Analyse

Isabelle Galagher et Pierre Gervais

September 16, 2016

Contents

Part I
Topologie des espaces vectoriels normés

1 Espaces vectoriels normés : premières définitions

1.1 Distances et normes

Définition 1. Étant donné un ensemble E, une *distance sur* E est une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. d est *définie positive* : $d(x,y) \geqslant 0$ et $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. d est symétrique : $d(x,y) = d(y,x)$
3. d vérifie l'*inégalité triangulaire* : $\forall z \in E,\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Exemple 1.

- $E = \mathbb{R}$ et $d(x,y) = |x-y|$
- $E = \mathbb{R}^2$ et $d\left(\binom{a}{b}, \binom{c}{d}\right) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

Remarque 1. Par l'inégalité triangulaire, on déduit

- $d(x,z) \geqslant d(x,y) - d(y,z)$
- $d(x,z) \geqslant d(z,y) - d(x,y)$

d'où $|d(x,y) - d(z,y)| \leqslant d(x,z)$

Définition 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, une *norme* sur E est une application notée N ou $\|\cdot\|$ telle que

1. $(x,y) \longmapsto \|x-y\|$ est une distance
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in E,\ \|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ (*homogénéité*)

Proposition 1. *Une fonction* $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une norme si et seulement si :*

1. *elle est homogène*
2. *elle est définie*
3. *elle vérifie l'inégalité triangulaire*

Preuve 1.

$\Longrightarrow$

Soit $\|\cdot\|$ une norme.

1. ✓
2. $\|x\| = d(x,0)$ où $d(x,y) = \|x-y\|$, donc $\|x\| \geqslant 0$ et $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow d(x,0) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $\|x+y\| = d(x+y,0) = d(x,-y)$, or $\forall x,y,z \in E,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ donc $d(x,-y) \leqslant d(x,0) + d(0,-y)$
D'où $\|x+y\| \leqslant d(x,0) + d(0,-y) \leqslant \|x\| + \|-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

$\Longleftarrow$

Soit $\|\cdot\|$ vérifiant les trois propriétés, alors soit $d(x,y) = \|x-y\|$ et montrons que d est une distance.

1. $d(x,y) \geqslant 0$ car $\|x-y\| \geqslant 0$ par (2). $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \|x-y\| = 0 \Longleftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(x-y)\| = \|y-x\| = d(y,x)$
3. $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leqslant \|x-z\| + \|z-x\| \leqslant d(x,y) + d(z,y)$

Exemple 2.

1. Dans $\mathbb{R}^n$, on définit les normes $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$, $\|x\|_p = \sqrt[p]{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$ et $\|x\|_\infty = \max\limits_k \|x_k\|$
2. Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'un produit scalaire, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
3. Soit A un ensemble et F une espace vectoriel normé, et $\mathcal{B}(A,F)$ les fonctions bornées de A dans F, alors $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in A} \|f(x)\|$ est une norme.
4. Sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|$, $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2}$ et$\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$

Définition 3. Deux normes N_1 et N_2 sont dites *équivalentes* s'il existe des constantes positives C_1 et C_2 telles que $\forall x \in E,\ C_1 N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant C_2 N_2(x)$

Exemple 3. Par exemple dans $\mathbb{R}^n$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. En effet

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \leqslant 2\|x\|_\infty$$

et $\|x_i| \geqslant \|x\|_\infty,\ i = 1,2$

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes ! Cela n'est en revanche pas vraie en dimension infinie.

