Logique

Arnaud Durand et Pierre Gervais

November 1, 2016

Contents

Part I
Calcul propositionnel

1 Syntaxe

Le *calcul propositionnel* est un langage *inductivement* et *librement engendré* par un ensemble de règles.
C'est à dire qu'une formule ne peut pas être obtenu de deux façons différentes.

Définition 1. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de constantes propositionnelles, on définit $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ le calcul propositionnel sur $\mathcal{P}$ obtenu par les règles suivantes :

- si $p \in \mathcal{P}$, alors $p \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$
- $\perp \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$
- si $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, alors $(\neg F) \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$
- si $F, G \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ alors $(F \vee G), (F \wedge G), (F \rightarrow G) \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$

Notation 1. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \mathcal{F}$

Définition 2. Une définition alternative de $\mathcal{F}$ est $\mathcal{F} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n$ où

- $\mathcal{F}_0 = \mathcal{P}$
- $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{(\neg F) \mid F \in \mathcal{F}_n)\} \cup \{(F \star G) \mid F, G \in \mathcal{F}_n,\ \star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}\}$, avec $n \geqslant 0$

On définit la *hauteur* d'une formule F par le plus petit n tel que $F \in \mathcal{F}_n$.

Remarque 1. Ce langage est fortement parenthésé et toute formule peut être représentée par un arbre de décomposition.

Propriété 1. *Propriété de lecture unique*
Pour tout $F \in \mathcal{F}$, un seul de ces cas est vrai :

1. *$F \in \mathcal{P}$*
2. *Il existe un unique $G \in \mathcal{F}$ tel que $F = (\neg G)$*
3. *Il existe d'uniques $G, H \in \mathcal{F}$ et $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ tels que $F = G \star H$*

C'est-à-dire que toute formule ne peut se décomposer que d'une seule façon.

1.1 Raisonnements

On démontrera généralement les propriétés s'appliquant à $\mathcal{F}$ par induction : pour démontrer une proposition A s'appliquant à $\mathcal{F}$, on la démontre sur $\mathcal{P}$ et pour tout $(F \star G)$ et $(\neg F)$ où on suppose que $F, G \in \mathcal{F}$ vérifient A et $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

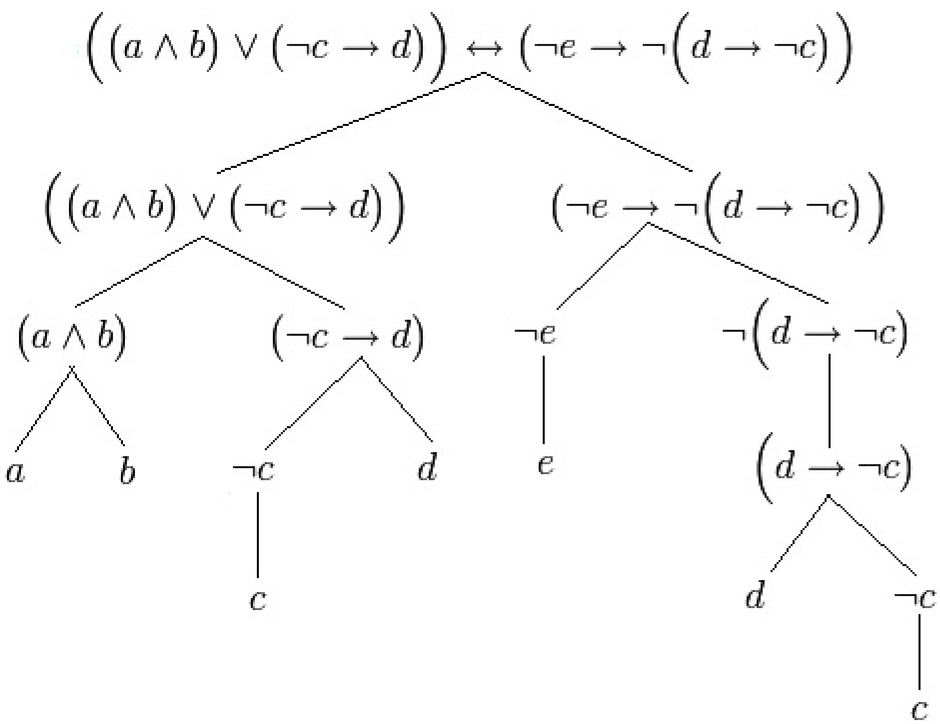

Figure 1: Arbre de décomposition

1.2 Définition alternative de $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$

Soit $\Sigma = \mathcal{P} \cup \{(,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \bot\}$, Σ^* est l'ensemble des mots sur Σ.

