
Le 15 novembre 2013, 13h00 – 16h00.

Les documents et appareils électroniques (calculatrices et téléphones en particulier) sont interdits. Les réponses doivent être justifiées de façon claire et précise.

Question de cours. Donner la définition d'un espace topologique compact (on ne demande pas la définition d'un espace topologique).

Exercice 1. Soit (E, d) un espace métrique.

(1) Soit $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que $\phi(u) = 0 \iff u = 0$, et
$$\forall u \in \mathbb{R}^+, \forall v \in \mathbb{R}^+, \quad \phi(u+v) \leq \phi(u) + \phi(v).$$
On définit alors
$$\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \quad \delta(x,y) = \phi(d(x,y)).$$
Démontrer que δ est une distance sur E.

(2) On suppose que (E, d) est non borné, c'est-à-dire que
$$\forall M > 0, \quad \exists (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) \geq M.$$
On pose $\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.
   (a) Démontrer que δ est une distance sur E.
   (b) Démontrer que d et δ sont topologiquement équivalentes.
   (c) Démontrer que d et δ ne sont pas Lipschitz-équivalentes.

Exercice 2. On considère l'ensemble $C([0,1])$ des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Les ensembles $[0,1]$ et $\mathbb{R}$ sont munis de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$.

(1) Démontrer que pour tout $f \in C([0,1])$, f est bornée et qu'elle atteint ses bornes.

(2) On pose, pour tout $f \in C([0,1])$, $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Démontrer qu'il s'agit d'une norme sur $C([0,1])$.

(3) Soit la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $C([0,1])$ définie par $f_n(x) = x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|f_n\|$.

(4) On suppose dans cette question que la boule unité fermée de $C([0,1])$ est compacte.
   (a) Démontrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence. On la note f.
   (b) Soit $g \in C([0,1])$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) g(x) dx$. On pourra utiliser l'inégalité, valable pour tout h continue, $\left| \int_0^1 h(x) dx \right| \leq \int_0^1 |h(x)| dx$.
   (c) Pour tout $g \in C([0,1])$, démontrer que l'application L de $C([0,1])$ dans $\mathbb{R}$ définie par $L(h) = \displaystyle\int_0^1 h(x) g(x) dx$ est continue pour la norme $\| \cdot \|$.
   (d) En déduire, pour tout $g \in C([0,1])$, la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(x) g(x) dx$.
   (e) Conclure à une contradiction.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé. Pour toutes parties A et B de E, on note

$$A+B=\{x+y, \quad x\in A, \quad y\in B\}.$$

(1) Démontrer que si A et B sont ouverts, alors $A+B$ est ouvert.

(2) Démontrer que si A est fermé et B compact, alors $A+B$ est fermé.

(3) Dans $E=\mathbb{R}$, on considère les ensembles suivants : $A=\mathbb{Z}$, $\quad B=\left\{n+\dfrac{1}{n+1}, \quad n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

  (a) A et B sont-ils fermés ?

  (b) Démontrer que $0\notin A+B$.

  (c) Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $A+B$ qui converge vers 0.

  (d) En déduire que $A+B$ n'est pas fermé.

Exercice 4 (Topologie co-finie)**.** On considère E un ensemble. On considère l'ensemble de parties de E suivante :

$$\mathcal{O}=\big\{A\subset E \quad \text{tel que} \quad A^C \quad \text{est fini}\big\}\cup\{\emptyset\}.$$

La notation A^C désigne le complémentaire de A dans E : $A^C=E\setminus A=\{x\in E \quad \text{tel que} \quad x\notin A\}$.

(1) Démontrer que $\mathcal{O}$ est une topologie sur E.

(2) On suppose dans cette question que E est fini. Démontrer alors que $\mathcal{O}$ est l'ensemble des parties de E.

Dans toute la suite, on suppose que E est infini.

(3) (a) Soient deux ouverts V et W tels que $V\cap W=\emptyset$. Montrer que $V=\emptyset$ ou $W=\emptyset$.

  (b) L'espace topologique $(E,\mathcal{O})$ est-il séparé ?

  (c) Existe-t-il une distance d sur E qui définit la topologie $\mathcal{O}$?

(4) L'espace topologique $(E,\mathcal{O})$ est-il connexe ?

(5) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. On pose alors

$$A=\{x\in E, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad \exists p\geq n \quad \text{tel que} \quad x_p=x\}.$$

  (a) Démontrer que A est l'ensemble des points de E par lesquels la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ passe une infinité de fois.

  (b) On suppose que A contient exactement un élément : $A=\{x\}$. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

  (c) On suppose que A est vide. Démontrer que pour tout $x\in E$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

  (d) Dans le cas où A contient au moins deux éléments, démontrer que la suite ne converge pas.