Université Denis Diderot - Paris 7 Novembre 2014
L2 - Algèbre et analyse approfondies

Partiel 51DE01MT - durée : 2 heures

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

Question de cours. Soient f, g des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant pour développement limité à l'ordre n au point 0 :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon(x), \quad g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon(x).$$

Quel est le développement limité à l'ordre n au point 0 du produit fg ? (donner une démonstration).

Exercice 1. Soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \tau = (1238)(432)(15)(7326)(174)$$

1. Décomposer σ, τ en produits de cycles à supports disjoints.
2. Donner la formule de la signature d'un cycle de longueur p. En déduire la signature des permutations σ, τ.
3. Soit A_4 le noyau de la signature $\varepsilon : S_4 \to \{-1, 1\}$. Combien A_4 a-t-il d'éléments ? En faire la liste. Montrer que l'ensemble $\{w \in A_4 \,;\, w^2 = id\}$ forme un sous-groupe de A_4.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A en produit de facteurs du premier degré.
2. Déterminer selon la valeur du paramètre a les valeurs propres distinctes de A et leur multiplicité.
3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice A est diagonalisable.
4. Déterminer selon la valeur de a le polynôme minimal de A.

Exercice 3. Pour toute matrice $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$, on note $M(x)$ la matrice dont le terme général est $m_{i,j} + x$. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$.

1. En utilisant des combinaisons linéaires de lignes et de colonnes, démontrer que la fonction $x \mapsto det(A(x))$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. Pour a et b deux réels distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, on considère la matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & \cdots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Calculer la valeur du déterminant de B (on pourra considérer $det(B(-a))$ et $det(B(-b))$).

Exercice 4. Soit G un groupe. On appelle automorphisme de G un morphisme $G \to G$ qui est bijectif.

1. Montrer que l'ensemble des automorphismes de G muni de la loi de composition des applications est un groupe. Ce groupe est noté $Aut(G)$.
2. Vérifier que l'application $\phi : G \to Aut(G)$ qui associe à g l'application $\phi_g : G \to G,\ x \mapsto gxg^{-1}$ est un morphisme de groupe. Démontrer que le noyau $Ker(\phi)$ de ϕ est l'ensemble $Z(G) = \{g \in G; gh = hg, \forall h \in G\}$. Calculer $Z(G)$ si G est le groupe symétrique S_3.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un unique endomorphisme f du groupe $\mathbb{Z}$ tel que $f(1) = n$. Déterminer $Aut(\mathbb{Z})$.