Exemple 1.

- $F = (\wedge\neg x_1)((\in \Sigma^*$
- $F = (\neg x_1) \in \Sigma^*$

Définition 3. $\mathcal{F}$ est le plus petit sous-ensemble de Σ^* contenant $\mathcal{P} \cup \{\bot\}$ et **clos** par les opérations

1. $(F, G) \longmapsto (F \vee G)$
2. $(F, G) \longmapsto (F \wedge G)$
3. $(F, G) \longmapsto (F \rightarrow G)$

Remarque 2. On peut montrer que les deux définitions correspondent. $\mathcal{F}$ satisfait la propriété de lecture unique (voir TD).

1.2.1 Sous-formule, hauteur, arbre de décomposition

Définition 4. Soit $F \in \mathcal{F}$, on définit $\mathcal{S}(F)$ l'ensemble des *sous-formules de* F telles que

- si $F \in \mathcal{P}$, $\mathcal{S}(F) = \{F\}$
- si $F = (\neg G)$ alors $\mathcal{S}(F) = \{F\} \cup \mathcal{S}(G)$
- si $F = (G \star H)$ où $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, alors $\mathcal{S}(F) = \{F\} \cup \mathcal{S}(G) \cup \mathcal{S}(H)$

TODO : vérifier dernier point

Définition 5. Soit $F \in \mathcal{F}$ on définit la *hauteur* $h(F)$ de F par

- $h(F) = 0$, si $F \in \mathcal{P}$
- si $= (\neg G)$, alors $h(F) = 1 + h(G)$
- si $F = (G \star H)$, alors $h(F) = 1 + \max\{h(G), h(H)\}$

Définition 6. Soit $F \in \mathcal{F}$, l'*arbre de décomposition de* F $arb(F)$ est un graphe étiqueté défini par

1. si $F \in \mathcal{P}$, $arb(F)$ est réduit à un sommet étiqueté par F.
2. si $F = (\neg G)$, alors $arb(F) = \neg - arb(G)$
3. si $F = (G \star H)$, alors $arb(F) = G - \star - H$

Notation 2. Soit F une formule, $var(F)$ est l'ensemble des variables de F, $occ(F)$ est le multi-ensemble des variables de F et $arb(F)$ est le graphe

- dont les sommets sont V
- et muni d'une fonction d'étiquetage $\lambda : V \longrightarrow \{\neg, \bot, \vee, \wedge, \rightarrow\} \cup var(F)$.

Remarque 3. Toutes les définitions sont univoques par la propriété de lecture unique.

Remarque 4. On définit la hauteur d'une formule par la hauteur de son arbre de décomposition, c'est-à-dire la distance maximum entre les feuilles et la racine.

Notation 3.

- $\top$ comme abréviation pour $(\bot \rightarrow \bot)$
- $(p \longleftrightarrow q)$ pour $(p \leftarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$
- $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = (((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) ... \wedge A_n)$

2 Sémantique

On s'intéresse à des propositions dont la valeur de vérité est soit vrai soit faux. On a besoin d'une **interprétation** (en terme de vrai ou faux) de ces constantes propositionnelles.

Définition 7. Une *valuation* est une fonction $v \ : \ \mathcal{P} \longrightarrow \{0,1\}$. Étant donné une valuation v, on définit l'*interprétation* $\overline{v} \ : \ \mathcal{F} \longrightarrow \{0,1\}$ comme ceci

- si $F = p \in \mathcal{P}$ alors $\overline{v} = v(p)$
- si $F = (\neg G) \in \mathcal{P}$ alors $\overline{v}(F) = 1$ si et seulement si $\overline{v}(G) = 0$
- $\overline{v}(\perp) = 0$
- $\overline{v}(F \wedge G) = 1$ si et seulement si $\overline{v}(F) = \overline{v}(G) = 1$

On peut décrire l'interprétation d'une formule par sa *table de vérité* :

F	G	$\neg G$	$F \wedge G$	$F \rightarrow G$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1

On définit formellement la *table de vérité* par une fonction $v \ : \ \{0,1\}^{\mathcal{P}} \longrightarrow \{0,1\}$

Définition 8.

