MP4 Université Paris 7
2012-2013 Denis Diderot

EXAMEN
Deuxième Session
Vendredi 28 Juin (durée 3h)
(Les questions avec bonus sont hors barème)

Exercice 1. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{\arctan(x+t)}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

1. Calculer $F(0)$.(On pourra faire une intégration par parties).
2. (a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout $x \neq 0$, calculer $F'(x)$.(On pourra d'abord montrer la décomposition en éléments simples suivante, lorsque $x \neq 0$:
   $$\frac{1}{(1+t^2)(1+(x+t)^2)} = \frac{1}{x(x^2+4)}\left(\frac{x-2t}{1+t^2} + \frac{3x+2t}{1+(x+t)^2} \right))$$
   (c) (Bonus) Calculer $F'(0)$.
3. Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|F(x)| \leq \frac{\pi^2}{8}$.
4. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{\pi}{4}\arctan(x) \leq F(x) \leq \frac{\pi}{4}\arctan(x+1)$.(On pourra utiliser la croissance de la fonction arctangente).
   (b) En déduire les valeurs de $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x)$.

Exercice 2.

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $I(x) = \int_0^x \frac{x^2}{x^2+t^2} \mathrm{d}t$. (On pourra faire un changement de variable approprié).
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale triple suivante :
   $$I = \iiint_A \frac{u^2}{u^2+w^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$
   où $A = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq v \leq 1 \ , \ 1 \leq u \leq 2 \ , \ 0 \leq w \leq u \ \}$.
2. A l'aide du (1) calculer l'intégrale triple suivante :
   $$J = \iiint_B \frac{(x+y+z)^2}{x^2+(y+z)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
   où $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq x+y+z \leq 2 \ , \ 0 \leq x \leq y+z \ , \ x+y \leq z \leq 1+x+y \ \}$
   (On pourra faire le changement de variables $u = x+y+z$, $v = -x-y+z$, $w = -x+y+z$).

Exercice 3. Notons E l'espace vectoriel réel des polynômes (à une variable) à coefficients réels et de degré ≤ 2 . On fait de E un espace euclidien en le munissant du produit scalaire suivant :

$$\langle P, Q\rangle = \frac{1}{2}\int_0^2 P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

1. On considère la base $\underline{P} = (P_0\,,\, P_1\,,\, P_2)$ de E définie par $P_k(t) = (t-1)^k$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$. Montrer que l'orthonormalisé de Gram-Schmidt de $\underline{P}$ est $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_0\,,\, \varepsilon_1\,,\, \varepsilon_2)$, où

$$\varepsilon_0 = P_0\,,\ \varepsilon_1 = \sqrt{3}P_1\,,\ \varepsilon_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2}(P_2 - \frac{1}{3}P_0).$$

2. Soit maintenant F le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$F = \{P \in E/P(0) = 0\}.$$

   (a) Soit $P \in E$. On l'écrit $P = a\varepsilon_0 + b\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer $P(0)$ en fonction de a, b et c .

   (b) En déduire la construction d'une base orthonormée de $F^{\perp}$.

3. (a) (Bonus) On note σ la symétrie orthogonale par rapport à F . Montrer que la matrice de σ dans la base $\underline{P}$ est :

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

   (b) La matice S est-elle symétrique ? L'endomorphisme σ est-il symétrique ?

   (c) Construire une base orthonormée de E dans laquelle σ se diagonalise.

Exercice 4. Soit le système différentiel suivant :

$$(S)\begin{cases} x' = -4x + y + 5 \\ y' = -x - 2y - 1 \end{cases}$$

1. Montrer que le système (S) admet un unique point d'équilibre X_0 que l'on calculera.

2. (a) Donner une base de l'espace vectoriel des solutions de (H) : Le système homogène associé à (S).

   (b) En déduire l'ensemble des solutions du système (S) (On pourra utiliser le (1)).

3. (Bonus)

   (a) 0 est-il un point d'équilibre stable de (H)?

   (b) X_0 est-il un point d'équilibre stable de (S) ?