MM4 Université Paris 7
2010-2011 Denis Diderot

EXAMEN
Deuxième Session
Vendredi 24 Juin (durée 3h)

Exercice 1. Calculer $I = \iint_A e^{y/x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x+y \geq 0 \, , \, x-y \geq 0 \, , \, 1 \leq x \leq 2\}$. (On pourra commencer par dessiner A).

Exercice 2. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soient a et b des paramètres fixés. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5a+b & 2a & -a \\ 2a & 2a+b & 2a \\ -a & 2a & 5a+b \end{pmatrix}$$

1. On suppose que $a = 1$ et $b = 0$.
   (a) Montrer que u est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que $\{0,1\}$ est l'ensemble des valeurs propres de u et construire une base orthonormée $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle u se diagonalise.
   (c) Montrer que u est un projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.(On pourra d'abord calculer $u \circ u$).
2. Lorsque a et b sont quelconques, montrer que u se diagonalise encore dans $\underline{\varepsilon}$ et donner les valeurs propres de u ainsi que son polynôme caractéristique.
3. Lorsque $a = 2$ et $b = -6$, montrer que u est une symétrie orthogonale par rapport à un plan.
4. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par:
   $$q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z^2 + \frac{1}{3}(4xy - 2xz + 4yz).$$
   Montrer que q est définie positive et donner une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^3$. (On pourra utiliser la question 2.)

Exercice 3. Rappelons que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on note Z^n l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$.
Soit $\sum a_n Z^n$ une série entière dont la somme s est solution de l'équation différentielle:

$$2xs'(x) + s(x) = \frac{1}{1+x} \quad , \quad (\text{où } x \in]-1, +\infty[).$$

1. Montrer que, si on admet que son rayon de convergence R vérifie $0 < R \leq 1$, les coefficients de cette série entière sont: $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ (On pourra développer la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en série entière).

2. Calculer le rayon de convergence R de cette série entière.

3. Calculer $s(x)$ lorsque $0 \leq x < R$. (On pourra commencer par calculer $xs(x^2)$).

4. Lorsque $-R < x < 0$, montrer que:

$$s(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}).$$

(On pourra commencer par développer la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$, puis calculer $xs(-x^2)$).

Exercice 4. Pour tout $x, t > 0$, on pose $f(x,t) = \frac{\sin t}{t} e^{-tx}$.

1. Montrer que, pour tout x fixé, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$. (On pourra utiliser la majoration $|\sin t| \leq |t|$).

2. Pour tout $x > 0$ on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$. Montrer que la fonction $F : x \mapsto F(x)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. (On pourra tout d'abord montrer qu'elle est de classe C^1 sur $]a, +\infty[$, pour tout $a > 0$).

3. En effectuant une double intégration par parties, montrer que $\forall x > 0, F'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

4. (a) Montrer que $\forall x > 0, |F(x)| \leq \frac{1}{x}$ et en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

   (b) Calculer $F(x)$ pour tout $x > 0$.