Analyse

Arnaud Durand et Pierre Gervais

September 25, 2016

Contents

Part I
Calcul propositionnel

1 Syntaxe

Le *calcul propositionnel* est un langage *inductivement* et *librement engendré* par un ensemble de règles.
C'est à dire qu'une formule ne peut pas être obtenu de deux façons différentes.

Définition 1. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de constantes propositionnelles, on définit $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ le calcul propositionnel sur $\mathcal{P}$ obtenu par les règles suivantes :

- si $p \in \mathcal{P}$, alors $p \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$
- $\perp \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$

- si $F \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$, alors $(\neg F) \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$
- si $F, G \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$ alors $(F \vee G), (F \wedge G), (F \rightarrow G) \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$

Notation 1. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $\mathcal{F}_\mathcal{P} = \mathcal{F}$

Définition 2. Une définition alternative de $\mathcal{F}$ est $\mathcal{F} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n$ où

- $\mathcal{F}_0 = \mathcal{P}$
- $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{(\neg F) \mid F \in \mathcal{F}_n)\} \cup \{(F \star G) \mid F, G \in \mathcal{F}_n,\ \star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}\}$, avec $n \geqslant 0$

On définit la *hauteur* d'une formule F par le plus petit n tel que $F \in \mathcal{F}_n$.

Remarque 1. Ce langage est fortement parenthésé et toute formule peut être représentée par un arbre de décomposition.

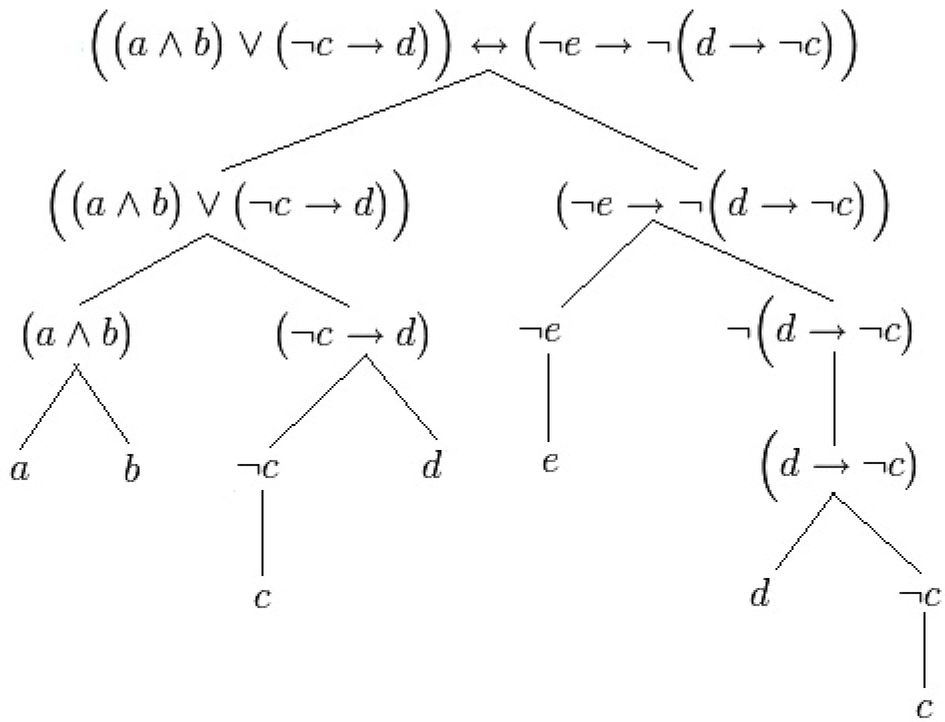

Figure 1: Arbre de décomposition

Propriété 1. *Propriété de lecture unique*

Pour tout $F \in \mathcal{F}$, un seul de ces cas est vrai :

1. $F \in \mathcal{P}$

2. *Il existe un unique $G \in \mathcal{F}$ tel que $F = (\neg G)$*

3. *Il existe d'uniques $G, H \in \mathcal{F}$ et $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ tels que $F = G \star H$*

C'est-à-dire que toute formule ne peut se décomposer que d'une seule façon.

