Analyse II - Probabilités et intégrale de Lebesgue - Notes prises par Pierre Gervais

Marc Rosso

January 23, 2017

Contents

1 Cadre mathématiques pour l'aléatoire

Question 1. En jetant une aiguille de taille $2a$ sur un parquet dont les lattes sont de largeurs 2ℓ, quelle est la probabilité que l'aiguille tombe sur une rainure ? (avec $a \leqslant \ell$).

On note r la distance du milieu de l'aiguille à la rainure la plus proche ($0 \leqslant r \leqslant \ell$), et α l'angle des droites entre l'aiguille et la direction de la rainure ($0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$).

Pour r donné, et α_0 la valeur de contact on a

$$r = a \sin \alpha_0$$

La condition sur la position (r, α) de l'aiguille pour couper la rainure est

$$r \leqslant a \sin \alpha$$

Soit $D := \{(r, \alpha) \in [0, \ell] \times [0, \pi/2] \mid r \leqslant a \sin \alpha\}$, intuitivement la probabilité associée à cet événement est le quotient

$$\mathbb{P}(D) = \frac{Aire(D)}{l \cdot \pi/2}$$

où

$$Aire(D) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{asin\alpha} dr d\alpha = a[-\cos \alpha]_0^{\pi/2} = a$$

enfin $\mathbb{P}(D) = \frac{a}{l} \cdot \frac{2}{\pi}$

2 Algèbre de Boole, tribus et mesures de probabilités

Définition 1. Soit Ω un ensemble, une *algèbre de Boole* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ est une classe de parties de Ω contenant Ω et stable par passage au complémentaire et par réunion.

Exemple 1.

1. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
2. $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$
3. Si $A \subseteq \Omega$, $\mathcal{A} = \{A, A^c, \emptyset, \Omega\}$

Proposition 1. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. *$\mathcal{A}$ est clos par intersection*
3. *$\mathcal{A}$ est clos par intersection et réunion finie*

Définition 2. Soit Ω un ensemble, une *tribu* ou *σ-algèbre*$\mathcal{A}$ est une classe de parties de Ω telle que

1. $\Omega \in \mathcal{A}$ (on l'appelle *l'univers*)
2. $\mathcal{A}$ soit stable par passage au complémentaire
3. $\mathcal{A}$ soit stable par union dénombrable

Proposition 2. *Soit $\mathcal{A}$ une σ-algèbre*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. *$\mathcal{A}$ est stable par intersection*
3. *$\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable*

Exemple 2.

- $\mathcal{P}(\Omega)$
- $\{\emptyset, \Omega\}$

Remarque 1.

1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de Ω et $E = \{\omega \in \Omega \mid \omega$ est dans une infinité d'ensembles $A_n\}$, on a

$$E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k \right) = \limsup A_n$$

   La suite $B_n = \bigcup_{k\geqslant n} A_k = A_n \cup B_{n+1}$ est décroissante.

2. $F = \{\omega \in \Omega \mid \omega$ est dans tous les A_n sauf un nombre fini d'entre eux$\}$

   $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k\geqslant n} A_k \right) = \liminf(A_n)$

Définition 3. Soit Ω un ensemble, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ une classe de parties de Ω. Il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, appelée *tribu engendrée par* $\mathcal{C}$ et notée $\sigma(\mathcal{C})$, en notant $\mathcal{T}$ l'ensemble des tribus contenant $\mathcal{C}$:

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{T}} \mathcal{A}$$

Remarque 2.

- Il y a toujours au moins une tribu qui contient $\mathcal{C}$: $\mathcal{P}(\Omega)$
- Si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est encore une tribu.

Exemple 3. La *tribu borélienne de* $\mathbb{R}$ notée $B(\mathbb{R})$ est la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles fermés bornés $[a, b]$ avec $-\infty < a \leqslant b < +\infty$.

Propriété 1.

$B(\mathbb{R})$ *contient les intervalles ouverts et semi-ouverts :*

$$[a, b[= \bigcup_{n>0} [a, b - 1/n]$$

Définition 4. Un *espace probabilisable* est un ensemble Ω muni d'une tribu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

Une *probabilité* (ou *mesure de probabilité*) sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ vérifiant les propriétés suivantes :

- *masse unitaire* : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- σ*-additivité* : si $(A_n)_n$ est une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geqslant 0} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Remarque 3. L'ordre de sommation de la suite $(\mathbb{P}(A_n))_n$ n'est pas important car on a là une série à termes positifs, donc absolument convergente et un théorème nous indique que pour toute série absolument convergente $\sum a_n$ et toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on a

$$\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$$

Proposition 3. *Soit* $\mathbb{P}$ *une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{A})$*, alors*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. *Si* $A_1, A_2, ...A_n$ *sont deux à deux disjoints,* $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup ...A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + ...\mathbb{P}(A_n)$
3. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
4. *Pour tout* $A, B \in \mathcal{A}$ *:* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
5. *Si* $A \subseteq B$ *alors* $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

6. Si $(A_n)_n$ est une suite de parties dans $\mathcal{A}$ qui ne sont pas nécessairement disjointes

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 0} A_n\right) \leqslant \sum_{0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Preuve 1.

Montrons le point 4 : soient $A, B \in \mathcal{A}$, on a $A \cup B = (A) \sqcup (B \setminus (A \cap B))$ d'où $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B))$, or $B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus (A \cap B))$, alors $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B))$ et donc

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

On en déduit 5.

