Examen du 28 juin 2013

Durée : 3 heures.
Documents, calculettes et micro-ordinateurs sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints.
Barème : 2, 4, 4, 4, 3, 5.
Ce sujet comporte une question de cours et 5 exercices indépendants.

1) **Question de cours :** Qu'appelle-t-on une *norme* sur un espace vectoriel E ?

2) On considère la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & a \end{pmatrix},$$

où a est un paramètre réel.

a) Expliciter la forme bilinéaire symétrique φ et la forme quadratique q représentées par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) En appliquant à q l'algorithme de Gauss, déterminer sa signature (on discutera suivant la valeur de a).

c) On suppose désormais $a = 5$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ qui soit à la fois orthogonale relativement à q et orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice qui représente q dans cette base.

3) L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné, dans la base canonique, par la matrice

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que f est une rotation.

b) Déterminer un vecteur v_1, de norme 1, tel que $f(v_1) = v_1$.

c) Montrer qu'il existe des vecteurs v_2 et v_3 tels que (v_1, v_2, v_3) soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et que, dans cette base, la matrice de f soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix},$$

où les réels a, b vérifient $a^2 + b^2 = 1$. On demande de calculer a, mais il n'est pas nécessaire d'expliciter les vecteurs v_2 et v_3.

4) On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(x) = \frac{1}{n^{3/2}} \arctan(\sqrt{n}\, x)\,.$$

a) Rappeler brièvement les propriétés de la fonction arctan (dérivée, tableau de variation).

b) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On posera désormais

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,.$$

c) Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

d) Soit $a > 0$ et soit $U_a =]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$. Montrer que f est dérivable sur U_a.

e) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

5) a) L'entier $p \in \mathbb{N}$ étant donné, calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^p x^n$. *On notera que ce rayon de convergence ne dépend pas de p. En conséquence on le notera R. On pose $f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^p x^n$, pour tout $x \in]-R, R[$.*

b) Exprimer $f_p'(x)$ comme somme d'une série entière. En déduire une relation simple entre les fonctions f_p et f_{p+1}.

c) Calculer les fonctions f_0, f_1 et f_2.

6) a) Établir l'inégalité

$$\forall t \geq 0 \quad |\sin t| \leq t$$

Indication : on pourra utiliser le théorème des accroissements finis.

b) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, la fonction

$$t \mapsto \mathrm{e}^{-xt} \frac{\sin t}{t}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On posera

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t\,.$$

Le but de l'exercice est de calculer $F(x)$ et de déterminer les limites de F en 0 et en $+\infty$.

c) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

d) Le réel x étant fixé, calculer une primitive de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt} \sin t$ sur $\mathbb{R}$.

e) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0 \quad F'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}\,.$$

Indication : on utilisera la question précédente.

f) Conclure.