Comparaison de suites et fonctions

Pierre Gervais

October 4, 2016

1 Définitions

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1.1 Prépondérance

f est négligeable devant g au voisinage de a, noté $f = o_a(g)$ (notation de Landau) ou $f \prec_a g$ (notation de Hardy), si et seulement si $f = \epsilon \cdot g$ avec $\lim\limits_{a} \epsilon = 0$.

Plus simplement, dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de a, $f = o_a(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{a} \frac{f}{g} = 0$.

On remarquera que si g s'annule au voisinage de a, alors f aussi.

Exemples

1. En ∞, $x = o(x^2)$ car $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, et de manière générale, si P et Q sont deux polynômes tels que $deg(P) > deq(Q)$, alors $Q(x) = o(P(x))$.
2. En $+\infty$, $x^\alpha = o(e^{\beta x})$, avec α et β strictement positifs, car d'après le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$

   On a aussi $\ln^\alpha(x) = o(x^\beta)$

Propriétés

1. La relation de prépondérance est compatible avec la multiplication :

$$\left.\begin{array}{r} f = o(g) \\ \phi = o(\psi) \end{array}\right\} \Longrightarrow f\phi = o(g\psi)$$

   Par exemple, $\sqrt{x} = o(x)$, $\ln(x) = o(x)$ et $\sqrt{x} \cdot \ln(x) = o(x^2)$

2. La relation de prépondérance est transitive :

$$\left.\begin{array}{r} f = o(g) \\ g = o(h) \end{array}\right\} \Longrightarrow f = o(h), \text{ c'est à dire } \left.\begin{array}{r} f \prec g \\ g \prec h \end{array}\right\} \Longrightarrow f \prec h$$

   Par exemple en $+\infty$ $x = o(x^2)$ et $x^2 = o(x^3)$, donc $x = o(x^3)$.

3. La relation de prépondérance est stable par multiplication par une constante : $f = o(g) \Longrightarrow Cf = o(g)$

   Ainsi, si $f = o_a(g)$ et h est bornée au voisinage de a, alors $fh = o_a(g)$.

4. Un fonction négligeable est généralement utilisée pour exprimer un reste, c'est une sorte "d'erreur de mesure".

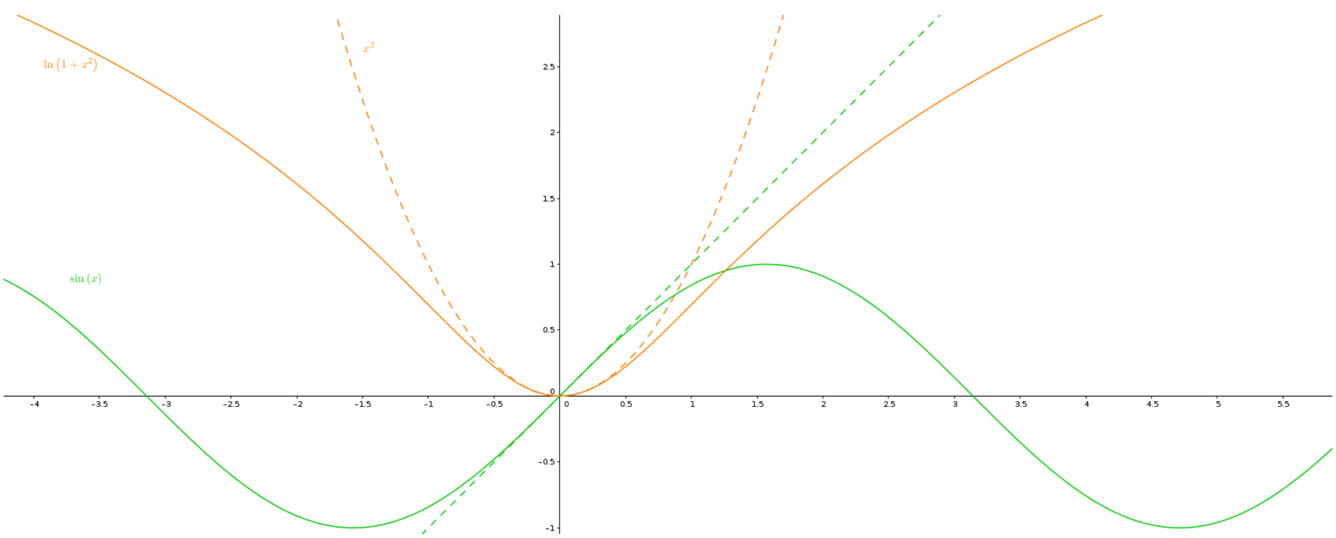
   On peut faire un parallèle avec les mesures en sciences expérimentales : on fournit un résultat de 5 cm avec une marge d'erreur inférieure à $0,01$ cm, tandis qu'ici on approxime $f(x) = g(x) + o_a(u(x))$ par $g(x)$ avec une marge d'erreur inférieure à $u(x)$ (en valeur absolue) pour x suffisamment proche de a. Plus cette marge d'erreur est grande, plus elle est "grossière", ainsi si on a $u \prec v$, la marge d'erreur $o(v)$ est plus grossière que $o(u)$, et $o(u)$ est plus fine que $o(v)$.

