Université Denis Diderot - Paris 7
 L3 - Topologie et calcul différentiel

Année 2012-2013
 Rattrapage

Le 17 juin 2013, 8h30 – 11h30.

Les documents et appareils électroniques (calculatrices et téléphones en particulier) sont interdits. Les réponses doivent être justifiées de façon claire et précise.

Question de cours. Énoncer le théorème du point fixe de Picard.

Exercice 1. Soit n un entier naturel non nul. On note E l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille n. Pour $M \in E$, on note m_{ij} son coefficient de la ligne i et de la colonne j, avec $1 \leq i, j \leq n$.

(1) Soit ϕ l'application de E dans E définie par $\phi(M) = M^2$. Démontrer que ϕ est differentiable en tout $M \in E$, et calculer sa différentielle.

(2) Soit ψ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\psi(M) = \operatorname{tr}(M^2)$. Démontrer que ψ, est différentiable en tout $M \in E$, et déterminer sa différentielle.

(3) Pour deux entiers i et j compris entre 1 et n, déterminer la dérivée partielle $\frac{\partial \psi}{\partial m_{ij}}$.

Exercice 2. On note $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 < 1 \right\}$ le disque unité. On pose

$$\begin{array}{rccl} f & : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{x^2+1}{y^2-1}. \end{array}$$

(1) Démontrer que f est continue sur D.

(2) Démontrer que f est différentiable en tout point de D, et calculer sa différentielle.

(3) Démontrer que f est deux fois différentiable en tout point de D, et calculer sa matrice Hessienne.

(4) (a) Démontrer que pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq -1$.

(b) Calculer $\sup \left\{ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \right\}$. f admet-elle un point de maximum global sur D ?

(5) Calculer $\inf \left\{ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \right\}$. f admet-elle un point de minimum global sur D ?

(6) Déterminer les points critiques de f dans D. S'agit-il de maxima locaux, de minima locaux, ou de points selles ?

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique, A une partie non vide de X, et $x_0 \in X$. On définit

$$d(x_0, A) = \inf \{d(x_0, y), \ y \in A\}.$$

(1) On suppose que $B \subset A$ et $B \neq \emptyset$. Comparer $d(x_0, A)$ et $d(x_0, B)$.

(2) On suppose A fermée. Démontrer que $x_0 \in A$ si et seulement si $d(x_0, A) = 0$.

(3) On suppose A compact. Démontrer qu'il existe $y \in A$ tel que $d(x_0, y) = d(x_0, A)$.

(4) On suppose maintenant A quelconque. Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi & : & X & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \longmapsto & d(x, A) \end{array}$$

est continue.

(5) En déduire que si A est fermé et B est compact, et si $A \cap B = \emptyset$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in A,\ \forall y \in B, \quad d(x, y) \geq \delta. \tag{A}$$

(6) Donner un exemple où A et B sont fermés et disjoints mais ne vérifient pas (A).

Exercice 4 (Théorème de d'Alembert)**.** On souhaite démontrer le théorème suivant : tout polynôme P non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Soit donc $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme à coefficients complexes, non constant. On suppose donc que $n > 0$, et que $a_n \neq 0$.

(1) On définit $R = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left(\dfrac{2n|a_k|}{|a_n|} \right)^{\frac{1}{n-k}}$. Démontrer que, si $|z| \geq R$, alors

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n.$$

(2) En déduire qu'il existe $R_0 > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq R_0$, on a $|P(z)| \geq |P(0)|$.

(3) En déduire que l'application $z \mapsto |P(z)|$ atteint son minimum en un point $z_0 \in \mathbb{C}$.

(4) On définit $Q(z) = P(z + z_0)$. Démontrer que Q est un polynôme non nul et préciser son degré. On note b_k ses coefficients, et on pose

$$k_0 = \inf\{k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n,\ b_k \neq 0\}.$$

(5) Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ fixé. Démontrer que

$$|P(z_0 + \rho e^{i\theta})|^2 = |P(z_0)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(b_0 \overline{b_{k_0}} \rho^{k_0} e^{-ik_0\theta}\right) + \varepsilon(\rho)\rho^{k_0},$$

avec $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\rho) = 0$.

(6) En déduire que $P(z_0) = 0$.