Université Denis Diderot
UFR de Mathématiques

Année 2015/2016
U1TC35

Test n° 4 (durée : 30 mn)

NOM : ______________________

Question de cours

Soient $\big((x_n, y_n)\big)_{n\geq 0}$ une suite de point de $\mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, où $\mathbb{R}^2$ est muni de la distance usuelle d. Quand dit-on que (x, y) est une valeur d'adhérence de la suite $\big((x_n, y_n)\big)_{n\geq 0}$?

Barème : *Question de cours* sur 4 points ; 1) sur 5 points ; 2) sur $5 + 6 + ...$ points.

Exercices

1) Montrer que les segments $[0, 1]$ et $[-1, 1]$ sont homéomorphes.

2) On définit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ en posant $f(x,y) = \arctan\left|\frac{y}{x}\right|$ si $x \neq 0$ et $f(x,y) = \frac{\pi}{2}$ si $x = 0$.

a) Montrer que $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0\}$ et $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq 0\}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

b) Démontrer que f est continue.

Indication : remarquer, en le justifiant, que $f(x,y) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left|\frac{x}{y}\right|$ quand $y \neq 0$.

c) <u>Question subsidiaire</u> (hors barème).
Existe-t-il une application continue $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est f ?