Exercice 1

a) On cherche une approximation de π comme zéro de la fonction $f(x) = \cos(x/2)$. Écrire l'algorithme de Newton correspondant. Quel est son ordre ?

b) Mêmes questions pour $f(x) = \operatorname{cotan}(x/2)$.

Exercice 2 (Méthodes de Newton et Steffensen)

Soit (x_n) une suite itérée associée à une fonction $f \in \mathcal{C}^2(I)$, où I est un intervalle fermé voisinage de la racine a de l'équation $f(x) = 0$. On suppose que $f'(a) \neq 0$.

a) Montrer que l'ordre de convergence de la méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n + h_n, \quad h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

est 2.

b) Montrer que la méthode de Steffensen

$$x_{n+1} = x_n + h_n, \quad h_n = -\frac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$$

converge également à l'ordre 2. Quel est l'avantage de cette méthode par rapport à celle de Newton ?

Exercice 3

Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f(x) = \dfrac{2}{x+1} - 2^x$ aux points 0, 1 et 2.

Exercice 4 (différences divisées)

Soient $(x_i)_{i\in\{0,\ldots,k\}}$ $k+1$ réels distincts 2 à 2 et $(y_i)_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ $n+1$ réels distincts 2 à 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

a) On définit g par $g(x) = f[x_0, \ldots, x_k, x]$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$g[y_0, \ldots, y_n] = f[x_0, \ldots, x_k, y_0, \ldots, y_n].$$

b) On considère $n+1$ suites $(x_0^k)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que, $\forall i \leq n$, $\lim_{k\to\infty} x_i^k = y_i$ et pour k donné, les x_i^k sont distincts 2 à 2. Montrer que

$$\lim_{k\to\infty} f[x_0^k, \ldots, x_n^k] = f[y_0, \ldots, y_n]$$