Examen *(9 janvier 2015)*

Question de cours (3 pts). — Soit X un espace métrique. On dit d'une famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de X qu'elle a la *propriété d'intersection finie* si pour tout sous-ensemble *fini* d'indices, $J \subseteq I$, on a $\cap_{i\in J} F_i \neq \emptyset$.

(A) Définir ce que signifie «X est compact».

(B) Démontrer que X est compact si et seulement tout famille de fermés de X ayant la propriété d'intersection finie est d'intersection non vide.

Question de cours (3 pts). — Soit X un espace métrique. On dit que X est *connexe par arcs* si pour tous $x, y \in X$ il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

(A) Définir ce que signifie «X est connexe».

(B) Démontrer que si X est connexe par arcs, alors X est connexe.

Exercice 1 (5 pts). — On associe à chaque $\alpha \in \mathbb{R}$ une application $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ en posant $f_\alpha(x,y) := x^2 + y^3 - 2xy - \alpha y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(A) Déterminer le gradient et la matrice hessienne de f_α en chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(B) Déterminer les points critiques de f_α. Déterminer en lesquels de ces points f_α admet un extremum local, et énoncer le théorème qui justifie votre réponse.

(C) Montrer que la restriction de f_α au carré fermé $[0,1]\times[0,1]$ prend une plus petite valeur m_α et une plus grande valeur M_α.

(D) Déterminer m_0 et M_0.

Exercice 2 (6 pts). — Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. On suppose $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f'(x) \neq g'(y)$. On définit l'application F de classe C^1 par

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+y, f(x)+g(y)).$$

(A) Calculer la matrice jacobienne de F en chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, et montrer qu'elle est inversible.

(B) Enoncer le théorème d'inversion locale. A l'aide de (A), en déduire que $F(\mathbb{R}^2)$ est ouvert.

(C) Montrer que pour tous réels $a < b$ il existe $a < c < b$ et $a < d < b$ tels que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ et $g(b) - g(a) = (b-a)g'(c)$. En déduire que F est injective.

(C) On suppose de plus : pour tout compact K de $\mathbb{R}$, la partie $f^{-1}(K)$ de $\mathbb{R}$ est compacte et g est bornée. Soit $((x_n, y_y))_n$ une suite dans $\mathbb{R}^2$ telle que $(F(x_n, y_n))_n$ est convergente. Montrer que $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont toutes deux bornées dans $\mathbb{R}$. En déduire que $F(\mathbb{R}^2)$ est fermé.

(D) Définir ce qu'est un difféomorphisme $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1. Montrer que F en est un.

Exercice 3 (3 pts). — Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ et $1 \leqslant m \leqslant n$ un entier.

(A) Enoncer trois définitions équivalentes de ce que signifie «M est une sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^n$, de dimension m, de classe C^1».

(B) En utilisant l'une des ces définitions, montrer que $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^2 \cap \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, de dimension 1, de classe C^1.