19

Fonctions holomorphes

Dans ce chapitre nous allons généraliser la notion de dérivation rencontrée pour les fonctions d'une variable réelle au cas des fonctions d'une variable complexe.

19.1 La représentation de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$

Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est identifié à $\mathbb{R}^2$ par l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriels :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & z = x + iy & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

Si $u_{\mathbb{C}}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, sa représentation dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \overset{u_{\mathbb{C}}}{\rightarrow} & \mathbb{C} \\ \varphi^{-1} \uparrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R}^2 & \overset{u_{\mathbb{R}}}{\rightarrow} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

c'est donc l'application $u_{\mathbb{R}} = \varphi \circ u_{\mathbb{C}} \circ \varphi^{-1}$ et $u_{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{R}$-linéaire si, et seulement si, $u_{\mathbb{R}}$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

Les applications $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont les applications $z \mapsto \alpha z$ où $\alpha = a + ib$ est un nombre complexe avec a, b réels. La représentation $\mathbb{R}$-linéaire d'une telle application est l'application $u_{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\begin{aligned} u_{\mathbb{R}}(x, y) &= \varphi(\alpha(x + iy)) = \varphi((ax - by) + i(ay + bx)) \\ &= (ax - by, bx + ay) \end{aligned}$$

et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Réciproquement si $u_{\mathbb{C}}$ est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $u_{\mathbb{R}} = \varphi \circ u_{\mathbb{C}} \circ \varphi^{-1}$ soit une application $\mathbb{R}$-linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, alors $u_{\mathbb{C}}$ est l'application $\mathbb{C}$-linéaire $z \mapsto \alpha z$ où $\alpha = a + ib$.

Remarque 19.1 *Ce résultat est à la base des conditions de Cauchy-Riemann que nous verrons un peu plus loin (paragraphe 19.6).*

En utilisant, pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, la forme polaire $\alpha = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{+,*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, l'application $u_{\mathbb{R}}$ a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \rho \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et $u_{\mathbb{R}} = \rho{\cdot}r_\theta$ est la composée de la rotation r_θ d'angle $\theta = \arg(\alpha)$ (modulo 2π) et de l'homothétie h_ρ de rapport $\rho = |\alpha| > 0$. C'est une similitude directe.

Remarque 19.2 *Une similitude directe conserve les angles orientés et les cercles. Cette remarque est à la base de la notion de représentation conforme que nous verrons plus loin.*

Exercice 19.1 *Soit $\alpha = a + ib$ un nombre complexe et $u_{\mathbb{C}}$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $u_{\mathbb{C}}(z) = \alpha\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, où $\overline{z}$ est le conjugué de z. Montrer que $u_{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

Solution 19.1 *La représentation $\mathbb{R}$-linéaire de $u_{\mathbb{C}}$ est l'application $u_{\mathbb{R}}$ définie par :*

$$\begin{aligned} u_{\mathbb{R}}(x, y) &= \varphi(\alpha(x - iy)) = \varphi((ax + by) + i(bx - ay)) \\ &= (ax + by, bx - ay) \end{aligned}$$

et sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.
En utilisant, pour α non nul, la forme polaire $\alpha = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ l'application $u_{\mathbb{R}}$ a pour matrice :

$$A = \rho \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et $u_{\mathbb{R}} = \rho \cdot \sigma_\theta$ est la composée de la symétrie orthogonale σ_θ par rapport à la droite D_θ faisant l'angle $\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\arg(\alpha)}{2}$ avec l'axe des x et de l'homothétie h_ρ de rapport $\rho = |\alpha|$. C'est une similitude indirecte.
La droite D_θ est dirigée par $u_\theta = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$, l'orthogonale $D_\theta^\perp$ est dirigée par $v_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$ et on a :

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(u_\theta) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos(\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = u_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(v_\theta) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos(\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin(\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = -v_\theta \end{aligned}$$

donc σ_θ est bien la symétrie orthogonale par rapport à la droite D_θ.

Exercice 19.2 *Montrer qu'une application $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-linéaire si, et seulement si, il existe deux nombres complexes α et β tels que $u(z) = \alpha z + \beta\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

Solution 19.2 *Il est clair qu'une telle application est $\mathbb{R}$-linéaire.*
Réciproquement si u est $\mathbb{R}$-linéaire, il suffit de connaître $u(1)$ et $u(i)$ pour connaître u (puisque $(1,i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$). On définit alors les nombres complexes α et β comme les solutions du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha + \beta = u(1) \\ \alpha i - \beta i = u(i) \end{array} \right.$$

soit $(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{2}(u(1) - i \cdot u(i), u(1) + i \cdot u(i))$ *et on a pour tout* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *:*

$$\begin{aligned} u(z) &= xu(1) + yu(i) = x(\alpha + \beta) + y(\alpha i - \beta i) \\ &= \alpha(x + iy) + \beta(x - iy) = \alpha z + \beta \overline{z}. \end{aligned}$$

19.2 Fonctions continues sur un ouvert de $\mathbb{C}$

Nous décrivons tout d'abord quelques notions topologiques de base sur $\mathbb{C}$.

Toutes ces notions seront étudiées en détails dans le chapitre sur les espaces métriques avec le cas particulier des espaces vectoriels normés de dimension finie.

Définition 19.1 *Étant donnés un nombre complexe ω et un nombre réel positif ou nul R, le disque ouvert de centre ω et de rayon R est la partie de $\mathbb{C}$ définie par :*

$$D(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \omega| < R\}$$

et le disque fermé de centre ω et de rayon R est la partie de $\mathbb{C}$ définie par :

$$\overline{D}(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \omega| \leq R\}$$

Pour $R = 0$, on a $D(\omega, R) = \emptyset$ et $\overline{D}(\omega, R) = \{\omega\}$.

En désignant par Ω le point de $\mathbb{R}^2$ d'affixe ω, un tel disque (ouvert ou fermé) est identifié au disque (ouvert ou fermé) de $\mathbb{R}^2$ de centre Ω et de rayon R.

Le bord d'un tel disque est le cercle de centre ω et de rayon R défini par :

$$\mathcal{C}(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \omega| = R\}.$$

Une paramétrisation de ce cercle est aussi donnée par :

$$(z \in \mathcal{C}(\omega, R)) \Leftrightarrow \left(\exists t \in \left]-\pi, \pi\right] \mid z = \omega + R \cdot e^{it}\right)$$

Définition 19.2 *On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}$ est un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ si elle contient une boule ouverte centrée en z_0 de rayon strictement positif.*

Définition 19.3 *On dit qu'une partie $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$ est ouverte (ou que c'est un ouvert de $\mathbb{C}$) si elle est vide ou si elle est non vide et pour tout $z \in \mathcal{O}$ il existe un réel $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset \mathcal{O}$.*

L'ensemble vide et $\mathbb{C}$ sont des ouverts.

Il est équivalent de dire qu'un ensemble non vide est un ouvert si, et seulement si, c'est un voisinage de chacun de ses points.

Exercice 19.3 *Montrer qu'un disque ouvert de $\mathbb{C}$ est un ouvert. Qu'en est-il d'un disque fermé ?*

Solution 19.3 *Soit $D(\omega, R)$ un disque ouvert. Si $R = 0$, on a alors $D(\omega, R) = \emptyset$ et c'est un ouvert. Sinon, pour $z \in D(\omega, R)$, on a $R - |z - \omega| > 0$ et pour $0 < \varepsilon < R - |z - \omega|$, en utilisant l'inégalité triangulaire, on voit que pour tout $t \in D(z, \varepsilon)$, on a :*

$$\begin{aligned} |t - \omega| &= |(t - z) + (z - \omega)| \\ &\leq |t - z| + |z - \omega| < \varepsilon + |z - \omega| < R \end{aligned}$$

(figure 19.1) ce qui signifie que $t \in D(\omega, R)$. On a donc $D(z, \varepsilon) \subset D(\omega, R)$ et $D(\omega, R)$ est un

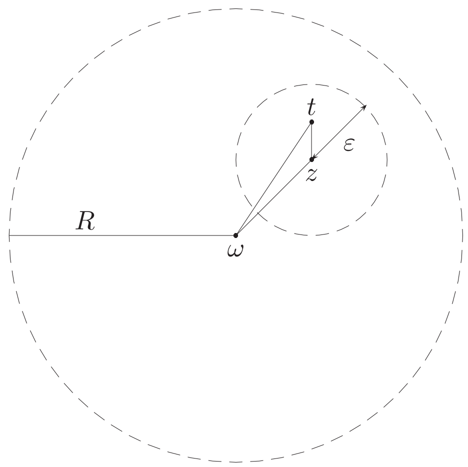

FIG. 19.1 –

ouvert.
Un disque fermé n'est pas ouvert. En effet pour $z = \omega + R \cdot e^{i\theta} \in \overline{D}(\omega, R)$ et tout $\varepsilon > 0$, le point $t = z + \frac{\varepsilon}{2} e^{i\theta}$ est dans $D(z, \varepsilon)$ et pas dans $\overline{D}(\omega, R)$ puisque :

$$|t - \omega| = \left|\omega + \left(R + \frac{\varepsilon}{2}\right) e^{i\theta} - \omega\right| = R + \frac{\varepsilon}{2} > R.$$

Exercice 19.4 *Montrer qu'une réunion quelconque d'ouverts de $\mathbb{C}$ est un ouvert.*

Solution 19.4 *Soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts qu'on peut supposer non vides. Si $z \in \mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, il existe un indice $i \in I$ tel que $z \in \mathcal{O}_i$ et comme $\mathcal{O}_i$ est ouvert non vide, il existe un réel $r_i > 0$ tel que $D(z, r_i) \subset \mathcal{O}_i \subset \mathcal{O}$. L'ensemble $\mathcal{O}$ est donc ouvert.*

Exercice 19.5 *Montrer qu'une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{C}$ est un ouvert. Que dire d'une intersection infinie d'ouverts de $\mathbb{C}$?*

Solution 19.5 *Soit $(\mathcal{O}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'ouverts qu'on peut supposer non vides. Si $z \in \mathcal{O} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$, comme chaque $\mathcal{O}_i$ est ouvert, il existe des réel $r_i > 0$ tels que $D(z, r_i) \subset \mathcal{O}_i$ pour tout i compris entre 1 et n et en notant $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i$, on a $r > 0$ et $D(z, r) \subset \mathcal{O}$. L'ensemble $\mathcal{O}$ est donc ouvert.*
Dans le cas d'une intersection infinie, on peut avoir $r = \inf_{i \in I} r_i = 0$. Par exemple pour $R \geq 0$ et $\omega \in \mathbb{C}$, le disque fermé $\bigcap_{k=1}^{+\infty} D\left(\omega, R + \frac{1}{k}\right) = \overline{D}(\omega, R)$ n'est pas ouvert.

Définition 19.4 *On dit qu'une partie* $\mathcal{F}$ *de* $\mathbb{C}$ *est fermée (ou que c'est un fermé de* $\mathbb{C}$*) si son complémentaire dans* $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \mathcal{F}$, *est un ouvert de* $\mathbb{C}$.

L'ensemble vide et $\mathbb{C}$ sont à la fois ouverts et fermés.

Exercice 19.6 *Montrer qu'une intersection quelconque de fermés de* $\mathbb{C}$ *est un fermé.*

Solution 19.6 *Résulte de :*

$$\mathbb{C} \setminus \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{C} \setminus \mathcal{F}_i)$$

Exercice 19.7 *Montrer qu'une réunion finie de fermés de* $\mathbb{C}$ *est un fermé. Que dire d'une réunion infinie de fermés de* $\mathbb{C}$ *?*

Solution 19.7 *Résulte de :*

$$\mathbb{C} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{C} \setminus \mathcal{F}_i)$$

Une réunion infinie de fermés de $\mathbb{C}$ *n'est pas nécessairement fermé. Par exemple pour* $R > 0$ *et* $\omega \in \mathbb{C}$, *le disque ouvert* $\bigcup_{\substack{k=1 \\ k > \frac{1}{R}}}^{+\infty} \overline{D}\left(\omega, R - \frac{1}{k}\right) = D(\omega, R)$ *n'est pas ouvert.*

Exercice 19.8 *Montrer qu'un disque fermé de* $\mathbb{C}$ *est un fermé.*

Solution 19.8 *Laissée au lecteur.*

Le résultat suivant nous fournit une caractérisation séquentielle de la notion de fermé.

