Exercices sur les actions de groupes
et sur le groupe symétrique

Exercice 1

On fixe une action d'un groupe G sur un ensemble fini E. On suppose que E n'a pas de point fixe, que l'ordre de G est 15, et que le cardinal de E est 17. Déterminer le nombre d'orbites, et le cardinal de chacune d'elles.

Exercice 2 (Des petites questions)

On considère l'action d'un groupe G sur un ensemble E.

1. Montrer qu'un sous-ensemble de E est globalement stable par G si et seulement s'il est réunion d'orbites.
2. Montrer que deux éléments dans la même orbite ont des stabilisateurs conjugués.
3. Montrer que deux éléments conjugués dans le groupe G fixent le même nombre d'éléments.

Exercice 3 (Le théorème de Cayley)

1. Pour tout élément a d'un groupe fini G d'ordre n, on définit l'application

$$\begin{array}{cccc} l_a & : & G & \rightarrow & G \\ & & g & \mapsto & ag \end{array}$$

Montrer que l_a est une bijection de G, produit de $\frac{n}{ordre(a)}$ cycles à support disjoints tous de longueur $ordre(a)$.

2. Montrer alors que l'application

$$\begin{array}{ccccc} l & : & G & \rightarrow & \mathfrak{S}(G) \\ & & a & \mapsto & l_a \end{array}$$

est un morphisme de groupes, injectif. Tout groupe fini est donc isomorphe à un sous-groupe du groupe des permutations de ses éléments.

Exercice 4

1. Soit p un nombre premier. Montrer que le centre d'un p-groupe G,(i.e. un groupe fini d'ordre une puissance non nulle de p), n'est pas réduit à l'élément neutre.
2. On rappelle que si le quotient d'un groupe par son centre est cyclique alors le groupe est abélien, donc égal à son centre. Montrer qu'un groupe d'ordre p^2 est abélien.
3. Montrer que le centre d'un groupe non abélien d'ordre p^3 est d'ordre p. En déduire que le nombre de classes de conjugaison est $p^2 + p - 1$. (On pourra étudier l'action de G sur lui-même par conjugaison : ses points fixes, l'orbite des éléments, le stabilisateur des éléments...)

Exercice 5

Soit G un groupe fini. Soit p le plus petit facteur premier de l'ordre de G. Soit H un sous-groupe de G d'indice $p > 1$.

1. Montrer que les orbites de l'action de H sur G/H (l'ensemble quotient G/H des classes à gauche de G modulo H) par translation à gauche sont réduites à des points.
2. Montrer que H est distingué.

Exercice 6

Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

Exercice 7 (Décompositions explicites)

1. On considère l'élément de $\mathfrak{S}_8$:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$
Décomposer σ en un produit de transpositions et calculer sa signature. Peut-on écrire σ comme produit de douze transpositions ?
2. Soit σ l'élément de $\mathfrak{S}_{11}$:
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 7 & 9 & 11 & 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$
Décomposer σ en un produit de cycles à support disjoints. Préciser l'ordre de σ, et la signature de σ. Calculer σ^2 et σ^3. Écrire σ^{-1} en un produit de cycles à support disjoints.

Exercice 8

1. Si c est le cycle $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, c^2 est-il un cycle ?
2. Si c est un cycle de $\mathfrak{S}_n$ d'ordre l et k un entier naturel, calculer l'ordre de c^k.

Exercice 9 (Étude de $\mathfrak{S}_3$)

Donner les structures de cycles possibles dans $\mathfrak{S}_3$, le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_3$ ayant cette structure, et leur signature. Décrire les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$, et ceux qui sont distingués dans $\mathfrak{S}_3$.

Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 10 (Étude de $\mathfrak{S}_4$)

Donner les structures de cycles possibles dans $\mathfrak{S}_4$, le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_4$ ayant cette structure, et leur signature. Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$ (utiliser l'exercice sur les classes de conjugaison). En déduire que A_4 n'est pas un groupe simple, i.e. qu'il possède des sous-groupes distingués autres que $\{e\}$ et A_4.

Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 11

Soit G le sous-groupe de $\mathfrak{S}_7$ engendré par $\alpha = (2,4,6)(5,7,1)$ et $\beta = (3,4)(5,6)$. On se propose de déterminer l'ordre de G. On considère pour cela les ensembles suivants :

$$G_1 = \{\varphi \in G \mid \varphi(1) = 1\} \qquad G_2 = \{\varphi \in G_1 \mid \varphi(2) = 2\} \qquad G_3 = \{\varphi \in G_2 \mid \varphi(3) = 3\}$$

$$X_1 = \{\varphi(1) \mid \varphi \in G\} \qquad X_2 = \{\varphi(2) \mid \varphi \in G_1\} \qquad X_3 = \{\varphi(3) \mid \varphi \in G_2\}.$$

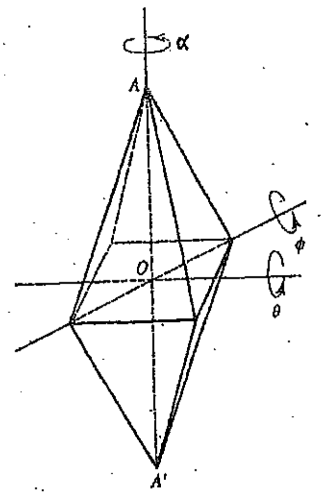
Étant donné un ensemble Y, on note $|Y|$ le cardinal de Y.

1. Montrer que 6 divise $\mid G \mid$.
2. Quelle relation existe-t-il entre $|G|$ et $|X_1|\ |X_2|\ |X_3|\ |G_3|$?
3. Expliciter X_1.
4. Expliciter $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}$ et $\delta = \gamma\beta\gamma^{-1}$. En déduire $X_3 = \{3,4,5,6\}$ ou $X_3 = \{3,4,5,6,7\}$ et $X_2 = \{2,7\}$ ou $X_2 = \{2,3,4,5,6,7\}$.
5. On fait agir G sur l'ensemble des parties de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Déterminer l'orbite de la partie $\{1,2,7\}$. En déduire que 7 est fixé par les éléments de G_2 et que G_3 est réduit à l'identité.
6. En déduire $|G|$.

Exercice 12 *Sur le groupe des isométries du diamant*

Combien existe-il de coloriages différents, avec deux couleurs, de cette pyramide double à base carré, que nous appelerons "diamant" ? C'est le but de ce devoir.

Précisons que les faces sont isocèles mais pas équilatérales et qu'on identifiera deux façons de colorier si elles coïncident quitte à déplacer le diamant.



On considère le groupe D des isométries qui conservent globalement le diamant et son action naturelle sur le diamant.

1. Déterminer l'orbite et le stabilisateur du point A. En déduire le cardinal de D.
2. Déterminer la liste des éléments de D.
3. Calculer le nombre de façons de colorier le diamant.
4. On fait agir le groupe D de façon naturelle sur l'ensemble de ces façons de colorier. A quoi correspond en termes de cette action de groupe le nombre de coloriages différents ?
5. Calculer le nombre de façons de colorier fixées par chaque élément du groupe D.
6. Conclure.