Exercice 1

1. Soit $f \in E$ et $x \in [0,1]$, d'après l'inégalité e Taylor on a :

$$|f(x) - f(0)| \leqslant \sup_{c \in [0,1]} |f'(c)|$$

$$|f(x)| \leqslant \sup_{c \in [0,1]} |f'(c)| + |f(0)|$$

$$|f(x)| \leqslant \|f'\|_\infty + |f(0)|$$

   Cette inégalité est vraie pour tout x, donc $\|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + |f(0)|$.

   De plus $\|f'\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + |f(0)|$, et en additionnant les deux égalités :

$$\underbrace{\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty}_{N_1(f)} \leqslant 2 \cdot \underbrace{(\|f'\|_\infty + |f(0)|)}_{N_2(f)}$$

   De même $|f(0)| \leqslant \|f\|_\infty$ et donc $N_2(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = N_1(f)$.

   En conclusion N_1 et N_2 sont équivalentes :

$$N_2(f) \leqslant N_1(f) \leqslant 2 \cdot N_2(f)$$

2. Une suite de fonctions dérivables convergeant uniformément n'est pas nécessairement dérivable.

   La suite de fonctions $(f_n)_{n>0}$ définie par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

   $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction valeur absolue mais celle ci n'est pas dérivable, $(f'_n)_n$ ne converge pas uniformément.

   Les normes N_1 et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

3. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy pour la norme N_2, pour tous m, n on a :

$$N_2(f_n - f_m) = |f_n(0) - f_m(0)| + \|f'_n - f'_m\|$$

   Donc $(f'_n)_n$ converge uniformément et est $(f_n(0))_n$ converge, de plus les fonctions sont définies sur un intervalle borné, on en déduit que $(f_n)_n$converge uniformément vers une fonction dérivable f.

   E est donc un espace de Banach.

Exercice 2

1.

2. Soient $n > m > 0$

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|dt$$

$$\|f_n - f_m\|_1 = 2\int_{0}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|dt$$

$$\|f_n - f_m\|_1 = 2\left(\int_{0}^{1/n} |f_n(t) - f_m(t)|dt + \int_{1/n}^{1/m} |f_n(t) - f_m(t)|dt + \int_{1/m}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|dt\right)$$

$$\|f_n - f_m\|_1 = 2\left(\int_{0}^{1/n} |nt - mt|dt + \int_{1/n}^{1/m} |1 - mt|dt + \int_{1/m}^{1} 0dt\right)$$

$$\|f_n - f_m\|_1 = 2\left(\left[nt^2/2 - mt^2/2\right]_{t=0}^{t=1/n} + \left[t - mt^2/2\right]_{1/n}^{1/m}\right)$$

$$\|f_n - f_m\|_1 = 2\left(\left[\frac{n}{2n^2} - \frac{m}{2n^2}\right] + \left[\frac{1}{m} - \frac{m}{2m^2} - \frac{1}{n} + \frac{m}{2n^2}\right]\right)$$

$$\|f_n - f_m\|_1 = 2\left(\frac{n}{2n^2} + \frac{1}{m} - \frac{m}{2m^2} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\|f_n - f_m\|_1 = 2\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\|f_n - f_m\|_1 = 2\left(\frac{-1}{2n} + \frac{1}{2m}\right)$$

$$\|f_n - f_m\|_1 = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{m}$$

   $(f_n)_n$ est bien une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ tel que si $n, m > N$, alors $\|f_n - f_m\| \leqslant \frac{1}{m} < \varepsilon$.

3. Cependant la suite ne converge pas dans E, en effet elle converge ponctuellement vers une fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

   qui n'appartient pas à E car elle est discontinue.

4. E n'est donc pas complet.

Exercice 3

Pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers 0, $(L(x_n))_n$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un $M > 0$ tel que pour n'importe quel $\delta > 0$, on a pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers 0 :

$$\forall n,\ \|x_n\| < \delta \Longrightarrow \|L(x_n)\| < M$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ toute suite $(x_n)_n$ de limite 0 et n assez grand on a :

$$\|x_n\| < \delta \frac{\varepsilon}{M}$$

$$\left\| x_n \frac{M}{\varepsilon} \right\| < \delta$$

$$\left\| x_n \frac{M}{\varepsilon} \right\| < \delta$$

$$\left\| L\left(x_n \frac{M}{\varepsilon} \right) \right\| < M$$

$$\frac{M}{\varepsilon} \left\| L\left(x_n\right) \right\| < M$$

$$\left\| L\left(x_n\right) \right\| < \varepsilon$$

L est donc séquentiellement continue en 0, et donc continue en 0. Étant linéaire, elle est alors continue sur E.