

Analyse

Arnaud Durand et Pierre Gervais

September 19, 2016

Contents

I	Calcul propositionnel	1
1	Syntaxe	1
1.1	Raisonnements	3
1.2	Définition alternative de $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$	3
1.2.1	Sous-formule, hauteur, arbre de décomposition	3
2	Sémantique	4
3	Exemples de formalisation	5
3.1	Contraintes de compatibilité/exclusion	5

Part I

Calcul propositionnel

1 Syntaxe

Le *calcul propositionnel* est un langage *inductivement et librement engendré* par un ensemble de règles.

C'est à dire qu'une formule ne peut pas être obtenu de deux façons différentes.

Définition 1. Soit \mathcal{P} un ensemble de constantes propositionnelles, on définit $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ le calcul propositionnel sur \mathcal{P} obtenu par les règles suivantes :

- si $p \in \mathcal{P}$, alors $p \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$
- $\perp \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$
- si $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, alors $(\neg F) \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$
- si $F, G \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ alors $(F \vee G), (F \wedge G), (F \rightarrow G) \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$

Notation 1. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \mathcal{F}$

Définition 2. Une définition alternative de \mathcal{F} est $\mathcal{F} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ où

- $\mathcal{F}_0 = \mathcal{P}$
- $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{(\neg F) \mid F \in \mathcal{F}_n\} \cup \{(F \star G) \mid F, G \in \mathcal{F}_n, \star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}\}$, avec $n \geq 0$

On définit la *hauteur* d'une formule F par le plus petit n tel que $F \in \mathcal{F}_n$.

Remarque 1. Ce langage est fortement parenthésé et toute formule peut être représentée par un arbre de décomposition.

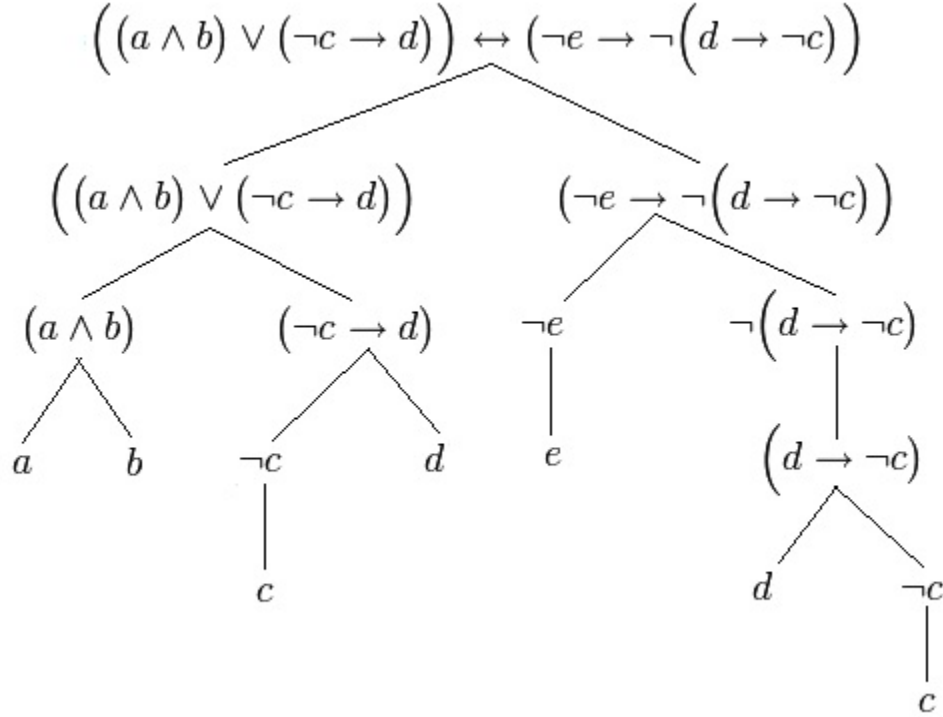


Figure 1: Arbre de décomposition

Propriété 1. *Propriété de lecture unique*

Pour tout $F \in \mathcal{F}$, un seul de ces cas est vrai :

1. $F \in \mathcal{P}$
2. Il existe un unique $G \in \mathcal{F}$ tel que $F = (\neg G)$
3. Il existe d'uniques $G, H \in \mathcal{F}$ et $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ tels que $F = G \star H$

C'est-à-dire que toute formule ne peut se décomposer que d'une seule façon.