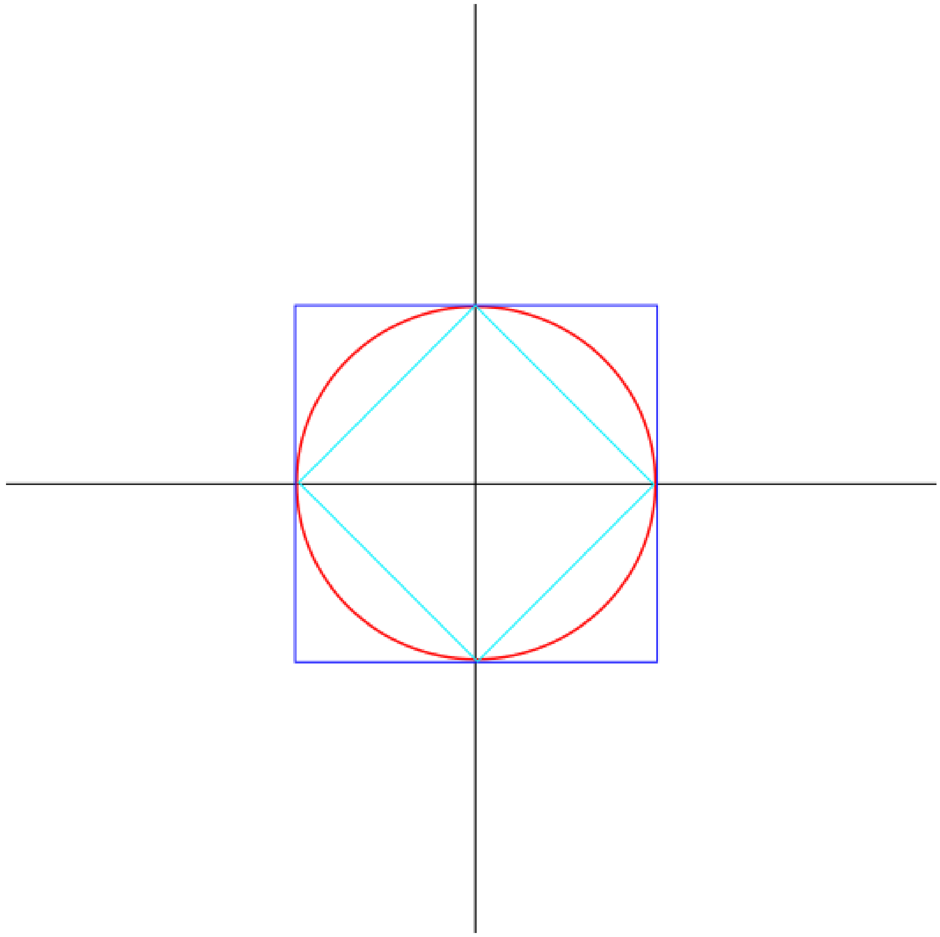

Figure 1: Différentes boules unités
En bleu : $\mathcal{B}_\infty(0,1)$
En rouge : $\mathcal{B}_2(0,1)$
En turquoise : $\mathcal{B}_1(0,1)$

1.2 Ouverts et fermés

Définition 4. Soit E un espace vectoriel normé, on appelle *boule fermée* de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\overline{\mathcal{B}}(x,r) = \{u \in E \mid \|x-u\| \leqslant r\}$, et la *boule ouverte* de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{B}(x,r) = \{u \in E \mid \|x-u\| < r\}$.

Définition 5. Soit $X \subseteq E$

1. On dit que $U \subseteq X$ est un *ouvert* de X si $\forall x \in U,\ \exists r > 0\ :\ \mathcal{B}(x,r) \cap X \subseteq U$
2. On dit que $F \subseteq X$ est un *fermé* de X si son complémentaire dans X est un ouvert de X.

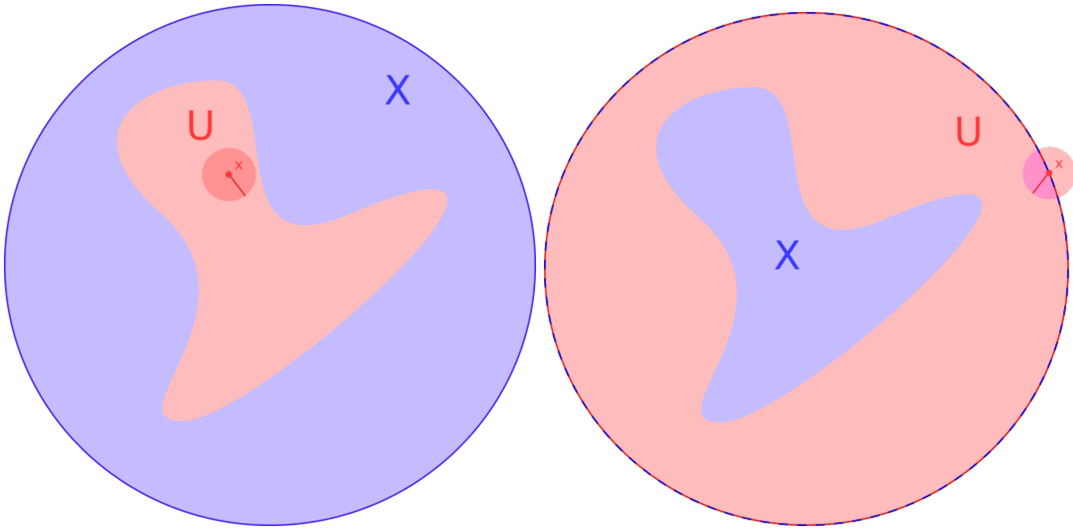

Figure 2: Deux exemples d'ouverts

Remarque 2.

1. Un ouvert dans X n'est pas nécessairement ouvert dans E, comme montré dans le deuxième exemple de la figure ci-dessus.

2. Un ouvert de E sera appelé un **ouvert**, de même pour les fermés.

3. Toute boule ouverte est un ouvert.

4. Toute boule fermée est un fermé.

Preuve 2. On considère une boule ouverte $\mathcal{B}(x_0, r)$, montrons que c'est un ouvert.

Soit $x \in \mathcal{B}(x_0, r)$, alors $\|x - x_0\| < r$. On cherche r' tel que $\mathcal{B}(x, r') \subseteq \mathcal{B}(x_0, r)$ donc r' doit vérifier

$$\|x - y\| < r' \Longrightarrow \|x_0 - y\| < r$$

.

Mais $\|x_0 - y\| \leqslant \|x - y\| + \|x - x_0\| < \|x - y\| + r$.