Théorème 19.1 *Une partie non vide* $\mathcal{F}$ *de* $\mathbb{C}$ *est fermée si, et seulement si, pour toute suite* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathcal{F}$ *qui est convergente, la limite* $z = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$ *est dans* $\mathcal{F}$.

Si $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, on peut l'identifier à un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et toute application $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ peut être identifiée à l'application φ de Ω dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ où P est la partie réelle de f et Q sa partie imaginaire.

On connaît déjà les notions de limite, de continuité et de dérivabilité pour les fonctions réelles P et Q.

Nous allons définir ces notions pour les fonctions d'une variable complexe et étudier le lien avec les notions réelles.

Pour la notion de limite, on se contente du cas particulier d'une fonction définie sur un voisinage d'un point privé de ce point.

Définition 19.5 *Soient* $\mathcal{V}$ *un voisinage d'un point* z_0 *de* $\mathbb{C}$ *et une application* $f : \mathcal{V} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. *On dit que* f *admet une limite en* z_0, *si il existe un nombre complexe* ℓ *tel que pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe un réel* $\eta > 0$ *tel que si* $z \in \mathcal{V}$ *et* $0 < |z - z_0| < \eta$ *alors* $|f(z) - \ell| < \varepsilon$.

Comme dans le cas réel, on déduit de l'inégalité triangulaire pour le module que si une fonction f admet une limite en un point, cette dernière est alors unique et on peut noter $\ell = \lim\limits_{\substack{z\to z_0 \\ z \neq z_0}} f(z)$. En pratique, on note $\ell = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ étant entendu que z tend vers z_0 avec $z \neq z_0$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \left(\ell = \lim_{z\to z_0} f(z)\right) &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid 0 < |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \left(\lim_{z\to z_0} |f(z) - \ell| = 0\right) \end{aligned}$$

(on peut toujours trouver $\eta > 0$ tel que $D(z_0, \eta) \subset \mathcal{V}$).

Définition 19.6 *Soient $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et une application $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$.*
On dit que f est continue en $z_0 \in \mathcal{O}$ si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.
On dit que f est continue sur $\mathcal{O}$, si elle est continue en tout point de $\mathcal{O}$.

La continuité de f en z_0 se traduit donc par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid z \in \mathcal{O} \text{ et } |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Exemple 19.1 *Une fonction constante est continue en tout point de $\mathbb{C}$.*

Exercice 19.9 *Montrer que la fonction $z \mapsto |z|$ est continue en tout point de $\mathbb{C}$.*

Solution 19.9 *Résulte de $||z| - |z_0|| < |z - z_0|$.*

Exercice 19.10 *Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction $z \mapsto z^n$ est continue en tout point de $\mathbb{C}$.*

Solution 19.10 *Pour $n = 0$, il s'agit de la fonction constante égale à 1 et pour $n \geq 1$, $z_0 \in \mathbb{C}$, on peut trouver un réel $R > 0$ tel que $z_0 \in D(0, R)$ et pour tout $z \in D(0, R)$, on a :*

$$|z^n - z_0^n| = |z - z_0| \left| \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k \right| \leq n R^{n-1} |z - z_0| \underset{x \to z_0}{\to} 0.$$

Exercice 19.11 *Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction $z \mapsto \overline{z}^n$ est continue en tout point de $\mathbb{C}$.*

Solution 19.11 *Résulte de :*

$$|\overline{z}^n - \overline{z_0}^n| = |z^n - z_0^n| \underset{x \to z_0}{\to} 0.$$

Une définition équivalente de la continuité en un point est donnée par le résultat suivant.

Théorème 19.2 *Une fonction $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ est continue en $a \in \mathcal{O}$ si, et seulement si, pour toute suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{O}$ qui converge vers a, la suite $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

Démonstration. On copie la démonstration du cas réel. ■

Dans ce qui suit, $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une application de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$.

Théorème 19.3 *Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ est continue en $z_0 \in \mathcal{O}$, elle est alors bornée au voisinage de ce point, c'est-à-dire qu'il existe un réel $r > 0$ et une constante $M > 0$ tels que $D(z_0, r) \subset \mathcal{O}$ et :*

$$\forall z \in D(z_0, r),\ |f(z)| \leq M.$$

Démonstration. On copie la démonstration du cas réel. ■

Une définition topologique de la notion de continuité est donnée par le résultat suivant.

Théorème 19.4 *Une fonction $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\mathcal{O}$ si, et seulement si, l'image réciproque par f de tout ouvert [resp. fermé] de $\mathbb{C}$ est un ouvert [resp. fermé] de $\mathcal{O}$ (i. e. $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \cap \mathcal{O}'$ [resp. $f^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \cap \mathcal{F}'$]où $\mathcal{O}'$ [resp. $\mathcal{F}'$]est un ouvert [resp. fermé] de $\mathbb{C}$).*

Démonstration. Supposons f continue et soit $\mathcal{O}_1$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Pour tout $z_0 \in f^{-1}(\mathcal{O}_1)$, $f(z_0)$ est dans l'ouvert $\mathcal{O}_1$, il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ tel que le disque ouvert $D(f(z_0), \varepsilon)$ soit contenue dans $\mathcal{O}_1$ et avec la continuité de f, on peut trouver un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in D(z_0, \eta) \cap \mathcal{O}$ on ait $f(z) \in D(f(z_0), \varepsilon) \subset \mathcal{O}_1$. On a donc $D(z_0, \eta) \cap \mathcal{O} \subset f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et en posant $\mathcal{O}' = \bigcup\limits_{z_0 \in f^{-1}(\mathcal{O}_1)} D(z_0, \eta)$, on définit un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $f^{-1}(\mathcal{O}_1) = \mathcal{C} \cap \mathcal{O}'$, ce qui prouve que $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ est ouvert dans $\mathbb{C}$.

Réciproquement, supposons que l'image réciproque par f de tout ouvert de $\mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathcal{O}$. Pour $z_0 \in \mathcal{C}$ et $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(D(f(z_0), \varepsilon))$ est un ouvert de $\mathcal{O}$, il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que $D(z_0, \eta) \cap \mathcal{O} \subset f^{-1}(D(f(z_0), \varepsilon))$, ce qui signifie que $|f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$ pour tout $z \in B(z_0, \eta) \cap \mathcal{O}$. La fonction f est donc continue en tout point de $\mathcal{O}$.

Pour ce qui est de l'image réciproque des fermés, on utilise le fait qu'un fermé est le complémentaire d'un ouvert et l'image réciproque du complémentaire est le complémentaire de l'image réciproque. ■

Pour ce qui est des opérations élémentaires, on a le résultat suivant.

Théorème 19.5 *Soient f, g deux fonctions définies sur $\mathcal{O}$, à valeurs complexes et continues en $z_0 \in \mathcal{O}$. Les fonctions $\overline{f}$, $|f|$, $f + g$ et fg sont continues en z_0.*
Si $f(z_0) \neq 0$, il existe alors un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de z_0 dans $\mathcal{O}$ tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathcal{V}$ et la fonction $\dfrac{1}{f}$ qui est définie sur $\mathcal{V}$ est continue en z_0.

Démonstration. Pour $\overline{f}$ c'est clair et pour les autres fonctions, on copie la démonstration du cas réel. ■

Exercice 19.12 *Montrer que les fonctions $z \mapsto \Re(z)$ et $z \mapsto \Im(z)$ sont continues en tout point de $\mathbb{C}$.*

Solution 19.12 *Résulte de $\Re(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$ et $\Im(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$.*

De la continuité des applications $z \mapsto z^n$ pour tout entier naturel n, on déduit que les fonctions polynomiales sont continue sur $\mathbb{C}$ et que les fonctions rationnelles sont continue sur leurs domaines de définition.

Pour la composition des applications, on a le résultat suivant.

Théorème 19.6 *Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ est continue en $z_0 \in \mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $f(\mathcal{O})$ et $g : \mathcal{O}' \to \mathbb{C}$ est continue en $f(z_0)$, alors $g \circ f$ est continue en z_0.*

Exercice 19.13 *Montrer que si $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ est une fonction continue et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, alors la fonction $z \mapsto \varphi(|f(z)|)$ est continue sur $\mathcal{O}$.*

Solution 19.13 *Soient $\varepsilon > 0$ et $z_0 \in \mathcal{O}$. Comme φ est continue en $|f(z_0)|$, il existe $\delta > 0$ tel que $|\varphi(t) - \varphi(|f(z_0)|)| < \varepsilon$ pour tout réel $t > 0$ tel que $|t - |f(z_0)|| < \delta$. En désignant par $\eta > 0$ un réel tel que $||f(z)| - |f(z_0)|| < \delta$ pour tout $z \in \mathcal{O}$ tel que $|z - z_0| < \eta$, on a $|\varphi(|f(z)|) - \varphi(|f(z_0)|)| < \varepsilon$ pour tout $z \in \mathcal{O}$ tel que $|z - z_0| < \eta$. La fonction $z \mapsto \varphi(|f(z)|)$ est donc continue en z_0.*

19.3 Intégrales curvilignes

Définition 19.7 *Un chemin dans* $\mathbb{C}$ *est une application* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *continue et de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux, où* $[a,b]$ *est un segment réel non réduit à un point (on a donc* $a < b$*).*
Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, *on dit que ce chemin est fermé ou que c'est un lacet.*
Si l'application γ *est injective, on dit alors que le chemin est sans points doubles.*

On rappelle qu'une fonction $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, s'il existe une subdivision

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p < a_{p+1} = b$$

telle que la fonction f se prolonge par continuité en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ $(0 \leq k \leq p)$.

Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin, son image $\mathrm{Im}(\gamma) = \gamma([a,b])$ est le chemin géométrique qu'il définit et γ est une paramétrisation de $\mathrm{Im}(\gamma)$.

Si α, β sont deux nombres complexes, on dit qu'un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ relie α et β, si $\gamma(a) = \alpha$ et $\gamma(b) = \beta$. On dit alors, dans ce cas, que α est l'origine et β l'extrémité du chemin géométrique $\mathrm{Im}(\gamma)$.

Exemple 19.2 *Le cercle de centre* ω *et de rayon* $R > 0$ *parcouru une fois dans le sens direct peut être paramétré par :*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_{\omega,R} : & [0, 2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \omega + Re^{it} \end{array}$$

Ce lacet sera noté plus simplement : $|z - \omega| = r$.

Exemple 19.3 *Pour* α, β *dans* $\mathbb{C}$, *le segment* $[\alpha, \beta]$ *reliant* α *et* β *peut être paramétré par :*

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0, 1] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & (1-t)\,\alpha + t\beta \end{array}$$

Si $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a,b] \to \mathcal{O}$ un chemin à valeurs dans $\mathcal{O}$, on peut définir l'intégrale de f le long de ce chemin en s'inspirant de la définition de l'intégrale de Riemann d'une fonction définie sur un segment réel et à valeurs complexes. Pour ce faire, on découpe, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles de même longueur en utilisant la subdivision $(t_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ définie par $t_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour $0 \leq k \leq n$ et on associe à ces subdivisions la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ I_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(z_{n,k})\,(z_{n,k+1} - z_{n,k})$$

où $z_{n,k} = \gamma(t_{n,k})$. En écrivant que :

$$z_{n,k+1} - z_{n,k} = \gamma(t_{n,k+1}) - \gamma(t_{n,k}) = (t_{n,k+1} - t_{n,k})\,\gamma'(t_{n,k}) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

($\gamma'(t_{n,k}) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\gamma(t_{n,k} + h) - \gamma(t_{n,k})}{h}$ équivaut à $\gamma(t_{n,k} + h) - \gamma(t_{n,k}) = h\gamma'(t_{n,k}) + o(h)$ et ici $h = t_{n,k+1} - t_{n,k} = \dfrac{b-a}{n}$), on a :

$$I_n \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(z_{n,k})\,(t_{n,k+1} - t_{n,k})\,\gamma'(t_{n,k})$$

et il est naturel de donner la définition suivante.