1.1 Raisonnements

On démontrera généralement les propriétés s'appliquant à $\mathcal{F}$ par induction : pour démontrer une proposition A s'appliquant à $\mathcal{F}$, on la démontre sur $\mathcal{P}$ et pour tout $(F \star G)$ et $(\neg F)$ où on suppose que $F, G \in \mathcal{F}$ vérifient A et $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

1.2 Définition alternative de $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$

Soit $\Sigma = \mathcal{P} \cup \{(,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \perp\}$, Σ^* est l'ensemble des mots sur Σ.

Exemple 1.

- $F = (\wedge\neg x_1)((\in \Sigma^*$

- $F = (\neg x_1) \in \Sigma^*$

Définition 3. $\mathcal{F}$ est le plus petit sous-ensemble de Σ^* contenant $\mathcal{P} \cup \{\perp\}$ et **clos** par les opérations

1. $(F, G) \longmapsto (F \vee G)$

2. $(F, G) \longmapsto (F \wedge G)$

3. $(F, G) \longmapsto (F \rightarrow G)$

Remarque 2. On peut montrer que les deux définitions correspondent. $\mathcal{F}$ satisfait la propriété de lecture unique (voir TD).

1.2.1 Sous-formule, hauteur, arbre de décomposition

Définition 4. Soit $F \in \mathcal{F}$, on définit $\mathcal{S}(F)$ l'ensemble des *sous-formules de F* telles que

- si $F \in \mathcal{P}$, $\mathcal{S}(F) = \{F\}$

- si $F = (\neg G)$ alors $\mathcal{S}(F) = \{F\} \cup \mathcal{S}(G)$

- si $F = (G \star H)$ où $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, alors $\mathcal{S}(F) = \{F\} \cup \mathcal{S}(G) \cup \mathcal{S}(H)$

TODO : vérifier dernier point

Définition 5. Soit $F \in \mathcal{F}$ on définit la *hauteur* $h(F)$ de F par

- $h(F) = 0$, si $F \in \mathcal{P}$

- si $= (\neg G)$, alors $h(F) = 1 + h(G)$

- si $F = (G \star H)$, alors $h(F) = 1 + \max\{h(G), h(H)\}$

Définition 6. Soit $F \in \mathcal{F}$, l'*arbre de décomposition de F $arb(F)$* est un graphe étiqueté défini par

1. si $F \in \mathcal{P}$, $arb(F)$ est réduit à un sommet étiqueté par F.

2. si $F = (\neg G)$, alors $arb(F) = \neg - arb(G)$

3. si $F = (G \star H)$, alors $arb(F) = G - \star - H$

Notation 2. Soit F une formule, $var(F)$ est l'ensemble des variables de F, $occ(F)$ est le multi-ensemble des variables de F et $arb(F)$ est le graphe

- dont les sommets sont V

- et muni d'une fonction d'étiquetage $\lambda \ : \ V \longrightarrow \{\neg, \perp, \vee, \wedge, \rightarrow\} \cup var(F)$.

Remarque 3. Toutes les définitions sont univoques par la propriété de lecture unique.

Remarque 4. On définit la hauteur d'une formule par la hauteur de son arbre de décomposition, c'est-à-dire la distance maximum entre les feuilles et la racine.

Notation 3.

- $\top$ comme abréviation pour $(\perp \rightarrow \perp)$

- $(p \longleftrightarrow q)$ pour $(p \leftarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$

- $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = (((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) ... \wedge A_n)$

2 Sémantique

On s'intéresse à des propositions dont la valeur de vérité est soit vrai soit faux. On a besoin d'une **interprétation** (en terme de vrai ou faux) de ces constantes propositionnelles.

Définition 7. Une *valuation* est une fonction $v \ : \ \mathcal{P} \longrightarrow \{0,1\}$. Étant donné une valuation v, on définit l'*interprétation* $\overline{v} \ : \ \mathcal{F} \longrightarrow \{0,1\}$ comme ceci

- si $F = p \in \mathcal{P}$ alors $\overline{v} = v(p)$

- si $F = (\neg G) \in \mathcal{P}$ alors $\overline{v}(F) = 1$ si et seulement si $\overline{v}(G) = 0$

- $\overline{v}(\perp) = 0$

- $\overline{v}(F \wedge G) = 1$ si et seulement si $\overline{v}(F) = \overline{v}(G) = 1$

On peut décrire l'interprétation d'une formule par sa *table de vérité* :

F	G	$\neg G$	$F \wedge G$	$F \rightarrow G$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1

On définit formellement la *table de vérité* par une fonction $v \ : \ \{0,1\}^{\mathcal{P}} \longrightarrow \{0,1\}$

Définition 8.

