INTERROGATION N. 1

NOM :
PRÉNOM :

Exercice 1 - On munit l'intervalle $]-1,1[$ de la loi de composition $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. Est-ce que $(]-1,1[,*)$ est un groupe ?

Exercice 2 - Soit $(G,*)$ un groupe. Soient H, K des sous-groupes de G. On suppose que $G = H \cup K$. Démontrer que $G = H$ ou $G = K$.

1 • Soient $x, y \in]-1,1[$. Donc $1+xy > 0$ et donc $x*y$ est défini.

On a $\begin{cases} x+y-(1+xy) = (x-1)(1-y) < 0, \text{ donc } x*y < 1. \\ 1+xy > 0 \end{cases}$

On a $\begin{cases} x+y+(1+xy) = (x+1)(y+1) > 0, \text{ donc } x*y > -1. \\ 1+xy > 0 \end{cases}$

Donc $*$ est une loi de composition interne sur $]-1,1[$.

• Soient $x, y, z \in]-1,1[$

$$x*(y*z) = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \cdot \frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

$$(x*y)*z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} \cdot z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

Date: Mardi 22 septembre 2015.

donc $*$ est associative .

- 0 est élément neutre pour $*$.
- Soit $x \in]-1,1[$ alors $x*(-x) = (-x)*x = 0$. Donc $-x$ est inverse de x pour $*$.

Donc $(]-1,1[, *)$ est un groupe .

(2) Par l'absurde on suppose que $G \neq H$ et $G \neq K$.

Soit $k \in G \setminus H$, donc $k \in K$.

Soit $h \in G \setminus K$, donc $h \in H$.

Alors $h * k \in G = H \cup K$.

Par exemple, $h*k \in H$.

Or $H < G$ donc $k = h^{-1} * (h*k) \in H$. C'est absurde.

Donc $G = H$ ou $G = K$.