \varepsilon |x_0|$$

donc $|l'(0)|$ est un $o(x_0)$, ce qu'on voulait démontrer. □

Définition 29. On appelle *matrice hessienne* de $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable au point $x_0 \in U$ la matrice symétrique $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$

18 Formules de Taylor

Théorème 23. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 avec U un ouvert convexe, soient $a, b \in U$, alors

$$|f(a) - f(b) - f'(a) \cdot (b - a)| \leq \frac{1}{2} \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)(b - a, b - a)|$$

Preuve 50. Soit $h = b - a$ et $\phi(t) = f(a + th)$ alors ϕ est de classe \mathcal{C}^2 et par le théorème de Taylor-Lagrange

$$\begin{aligned} |\phi(1) - \phi(0)| &\leq \frac{1}{2} \sup_{0 \leq t \leq 1} |\phi''(t)| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |f''(a + th)h \cdot h| \end{aligned}$$

Théorème 24. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ avec U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $a \in U$, alors

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{1}{2} f''(a) \cdot h \cdot h + o(\|h\|^2)$$

Preuve 51. On définit la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a) - \frac{1}{2} f''(a) \cdot (x - a, x - a)$$

dans un voisinage de a .

On différentie φ :

$$\varphi(x) \cdot h = f'(x) \cdot h - f'(a) \cdot h - \frac{1}{2} f''(a)(x - a, h) - \frac{1}{2} f''(a)(h, x - a)$$

Or f est de classe \mathcal{C}^2 , alors par le lemme de Schwartz :

$$\varphi(x) \cdot h = f'(x) \cdot h - f'(a) \cdot h - f''(a)(x - a, h)$$

De même on a :

$$\varphi''(x) \cdot h \cdot k = f''(x) \cdot h \cdot k - f''(a) \cdot h \cdot k$$

car

$$f''(a)(h, x+k-a) - f''(a)(h, x-a) = f''(a)(h, x-a) + f''(a)(h, k) - f''(a)(h, x-a)$$

Comme f est de classe \mathcal{C}^2 , pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x-a\| \leq \delta$ alors $\|f''(x) - f''(a)\| \leq \varepsilon$ donc si $\|x-a\| \leq \delta$ alors $\|\varphi''(x)\| \leq \varepsilon$, et par le théorème de Taylor-Lagrange, on a donc :

$$|\varphi(a+h) - \varphi(a) - \varphi'(a) \cdot h| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [a, a+h]} |\varphi''(x)(h, h)|$$

mais comme $\varphi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(a)(x-a, x-a)$, alors $\varphi(a+h) = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h - \frac{1}{2}f''(a)(h, h)$

On sait que $\varphi(a) = 0$ et $\varphi'(a) \cdot h = 0$, donc

$$\begin{aligned} |f(a+h) - f'(a) \cdot h - \frac{1}{2}f''(a)(h, h)| &\leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [a, a+h]} |\varphi''(x)(h, h)| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{\|x-a\| \leq \delta} |\varphi''(x)(h, h)| \text{ si } \|h\| \leq \delta \\ &\leq \frac{1}{2} \varepsilon \|h\|^2 \end{aligned}$$

□

Remarque 20. S B est bilinéaire :

$$B(x+h, x+h) - B(x, x) = B(x, h) + B(h, x) + \underbrace{B(h, h)}_{O(\|h\|^2)=o(h)}$$

Théorème 25. Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, on suppose qu'elle admet un minimum local en x_0 , alors la matrice hessienne H_{x_0} de f en x_0 est positive, c'est-à-dire que $\forall h, H_{x_0}(h, h) \geq 0$.

Preuve 52. x_0 est un point critique de f , c'est-à-dire $f'(x_0) = 0$.

Soit h fixé, on pose $\varphi(t) = f(x_0 + th)$ et on applique la formule de Taylor à $\varphi(t)$ en 0 :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{1}{2}t^2\varphi''(0) + o(t^2)$$

Donc

$$f(x_0 + th) = f(x_0) + tf'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2}t^2 \underbrace{f''(x_0)(h, h)}_{H_{x_0}(h, h)} + o(t^2)$$

car $\varphi'(t) = f'(x_0 + th) \cdot h$.

Mais $f(x_0 + th) \geq f(x_0)$ pour t assez petit pour t assez petit, alors

$$f''(x_0)(h, h) = \frac{2}{t^2}(f(x_0 + th) - f(x_0)) + o(1) \geq 0$$

19 Condition suffisante pour avoir un extremum

Théorème 26. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 avec U ouvert, supposons que :

- x_0 est un point critique de f
- La matrice hessienne de f en x_0 est définie positive

Alors x_0 est un minimum local strict de f .

Théorème 27. On commence par montrer une hypothèse plus forte que la seconde hypothèse.

Il existe $\delta > 0$ tel que $f''(x_0) \cdot h \cdot h \geq \delta$ pour tout $\|h\| = 1$, en effet la sphère unité S^1 est compacte dans \mathbb{R}^2 et la fonction $h \mapsto f''(x_0)(h, h)$ est continue, elle atteint donc ses bornes sur S^1 , en particulier son minimum strictement positif.