   De la même manière que quand on additionne les valeurs de deux mesures expérimentales, on utilise la marge d'erreur la plus grossière, lorsqu'on additionne deux fonctions exprimées à l'aide de restes, on utilise celui qui est le plus grossier :

$$\left.\begin{array}{r} f = u + o(u) \\ g = v + o(v) \\ u = o(v) \end{array}\right\} \Longrightarrow f + g = u + v + o(u) + o(v) = u + v + o(v) + o(v) = u + v + o(v)$$

   $o(f)$ "absorbe" toute fonction $g = o(f)$ qu'on lui ajoute, ce qui est logique si g est négligeable devant l'écart de mesure.

   Exemple $\sin(x) + \ln(1 + x^2) = x + o_0(x) + x^2 + o_0(x^2) = x + o_0(x)$



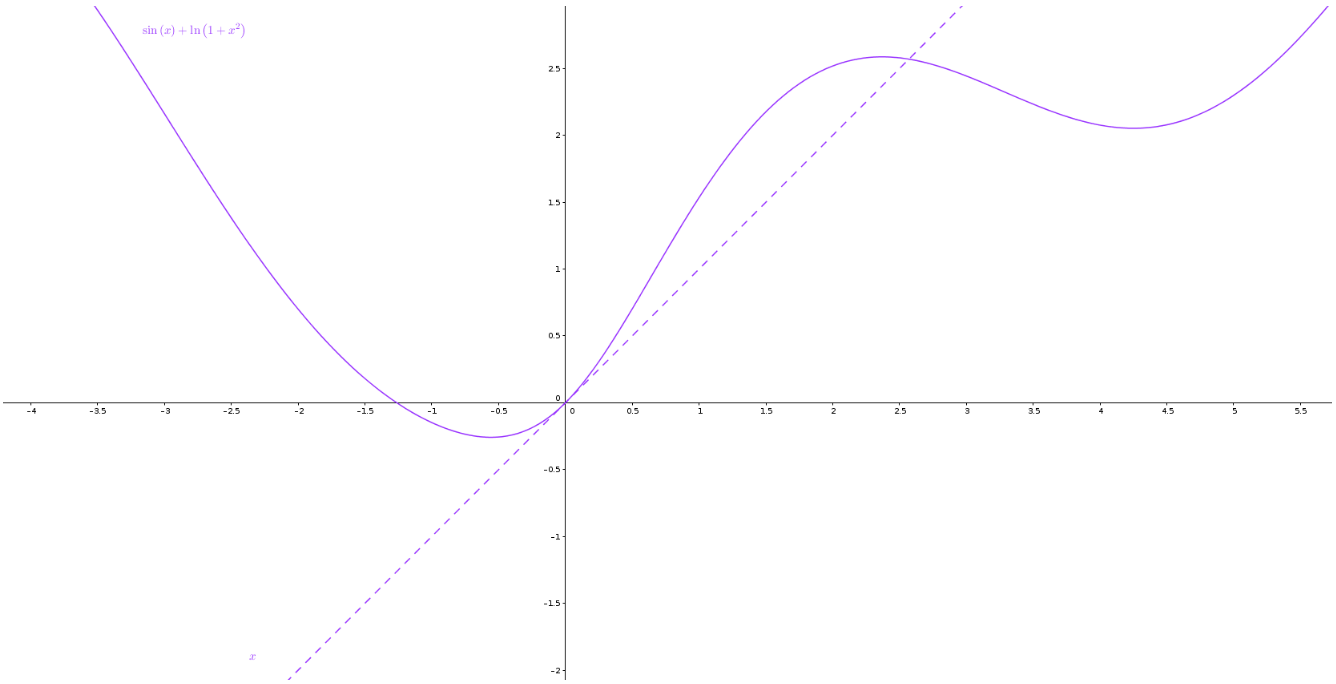


Figure 1: Somme de deux fonctions exprimées à l'aide de restes

Remarque $f = o_a(1) \iff \lim_a \frac{f}{1} = 0 \iff \lim_a f = 0$.

1.2 Équivalence

En a, f et g sont équivalentes en a si et seulement si $f = g + o_a(g)$, noté $f \sim_a g$

Plus simplement, si g ne s'annule pas au voisinage de a, $f \sim_a g \Leftrightarrow \lim_a \dfrac{f}{g} = 1$.

Exemples

1. En $+\infty$, $e^x + x^{2016} \sim e^x$ car $x^{2016} = o(e^x)$
2. Si le développement limité de f en 0 à l'ordre n est $f(x) = P(x) + o(x^n)$, alors $f(x) \sim P(x)$, par exemple $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, donc $\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{6}$.
3. En $+\infty$, $\ln(P(x)) \sim d \cdot \ln(a_d x)$ avec $P = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + ... + a_0$ car $P(x) = a_d x^d + o(x^d)$ et $\ln(P(x)) = \ln(a_d x^d(1 + o(1))) = \ln(a_d x^d) + \ln(1 + o(1)) \sim d \cdot \ln(a_d x)$

Propriétés

1. La relation d'équivalence est compatible avec la multiplication

$$\left.\begin{array}{l} f \sim_a g \\ \phi \sim_a \psi \end{array}\right\} \Longrightarrow f\phi \sim_a g\psi$$

2. La relation d'équivalence n'est généralement pas compatible avec la somme

$$\left.\begin{array}{c} x^2 + x \sim_{+\infty} x^2 \\ -x^2 \sim_{+\infty} -x^2 \end{array}\right\} \not\Rightarrow x \sim_{+\infty} 0$$

Attention Si $f \sim_a g$, alors on n'a pas nécessairement $\lim\limits_a (f-g) = 0$, par exemple en $+\infty$, $x+1 \sim x$ mais $(x+1) - x = 1$. Tout ce que l'on peut affirmer est que $f - g = o(f) = o(g)$.