Montrons les points 3 et 1 : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \sqcup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$, donc $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Soit A_n une suite dans $\mathcal{A}$, on pose $A'_1 = A_1$, $A'_2 = A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap A_1^c$, ... $A'_n = A_n \cap (A_1 \cup A_2 .. A_{n-1})^c$. Les A'_k sont deux à deux disjoints et $A'_k \subseteq A_k$ et donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 0} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Proposition 4. *Soient $A_1, A_2, ...A_n$ des éléments de $\mathcal{A}$, on a*

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 .. A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1,n \rrbracket)} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

Définition 5. Soit $\omega \in \Omega$, on pose

$$\mathbb{P}_\omega(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est la *masse de Dirac au point ω*.

Soit $(\omega_n)_n$ une suite d'éléments distincts de Ω et $(\alpha_n)_n$ une suite de réels à valeurs dans $[0, 1]$ tels que $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 1$, la fonction suivante est une probabilité :

$$\mathbb{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathbb{P}_{\omega_n}$$

Preuve 2. En effet, $\mathbb{P}$ vérifie les deux axiomes d'une mesure de probabilité :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \underbrace{\mathbb{P}_{\omega_n}(\Omega)}_{1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 1$$

et pour toute suite d'éléments $(A_n)_n$ de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant 0} A_k\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathbb{P}_{\omega_n}\left(\bigcup_{k\geqslant 0} A_k\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_{\omega_n}(A_k) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n \mathbb{P}_{\omega_n}(A_k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathbb{P}_{\omega_n}(A_k) \text{ car il s'agit d'une série à termes positifs} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_k\right)
\end{aligned}$$

Exemple 4. Loi de Poisson : $\alpha_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

Exemple 5. Équiprobabilité sur un ensemble fini

Soient $\Omega = \{\omega_1, ...\omega_n\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{\omega_k}$ et $\alpha_k = 1/n$.

On retrouve $\mathbb{P}\left(A\right) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{\omega_k}(A) = \dfrac{|A|}{n}$

Remarque 4. Lorsque Ω est un ensemble fini ou dénombrable, on prendra souvent $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Exemple 6. Le paradoxe de Bertrand

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. On considère les cordes $[A, B]$ sur le cercle et on se pose la question suivante : *quelle est la probabilité pour qu'une corde non-diamètre prise au hasard soit de longueur au moins* $\sqrt{3}$ *?*

La corde est entièrement déterminée par la position de son milieu M car OAB est un triangle isocèle et M est le pied de la hauteur perpendiculaire à (OM).

Soit $r = OM$, la longueur de la corde ℓ vérifie

$$\frac{\ell}{2} = \sqrt{1 - r^2}$$

On déduit de $\ell/2 \geqslant \sqrt{3}$ l'inégalité $r \leqslant 1/2$.

On regarde les $M \in \overline{\mathcal{B}}_{1/2}(O)$, il y a plusieurs façons de choisir la probabilité :

1. L'aire du disque : $\frac{\pi \times 1/4}{\pi} = 1/4$
2. Si on paramètre M par ses coordonnées polaires dans $[0, 1] \times [0, 2\pi[$ et l'ensemble cherché $[0, 1/2] \times [0, 2\pi[$.

   Si on prend la mesure produit
   $$\frac{1/2 \times \pi}{2\pi} = 1/2$$

Propriété 2. *Soit* $(A_n)_n$ *une suite à valeurs dans une tribu* $\mathcal{A}$

- *Si* $(A_n)_n$ *est croissante, alors* $\mathbb{P}\left(\bigcup A\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$

- *Si* $(A_n)_n$ *est décroissante, alors* $\mathbb{P}\left(\bigcap A\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$

Proposition 5. *Soit* $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ *vérifiant*

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

- $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ *pour tout éléments disjoints de* $\mathcal{A}$

- *Si* $(A_n)_n$ *est une suite croissante de* $\mathcal{A}$ *alors* $\lim \lim_n \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcup A)$

Rappels Dans un ensemble totalement ordonné de taille n, il existe $\binom{n}{k}$ suites strictement croissantes et $\binom{n+k-1}{k}$ largement croissantes.

L'équation $x_1 + x_2 + ...x_k = n$ admet $\binom{n+k-1}{k}$ solutions dans $\mathbb{N}^k$

2.1 Exemples de mesures de probabilités

Loi de Bernoulli : pile ou face

$\Omega = \{0,1\}$, $\mathbb{P}((\,)\{1\}) = p \in [0,1]$ et $\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p$.

Loi binomiale Soit E un ensemble à N éléments partitionné en deux ensembles E_1 et E_2. On considère une suite de n tirages avec remise. Quelle est la probabilité pour que exactement k termes viennent de E_1 ?

$\Omega = E^n$, Card $\Omega = N^n$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

- on choisit les éléments de E_1 qui se réalisent : $|E_1|^k$ choix

- on choisit à quels tirages ils se réalisent : $\binom{n}{k}$ choix

- on choisit les événements de E_2 qui se réalisent : $|E_2|^{n-k}$ choix

en divisant par le cardinal de Ω et en notant $M = \text{Card } E_1$ on a comme probabilité pour un tel événement :

$$\binom{n}{k}\frac{M^k(N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

On peut interpréter cette loi comme un loi de probabilité sur $\{0,1,...n\}$ ou pour tout k

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Loi hypergéométrique On considère cette fois les tirages sans-remise, dont exactement k termes appartiennent à E_1.

$\Omega = \mathcal{P}_n(E)$

Pour un tirage dont k éléments sont dans E_1, on choisit k éléments **distincts** de E_1 : $\binom{N_1}{k}$ et le reste dans E_2 : $\binom{N-N_1}{n-k}$ la probabilité d'un tel événelent est ainsi

$$\frac{\binom{N}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$