# Algèbre et géométrie 1

Patrick Le Meur et Pierre Gervais

September 17, 2016

## Contents



# Part I
# Groupes

## 1 Définitions et premiers exemples

**Définition 1.** Un *groupe* est un couple $(G, *)$ où

- $G$ est un ensemble

- $* \ : \ \begin{cases} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \longmapsto & g * h \end{cases}$ est une loi de composition interne associative admettant un élément neutre $e$, c'est à dire tel que $\forall g \in G, g * e = e * g = g$

- tout élément $g$ admet un symétrique pour $*$ noté $g^{-1}$ tel que $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$

*Remarque* 1.

- L'élément neutre et le symétrique d'un élément donné est unique.

- Pour tout $g, h \in G$ on a $(g * h^{-1}) = h^{-1} * g^{-1}$

- Si on a $gh = e$, alors $g = h^{-1}$

- Soit $g \in G$ et $n > 0$, on définit $g^n = \underbrace{g * g * g ... g}_{n \text{ fois}}$, $g^0 = e$, $g^{n+1} = g * g^n$ et $g^{-n} = \left(g^{-1}\right)^n$

*Exercice* 1. Montrer que pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$ on a $g^{m+n} = g^m * g^n$ et $g^{-n} = \left(g^{-1}\right)^n$

*Exemple* 1.

1. $G = \mathbb{Z}, * = +$

2. Soit $E$ un espace vectoriel, $(E, +)$

3. $(\mathbb{C}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}, +)$

4. Si $\mathbb{K}$ est un corps, $(\mathbb{K}, *)$

   Ces exemples sont des groupes abéliens (c'est à dire commutatifs), les suivants n'en sont pas.

5. Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini, on définit $\otimes \ : \ \begin{cases} \mathbb{Z}^G \times \mathbb{Z}^G & \longrightarrow & \mathbb{Z}^G \\ (f_1, f_2) & \longmapsto & \left(g \longmapsto \displaystyle\sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1} * g)\right) \end{cases}$

   *Exercice* 2. Montrer que $\mathbb{Z}^G$ muni de cette opération est un groupe.

6. $GL_n(\mathbb{R})$ muni de la multiplication de matrices.

**Proposition 1.** *Soit $E$ un ensemble non-vide, on note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des applications bijectives de $E$ dans $E$ et $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ est un groupe.*

# 2 Sous-groupe

**Définition 2.** Soit $(G, *)$ un groupe, on appelle *sous-groupe* de $G$ toute partie $H \subseteq G$ munie de $*$ telle que $e \in H$, $\forall (h_1, h_2) \in H^2, h_1 * h_2 \in H$ et $\forall h \in H, h^{-1} \in H$. On note $H \leqslant G$

*Exemple* 2.

1. Si $(G, *)$ est un groupe alors $\{e\} \leqslant G$

2. On définit $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n | \det M = 1\}$ le *groupe spécial linéaire* qui est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$

3. On définit $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n | \, {}^tMM = I_n\}$ le *groupe orthogonal* qui est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$

4. $\mathfrak{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \leqslant (\mathbb{C}^*, \times)$

5. Pour $n > 0$, $\mathfrak{U}_n = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1\} \leqslant \mathfrak{U} \leqslant \mathbb{C}^*$

**Proposition 2.**

1. *Soit $n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$*

2. *Tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de cette forme*

*Preuve* 1.

1. $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$, $0 \in \mathbb{Z}$, $xn + yn = (x+y)n \in n\mathbb{Z}$ et $-(xn) \in n\mathbb{Z}$

2. Soit $H \leqslant \mathbb{Z}$, si $H = \{0\}$ ✓

   Soit $n = min\{h \in H \mid h > 0\}$ (il existe par la propriété de la borne supérieure), montrons $H = n\mathbb{Z}$

   $\boldsymbol{nZ \subseteq H}$ ✓

   $nZ \subset H$ Soit $h \in H$, on considère sa division euclidienne par n : $h = nq + r$ avec $0 \leqslant r < n$. $h - nq = r \in H$, et $n$ est le plus petit élément non-nul, donc $r = 0$.

□

**Lemme 1.** *Soit $G$ un groupe et $(H_i)_i \in I$ une famille de sous-groupes de $G$, alors $\bigcap_{i \in I} H_i \leqslant G$*

**Définition 3.** Soit $G$ un groupe et $A$ une partie de G, l'intersection des sous-groupes de $G$ contenant $A$ est appelée *sous-groupe engendré par $A$* et notée $\langle A \rangle$.

