MP4 Université Paris 7
2011-2012 Denis Diderot

EXAMEN
Première Session
Vendredi 1^{er} Juin (durée 3h)

Exercice 1. Soient $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, x^2 + y^2 + z^2 < 1 \,,\, z > \frac{1}{2}\}$ et

$$I = \iiint_D \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

1. Montrer qu'en effectuant l'intégration en coordonnées sphériques on obtient:

$$I = \pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} (2 \sin \lambda \cos \lambda - \cos \lambda) \, \mathrm{d}\lambda.$$

2. En déduire la valeur de I.

Exercice 2. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ (il est muni du produit scalaire canonique), on considère le sous-espace vectoriel:

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = z + t\}.$$

1. (a) Caractériser $E^\perp$ et en donner une base orthonormée.
   (b) Soit le vecteur $u = (a, b, c, d)$ de $\mathbb{R}^4$ où a, b, c et d sont des paramètres réels fixés. Calculer le projeté orthogonal de u sur $E^\perp$.
   (c) En déduire la distance de u à E (On pourra utiliser l'identité reliant les projecteurs orthogonaux sur E et sur $E^\perp$).
2. E étant maintenant muni du produit scalaire induit par celui de $\mathbb{R}^4$, on en fait un espace euclidien. Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$v_1 = (1, 1, 1, 1) \quad , \quad v_2 = (3, 1, 3, 1) \quad , \quad v_3 = (1, 1, -1, 3).$$

   (a) Montrer que $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.
   (b) Construire $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, l'orthonormalisé de Gram-Schmidt de $\underline{v}$ (c.a.d. la base orthonormée de E construite à partir de $\underline{v}$ par le procédé de Gram-Schmidt).
   (c) E est maintenant orienté de telle sorte que $\underline{\varepsilon}$ devienne directe. Calculer, dans E (espace euclidien orienté de dimension 3) le produit vectoriel $v_2 \wedge v_3$.

Exercice 3. On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (il est muni du produit scalaire canonique).
Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est:

$$M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer, sans calcul, que f est diagonalisable.
2. Montrer que f est un endomorphisme orthogonal (i.e. une isométrie) de $\mathbb{R}^3$.
3. Etablir que f est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.
4. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$ puis de F.
5. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f se diagonalise. On donnera alors la matrice de f dans cette base.

Exercice 4. Soit le système différentiel linéaire (S) suivant:

$$\begin{aligned} x' &= y + 1 \\ y' &= -4x + 1 \end{aligned}$$

1. Donner tout d'abord une base de l'espace vectoriel complexe des solutions complexes du système homogène (H) suivant:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -4x \end{aligned}$$

2. Donner ensuite une base de l'espace vectoriel réel des solutions réelles du système homogène (H).
3. Donner une solution particulière constante du système (S).
4. Donner la solution du système (S) satisfaisant les conditions initiales suivantes:

$$x(0) = 5/4 \quad , \quad y(0) = 1\,.$$