Université Paris 7 — Paris Diderot
Licence de Mathématiques
Topologie et calcul différentiel

Année 2011-2012
U1TC35/U2TC35

Examen du 4 janvier 2012

I − Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. On note $||\ ||$ la norme de la convergence uniforme.

Pour toute fonction $f \in E$, on note $\widehat{f}$ la fonction définie par :

$$\widehat{f}(x) = \int_0^1 f(t)\cos(xt)dt$$

1) Montrer que pour tout $f \in E$, $\widehat{f}$ est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$.

2) Montrer que la transformation $\Phi : f \mapsto \widehat{f}$ est une application linéaire de E dans E.

3) Soit f une fonction de E. Montrer l'inégalité :

$$||\widehat{f}|| \leq ||f||$$

En déduire que Φ est continue.

4) Déterminer $\widehat{f}$ lorsque f est constante. En déduire la norme de Φ.

II − Soit D le disque unité de $\mathbf{R}^2$ et C le cercle unité :

$$(x,y) \in D \iff x^2+y^2 \leq 1 \qquad\qquad (x,y) \in C \iff x^2+y^2 = 1$$

On note f la fonction définie par : $f(x,y) = \dfrac{1+x^2+y^2}{2+x^4-y^4}$.

1) Montrer que f est une fonction de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ contenant D.

2) Montrer que $f(D)$ est un intervalle fermé $[a,b]$ de $\mathbf{R}$.

3) Soit $z = (x,y)$ un point critique de f. Montrer que y est nul. Montrer que f a exactement trois points critiques 0, z_0 et $-z_0$ et que ces points appartiennent au disque D. Déterminer $f(0)$, $f(z_0)$ et $f(-z_0)$.

4) Montrer que $f(C)$ est l'intervalle $[2/3,2]$. En déduire que $[a,b]$ est l'intervalle $[1/2,2]$.

III − Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé. On notera $||\ ||$ sa norme et d la distance associée. Pour tout point $z \in E$ et toute partie non vide X de E, on note : $d(z,X) = \inf_{x\in X} d(z,x)$ la distance de z à X. Si X et Y sont deux fermés non vides de E on note $Z(X,Y)$ l'ensemble des éléments $z \in E$ vérifiant :

$$d(z,X)/2 \leq d(z,Y) \leq 2d(z,X)$$

1) Montrer que $Z(X,Y)$ est égal à $Z(Y,X)$.

2) Montrer que $Z(X, Y)$ est un fermé de E et que l'on a :

$$X \cap Y = X \cap Z(X, Y) = Y \cap Z(X, Y)$$

3) Soit r un réel. On suppose que X et Y sont contenus dans la boule fermée B de rayon r centrée en 0. Montrer que l'on a, pour tout $z \in E$:

$$||z|| - r \leq d(z, X) \leq ||z|| + r \qquad ||z|| - r \leq d(z, Y) \leq ||z|| + r$$

4) On suppose toujours que X et Y sont contenus dans B. Soit z un vecteur de E avec $||z|| \geq 3r$. Montrer que z appartient à $Z(X, Y)$.

IV – Soit E l'espace $\mathbf{R}^2$ muni de la norme euclidienne. Pour tout (x, y) dans E, on note $B(x, y)$ la boule fermée de rayon $4/3$ centrée en (x, y). On note X l'union des boules $B(1, 1)$, $B(1, -1)$, $B(-1, 1)$ et $B(-1, -1)$ et on note U le complémentaire de X. Soit C le carré fermé $[-1, 1] \times [-1, 1]$ et C' le carré ouvert $]-1, 1[\times]-1, 1[$.

1) Dessiner X. Montrer que X est connexe.

2) Montrer que le complémentaire de C' dans C est contenu dans X. Montrer que $C \cap U$ est un ouvert fermé de U. L'espace U est-il connexe?

V – Soit X un espace métrique. Soient Y et Z deux fermés de X. On suppose que X est l'union de Y et Z. Soit E un espace métrique. Soient g une fonction de Y dans E et h une fonction de Z dans E. On suppose que g et h sont continues et coïncident sur $Y \cap Z$.

1) Montrer qu'il existe une unique fonction f de X dans E qui coïncide avec g sur Y et avec h sur Z.

2) Soit F un fermé de E. Montrer que $f^{-1}(F)$ est fermé. En déduire que f est continue.

VI – Soit E l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels. Soit f la fonction de E dans $\mathbf{R}$ qui à une matrice de E associe son déterminant.

1) Montrer que f est une fonction de classe C^∞. Déterminer les points critiques de f.

2) Pour chaque point critique de f déterminer sa signature.

VII – Soit f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par : $f(x) = \mathrm{Log}\,(2 + x^2)$, Log désignant le logarithme népérien. Montrer que f a un unique point fixe.

VIII – Soit f la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par : $f(x, y) = (x + e^y, y - e^x)$.

1) Soient $z = (x, y)$ et $z_1 = (x_1, y_1)$ deux points de $\mathbf{R}^2$ vérifiant : $x \leq x_1$ et $f(z) = f(z_1)$. Déterminer le signe de $y - y_1$. En déduire que f est injective.

2) Soit (u, v) un point de $\mathbf{R}^2$. Montrer qu'il existe un point z de $\mathbf{R}^2$ tel que $f(z) = (u, v)$.

3) Montrer que f est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.

IX – Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant : $|f(x)| \leq 1$ pour tout réel x. Montrer que f possède un point fixe.
Indication : On pourra considérer la fonction $x \mapsto x - f(x)$.