Définition 19.8 *Si $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a,b] \to \mathcal{O}$ un chemin à valeurs dans $\mathcal{O}$, alors l'intégrale curviligne de f le long de γ est le nombre complexe :*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

En notant :

$$a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p < a_{p+1} = b$$

une subdivision telle que γ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque $[a_k, a_{k+1}]$ $(0 \leq k \leq p)$, on a précisément :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{p} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Pratiquement cette intégrale curviligne se calcule en posant $z = \gamma(t)$ et $dz = \gamma'(t)\,dt$ avec t parcourant $[a,b]$ pour z parcourant $\gamma([a,b])$.

Exercice 19.14 *Soient ω un nombre complexe et R un réel strictement positif. Calculer :*

$$I_n = \int_{|z-\omega|=R} (z-\omega)^n\,dz$$

pour tout entier relatif n.

Solution 19.14 *On a :*

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} R^n e^{int} iRe^{it}dt = iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt \\ &= \begin{cases} 0 \ si \ n \neq -1 \\ 2i\pi \ \ si \ n = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 19.15 *Donner une paramétrisation γ du bord du rectangle R défini par :*

$$R = \{z \in \mathbb{C} \mid -a \leq \Re(z) \leq a,\ -b \leq \Im(z) \leq b\}$$

où a, b sont des réels strictement positifs. Calculer $\int_\gamma z^n dz$ pour tout entier relatif n.

Solution 19.15 *Une paramétrisation γ du bord de R est donnée par :*

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,4] & \to & \mathbb{C}^* \\ & t & \mapsto & \begin{cases} (2t-1)\,a - ib \ si \ 0 \leq t \leq 1 \\ a + ib\,(2t-3) \ \ si \ 1 \leq t \leq 2 \\ (5-2t)\,a + ib \ si \ 2 \leq t \leq 3 \\ -a + i\,(7-2t)\,b \ si \ 3 \leq t \leq 4 \end{cases} \end{array}$$

et pour f continue sur $\mathbb{C}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,dz = 2a\int_0^1 f((2t-1)\,a - ib)\,dt \\ + 2ib\int_1^2 f(a + ib\,(2t-3))\,dt \\ - 2a\int_2^3 f((5-2t)\,a + ib)\,dt \\ - 2ib\int_3^4 f(-a + i\,(7-2t)\,b)\,dt \end{aligned}$$

ce qui s'écrit en utilisant les changement de variables respectifs $x = 2t-1$, $y = 2t-3$, $z = 2t-5$, $u = 2t - 7$ *:*

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= a\int_{-1}^{1} f(xa - ib)\,dx + ib\int_{-1}^{1} f(a + iby)\,dy \\ &\quad - a\int_{-1}^{1} f(-za + ib)\,dz - ib\int_{-1}^{1} f(-a - iub)\,du\end{aligned}$$

Pour f *paire, cela donne* $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ *et pour* f *impaire, on a :*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2a\int_{-1}^{1} f(xa - ib)\,dx + 2ib\int_{-1}^{1} f(a + ibx)\,dx$$

Pour $f(z) = z^{2n+1}$ *avec* n *entier relatif différent de* -1, *on a :*

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= 2a\int_{-1}^{1} (xa - ib)^{2n+1}\,dx + 2ib\int_{-1}^{1} (a + ibx)^{2n+1}\,dx \\ &= \frac{1}{n+1}\left[(xa - ib)^{2(n+1)}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{n+1}\left[(a + ibx)^{2(n+1)}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{(a - ib)^{2(n+1)} - (-a - ib)^{2(n+1)}}{n+1} + \frac{(a + ib)^{2(n+1)} - (a - ib)^{2(n+1)}}{n+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

et pour $f(z) = \dfrac{1}{z}$, *on a :*

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z} &= 2a\int_{-1}^{1} \frac{dt}{xa - ib} + 2ib\int_{-1}^{1} \frac{dx}{a + ibx} \\ &= 2a\int_{-1}^{1} \frac{xa + ib}{x^2a^2 + b^2}dt + 2ib\int_{-1}^{1} \frac{a - ibx}{a^2 + x^2b^2}dx \\ &= 4iab\int_0^1 \frac{dt}{t^2a^2 + b^2} + 4iab\int_0^1 \frac{dt}{a^2 + t^2b^2} \\ &= 4i\frac{a}{b}\int_0^1 \frac{dt}{t^2\frac{a^2}{b^2} + 1} + 4i\frac{b}{a}\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2\frac{b^2}{a^2}} \\ &= 4i\int_0^{\frac{a}{b}} \frac{dt}{x^2 + 1} + 4i\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{dt}{1 + x^2} \\ &= 4i\left(\arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right) \\ &= 4i\frac{\pi}{2} = 2i\pi.\end{aligned}$$

Nous verrons plus loin que ces résultats ne sont pas étonnant.

Exercice 19.16 *Calculer* $\displaystyle\int_{[1,2+i]} \frac{dz}{z}$.

Solution 19.16 *Si* $[\alpha, \beta]$ *est un segment dans* $\mathbb{C}$ *paramétré par :*

$$\gamma : t \in [0,1] \mapsto (1 - t)\,\alpha + t\beta$$

on a, dans la cas où 0 *n'est pas sur le segment* $[\alpha, \beta]$ *:*

$$\int_{[\alpha,\beta]} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{\beta - \alpha}{(1-t)\,\alpha + t\beta} dt = \int_0^1 \frac{\beta - \alpha}{(\beta - \alpha)\,t + \alpha} dt$$

ce qui donne pour $\alpha = 1$ *et* $\beta = 2 + i$ *:*

$$\begin{aligned}
\int_{[1,2+i]} \frac{dz}{z} &= (1+i) \int_0^1 \frac{dt}{(1+i)\,t + 1} = (1+i) \int_0^1 \frac{1+t-it}{2t^2+2t+1} dt \\
&= (1+i) \left(\int_0^1 \frac{1+t}{2t^2+2t+1} dt - i \int_0^1 \frac{t}{2t^2+2t+1} dt \right) \\
&= (1+i) \left(\frac{\ln(5)}{4} + \frac{\arctan(3)}{2} - \frac{\pi}{8} - i \left(\frac{\ln(5)}{4} - \frac{\arctan(3)}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right) \\
&= \frac{\ln(5)}{2} + i \left(\arctan(3) - \frac{\pi}{4} \right)
\end{aligned}$$

Exercice 19.17 *Calculer* $\int_{|z|=1} f(z)\,dz$ *pour les fonctions suivantes :*

1. $f(z) = |z|^n$ *pour* $z \in \mathbb{C}^*$*, où* n *est un entier relatif.*
2. $f(z) = \Re(z^n) - \Im(z^n)$ *pour* $z \in \mathbb{C}^*$*, où* n *est un entier relatif.*

Solution 19.17 *Une paramétrisation du cercle de centre* 0 *et de rayon* 1 *parcouru une fois dans le sens direct est donné par l'application* γ *définie par :*

$$\forall t \in [0, 2\pi],\ \gamma(t) = e^{it}.$$

et on a $\int_{|z|=1} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\,ie^{it}dt.$

1. *Pour* $f(z) = |z|^n$*, on a :*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \left|e^{it}\right|^n ie^{it}dt = \int_0^{2\pi} ie^{it}dt = 0.$$

2. *Pour* $f(z) = \Re(z^n) - \Im(z^n)$*, on a :*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_0^{2\pi} (\cos(nt) - \sin(nt))\,(i\cos(t) - \sin(t))\,dt \\
&= i \int_0^{2\pi} (\cos(nt) - \sin(nt)) \cos(t)\,dt - \int_0^{2\pi} (\cos(nt) - \sin(nt)) \sin(t)\,dt \\
&= i \int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(t)\,dt - \int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(t)\,dt
\end{aligned}$$

puisque $\int_0^{2\pi} \cos(nt)\sin(mt)\,dt = 0$ *pour tous* n, m *dans* $\mathbb{Z}$*. Et avec* $\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,dt = 0$*,* $\int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(mt)\,dt = 0$ *pour* $n \neq m$ *et* $\int_0^{2\pi} \cos^2(nt)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(nt)\,dt = \pi$ *pour* $n \neq 0$*, on déduit que :*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } n \neq 1 \\ (-1+i)\,\pi \text{ si } n = 1 \end{array} \right.$$

Exercice 19.18 *Soit f définie par $f(z) = z^2 - 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Calculer $\int_\gamma f(z)\,dz$ pour les chemins suivants :*

1. $\gamma : t \in [0,1] \mapsto t + it^2$.
2. $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{t+it}$.
3. $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto \cos(t) + i\sin(2t)$.

Solution 19.18 *On a :*

1.

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_0^1 \left(\left(t+it^2\right)^2 - 1\right)(1+2it)\,dt \\ &= \int_0^1 \left(t+it^2\right)^2 (1+2it)\,dt - \int_0^1 (1+2it)\,dt \\ &= \left[\frac{\left(t+it^2\right)^3}{3} - \left(t+it^2\right)\right]_0^1 = \frac{(1+i)^3}{3} - (1+i) \\ &= -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}i.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_0^{2\pi} \left(e^{2t+2it} - 1\right)(1+i)\,e^{t+it}dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{3(1+i)t}(1+i)\,dt - \int_0^{2\pi} (1+i)\,e^{(1+i)t}dt \\ &= \left[\frac{e^{3(1+i)t}}{3} - e^{(1+i)t}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{6\pi}}{3} - e^{2\pi} + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_0^{2\pi} \left((\cos(t) + i\sin(2t))^2 - 1\right)(-\sin(t) + 2i\cos(2t))\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos(t)+i\sin(2t))^2 (-\sin(t)+2i\cos(2t))\,dt \\ &- \int_0^{2\pi} (-\sin(t)+2i\cos(2t))\,dt \\ &= \left[\frac{(\cos(t)+i\sin(2t))^3}{3} - (\cos(t)+i\sin(2t))\right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

Exercice 19.19 *Pour $r > 0$, on désigne par γ_r le demi-cercle défini par :*

$$\gamma_r : t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto re^{it}.$$

Calculer $\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{-z}}{z^2}dz$.

Solution 19.19 *On a, pour $r > 0$:*

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{-z}}{z^2} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-re^{it}}}{r^2 e^{2it}} ire^{it} dt = \frac{i}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-re^{it}} e^{-it} dt$$

et :

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{e^{-z}}{z^2} dz \right| \leq \frac{1}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\cos(t)} dt \leq \frac{1}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{r} \underset{r \to +\infty}{\to} 0$$

et en conséquence $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{-z}}{z^2} dz = 0.$

En utilisant les subdivisions précédentes de l'intervalle $[a, b]$, des approximations de la longueur du chemin γ sont données par :

$$\ell_n = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{n,k+1} - z_{n,k}| \approx \sum_{k=0}^{n-1} (t_{n,k+1} - t_{n,k}) |\gamma'(t_{n,k})|$$

et il est naturel de définir la longueur de γ comme suit.

Définition 19.9 *Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est un chemin, sa longueur est le réel positif :*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt.$$

Exercice 19.20 *Calculer la longueur d'un cercle de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$ parcouru une fois dans le sens direct et la longueur d'un segment reliant deux nombres complexes α et β.*

Solution 19.20 *Pour le cercle paramétré par $\gamma_{z_0,r}$, on a :*

$$\ell(\gamma_{z_0,r}) = \int_0^{2\pi} \left| ire^{it} \right| dt = 2\pi r$$

et pour un segment $[\alpha, \beta]$:

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 |\beta - a| \, dt = |\beta - a|.$$

Théorème 19.7 *Si $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a, b] \to \mathcal{O}$ un chemin à valeurs dans $\mathcal{O}$, on a alors :*

$$\left| \int_\gamma f(z) \, dz \right| \leq \ell(\gamma) \cdot \sup_{z \in \mathrm{Im}(\gamma)} |f(z)|.$$

Démonstration. Comme γ est continue, $\mathrm{Im}(\gamma)$ est compact dans $\mathbb{C}$ comme image du compact $[a, b]$ par l'application continue γ et la fonction f qui est continue est bornée sur le compact $\mathrm{Im}(\gamma)$, ce qui valide l'existence de $\displaystyle\sup_{z \in \mathrm{Im}(\gamma)} |f(z)|$.

