INTERROGATION N. 4

NOM :
PRÉNOM :

Exercice 1 - Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) Déterminer la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 -

(1) Montrer que les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sont isomorphes.

(2) En revanche, montrer que les groupes multiplicatifs $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$ ne sont pas isomorphes.

Ex 1 (a) La relation R est :

réflexive car $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad x^2 - x^2 = 0 = x - x$ donc xRx

symétrique car $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \Leftrightarrow y^2 - x^2 = y - x$
$\Leftrightarrow yRx$

transitive car $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $\quad \left.\begin{array}{l} xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y \\ yRz \Leftrightarrow y^2 - z^2 = y - z \Leftrightarrow y^2 - y = z^2 - z \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - x = z^2 - z \Leftrightarrow x^2 - z^2 = x - z$
$\Leftrightarrow xRz$

Donc R est une relation d'équivalence.

(b) La classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$ est $\quad \overline{x} = \{ y \in \mathbb{R} \mid yRx \}$
$= \{ y \in \mathbb{R} \mid y^2 - x^2 = y - x \}$
$\underset{(*)}{=} \{ x, 1 - x \}$

Date: Mercredi 14 octobre 2015.

Et $\underset{(y-x)(y+x)}{y^2 - x^2} = y - x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y - x = 0 \\ \text{ou} \\ y + x = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ \text{ou} \\ y = 1 - x \end{array} \right. \quad (*)$

Ex2 (1) On définit $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$
$$x \mapsto e^x$$

f est un homomorphisme car

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y)$$

De plus. $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$ vérifie $f \circ g = id_{\mathbb{R}_+^*}$ et $g \circ f = id_{\mathbb{R}}$

donc f est bijective
et $g = f^{-1}$ sa bijection réciproque.

Comme f est un homomorphisme bijectif $\Rightarrow$ f est un isomorphisme

(2) $\mathbb{C}^*$ contient 2 éléments d'ordre 4 ; les racines 4-ième primitives de l'unité i et $-i$.

Par contre $\mathbb{R}^*$ ne contient pas des éléments d'ordre 4, car l'équation

$$x^4 = 1 \text{ avec } x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{ordre } 1 \\ \text{ou} & \\ x = -1 & \text{ordre } 2 \end{cases}$$

Comme les isomorphismes préservent les ordres des éléments
$\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$ ne peuvent être pas isomorphes.

Alternative : Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$ un homomorphisme de groupes multiplicatifs.

Alors $f(i)^4 = f(i^4) = f(1) = 1 \Rightarrow f(i) \in \{1, -1\}$
et $f(-i)^4 = f((-i)^4) = f(1) = 1 \Rightarrow f(-i) \in \{1, -1\}$

Donc Soit $f(i) = -1 = f(-i) \Rightarrow f$ n'est pas injective
Soit $i \in \ker f$ ou $-i \in \ker f \Rightarrow f$ n'est pas injective

Conclusion : f ne peut être injective, donc $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R}^*$ ne sont pas isomorphes