INTERROGATION N. 2

NOM :
PRÉNOM :

Exercice 1 - Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. On suppose que $H \neq \{0\}$. Démontrer qu'il existe $n\mathbb{Z}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.

Exercice 2 - Démontrer que $2\mathbb{Z} \cap (3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ et en déterminer un générateur.

1 Soit $x \in H \setminus \{0\}$. Si $x < 0$ alors $-x \in H$ et $-x > 0$.

Donc $\{y \in H \mid y > 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Soit n son plus petit élément.

. On démontre que $n\mathbb{Z} \subseteq H$

Soit $p \in \mathbb{Z}$, si $np \in H$ alors $\begin{cases} np + n \in H \\ np - n \in H \end{cases}$ car $H < \mathbb{Z}$.

Puisque $0 \in \mathbb{Z}$ on déduit par une récurrence ascendante sur $p \in \mathbb{N}$ puis descendante sur $p \in -\mathbb{N}$ que

$$(\forall p \in \mathbb{Z}) \quad np \in H.$$

. On démontre que $H \subseteq n\mathbb{Z}$

Soit $m \in H$. Il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{Z}$ tels que $\begin{cases} m = nq + r \\ 0 \leq r \leq n-1 \end{cases}$.

Or $H < \mathbb{Z}$ et $n \in H$, donc $nq \in H$.

Toujours parce que $H < \mathbb{Z}$, on en déduit que $r = m - nq \in H$.

Date: Mardi 29 septembre 2015.

Par minimalité de n on a $H \cap \{0, 1, 2, \dots, n-1\} = \{0\}$.

Donc $r = 0$, puis $m = nq \in n\mathbb{Z}$.

Ainsi, $\underline{H = n\mathbb{Z}}$.

(2) $3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z}$ est le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par $\{3, 5\}$.

Donc $\underline{2\mathbb{Z} \cap (3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z})}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, comme inter-section de sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

On a $1 = 3 \times 2 + 5 \times (-1) \in 3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z}$.

Donc $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \subseteq 3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z}$.

Donc $\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z}$.

Donc $\underline{2\mathbb{Z} \cap (3\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}}$.