Analyse

Isabelle Galagher et Pierre Gervais

September 23, 2016

Contents

Part I
Topologie des espaces vectoriels normés

1 Espaces vectoriels normés : premières définitions

1.1 Distances et normes

Définition 1. Étant donné un ensemble E, une *distance sur* E est une application $d \ : \ E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. d est *définie positive* : $d(x,y) \geqslant 0$ et $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. d est symétrique : $d(x,y) = d(y,x)$
3. d vérifie l'*inégalité triangulaire* : $\forall z \in E,\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Exemple 1.

- $E = \mathbb{R}$ et $d(x,y) = |x-y|$
- $E = \mathbb{R}^2$ et $d\left(\binom{a}{b}, \binom{c}{d}\right) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

Remarque 1. Par l'inégalité triangulaire, on déduit

- $d(x,z) \geqslant d(x,y) - d(y,z)$

- $d(x,z) \geqslant d(z,y) - d(x,y)$

d'où $|d(x,y) - d(z,y)| \leqslant d(x,z)$

Définition 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, une *norme* sur E est une application notée N ou $\|\cdot\|$ telle que

1. $(x,y) \longmapsto \|x-y\|$ est une distance
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in E,\ \|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ (*homogénéité*)

Proposition 1. *Une fonction $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une norme si et seulement si :*

1. *elle est homogène*
2. *elle est définie*
3. *elle vérifie l'inégalité triangulaire*

Preuve 1.

$\Longrightarrow$

Soit $\|\cdot\|$ une norme.

1. ✓
2. $\|x\| = d(x,0)$ où $d(x,y) = \|x-y\|$, donc $\|x\| \geqslant 0$ et $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow d(x,0) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $\|x+y\| = d(x+y,0) = d(x,-y)$, or $\forall x,y,z \in E,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ donc $d(x,-y) \leqslant d(x,0) + d(0,-y)$
D'où $\|x+y\| \leqslant d(x,0) + d(0,-y) \leqslant \|x\| + \|-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

$\Longleftarrow$

Soit $\|\cdot\|$ vérifiant les trois propriétés, alors soit $d(x,y) = \|x-y\|$ et montrons que d est une distance.

1. $d(x,y) \geqslant 0$ car $\|x-y\| \geqslant 0$ par (2). $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \|x-y\| = 0 \Longleftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(x-y)\| = \|y-x\| = d(y,x)$
3. $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leqslant \|x-z\| + \|z-x\| \leqslant d(x,y) + d(z,y)$

□

Exemple 2.

1. Dans $\mathbb{R}^n$, on définit les normes $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$, $\|x\|_p = \sqrt[p]{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$ et $\|x\|_\infty = \max\limits_k \|x_k\|$
2. Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'un produit scalaire, $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$
3. Soit A un ensemble et F une espace vectoriel normé, et $\mathcal{B}(A,F)$ les fonctions bornées de A dans F, alors $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in A} \|f(x)\|$ est une norme.
4. Sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|$, $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2}$ et$\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$

Définition 3. Deux normes N_1 et N_2 sont dites *équivalentes* s'il existe des constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que $\forall x \in E,\ C_1 N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant C_2 N_2(x)$

Exemple 3. Par exemple dans $\mathbb{R}^n$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. En effet

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \leqslant 2\|x\|_\infty$$

et $\|x_i| \geqslant \|x\|_\infty,\ i = 1, 2$

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes ! Cela n'est en revanche pas vraie en dimension infinie.

