Université de Paris Diderot — **Second semestre**
A3 – Arithmétique — **27 novembre 2014**

Partiel

L'épreuve dure deux heures. Les documents ne sont pas autorisés. Le théorème des restes chinois est hors du programme du partiel. On considérera, en revanche, comme connu le fait qu'il y a, à isomorphisme près, au plus trois groupes commutatifs d'ordre 8.

Exercice 1. Questions de cours

a) Déterminer les sous-groupes du groupe additif $\mathbb{Z}$. En donner la preuve.

b) Pour quelles valeurs de l'entier $n \in \mathbb{Z}$, le quotient $Z/n\mathbb{Z}$ est-il fini ? Justifier.

c) Montrer que le sous-groupe de Klein $\mathcal{V}_4$ est distingué dans $\mathfrak{S}_4$. Montrer, comme constaté en TD, qu'il est aussi caractéristique dans $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 2. Groupes commutatifs d'ordre 8

Calculer l'exposant du groupe $G_1 = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ et celui du groupe $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On pose $G_3 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que deux quelconques parmi les trois G_1, G_2 ou G_3 groupes ne sont pas isomorphes.

Exercice 3. Relations d'équivalence compatibles

a) Rappeler la définition d'une relation d'équivalence et celle d'une relation d'équivalence compatible à gauche avec la loi d'un groupe multiplicatif $(G, \cdot)$. Comment paramètre-t-on toutes ces relations d'équivalence sur G au moyen des sous-groupes de G ?

b) Quelles sont toutes les relations d'équivalence compatibles à gauche et à droite avec la loi du groupe diédral $\mathcal{D}_4$?

c) Soit $\mathcal{B}$ la bande horizontale $\{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq y \leq 1\}$. Montrer que la relation $M\,\mathcal{R}\,N \ \Leftrightarrow\ M + \mathcal{B} = N + \mathcal{B}$ est une relation d'équivalence compatible avec la loi du groupe additif $(\mathbb{R}^2, +)$. Quel est le sous-groupe dont elle relève ?

Exercice 4. L'anneau $\mathcal{R} = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +, \cdot)$

a) Dessiner le treillis des sous-groupes du groupe additif $\mathcal{C} = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

b) Combien le groupe $\mathcal{C}$ possède-t-il de générateurs ?

c) Le groupe $\mathcal{C}$ possède un sous-groupe d'ordre 5 ; en fournir la liste des éléments.

d) Déterminer l'ordre de l'élément $\overline{9}$ dans $\mathcal{C}$, ainsi que les générateurs du sous-groupe qu'il engendre.

e) Déterminer les endomorphismes et les automorphismes du groupe $\mathcal{C}$.

f) Calculer le cardinal du groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{R}$.

g) Montrer que le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$ n'est pas cyclique.
Indication.– On pourra commencer par y calculer l'ordre de $\overline{4}$ et celui de $\overline{14}$.

h) (*) Dessiner le graphe du treillis des sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$, et y placer les éléments de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$.

i) Déterminer les quotients de $\mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +), \circ)$ par chacun de ses sous-groupes d'ordre 2.
Indication.– On appliquera à cet effet le théorème du treillis quotient.

j) Combien y a-t-il d'isomorphismes entre le groupe $(\mathbb{U}_{15}, \cdot)$ des racines quinzièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ et le groupe additif $\mathcal{C}$.

Exercice 5. Les groupes $\mathfrak{S}_4$ **et** $\mathfrak{A}_4$

a) Énumérer tous les éléments du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$

b) Faire de même pour les éléments du groupe $\mathfrak{A}_4$.

c) Montrer que l'on ne peut pas injecter le groupe additif $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ dans le groupe $\mathfrak{S}_4$.

d) Montrer que l'on ne peut pas injecter le groupe $\mathfrak{S}_3$ dans le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.
Indication.– Remarquer que $\mathfrak{S}_3$ est engendré par ses éléments d'ordre 2.

e) Dessiner le graphe treillis des sous-groupes de $\mathfrak{A}_4$.