On a alors, par définitions :

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f(z) \, dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \, |\gamma'(t)| \, dt \\ &\leq \sup_{z \in \mathrm{Im}(\gamma)} |f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt = \ell(\gamma) \cdot \sup_{z \in \mathrm{Im}(\gamma)} |f(z)|. \end{aligned}$$

■

La notion d'ouvert connexe dans $\mathbb{C}$ peut se définir en utilisant les chemins.

Définition 19.10 *On dit qu'un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$ est connexe si deux points quelconques de $\mathcal{O}$ peuvent être joints par un chemin dans $\mathcal{O}$ (i. e. pour α, β dans $\mathcal{O}$, il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathcal{O}$ tel que $\gamma(0) = \alpha$ et $\gamma(1b) = \beta$).*

En réalité, on dit usuellement qu'une partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}$ est connexe s'il n'est pas possible de l'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts non vides de $\mathcal{C}$ (un ouvert de $\mathcal{C}$ étant un ensemble $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$) et on montre qu'un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ est connexe si, et seulement si, il est connexe par arcs, c'est-à-dire que deux points quelconques de $\mathcal{C}$ peuvent être reliés par un chemin dans $\mathcal{C}$.

La définition d'ouvert connexe que nous avons donné nous suffira.

19.4 Fonctions analytiques

Pour ce paragraphe, $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, f une application de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$ et z_0 un point de $\mathcal{O}$.

Définition 19.11 *On dit que f est analytique en z_0 s'il existe un réel $r > 0$ (dépendant de z_0) tel que $D(z_0, r) \subset \mathcal{O}$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes tels que :*

$$\forall z \in D(z_0, r), \ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

On dit aussi que f est analytique en z_0 si elle est développable en série entière au voisinage de z_0.

On peut remarquer que $a_0 = f(z_0)$.

Avec les notations de la définition précédente la série entière $\sum a_n t^n$ a un rayon de convergence $R_0 \geq r$.

Dire que f est analytique en z_0 équivaut à dire que la fonction $f_{z_0} : t \mapsto f(z_0 + t)$, qui est définie sur le disque ouvert $D(0, r)$, est développable en série entière au voisinage de 0.

Définition 19.12 *On dit que f est analytique sur $\mathcal{O}$ si elle est analytique en tout point de $\mathcal{O}$.*

Du théorème 14.11 sur la continuité des fonctions développables en série entière au voisinage de 0, on déduit le suivant.

Théorème 19.8 *Toute fonction analytique sur $\mathcal{O}$ est continue sur cet ouvert.*

Démonstration. Pour $z_0 \in \mathcal{O}$ la fonction $f_{z_0} : t \mapsto f(z_0 + t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, qui est définie dans un voisinage de 0, est continue en 0, ce qui revient à dire que f est continue en z_0. ■

De cette continuité, on déduit que le développement en série entière au voisinage de z_0 est unique.

Exercice 19.21 *Montrer que toute fonction polynomiale est analytique sur $\mathbb{C}$.*

Solution 19.21 *Comme pour tout nombre complexe z_0 la famille $\left((z - z_0)^k\right)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[z]$, toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{C}_n[z]$ s'écrit de manière unique $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k$ et en conséquence est analytique en z_0 (on a $a_{n+k} = 0$ pour tout $k \geq 0$).*

Exercice 19.22 *Montrer que la fonction* $f : z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ *est analytique sur* $D(0,1)$.

Solution 19.22 *On sait déjà que cette fonction est développable en série entière en* 0 *avec, pour tout* $z \in D(0,1)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.
Pour $z_0 \in D(0,1)$ *et* $z \in D(z_0, 1-|z_0|) \subset D(0,1)$ *(faire un dessin), on a :*

$$f(z) = \frac{1}{1-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}$$

et f *est analytique en* z_0.

Au paragraphe 15.2 nous avons défini la fonction exponentielle complexe par $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout nombre complexe z. On note aussi $\exp(z)$ pour e^z.

Exercice 19.23 *Montrer que la fonction exponentielle complexe est analytique sur* $\mathbb{C}$.

Solution 19.23 *En utilisant l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction exponentielle (théorème 15.2), on a pour tout* $z_0 \in \mathbb{C}$ *:*

$$e^z = e^{z_0} e^{z-z_0} = e^{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}$$

et f *est analytique en* z_0.

Nous verrons un peu plus loin que si f est une fonction développable en série entière sur un disque ouvert $D(0,R)$ de centre 0 et de rayon $R > 0$, elle est alors analytique sur ce disque.

En utilisant les résultats relatifs aux opérations sur les fonctions développables en série entière au voisinage de 0 (théorèmes 14.8 et 14.9), on déduit le suivant.

Théorème 19.9 *La somme et le produit de deux fonctions analytiques sur* $\mathcal{O}$ *est analytique sur* $\mathcal{O}$.
Plus précisément si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ *et* $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n$ *pour* $z \in D(z_0, r) \subset \mathcal{O}$, *on a alors* $f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)(z-z_0)^n$ *et* $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ *avec* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Exercice 19.24 *Montrer que les fonctions* $f : z \mapsto \cos(z)$, $z \mapsto \sin(z)$, $z \mapsto \operatorname{ch}(z)$ *et* $z \mapsto \operatorname{sh}(z)$ *sont analytiques sur* $\mathbb{C}$.

Solution 19.24 *Ce sont des combinaisons linéaires de la fonction exponentielle.*

Exercice 19.25 *Montrer qu'une fonction rationnelle est analytique sur son domaine de définition.*

Solution 19.25 *Sachant qu'une fonction polynomiale est analytique et en utilisant le théorème de décomposition en éléments simples, il suffit de montrer le résultat pour les fonctions rationnelles de la forme* $z \mapsto \dfrac{1}{(z-a)^m}$ *où* a *est un nombre complexe et* m *un entier naturel non nul.*
Pour $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ *et* $z \in D(z_0, |z_0 - a|) \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$, *on a :*

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-a)^m} &= \frac{1}{(z-z_0+z_0-a)^m} \\ &= \frac{1}{(z_0-a)^m} \frac{1}{\left(1-\frac{z-z_0}{a-z_0}\right)^m} = \frac{1}{(z_0-a)^m} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n\end{aligned}$$

sachant que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^m}$ *est développable en série entière sur* $D(0,1)$.
Si maintenant f *est une fonction rationnelle, le théorème de décomposition en élément simples nous dit qu'elle s'écrit* $f = P + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \dfrac{1}{(z-a_k)^{m_k}}$ *où* P *est une fonction polynomiale, les* α_k *sont des nombres complexes et les* m_k *des entiers naturels non nuls. La fonction* P *étant analytique sur* $\mathbb{C}$ *et les fonctions* $z \mapsto \dfrac{1}{(z-a_k)^{m_k}}$ *analytiques sur* $\mathbb{C} \setminus \{a_k\}$, *on en déduit que* f *est analytique sur l'intersection de ces ensembles, soit sur* $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \cdots, a_p\}$ *qui est le domaine de définition de* f.

Remarque 19.3 *Montrer que le quotient ou la composée de deux fonctions analytiques est analytique sur son domaine de définition est assez délicat. Nous obtiendrons ces résultats comme conséquences d'un résultat élémentaire relatif au quotient ou à la composée de deux fonctions* $\mathbb{C}$-*dérivables après avoir défini cette notion et montré qu'elle est équivalente à l'analyticité.*

19.5 La dérivation complexe. Fonctions holomorphes

Pour ce paragraphe, $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, f une application de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$ et z_0 un point de $\mathcal{O}$.

La notion de dérivabilité pour une fonction d'une variable complexe et à valeurs complexes se défini comme dans le cas réel.

Définition 19.13 *On dit que* f *est dérivable en* z_0 *si la fonction* $z \mapsto \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ *définie sur* $\mathcal{O} \setminus \{z_0\}$ *admet une limite en* z_0.

Quand cette limite existe, elle est unique, on la note $f'(z_0)$ et on dit que c'est le nombre dérivé de f en z_0.

De manière équivalente, on peut dire que f est dérivable en z_0 si, et seulement si, elle admet le développement limité d'ordre 1 en z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + |z - z_0| \varepsilon(z) \tag{19.1}$$

où $\lim\limits_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0$.

Définition 19.14 *On dit que* f *est holomorphe (ou* $\mathbb{C}$-*dérivable) sur* $\mathcal{O}$ *si elle est dérivable en tout point de* $\mathcal{O}$.

Si f est une fonction holomorphe sur $\mathcal{O}$, la fonction $z \mapsto f'(z)$ est la fonction dérivée de f.

Si f est holomorphe sur $\mathcal{O}$ avec f' également holomorphe, la dérivée de f' est notée f''. Par récurrence, on peut définir les dérivées d'ordre n notées $f^{(n)}$ comme dans le cas réel. Nous verrons plus loin qu'une fonction holomorphe est en fait toujours indéfiniment dérivable (ce qui est faux pour les fonctions d'une variable réelle).

Exemple 19.4 *Il est facile de vérifier qu'une fonction constante sur $\mathcal{O}$ est holomorphe de dérivée nulle en tout point.*

Exercice 19.26 *Les fonctions $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto \Re(z)$, $z \mapsto \Im(z)$, $z \mapsto |z|^2$, $z \mapsto |z|$ sont-elles holomorphes sur $\mathbb{C}$?*

Solution 19.26 *Pour $z \neq z_0$, on a en utilisant la représentation polaire $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$:*

$$\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = e^{-2i\theta} \underset{\rho \to 0}{\to} e^{-2i\theta}$$

et en conséquence $\dfrac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}$ n'a pas de limite quand z tend vers z_0 dans $\mathbb{C}$ (par exemple, pour $\theta = 0$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, on a deux limites différentes, ce qui n'est pas possible).
L'étude des autres fonctions sont laissées au lecteur.

Remarque 19.4 *Les fonctions $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto \Re(z)$, $z \mapsto \Im(z)$, $z \mapsto |z|^2$ nous fournissent des exemples de fonctions indéfiniment dérivables vues comme fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et non dérivables au sens complexe. La fonction $z \mapsto |z|^2$ est uniquement dérivable en 0 avec une dérivée nulle ($\dfrac{|z|^2}{z} = \overline{z} \underset{z \to 0}{\to} 0$).*

Exercice 19.27 *Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction $f : z \mapsto z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec $f'(z) = nz^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ et tout $z \in \mathbb{C}$.*

Solution 19.27 *Pour $n = 0$, f est constante égale à 1 et elle holomorphe de dérivée nulle.*
Pour $n = 1$, de $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 1$, on déduit que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec $f'(z_0) = 1$ pour tout z_0.
Pour $n \geq 2$, de :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k \underset{z \to z_0}{\to} n z_0^{n-1}$$

(continuité sur $\mathbb{C}$ des fonctions $z \mapsto z^p$ pour tout entier naturel p), on déduit que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec $f'(z_0) = n z_0^{n-1}$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$.

Exercice 19.28 *Montrer que pour tout entier naturel non nul n, la fonction $f : z \mapsto \dfrac{1}{z^n}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ avec $f'(z) = -\dfrac{n}{z^{n+1}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.*

Solution 19.28 *De :*

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{z_0^n - z^n}{z^n z_0^n (z - z_0)} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{n-1-k} z_0^k}{z^n z_0^n} \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z^{k+1} z_0^{n-k}} \underset{z \to z_0}{\to} -\frac{n}{z_0^{n+1}} \end{aligned}$$

(continuité sur $\mathbb{C}^*$ des fonctions $z \mapsto \dfrac{1}{z^p}$ pour tout entier naturel non nul p), on déduit que f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ avec $f'(z_0) = -\dfrac{n}{z_0^{n+1}}$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

De la définition du nombre dérivé on déduit facilement le résultat suivant.