- $F \in \mathcal{F}$ est dit *satisfaisable* s'il existe une valuation v de $\mathcal{P}$ tel que $\overline{v}(F) = 1$
- F est dit *valide* si pour toute valuation v de $\mathcal{P}$, $\overline{v}(F) = 1$, on dit aussi que F est une *tautologie*.
- F et G sont dites *équivalentes*, notées $F \equiv G$, si pour toute valuation v, $\overline{v}(F) = \overline{v}(G)$
- On note $v \models F \Longleftrightarrow \overline{v}(F) = 1$, c'est à dire si et seulement si v satisfait F.

Exercice 1. Vérifier que $F \equiv G$ si et seulement si $F \leftrightarrow G$ est valide.

Proposition 1. *Pour tout $F \in \mathcal{F}$, F est satisfaisable si et seulement si $(\neg F)$ n'est pas valide.*

3 Exemples de formalisation

3.1 Contraites de compatibilité/exclusion

Problème : On possède n produits chimiques à ranger dans $k \leqslant n$ conteneurs. Certains produits ne peuvent pas être stockés ensemble dans un conteneur.

La contrainte est donnée sous la forme d'un ensemble $\mathcal{L} \subseteq [n]$ tel que $I = \{i_1, ..., i_k\} \subseteq \mathcal{L}$ si et seulement si les produits $i_1, .., i_k$ ne peuvent pas être stockés ensemble.

Enjeu : Écrire une formule propositionnelle F telle que F est satisfaisable si le problème a une solution.

Les variables propositionnelles $\mathcal{P} = p(i,j),\ i \leqslant n,\ j \leqslant k$ sont interprétées par "le produit chimique i est dans le camion j".

On exprime deux propositions :

- Chaque produit se trouve dans un unique conteneur : $F = \underbrace{\left(\bigwedge_{i\leqslant n}\left(\bigvee_{j\leqslant k} p(i,j)\right)\right)}_{\substack{\text{Chaque produit } i \text{ est stocké}\\ \text{dans au moins un camion } j}} \wedge \underbrace{\left(\bigwedge_{i\leqslant n}\left(\bigwedge_{\substack{j,j'\leqslant k\\ j\neq j'}} (\neg\,(p(i,j)\wedge p(i,j')))\right)\right)}_{\substack{\text{Pour chaque produit } i\\ \text{et chaque paire de camions } j\neq j'\\ \text{il est faux que } i \text{ est à la fois dans } j \text{ et } j'}}$

- On respecte les incompatibilités : $G = \underbrace{\bigwedge_{I\subseteq\mathcal{L}}\left(\bigwedge_{j\leqslant k}\neg\left(\bigwedge_{i\in I} p(i,j)\right)\right)}_{\substack{\text{Pour chaque ensemble } I \text{ de produits}\\ \text{ne pouvant pas être stockés ensemble}\\ \text{et pour chaque camion } j,\\ \text{aucun produit de } I \text{ n'est présent dans le camion}}}$

4 Équivalence logique usuelles

Proposition 2. *Substitution*

Soient $H_1, ..., H_n \in \mathcal{F}$.

- *Si F est une tautologie, la formule $F' = F[H_1/p_1, ..., H_n/p_n]$ est une tautologie, où F' est la formule dans laquelle on remplace chaque p_i par H_i.*

- *Si $F \equiv G$ alors $F[H_1/p_1, ..., H_n/p_n] \equiv G[H_1/p_1, ..., H_n/p_n]$*

Exemple 2. Soient $F = (p_1 \longrightarrow p_1)$ et $H = ((q_1 \wedge \neg q_3) \vee q_3)$

Si F est une tautologie, alors $(((q_1 \wedge \neg q_3) \vee q_3) \longrightarrow ((q_1 \wedge \neg q_3) \vee q_3))$ est une tautologie.

Remarque 5. La réciproque est fausse.

Lemme 1. *Soit $\mathcal{P} = \{p_1, ..., p_n\}$, $F \in \mathcal{F}$ et $H_1, ..., H_n \in \mathcal{F}$.*

Soit v une valuation de $\mathcal{P}$ avec $\forall i,\ v(H_i) = \delta_i$.

Alors la valuation v' définie par $v'(p_i) = \delta_i$ vérifie $\overline{v}(F[H_1/p_1, ..., H_n/p_n]) = \overline{v'}(F)$

Preuve 1. Démontrons le lemme par induction structurelle sur F.

On notera $F[H_1/p_1, ..., H_n/p_n] := F[\overline{H}/\overline{p}]$

- Si $F = \perp$, alors $v(\perp) = v'(\perp) = 0$.