1.1 Raisonnements

On démontrera généralement les propriétés s'appliquant à \mathcal{F} par induction : pour démontrer une proposition A s'appliquant à \mathcal{F} , on la démontre sur \mathcal{P} et pour tout $(F \star G)$ et $(\neg F)$ où on suppose que $F, G \in \mathcal{F}$ vérifient A et $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

1.2 Définition alternative de $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$

Soit $\Sigma = \mathcal{P} \cup \{(\,, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \perp\}$, Σ^* est l'ensemble des mots sur Σ .

Exemple 1.

- $F = (\wedge \neg x_1)(\in \Sigma^*$
- $F = (\neg x_1) \in \Sigma^*$

Définition 3. \mathcal{F} est le plus petit sous-ensemble de Σ^* contenant $\mathcal{P} \cup \{\perp\}$ et **clos** par les opérations

1. $(F, G) \mapsto (F \vee G)$
2. $(F, G) \mapsto (F \wedge G)$
3. $(F, G) \mapsto (F \rightarrow G)$

Remarque 2. On peut montrer que les deux définitions correspondent. \mathcal{F} satisfait la propriété de lecture unique (voir TD).

1.2.1 Sous-formule, hauteur, arbre de décomposition

Définition 4. Soit $F \in \mathcal{F}$, on définit $\mathcal{S}(F)$ l'ensemble des *sous-formules* de F telles que

- si $F \in \mathcal{P}$, $\mathcal{S}(F) = \{F\}$
- si $F = (\neg G)$ alors $\mathcal{S}(F) = \{F\} \cup \mathcal{S}(G)$
- si $F = (G \star H)$ où $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, alors $\mathcal{S}(F) = \{F\} \cup \mathcal{S}(G) \cup \mathcal{S}(H)$

TODO : vérifier dernier point

Définition 5. Soit $F \in \mathcal{F}$ on définit la *hauteur* $h(F)$ de F par

- $h(F) = 0$, si $F \in \mathcal{P}$
- si $F = (\neg G)$, alors $h(F) = 1 + h(G)$
- si $F = (G \star H)$, alors $h(F) = 1 + \max\{h(G), h(H)\}$

Définition 6. Soit $F \in \mathcal{F}$, l'*arbre de décomposition* de F $arb(F)$ est un graphe étiqueté défini par

1. si $F \in \mathcal{P}$, $arb(F)$ est réduit à un sommet étiqueté par F .
2. si $F = (\neg G)$, alors $arb(F) = \neg - arb(G)$
3. si $F = (G \star H)$, alors $arb(F) = G - \star - H$

Notation 2. Soit F une formule, $var(F)$ est l'ensemble des variables de F , $occ(F)$ est le multi-ensemble des variables de F et $arb(F)$ est le graphe

- dont les sommets sont V
- et muni d'une fonction d'étiquetage $\lambda : V \longrightarrow \{\neg, \perp, \vee, \wedge, \rightarrow\} \cup var(F)$.

Remarque 3. Toutes les définitions sont univoques par la propriété de lecture unique.

Remarque 4. On définit la hauteur d'une formule par la hauteur de son arbre de décomposition, c'est-à-dire la distance maximum entre les feuilles et la racine.

Notation 3.

- \top comme abréviation pour $(\perp \rightarrow \perp)$
- $(p \longleftrightarrow q)$ pour $(p \leftarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$
- $\bigwedge_{i=1}^n A_i = (((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \dots \wedge A_n)$

2 Sémantique

On s'intéresse à des propositions dont la valeur de vérité est soit vrai soit faux. On a besoin d'une **interprétation** (en terme de vrai ou faux) de ces constantes propositionnelles.