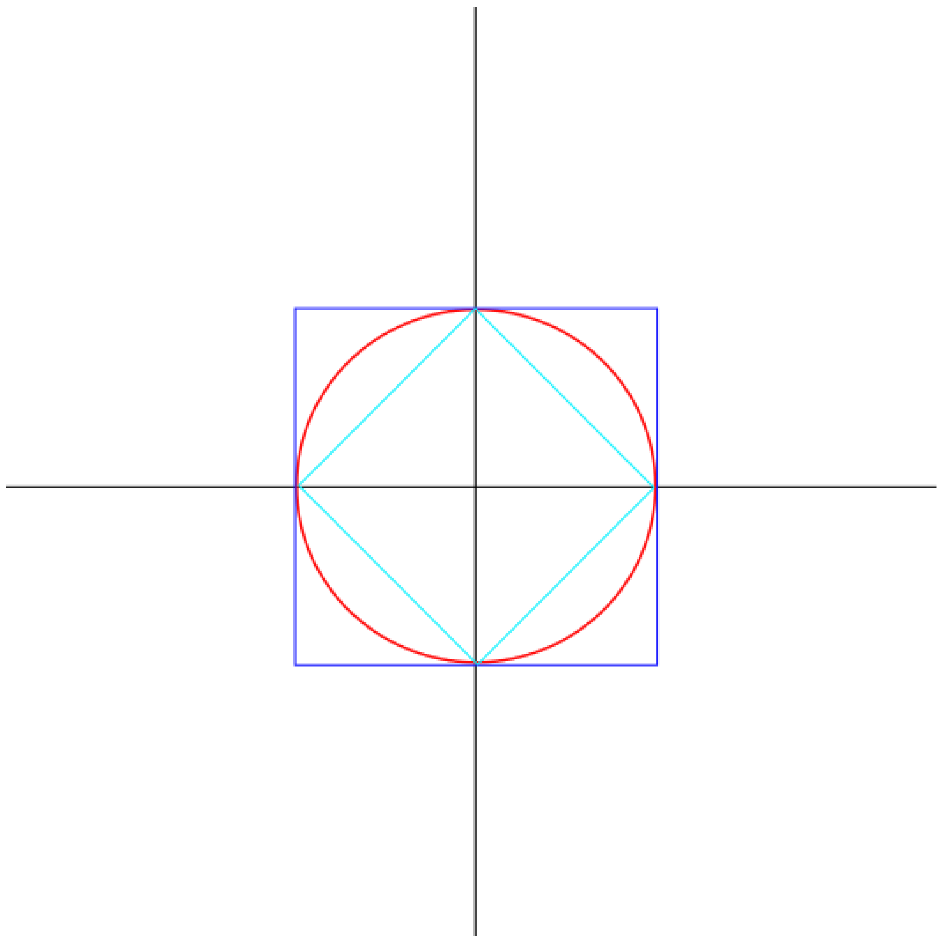

Figure 1: Différentes boules unités
En bleu : $\mathcal{B}_\infty(0,1)$
En rouge : $\mathcal{B}_2(0,1)$
En turquoise : $\mathcal{B}_1(0,1)$

1.2 Ouverts et fermés

Définition 4. Soit E un espace vectoriel normé, on appelle *boule fermée* de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\overline{\mathcal{B}}(x,r) = \{u \in E \mid \|x - u\| \leqslant r\}$, et la *boule ouverte* de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{B}(x,r) = \{u \in E \mid \|x - u\| < r\}$.

Définition 5. Soit $X \subseteq E$

1. On dit que $U \subseteq X$ est un *ouvert* de X si $\forall x \in U,\ \exists r > 0\ :\ \mathcal{B}(x,r) \cap X \subseteq U$
2. On dit que $F \subseteq X$ est un *fermé* de X si son complémentaire dans X est un ouvert de X.