Cependant, cela est vrai si $\lim\limits_a f = l$ existe et est fini : f et g ont nécessairement la même limite, d'où $f - g = l + o_a(1) - (l + o_a(1)) = o_a(1)$.

3. La relation d'équivalence n'est généralement pas stable par dérivation : $1 + 2x \sim_0 1 + x \not\Rightarrow 2 \sim_0 1$

4. La relation d'équivalence n'est généralement pas compatible avec la composition à gauche : $x+1 \sim_{+\infty} x \not\Rightarrow e^x \sim_{+\infty} e^{x+1} = e \cdot e^x$.

Certaines fonctions préservent cependant l'équivalence :

Exercice Soient f et g équivalentes en a, et soit $\alpha \neq 0$, montrez que $f^\alpha \sim_a g^\alpha$.

En supposant à présent que $f \neq 0$ au voisinage de a, montrez $\ln(f) \sim_a \ln(g)$.

Solution $f^\alpha = (g + o(g))^\alpha = (g(1 + o(1)))^\alpha = g^\alpha (1 + o(1))^\alpha$, et comme $\lim\limits_a (1 + o(1))^\alpha = 1$, on en déduit $f^\alpha \sim_a g^\alpha$

$\ln(f) = \ln(g+o(g)) = \ln(g(1+o(1))) = \ln(g)+\ln(1+o(1))$, sachant $\lim\limits_a \ln(1+o(1)) = 0$, on déduit $\ln(f) \sim_a \ln(g)$

5. La relation d'équivalence est en revanche compatible avec la composition à droite sous certaines conditions :

$$\left.\begin{array}{c} f \sim_b g \\ \lim\limits_a u = b \end{array}\right\} \Rightarrow f \circ u \sim_a g \circ u$$

En pratique, cela signifie que l'on peut effectuer un changement de variable tant que la limite de celle-ci reste la même.

Par exemple, en 0 on a $\ln(1+x) \sim x$, et en posant $u = \frac{1}{x}$, on obtient en $+\infty$ $\ln(1+u) \sim u$, c'est à dire $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$.

Remarque L'équivalence est très adaptée à la simplification d'un quotient ou produit, par exemple l'hideuse expression

$$\frac{\left(n\, sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{42} n^k + e^n\right)}{e^n}\left(\sqrt{n} + \ln^7(n)\right)$$

peut être remplacée selon le contexte (par exemple pour un calcul de limite) par un équivalent en $+\infty$:

$$\sqrt{n}$$

1.3 Domination

g domine f au voisinage de a, noté $f = O_a(g)$ (notation de Landau) ou $f \ll g$ (notation de Vinogradov), si et seulement s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour x assez proche de a, $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$.

On utilise cette relation pour indiquer que f *ne croît pas plus vite que* g.

Exemples

1. $4x^5 = O_{+\infty}(x^5)$

2. Les grands O sont utilisés pour exprimer la complexité d'un algorithme; on peut majorer (à une constante multiplicative près) le nombre d'étapes de calculs exécutées dans le pire des cas.

   Par exemple celle de l'algorithme du *tri à bulle* (ou *tri par propagation*), pour trier un tableau de n éléments $(e_i)_{1 \leqslant i < n}$.

   A chaque étape $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on parcourt le tableau en faisant varier i de k à $n-1$ afin d'échanger tout élément e_i et e_{i+1} si on a $e_i > e_{i+1}$.

   On effectue moins de n^2 échanges, c'est à dire $O(n^2)$ échanges, et le nombres d'instructions utilisées pour implémenter l'algorithme ne change pas ce grand O car la relation de domination est stable par multiplication par une constante non-nulle (comme pour la prépondérance).

3. $x \cdot \sin(x) = O_{+\infty}(x)$

Remarque Si $f = o(g)$, alors $f = O(g)$

Attention aux composition de fonctions Si on a $f < g$ et h croissante, alors on a $h \circ f = O(h \circ g)$, mais l'implication $f = O(g) \Longrightarrow h \circ f = O(h \circ g)$ est fausse !

Par exemple en $+\infty$, $\ln(x) = O\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right)$
et *exp* est croissante, mais on n'a pas $x = O(\sqrt{x})$.

2 Exercices

2.1 Comparaison de suites et fonctions

1. Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

   (a) $n+1 \sim_{+\infty} n$ donc $e^{n+1} \sim_{+\infty} e^n$.

   (b) $x + x^2 \sim_0 x + 3x^2$ donc $e^{x+x^2} \sim_0 e^{x+3x^2}$

   (c) $1 + x \sim_0 1 + x^2$ donc $\ln(1+x^2) \sim_0 \ln(1+x)$

   (d) $\ln(x^2 + sin(x)) \sim_{+\infty} 2 \cdot \ln(x)$

   Morale : Soyez prudent avec les compositions d'équivalents.

   A moins de chercher à simplifier un produit/quotient ou d'effectuer un changement de variable (sous-entendu dire que $sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ sachant $\sin(x) \sim_0 x$), je conseille de passer par les développements limités afin de contrôler le reste (le petit o).

2. Soient f et g définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, donnez une condition nécessaire et suffisante sur $f-g$ pour que $e^f \sim_a e^g$.