Théorème 19.10 *Si f est dérivable en z_0 elle est alors continue en ce point.*

Démonstration. Se déduit immédiatement de (19.1). ∎

La réciproque de ce résultat est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $z \mapsto \overline{z}$.

Le résultat de l'exercice qui suit nous sera utile pour montrer qu'une fonction de dérivée nulle sur un ouvert connexe est constante.

Exercice 19.29 *Soient $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ holomorphe, $[a, b]$ un segment réel non réduit à un point et $\gamma : [a, b] \to \mathcal{O}$ une fonction dérivable. Montrer que la fonction $f \circ \gamma$ est dérivable sur $[a, b]$ avec $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$.*

Solution 19.29 *Pour $t \neq t_0$ dans $[a, b]$, on a :*

$$\begin{aligned}\frac{(f \circ \gamma)(t) - (f \circ \gamma)(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} \\ &= \frac{f'(\gamma(t_0))(\gamma(t) - \gamma(t_0)) + |\gamma(t) - \gamma(t_0)|\,\varepsilon(\gamma(t))}{t - t_0} \\ &= f'(\gamma(t_0))\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} + \delta(t)\end{aligned}$$

avec $\dfrac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \underset{t \to t_0}{\to} \gamma'(t_0)$ et :

$$|\delta(t)| = \frac{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|}{|t - t_0|}|\varepsilon(\gamma(t))| \underset{t \to t_0}{\to} |\gamma'(t_0)| \cdot 0 = 0$$

(γ qui est dérivable est continue, donc $\lim\limits_{t \to t_0} \gamma(t) = \gamma(t_0)$ et $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon(\gamma(t))$).

Dans le cas des fonctions d'une variable réelle, on sait qu'une fonction définie sur un intervalle et à valeurs réelles ou complexes est constante si, et seulement si, elle est dérivable de dérivée nulle.

Dans le cas complexe, on vérifie facilement qu'une fonction constante est holomorphe de dérivée nulle et pour la réciproque, on a le résultat suivant.

Théorème 19.11 *Soient $\mathcal{O}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si $f' = 0$, alors f est constante.*

Démonstration. Soient a, b dans $\mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O}$ est un ouvert connexe, il existe un arc affine par morceaux et continu $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{O}$ qui joint a et b. Un tel chemin est défini par une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_p < t_{p+1} = 1$ et pour $0 \leq k \leq p$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$\gamma(t) = \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k}a_k + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}a_{k+1}$$

où les $a_k = \gamma(t_k)$ sont dans $\mathcal{O}$ avec $a_0 = a$, $a_{p+1} = b$.

Les fonctions $\varphi_k : t \mapsto f(\gamma(t))$ sont alors dérivables sur $[t_k, t_{k+1}]$ avec :

$$\varphi_k'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$$

et en conséquence φ_k est constante sur $[t_k, t_{k+1}]$. On a donc $f(a_k) = f(a_{k+1})$ pour tout k compris entre 0 et p et $f(a) = f(b)$. La fonction f est donc constante. ■

De manière plus générale si $f' = 0$ pour $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ holomorphe, la fonction f est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert $\mathcal{O}$.

Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, on a les résultats suivants relatifs aux opérations algébriques sur les fonctions holomorphes, les démonstrations étant analogues.

Théorème 19.12 *Soient f, g deux fonctions holomorphes sur $\mathcal{O}$.*

1. *Pour tous nombres complexes λ, μ la fonction $\lambda f + \mu g$ est holomorphe sur $\mathcal{O}$ avec :*

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

2. *La fonction fg est holomorphe sur $\mathcal{O}$ avec :*

$$(fg)' = f'g + fg'$$

(formule de Leibniz).

3. *Si $g(z_0) \neq 0$, alors la fonction g ne s'annule pas dans un voisinage de z_0, les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ qui sont définies dans un tel voisinage sont dérivables en z_0 avec :*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = -\frac{g'(z_0)}{g^2(z_0)}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{g(z_0)f'(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

Démonstration. On copie la démonstration du cas réel. ■

La formule de Leibniz se généralise, par récurrence sur $n \geq 2$ en :

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' f_3 \cdots f_n + \cdots + f_1' \cdots f_{n-1} f_n'$$

les f_k, pour k compris entre 1 et n étant des fonctions holomorphes sur $\mathcal{O}$.

Dans le cas où toutes les f_k sont égales à une même fonction f, on a :

$$(f^n)' = n f^{n-1} f'.$$

Exercice 19.30 *Montrer qu'une fonction polynomiale est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et qu'une fonction rationnelle $f = \frac{P}{Q}$, où P et Q sont des polynômes avec Q non nul, est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\}$.*

Solution 19.30 *C'est clair puisque les fonctions $z \mapsto 1$ et $z \mapsto z$ sont holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

Pour la composition des applications, on a le résultat suivant.

Théorème 19.13 *Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $f(\mathcal{O})$ et $g : \mathcal{O}' \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur $\mathcal{O}'$, alors $g \circ f$ est holomorphe sur $\mathcal{O}$ avec $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$.*

Démonstration. On copie la démonstration du cas réel. ■

Définition 19.15 *On appelle fonction entière, toute fonction qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

Exercice 19.31 *Montrer que la fonction exponentielle complexe est une fonction entière avec* $\exp'(z) = \exp(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.

Solution 19.31 *Pour $z \neq z_0$, on a :*

$$\begin{aligned}\frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} - e^{z_0} = e^{z_0}\frac{e^{z-z_0} - 1}{z - z_0} &= e^{z_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(z - z_0)^{n-1}}{n!} - e^{z_0} \\ &= e^{z_0}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(z - z_0)^{n-1}}{n!}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} - e^{z_0}\right| &= |e^{z_0}|\,|z - z_0|\left|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(z - z_0)^{n-2}}{n!}\right| \\ &\leq |e^{z_0}|\,|z - z_0|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|z - z_0|^{n-2}}{(n-2)!} = |e^{z_0}|\,|z - z_0|\,e^{|z-z_0|}\end{aligned}$$

et $\lim\limits_{z \to z_0} = \dfrac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} - e^{z_0} = 0$, *ce qui signifie que* exp *est dérivable en* z_0 *avec* $\exp'(z_0) = \exp(z_0)$.

De cet exercice, on déduit que les fonctions cos, sin, ch et sh sont des fonctions entières avec pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\cos'(z) = -\sin(z)$, $\sin'(z) = \cos(z)$, $\mathrm{ch}'(z) = \mathrm{sh}(z)$ et $\mathrm{sh}'(z) = \mathrm{ch}(z)$.

La fonction tan est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ avec $\tan'(z) = \dfrac{1}{\cos^2(z)} = 1 + \tan^2(z)$ et la fonction th est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \left\{k\pi + i\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ avec $\mathrm{th}'(z) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(z)} = 1 - \mathrm{th}^2(z)$.

19.6 Les conditions de Cauchy-Riemann

$\mathcal{O}$ désigne encore un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une application de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$.

On rappelle que si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, on dit qu'une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in \Omega$ s'il existe un application linéaire $d\varphi(x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout $(x, y) \in \Omega$ on ait :

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + d\varphi(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + \|(x - x_0, y - y_0)\|\,\varepsilon(x, y) \tag{19.2}$$

où $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x, y) = 0$. Si $\varphi = (P, Q)$, où P et Q sont à valeurs réelles, alors la matrice de l'application linéaire $d\varphi(x_0, y_0)$ (la différentielle de φ en (x_0, y_0)) est :

$$J\varphi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

(matrice jacobienne de φ en (x_0, y_0)).

En notant respectivement P et Q la partie réelle et la partie imaginaire de f, on a le résultat suivant, où $\varphi : (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y))$ est la représentation réelle de f.

Théorème 19.14 *La fonction f est holomorphe sur $\mathcal{O}$ si, et seulement si, la fonction φ est différentiable (au sens réel) sur Ω avec pour tout $(x, y) \in \Omega$:*

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \end{array}\right.$$

(conditions de Cauchy-Riemann).

Démonstration. Supposons f holomorphe sur $\mathcal{O}$. Pour $z_0 \in \mathcal{O}$, on note $f'(z_0) = a + ib$ avec a, b réels. De (19.1) , on déduit avec les notations qui précèdent que :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) &+ (a(x - x_0) - b(y - y_0), a(y - y_0) + b(x - x_0)) \\ &+ \|(x - x_0, y - y_0)\| \varepsilon(x, y) \end{aligned}$$

ce qui signifie que φ est différentiable en (x_0, y_0) de matrice jacobienne :

$$J\varphi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

et on a les conditions de Cauchy-Riemann.

Réciproquement si φ est différentiable en (x_0, y_0) , les conditions de Cauchy-Riemann étant remplies, l'expression complexe de (19.2) est :

$$f(z) = f(z_0) + \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)\right)(z - z_0) + |z - z_0| \varepsilon(z)$$

et :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

ce qui signifie que f est holomorphe en z_0 de dérivée :

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

■

Remarque 19.5 *Les conditions de Cauchy-Riemann se traduisent en disant que pour f holomorphe, la différentielle $d\varphi$ est $\mathbb{C}$-linéaire.*

Remarque 19.6 *En notant $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}$, nous avons vu avec la démonstration précédente que $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$ et les conditions de Cauchy-Riemann se traduisent par :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(z) = f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \\ &= -i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z) \end{aligned}$$

ou encore par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z) = f'(z).$$

Exercice 19.32 *En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, montrer que les fonctions* $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto \Re(z)$, $z \mapsto \Im(z)$, $z \mapsto |z|^2$, $z \mapsto |z|$, $z \mapsto e^{\overline{z}}$ *ne sont pas holomorphes sur* $\mathbb{C}$.

Solution 19.32 *Pour* $f : z \mapsto \overline{z}$, *on a* $f = P + iQ$ *avec* $P(x,y) = x$, $Q(x,y) = -y$ *et* $\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = -1$. *Cette fonction* f *n'est donc pas holomorphe. On montre de manière analogue que les autres fonctions ne sont pas holomorphes.*

Exercice 19.33 *La fonction* f *définie sur* $\mathbb{C}$ *par* $f(z) = f(x+iy) = x^2y + iy$ *est-elle holomorphe ?*

Solution 19.33 *On a* $f = P + iQ$ *avec* $P(x,y) = x^2y$ *et* $Q(x,y) = y$. *Comme :*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2xy \neq \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 1$$

pour z *dans* $\mathbb{C}$ *privé de l'hyperbole* $\mathcal{H}$ *d'équation* $2xy = 1$ *et :*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = x^2 \neq -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$$

pour les points de $\mathcal{H}$, *la fonction n'est pas holomorphe sur* $\mathbb{C}$.

Exercice 19.34 *Montrer que si* f *est une fonction holomorphe sur un ouvert connexe* $\mathcal{O}$ *de* $\mathbb{C}$ *et à valeurs réelles, elle est alors nécessairement constante.*

Solution 19.34 *En gardant la notation* $f = P + iQ$ *avec* P, Q *à valeurs réelles, on a* $Q = 0$ *pour* f *à valeurs réelles et des conditions de Cauchy Riemann, on déduit que* $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ *sur* Ω *et en conséquence* $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = 0$ *ce qui équivaut à dire que* f *est constante sur l'ouvert connexe* $\mathcal{O}$.

Exercice 19.35 *Soit* $f = P + iQ$ *une fonction holomorphe sur un ouvert connexe* $\mathcal{O}$ *de* $\mathbb{C}$, *où* P *et* Q *sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de* f. *Montrer que s'il existe des réel* a, b *tels que* $P + aQ + b = 0$ *sur* $\mathcal{O}$, *alors* f *est constante.*

Solution 19.35 *Si* $a = 0$, P *est constante et on a ,* $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, *soit* $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = 0$ *et* f *est constante sur l'ouvert connexe* $\mathcal{O}$.