- Si $F = p_1 \in \mathcal{P}$, alors $F' = F[H_1/p_1] = H_1$ <u>et</u> $v'(p_1) = \delta_1 = v(H_1)$.

- Si $F = \neg G$, par hypothèse d'induction $v(G[\overline{H}/\overline{p}]) = v'(G)$.

  $v(F[\overline{H}/\overline{p}]) = 1$

  $v(G[\overline{H}/\overline{p}]) = 1 - v'(G) = v'(F)$

- Si $F = G_1 \wedge G_2$, par hypothèse d'induction

$$\begin{cases} v(G_1[\overline{H}/\overline{p}]) = v'(G_1) \\ v(G_2[\overline{H}/\overline{p}]) = v'(G_2) \end{cases}$$

  or $v(F[\overline{H}/\overline{p}]) = v(G_1[\overline{H}/\overline{p}]) \cdot v(G_2[\overline{H}/\overline{p}]) = v'(G_1) \cdot v'(G_2) = v'(F)$

- etc.

$\square$

Preuve 2. Preuve de la proposition Comme $F \equiv G$ si et seulement si $(F \longleftrightarrow G)$ est une tautologie.

On prouve seulement seulement la première partie de la proposition.

Supposons F ue tautologie, soit v une valuation de $\mathcal{P}$, par le lemme précédent il existe v' telle que $v(F[\overline{H}/\overline{p}]) = v'(F)$ comme F est une tautologie, $v'(F) = 1$ et $v(F[\overline{H}/\overline{p}])$ est une tautologie.

$\square$

Par la suite, pour toutes formules propositionnelles A, B et C, les équivalences suivantes se montreront en substituant des variables aux formules.

Propriété 2.

- *Négation :* $\neg\neg A \equiv A$
- *Lois de Morgan :* $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \longrightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$
- *Associativité :* $(A \wedge (B \wedge C)) \equiv ((A \wedge B) \wedge C)$ *et* $(A \vee (B \vee C)) \equiv ((A \vee B) \vee C)$
- *Expression des connecteurs :* $\bot \equiv (A \wedge \neg A)$ *et* $\top \equiv (A \vee \neg A)$
- *Distributivité :* $(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- *Idempotence :* $A \vee A \equiv A \wedge A \equiv A$
- *Absorption :* $(A \wedge \bot)\bot$ *et* $(A \vee \top) \equiv \top$
- *Neutre* $(A \wedge \top) \equiv A$ *et* $(A \vee \bot) \equiv A$

5 Formules normales

Ici $\mathcal{P} = \{x_1, ..., x_n\}$

Définition 9.

- Un *littéral* est une variable ou une négation de variable.
- Une *clause* (ou *disjonction élémentaire*)est une formule C de la forme $C = \bigvee_{i \in A} x_i \vee \bigvee_{i \in B} \neg x_i$ où $A, B \subseteq \{1, ..., n\}$.
- La longueur d'une clause C notée $|C|$ est son nombre de variables : $|C| = |A| + |B|$.
- Si $|C| = 1$, C est une *clause unitaire*.

Définition 10.

- F est sous *forme normale disjonctive* (*FND* ou *DNF*) si F est une disjonction de conjonctions élémentaires, c'est à dire si F est de la forme

$$F = \bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j \in A_i} x_j \wedge \bigwedge_{j \in B_i} \neg x_j \right)$$

- F est sous *forme normale conjonctive* (*FNC* ou *CNF*) si F est une conjonction de disjonctions élémentaires, c'est à dire si F est de la forme

$$F = \bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j \in A_i} x_j \wedge \bigvee_{j \in B_i} \neg x_j \right)$$

- Si la longueur de chaque clause est bornée par $l > 0$, on dit que F est l-FNC (de même pour l-FND).

Définition 11. Soit F sous forme FNC, c'est à dire si $F = \bigwedge\limits_{i \in I} C_i$ où $(C_i)_{i \in I}$ sont des clauses, la longueur $|F|$ de F est :

$$|F| = \sum_{i \in I} |C_i|$$

Exemple 3.

- $F = (p \wedge q \neg r) \vee (\neg p \wedge r) \vee \neg r$ est une 3-FND.
- $F = p \vee \neg q$ est une 2-FNC à une clause et une 1-FND à deux clauses unitaires.