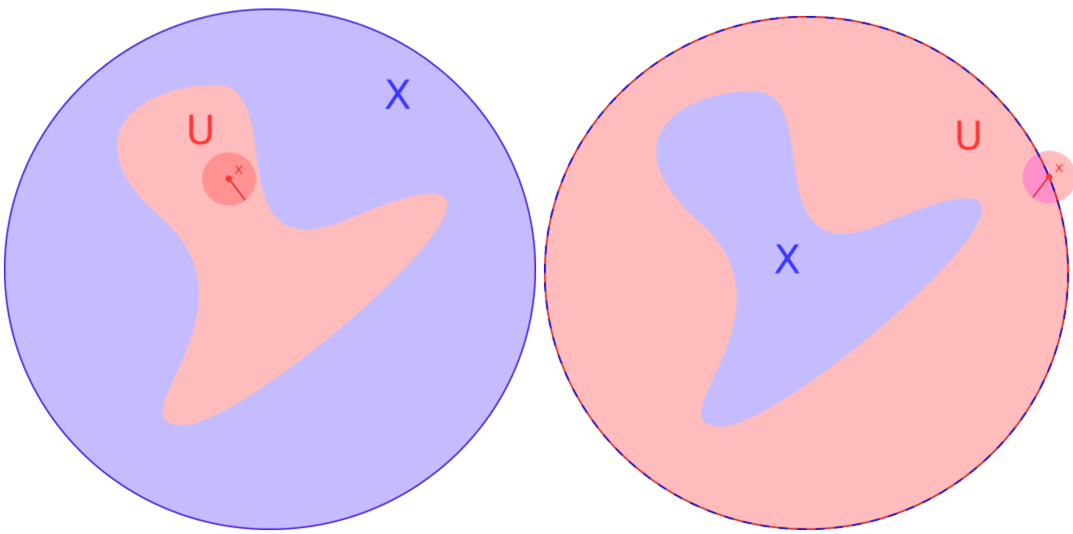

Figure 2: Deux exemples d'ouverts

Remarque 2.

1. Un ouvert dans X n'est pas nécessairement ouvert dans E, comme montré dans le deuxième exemple de la figure ci-dessus.
2. Un ouvert de E sera appelé un **ouvert**, de même pour les fermés.
3. Toute boule ouverte est un ouvert.
4. Toute boule fermée est un fermé.

Preuve 2. On considère une boule ouverte $\mathcal{B}(x_0, r)$, montrons que c'est un ouvert.

Soit $x \in \mathcal{B}(x_0, r)$, alors $\|x - x_0\| < r$. On cherche r' tel que $\mathcal{B}(x, r') \subseteq \mathcal{B}(x_0, r)$ donc r' doit vérifier

$$\|x - y\| < r' \Longrightarrow \|x_0 - y\| < r$$

.

Mais $\|x_0 - y\| \leqslant \|x - y\| + \|x - x_0\| < \|x - y\| + r$.

Soit $\delta = r - \|x - x_0\| > 0$, on pose alors $r' = \frac{\delta}{2} > 0$, alors $\|x_0 - y\| \leqslant r' + \|x - x_0\| \leqslant r' + r - \delta < r$