On suppose maintenant que $a \neq 0$. *De* $P+aQ+b = 0$, *on déduit que* $\frac{\partial P}{\partial x}+a\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}+a\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ *et donc* $\frac{\partial P}{\partial x} = -a\frac{\partial Q}{\partial x} = a\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -a\frac{\partial Q}{\partial y} = -a\frac{\partial P}{\partial x}$, *ce qui donne* $\frac{\partial P}{\partial x} = -a^2\frac{\partial P}{\partial x}$, *soit* $(1+a^2)\frac{\partial P}{\partial x} = 0$, *donc* $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ *et* $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{a}\frac{\partial P}{\partial x} = 0$, *ce qui entraîne* $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = 0$ *et* f *est constante sur l'ouvert connexe* $\mathcal{O}$.

Exercice 19.36 *Connaissant les fonctions de la variable réelle* exp, sin *et* cos, *on peut définir la fonction* $x \mapsto e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ *sur* $\mathbb{R}$ *et la fonction exponentielle complexe par* $z = x+iy \mapsto \exp(z) = e^x e^{iy}$ *sur* $\mathbb{C}$. *Montrer, avec cette définition, que cette fonction est holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *avec* $\exp' = \exp$.

Solution 19.36 *On a* $\exp(z) = P(z) + iQ(z)$ *avec* $P(z) = e^x \cos(y)$ *et* $Q(z) = e^x \sin(y)$. *Les fonctions* P *et* Q *sont différentiables sur* $\mathbb{R}^2$ *et on a :*

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin(y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

et donc exp *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$. *Et pour tout complexe* z, *on a :*

$$\begin{aligned} \exp'(z) &= \frac{\partial \exp}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \\ &= e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) = \exp(z). \end{aligned}$$

Exercice 19.37 *On a défini la détermination principale du logarithme complexe par :*

$$\begin{array}{llll} \ln : & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- & \to & \mathbb{C} \\ & z = x + iy & \mapsto & \ln(|z|) + i\arg(z) = \ln(|z|) + 2i\arctan\left(\frac{y}{x+|z|}\right) \end{array}$$

(paragraphe 15.8). Montrer que cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ *avec* $\ln'(z) = \dfrac{1}{z}$ *pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Solution 19.37 *On rappelle que si* θ *est la détermination de* $\arg(z)$ *dans* $]-\pi, \pi[$, *on a* $x = |z|\cos(\theta) = |z|\left(2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - 1\right)$, $y = |z|\sin(\theta) = |z|\,2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ *et*

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{2|z|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{2|z|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{x+|z|} = \frac{y}{x+|z|}$$

avec $\dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

En notant $z = x + iy$, *on a* $f(z) = P(z) + iQ(z)$ *avec* $P(z) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ *et* $Q(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. *Les fonctions* P *et* Q *sont différentiables sur* $\mathbb{R}^2$ *et on a :*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \; \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= 2\frac{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}-y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}^2}}{1+\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = 2\frac{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+y^2\right)} \\ &= \frac{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right)} \\ &= \frac{x\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= 2\frac{\frac{-y\quad 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}\quad{}^{2}}}{1+\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = -2\frac{y\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+y^2\right)} \\
&= -\frac{y\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right)} \\
&= -\frac{y\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)} = -\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}
$$

Les conditions de Cauchy-Riemann étant satisfaites, la fonction $\ln$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ *avec :*

$$
\begin{aligned}
\ln'(z) &= \frac{\partial \ln}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \\
&= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}.
\end{aligned}
$$

Exercice 19.38 *Soient* $\mathcal{O}$ *un ouvert de* $\mathbb{C}^*$ *et* $f = P + iQ : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ *où* P *et* Q *sont à valeurs réelles. En utilisant l'écriture polaire des nombres complexes,* $z = re^{it}$*, on peut écrire* $P(z) = P(r,t)$ *et* $Q(z) = Q(r,t)$*. Montrer que* f *est holomorphe sur* $\mathcal{O}$ *si, et seulement si, les fonctions* P *et* Q *sont différentiables avec* $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial t}$ *et* $\frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial t}$ *(expression polaire des conditions de Cauchy-Riemann).*

Solution 19.38 *L'écriture* $z = re^{it}$ *se traduit par* $x = r\cos(t)$, $y = r\sin(t)$*. Si* f *est holomorphe sur* $\mathcal{O}$*, les fonctions* P *et* Q *sont différentiables sur* Ω *et on a :*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial r} &= \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos(t)\frac{\partial P}{\partial x} + \sin(t)\frac{\partial P}{\partial y} \\
&= \cos(t)\frac{\partial Q}{\partial y} - \sin(t)\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\right) \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial t}
\end{aligned}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial r} &= \cos(t)\frac{\partial Q}{\partial x} + \sin(t)\frac{\partial Q}{\partial y} \\
&= -\cos(t)\frac{\partial P}{\partial y} + \sin(t)\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\right) \\
&= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Réciproquement si les fonctions P *et* Q *sont différentiables avec* $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial t}$ *et* $\frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial t}$*, de :*

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\frac{\partial P}{\partial r} = \cos(t)\frac{\partial P}{\partial x} + \sin(t)\frac{\partial P}{\partial y} \\
\frac{\partial P}{\partial t} = -r\sin(t)\frac{\partial P}{\partial x} + r\cos(t)\frac{\partial P}{\partial y}
\end{array}
\right.
$$

on déduit que :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = \cos(t)\,\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\sin(t)}{r}\frac{\partial P}{\partial t} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \sin(t)\,\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\cos(t)}{r}\frac{\partial P}{\partial t} \end{array}\right.$$

et :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\cos(t)}{r}\frac{\partial Q}{\partial t} + \sin(t)\,\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\sin(t)}{r}\frac{\partial Q}{\partial t} - \cos(t)\,\frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

ce qui signifie que f est holomorphe sur $\mathcal{O}$.

Exercice 19.39 *Soit $P : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ définie par $P(z) = P(x+iy) = \dfrac{x}{|z|^2}$. Déterminer, si elles existent, toutes les fonctions $Q : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ telles que $f = P + iQ$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.*

Solution 19.39 *La fonction $P : (x,y) \mapsto \dfrac{x}{x^2+y^2}$ est différentiable sur $\mathbb{C}^*$ identifié à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si $f = P + iQ$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, la fonction Q est alors différentiable sur $\mathbb{C}^*$ avec :*

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{array}\right.$$

De la deuxième équation, on déduit que $Q(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} + \varphi(y)$, où φ est différentiable sur $\mathbb{R}$ et avec la première, on déduit que $\varphi'(y) = 0$. On a donc $Q(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2} + c = -\dfrac{y}{|z|^2} + c$, où c est une constante réelle et $f(z) = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} + ic = \dfrac{1}{z} + ic$.

Exercice 19.40 *Soit $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $Q(z) = P(x+iy) = \cos(x)\operatorname{sh}(y)$. Déterminer, si elles existent, toutes les fonctions $P : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telles que $f = P + iQ$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

Solution 19.40 *La fonction $Q : (x,y) \mapsto \cos(x)\operatorname{sh}(y)$ est différentiable sur $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$. Si $f = P + iQ$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, la fonction P est alors différentiable sur $\mathbb{C}$ avec :*

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \cos(x)\operatorname{ch}(y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \sin(x)\operatorname{sh}(y) \end{array}\right.$$

De la première équation, on déduit que $P(x,y) = \sin(x)\operatorname{ch}(y) + \varphi(y)$, où φ est différentiable sur $\mathbb{R}$ et avec la deuxième, on déduit que $\varphi'(y) = 0$. On a donc $P(x,y) = \sin(x)\operatorname{ch}(y) + c$, où c est une constante réelle et :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(x)\operatorname{ch}(y) + i\cos(x)\operatorname{sh}(y) + c \\ &= \sin(x)\cos(iy) - \cos(x)\sin(iy) + c \\ &= \sin(x+iy) + c = \sin(z) + c. \end{aligned}$$

Exercice 19.41 *Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $P(z) = P(x+iy) = |z|^2$. Montrer qu'il n'est pas possible de trouver $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telle que $f = P + iQ$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}$ (il n'existe pas de fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ de partie réelle $|z|^2$).*

Solution 19.41 *Les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent :*

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -2y \end{array}\right.$$

ce qui donne $Q(x,y) = -2xy + \varphi(y)$ *et* $-2x + \varphi'(y) = 2x$*, donc* $\varphi'(y) = 4x$*, ce qui est impossible (sans quoi, pour y fixé,* $\varphi'(y)$ *prend une infinité de valeurs).*

19.7 Fonctions harmoniques

Définition 19.16 *Soit* Ω *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^2$*. On dit qu'une fonction* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *est harmonique sur* Ω *si elle est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* Ω *avec :*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

pour tout $(x,y) \in \Omega$*.*

L'opérateur différentiel $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ est noté Δ et appelé laplacien.

Théorème 19.15 *Si* $f = P + iQ$ *est une fonction holomorphe sur l'ouvert* $\mathcal{O}$ *avec* P *et* Q *de classe* $\mathcal{C}^2$ *et à valeurs réelles, alors les fonctions* P *et* Q *sont harmoniques sur* $\mathcal{O}$*.*

Démonstration. En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann et le théorème de Schwarz pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = 0\end{aligned}$$

et P est harmonique sur $\mathcal{O}$.

De manière analogue, on vérifie que Q est harmonique sur $\mathcal{O}$. ■

Remarque 19.7 *Nous verrons plus loin qu'une fonction holomorphe est en fait indéfiniment dérivable et l'hypothèse* P *et* Q *de classe* $\mathcal{C}^2$ *est automatiquement vérifiée.*

Exemple 19.5 *La fonction* $P : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ *n'étant pas harmonique (*$\Delta P = 4 \neq 0$*), il ne peut pas exister de fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *de partie réelle* $x^2 + y^2 = |z|^2$*.*

Exercice 19.42 *Soit* $f = P + iQ$ *une fonction holomorphe sur l'ouvert* $\mathcal{O}$ *ne s'annulant pas, où* P *et* Q *sont de classe* $\mathcal{C}^2$ *et à valeurs réelles. Montrer que la fonction* $\ln(|f|)$ *est harmonique.*

Solution 19.42 *On a* $\varphi = \ln(|f|) = \dfrac{1}{2}\ln(P^2 + Q^2)$ *et :*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x}}{P^2 + Q^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} &= \frac{(P^2+Q^2)\left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + P\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + Q\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right) - 2\left(P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2}{(P^2+Q^2)^2} \\ &= \frac{(P^2+Q^2)\left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + P\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + Q\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right) - 2\left(P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2}{(P^2+Q^2)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + P\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + Q\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}}{P^2+Q^2} - 2\left(\frac{P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x}}{P^2+Q^2}\right)^2\end{aligned}$$

Utilisant une formule analogue pour $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$, *on obtient :*

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + P\Delta P + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + Q\Delta Q}{P^2+Q^2} \\ &- 2\left(\frac{P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x}}{P^2+Q^2}\right)^2 - 2\left(\frac{P\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial Q}{\partial y}}{P^2+Q^2}\right)^2 \\ &= 2\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2}{P^2+Q^2} - 2\frac{\left(P\frac{\partial P}{\partial x} - Q\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(P\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{(P^2+Q^2)^2} \\ &= 2\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2}{P^2+Q^2} - 2\frac{P^2\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + Q^2\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + P^2\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + Q^2\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2}{(P^2+Q^2)^2} \\ &= 2\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2}{P^2+Q^2} - 2\frac{(P^2+Q^2)\left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right)}{(P^2+Q^2)^2} = 0.\end{aligned}$$

Remarque 19.8 *L'exercice précédant peut se résoudre facilement en remarquant que l'hypothèse* $f(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in \mathcal{O}$ *permet de définir localement des déterminations holomorphes de* $\ln(f)$ *et* $\ln(|f|)$ *est harmonique comme partie réelle d'une telle détermination.*

Le théorème précédent admet une réciproque qui peut s'énoncer comme suit, en prenant pour l'instant, comme définition intuitive d'un ouvert simplement connexe, un ouvert non vide, connexe et « sans trous ».

