

Test n° 7 (durée : 30 mn)

NOM : _____

Questions de cours

Soit (E, d) un espace métrique. Quand dit-on que E est connexe ?

Exercices

- 1) Soient $(X, \| \cdot \|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé, $a \in X$ et $r > 0$. On note $B = \{x \in X \mid \|x - a\| < r\}$.
Démontrer soigneusement que cette boule ouverte B de centre a et de rayon r est connexe par arcs.

2) Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel formé des $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables à dérivée continue.

On sait qu'on obtient une norme $\| \cdot \|_\infty$ sur E en posant : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ pour $f \in E$.

a) Démontrer qu'on définit une norme N sur E en posant :

$$N(f) = |f(0)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| \quad \text{pour } f \in E.$$

b) Montrer que les normes $\| \cdot \|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes.