Exercice 1 (Polynômes de Lagrange et d'Hermite)

a) La forme de Lagrange de P_ϵ est :

$$P_\epsilon(x) = \frac{a}{\epsilon}(x-\epsilon)(x-1) + \frac{f(\epsilon)}{\epsilon(\epsilon-1)}x(x-1) + \frac{b}{1-\epsilon}x(x-\epsilon) \tag{1}$$

b) D'après un résultat du cours, pour tout $x \in [0,1]$ il existe $\xi_x \in [0,1]$ tel que

$$E_1(x) = f(x) - P_\epsilon(x) = \frac{w_3(x)}{3!} f^(3)(\xi_x). \tag{2}$$

En analysant le calcul du maximum de $|E_1(x)|$ sur $[0,1]$, dont l'expression en fonction de ϵ change selon la position de ϵ dans $[0,1]$, on peut constater que si $x \in [0,\epsilon]$ alors $|w_3(x)| \leqslant (1-\epsilon)^2$ donc

$$\sup_{x\in[0,1]} |E_1(x)| \leqslant \frac{M}{6} \max(\epsilon^2, (1-\epsilon)^2) \tag{3}$$

c) En regroupant les monômes de même degré dans l'expression de $P_\epsilon(x)$, on obtient

$$P_\epsilon(x) = a + (\frac{f(\epsilon)-a}{\epsilon(1-\epsilon)} - \frac{\epsilon(b-a)}{1-\epsilon})x + (\frac{b-a}{1-\epsilon} - \frac{f(\epsilon)-a}{\epsilon(1-\epsilon)})x^2, \tag{4}$$

En passant à la limite pour $\epsilon \to 0^+$ on obtient

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} P_\epsilon = a + f'(0)x + [b-a-f'(0)]x^2.$$

d) On remarque facilement que P est un polynôme de degré deux vérifiant $P(0) = a, P(1) = b$ et $P'(0) = f'(0)$. Soit Q un polynôme de degré plus petit ou égal à deux vérifiant les mêmes conditions. Alors $P-Q$ est un polynôme de degré plus petit ou égal à deux et $(P-Q)(0) = (P-Q)(1) = 0$. En autre $(P-Q)'(0) = P'(0) - Q'(0) = 0$ donc 0 est racine double de $P-Q$. Ceci implique que $P-Q$ possède trois racines et comme deg(P-Q) est plus petit ou égal à deux on a nécessairement $P-Q = 0$, ce que montre l'unicité de P.

e) Soit $x \in]0,1[$ et ϕ la fonction définie dans l'énoncé. On remarque $\phi(0) = \phi(1) = \phi(x) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle, il existe $\xi_1 \in]0,x[$ et $\xi_2 \in]x,1[$tels que $\phi'(\xi_1) = \phi'(\xi_2) = 0$. Par ailleurs :

$$\phi'(t) = f'(t) - P'(t) - \frac{f(x)-P(x)}{x^2(x-1)(3t^2-2t)},$$

donc $\phi'(0) = 0$. En appliquant de nouveau le th de Rolle à ϕ' on en déduit l'existence de $\xi_3 \in]0,\xi_1[$ et $\xi_4 \in]\xi_1,\xi_2[$ tels que $\phi''(\xi_3) = \phi''(\xi_4) = 0$. Après on applique le th de Rolle à la fonction ϕ'', on obtient l'existence de $\xi_x \in]\xi_3,\xi_4[$ tel que $\phi^{(3)}(\xi_x) = 0$. On a

$$\phi"(t) = f''(t) - P''(t) - \frac{f(x)-P(x)}{x^2(x-1)}(6t-2)$$

et

$$\phi^{(3)}(t) = f^{(3)}(t) - P^{(3)}(t) - 6\frac{f(x) - P(x)}{x^2(x-1)}.$$

Comme le degré de P est égal à deuxon a $P^{(3)} = 0$ donc $\phi^{(3)}(\xi_x) = 0$ implique que pour tout $x \in [0,1]$ il existe $\xi_x \in [0,1]$ tel que :

$$E_2(x) = f(x) + P(x) = \frac{x^2(x-1)}{6} f^(3)(\xi_x).$$

On remarque que $x^2(x-1)$ s'annule en 0 et 2/3 et il est très facile de voir que la fonction $x \to |x^2(x-1)|$ atteint son maximum sur $[0,1]$ en 2/3. Ce maximum vaut 4/27. On obtient

$$\sum_{x\in[0,1]} |E_2(x)| = \frac{2M}{81}.$$