Université Paris 7 — Paris Diderot
Licence de Mathématiques
Topologie et calcul différentiel

Année 2011-2012
U1TC35/U2TC35

Examen du 18 juin 2012

I − Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. Soit a un réel. Pour toute fonction f de E, on pose :

$$N_a(f) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)(t-a)|$$

1) Montrer que pour tout réel a, N_a est une norme sur E.

2) Soient a et b deux réels avec : $1 < a < b$. Montrer l'inégalité :

$$\frac{a-1}{b-1} \leq \left| \frac{t-a}{t-b} \right| \leq \frac{a}{b}$$

pour tout t dans $[0,1]$. En déduire que les normes N_a et N_b sont équivalentes.

3) On suppose maintenant que a et b sont deux réels avec $a < b < 0$. Montrer que N_a et N_b sont équivalentes.

4) Pour tout réel c dans $]0,1[$, on pose :

$$f_c(t) = \begin{cases} c - t & \text{si } 0 \leq t \leq c \\ 0 & \text{si } c \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Calculer $N_0(f_c)$ et $N_1(f_c)$. En déduire que les normes N_0 et N_1 ne sont pas équivalentes.

II − Soit g la fonction $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 + xy$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. On note f la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + g(x,y)}$$

1) Montrer que l'on a pour tout (x,y) dans $\mathbf{R}^2$:

$$\frac{2}{2 + x^2 + y^2} \geq f(x,y) \geq \frac{2}{2 + 3x^2 + 3y^2}$$

En déduire que f est une fonction de classe C^∞ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ et que $f(x,y)$ tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers l'infini.

2) Calculer df. Déterminer les points critiques de f.

3) Déterminer les minima globaux et les maxima globaux de f.

4) Pour tout réel c, on note V_c l'ensemble des points de $\mathbf{R}^2$ qui sont envoyés en c par f. Montrer que V_c est compact quel que soit c.

5) Déterminer l'image de f. Montrer que pour tout $c \in]0, 1[$, V_c est une sous-variété de classe C^∞ de $\mathbf{R}^2$. Quelle est sa dimension?

III − Soit f la fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2$$

1) Montrer que f est une fonction de classe C^∞ de R^2 dans $\mathbf{R}$. Calculer df.

2) Déterminer les points critiques de f.

3) Pour chaque point critique de f, montrer qu'il est non dégénéré et déterminer sa signature.

4) Déterminer les extrema locaux et les extrema globaux de f.

IV − Soit X un espace métrique. On note d la distance de X. Pour tout partie non vide Y de X, on pose :

$$\delta(Y) = \sup_{x,y \in Y} d(x, y)$$

C'est un élément de $[0, \infty]$.

1) Soit Y une partie compacte non vide de X. Montrer que $\delta(Y)$ est fini. Montrer qu'il existe deux points x et y dans Y tels que : $d(x, y) = \delta(Y)$.

2) Soient $(K_n)_{n>0}$ une suite de compacts non vides de X vérifiant :

$$\forall n > 0, \quad K_{n+1} \subset K_n$$

On note K l'intersection des compacts K_n. Montrer que K est non vide.

3) Montrer que la suite $(\delta(K_n))_{n>0}$ est une suite réelle décroissante qui tend vers $\delta(K)$.

V − Soient n un entier strictement positif et f une fonction de classe C^1 de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. On note X l'image de f et on suppose que X est un fermé de $\mathbf{R}^n$.

1) Soit x un point de $\mathbf{R}^n$. On suppose que $df(x)$ est une application linéaire surjective de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. Montrer que $f(x)$ appartient à l'intérieur de X.

2) On suppose que $df(x)$ est surjective pour tout x de $\mathbf{R}^n$. Montrer que f est surjective.

Corrigé et résultats sur :
http ://www.math.jussieu.fr/˜vogel/topo-cd.cor.pdf
http ://www.math.jussieu.fr/˜vogel/topo-cd.res.pdf