Test n° 5 (durée : 30 mn)

NOM : ____________________________

Questions de cours

a) Soient (X, d_X) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X
Quand dit-on que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy ?

b) Soit (X, d_X) un espace métrique.
Quand dit-on que l'espace métrique (X, d_X) est séparable ?

Barème : *Question de cours* sur $4 + 2$ points ; 1) sur 10 points ; 2) sur $4 + \ldots$ points.

Exercices

1) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad f(x) = \frac{1}{3}(x + \ln(1 + x)).$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et pour tout n entier naturel $x_{n+1} = f(x_n)$ est convergente (on pourra penser au théorème du point fixe de Banach).

2) Soient (X, d_X) et (Λ, d_Λ) deux espaces métriques. Soit $f\colon X \times \Lambda \to X$ une application continue. On suppose que (X, d_X) est complet et qu'il existe $K \in [0, 1[$ tel que

$$\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad d_X(f(x,\lambda), f(y,\lambda)) \leq K\, d_X(x, y).$$

a) Montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'application $x \mapsto f(x, \lambda)$ a un unique point fixe dans X, noté a_λ.

b) <u>Question subsidiaire</u> (hors barème).

Montrer que l'application de Λ dans X définie par $\lambda \mapsto a_\lambda$ est continue.

Indication : on pourra remarquer que

$$d_X(a_\lambda, a_\mu) \leq d_X(f(a_\lambda, \lambda), f(a_\mu, \lambda)) + d_X(f(a_\mu, \lambda), a_\mu) \leq K\, d_X(a_\lambda, a_\mu) + d_X(f(a_\mu, \lambda), a_\mu).$$