Remarque 6. Le nombre de clauses différentes possibles est borné : $|I| \leqslant 2^{|\mathcal{P}|}$

5.1 Tables de vérité et formes normales

Soit v une valuation de $\mathcal{P}$, on note :

$$C_v^1 = \left(\bigwedge_{i \in A_1} x_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \in B_1} \neg x_i \right)$$

où $\forall x_i \in \mathcal{P}, \begin{cases} v(x_i) = 1 \Longleftrightarrow i \in A \\ v(x_i) = 0 \Longleftrightarrow i \in B \end{cases}$.

On a $A_1 \sqcup B_1 = \mathcal{P}$.

Lemme 2. *Soit F une formule, F est équivalente à la FND suivante :*

$$\bigvee_{\substack{v \,:\, \mathcal{P} \longrightarrow \{0,1\} \\ \overline{v}(F)=1}} C_v^1$$

On note à présent :

$$C_v^0 = \left(\bigvee_{i \in B} x_i \right) \vee \left(\bigvee_{i \in A} \neg x_i \right)$$

Lemme 3. *Soit F une formule, F est équivalente à la FNC suivante :*

$$\bigwedge_{\substack{v\ :\ \mathcal{P}\longrightarrow\{0,1\}\\ \overline{v}(F)=0}} C_v^0$$

5.2 Systèmes complets de connecteurs

Définition 12. Un système de connecteurs est fonctionnellement complet si toute table de vérité est représentable ar une formule utilisant ces seuls connecteurs.

Corollaire 1. $\{\wedge, \vee, \neg\}$ *est fonctionnellement complet, de même pour* $\{\wedge, \neg\}$*,* $\{\vee, \neg\}$*,* $\{\rightarrow, \neg\}$ *et* $\{\perp, \rightarrow\}$*.*

5.3 Mise sous forme normale

On cherche comment construire une forme normale équivalente à une formule F donnée, il faut :

- construire la table de vérité de F
- en déduire une FND ou une FNC

Cette méthode est très coûteuse car elle oblige à en passer par l'examen de toutes les valuations.
Une autre méthode consiste à jouer avec les équivalences pour trouver une FND ou FNC.

6 Formes normales complètes et bornes inférieures de FND

Définition 13. Soient F une formule sur $\mathcal{P}$ et C une conjonction élémentaire.
On dit que C est *impliquant* de F (ou que F absorbe C) si $(C \rightarrow F)$ est valide.

Remarque 7. $(C \rightarrow F)$ est valide si et seulement si :

$$\forall v\ :\ \mathcal{P} \longrightarrow \{0,1\},\ (\overline{v}(C) = 1 \Longrightarrow \overline{v}(F) = 1)$$

Le terme d'absorption est justifié par le fait que $(C \rightarrow F)$ soit valide si et seulement si $C \vee F \equiv F$.

Définition 14. Soit C_1 une conjonction élémentaire, C_1 est un impliquant premier de F si :

- C_1 est un impliquant de F
- aucun impliquant C_2 de F n'absorbe C_1, c'est-à-dire : pour toute conjonction élémentaire C_2, si $(C_2 \rightarrow F)$ est valide alors $(C_1 \rightarrow C_2)$ n'est pas valide (c'est à dire $C_1 \vee C_2 \not\equiv C_2$).

En résumé, C_1 est un impliquant de C_2 si et seulement si $(C_1 \rightarrow C_2)$ est valide, si et seulement si $(C_1 \vee C_2 \equiv C_2)$, et si et seulement si C_2 absorbe C_1.

Exemple 4. $C_2 = (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$ est un impliquant de $C_1 = (x_1 \wedge \neg x_2)$ car pour toute valuation v, si $\overline{v}(C_2) = 1$, alors $\begin{cases} v(x_1) = 1 \\ v(x_2) = v(x_2) = 0 \end{cases}$ et donc $\overline{v}(C_2) = 1$.
C_2 est "plus général" que C_1.

Lemme 4. *Soient* $C_1 = \bigwedge_{i\in A_1} x_i \wedge \bigwedge_{i\in B_1} \neg x_i$ *et* $C_2 = \bigwedge_{i\in A_2} x_i \wedge \bigwedge_{i\in B_2} \neg x_i$

C_1 est un impliquant de C_2 (C_2 absorbe C_1) si et seulement si $A_2 \subseteq A_1$ et $B_2 \subseteq B_1$.

Exercice 2. Le démontrer.

Exemple 5. $C_1 = x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_4$ et $C_2 = x_1 \wedge \neg x_3$

C_2 absorbe C_1.

