UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7 — LICENCE S5

Topologie et Calcul Différentiel — 2015-2016

Examen *(11 janvier 2016)*

Apportez un soin particulier à la rédaction : ceci sera pris en compte dans la note finale. Les exercices sont indépendants.

Dans tout le sujet, $\mathbb{R}$ est muni de sa distance usuelle $d_{|\cdot|}$ et l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. On rappelle que $d_{|\cdot|}(x,y) = |y-x|$, et $\|(h_1,h_2)\|_2 = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$.

QUESTION 1. — Répondre par vrai ou faux, et dans le seul cas où la réponse est «faux», donner une justification.

(1) Soit (X,d) un espace métrique, et $\emptyset \neq A \subseteq X$. La fonction $X \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{dist}(x,A)$ est lipschitzienne.

(2) L'intervalle $]-1,1[\subseteq \mathbb{R}$ et la boule unité ouverte $U(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes.

(3) L'intervalle $]-1,1[\subseteq \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

(4) Les intervalles $]-1,1[\subseteq \mathbb{R}$ et $[-1,1] \subseteq \mathbb{R}$ sont homéomorphes.

(5) $(\mathbb{Q}, d_{|\cdot|})$ est complet.

(6) $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ est compact.

(7) Le boule unité ouverte $U(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ est connexe.

(8) Dans un espace métrique quelconque (X,d), la boule unité ouverte $U(0,1)$ est connexe.

QUESTION 2. — On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3.$$

(1) Déterminer le gradient et la matrice hessienne de f en chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Déterminer les points critiques de f.

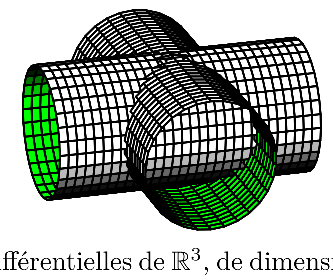
(3) Déterminer la nature de ces points critiques (minimum local ou maximum local).

QUESTION 3. — On considère les deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ représentés sur le dessin :

$$A = \mathbb{R}^3 \cap \{(x,y,z) : x^2+z^2=1\}$$

et

$$B = \mathbb{R}^3 \cap \{(x,y,z) : y^2+z^2=1\}.$$



(1) Montrer que A et B sont deux sous-variétés différentielles de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2 de classe C^∞.

(2) Montrer que $A \cap B$ privé de deux points appropriés est une sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^3$, de dimension 1 de classe C^∞.

(3) Montrer que $A \cap B$ n'est pas une sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.

QUESTION 4. — Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre réel. On souhaite résoudre le système d'équations

$$(*) \begin{cases} x = \lambda \cos(x+y) \\ y = \lambda \sin(x+y) \end{cases}$$

A cette fin, on considère l'application

$$F_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (\lambda \cos(x+y), \lambda \sin(x+y)) .$$

(1) Déterminer la matrice jacobienne de F_λ en chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Définir la norme $\|\|L\|\|$ d'un opérateur linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. En déduire une majoration de $\|\|DF_\lambda(x,y)\|\|$ quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (on rappelle que $\mathbb{R}^2$ est muni de sa norme euclidienne).

(3) Enoncer l'inégalité des accroissements finis appliquée à F_λ. En déduire que $\operatorname{Lip} F_\lambda \leqslant |\lambda|\sqrt{2}$ ($\operatorname{Lip} F_\lambda$ désigne la constante de Lipschitz de F_λ).

(4) Enoncer le théorème du point fixe de Banach. Trouver des réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour chaque $\lambda \in]a,b[$ le système (*) ci-dessus admet une unique solution $(x(\lambda), y(\lambda))$.

*(5) Le système (*) admet-il des solutions pour $\lambda = 1/\sqrt{2}$?