3. Calculez $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x)^{\ln|x|}$

4. On peut facilement montrer $\sqrt{x^2+3x+5} \sim_{+\infty} x + \frac{3}{2} + \frac{11}{8x}$.

   On cherche à savoir "à quelle vitesse" ces deux valeurs se rapprochent : trouvez un équivalent de $\sqrt{x^2+3x+5} - (x + \frac{3}{2} + \frac{11}{8x})$

5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, montrer $n(n-1)...(n-m+1) \sim n^m$

6. Donner des équivalent des expressions suivantes :

   (a) $\frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$

   (b) $\arccos\left(\frac{n-1}{n}\right)$

   Indication : utiliser $\cos(h) \sim_0 1 - \frac{h^2}{2}$

7. Soit $c > 0$ une constante.

   (a) Montrer qu'en $+\infty$, $\ln(x+c) \sim \ln(x)$ et $\sqrt{x+c} \sim \sqrt{x}$.

   (b) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, à l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que si $\lim\limits_{+\infty} f' = 0$ et s'il existe $M > 0$ tel que pour x assez grand on ait $f(x) \geqslant M$, alors pour toute constante c on a en $+\infty$, $f(x) \sim f(x+c)$.

8. *Exercice 4 de l'examen de MM3 du 7 janvier 2016 :*

   (a) Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(1+\sqrt{n})}$ converge, mais ne converge pas absolument.

   (b) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \begin{cases} 1/n \text{ ,si } n \text{ est un carré} \\ 1/n^2, \qquad \text{sinon} \end{cases}$

   (c) Soient $u_n = \dfrac{1}{n!3^n} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (3k-2)$ et $v_n = \frac{1}{n^{3/4}}$, montrer que pour n assez grand on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$. En déduire que $\sum u_n$ diverge.

   Indication : faire un développement limité de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

9. Étudier la convergence des séries numériques de termes généraux suivants

   (a) $\sin\left(\frac{n^2+n}{n}\pi\right)$

   Indication : utiliser la formule d'addition pour le sinus $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

   (b) $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$

10. On cherche un équivalent de $\ln(n!)$ quand n tends vers $+\infty$.

    (a) Calculez la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \ln$

(b) Justifiez que $\lim_n \frac{1}{n}(\ln(n!) - n \cdot \ln(n)) = \int_0^1 \ln$
Indication : Développez $\ln(n!)$ puis utilisez une somme de Riemann.

(c) Donnez un équivalent de $\ln(n!) - n \cdot \ln(n)$.
Concluez que $\ln(n!) \sim n \cdot \ln(n)$.

2.2 Séries de fonctions et séries entières

1. *Exercice 3 de l'examen de MM4 du 24 mai 2016 :*
On définit la suite $\mathbf{f} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec pour tout $n > 0$, $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto n\sin(x)\cos^n(x)$

   (a) Pour chaque $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, calculer $\lim_n f_n(x)$

   (b) Calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n$ puis $\lim_n I_n$

   (c) La suite $\mathbf{f}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$?

   (d) Montrer que $\mathbf{f}$ converge uniformément sur $[a, b]$ avec $0 < a < b \leqslant \frac{\pi}{2}$

Rappel Pour montrer que $\sum f_n$ converge uniformément on peut entre autre :

- montrer qu'elle converge normalement, c'est à dire démontrer que $\sum ||f_n||_\infty$ converge.
- si la série converge simplement vers une fonction f et si f_n est de la forme $f_n = (-1)^n g_n$ avec g_n positif (ou négatif) pour tout n et que $||f_n||_\infty$ tend vers 0, utiliser le critère d'Abel pour montrer $\left|\left|f - \sum f_n\right|\right|_\infty \leqslant ||f_{n+1}||_\infty$.

Pour montrer au contraire qu'elle n'est *pas* convergente, on peut tenter

- de montrer que $||f - \sum f_n||_\infty$ ne tend pas vers 0.
- de raisonner par l'absurde en utilisant la préservation des dérivées / intégrales / continuité par la convergence uniforme.

2. *Exercice 5 de l'examen de MM4 du 24 juin 2015*
On définit la suite $\mathbf{f} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$, ainsi que la série de fonctions $\sum_{n>0} f_n$

   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de $\sum_{n>0} f_n$ en distinguant les cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$.
   Indication : Rappelez vous que pour tout $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $e^{-\alpha n^\beta} = O(n^{-\gamma})$.

   (b) Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$?

   (c) Soit $a > 0$, la série de fonctions converge-t-elle normalement sur $A = [a, +\infty[$?

   (d) Converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

   (e) Soit $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, h est elle continue ?

3. *Exercice 5 de l'examen de MM4 du 24 mai 2016 :*
   On définit la suite $\mathbf{f} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec pour tout $n > 0$, $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \frac{1}{n^2}\arctan(nx)$.

   Rappel la fonction *arctan* est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, strictement croissante, impaire et telle que $\lim\limits_{+\infty} arctan = \dfrac{\pi}{2}$.

