

Logique

Arnaud Durand et Pierre Gervais

October 21, 2016

Contents

I	Calcul propositionnel	1
1	Syntaxe	2
1.1	Raisonnements	2
1.2	Définition alternative de $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$	3
1.2.1	Sous-formule, hauteur, arbre de décomposition	4
2	Sémantique	5
3	Exemples de formalisation	5
3.1	Contraintes de compatibilité/exclusion	5
4	Équivalence logique usuelles	6
5	Formules normales	7
5.1	Tables de vérité et formes normales	8
5.2	Systèmes complets de connecteurs	9
5.3	Mise sous forme normale	9
6	Formes normales complètes et bornes inférieures de FND	9
6.1	Formules propositionnelles positives	11
II	Compléments	13
7	Calcul propositionnel	13
7.1	Théorème de lecture unique	13

Part I

Calcul propositionnel

1 Syntaxe

Le *calcul propositionnel* est un langage *inductivement et librement engendré* par un ensemble de règles.

C'est à dire qu'une formule ne peut pas être obtenu de deux façons différentes.

Définition 1. Soit \mathcal{P} un ensemble de constantes propositionnelles, on définit $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ le calcul propositionnel sur \mathcal{P} obtenu par les règles suivantes :

- si $p \in \mathcal{P}$, alors $p \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$
- $\perp \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$
- si $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, alors $(\neg F) \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$
- si $F, G \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ alors $(F \vee G), (F \wedge G), (F \rightarrow G) \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$

Notation 1. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \mathcal{F}$

Définition 2. Une définition alternative de \mathcal{F} est $\mathcal{F} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$ où

- $\mathcal{F}_0 = \mathcal{P}$
- $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{(\neg F) \mid F \in \mathcal{F}_n\} \cup \{(F \star G) \mid F, G \in \mathcal{F}_n, \star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}\}$, avec $n \geq 0$

On définit la *hauteur* d'une formule F par le plus petit n tel que $F \in \mathcal{F}_n$.

Remarque 1. Ce langage est fortement parenthésé et toute formule peut être représentée par un arbre de décomposition.

Propriété 1. *Propriété de lecture unique*

Pour tout $F \in \mathcal{F}$, un seul de ces cas est vrai :

1. $F \in \mathcal{P}$
2. Il existe un unique $G \in \mathcal{F}$ tel que $F = (\neg G)$
3. Il existe d'uniques $G, H \in \mathcal{F}$ et $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ tels que $F = G \star H$

C'est-à-dire que toute formule ne peut se décomposer que d'une seule façon.

1.1 Raisonnements

On démontrera généralement les propriétés s'appliquant à \mathcal{F} par induction : pour démontrer une proposition A s'appliquant à \mathcal{F} , on la démontre sur \mathcal{P} et pour tout $(F \star G)$ et $(\neg F)$ où on suppose que $F, G \in \mathcal{F}$ vérifient A et $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

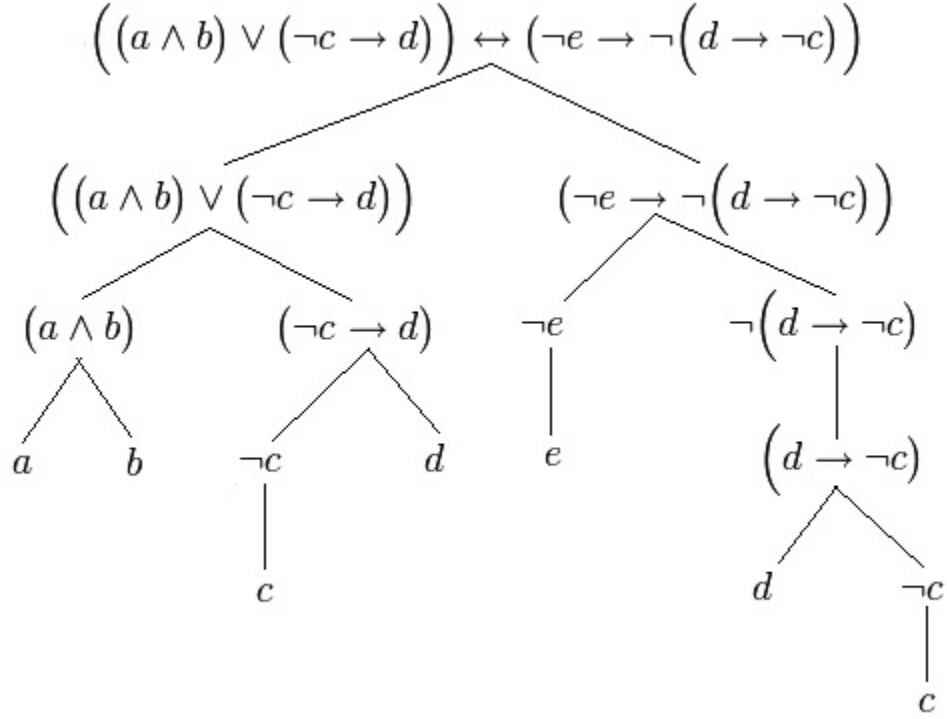


Figure 1: Arbre de décomposition

1.2 Définition alternative de $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$

Soit $\Sigma = \mathcal{P} \cup \{(\cdot), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \perp\}$, Σ^* est l'ensemble des mots sur Σ .

