Devoir sur table n° 1

Exercice 1. *S*oit $n \in \mathbb{N}^*$ et les parties A_n, B_n du groupe symétrique S_n :

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}, \qquad B_n = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\}.$$

1. Démontrer, pour chacune des parties A_n, B_n, qu'il s'agit d'un sous-groupe de S_n, ou bien que ce n'est pas un sous-groupe de S_n.
2. Montrer que l'application $\sigma \mapsto (12)\,\sigma$ est une bijection de A_n sur B_n. En déduire les cardinaux des ensembles A_n et B_n.
3. Montrer que tout élément de S_n est le produit de transpositions de la forme $(1i)$. [Indication. On pourra calculer $(1i)(1j)(1i)$.]
4. Montrer que tout élément de A_n est le produit de 3-cycles de la forme $(1ij)$.

Exercice 2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 8 & a & 8 \\ 5 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de f_a.
2. Déterminer l'ensemble des réels a tels que f_a est diagonalisable. (Justifier soigneusement la réponse. La détermination d'une base de diagonalisation de f_a, lorsqu'elle existe, n'est pas demandée.)
3. On note $g = f_{-1}$ et $B = M_{-1}$. Diagonaliser la matrice B, si cela est possible.

Exercice 3. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda\, I_3$ est nilpotente.
2. Calculer A^n avec $n \geqslant 0$ entier.