Exercice 1 (Polynômes de Lagrange et d'Hermite)
Soit $\epsilon \in]0,1[$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur [0,1]. On note

$$a = f(0), \quad b = f(1) \text{ et } M = \sup_{x\in]0,1[} |f^{(3)}(x)|.$$

a) Déterminer le polynôme d'interpolation P_ϵ de f relativement aux points $0, \epsilon$ et 1.

b) On note $E_1(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approche $f(x)$ par $P_\epsilon(x)$. Donner une majoration de $|E_1(x)|$ en fonction de M et ϵ.

c) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour chaque x de l'intervalle [0,1],

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} P_\epsilon(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a.$$

d) Vérifier que le polynôme $P(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a$ ainsi obtenu est l'unique polynôme de degré ≤ 2 vérifiant :

$$P(0) = a, \qquad P'(0) = f'(0), \qquad P(1) = b.$$

Ce polynôme est appelé *polynôme d'interpolation d'Hermite de la fonction f relativement aux points 0,1 et aux entiers 1,0*, ce qui signifie qu'on approche f à l'ordre 1 au point 0 et à l'ordre 0 au point 1.

e) On note $E_2(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approche f par P. Donner une majoration de $|E_2(x)|$ en fonction de M. *(Indication : considérer la fonction ϕ définie par $\phi(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x)-P(x)}{x^2(x-1)}t^2(t-1)$ pour $x \in]0,1[$ fixé et montrer qu'il existe $\xi \in [0,1]$ tel que $\phi^{(3)}(\xi) = 0$).*

Exercice 2 (Polynômes de Chebyshev)
a) Montrer que le polynôme d'interpolation d'une fonction paire f relativement aux zéros du polynôme de Chebyshev t_5 est pair.

b) Soit la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. En posant $u = x^2$, montrer que le calcul du polynôme d'interpolation $P(x)$ de f relativement aux zéros de t_5 peut se ramener au calcul d'un polynôme d'interpolation $q(u)$ de degré plus petit.

c) À l'aide de la méthode des différences divisées, calculer $q(u)$ et en déduire $P(x)$ (on donnera le tableau des différences divisées et le résultat $P(x)$ sera ordonné x).

Exercice 3 (Polynômes orthogonaux – Chebyshev et Legendre)

Soit $]a,b[$ un intervalle, borné ou non, de $\mathbb{R}$. Par définition, un *poids* w est une fonction continue, positive $w :]a,b[\to]0,+\infty[$ avec la propriété suivante : l'intégrale

$$\int_a^b |x|^n w(x)dx$$

est convergente pour tout entier n. L'espace vectoriel E des fonctions f continues sur $]a,b[$, telles que

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx} < +\infty$$

sera muni du produit scalaire naturel :

$$\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

a) Montrer que E contient l'espace vectoriel des fonctions polynômes. Montrer qu'il existe une suite unique de polynômes unitaires (p_n) orthogonaux pour un poids donné w et tels que $\deg(p_n) = n$.

b) Montrer que les polynômes de Chebyshev

$$t_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

sont deux à deux orthogonaux, relativement au poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $[-1,1]$.

c) Même question pour les polynômes de Legendre

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n],$$

relativement au poids $w(x) = 1$ sur $[-1,1]$.

d) Soit (p_n) une suite de polynômes unitaires orthogonaux pour le poids w. Montrer que les polynômes p_n vérifient la relation de récurrence :

$$p_n(x) = (x-\lambda_n)p_{n-1}(x) - \mu_n p_{n-2}(x),$$

pour tout $n \geq 2$ avec

$$\lambda_n = \frac{\langle x p_{n-1} \mid p_{n-1}\rangle}{\|p_{n-1}\|_2^2}, \qquad \mu_n = \frac{\|p_{n-1}\|_2^2}{\|p_{n-2}\|_2^2}.$$

Retrouver, en particulier, les relations de récurrence pour le calcul des polynômes

— de Chebyshev :

$$t_{n+1}(x) = 2xt_n(x) - t_{n-1}(x)$$

— et de Legendre :

$$nL_n(x) = (2n-1)xL_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}.$$