Université Paris Diderot - Paris 7 — Licence S5

Topologie et Calcul Différentiel – 31GU01MM — 2014-2015

Partiel *(7 novembre 2014)*

Apportez un soin particulier à la rédaction. Les exercices sont indépendants.

Question de cours (6 pts). — Définir les termes suivants.

(1) Un espace métrique.

(2) Une suite de Cauchy, et un espace métrique complet.

(3) Un espace métrique compact (donner trois définitions équivalentes).

(4) Une fonction lipschitzienne (définie sur un espace métrique, à valeurs réelles). Nier cette définition (c'est-à-dire définir ce que signifie «ne pas être lipschitzienne»).

Exercice 1 (5 pts). — On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{|x|}$.

(1) Montrer que pour tous réels $a \geqslant 0$ et $h \geqslant 0$ on a $\sqrt{a+h} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{h}$.

(2) En déduire que $\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \leqslant \sqrt{|x-y|}$ quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$.

(3) En déduire que f est uniformément continue.

(4) Montrer que f n'est pas lipschitzienne.

Exercice 2 (5 pts). — On considère l'ensemble $]0,1] = \mathbb{R} \cap \{x : 0 < x \leqslant 1\}$ et l'on note $d_{|\cdot|}$ la distance usuelle, c'est-à-dire $d_{|\cdot|}(x,y) = |x-y|$ pour $x, y \in]0,1]$. On définit également

$$d(x,y) := \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|,$$

$x, y \in]0,1]$.

(1) Montrer que d est une distance sur $]0,1]$.

(2) Montrer que pour tout $0 < a < 1$ les distances $d_{|\cdot|}$ et d sont équivalentes sur $[a,1]$, c'est-à-dire que l'identité $([a,1], d_{|\cdot|}) \to ([a,1], d) : x \mapsto x$ est un lipéomorphisme.

(3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $]0,1]$, qui est de Cauchy relativement à la distance d. Montrer que $\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n > 0$.

(4) Montrer que $(]0,1], d)$ est un espace métrique complet.

(5) Montrer que l'espace métrique $(]0,1], d_{|\cdot|})$ n'est pas complet.

(6) Montrer que les topologies des espaces métriques $(]0,1], d)$ et $(]0,1], d_{|\cdot|})$ coïncident, c'est-à-dire que l'identité $(]0,1], d_{|\cdot|}) \to (]0,1], d) : x \mapsto x$ est un homéomorphisme.

Exercice 3 (4 pts). — On considère le bord d'un cube $S = \mathbb{R}^3 \cap \{(x,y,z) : \max\{|x|,|y|,|z|\} = 1\}$, et la fonction

$$f : S \times S \times S \to \mathbb{R} : (a,b,c) \mapsto \|a-b\|_2 + \|b-c\|_2 + \|c-a\|_2.$$

(1) Montrer que f atteint son maximum sur $\cancel{S}$ SxSxS. Énoncer les théorèmes du cours qui sont utilisés, et montrer que leurs hypothèses sont satisfaites.

(2) On appelle «triangle non dégénéré» dans $\mathbb{R}^3$ un triplet (a,b,c) de points de $\mathbb{R}^3$ (qu'on appelle ses sommets) tels que $a \neq b$ et c n'appartient pas à la droite passant par a et b. Montrer que parmi les triangles non dégénérés dont les sommets appartiennent à $\cancel{C}$ S, il en existe un de périmètre maximal.