- $F \in \mathcal{F}$ est dit *satisfaisable* s'il existe une valuation v de $\mathcal{P}$ tel que $\overline{v}(F) = 1$

- F est dit *valide* si pour toute valuation v de $\mathcal{P}$, $\overline{v}(F) = 1$, on dit aussi que F est une *tautologie*.

- F et G sont dites *équivalentes*, notées $F \equiv G$, si pour toute valuation v, $\overline{v}(F) = \overline{v}(G)$

Exercice 1. Vérifier que $F \equiv G$ si et seulement si $F \leftrightarrow G$ est valide.

Proposition 1. *Pour tout $F \in \mathcal{F}$, F est satisfaisable si et seulement si $(\neg F)$ n'est pas valide.*

3 Exemples de formalisation

3.1 Contraites de compatibilité/exclusion

Problème : On possède n produits chimiques à ranger dans $k \leqslant n$ conteneurs. Certains produits ne peuvent pas être stockés ensemble dans un conteneur.

La contrainte est donnée sous la forme d'un ensemble $\mathcal{L} \subseteq [n]$ tel que $I = \{i_1, ..., i_k\} \subseteq \mathcal{L}$ si et seulement si les produits $i_1, .., i_k$ ne peuvent pas être stockés ensemble.

Enjeu : Écrire une formule propositionnelle F telle que F est satisfaisable si le problème a une solution.

Les variables propositionnelles $\mathcal{P} = p(i,j),\ i \leqslant n,\ j \leqslant k$ sont interprétées par "le produit chimique i est dans le camion j".

On exprime deux propositions :

- Chaque produit se trouve dans un unique conteneur : $F = \underbrace{\left(\bigwedge_{i \leqslant n} \left(\bigvee_{j \leqslant k} p(i,j)\right)\right)}_{\substack{\text{Chaque produit } i \text{ est stocké} \\ \text{dans au moins un camion } j}} \wedge \underbrace{\left(\bigwedge_{i \leqslant n} \left(\bigwedge_{\substack{j,j' \leqslant k \\ j \neq j'}} (\neg (p(i,j) \wedge p(i,j')))\right)\right)}_{\substack{\text{Pour chaque produit } i \\ \text{et chaque paire de camions } j \neq j' \\ \text{il est faux que } i \text{ est à la fois dans } j \text{ et } j'}}$

- On respecte les incompatibilités : $G = \underbrace{\bigwedge_{I \subseteq \mathcal{L}} \left(\bigwedge_{j \leqslant k} \neg \left(\bigwedge_{i \in I} p(i,j)\right)\right)}_{\substack{\text{Pour chaque ensemble } I \text{ de produits} \\ \text{ne pouvant pas être stockés ensemble} \\ \text{et pour chaque camion } j, \\ \text{aucun produit de } I \text{ n'est présent dans le camion}}}$

Part II
Compléments

4 Calcul propositionnel

4.1 Théorème de lecture unique

Définition 9. Soient $w_0, w_1 = a_1...a_n \in \mathcal{M}$, on dit que w_0 est un segment initial de w_1, noté $w_0 \subseteq w_1$ si $w_0 = a_1...a_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$, et w_0 est un segment propre, noté $w_0 \subsetneq w_1$ si $i < n$.

Lemme 1. *Soit $F \in \mathcal{F}$ et $G \subsetneq F$, alors $M \notin \mathcal{F}$*

Autrement dit, aucune formule n'est le préfixe d'une autre.

Proposition 2. *On note $o[F]$ le nombre de parenthèses ouvrantes d'une formule F et $f[F]$ pour ses parenthèses fermées.*

1. $\forall F \in \mathcal{F},\ o[F] = o[G]$
2. $\forall F \in \mathcal{F}, \forall M \in \Sigma^*,\ M \subsetneq F \Longrightarrow \begin{cases} o[M] > f[M],\ \textit{et donc } M \notin \mathcal{F} & (a) \\ \textbf{\textit{x-ou}}\ M = \neg ... \neg \notin \mathcal{F} & (b) \\ \textbf{\textit{x-ou}}\ M = \epsilon \notin \mathcal{F} & (c) \end{cases}$

Preuve 1. Soient $F \in \mathcal{F}$ et $M \subsetneq F$, montrons le second point.

