EXAMEN DE SECONDE SESSION

DURÉE: 3 HEURES

Modalités sur le déroulement de l'épreuve :

— l'utilisation de documents sur quelque support que ce soit (papier, auditif, électronique *etc.*) est interdite.

— L'utilisation des téléphones portables est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints, rangés dans les sacs et les sacs doivent être rangés à l'avant de la salle.

— Toutes les réponses doivent être justifiées sauf lorsque le contraire est précisé.

— La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation en particulier concernant l'orthographe, la syntaxe grammaticale, l'utilisation (indue) de signes d'implication à la place de conjonctions de coordination, l'introduction des notations utilisées.

— La qualité et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

— Il n'est pas nécessaire de recopier l'énoncé (le recopier n'apporte pas de point) ni d'introduire les notations qui l'ont déjà été dans l'énoncé.

— Les portions de l'énoncé en *itallique* sont des indications. Il n'est pas obligatoire de les suivre.

— Pendant l'épreuve les surveillants ne répondront à aucune question portant sur l'énoncé.

Les exercices proposés sont indépendants. Dans chaque exercice on peut utiliser le résultat de chaque question (même si elle n'a pas été traitée) dans les questions suivantes.

Date: Mercredi 24 juin 2015.

Exercice 1 - Questions de cours (aucune justification n'est demandée)

(1) Énoncer la définition des notions suivantes : (a) espace affine, (b) sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$, (c) sous-espace affine de $\mathcal{E}$ engendré par une partie A de $\mathcal{E}$, (d) groupe, (e) sous-groupe distingué d'un groupe $(G, \times)$, (f) signature d'une permutation de $\mathscr{S}_n$ ($n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$).

(2) Énoncer le thèorème de Lagrange.

(3) Énoncer le théorème de passage au quotient des homomorphismes de groupes par un sous-groupe distingué.

Exercice 2 - On note τ la permutation suivante de $\mathscr{S}_{12}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 9 & 6 & 2 & 12 & 8 & 10 & 3 & 7 & 4 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Décomposer τ en produit de cycles à supports deux-à-deux disjoints.

(2) Déterminer l'ordre de τ.

Soit c un 5-cycle de $\mathscr{S}_5$.

(3) On écrit $c = (a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5)$. Soit $\sigma \in \mathscr{S}_5$. Déterminer $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

(4) Démontrer que $\{\sigma \in \mathscr{S}_5 \mid \sigma \circ c = c \circ \sigma\} = \langle c \rangle$.

Exercice 3 - Soit $\Bbbk$ un corps. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\Bbbk$ de direction notée E. On suppose que $\mathcal{E}$ est de dimension 3. Soit $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ un repère cartésien. On note A le point de coordonnées $(1, 3, -1)$ et $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(1, 1, -1)$. Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite affine de $\mathcal{E}$ contenant A et de direction engendrée par $\overrightarrow{u}$.

Exercice 4 - Soit $\Bbbk$ un corps. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur $\Bbbk$ de direction notée E. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application. Soit $\Omega \in \mathcal{E}$. On considère les conditions suivantes

(i) $L : E \to E\,, \overrightarrow{u} \mapsto L(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f(\Omega)f(\Omega + u)}$ est linéaire,

(ii) f est une application affine,

(iii) pour tout $(A, B) \in \mathcal{E}^2$ et tout $\lambda \in \Bbbk$, le barycentre de $\{(f(A), \lambda), (f(B), 1-\lambda)\}$ est l'image par f du barycentre de $\{(A, \lambda), (B, 1-\lambda)\}$.

(iv) pour tout système de points pondérés $\{(A_i, \alpha_i)\}_{i \in I}$ de $\mathcal{E}$ tel que $\sum_{i \in I} \alpha_i$ soit non nul, l'image par f du barycentre de ce système est le barycentre de $\{f(A_i), \alpha_i)\}_{i \in I}$.

(1) Démontrer $(i) \Rightarrow (ii)$.

(2) Démontrer $(ii) \Rightarrow (iii)$.

(3) Démontrer $(iii) \Rightarrow (iv)$.

(4) Démontrer $(iv) \Rightarrow (i)$.

Exercice 5 - Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On admet dans cet exercice que les seuls sous-groupes distingués de $\mathscr{S}_n$ sont

— $\{\mathrm{Id}\}$, $\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{S}_n$ si $n \neq 4$,

— $\{\mathrm{Id}\}$, $\{\mathrm{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, $\mathscr{A}_4$ et $\mathscr{S}_4$ si $n = 4$.

Soit H un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$ tel que $\mathrm{Card}(\mathscr{S}_n/H) = n$.

(1) Démontrer qu'il existe une action de groupe de $\mathscr{S}_n$ sur $\mathscr{S}_n/H$, notée $\lambda : \mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n/H \to \mathscr{S}_n/H$, telle que $\lambda(\sigma, \tau H) = (\sigma \circ \tau)H$ pour tous $\sigma, \tau \in \mathscr{S}_n$.

On note φ l'homomorphisme de groupes de $\mathscr{S}_n$ dans $\mathscr{S}_{\mathscr{S}_n/H}$ associé à cette action.

(2) Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Déterminer le stabilisateur de σH pour cette action.

(3) En déduire une expression de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

(4) Démontrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\mathrm{Id}\}$.

(5) Démontrer que φ est un isomorphisme.

(6) Démontrer que les groupes H et $\mathscr{S}_{n-1}$ sont isomorphes.