Test n° 9 (durée : 30 mn)

NOM : ____________________________

Question de cours

Soient $f\colon \underset{\text{ouvert de } \mathbb{R}^p}{U} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ et $g\colon \underset{\substack{\text{ouvert de } \mathbb{R}^q \\ \text{contenant } f(U)}}{V} \longrightarrow \mathbb{R}^r$ deux applications différentiables.

Écrire la formule qui exprime $\mathrm{d}(g \circ f)$ à l'aide de $\mathrm{d}g$ et de $\mathrm{d}f$.

Exercices

1) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

Barème : *Question de cours* sur 5 points ; 1) sur $3+3+3$ points ; 2) sur $3+3$ points.

b) Montrer que les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent et les calculer.

c) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

2) Soit k un entier naturel. On dit qu'une application $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est homogène de degré k si :

$$(*) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad f(tx) = t^k f(x).$$

Soit f une telle application, qu'on suppose de plus différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $(\mathrm{d}f)(x) \cdot x = kf(x)$ (on pourra, par exemple, dériver par rapport à t l'égalité $(*)$ ou penser à la dérivé partielle dans la direction d'un vecteur).

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a : $(\mathrm{d}f)(tx) = t^{k-1}(\mathrm{d}f)(x)$.