INTERROGATION N. 10

NOM :
PRÉNOM :

Démontrer que le groupe quotient $\mathbb{Z}^2/\{(4z, 6z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

On pose $H = \{(4z, 6z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Si $x \in \mathbb{Z}$ (resp. $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$) on note $x \bmod 2\mathbb{Z}$ (resp. $(a,b) \bmod H$) son image par la surjection canonique $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2/H$).

Le noyau de l'homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}^2/H \\ x &\longmapsto x.(2,3) \bmod H \end{aligned}$$

contient $2\mathbb{Z}$ vu que $2.(2,3) = (4,6) \in H$. Par passage au quotient il induit un homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}^2/H \\ x \bmod 2\mathbb{Z} &\longmapsto x.(2,3) \bmod H. \end{aligned}$$

Cet homomorphisme ainsi que l'homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}^2/H \\ y &\longmapsto y.(1,1) \bmod H \end{aligned}$$

définissent un homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}^2/H \\ (x \bmod 2\mathbb{Z}, y) &\longmapsto x.(2,3) + y.(1,1) \bmod H. \end{aligned}$$

Date: Mardi 15 décembre 2015.

On démontre que Φ est un isomorphisme.

. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. En remarquant que

$(2,3) - (1,1) = (0,1)$ et $3.(1,1) - (2,3) = (1,0)$

on déduit que $(a,b) = (3a-2b).(1,1) + (b-a).(2,3)$.

Donc $\Phi(b-a \bmod 2\mathbb{Z},\ 3a-2b) = (a,b) \bmod H$.

Donc Φ est surjective.

. Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$:

$$
\begin{aligned}
(x \bmod 2\mathbb{Z}, y) \in \operatorname{Ker}\Phi &\iff x(2,3) + y(1,1) \in H \\
&\iff (\exists z \in \mathbb{Z}) \begin{cases} 2x+y = 4z & L_1 \\ 3x+y = 6z & L_2 \end{cases} \\
&\iff (\exists z \in \mathbb{Z}) \begin{cases} 2x+y = 4z & L_1 \\ x = 2z & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases} \\
&\iff (\exists z \in \mathbb{Z}) \begin{cases} y = 0 \\ x = 2z \end{cases} \\
&\iff (x \bmod 2\mathbb{Z}, y) = (0,0) \text{ dans } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Donc Φ est injective.

Ainsi Φ est un homomorphisme de groupes. Et il est bijectif.

Donc Φ est un isomorphisme.

Ainsi $\mathbb{Z}^2/H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.