Ainsi, $\forall h, f''(x_0) \cdot h \cdot h \geq \delta \|h\|^2$.

On pose $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0, x - x_0)$ et on la différencie :

$$g'(x) \cdot h = f'(x) \cdot h - \frac{1}{2}f''(x - x_0, h) - \frac{1}{2}f''(h, x - x_0) = f'(x) \cdot h - f''(x_0)(h, x - x_0)$$

et en particulier $g'(x_0) = 0$, de plus $g'(x) \cdot h \cdot k = f'(x) \cdot h \cdot k - f''(x_0) \cdot h \cdot k$

Donc si $\|x - x_0\|$ est suffisamment petit, alors $\|g''(x)\| \leq \frac{\delta}{2}$ car f est continue en x_0 .

Par le théorème de Taylor-Lagrange, $|g(x) - g(x_0)| \leq \frac{1}{2} \sup_{y \in [x_0, x]} |g''(y)(x - x_0, x - x_0)|$ donc si $\|x - x_0\|$ est assez petit, $|g(x) - g(x_0)| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \|x - x_0\|^2$, autrement dit,

$$|f(x) - f(x_0) - \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0, x - x_0)| \leq \frac{\delta}{4}\|x - x_0\|^2$$

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0, x - x_0) - \frac{\delta}{4}\|x - x_0\|^2$$

En effet

$$\underbrace{f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0, x - x_0)}_{G(x, x_0)} \leq |G(x, x_0) - f(x)| + f(x) \leq \frac{\delta}{4}\|x - x_0\|^2 + f(x)$$

mais alors

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{\delta}{2}\|x - x_0\|^2 - \frac{\delta}{4}\|x - x_0\|^2 \geq f(x_0) + \frac{\delta}{4}\|x - x_0\|^2$$

d'où en particulier $f(x) > f(x_0)$ pour x suffisamment proche de x_0 .

Définition 30. Soit f de classe \mathcal{C}^2 sur U , on dit de $x_0 \in U$ qu'il est un *point selle* (ou *un col*) s'il est un point critique mais que f prends au voisinage de x_0 des valeurs supérieures et des valeurs inférieures à $f(x_0)$.

Exemple 10. Soit $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(0, 0)$ est un point selle.

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} (0, 0)$$

Avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$

Donc $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. $f(x, y) = xy$ un unique point critique : $(0, 0)$

Donc $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ses valeurs propres sont ± 1 donc c'est un point selle.

2. $f(x, y) = \sin x + (y - 1)^2$, les points critiques sont $(x_k), 1 := ((k + 1/2)\pi, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$

La hessienne H_k de f en $(x_k, 1)$ est

$$\begin{pmatrix} -\sin x_k & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$(x_k, 1)$ est un minimum si $\sin x_k > 0$ et un point selle si $\sin x_k < 0$, or $\sin x_k = (-1)^k$ donc si k est impair il s'agit d'un minimum, si k est pair c'est un point selle.

Part VI

Séries de Fourier

20 Convergence en moyenne quadratique

Dans ce chapitre, on notera $T > 0$ la période, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la fréquence ou pulsation, et on définira l'espace L_T^2 des fonctions continues par morceaux sur \mathbb{R} à valeurs complexes de période T , dont la restriction à $[0, T]$ est de carré intégrable.

On pose la norme suivante :

$$\|f\|_{2,T} = \left(\int_0^T |f(t)|^2 \frac{dt}{T} \right)^{1/2}$$

et un produit scalaire $(f|g)_{2,T} := \int_0^T f(t) \overline{g(t)} \frac{dt}{T}$

On définit les fonctions $e_k(t) = e^{ik\omega t}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$\omega T = 2\pi$ donc e_k est bien périodique, de plus elle est continue par morceau et de carré intégrable, donc $e_k \in L_{2,T}$.

Par ailleurs $(e_k|e_l)_{2,T} = \int_0^T e^{i\omega t(k-l)} dt = \frac{1}{T} \left[\frac{e^{i\omega t(k-l)}}{i\omega(k-l)} \right]_0^T = 0$ si $k \neq l$ et 1 si $k = l$.

Théorème 28. Toute fonction de L_T^2 peut se décomposer de manière unique sous la forme

$$f(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} e_p(f) e_p(t)$$

où la convergence a lieu dans l'espace L_T^2 , de plus $e_p(f) := (f|e_p)_{L_T^2}$, enfin $\|f\|_{2,T}^2 = \sum_{p \in \mathbb{Z}} |e_p(f)|^2$ Réciproquement il existe une suite $(a_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ de $l^2(\mathbb{Z})$ telle que $f(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p e_p(t)$ dans L_T^2 , alors $a_p = e_p(f)$

Remarque 21. La convergence a lieu au sens

$$\lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_0^T |f(t) - \sum_{p=-M}^N e_p(f) e_p(t)|^2 \frac{dt}{T} = 0$$