Lemme 5. *Soient* $C = \bigwedge_{i\in A} l_i$ *où* $(l_i)_i$ *sont des littéraux et* F *est une formule.*

C est un impliquant premier de F si et seulement si :

- *C est un impliquant de F*
- *Pour tout $j \in A$, on a que $C_j = \bigwedge_{\substack{i\in A\\ i\neq j}} l_i$n'est pas un impliquant de F.*

Exercice 3. Le démontrer.

Remarque 8. Soit $F = \bigvee_{i\in I} D_i$, chaque D_i est un impliquant de F.

Proposition 3. *Toute formule propositionnelle peut être mise sous forme normale disjonctive dont toutes les clauses élémentaires sont les impliquants premiers de F. Une telle FND est dite complète.*

Preuve 3. Soit n le nombre de variables, à équivalence logique près il n'existe qu'un nombre fini de conjonctions élémentaire (au plus 3^n) donc d'impliquants premiers de F.

Par exemple : $\mathcal{P} = \{x_1, x_2, x_3\}$,chaque variable peut apparaître ou pas dans la clause.
Si elle apparaît, cela peut être positivement ou négativement.
Soient $(D_i)_{i\leqslant m}$ des impliquants premiers de F.

- F absorbe chacun de ses impliquants
- F est équivalente à une FND : $\bigvee_{i\in A} C_i$

donc par associativité de la disjonction :

$$F \equiv \bigvee_{i\in A} C_i \vee \bigvee_{i=1}^{m} D_i$$

Pour tout j, par absorption, $\bigvee_{i\in A} C_i \vee D_j \equiv F$.

Chaque C_i est un impliquant :

- Soit C_i est premier
- Soit C_i est absorbé par un impliquant premier D_j (c'est à dire $C_i \vee D_j \equiv D_j$).

Par associativité et absorptions successives, on a :

$$F = \bigvee_{i=1}^{m} D_i$$

Notation 4. Par abus de langage, on appelle les modèles de F l'ensemble des valuations S_F satisfaisant F.

Si C est un impliquant de F, $S_C \subseteq S_F$ et si C est un impliquant premier de F, S_C est maximal au sens de l'inclusion.

Définition 15. Soient $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, $F = \bigvee_{i \in I} C_i$ et C_i des conjonctions élémentaires.

- F est *première* si chaque C_i est un impliquant premier.
- F est *redondante* s'il existe $j \in I$ tel que $F \equiv \bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} C_i$
- F est *non-redondante* si pour tout $j \in I$, $F \not\equiv \bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} C_i$.

La redondance est une généralisation de la notion d'absorption : si C_j vérifie $F \equiv \bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} C_i$, alors C_j est absorbée par $\bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} C_i$

Exemple 6. $C_1 = x \wedge y$, $C_2 = x \wedge \neg y$, $C_3 = x$ et $F = \bigvee_{i=1}^{3} C_i$, on a $F \equiv \bigvee_{i=1}^{2} C_i \equiv C_3$ car C_1 et C_2 sont des impliquants de C_3.

Lemme 6. *Si F est complète, alors F est première, mais l'inverse n'est pas vrai si la forme complète est redondante.*

Ces notion sont utiles pour caractériser des FND (de longueurs) minimales de certaines formules.

6.1 Formules propositionnelles positives

Définition 16. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de variables propositionnelles, on définit l'ordre $\leqslant$ sur les valuations par

$$\forall v_1, v_2 \ : \ \mathcal{P} \longrightarrow \{0,1\}, \ v_1 \leqslant v_2 \iff \forall x \in \mathcal{P}, v_1(x) \leqslant v_2(x)$$

Définition 17. Une formule F est *positive* si pour tout valuation v_1, v_2 telles que $v_1 \leqslant v_2$ on a $\overline{v_1}(F) \leqslant \overline{v_2}(F)$.

Proposition 4. *Soit F une formule, elle est positive si et seulement si tous les impliquants premiers de F sont positifs, c'est-à-dire si elle ne contient aucun littéral négatif.*

Remarque 9. Si une formule est positive alors elle peut être écrite sans utiliser de négation.

Preuve 4.

***F* positive $\Longrightarrow$ *F* tous les littéraux de *F* sont positifs**

Soit F une formule positive, et C un impliquant premier de F contenant un littéral négatif.

$$C = \bigwedge_{i \in A} x_i \wedge \bigwedge_{i \in B} \neg x_i, \ B \neq \emptyset$$

$C' = \bigwedge_{i \in A} x_i$ absorbe C, or C est un impliquant premier, donc C ne peut pas être absorbé par un autre impliquant de F.