□

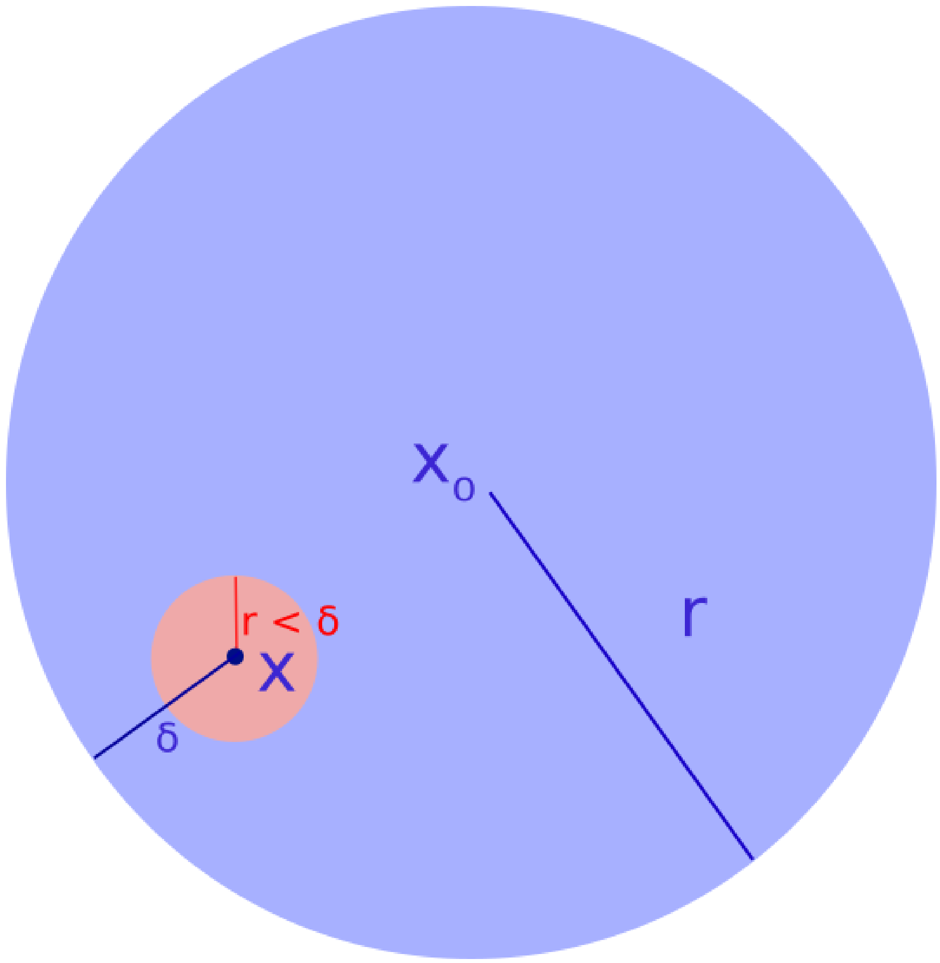

Figure 3: Construction de la boule ouverte

Proposition 2. *L'intersection de deux ouverts est un ouvert et toute réunion d'ouverts est un ouvert.*

Preuve 3. Soient U et U' deux ouverts, montrons que $U \cap U'$ est un ouvert.

Soit $x \in U \cap U'$, il existe $r > 0$ et $r' > 0$ tels que $(B)(x, r) \subseteq U$ et $\mathcal{B}(x, r') \subseteq U'$.
On pose $\widetilde{r} = \min(r, r')$ et on a $\mathcal{B}(x, \widetilde{r}) \subseteq U \cap U'$

□

Preuve 4. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts, montrons que $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert.

Soit $x \in U$, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$, il existe donc r tel que $\mathcal{B}(x, r) \subseteq U_{i_0}$ car U_{i_0} est ouvert, d'où $\mathcal{B}(x, r) \subseteq U$.

□

Proposition 3. *Soit $X \subseteq E$, tout ouvert U de X s'écrit sous la forme $U = X \cap \widetilde{U}$, où $\widetilde{U}$ est un ouvert.*
De même pour tout fermé F de X s'écrit $F = X \cap \widetilde{F}$ où $\widetilde{F}$ est un fermé.

Preuve 5. Soit $\widetilde{U}$ un ouvert de E, alors $\widetilde{U} \cap X$ est un ouvert de X par construction.
Inversement soit U ouvert de X, alors $\forall x \in U,\ \exists r(x) > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r(x)) \cap X \subseteq U$
Soit alors $\widetilde{U} = \bigcup_{x\in U} \mathcal{B}(x, r(x))$, alors $\widetilde{U}$ est un ouvert et $U = X \cap U$ □

Définition 6. Une suite à valeurs dans E est dite *convergente vers* $x \in E$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $\|x_n - x\| < \epsilon$.
Celle-ci est unique et on la note $\lim_n x_n = x$.

On remarquera qu'une suite convergente est bornée.

Preuve 6. Soient x et y deux limites de la suite convergente $(x_n)_n$.
Pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver un rang N à partir duquel $\|x_n - x\| < \epsilon$ et $\|y_n - x\| < \epsilon$, d'où

$$\|x - y\| \leqslant \|x - x_n\| + \|x_n - y\| < 2\epsilon$$

Cette inégalité est vraie pour tout $\epsilon > 0$ donc $x = y$.