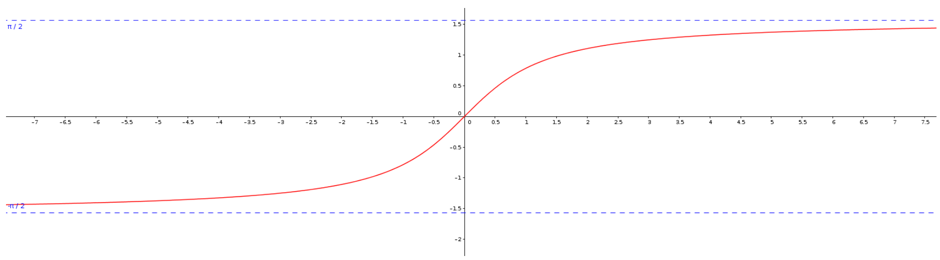


Figure 2: La fonction arctan

   (a) Montrer que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que pour tout $a > 0$, f est dérivable sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.

   (c) En conclure que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

4. Calculer les rayons de convergence R des séries entières suivantes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}$ avec R' le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$

   (d) $\displaystyle\sum_{n>0} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$ et étudier la convergence en $\pm R$

   Rappel La série entière $\sum a_n z^n$ n'est qu'un cas particulier de série ! On peut encore utiliser les critères de séries numériques, notamment les équivalents / petits o / grand O, critères de d'Alembert / Cauchy / Abel.

   Par exemple, si $a_n \sim b_n$, pour un z fixé $\sum a_n z^n$ converge *si et seulement si* $\sum b_n z^n$ converge, ainsi les deux séries ont le même rayon de convergence.

   Ou encore, si $a_n z^n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$, alors $\sum a_n z^n$ converge pour tout z, ce qui signifie que son rayon de convergence est $R = +\infty$.

5. Démontrer que si $l = \lim\limits_{n} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ existe et est fini, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ vaut l.

Rappel La série entière $\sum P(n)a_n z^n$ où P est un polynôme a le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$. C'est pourquoi pour toute fraction rationnelle F, $\sum F(n)a_n z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.

En effet si $F = \frac{P(n)}{Q(n)}$, alors $\sum F(n)a_n z^n = \sum \frac{P}{Q} a_n z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum Q(n)\frac{P(n)}{Q(n)} a_n z^n = \sum P(n)a_n z^n$ qui a le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.

6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en tout ordre en 0 et telle qu'il existe $M \geqslant 0$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ ||f^{(n)}||_\infty \leqslant M$, montrer que le développement en série entière autour de 0 de f a un rayon de convergence infini.

   En déduire le rayon de convergence du développement en série entière de cos et sin.

3 Correction

3.1 Comparaison de suites et fonctions

1. (a) $\frac{e^{n+1}}{e^n} = e \neq 1$. Faux.
   (b) Les deux expressions tendent vers une même limite non-nulle. Vrai.
   (c) $\ln(1+x) = x + o(x)$ et $\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$, mais $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+o(x)}{x^2+o(x^2)} = \infty$. Faux.
   (d) $\ln(x^2+\sin(x)) = \ln\left(x^2\left(1+\frac{\sin(x)}{x^2}\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{\sin(x)}{x^2}\right)$
   $\ln(x^2+\sin(x)) = 2\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim 2\ln(x)$. Vrai.

2. $e^f \sim_a e^g \Leftrightarrow \lim\limits_a \frac{e^f}{e^g} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_a e^{f-g} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_a (f-g) = 0$.

3. La fonction $x \longmapsto \cos(x)^{\ln|x|}$ est paire, on se contentera donc d'étudier la limite en 0 à droite.
   $\cos(x)^{\ln(x)} = exp(\ln(\cos(x))\ln(x))$
   Or $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
   Donc, $\cos(x)^{\ln(x)} = exp(\ln((1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))\cdot\ln(x))$
   $\cos(x)^{\ln(x)} = exp((-\frac{x^2}{2}+o(x^2))\cdot\ln(x)) = exp(-\frac{x}{2}\cdot x\ \ln(x) + o(x^2\ln(x))$
   Enfin, d'après le théorème des croissances comparées, $x\ \ln(x) \to 0$, donc $\cos(x)^{\ln(x)} \to 1$

4. $\sqrt{x^2+3x+5} = |x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}$
   On connaît le développement limité $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16} + o(h^3)$
   d'où $\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2}(\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}) - \frac{1}{8}(\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2})^2 + \frac{1}{16}(\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2})^3 + o(\frac{1}{x^3})$
   $\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}} = 1 + (\frac{3}{2x}+\frac{5}{2x^2}) - \frac{1}{8}(\frac{9}{x^2}+\frac{30}{x^3}+o(\frac{1}{x^3})) + \frac{1}{16}(\frac{27}{x^3}+o(\frac{1}{x^3})) + o(\frac{1}{x^3})$
   $\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}} = 1 + \frac{3}{2x} + \frac{11}{8x^2} + \frac{33}{16x^3} + o(\frac{1}{x^3})$
   Ainsi, $\sqrt{x^3+3x+5} \sim x + \frac{3}{2} + \frac{11}{8x} + \frac{33}{16x^2}$
   Et $\sqrt{x^3+3x+5} - (x+\frac{3}{2}+\frac{11}{8x}) \sim \frac{33}{16x^2}$

Astuce lorsqu'on calcule un développement limité à l'ordre n, on est amené à calculer des puissances de polynômes, ce qui est de plus en plus fastidieux au fur et à mesure que la puissance grandit.

Lors du calcul de $P(u)^m$, où u est notre variable qui tend vers 0, on se contente de calculer les termes de la forme $\alpha \cdot u^k$ avec $k < n$, le reste de l'expression sera (une somme de) $o(u^n)$.

On peut réutiliser cette expression malicieusement calculée pour trouver $P(u)^{m+1}$.