**Propriété 1.**

- *$A \subseteq \langle A \rangle \leqslant G$*

- *Si $H$ est un sous-groupe contenant $A$, alors $\langle A \rangle \subseteq H$*

*Exercice* 3. Montrer que $\langle A \rangle$ est l'unique sous-groupe vérifiant ces propriétés.

**Propriété 2.** *Soit $G$ un groupe et $g \in G$, $\langle \{g\} \rangle = \langle g \rangle = \{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$*

*Exercice* 4. Le démontrer.

## Part II
# Opérations de groupes

## Part III
# Groupes symétriques

## Part IV
# Sous-groupes distingués et groupes quotient

## Part V
# Théorème de Sylow

## Part VI
# Solutions des exercices

**Solution de l'exercice 1** Commençons par montrer pour tout $n > 0$, $(g^n)^{-1} = g^{-n}$ :

$$(g^n)^{-1} = (g * g^{n-1})^{-1} = ((g^{n-1})^{-1} * g^{-1})^{-1}$$

$$(g^n)^{-1} = ((g^{n-2})^{-1} * g^{-1} * g^{-1})^{-1}$$

$$\dots$$

$$(g^n)^{-1} = \underbrace{g^{-1} * g^{-1} ... g^{-1}}_{n \text{ fois}} = (g^{-1})^n = g^{-n}$$

Pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$, on distingue plusieurs cas :

- $m = 0$ ou $n = 0$ ✓
- $m, n > 0$ : ✓
- $m > 0, n < 0$ avec $m + n < 0$ :

$$g^m * g^n = g^m * \left(g^{-1}\right)^{|n|} = g^m * \left(g^{-1}\right)^m * \left(g^{-1}\right)^{|n|-m} = e * \left(g^{-1}\right)^{|n|-m} = \left(g^{-1}\right)^{-n-m} = g^{m+n}$$

- $m, n < 0$ :

$$g^{m+n} = \left(g^{-1}\right)^{|m|+|n|} = \left(g^{-1}\right)^{|m|} * \left(g^{-1}\right)^{|n|} = g^m * g^n$$

- les autres cas se démontrent de la même façon

**Solution de l'exercice 2** Supposons par l'absurde que $\left(\mathbb{Z}^G, \otimes\right)$ est un groupe :

**Stabilité de l'opération :** $\checkmark$

**Élément neutre :** On cherche $\epsilon\ :\ G \longrightarrow \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall f \in \mathbb{Z}^G,\ \forall g \in G,\ \sum_{h \in G} \epsilon(h) f(h^{-1} * g) = \sum_{h \in G} f(h) \epsilon(h^{-1} * g) = f(g)$$

Pour $f$ valant 1 sur $G$ on a

$$\sum_{h \in G} \epsilon(h) = \sum_{h \in G} \epsilon(h^{-1} * g) = 1$$

Vérifions que si $\epsilon$ est définie par $\epsilon(g) = \begin{cases} 1, \text{ si } g = e \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$, alors elle est neutre pour $\otimes$ :

$$\sum_{h \in G} \underbrace{\epsilon(h)}_{1\ ssi\ h=e} f(h^{-1} * g) = f(e^{-1} * g) = f(g)$$

$$\sum_{h \in G} f(h) \underbrace{\epsilon(h^{-1} * g)}_{1 \text{ ssi } h=g} = f(g)$$

$\checkmark$

**Existence d'un inverse :** Soit $f\ :\ G \longrightarrow \mathbb{Z}$, il existe $\phi\ :\ G \longrightarrow \mathbb{Z}$ telle que $f \otimes \phi = \phi \otimes f = \epsilon$

$$\forall g \neq e,\ \sum_{h \in G} \phi(h) f(h^{-1} * g) = \sum_{h \in G} f(h) \phi(h^{-1} * g) = 0$$

et

$$\sum_{h \in G} \phi(h) f(h^{-1}) = \sum_{h \in G} f(h) \phi(h^{-1}) = 1$$

la deuxième égalité est impossible lorsque $f$ est la fonction nulle, $\left(\mathbb{Z}^G, \otimes\right)$ n'est donc pas un groupe.

**Solution de l'exercice 3** Soit $H$ un sous-groupe vérifiant les propriété énoncées, montrons que $H = \langle A \rangle$
$H$ vérifie la première propriété donc $A \subseteq H$ donc par la deuxième propriété $\langle A \rangle \subseteq H$.
De plus, $H$

**Solution de l'exercice 4** On pose $A = \{g^n \mid n \geqslant 0\}$.
$\langle g \rangle \subseteq A$ est le plus petit sous-groupe contenant $g$, or tout sous-groupe contient $g$ **si et seulement si** il contient $A$, d'où $A \subseteq \langle g \rangle$.