Feuille de TD 1 MT 252 – Année 2004-2005

Espace euclidien

Exercice 1 – Parallélogramme. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

a) Montrer que

$$\forall\, x, y \in \mathrm{E}, \qquad \|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\,(\,\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{1}$$

b) Montrer que l'égalité (**1**) s'interprète géométriquement par *la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses côtés.*

c) Traduire sous la forme d'une égalité ressemblant à celle de (**1**), la phrase *deux côtés adjacents d'un parallélogramme sont de même longueur si et seulement si les diagonales sont orthogonales.* Démontrer cette égalité.

d) Traduire sous la forme d'une égalité ressemblant à celle de (**1**), la phrase *deux côtés adjacents d'un parallélogramme sont orthogonaux si et seulement si les diagonales sont de même longueur.* Démontrer cette égalité.

Exercice 2 – Géométrie du collège.

a) Rappeler la définition de la médiatrice d'un segment [AB] et démontrer qu'elle est formée des points situés à égale distance de A et B. Généraliser à un espace de dimension n.

b) Montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 3 – Produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. Soit k un nombre réel. On définit l'application

$$\mathrm{B}_k : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \longmapsto x_1y_1 + x_2y_2 + k(x_1y_2 + x_2y_1)\,. \end{cases}$$

a) Montrer que B_k est une forme bilinéaire symétrique.

b) Pour $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ et $k = 1/2$, B_k est-il un produit scalaire ?

c) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles B_k est un produit scalaire.

Exercice 4 – Produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. Parmi les applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, lesquelles sont des formes bilinéaires, des formes bilinéaires symétriques, des produits scalaires ?

a) $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \longmapsto 4x_1y_1 + 9x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + y_1x_3 + 2x_1y_3 + 2(x_2y_3 + x_3y_2)$.

b) $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \longmapsto 3x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_3 + y_3 + 5$.

c) $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \longmapsto x_1y_1 + 13x_2y_2 + 6x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - y_1x_3 - x_1y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$.

d) $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \longmapsto 2x_1y_1 + 5x_2y_2 + 5x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - 3y_1x_3 - 3x_1y_3$.

e) $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \longmapsto x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$.

Exercice 5 – Produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. Soit a un nombre réel. On définit l'application

$$\mathrm{B}_a : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) \longmapsto \begin{array}{l} x_1y_1 + (a+5)x_2y_2 + (a^2+a+2)x_3y_3 \\ + (x_1y_3 + x_3y_1) + 2(x_1y_2 + x_2y_1) + (a+3)(x_2y_3 + x_3y_2)\,. \end{array} \end{cases}$$

a) Montrer que B_a est une forme bilinéaire symétrique.

b) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles B_a est un produit scalaire.

Exercice 6 – Produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ (Partiel Avril 2004). Soit a un nombre réel. On définit l'application

$$\mathrm{B}_a : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) \longmapsto x_1y_1 + x_2y_2 + (a+12)x_3y_3 - 3\,(x_1y_3 + x_3y_1) + 2(x_2y_3 + x_3y_2)\,. \end{cases}$$

a) Montrer que B_a est une forme bilinéaire symétrique.

b) Donner *séparément* la définition des mots « bilinéaire » et « symétrique » de la question a.

c) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles B_a est un produit scalaire.

Exercice 7 – Produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. Soit a un nombre réel. On définit l'application

$$\mathrm{B}_a\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) & \longmapsto a(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+x_1y_3+x_3y_1+x_2y_3+x_3y_2+x_1y_2+x_2y_1\,. \end{cases}$$

a) Montrer que B_a est une forme bilinéaire symétrique.

b) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles B_a est un produit scalaire.

Exercice 8 – Produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. Soit a un nombre réel. On définit l'application

$$\mathrm{B}_a\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) & \longmapsto a(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)-x_1y_3-x_3y_1+x_2y_3+x_3y_2+x_1y_2+x_2y_1\,. \end{cases}$$

a) Montrer que B_a est une forme bilinéaire symétrique.

b) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles B_a est un produit scalaire.