5. Si on développe $n(n-1)...(n-m+1)$, on obtient $n^m + a_{m-1}n^{m-1} + ... + a_1 n$, et on sait que pour tout $1 \leqslant k \leqslant m-1$, $n^k = o(n^m)$.

   Alors $n(n-1)...(n-m-1) = n^m + m \cdot o(n^m) = n^m + o(n^m) \sim n^m$

   Attention Cela marche *uniquement* car m est une constante : $o(n^m)$ est stable par multiplication par une constante.

6. (a) $2^n = o(3^n)$, donc $2^n + 3^n \sim 3^n$
   $n^2, \ln(n) = o(5^n)$, donc $n^2 + \ln(n) + 5^n \sim 5^n$
   Ainsi $\frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n} \sim \left(\frac{3}{5}\right)^n$

   (b) $\frac{n-1}{n} \to 1$ donc $u_n \to 0$, on peut alors affirmer $\cos(u_n) \sim 1 - \frac{u_n^2}{2}$
   Or $\cos(u_n) = \frac{n-1}{n}$, d'où $1 - \frac{1}{n} \sim 1 - \frac{u_n^2}{2}$ et donc $u_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$

7. (a) $\ln(x+c) = \ln\left(x\left(\frac{c}{x}+1\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{c}{x}\right) \sim \ln(x)$
   Ou bien $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+c)}{\ln(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+c} = 1$ d'après la règle de l'Hôpital.
   $\sqrt{x+c} = \sqrt{x\left(\frac{c}{x}+1\right)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+\frac{c}{x}} \sim \sqrt{x}$
   Ou bien $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+c}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+c}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{c}{x}}$

   (b) D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x > 0$ il existe un $\alpha_x \in]x, x+c[$ tel que

   $$\frac{f(x+c)-f(x)}{(x+c)-x} = \frac{f(x+c)-f(x)}{c} = f'(\alpha_x)$$

   $$f(x+c) - f(x) = c \cdot f'(\alpha_x)$$

   $$f(x+c) - f(x) = o(f(x))$$

   car $\frac{c \cdot f'(\alpha_x)}{f(x)} \leqslant \frac{c \cdot f'(\alpha_x)}{M} \longrightarrow 0$
   Ainsi $f(x+c) \sim f(x)$

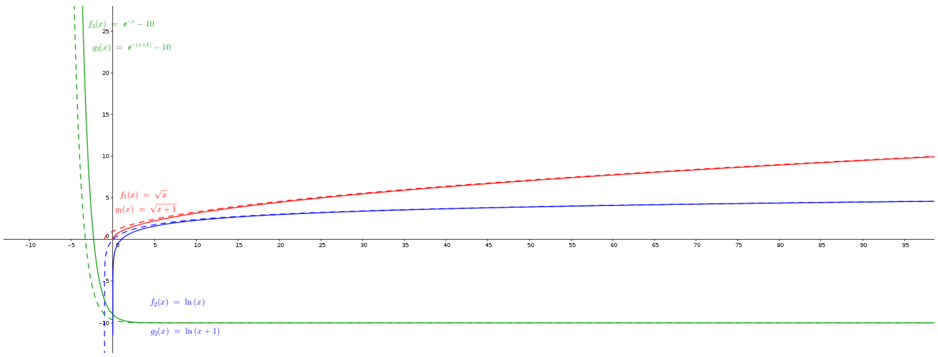


Figure 3: Exemple de trois fonctions dont la dérivée tend vers 0

8. (a) $\frac{1}{\ln(1+\sqrt{n})}$ est positive, décroissante et tend vers 0, donc d'après le critère d'Abel la série $\sum u_n$ converge. Cependant $\ln(1+\sqrt{n}) \sim \ln(\sqrt{n}) = \frac{1}{2}\ln(n)$, de plus pour n assez grand, $\ln(n) < n$ d'où $\frac{2}{\ln(n)} > \frac{2}{n}$ et alors $\sum u_n$ ne converge pas absolument.

   (b) Soit $N > 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N \\ n=k^2}}^{N} u_n + \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N \\ n\neq k^2}}^{N} u_n$$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N \\ n=k^2}} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N \\ n\neq k^2}} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant \sqrt{N}} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N \\ n\neq k^2}} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \leqslant \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N \\ n\neq k^2}} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \leqslant \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{1}{n^2} + \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{1}{n^2}$$

   $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum u_n$ converge également.

   (c) On cherche à montrer que $\sum u_n$ diverge, sachant u_n non-nulle pour tout n, il suffirait de montrer qu'à partir d'un certain rang elle est largement croissante, c'est à dire que pour n assez grand $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
   On sait que (v_n) est croissante, donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1$.
   Ainsi, si on montre que pour n assez grand $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ on aura $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \iff \frac{3n+2}{3(n+1)} \geqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3/4}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \iff \left(1-\frac{1}{3n+3}\right) \geqslant \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{3/4}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \iff 1-\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant 1-\frac{3}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \iff \frac{1}{3n} \leqslant \frac{3}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \iff \frac{1}{3} \leqslant \frac{3}{4}+o(1)$$

$\frac{1}{3} \leqslant \frac{3}{4}$ donc pour n assez grand on a bien $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$, d'où la divergence de $\sum u_n$!

9. (a) $\sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right) \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = \sin(n\pi)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos(n\pi \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

   $\sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right) = 0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

   $\sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

   $\sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right) \sim (-1)^n \frac{\pi}{n}$

   $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, donc $\sum \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$ converge.