Définition 7. Une *valuation* est une fonction $v : \mathcal{P} \longrightarrow \{0, 1\}$ (on l'appelle aussi interprétation). Étant donné une valuation v , on définit l'*interprétation* $\bar{v} : \mathcal{F} \longrightarrow \{0, 1\}$ comme ceci

- si $F = p \in \mathcal{P}$ alors $\bar{v} = v(p)$
- si $F = (\neg G) \in \mathcal{P}$ alors $\bar{v}(F) = 1$ si et seulement si $\bar{v}(G) = 0$
- $\bar{v}(\perp) = 0$
- $\bar{v}(F \wedge G) = 1$ si et seulement si $\bar{v}(F) = \bar{v}(G) = 1$

On peut décrire l'interprétation d'une formule par sa *table de vérité* :

F	G	$\neg G$	$F \wedge G$	$F \rightarrow G$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1

On définit formellement la *table de vérité* par une fonction $v : \{0, 1\}^{\mathcal{P}} \longrightarrow \{0, 1\}$

Définition 8.

- $F \in \mathcal{F}$ est dit *satisfaisable* s'il existe une valuation v de \mathcal{P} tel que $\bar{v}(F) = 1$
- F est dit *valide* si pour toute valuation v de \mathcal{P} , $\bar{v}(F) = 1$, on dit aussi que F est une *tautologie*.
- F et G sont dites *équivalentes*, notées $F \equiv G$, si pour toute valuation v , $\bar{v}(F) = \bar{v}(G)$

Exercice 1. Vérifier que $F \equiv G$ si et seulement si $F \leftrightarrow G$ est valide.

Proposition 1. Pour tout $F \in \mathcal{F}$, F est satisfaisable si et seulement si $(\neg F)$ n'est pas valide.

3 Exemples de formalisation

3.1 Contraintes de compatibilité/exclusion

Problème : On possède n produits chimiques à ranger dans $k \leq n$ conteneurs. Certains produits ne peuvent pas être stockés ensemble dans un conteneur.

La contrainte est donnée sous la forme d'un ensemble $\mathcal{L} \subseteq [n]$ tel que $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \mathcal{L}$ si et seulement si les produits i_1, \dots, i_k ne peuvent pas être stockés ensemble.

Enjeu : Écrire une formule propositionnelle F telle que F est satisfaisable si le problème a une solution.

Les variables propositionnelles $\mathcal{P} = p(i, j)$, $i \leq n$, $j \leq k$ sont interprétées par "le produit chimique i est dans le camion j ".

On exprime deux propositions :

- Chaque produit se trouve dans un unique conteneur : $F = \underbrace{\left(\bigwedge_{i \leq n} \left(\bigvee_{j \leq k} p(i, j) \right) \right)}_{\text{Chaque produit } i \text{ est stocké dans au moins un camion } j} \wedge \underbrace{\left(\bigwedge_{i \leq n} \left(\bigwedge_{\substack{j, j' \leq k \\ j \neq j'}} (\neg(p(i, j) \wedge p(i, j'))) \right) \right)}_{\substack{\text{Pour chaque produit } i \\ \text{et chaque paire de camions } j \neq j' \\ \text{il est faux que } i \text{ est à la fois dans } j \text{ et } j'}}$
- On respecte les incompatibilités : $G = \underbrace{\bigwedge_{I \subseteq \mathcal{L}} \left(\bigwedge_{j \leq k} \neg \left(\bigwedge_{i \in I} p(i, j) \right) \right)}_{\substack{\text{Pour chaque ensemble } I \text{ de produits} \\ \text{ne pouvant pas être stockés ensemble} \\ \text{et pour chaque camion } j, \\ \text{aucun produit de } I \text{ n'est présent dans le camion } j}}$