Soit $\delta = r - \|x - x_0\| > 0$, on pose alors $r' = \frac{\delta}{2} > 0$, alors $\|x_0 - y\| \leqslant r' + \|x - x_0\| \leqslant r' + r - \delta < r$

$\square$

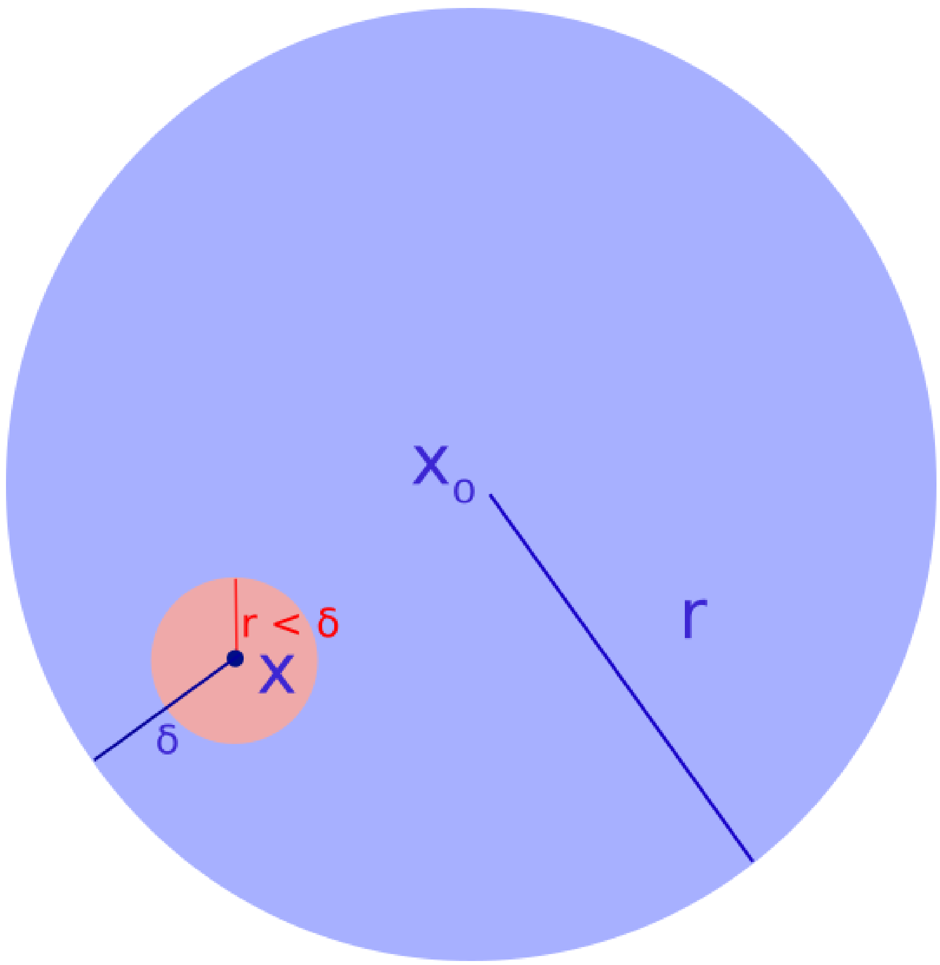

Figure 3: Construction de la boule ouverte

Proposition 2. *L'intersection de deux ouverts est un ouvert et toute réunion d'ouverts est un ouvert.*

Preuve 3. Soient U et U' deux ouverts, montrons que $U \cap U'$ est un ouvert.

Soit $x \in U \cap U'$, il existe $r > 0$ et $r' > 0$ tels que $(B)(x, r) \subseteq U$ et $\mathcal{B}(x, r') \subseteq U'$.
On pose $\widetilde{r} = \min(r, r')$ et on a $\mathcal{B}(x, \widetilde{r}) \subseteq U \cap U'$

$\square$

Preuve 4. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts, montrons que $U = \displaystyle\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert.

Soit $x \in U$, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$, il existe donc r tel que $\mathcal{B}(x, r) \subseteq U_{i_0}$ car U_{i_0} est ouvert, d'où $\mathcal{B}(x, r) \subseteq U$.

$\square$

Proposition 3. *Soit $X \subseteq E$, tout ouvert U de X s'écrit sous la forme $U = X \cap \widetilde{U}$, où $\widetilde{U}$ est un ouvert.*
De même pour tout fermé F de X s'écrit $F = X \cap \widetilde{F}$ où $\widetilde{F}$ est un fermé.

Preuve 5. Soit $\widetilde{U}$ un ouvert de E, alors $\widetilde{U} \cap X$ est un ouvert de X par construction.
Inversement soit U ouvert de X, alors $\forall x \in U,\ \exists r(x) > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r(x)) \cap X \subseteq U$
Soit alors $\widetilde{U} = \displaystyle\bigcup_{x\in U} \mathcal{B}(x, r(x))$, alors $\widetilde{U}$ est un ouvert et $U = X \cap U$

Définition 6. Une suite à valeurs dans E est dite *convergente vers* $x \in E$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $\|x_n - x\| < \epsilon$.
On note $\lim_n x_n = x$