   (b) $\frac{1}{n^{1+1/\sqrt{n}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}}} \sim \frac{1}{n}$ donc la série diverge.

10. (a) Soit $\epsilon > 0$, $\displaystyle\int_\epsilon^1 \ln = [x \cdot \ln(x) - x]_\epsilon^1 = -1 - \epsilon \cdot \ln(\epsilon) + \epsilon$

   $\displaystyle\int_0^1 \ln = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \ln = -1$

   (b) $\displaystyle\ln(n!) - n \cdot \ln(n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - n \cdot \ln(n)$

   $\displaystyle\ln(n!) - n \cdot \ln(n) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k) - \ln(n))$

   $\displaystyle\ln(n!) - n \cdot \ln(n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$

   $\displaystyle\frac{1}{n}(\ln(n!) - n \cdot \ln(n)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$

   On se retrouve avec une somme de Riemann, on peut alors conclure que $\displaystyle\lim_n \frac{1}{n}(\ln(n!) - n \cdot \ln(n)) = \int_0^1 \ln = -1$

(c) $\lim_n \frac{1}{n}(\ln(n!) - n\cdot\ln(n)) = \int_0^1 \ln = -1$, c'est à dire :

$$\frac{1}{n}(\ln(n!) - n\cdot\ln(n)) = -1 + o(1)$$

$$\ln(n!) - n\cdot\ln(n) = -n + o(n)$$

$$\ln(n!) = n\cdot\ln(n) - n + o(n)$$

Ainsi, $\ln(n!) \sim n(\ln(n) - 1)$, et plus grossièrement, $\ln(n!) = n\cdot\ln(n) + o(n\cdot\ln(n)) \sim n\cdot\ln(n)$

3.2 Séries de fonctions et séries entières

1. (a) Si $x = 0, \frac{\pi}{2}$, alors $\sin(x)\cos(x) = 0$.
   Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, alors $0 < \cos(x) = \alpha < 1$ et $f_n(x) = \sin(x)\cdot n\alpha^n$, or $\sin(x)$ est constant lorsque n tend vers ∞ et $n\alpha^n \to 0$.
   C'est à dire $f_n \to 0$

   (b) On connaît la dérivée de $\cos^{n+1}(x)$: c'est $-(n+1)\sin(x\cos^n(x)$, et donc

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\sin(x)\cos^n(x)dx$$

$$I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{n+1}{n+1} n\sin(x)\cos(x)^n dx$$

$$I_n = -\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)\sin(x)\cos^n(x)dx$$

$$I_n = -\frac{n}{n+1}\left[\cos^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_n = \frac{n}{n+1}$$

   On en déduit $\lim_{n\to\infty} I_n = 1$

   (c) La suite $\mathbf{f}$ ne peut pas converger uniformément ; si c'était le cas on aurait $\lim_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_n f_n$.
   Or d'une part $\lim_n f_n = 0$ d'après (a) et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 = 0$, d'autre part $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n = I_n \to 1$ d'après (b). Il y a contradiction.

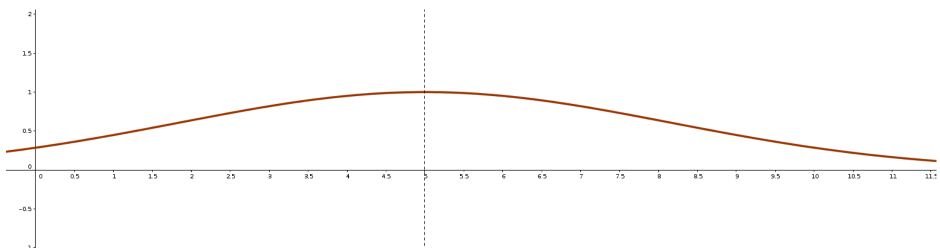
   (d) Pour $0 < a < x < b \leqslant \frac{\pi}{2}$, $|\sin(x)| \leqslant 1$ et $|\cos(x)| \leqslant |\cos(a)| = \alpha < 1$
   Ainsi $|f_n(x)| < n\alpha^n$ pour tout $x \in [a,b]$ et donc $||f_n||_{\infty,[a,b]} \leqslant n\alpha^n$ qui tend vers 0 quand n tend vers ∞.

2. (a) • Soit $x < 0$, $f_n(x) \to +\infty$, la série diverge sur $\mathbb{R}_-^*$.

- Soit $x \geqslant 0$, $e^{-x\sqrt{n}} = O(n^{-3})$ donc $f_n(x) = O(x^2 n^{-2})$, la série converge sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Calculons $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+}$ pour tout $n > 0$:
f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $f_n'(x) = n(2xe^{-x\sqrt{n}} - \sqrt{n}\,e^{-x\sqrt{n}}x^2) = nxe^{-x\sqrt{n}}(2 - x\sqrt{n})$
$||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+} = \left| f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right| = \frac{4}{e^2}$
$\sum\limits_{n>0} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Astuce Si on est face à une fonction f de signe constant, dérivable et telle que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et dont la dérivée change de signe en un seul point a, on peut immédiatement dire que $\max\ |f| = |f(a)|$, il est inutile de passer par un tableau de signe !



(c) Pour n assez grand, $\frac{2}{\sqrt{n}} < a$, alors $||f_n||_{\infty,A} = \max |f_n| = f_n(a)$ car f_n est décroissante sur A.
Or comme on l'a vu en (a), $f_n(a) = O(n^{-3})$, donc $\sum f_n$ converge uniformément sur A.