Alors C' n'est pas un impliquant de F, d'où l'existence d'une valuation v satisfaisant C' mais pas F.

Si $\overline{v}(C') = 1$ alors $\forall i \in 1,\ v(x_i) = 1$ et $\forall i \in B,\ v(x_i) \in \{0,1\}$.
C est un impliquant de F donc pour toute valuation v', si $\overline{v'}(C) = 1$ alors $\overline{v'}(F) = 1$, par exemple :

$$\begin{cases} v'(x_i) = 1,\ \forall i \in A \\ v'(x_i) = 0,\ \forall i \in B \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \overline{v}(F) = 0,\ \forall i \in A \\ \overline{v'}(F) = 1,\ \forall i \in B \\ v' \leqslant v \end{cases}$$

On sait que F est positive alors $1 = v'(F) \leqslant v(F) = 0$, contradiction. ✓

***F* tous les littéraux de *F* sont positifs $\Longrightarrow$ *F* positive**
On considère une forme (par exemple complète) de F :

$$F \equiv \bigvee_{ii \in I} C_i$$

où $(c_i)_i$ sont des impliquants premiers de F.
Par hypothèse chaque C_i est positif, on doit montrer que F est positive, c'est-à-dire que

$$\forall v, v'\ :\ (v \leqslant v' \Longrightarrow \overline{v}(F) \leqslant \overline{v'}(F))$$

Soit v une valuation, on pose $A_v = \{i | v(x_i) = 0\}$.
Par définition, pour tout j on a

$$\overline{v}(C_j) = 0 \Longleftrightarrow C_j \text{ ne contient quue des variables de } A_v$$

Soit v' une autre valuation telle que $v \leqslant v'$, on a $A_{v'} \subseteq A_v$, donc $\{C_j \mid \overline{v}(C_j) = 1\} \subseteq \{C_j \mid \overline{v'}(C_j) = 1\}$, d'où :

$$\overline{v}(F) \leqslant \overline{v'}(F)$$

✓

Proposition 5. *Soit F une formule positive, alors la FND complète de F est positive et non-redondante. Elle est l'unique FND première de F.*

Remarque 10. Il n'existe pas de forme équivalente plus courte : aucun impliquant premier n'est redondant.

Preuve 5. Soit F une formule positive de variables $x_1, ..., x_n$.
Par les propositions précédentes, la FND complète $\bigvee_{i \in I} C_i$ de F n'a que des impliquants premiers positifs.

Supposons parl'absurde qu'il existe $j \in I$ telle que C_j soit superflue (que F soit redondante), c'est à dire que $F \equiv \bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} C_i$.

On pose $C_j = \bigwedge_{a \in A} x_a$, considérons la valuation v telle que $v(x_a) = 1 \Longleftrightarrow a \in A$. On a $\overline{v}(C_j) = 1$ donc $\overline{v}(F) = 1$.

Or $F \equiv \bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} C_i$, donc il existe $i \neq j$ tel que $\overline{v}(C_i) = 1$.

Posons à présent $C_i = \bigwedge_{b \in B} x_b$, on sait que C_i et C_j sont des impliquants premiers de F

Donc C_i (resp. C_j) n'absorbe pas C_j (resp. C_i), d'après une proposition précédente $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$, il existe alors $b \in B$ tel que $b \notin A$, donc $v(b) = 0$ et $\overline{v}(C_i) = 0$, ce qui est contradictoire.

Part II
Compléments

7 Calcul propositionnel

7.1 Théorème de lecture unique

Définition 18. Soient $w_0, w_1 = a_1...a_n \in \mathcal{M}$, on dit que w_0 est un segment initial de w_1, noté $w_0 \subseteq w_1$ si $w_0 = a_1...a_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$, et w_0 est un segment propre, noté $w_0 \subsetneq w_1$ si $i < n$.

Lemme 7. *Soit $F \in \mathcal{F}$ et $G \subsetneq F$, alors $M \notin \mathcal{F}$*
Autrement dit, aucune formule n'est le préfixe d'une autre.

Proposition 6. *On note $o[F]$ le nombre de parenthèses ouvrantes d'une formule F et $f[F]$ pour ses parenthèses fermées.*

1. $\forall F \in \mathcal{F},\ o[F] = f[F]$
2. $\forall F \in \mathcal{F}, \forall M \in \Sigma^*,\ M \subsetneq F \Longrightarrow \begin{cases} o[M] > f[M],\ \textit{et donc } M \notin \mathcal{F} & (a) \\ \textbf{\textit{x-ou}}\ M = \neg...\neg \notin \mathcal{F} & (b) \\ \textbf{\textit{x-ou}}\ M = \varepsilon \notin \mathcal{F} & (c) \end{cases}$

Preuve 6. Soient $F \in \mathcal{F}$ et $M \subsetneq F$, montrons le second point.

