TOPOLOGIE ET CALCUL DIFFÉRENTIEL 2015-2016, EXAMEN FINAL

Question 1.

(1). Vrai.

(2). Faux. Supposons qu'il existe un tel homéomorphisme $\phi : U(0,1) \to]-1,1[$. Alors, comme $U(0,1) - \{0\}$ est connexe (et même connexe par arcs), on a que

$$\phi(U(0,1) - \{0\}) =]-1,1[- \{\phi(0)\}$$

est connexe, contradiction.

(3). Vrai.

(4). Faux. L'un est compact, l'autre ne l'est pas.

(5). Faux. On sait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et différent de $\mathbb{R}$. Soit donc x un nombre irrationnel et soit (x_n) une suite de rationnels convergeant vers x. C'est une suite de Cauchy de rationnels qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

(6). Faux car il n'est pas borné.

(7). Vrai.

(8). Faux. Considérer l'espace métrique de la question (5), par exemple.

Question 2.

(1). Gradient: $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 12y, -12x + 24y^2)$. Hessienne: $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}$.

(2). Les points critiques sont les $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $3x^2 - 12y = -12x + 24y^2 = 0$ c'est-à-dire $(0,0)$ et $(2,1)$.

(3). $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$ est de déterminant < 0 donc a deux valeurs propres non-nulles de signes opposés. Donc $(0,0)$ est un point selle.

$Hf(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$ est de déterminant > 0 et de trace > 0 donc a deux valeurs propres strictement positives. Donc $(2,1)$ est un minimum local.

Question 3.

(1). Voir le cours.

(2). Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x^2 + z^2$. C'est une application $\mathcal{C}^\infty$ dont la différentielle est de rang maximal, c'est-à-dire de rang 1, en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ qui contient A. Par ailleurs $A = f^{-1}(1)$. On en déduit que A est une sous-variété différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Idem pour B.

(3). Supposons que $A \cap B$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$. Il existe un voisinage V de $(0,0,1)$ dans $A \cap B$ qui est homéomorphe à un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Mais $V - \{(0,0,1)\}$ a 4 composantes connexes alors qu'un intervalle ouvert privé d'un point n'en a que 2, contradiction.

Autre argument qui a été détaillé en TD: si $A \cap B$ était une sous variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ alors les vecteurs tangents à $A \cap B$ en un point donné seraient tous proportionnels entre eux. Or, on voit sur le dessin que ce n'est pas le cas en le point $(0,0,1)$. Donc $A \cap B$ n'est pas une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$.

(4). Montrons que $A \cap B - \{(0,0,\pm 1)\}$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x,y,z) \to (x^2 + z^2, y^2 + z^2)$. C'est une application $\mathcal{C}^\infty$ dont la matrice jacobienne en un point (x,y,z) est

$$2\begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & z \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang maximal, c'est-à-dire de rang 2, en tout point de l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, ouvert qui contient $A \cap B - \{(0,0,\pm 1)\}$. Cela montre que $A \cap B - \{(0,0,\pm 1)\}$ est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$.

Question 4.

(1). La matrice jacobienne est $DF_\lambda(x,y) = \lambda \begin{pmatrix} -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$.

(2). On a $|||L||| = \sup_{(u,v)\in\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}} \frac{\|L(u,v)\|_2}{\|(u,v)\|_2}$.

On a

$$\begin{aligned} \|DF_\lambda(x,y)(u,v)\|_2 &= ((\lambda \sin(x+y)(u+v))^2 + (\lambda \cos(x+y)(u+v))^2)^{1/2} \\ &= |\lambda||u+v| \\ &\leq \sqrt{2}|\lambda|\|(u,v)\|_2 \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$|u+v| = |\langle (u,v), (1,1)\rangle| \leq \|(u,v)\|_2 \|(1,1)\|_2 = \sqrt{2}\|(u,v)\|_2.$$

(3). Voir le cours pour l'énoncé de l'inégalité des accroissements finis. On en déduit que $\mathrm{Lip} F_\lambda \leq \sqrt{2}|\lambda|$.

(4). Voir le cours pour l'énoncé du théorème du point fixe de Banach. On remarque que les solutions du système sont les points fixes de F_λ. On en déduit que le système a une unique solution pour tout $\lambda \in]-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$.