Université Denis Diderot | Année 2015/2016
UFR de Mathématiques | U1TC35

Test n° 6 (durée : 30 mn)

NOM : ____________________________

Questions de cours

a) Quand dit-on qu'une application f d'un espace métrique (E, d_E) dans un espace métrique (F, d_F) est « uniformément continue » ?

b) Quand dit-on que deux distances d_1 et d_2 sur un ensemble E sont topologiquement équivalentes ?

Barème : *Question de cours* sur $2 + 3$ points ; 1) sur 7 points ; 2) sur 8 points ; 3) sur ... points.

Exercices

1) On note $\widetilde{D}$ le « disque fermé unité » de $\mathbb{R}^2$, d'équation $x^2+y^2 \leq 1$.

Expliquer en détail (sans utiliser le résultat général du cours relatif aux bijections continues entre espaces métriques compacts) pourquoi une bijection continue $h : \widetilde{D} \to \widetilde{D}$ est un homéomorphisme.$^{(*)}$

$(*)$ On peut aussi démontrer, mais c'est un résultat difficile, que tout bijection continue du disque unité ouvert D de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même est un homéomorphisme (cela découle d'une version du « théorème d'invariance du domaine »).

2) On note S^2 la sphère euclidienne de $\mathbb{R}^3$, d'équation $x^2+y^2+z^2=1$.

Démontrer qu'il existe un tétraèdre $ABCD$ avec $A, B, C, D \in S^2$ qui est de volume maximal.

Indication : le volume V d'un tétraèdre $ABCD$ dans $\mathbb{R}^3$ s'écrit $V = \frac{1}{6}\,|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$.

$\big[V = bh/3$ où b est la demi-aire du parallélogramme construit sur $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $h = d(D, (ABC))\big]$

3) Question subsidiaire (hors barème).

Démontrer que l'application périodique $g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin x}{2+\cos x} \end{array}$ est uniformément continue.