- Si $F = \neg G = \neg g_1...g_n$
  - cas (c) : $M = \varepsilon$
  - cas (b) : $M = \neg$
  - $M = \neg g_1...g_i \subsetneq G,\ i < n$
    alors soit $o[M] = o[g_1...g_i] > f[g_1...g_i] = f[M]$, ce qui rentre dans le cas (a)
    soit $g_1...g_i = \underbrace{\neg...\neg}_{i \text{ fois}}$, alors $M = \underbrace{\neg...\neg}_{i+1 \text{ fois}}$: on est encore dans le cas (b).
- Si $F = (G \circ H) = (g_1...g_m \circ h_1...h_n)$ et $M \subsetneq F$, soit $M = \varepsilon$ (cas (c)), soit $M \neq \varepsilon$ avec
  - $M = ($ alors $o[M] = 1 > f[M] = 0$
  - $M = (g_1...g_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m$, donc $o[M] = o[g_1...g_i] + 1 > f[M] = f[g_1...g_i]$
  - $M = (G\circ$ donc $o[M] = 1 + o[G] > f[M] = f[G]$
  - $M = (G \circ h_1...h_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$, alors $o[M] = 1 + o[G] + o[h_1...h_i]$
    $o[M] = 1 + f[G] + o[h_1...h_i] > f[G] + f[h_1...h_i] = f[(G \circ h_1...h_i] = f[M]$

- Si $F \in \mathcal{P}$, $M = \varepsilon$, c'est le cas (c).

$\square$

Preuve 7. Soit $F \in \mathcal{F}$

- Si $F \in \mathcal{P}$ pour tout $q \in \mathcal{P} \backslash \{F\}$, $q \neq F$.
  $\forall G \in \mathcal{F},\ F \neq \neg G$ car $|\neg G| \geqslant 2 > 1 = |F|$
  $\forall G, H \in \mathcal{F},\ \forall \star \in \{\wedge, \vee, \longrightarrow\},\ (G \star H) \neq F$ car $|F| = 1 < 5 \leqslant |(G \star H)|$
- Si $F = \neg G$ avec $G \in \mathcal{F}$, pour tout $q \in \mathcal{F}$ on a $q \neq F$.
  $\forall H \neq G$ on a $\neg H \neq F$
  $\neg G \neq (H \star K)$ pour toute formules H et G et tout opérateur $\star$.
- Si $F = (G_1 \star G_2)$, supposons $F = (H_1 \circ H_2)$ que l'on réécrit

$$a_1 ... a_k \star b_1 ... b_l = c_1 ... c_m \circ d_1 ... d_n$$

  Montrons $G_1 = H_1$, ce qui impliquera $\star = \circ$ et $G_2 = H_2$.
  On est face à l'un des deux cas :

$$(*)\ \underbrace{a_1 a_2 a_3 ... a_k}_{G_1 \in \mathcal{F}} \subseteq \underbrace{c_1 c_2 c_3 ... c_m}_{H_1 \in \mathcal{F}}$$

$$(**)\ c_1 c_2 c_3 ... c_m \subseteq a_1 a_2 a_3 ... a_n$$

  les deux cas sont symétriques, on suppose $(*)$ et par l'absurde que $G_1 \neq H_1$, c'est à dire $G_1 \subsetneq H_1$, ce qui implique d'après le lemme $G_1 \notin \mathcal{F}$.
  On a également $\forall F \in \mathcal{F},\ \neg G \neq (G_1 \star G_2)$ et $\forall p \in \mathcal{P},\ p \neq (G_1 \star G_2)$.

$\square$

Exercice 3 Soit $C = \bigwedge_{i \in I} l_i$ et F telle que C soit un impliquant de F.

S'il existe j tel que C_j implique F, alors C n'est pas premier
Supposons qu'il existe j tel que C_j soit un impliquant de F.
$C = C_j \wedge l_j$ alors si une valuation v est telle que $\overline{v}(C) = 1$, c'est que $\overline{v}(C_j) = \overline{v}(l_j) = 1$
Cela signifie que C est un impliquant de C_j, C n'est donc pas un impliquant premier de F. ✓

Si pour tout j C_j n'implique pas F, alors C est premier
✓