Examen
Vendredi 29 mai 2015
durée 3h

Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté de la rédaction.
Sans documents.

Exercice I.

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $n \in \mathbb{N}$, et que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. On note $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ la différence divisée de f d'ordre k aux points $x_0, \ldots, x_k$, pour $k \leq n$.

1. Donner la relation entre les différences divisées d'ordre k et d'ordre $k+1$.
2. On suppose que $n = 3$, et que $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$. Le tableau des différences divisées est supposé de la forme suivante :

x	-1		0		1		2
$f(x)$	4		1		22		109
		-3		21		a	
			b		33		
				7			

   (a) Déterminer les valeurs de a et b.

   (b) Donner le polynôme d'interpolation de f aux points $-1, 0, 1, 2$ (on ne demande pas de le développer).

   (c) En supposant que f est un polynôme de degré 3, déterminer f.

Exercice II.

On considère la méthode de quadrature suivante sur l'intervalle $[0, 1]$:

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \frac{7}{12} f(\frac{2}{7}) + \frac{7}{36} f(\frac{4}{7}) + \frac{2}{9} f(1).$$

1. Montrer que cette méthode est d'ordre exactement 2.
2. Montrer que le noyau de Peano K_2 est de signe constant sur $[0, 1]$
   <u>*Indication :*</u> Pour $t \in [0, \frac{2}{7}]$, on pourra utiliser la forme explicite de K_2, et pour $t \in [\frac{2}{7}, \frac{4}{7}]$, on pourra calculer K_2' et étudier le sens de variation de K_2.
3. En déduire l'expression de l'erreur de cette méthode pour une fonction f de classe C^3.

Tournez la page SVP...

Exercice III.

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

1. Déterminer la valeur exacte de I.
2. Evaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes avec n=3 sous intervalles (c'est-à-dire avec un pas $h = 1/3$, aux points $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2)$.
3. Sachant que $\ln(2) \approx 0.693147$, la valeur calculée à la question précédente est-elle plus grande ou plus petite que I ?
4. Pourquoi la valeur numérique obtenue à la question précédente est-elle supérieure à $ln(2)$? Est-ce vrai quelque soit n ? Justifier la réponse. (On pourra s'aider par un dessin).
5. Quel nombre de sous-intervalles n faut-il choisir pour avoir une erreur inférieure à 10^{-4} ? On rappelle que l'erreur de quadrature associée s'écrit, si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$,

$$|E_n| \leq \frac{(b-a)^4}{12n^2} \sup_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)|.$$

Exercice IV.

Soit $a > 0$ un nombre réel positif et considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -ay(t), \text{ pour t} > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

où y_0 est une valeur donnée. Soit h > 0 un pas de temps donné, $t_i = ih$ pour $i \in \mathbb{N}$ et u_i une approximation de $y(t_i)$.

a) Ecrire le schéma de Cranck-Nicholson permettant de calculer u_{i+1} à partir de u_i. Sous quelle condition sur h le schéma est-il absolument stable ? Autrement dit, pour quelles valeurs de h la relation
$$\lim_{i\to\infty} u_i = 0$$
a-t-elle lieu ?

b) Ecrire le schéma de Heun. Sous quelle condition sur h le schéma de Heun est-il absolument stable ?

Exercice V.(*Scilab*)

On considère le problème (1)

1. Programmer la méthode d'Euler explicite. On considère l'intervalle $[0, T]$ avec $T = 10$, $a = 1$ et $y_0 = 1$.

```
clear
a=...; //  a completer
y0=...; // a completer
T=...; // a completer
n=100; // nombre des points dans le maillage
h=... ;// a completer
```

```
t=[0:n]*h; // t est le vecteur 0, h, 2h, ..., nh
yex=y0*exp(a*t); // valeurs ponctuelles de la solution exacte
yEu=y0*ones(1,n+1); // definition du vecteur de la solution approchee
// initialisation par la condition initiale

for i=1:n
... // a completer
end

clf // pour effacer le contenu de la figure
plot2d(t,yex,1) // solution exacte
plot2d(t,yEu,-2) // solution approchee
xtitle('Schema d'Euler explicite')
legends(['sol. exacte','Euler explicite'],[1,-2],1)
```

2. Quelle méthode numérique pour la résolution du problème (1) est-elle programée dans le code suivant ? On considère l'intervalle $[0, T]$ avec $T = 10$, $a = -10$ et $y_0 = 1$. Il y a-t-il des erreurs ?

```
clear // pour effacer tout de la memoire
a=-10;
y0=1;
T=10;
n=10;
h=T/h;
t=[0:n]*h;

function y=f(t,x)
y=a*x; //notez que f ne depend en fait pas de t
endfunction

yRK=y0*ones(1,n+1);

for i=1:n
k1=f(t(i),yRK(i));
k2=f(t(i)+h/2,yRK(i)+k1/2);
k3=f(t(i)+h/2,yRK(i)+h*k2/2);
k4=f(t(i)+h,yRK(i)+h*k3);
yRK(i+1)=yRK(i)+h*(k1+2*k2+1*k3+k4)/6;
end

clf // pour effacer le contenu de la figure

plot2d(t,yRK,-2)
```