INTERROGATION N. 7

NOM :
PRÉNOM :

Exercice 1 - Parmi les permutations suivantes, lesquelles appartiennent au groupe alterné (justifier la réponse) ?

$$\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 10 & 9 & 11 & 8 & 3 & 1 & 6 & 5 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{S}_{11}, \quad \sigma_2 = (132)(46)(5987) \in \mathscr{S}_9 .$$

Exercice 2 -

(1) Combien y-a-t-il de 5-cycles dans $\mathscr{S}_5$?

(2) Soit σ un 5-cycle de $\mathscr{S}_5$. Démontrer que son stabilisateur pour l'action par conjugaison de $\mathscr{S}_5$ est $\langle\sigma\rangle$. *On pourra d'abord déterminer son orbite.*

(3) En déduire qu'il existe deux classes de conjugaison de 5-cycles pour l'action de conjugaison de $\mathscr{A}_5$ sur lui-même.

Exercice 1 : $\varepsilon : \mathcal{S}_n \longrightarrow \{\pm 1\}$ est un homomorphisme de groupes pour tout $n \geq 1$, et si c est un cycle de $\mathcal{S}_n$ alors $\varepsilon(c) = (-1)^{\ell-1}$ où ℓ est la longueur de c.

On

- $\sigma_1 = (1\ 7)(2\ 10)(3\ 9\ 5\ 8\ 6)(4\ 11)$,

  donc $\varepsilon(\sigma_1) = -1$

- $\varepsilon(\sigma_2) = +1$.

Comme le groupe alterné est le noyau de la signature, on déduit que

$$\sigma_1 \notin A_{11} \quad \text{et} \quad \sigma_2 \in A_9 .$$

Date: Mardi 24 novembre 2015.

Exercice 2 :

(1) $\underline{\mathcal{A}_5 \text{ a } 24 \text{ 5-cycles.}}$

(2) On écrit $\sigma = (a\ b\ c\ d\ e)$ où $a, b, c, d, e \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sont distincts.

Soit $\sigma' = (\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon)$ un 5-cycle de $\mathcal{S}_5$.

Alors $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{a, b, c, d, e\} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ de sorte que

$$\tau := \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_5 .$$

On a $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} \overset{(*)}{=} (\tau(a)\ \ \tau(b)\ \ \tau(c)\ \ \tau(d)\ \ \tau(e)) = \sigma'$.

Donc l'orbite de σ contient tous les 5-cycles.

Elle est constituée de 5-cycles d'après l'identité générale $(*)$.

Elle a donc 24 éléments.

L'équation aux classes donne donc $\mathrm{Card}(\mathrm{Stab}_{\mathcal{S}_5}(\sigma)) = \dfrac{\mathrm{Card}(\mathcal{S}_5)}{\mathrm{Card}(\mathcal{S}_5 \cdot \sigma)} = \dfrac{120}{24} = 5$.

Or $\begin{cases} <\sigma> \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathcal{S}_5}(\sigma) & \text{car } \sigma \in <\sigma> \text{ et } <\sigma> \text{ est abélien.} \\ \mathrm{Card}(<\sigma>) = 5 & \text{car } \sigma \text{ est un 5-cycle, donc d'ordre 5.} \end{cases}$

Ainsi : $\underline{\mathrm{Stab}_{\mathcal{S}_5}(\sigma) = <\sigma>}$.

(3) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_5$ un 5-cycle. Par définition $\mathrm{Stab}_{\mathcal{A}_5}(\sigma) = \{\tau \in \mathcal{A}_5 \mid \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \sigma\}$

$$= \mathcal{A}_5 \cap \mathrm{Stab}_{\mathcal{S}_5}(\sigma) = \mathcal{A}_5 \cap <\sigma>$$

Or $<\sigma> \in \mathcal{A}_5$ car $\begin{cases} \sigma \in \mathcal{A}_5 \\ \mathcal{A}_5 < \mathcal{S}_5 \end{cases}$.

Donc $\mathrm{Stab}_{\mathcal{A}_5}(\sigma) = <\sigma>$.

L'équation aux classes donne donc $\mathrm{Card}(\mathcal{A}_5 \cdot \sigma) = \dfrac{\mathrm{Card}(\mathcal{A}_5)}{\mathrm{Card}(\mathrm{Stab}_{\mathcal{A}_5}(\sigma))} = \dfrac{60}{5} = 12$.

Comme il y a 24 5-cycles (dans $\mathcal{A}_5$ comme dans $\mathcal{S}_5$) on déduit qu'<u>il y a 2 orbites de 5-cycles pour l'action de conjugaison de $\mathcal{A}_5$ sur $\mathcal{A}_5$</u>.