□

Remarque 3. On rappelle que dans $\mathbb{R}$, toute suite majorée croissante est convergente.
Soit $A = \{x_n \mid n \geqslant 0\}$, et on note $l = \sup A$.
Soit $\epsilon > 0$, $l - \epsilon$ ne majore pas A donc il existe un rang N à partir duquel $x_n \geqslant l - \epsilon$, mais on a aussi $x_n \leqslant l$ pour tout n, on a ainsi à partir de N l'encadrement $l - \epsilon \leqslant x_n \leqslant l + \epsilon$.
On a de plus que $\lim_n x_n = \sup\{x_n | n \geqslant 0\}$

Remarque 4. Si une suite est convergente pour une norme, alors elle l'est pour toute norme équivalente à celle-ci.
Cela n'est pas vrai en général si les normes ne sont pas équivalentes.
Sur l'ensemble des fonctions continue sur $[0, 1]$ on définit les normes

$$\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)| \text{ et } \|f\| = \int_0^1 |f|$$

On considère la suite de fonction $f_n\ :\ x \longmapsto x^n$, on a

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f_n(x)| = 1$$

mais $\|f_n\| = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$, les normes ne sont pas équivalentes.

Définition 7. On appelle *valeur d'adhérence* de x_n toute limite d'une sous-suite (suite extraite) de (x_n).

Et on appelle *point d'accumulation* d'une suite (x_n) un point x tel que $\forall \epsilon > 0,\ \forall N,\ \exists n > N\ :\ \|x_n - x\| < \epsilon$.

Proposition 4. *Tout point d'accumulation d'une suite convergente (x_n) est une valeur d'adhérence, et réciproquement.*

Preuve 7.

Valeur d'adhérence $\Longrightarrow$ point d'accumulation :

Soit x une valeur d'adhérence de (x_n), il existe une fonction entière strictement croissante ϕ telle que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N\ :\ \forall n > N,\ \|x_{\phi(n)} - x\| < \epsilon$$

donc x est un point d'accumulation. ✓

Point d'accumulation $\Longrightarrow$ valeur d'adhérence :

Réciproquement, soit x un point d'accumulation d'une suite (x_n), on construit par récurrence ϕ telle que x soit la limite de $(x_{\phi(n)})_n$ par

$$\phi(n) = \begin{cases} 0,\ n = 0 \\ \min\{k > \phi(n-1) \mid \|x_k - x\| < 2^{-n}\},\ n > 0 \end{cases}$$

L'application est bien strictement croissante.

Montrons à présent que $y_n = x_{\phi(n)}$ converge vers x :

soit $\epsilon \in]0, 1[$, on cherche N tel que pour tout $n > N,\ \|x_n - x\| < \epsilon$.

Pour $N > \frac{\ln \epsilon}{\ln 2}$ on a

$$\forall n > N,\ \|y_n - x\| < 2^{-n} < \epsilon$$

$(y_n)_n$ est bien une suite convergeant vers x. ✓

Proposition 5. *Soit E un espace vectoriel normé et $F \subseteq E$.*

F est fermé si et seulement si F contient la limite de toutes ses suites convergentes.

Preuve 8.

F fermé $\Longrightarrow$ F contient les limites de ses suites

Soit (x_n) une suite convergente de F de limite x. Montrons que $x \in F$.

Supposons par l'absurde $x \notin F$, alors $x \in (E\backslash F)$ qui est ouvert. Il existe donc $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subseteq (E\backslash F)$, mais il existe un rang à partir duquel $\|x_n - x\| < \frac{r}{2}$, c'est à dire $x_n \in \mathcal{B}(x, r)$, ce qui contredit $\mathcal{B}(x, r) \subseteq (E\backslash F)$. ✓

F contient les limites de ses suites $\Longrightarrow$ F est fermé

On suppose à présent que F contient la limite de toute ses suites convergentes, montrons que F est fermée, donc que $E\backslash F$ est ouvert.

Soit $x \in (E\backslash F)$, montrons qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subseteq (E\backslash F)$.