Théorème 19.16 *Si* $\mathcal{O}$ *est un ouvert simplement connexe et* $P : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ *une fonction harmonique, il existe alors des fonctions holomorphes sur* $\mathcal{O}$ *de partie réelle* P.

Démonstration. Admis. ■

De telles fonctions s'écrivent $f = P + iQ$, où $Q : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ s'obtient en résolvant le système défini par les conditions de Cauchy-Riemann.

Exercice 19.43 *Soit* $P : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *définie par* $P(z) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$. *Déterminer toutes les fonctions* $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *telles que* $f = P + iQ$ *soit holomorphe sur* $\mathbb{C}$.

Solution 19.43 *On a* $\Delta P = 0$, *donc* P *est harmonique et on peut trouver* Q.
Les conditions de Cauchy-Riemann donnent :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - 2 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2y + 2x - 3 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on déduit que $Q(x,y) = 2xy + x^2 - 3x + \varphi(y)$, *où* φ *est différentiable sur* $\mathbb{R}$ *et avec la première, on déduit que* $\varphi'(y) = -2y - 2$. *On a donc* $Q(x,y) = 2xy + x^2 - 3x - y^2 - 2y + c$, *où c est une constante réelle et :*

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y + i\left(2xy + x^2 - 3x - y^2 - 2y\right) + ic \\ &= (x+iy)^2 + i(x+iy)^2 - 2(x+iy) - 3i(x+iy) + ic \\ &= (1+i)z^2 - (2+3i)z + ic \end{aligned}$$

Exercice 19.44 *Montrer que si* $P : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ *est une fonction harmonique de classe* $\mathcal{C}^3$, *alors la fonction* $\varphi = x\dfrac{\partial P}{\partial x} + y\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *est aussi harmonique.*

Solution 19.44 *On a :*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + x\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right) \\ &= 2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} + y\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right) + y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)$$

et :

$$\Delta\varphi = 2\Delta P + x\frac{\partial}{\partial x}(\Delta P) + y\frac{\partial}{\partial y}(\Delta P) = 0$$

ce qui signifie que φ *est harmonique.*

Remarque 19.9 *Si dans l'exercice précédant,* $\mathcal{O}$ *est un ouvert simplement connexe, alors* P *est la partie réelle d'une fonction holomorphe et en conséquence, elle est de classe* $\mathcal{C}^\infty$. *Dans ce cas , l'hypothèse* P *de classe* $\mathcal{C}^3$ *est superflue.*
En remarquant que :

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y}$$

et :

$$zf' = (x+iy)\left(\frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y}\right) = x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} + i\left(y\frac{\partial P}{\partial x} - x\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

on déduit que $x\dfrac{\partial P}{\partial x} + y\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *et* $y\dfrac{\partial P}{\partial x} - x\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *sont harmoniques comme partie réelle et imaginaire de la fonction holomorphe* zf'.

19.8 Equivalence entre analyticité et holomorphie

Nous avons vu qu'une fonction de la variable réelle développable en série entière au voisinage de 0 est indéfiniment dérivable (corollaire 14.6). Maintenant que nous avons donné un sens à la notion de dérivation complexe nous allons montrer que ce résultat est encore valable pour les fonctions d'une variable complexe.

Le fait qu'une fonction analytique en z_0 est holomorphe en ce point est élémentaire.

Théorème 19.17 *Une fonction analytique sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$ est holomorphe sur cet ouvert.*

Démonstration. Pour $z_0 \in \mathcal{O}$, il existe $r > 0$ tel que $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ pour $z \in D(z_0, r) \subset \mathcal{O}$ et pour $z \neq z_0$ dans $D(z_0, r)$, on a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n = g(z)$$

avec $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(z_0) = a_1$ puisque la fonction g est continue en z_0 (la série entière $\sum a_{n+1} t^n$ qui a même rayon de convergence que $\sum a_n t^n$ est continue sur $D(0, r)$, donc en 0). La fonction f est donc dérivable en z_0 de dérivée $f'(z_0) = a_1$. ■

De manière, plus précise, on peut montrer que la dérivée d'une fonction analytique sur $\mathcal{O}$ est elle même analytique sur cet ouvert et donc holomorphe. Après avoir montré l'équivalence entre analyticité et holomorphie, on déduira qu'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable (ce résultat étant faux pour les fonctions d'une variable réelle).

Théorème 19.18 *Si f une est fonction analytique sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$, elle est alors holomorphe de dérivée f' analytique. Si $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ pour $z \in D(z_0, r) \subset \mathcal{O}$, on a alors $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ pour tout $z \in D(z_0, r)$.*

Démonstration. Sachant qu'une série et sa série dérivée ont même rayon de convergence, on peut définir la fonction g sur $D(z_0, r)$ par :

$$\forall z \in D(z_0, r), \ g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Soient $z \in D(z_0, r)$, $\rho > 0$ tel que $|z - z_0| < \rho < r$ et $h \in D(0, \rho - |z - z_0|) \setminus \{0\}$ (figure 19.2). On a $|z + h - z_0| \leq |z - z_0| + |h| < |z - z_0| + \rho - |z - z_0| < \rho$ et :

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(z + h - z_0)^n - (z - z_0)^n}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n P_n(z, h)
\end{aligned}$$

où on a posé pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
P_n(z, h) &= \frac{(z + h - z_0)^n - (z - z_0)^n}{h} - n (z - z_0)^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (z + h - z_0)^{n-1-k} (z - z_0)^k - n (z - z_0)^{n-1}
\end{aligned}$$

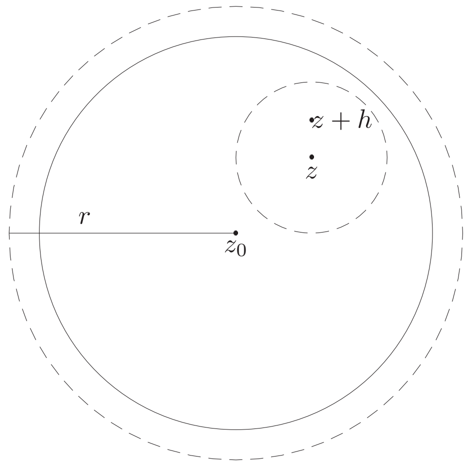

FIG. 19.2 –

On a alors :

$$\begin{aligned}|P_n(z,h)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |z+h-z_0|^{n-1-k}|z-z_0|^k + n|z-z_0|^{n-1} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \rho^{n-1-k}\rho^k + n\rho^{n-1} = 2n\rho^{n-1}\end{aligned}$$

la série $\sum na_{n-1}\rho^{n-1}$ étant convergente.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut donc trouver un entier naturel $n_\varepsilon \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \sum_{k=n+1}^{+\infty} ka_{k-1}\rho^{k-1} < \varepsilon$$

et un réel $\rho_1 \in]0, \rho - |z-z_0|[$ tel que pour $|h| < \rho_1$, on ait :

$$\left|\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k P_k(z,h)\right| < \varepsilon$$

(on a $\lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k P_k(z,h) = 0$), ce qui donne pour $|h| < \rho_1$:

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)\right| < 3\varepsilon$$

On a donc ainsi montré que $\lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} = g(z)$, ce qui signifie que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z de dérivée $g(z)$.

La fonction f est donc holomorphe sur $\mathcal{O}$ de dérivée f analytique sur cet ouvert, donc également holomorphe. ■

On a aussi montré avec ce théorème qu'une fonction développable en série entière au voisinage d'un point z_0 est holomorphe dans ce voisinage.

Par récurrence, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 19.1 *Si f est une fonction analytique sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$, elle est alors indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathcal{O}$ et si $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ pour $z\in D(z_0,r)\subset\mathcal{O}$, on a pour tout entier $p\geq 1$, $f^{(p)}(z)=\sum\limits_{n=p}^{+\infty}\dfrac{n!}{(n-p)!}a_n(z-z_0)^{n-p}$ pour tout $z\in D(z_0,r)$.*

Avec les notations du corollaire, on a $f^{(p)}(z_0)=p!a_p$, soit $a_p=\dfrac{f^{(p)}(z_0)}{p!}$ pour tout $p\geq 0$.

Exemple 19.6 *En utilisant ce théorème, on voit que la fonction exponentielle complexe est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec, pour tout $z\in\mathbb{C}$:*

$$\begin{aligned}\exp'(z)&=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{nz^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\exp(z)\end{aligned}$$

Exercice 19.45 *En utilisant le fait que la fonction* exp *est holomorphe avec* $\exp'=\exp$, *montrer que* $\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b)$ *pour tous nombres complexes a et b.*

Solution 19.45 *On définit la fonction f par $f(z)=e^{-z}e^{z+c}$, où c est une constante complexe. Cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ comme produit de deux fonctions holomorphes avec $f'(z)=-e^{-z}e^{z+c}+e^{-z}e^{z+c}=0$, elle est donc constante égale à $f(0)=e^c$. Prenant $z=-a$ et $c=a+b$, on en déduit que $e^{a+b}=e^ae^b$.*

Le théorème de Cauchy qui suit nous dit que réciproquement toute fonction holomorphe sur $\mathcal{O}$ est analytique sur cet ouvert.

Pour montrer ce théorème, on admet temporairement le résultat suivant.

Théorème 19.19 *Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$, sa dérivée f' est alors une fonction continue sur $\mathcal{O}$.*

Théorème 19.20 (Cauchy) *Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$, z_0 un point de $\mathcal{O}$ et $R>0$ le plus grand réel (éventuellement égal à $+\infty$) tel que $D(z_0,R)\subset\mathcal{O}$.*
Pour tout entier naturel n, le nombre complexe :

$$a_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{|u-z_0|=r}\frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}du=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+re^{it}\right)e^{-int}dt$$

est indépendant du réel $r\in\,]0,R[$ et pour tout $z\in D(z_0,R)$, on a :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$$

Démonstration. Soient $z\in D(z_0,R)$ et $r>0$ tel que $|z-z_0|<r<R$. On associe à ces quantités la fonction φ définie sur $[0,1]$ par :

$$\begin{aligned}\varphi(\theta)&=\int_{|u-z_0|=r}\frac{f((1-\theta)z+\theta u)}{u-z}du\\&=\int_0^{2\pi}\frac{f((1-\theta)z+\theta(z_0+re^{it}))}{z_0+re^{it}-z}ire^{it}dt\end{aligned}$$

(pour $u = z_0 + re^{it}$ sur le cercle de centre z_0 et de rayon r, le point $(1-\theta)\,z + \theta u$ est sur le segment $[z,u] \subset D\,(z_0, R)$).

