UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7 LICENCE S5
Topologie et Calcul Différentiel – 31GU01MM 2014-2015

Examen *(22 juin 2015)*

QUESTION DE COURS. — Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p \times R^q$ $(p, q \in \mathbb{N})$ et $(a, b) \in \Omega$.
Théorème des fonctions implicites pour une application $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^r$ $(r \in \mathbb{N})$.

EXERCICE 1. — Justifier soigneusement.

(A) Le sous-ensemble $[0, 1[$ de $\mathbb{R}$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}$? Est-il fermé dans $\mathbb{R}$?

(B) Le sous-ensemble $[0, 1]\times\{0\}$ de $\mathbb{R}^2$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}^2$? Est-il fermé dans $\mathbb{R}^2$?

EXERCICE 2. — Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

(A) Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t$.
Rappeler brièvement pourquoi $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ déterminent des normes sur E (indiquer les conditions satisfaites, sans rentrer dans les calculs).

(B) On considère $A = \{f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t \geqslant 1\}$.
Montrer que A est une partie fermée de E muni de $\| \ \|_\infty$.

(C) Montrer que la partie A de la question précédente n'est pas une partie fermée de E muni de $\| \ \|_1$ (on pourra, par exemple, vérifier que la fonction constante 1 appartient à l'adhérence de A pour $\| \ \|_1$).

(D) En déduire que les normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

EXERCICE 3. — On considère l'espace $F = M_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme $\| \ \|$ vérifiant $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$ pour tous $A, B \in F$. On définit $g \colon F \to F$ par $g(M) = M^3 + M^2$. On note B la boule ouverte de centre 0 et de rayon $1/4$ dans F.

(A) Montrer que g est différentiable sur F et calculer sa différentielle.

(B) Montrer que pour tout $M \in F$ et pour tout $H \in F$, on a :
$$\|Dg(M)(H)\| \leqslant (3\|M\|^2 + 2\|M\|)\, \|H\|.$$

(C) En déduire que la restriction de g à B est contractante.

EXERCICE 4. — On considère la fonction $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ définie par :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad h(x, y) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + y^2 - 2y.$$

(A) Montrer que
$$\forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 - 2y \geqslant y^2/2 - 3$$
et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 \geqslant x^2/2 + C.$$

(B) On pose : $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) \leqslant 1\}$.
Démontrer que K est un compact non-vide de $\mathbb{R}^2$.

(C) En déduire que h a un minimum global.

(D) Donner les points critiques de h.
Déterminer si ces points critiques sont des extrema locaux pour h.

(E) En déduire la valeur minimale prise par h.

EXERCICE 5. — On pose $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
Montrer que S^1 est une sous-variété de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$.