Supposons que pour tout n, $\mathcal{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \nsubseteq (E\backslash F)$, c'est à dire quil existe $x_n \in F$ tel que $x_n \in \mathbb{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$

On a ainsi construit une suite de F convergente vers $x \in F$, donc par hypothèse $x \in F$, ce qui contredit le fait que x appartienne au complémentaire de F. ✓

$\square$

Définition 8. Soit X une partie d'un espace vectoriel normé E.

- *L'intérieur de* X est le plus grand ouvert inclus dans X noté $\mathring{A}$.
- *L'adhérence de* X est le plus petit fermé contenant X noté $\overline{X}$.

- *La frontière de* X est l'ensemble $\partial X = Fr(X) = \overline{X} \backslash \mathring{X}$

Exemple 4. Si $X =]0,1]$ sur $\mathbb{R}$ alors $\mathring{X} =]0,1[$, $\overline{X} = [0,1]$ et $Fr(X) = \{0,1\}$.

Remarque 5. X est ouvert si est seulement si $\mathring{X} = X$ et X est fermé si et seulement si $\overline{X} = X$.

Exercice 1. Le montrer.

Preuve 9. Intérieur

Soit $\mathring{X}$ l'ensemble des $x \in X$ tels qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x,r) \subseteq X$, alors $\mathring{X}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans X.

En effet, $\mathring{X}$ est ouvert dans X par définiton, donc $\mathring{X} \subseteq$ "réunion des ouverts de X".

Soit U un ouvert de X, montrer que $U \subseteq X$.

Soit $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x,r) \subseteq U$ ar U est ouvert. Donc $x \in \mathring{X}$.

$\mathring{X}$ est donc ouvert, contenu dans X. Il contient tous les ouverts de X, donc c'est le plus grand de X, d'où le résultat. ☐

Proposition 6. *On caractérise l'adhérence d'une partie X comme étant l'ensemble des limites de sous-suites de X.*

Preuve 10. Soit A l'ensemble des limites de suites convergentes à valeurs dans X.

A est un fermé contenant X

Pour tout $x \in X$, x peut être la limite d'une suite à valeur dans X, c'est à dire $x \in A$ et donc $X \subseteq A$.

Cela signifie en particulier que A contient les limites de ses suites : c'est un fermé. ✓

A est le plus petit fermé contenant X

Supposons que A ne soit pas minimal, soit B un fermé vérifiant

$$\begin{cases} X \subseteq B \\ B \subsetneq A \end{cases}$$

Il existe donc $a \in A$ tel que $a \notin B$, c'est à dire la limite d'une suite $(a_n)_n$ à valeurs dans X.

Or B est un fermé, donc il contient la limite de ses suites, dont (a_n), donc $a \in B$: **contradiction**.

A est donc minimal. ✓

A est donc le plus petit fermé contenant X, c'est à dire $A = \overline{X}$

TODO faire la démonstration.

2 Applications continues

Définition 9. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, soient $X \subseteq E$, $Y \subseteq F$ et f une application de X dans Y.

On dit que f est continue en un point $x \in X$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \ (\forall u, \ \|x - u\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(u)\| < \epsilon)$$

Théorème 1. *Une application $f \ : \ X \longrightarrow Y$ est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si pour toute suite (y_n) convergeant vers x_0, la suite $(f(y_n))_n$ converge vers $f(x_0)$.*

Exercice 2. Le démontrer

Théorème 2. *Un application $f : X \longrightarrow Y$ est continue sur X si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de X est une fermé de X.*

Preuve 11. Soit f continue sur X et U un ouvert de Y. Montrer que $f^{-1}(U) = V$ est un ouvert de X.

Soit $x \in f^{-1}(U)$, alors $f(x) \in U$, il existe donc $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(f(x), r) \subseteq U$.

Or il existe $\delta > 0$ tel que pour $\|x - u\| < \delta$, on a $\|f(x) - f(y)\| < \frac{r}{2}$.

Ainsi si $y \in \mathcal{B}\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$ alors $f(y) \in \mathcal{B}(f(x), r) \subseteq U$, donc $y \in f^{-1}(U)$.

$f^{-1}(U)$ est donc un ouvert.

$\square$