- Si $F = \neg G = \neg g_1 ... g_n$
  - cas (c) : $M = \epsilon$
  - cas (b) : $M = \neg$
  - cas (a) : $M = \neg g_1 ... g_i \subsetneq G,\ i < n$
    alors soit $o[M] = o(g_1 ... g_i) > f(g_1 ... g_i) = f[M]$, ce qui rentre dans le cas (a)
    soit $g_1 ... g_i = \underbrace{\neg ... \neg}_{i \text{ fois}}$, alors $M = \underbrace{\neg ... \neg}_{i+1 \text{ fois}}$: on est encore dans le cas (b).
- Si $F = (G \circ H) = (g_1 ... g_m \circ h_1 ... h_n)$ et $M \subsetneq F$, soit $M = \epsilon$ (cas (c)), soit $M \neq \epsilon$ avec
  - $M = ($ alors $o[M] = 1 > f[M] = 0$
  - $M = (g_1 ... g_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m$, donc $o[M] = o(g_1 ... g_i) + 1 > f[M] = f(g_1 ... g_i)$
  - $M = (G \circ$ donc $o[M] = 1 + o[G] > f[M] = f[G]$
  - $M = (G \circ h_1 ... h_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n$, alors $o[M] = 1 + o[G] + o(h_1 ... h_i)$
    $o[M] = 1 + f[G] + o[h_1 ... h_i] \geqslant 1 + f[G] + f[h_1 ... h_i] = 1 + f[(G \circ h_1 ... h_i] > f[(G \circ h_1 ... h_i]$
- Si $F \in \mathcal{P},\ M = \epsilon$, c'est le cas (c).

□

Preuve 2. Démontrons le théorème de lecture unique par induction sur la longueur d'une formule.

Soit $F \in \mathcal{F}$

- Si $F \in \mathcal{P}$ pour tout $q \in \mathcal{P} \backslash \{F\}$, $q \neq F$.
  $\forall G \in \mathcal{F},\ F \neq \neg G$ car $|\neg G| \geqslant 2 > 1 = |F|$
  $\forall G, H \in \mathcal{F},\ \forall \star \in \{\wedge, \vee, \longrightarrow\},\ (G \star H) \neq F$ car $|F| = 1 < 5 \leqslant |(G \star H)|$
- Si $F = \neg G$ avec $G \in \mathcal{F}$, pour tout $q \in \mathcal{F}$ on a $q \neq F$.
  $\forall G \in \mathcal{F}$ on a $\neg G \neq F$ par hypothèse de récurrence.
  $\neg G \neq (H \star K)$ pour toute formules H et G et tout opérateur $\star$.

- Si $F = (G_1 \star G_2)$, supposons $F = (H_1 \circ H_2)$ que l'on réécrit

$$a_1 ... a_k \star b_1 ... b_l = c_1 ... c_m \circ d_1 ... d_n$$

  Montrons $G_1 = H_1$, ce qui impliquera $\star = \circ$ et $G_2 = H_2$.

  On est face à l'un des deux cas :

$$(*) \ \underbrace{a_1 a_2 a_3 ... a_k}_{G_1 \in \mathcal{F}} \subseteq \underbrace{c_1 c_2 c_3 ... a_m}_{H_1 \in \mathcal{F}}$$

$$(**) \ c_1 c_2 c_3 ... c_m \subseteq d_1 d_2 d_3 ... d_n$$

  les deux cas sont symétriques, on suppose $(*)$ et par l'absurde que $G_1 \neq H_1$, c'est à dire $G_1 \subsetneq H_1$, ce qui implique d'après le lemme $G_1 \notin \mathcal{F}$.

  On a également $\forall F \in \mathcal{F},\ \neg G \neq (G_1 \star G_2)$ et $\forall p \in \mathcal{P},\ p \neq (G_1 \star G_2)$.

$\square$