EXAMEN TERMINAL

DURÉE: 3 HEURES

Modalités sur le déroulement de l'épreuve :

— l'utilisation de documents sur quelque support que ce soit (papier, auditif, électronique *etc.*) est interdite.

— L'utilisation des téléphones portables est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints, rangés dans les sacs et les sacs doivent être rangés à l'avant de la salle.

— Toutes les réponses doivent être justifiées sauf lorsque le contraire est précisé.

— La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation en particulier concernant l'orthographe, la syntaxe grammaticale, l'utilisation (indue) de signes d'implication à la place de conjonctions de coordination, l'introduction des notations utilisées.

— La qualité et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

— Il n'est pas nécessaire de recopier l'énoncé (le recopier n'apporte pas de point) ni d'introduire les notations qui l'ont déjà été dans l'énoncé.

— Les portions de l'énoncé en *itallique* sont des indications. Il n'est pas obligatoire de les suivre.

— **Pendant l'épreuve les surveillants ne répondront à aucune question portant sur l'énoncé.**

Les exercices proposés sont indépendants.

Dans chaque exercice on peut utiliser le résultat de chaque question (même si elle n'a pas été traitée) dans les questions suivantes.

Date: Mardi 13 janvier 2015.

Pour les exercices relatifs aux groupes, on fixe un groupe $(G, \times)$ et un sous-groupe H de G.

Exercice 1 - Questions de cours (aucune justification n'est demandée)

(1) Que signifie «H est distingué dans G» ?

(2) On suppose que $H \lhd G$. Décrire la structure de groupe de G/H.

(3) On suppose que $H \lhd G$. Soit un groupe $(K, \times)$. Énoncer le théorème de passage au quotient par H des homomorphismes de groupes de G dans K.

Exercice 2 - Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3. Soit un repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

(1) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) où A, B et C sont les points de coordonnées cartésiennes respectives $(1,1,1)$, $(2,3,1)$, et $(-1,2,4)$.

(2) Déterminer des équations cartésiennes de la droite affine (AD) où D est le point de coordonnées cartésiennes $(2,2,2)$.

(3) Déterminer une expression analytique de la projection affine de $\mathcal{E}$ sur le plan (ABC) parallélement à la droite (AD).

Exercice 3 - Soit V un espace vectoriel de dimension finie. On munit V de sa structure naturelle d'espace affine. Soit $\varphi\colon V \to \Bbbk$ une application linéaire non nulle. On pose $\mathcal{E} = \{v \in V \mid \varphi(v) = 1\}$

(1) Démontrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de V. Préciser sa direction.

(2) Soit W un sous-espace vectoriel de V tel que $W \not\subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$. Démontrer que $W \cap \mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Quelle est sa direction ?

(3) Démontrer que pour tout sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ il existe un et un seul sous-espace vectoriel W de V tel que $W \not\subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $W \cap \mathcal{E} = \mathcal{F}$. *Dans la suite on dira que W est le vectorialisé de $\mathcal{F}$ dans V.*

(4) Quel est le vectorialisé de $\mathcal{E}$?

(5) Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ non vide. Démontrer que le vectorialisé de $\langle \mathcal{A} \rangle$ est $\mathrm{Vect}(\mathcal{A})$.

Soit V' un autre espace vectoriel. Soit $\varphi'\colon V' \to \Bbbk$ une application linéaire non nulle. On note $\mathcal{E}'$ le sous-espace affine $\{v' \in V' \mid \varphi'(v') = 1\}$ de V'.

(6) Soit $L\colon V \to V'$ une application linéaire telle que $\varphi' \circ F = \varphi$. Justifier que $F(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}'$ et démontrer que l'application induite par F de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ est affine.

(7) Soit une application affine $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire $F\colon V \to V'$ telle que $\varphi' \circ F = \varphi$ et induisant f (au sens de la question précédente). *On pourra exprimer F à l'aide de $\overrightarrow{f}$ et d'un point $\Omega \in \mathcal{E}$ introduit à l'avance.*

Exercice 4 - On suppose que G est fini. Soit $g \in G$ d'ordre noté d.

(1) Soit $t \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'ordre de g^t est $\frac{d}{\mathrm{pgcd}(t,d)}$.

(2) On suppose que $H \lhd G$. On note $\pi\colon G \to G/H$ la surjection canonique. Démontrer que, si $\mathrm{pgcd}(d, \mathrm{Card}(H)) = 1$, alors $\pi(g)$ est d'ordre d.

Exercice 5 - Soit un entier naturel $n \geqslant 1$. On considère l'action de $\mathscr{S}_n$ sur lui-même par conjugaison, notée $(g, x) \mapsto {}^g x$. Deux permutations d'une même orbite seront dites *conjuguées.*

(1) Soient $g, x \in \mathscr{S}_n$. Rappeler l'expression de ${}^g x$.

(2) Démontrer que deux permutations de $\mathscr{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si, pour chaque entier $\ell \geqslant 2$, elles ont le même nombre de ℓ-cycles dans leur décomposition en produit de cycles à supports disjoints.

(4) Déterminer les orbites de $\mathscr{S}_4$.

(5) Soit $\sigma \in \mathscr{S}_4$. Déterminer $\mathrm{Card}(\mathrm{Stab}_{\mathscr{S}_4}(\sigma))$ en fonction de l'orbite de σ.

(6) Soit σ la permutation suivante de $\mathscr{S}_7$: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Déterminer la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

(7) Déterminer le stabilisateur dans la question précédente.

Exercice 6 - On suppose que G est fini. Soit p le plus petit entier premier divisant $\mathrm{Card}(G)$. On suppose que $\mathrm{Card}(G/H) = p$.

(1) Démontrer qu'il existe une action de groupe de G sur G/H, notée $\varphi\colon G \times G/H \to G/H$, telle que, pour tous, $g, x \in G$, on ait $\varphi(g, xH) = gxH$.

On note $\theta\colon G \to \mathscr{S}_{G/H}$ l'homomorphisme de groupes associé à cette action.

(2) Soit $x \in H$. Déterminer le stabilisateur de xH pour cette action.

(3) En déduire une expression de $\mathrm{Ker}(\theta)$.

(4) Démontrer que $\theta(H)$ est contenu dans un sous-groupe de $\mathscr{S}_{G/H}$ isomorphe à $\mathscr{S}_{p-1}$.

(5) En déduire que $H \lhd G$.