Université Denis Diderot - Paris 7 Juin 2015
L2 - Algèbre et analyse approfondies

Examen 51DE01MT - durée : 3 heures

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

Exercice 1. Soit $n \geqslant 2$ un entier

1. Soit $c = (1, 2, \dots, n)$ la permutation circulaire. Pour tout entiers $k, l = 1, 2, \dots n$ calculer l'image de k par la permutation c^l. Déterminer toutes les permutations de S_n qui commutent avec c.
2. Déterminer les signatures des permutations suivantes
$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}.$$
3. Supposons $n \geqslant 5$. Montrer que si $v = (a, b, c)$ et $w = (a', b', c')$ sont deux cycles d'ordre 3 de S_n, alors il existe une permutation σ paire, i.e., de signature 1, telle que $\sigma \circ v \circ \sigma^{-1} = w$.
4. Pour chacun des éléments v suivants de S_8, quel est le cardinal de sa classe de conjugaison, i.e, le cardinal de l'ensemble $\{\sigma \circ v \circ \sigma^{-1}\,;\, \sigma \in S_8\}$:
$$v = (12), \quad (123), \quad (12)(34), \quad (12)(345).$$

Exercice 2. Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels. On suppose que dans chaque colonne de A la somme des coefficients est égale à 1.

1. Soient $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On suppose que $AX = Y$. Montrer que $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$.
2. Soit le vecteur $Z = (1, -1)$. Montrer que c'est un vecteur propre de A. On notera λ sa valeur propre.
3. Montrer que si V est un vecteur propre de A non colinéaire à Z, alors la valeur propre associée à V est 1.
4. Soit $E = (1, 0)$. Montrer que la matrice, dans la base (E, Z), de l'endomorphism associé à A est de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}$$
où $\alpha \in \mathbb{R}$. En déduire que si $\lambda \neq 1$ alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. On considère la matrice suivante
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.

3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Ecrire B comme la somme $B = D + N$ d'une matrice diagonalisable D et d'une matrice nilpotente N, ie, telle que $N^3 = 0$, telles que $DN = ND$.

Exercice 4. Etudier la convergence des séries suivantes :
$$S_1 = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+1}{n^2}, \qquad S_2 = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{\sqrt{n}}, \qquad S_3 = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}, \qquad S_4 = \sum_{n\geqslant 1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n,$$
$$S_5 = \sum_{n\geqslant 1} \left(n\, e^{\frac{1}{n}} - n\right), \qquad S_5 = \sum_{n\geqslant 1} \ln(1 + e^{-n}).$$

Exercice 5. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$.
1. Déterminer le développement limité de f, à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe.
3. Déterminer une équation de l'asymptote en $+\infty$ ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe.