

TD de Mathématiques Discrètes

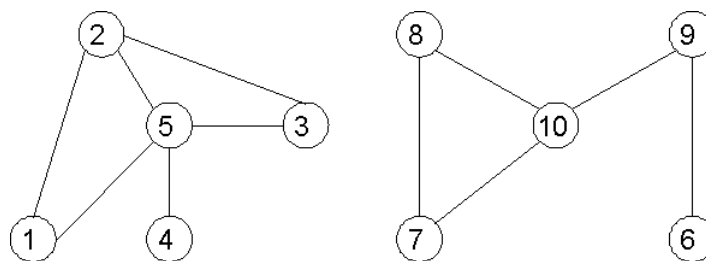
TD 1 - Introduction à la théorie des graphes

Janvier 2009

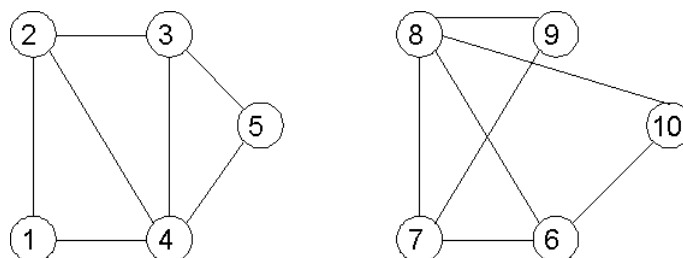
Exercice 1 : Isomorphismes

- Pour chaque couple de graphes suivants, dire s'ils sont isomorphes et justifier dans chaque cas.

(a) Premier couple



(b) Deuxième couple



Définition 1 Un graphe G est dit connexe si deux quelconques de ses sommets sont reliés par une chaîne.

- Trouver deux graphes simples connexes ayant le même nombre d'arêtes et qui ne soient pas isomorphes.
- Trouver tous les graphes simples non isomorphes à 4 sommets.

Exercice 2 : degrés des sommets

Démontrer que, pour tout graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Application : Soit un groupe de 9 personnes. Chaque jour, pour se dire bonjour, chacune de ces personnes serre la main à 3 personnes et embrasse les 5 autres. Montrer que c'est impossible.

Exercice 3 : Chaînes

Montrer que si dans un graphe deux sommets sont reliés par une chaîne alors ils sont reliés par une chaîne *élémentaire*.

Exercice 4 :

Soit G un graphe simple ayant n sommets ($n > 1$).

1. Montrer que le degré d'un sommet est toujours strictement inférieur à n .
2. Montrer qu'il ne peut pas y avoir simultanément un sommet de degré 0 et un sommet de degré $n - 1$.
3. En déduire qu'il y a au moins deux sommets de même degré.

Exercice 5 :

Définition 2 Soit $G = (X, E)$ un graphe. Un triangle de G est un triplet de sommets distincts x, y, z de X tels que xy, yz et zx appartiennent à E .

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple. Supposons que G ne contienne pas de triangles.

1. Montrer que pour deux sommets voisins distincts x et y , le nombre n_x de sommets de $X \setminus \{x, y\}$ voisins de x et le nombre n_y de sommets de $X \setminus \{x, y\}$ voisins de y satisfont l'inégalité

$$n_x + n_y \leq n - 2$$

2. En déduire, par induction sur le nombre n de sommets, que le nombre m d'arêtes vérifie

$$m \leq \frac{n^2}{4}$$