La fonction intégrée est continûment différentiable en $(\theta, t) \in [0,1] \times [0, 2\pi]$ puisque f est continûment différentiable (vue comme une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) et en conséquence φ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ avec :

$$\begin{aligned}\varphi'(\theta) &= \int_0^{2\pi} f'\left((1-\theta)\,z + \theta\left(z_0 + re^{it}\right)\right) ire^{it}dt \\ &= \left[\frac{1}{\theta} f\left((1-\theta)\,z + \theta\left(z_0 + re^{it}\right)\right)\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0\end{aligned}$$

par 2π-périodicité de la fonction $t \mapsto f\left((1-\theta)\,z + \theta\,(z_0 + re^{it})\right)$. La fonction φ est donc constante sur $]0,1[$ et sur $[0,1]$ par continuité. On a donc :

$$\varphi(1) = \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{it}\right)}{z_0 + re^{it} - z} ire^{it}dt = \varphi(0) = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{z_0 + re^{it} - z}dt$$

soit :

$$f(z) \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z}dt = \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) \frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z}dt$$

ou encore :

$$f(z) \int_{|u-z_0|=r} \frac{du}{u-z} = \int_{|u-z_0|=r} \frac{f(u)}{u-z}du. \tag{19.3}$$

Tenant compte de $|z - z_0| < r = |re^{it}|$, on peut écrire que :

$$\frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z} = \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{re^{it}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{r^n e^{int}}$$

la convergence étant uniforme quand t décrit $[0, 2\pi]$, ce qui donne :

$$\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{r^n} \int_0^{2\pi} e^{-int}dt = 2\pi.$$

Comme la fonction $t \mapsto f\left(z_0 + re^{it}\right)$ est bornée sur $[0, 2\pi]$ (puisque continue), on peut aussi écrire :

$$\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) \frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int}dt$$

et on a en définitive :

$$2\pi f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int}dt$$

soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ avec :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int}dt = \frac{1}{2i\pi} \int_{|u-z_0|=r} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}du.$$

Il reste à vérifier que ces coefficients a_n sont indépendants du réel $r \in]0, R[$. En effet pour r, r' dans $]0, R[$, on peut trouver $z \in D(z_0, R)$ tel que $|z - z_0| < r$ et $|z - z_0| < r'$ et on a alors deux développements en série entière $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ et $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a'_n (z - z_0)^n$ avec $a_n = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{|u-z_0|=r} \dfrac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du$ et $a'_n = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{|u-z_0|=r'} \dfrac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du$, et un tel développement est unique, on a nécessairement $a_n = a'_n$ pour tout $n \geq 0$. ■

Le théorème précédent nous dit qu'une fonction holomorphe est analytique et on a ainsi montré l'équivalence entre les deux notions.

Avec ce théorème, on a aussi montré le résultat suivant.

Théorème 19.21 (Cauchy) *Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert non vide $\mathcal{O}$ de $\mathbb{C}$, z_0 un point de $\mathcal{O}$ et $R > 0$ le plus grand réel (éventuellement égal à $+\infty$) tel que $D(z_0, R) \subset \mathcal{O}$.*
Pour $0 < r < R$ et $z \in D(z_0, r)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|u-z_0|=r} \frac{f(u)}{u - z} du$$

(formule de Cauchy).

Démonstration. Tenant compte de

$$\int_{|u-z_0|=r} \frac{du}{u - z} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{z_0 + re^{it} - z} dt = 2i\pi,$$

la formule (19.3) nous donne :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|u-z_0|=r} \frac{f(u)}{u - z} du$$

■

Remarque 19.10 *Le corollaire 19.1 nous dit que les coefficients a_n du développement en série entière au voisinage de z_0 sont donnés par $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ et avec l'expression intégrale de ces coefficients a_n,, on déduit que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|u-z_0|=r} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du$$

En définitives la connaissance de f sur le disque de centre z_0 et de rayon $r \in]0, R[$ suffit pour déterminer $f(z)$ pour tout $z \in D(z_0, r)$ et toutes les dérivées $f^{(n)}(z_0)$.

Remarque 19.11 *Comme la composée de deux fonctions holomorphes est holomorphe, on déduit que la composée de deux fonctions analytiques est analytique.*

Exercice 19.46 *Soit f une fonction développable en série entière sur un disque $D(0, R)$ où $0 < R \leq +\infty$ ($R = +\infty$ signifie que $D(0, R) = \mathbb{C}$) avec $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in D(0, R)$. Montrer que la fonction g définie par $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ est holomorphe sur $D(0, R)$.*

Solution 19.46 *On a* $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} z^n$ *pour tout* $z \in D(0,R)$ *et* g *est holomorphe sur* $D(0,R)$ *puisque développable en série entière sur* $D(0,R)$.

Exercice 19.47 *On désigne par* $\ln$ *la détermination principale du logarithme complexe sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. *Montrer que :*

$$\forall z \in D(0,1), \ \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

Solution 19.47 *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ *vaut* 1 *(théorème de d'Alembert), donc la fonction* f *définie par* $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ *sur* $D(0,1)$ *est analytique et en conséquence holomorphe avec* $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z}$. *Mais la fonction* $z \mapsto \ln(1+z)$ *est également holomorphe sur* $D(0,1)$ *(composée de fonctions holomorphes) avec* $\ln'(1+z) = \frac{1}{1+z}$, *il en résulte que* $f(z) = \ln(1+z) + c$, *où* c *est une constante (le disque ouvert* $D(0,1)$ *est connexe). Faisant* $z = 0$, *on a* $c = 0$ *et* $f(z) = \ln(1+z)$.

Corollaire 19.2 (Inégalités de Cauchy) *En gardant les hypothèses et notations du théorème 19.20, on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \frac{n!}{r^n} \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \left|\frac{n!}{2i\pi} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz\right| \\
&= \frac{n!}{2\pi r^n} \left|\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int} dt\right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{it}\right)\right| dt \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|.
\end{aligned}$$

■

Remarque 19.12 *En remarquant que la fonction* $t \mapsto f\left(z_0 + re^{it}\right)$ *est* 2π*-périodique et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *avec des coefficients de Fourier donnés par :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int} dt$$

la formule de Parseval nous donne :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{it}\right)\right|^2 dt$$

En écrivant que

$$f\left(z_0 + re^{it}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \left(z_0 + re^{it} - z_0\right)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} r^m e^{imt}$$

la série étant uniformément convergente en $t \in [0, 2\pi]$, *on a pour* $n \in \mathbb{Z}$ *:*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} r^m \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt = \begin{cases} 0 \text{ si } n < 0 \\ \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} r^n \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$$

et la formule de Parseval s'écrit alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + re^{it}\right) \right|^2 dt$$

Il en résulte que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} \leq \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|^2 = \left(\sup_{|z-z_0|=r} |f(z)| \right)^2$$

et on retrouve les inégalités de Cauchy :

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| r^n \leq \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Remarque 19.13 *En gardant toujours les même notations, la fonction* $g : z \mapsto (z - z_0) f(z)$ *est holomorphe sur* $\mathcal{O}$ *et :*

$$0 = g(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z-z_0|=r} \frac{g(z)}{(z - z_0)} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz$$

et donc $\displaystyle\int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz = 0$ *pour tout* $z_0 \in \mathcal{O}$ *et* $r > 0$ *tel que* $D(z_0, r) \subset \mathcal{O}$.

19.9 Primitives des fonctions holomorphes

$\mathcal{O}$ désigne toujours un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une application de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 19.17 *Soit* f *une fonction holomorphe de* $\mathcal{O}$ *dans* $\mathbb{C}$. *On appelle primitive de* f, *tout fonction* F *holomorphe de* $\mathcal{O}$ *dans* $\mathbb{C}$ *telle que* $F' = f$.

Du théorème 19.11, on déduit que si l'ouvert $\mathcal{O}$ est connexe et si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et admet des primitives, alors deux primitives de f sur $\mathcal{O}$ différent d'une constante.

Théorème 19.22 *Si* F *est une primitive de la fonction holomorphe* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$, *on a alors pour tout chemin* $\gamma : [a, b] \to \mathcal{O}$ *:*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\gamma F'(z)\,dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\end{aligned}$$

■

Dans le cas particulier, où est un lacet, on a $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, si f admet des primitives sur $\mathcal{O}$.

L'exercice 19.18 se résout très simplement en remarquant que la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^2 - 1$ admet pour primitive la fonction F définie par $F(z) = \frac{z^3}{3} - z$. Ce qui donne :

– pour $\gamma : t \in [0,1] \mapsto t + it^2$:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \frac{(1+i)^3}{3} - (1+i) = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}i$$

– pour $\gamma : t \in [0,2\pi] \mapsto e^{t+it}$:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = \frac{e^{6\pi}}{3} - e^{2\pi} - \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

– pour $\gamma : t \in [0,2\pi] \mapsto \cos(t) + i\sin(2t)$:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = 0.$$

Remarque 19.14 *Comme* $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$, *on déduit que la fonction* $z \mapsto \frac{1}{z}$ *n'admet pas de primitive sur* $\mathbb{C}^*$. *Il n'est donc pas possible de définir une fonction logarithme comme primitive de* $z \mapsto \frac{1}{z}$ *sur* $\mathbb{C}^*$.

Définition 19.18 *On dit que l'ouvert* $\mathcal{O}$ *est étoilé par rapport à l'un de ses points, s'il existe* $a \in \mathcal{O}$ *tel que pour tout* $z \in \mathcal{O}$, *le segment* $[a,z]$ *est tout entier contenu dans* $\mathcal{O}$.

Remarque 19.15 *Un ouvert étoilé par rapport à l'un de ses points est connexe.*

Exemple 19.7 $\mathbb{C}^*$ *n'est pas étoilé.*

Exercice 19.48 *Montrer qu'un disque ouvert* $D(z_0, R)$ *est étoilé par rapport à tous ses points.*

Solution 19.48 *Laissée au lecteur.*

Exercice 19.49 *Montrer que l'ouvert* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ *est étoilé par rapport à tous les points de* $\mathbb{R}^{+,*}$.

Solution 19.49 *Laissée au lecteur.*

Théorème 19.23 *Si* $\mathcal{O}$ *est un ouvert étoilé par rapport à l'un de ses points, alors toute fonction holomorphe* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ *admet des primitives sur* $\mathcal{O}$.

Démonstration. Supposons l'ouvert $\mathcal{O}$ étoilé par rapport à $a \in \mathcal{O}$. Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ admet une primitive F sur $\mathcal{O}$, on a alors pour tout $z \in \mathcal{O}$:

$$\int_{[a,z]} f(u)\,du = \int_{[a,z]} F'(u)\,du = F(z) - F(a).$$

On définit donc naturellement la fonction F par :

$$\forall z \in \mathcal{O},\ F(z) = \int_{[a,z]} f(u)\,du = (z-a)\int_0^1 f(a + t(z-a))\,dt.$$

Comme f est holomorphe, elle est indéfiniment différentiable $\mathcal{O}$, vue comme une fonction de deux variables réelles et il en est de même de la fonction F avec :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(z) &= \int_0^1 f(a+t(z-a))\,dt + (z-a)\int_0^1 f'(a+t(z-a))\cdot tdt\\ &= \int_0^1 \left(f(a+t(z-a)) + t\cdot(z-a)\,f'(a+t(z-a))\right)dt\\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(t\cdot f(a+t(z-a))\right)dt\\ &= \left[t\cdot f(a+t(z-a))\right]_{t=0}^{t=1} = f(z)\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(z) &= i\int_0^1 f(a+t(z-a))\,dt + (z-a)\int_0^1 f'(a+t(z-a))\cdot itdt\\ &= i\int_0^1 \left(f(a+t(z-a)) + t\cdot(z-a)\,f'(a+t(z-a))\right)dt\\ &= i\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(t\cdot f(a+t(z-a))\right)dt\\ &= i\left[t\cdot f(a+t(z-a))\right]_{t=0}^{t=1} = if(z)\end{aligned}$$

On a donc $\frac{\partial F}{\partial x}(z) = f(z) = -i\frac{\partial F}{\partial y}(z)$ et F est holomorphe sur $\mathcal{O}$ de dérivée f (conditions de Cauchy-Riemann). ∎

Exemple 19.8 *La fonction* $z \mapsto \frac{1}{z}$ *admet des primitives sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, *une telle primitive est donnée par :*

$$F(z) = \int_{[1,z]} \frac{du}{u}$$

Comme $F(1) = 0 = \ln(1)$, *où* $\ln$ *est la détermination principale du logarithme, on a :*

$$\int_{[1,z]} \frac{du}{u} = \ln(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$$

avec $-\pi < \arg(z) < \pi$ *pour* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Corollaire 19.3 *Si* $\mathcal{O}$ *est un ouvert étoilé par rapport à l'un de ses points, alors toute fonction holomorphe* $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ *et tout lacet chemin* $\gamma : [a,b] \to \mathcal{O}$, *on a* $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Remarque 19.16 *Les ouverts étoilé sont des cas particuliers d'ouverts simplement connexes.*

Exemple 19.9 *On a* $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z}{1+z^2} dz = 0$ *car* $z \mapsto \frac{z}{1+z^2}$ *est holomorphe sur* $D(0,1)$ *et le cercle de centre* 0 *et de rayon* $\frac{1}{2}$ *est contenu dans ce disque.*