Exercice 9 – Produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ (Partiel avril 2005). On définit l'application

$$\mathrm{B}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) & \longmapsto (x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)+(x_2+x_3)(y_2+y_3)+x_3y_3\,. \end{cases}$$

a) Montrer que B est un produit scalaire.

b) On fait de $\mathbb{R}^3$ un espace euclidien en le munissant de ce produit scalaire. À partir de la base canonique, construire une base orthonormée par le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 10 – Produit scalaire et polynômes. Soient $\mathrm{E}=\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels et $a_0,\ldots,a_n$ des nombres réels distincts. Montrer que l'application

$$(\mathrm{P},\mathrm{Q})\longmapsto\langle\mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{P}(a_i)\mathrm{Q}(a_i)$$

définit un produit scalaire sur E.

Exercice 11 – Produit scalaire et polynômes (Partiel Avril 2004). Soient $\mathrm{E}=\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels et F le sous-espace vectoriel des applications affines (*i.e.* de la forme $\mathrm{P}(x)=ax+b$ ou encore $\mathrm{F}=\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$).

a) Montrer que l'application

$$(\mathrm{P},\mathrm{Q})\longmapsto\langle\mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle=\mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0)+\mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1)+\mathrm{P}(2)\mathrm{Q}(2)$$

définit un produit scalaire sur E.

b) Transformer la base canonique $(1,x)$ de F en une base orthonormée.

c) Déterminer $p(\mathrm{R})$ où p est le projecteur orthogonal de E sur F et R le polynôme $\mathrm{R}(x)=3x^2-5x$, puis l'angle entre les vecteurs R et $p(\mathrm{R})$.

d) Déterminer la matrice de p dans la base $(1,x,x^2)$. Retrouver le calcul de la question précédente.

e) Calculer les réels a et b tels que $(\mathrm{R}-(ax+b))^2(0)+(\mathrm{R}-(ax+b))^2(1)+(\mathrm{R}-(ax+b))^2(2)$ est minimal.

Exercice 12 – Produit scalaire et polynômes (Examen Juin 2004). Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 1. On définit l'application

$$(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in\mathrm{E}^2\longmapsto\langle\mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle=\int_0^1\frac{\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace euclidien.

b) Déterminer, grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt, une base orthonormée de l'espace E à partir de sa base canonique.

Exercice 13 – Produit scalaire et polynômes. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2. On définit l'application

$$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2 \longmapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_0^1 x^2 \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)\mathrm{d}x.$$

Soit F le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1.

a) Montrer que $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace euclidien.

b) Construire une base orthonormée de F.

c) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que l'intégrale

$$\int_{-1}^1 x^2(x^2+x+1-ax-b)^2\mathrm{d}x\,.$$

soit minimale.

Exercice 14 – Produit scalaire et polynômes (Partiel Avril 2005). Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par :

$$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2 \longmapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_0^1 \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)\mathrm{d}x.$$

Soit F le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1 et p le projecteur orthogonal sur F.

a) Déterminer une base orthonormée de F.

b) Soit le polynôme $\mathrm{R}(x) = x^2$. Justifier le fait que l'intégrale

$$\int_0^1 (ax+b-x^2)^2\mathrm{d}x$$

est minimale lorsque $ax+b$ est le polynôme $p(\mathrm{R})$. Calculer $p(\mathrm{R})$.

c) Sans aucun calcul supplémentaire, écrire la matrice A de p dans la base $(1, x, x^2)$ de E. La matrice A est-elle symétrique ?

d) L'endomorphisme p est-il symétrique ? Peut-on le diagonaliser en base orthonormée ?

e) Montrer sans calcul que si $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ est une base orthogonale de F alors $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{R}-p(\mathrm{R}))$ est une base orthogonale de E.

f) À l'aide des questions **a** et **e**, déterminer une base orthogonale $\mathscr{B}$ de E. Écrire la matrice de passage P de la base $(1, x, x^2)$ à la base $\mathscr{B}$. La matrice P est-elle orthogonale ?