(d) Si $\sum f_n$ convergeait uniformément sur $\mathbb{R}_+$, nécessairement $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \longrightarrow 0$, ce qui est faux d'après (b).

(e) Chaque f_n est continue et donc $\sum\limits_{k=1}^{n} f_n$ est continue sur A, d'où h est continue sur A par la convergence uniforme de la série.

3. On notera $F_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ la suite des sommes partielles.

(a) Pour tout $n > 0$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| < \frac{\pi}{2n^2}$, d'où $||f_n||_\infty \leqslant \frac{\pi}{2n^2}$, et pour cette raison $\sum\limits_{n>0} f_n$ converge normalement, et donc uniformément.

(b) Chaque f_n et donc F_n et f sont impaires, on se limitera donc à les étudier sur $A = [a, +\infty[$.
Pour tout $n > 0$ et $x > a > 0$, $f_n'(x) = \frac{n}{n^2(1+n^2x^2)} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$, donc $||f_n'||_{\infty,A} = \sup\limits_{x>a} |f_n'(x)| = \dfrac{1}{n(1+a^2n^2)} \sim_n \dfrac{1}{a^2n^3}$.
Pour la même raison que précédemment, $\sum\limits_{n>0} f_n'$ converge uniformément.
On a à présent réuni les trois conditions suivantes :

- F_n' converge uniformément sur A.

- Pour tout $n > 0$, F_n est dérivable.
- Il existe x_0 tel que $F_n(x_0)$ converge (car d'après (a) la série converge, mais on peut prendre par exemple $x_0 = 0$).

Ce qui implique que $\lim_n F_n = f$ est dérivable sur A.

Ainsi f est dérivable sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.

(c) Pour tout $x > 0$, $f'(x)$ existe car d'après (b) f est dérivable sur $]-\infty, -x] \cup [x, +\infty[$. De même pour $x < 0$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Remarque On a travaillé sur $\mathbb{R}^*$ et pas sur $\mathbb{R}$ car pour $a = 0$, $||f_n'||_{\infty,A} = \frac{1}{n(1+n^2a^2)} = \frac{1}{n}$ et on n'a plus que $\sum_{n>0} f_n'$ converge normalement sur A.

4. (a) Il est inutile d'appliquer le critère de d'Alembert : $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ donc $a_n z^n \sim z^n$ et ainsi $\sum a_n z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum z^n$: $R = 1$.

(b) Pour la série $S(z) = \sum_{n>0} \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$, nous ne pouvons malheureusement pas appliquer la règle de d'Alembert car si on réécrit la série sous la forme $\sum a_n z^n$, tous les coefficients des puissances impaires seront nuls.

On pose alors une nouvelle série entière $T(u) = \sum_{n>0} \frac{\ln(n)}{n^2} u^n$ avec $u = z^2$, dont on peut calculer le rayon de convergence : $R = \lim_n \frac{\ln(n)}{n^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{\ln(n+1)} = 1$

$T(u) = S(z^2)$ converge pour $|z^2| < 1$ et diverge pour $|z^2| > 1$, ainsi le rayon de convergence de $S(z)$ est 1.

(c) Pour la même raison que précédemment, on a que $\sum_{n>0} a_n z^{2n}$ converge pour $|z^2| < R$ et diverge pour $|z^2| > R$, son rayon de convergence est donc $\sqrt{R}$.

(d) $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

En appliquant la règle de d'Alembert on trouve que le rayon de convergence est 1.

Étudions à présent la convergence en ± 1 :

$\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) 1^n = \sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge car $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

En revanche, $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(-1)^n$ converge d'après le critère d'Abel sur les séries alternées car $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(-1)^n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

5. Supposons que $\lim_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = l$ existe et est fini.

On considère la série entière $\sum a_n z^n$ comme une série numérique avec un paramètre z.

On applique le critère de d'Alembert pour savoir si $\sum a_n z^n$ converge :

$$\lim_n \left|\frac{a_n z^n}{a_{n+1} z^{n+1}}\right| = \lim_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \cdot \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{l}{|z|}$$

D'après le critère de d'Alembert, $\sum a_n z^n$ converge si $\frac{l}{|z|} < 1$ (c'est à dire $l < |z|$) et diverge si $\frac{l}{|z|} > 1$ (c'est à dire $l > |z|$).
On en déduit $R = |l|$

Remarque : on peut facilement adapter la preuve au cas où $l = +\infty$ pour avoir $R = +\infty$.

6. Le développement en série entière de f est $\displaystyle\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$.

   On veut montrer que le rayon de convergence est infini, c'est à dire que pour tout z cette série converge, autrement dit que $\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \right|$ tends vers 0 quand n tend vers l'infini.

   Par chance, on sait majorer ce reste ! Grâce à l'inégalité de Taylor qui nous dit que celui-ci est inférieur ou égal à $\left| \frac{\sup f^{(n)}}{n!} z^n \right|$.

   On a supposé que pour tout n, $|\sup f^{(n)}| \leqslant M$, ainsi on a que le reste est majoré par $M \frac{z^n}{n!}$ qui tend vers 0 :

   $$\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} = \frac{z}{n+1} \to 0$$

   On peut donc majorer $M \frac{z^n}{n!}$ par une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue et donc tendant vers 0.

   Le reste tend alors vers 0, la série a un rayon de convergence infini.

Contents