CONTRÔLE CONTINU

DURÉE: 3 HEURES

Modalités sur le déroulement de l'épreuve :

— l'utilisation de documents sur quelque support que ce soit (papier, auditif, électronique *etc.*) est interdite.
— L'utilisation des téléphones portables est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints, rangés dans les sacs et les sacs doivent être rangés à l'avant de la salle.
— Toutes les réponses doivent être justifiées sauf lorsque le contraire est précisé.
— La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation en particulier concernant l'orthographe, la syntaxe grammaticale, l'utilisation (indue) de signes d'implication à la place de conjonctions de coordination, l'introduction des notations utilisées.
— La qualité et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.
— Il n'est pas nécessaire de recopier l'énoncé (le recopier n'apporte pas de point) ni d'introduire les notations qui l'ont déjà été dans l'énoncé.
— Les portions de l'énoncé en *itallique* sont des indications. Il n'est pas obligatoire de les suivre.
— Pendant l'épreuve les surveillants ne répondront à aucune question portant sur l'énoncé.

Le résultat vu en td sur le calcul de l'ordre d'une permutation peut être utilisé sans aucune justification.

Les exercices proposés sont indépendants. Dans chaque exercice on peut utiliser le résultat de chaque question (même si elle n'a pas été traitée) dans les questions suivantes.

Date: Jeudi 13 novembre 2014.

Exercice 1 - Questions de cours (aucune justification n'est demandée)

(1) Qu'est-ce qu'un groupe ? Soit $(G, \times)$ un groupe.

(2) Qu'est-ce qu'un sous-groupe de G ?

(3) Soit $A \subseteq G$. Qu'est-ce que le sous-groupe de G engendré par A ?

(4) Qu'est-ce qu'un homomorphisme de groupes ?

(5) Donner un exemple où G est abélien et contient $a, b \in G$ d'ordre 4 tels que ab soit d'ordre 1 (resp. 2, resp. 4).

Exercice 2 - Soit σ la permutation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 12 & 6 & 5 & 1 & 11 & 10 & 3 & 7 & 9 & 8 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathscr{S}_{12}$.

(1) Quelle est la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints ?

(2) Quelle est la signature de σ ?

(3) Quel est l'ordre de σ ?

(4) Est-ce que $\sigma \in \mathscr{A}_{12}$?

(5) Donner un exemple de permutation β telle que $\beta^2 = (13579)(268)$.

Exercice 3 - Soit $(G, \times)$ un groupe. Soit H un sous-groupe de G.

(1) Soit $g \in G$. Démontrer qu'il existe une application bien définie de G/H dans G/H telle que, pour tout $x \in G$, l'image de xH soit gxH. On la note φ_g.

(2) Démontrer que l'application de $G \times G/H$ dans G/H définie par $(g, \omega) \mapsto \varphi_g(\omega)$ est une opération de groupe à gauche.

(3) Cette action est-elle transitive ?

(4) Soit $x \in G$. Démontrer que $\mathrm{Stab}_G(xH) = xHx^{-1}$.

Exercice 4 - Soit $(G, \times)$ un groupe. Soit un entier $n \geqslant 2$. Démontrer que si G admet une partie génératrice à n éléments et n'admet aucune partie génératrice à $n-1$ éléments, alors $\mathrm{Card}(G) \geqslant 2^n$ (*si* $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ *on peut considérer le sous-groupe* $H = \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$ *et procéder par récurrence*).

Exercice 5 - Soient Soit φ un homomorphisme d'un groupe $(G, \times)$ dans un groupe $(H, \times)$. Soit K un sous-groupe de G. Démontrer que $\varphi(K) = \mathrm{Im}(\varphi)$ si et seulement si $G = \langle \mathrm{Ker}(\varphi) \cup K \rangle$.

Exercice 6 - Soit $(G, \times)$ un groupe d'ordre 6. On le suppose non commutatif.

(1) Soit $g \in G$. Justifier que l'ordre de g est 1, 2 ou 3.

(2) Démontrer qu'il existe $g \in G$ tel que $g^2 \neq e$ (*raisonner par l'absurde*). Pour la suite on fixe un élément de G d'ordre 3, on le note ρ.

(3) Combien y-a-t-il d'éléments d'ordre 3 dans $\langle \rho \rangle$? En déduire que le nombre d'éléments de G d'ordre 3 est pair.

(4) On note X l'ensemble des éléments de G d'ordre 2. Démontrer que $X \neq \emptyset$.

(5) Démontrer que $\mathrm{Card}(X) \geqslant 2$ (*raisonner par l'absurde et démontrer que si* $X = \{\tau\}$ *alors* $\rho\tau$ *est d'ordre* 6). En déduire $\mathrm{Card}(X)$.

(6) Justifier brièvement que l'action de G sur lui-même par conjugaison définit une action de G sur X. On note φ l'homomorphisme de groupes de G dans $\mathscr{S}_X$ associé à cette action.

(7) Soient $g \in G, x \in X$. Préciser $\varphi(g)(x)$ (*aucune justification n'est demandée*).

(8) Soit $\tau \in X$. Déterminer $\mathrm{Stab}_G(\tau)$.

(9) En déduire que φ est injectif (*relier d'abord* $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *à la question précédente*).

(10) En déduire que $G \simeq \mathscr{S}_3$.