Exercice 15 – Produit scalaire et polynômes. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 1. On définit l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ par :

$$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2 \longmapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_0^1 (ax^2+bx+c)\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)\mathrm{d}x.$$

a) Déterminer l'ensemble des valeurs a, b, c telles que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ soit un produit scalaire sur E.

b) Déterminer une base orthonormale de E lorsque $a = c = 1$ et $b = 0$.

Exercice 16 – Géométrie dans $\mathbb{R}^3$. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 0, 2)$ et $v_2 = (4, -1, 0)$. On note p le projecteur orthogonal sur F. On pose $u = (1, 0, -3)$.

a) Déterminer une base orthonormée de F et de $\mathrm{F}^\perp$.

b) Déterminer $p(u)$ puis l'angle entre u et $p(u)$.

c) Montrer que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, u)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 17 – Géométrie dans $\mathbb{R}^3$) (Partiel MT 232 Avril 2005). On munit $\mathbb{R}^3$ de la structure euclidienne usuelle. On pose

$$u_1 = (1, 2, 2), \qquad u_2 = (1, 3, 1) \qquad \text{et} \qquad u_3 = (0, 12, 6)\,.$$

On note p le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}u_1$.

a) Montrer que les vecteurs (u_1, u_2, u_3) forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

b) En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, orthonormaliser la base (u_1, u_2, u_3) en une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

c) Déterminer la matrice de p dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

d) Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

e) Quel est le rang de p ?

Exercice 18 – Géométrie dans $\mathbb{R}^3$. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (1, -1, 2)$.

a) Déterminer une équation de F.

b) Déterminer une base orthonormée de F et de $F^\perp$.

c) Calculer la projection orthogonale de $(1, 1, 1)$ sur F.

d) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

e) Déterminer une matrice orthogonale donc la première colonne est

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Exercice 19 – Géométrie dans $\mathbb{R}^3$. Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + 2z = 0$.

a) Déterminer une base orthonormée de P et de $P^\perp$.

b) Déterminer la matrice dans la base canonique de p la projection orthogonale sur P.

Exercice 20 – Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^4$. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, 2, -1, -2), \quad v_2 = (2, 3, 0, -1), \quad v_3 = (5, -2, -5, -2), \quad v_4 = (8, 10, -10, 4).$$

Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à cette famille. En déduire que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ et que la famille construite est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 21 – Distance. Soit $v = (x_0, y_0, z_0)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ et H le plan vectoriel d'équation $ax + by + cz = 0$ (avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$). Calculer la distance de v à H, c'est-à-dire la distance minimal de v à un vecteur de H. Généraliser la formule à la dimension n : calculer la distance de $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ à l'hyperplan H d'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$.

Exercice 22 – Distance minimale. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2 - 3x + 1 - (ax + b)\right)^2 \mathrm{d}x$$

soit minimal.

Exercice 23 – Réduction (Partiel Avril 2004). Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Justifier *sans aucun calcul* l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice orthogonale P telles que

$$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PD}\,{}^t\mathrm{P}.$$

b) Calculer un tel couple de matrices (D, P).

Exercice 24 – Réduction. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On désigne par $f_{a,b}$ l'endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ ayant pour matrice dans la base canonique :

$$\mathrm{M}_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix}.$$

a) Montrer, sans calcul, l'existence d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle tous les endomorphismes $f_{a,b}$ se diagonalisent.

b) Calculer une telle base. Quels sont les valeurs propres de $f_{a,b}$?

Exercice 25 – Matrice orthogonale (Examen Septembre 2004). Soient a, b, c, d des nombres réels. On considère la matrice

$$\mathrm{M}(a, b, c, d) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ d & a & d \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

a) Écrire les équations exprimant que $\mathrm{M}(a, b, c, d)$ est orthogonale.

b) En déduire l'ensemble des quadruplets (a, b, c, d) tels que la matrice $\mathrm{M}(a, b, c, d)$ est orthogonale.