Exemple 1.

- $F = (\wedge \neg x_1) ((\in \Sigma^*$
- $F = (\neg x_1) \in \Sigma^*$

Définition 3. \mathcal{F} est le plus petit sous-ensemble de Σ^* contenant $\mathcal{P} \cup \{\perp\}$ et **clos** par les opérations

1. $(F, G) \mapsto (F \vee G)$
2. $(F, G) \mapsto (F \wedge G)$
3. $(F, G) \mapsto (F \rightarrow G)$

Remarque 2. On peut montrer que les deux définitions correspondent. \mathcal{F} satisfait la propriété de lecture unique (voir TD).

1.2.1 Sous-formule, hauteur, arbre de décomposition

Définition 4. Soit $F \in \mathcal{F}$, on définit $\mathcal{S}(F)$ l'ensemble des *sous-formules* de F telles que

- si $F \in \mathcal{P}$, $\mathcal{S}(F) = \{F\}$
- si $F = (\neg G)$ alors $\mathcal{S}(F) = \{F\} \cup \mathcal{S}(G)$
- si $F = (G \star H)$ où $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, alors $\mathcal{S}(F) = \{F\} \cup \mathcal{S}(G) \cup \mathcal{S}(H)$

TODO : vérifier dernier point

Définition 5. Soit $F \in \mathcal{F}$ on définit la *hauteur* $h(F)$ de F par

- $h(F) = 0$, si $F \in \mathcal{P}$
- si $F = (\neg G)$, alors $h(F) = 1 + h(G)$
- si $F = (G \star H)$, alors $h(F) = 1 + \max\{h(G), h(H)\}$

Définition 6. Soit $F \in \mathcal{F}$, l'*arbre de décomposition* de F $arb(F)$ est un graphe étiqueté défini par

1. si $F \in \mathcal{P}$, $arb(F)$ est réduit à un sommet étiqueté par F .
2. si $F = (\neg G)$, alors $arb(F) = \neg - arb(G)$
3. si $F = (G \star H)$, alors $arb(F) = G - \star - H$

Notation 2. Soit F une formule, $var(F)$ est l'ensemble des variables de F , $occ(F)$ est le multi-ensemble des variables de F et $arb(F)$ est le graphe

- dont les sommets sont V
- et muni d'une fonction d'étiquetage $\lambda : V \longrightarrow \{\neg, \perp, \vee, \wedge, \rightarrow\} \cup var(F)$.

Remarque 3. Toutes les définitions sont univoques par la propriété de lecture unique.

Remarque 4. On définit la hauteur d'une formule par la hauteur de son arbre de décomposition, c'est-à-dire la distance maximum entre les feuilles et la racine.

Notation 3.

- \top comme abréviation pour $(\perp \rightarrow \perp)$
- $(p \longleftrightarrow q)$ pour $(p \leftarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$
- $\bigwedge_{i=1}^n A_i = (((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \dots \wedge A_n)$

2 Sémantique

On s'intéresse à des propositions dont la valeur de vérité est soit vrai soit faux. On a besoin d'une **interprétation** (en terme de vrai ou faux) de ces constantes propositionnelles.

Définition 7. Une *valuation* est une fonction $v : \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}$. Étant donné une valuation v , on définit l'interprétation $\bar{v} : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$ comme ceci

- si $F = p \in \mathcal{P}$ alors $\bar{v} = v(p)$
- si $F = (\neg G) \in \mathcal{P}$ alors $\bar{v}(F) = 1$ si et seulement si $\bar{v}(G) = 0$
- $\bar{v}(\perp) = 0$
- $\bar{v}(F \wedge G) = 1$ si et seulement si $\bar{v}(F) = \bar{v}(G) = 1$

On peut décrire l'interprétation d'une formule par sa *table de vérité* :

F	G	$\neg G$	$F \wedge G$	$F \rightarrow G$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1

On définit formellement la *table de vérité* par une fonction $v : \{0, 1\}^{\mathcal{P}} \rightarrow \{0, 1\}$

Définition 8.

- $F \in \mathcal{F}$ est dit *satisfaisable* s'il existe une valuation v de \mathcal{P} tel que $\bar{v}(F) = 1$
- F est dit *valide* si pour toute valuation v de \mathcal{P} , $\bar{v}(F) = 1$, on dit aussi que F est une *tautologie*.
- F et G sont dites *équivalentes*, notées $F \equiv G$, si pour toute valuation v , $\bar{v}(F) = \bar{v}(G)$
- On note $v \models F \iff \bar{v}(F) = 1$, c'est à dire si et seulement si v satisfait F .

Exercice 1. Vérifier que $F \equiv G$ si et seulement si $F \leftrightarrow G$ est valide.

Proposition 1. Pour tout $F \in \mathcal{F}$, F est satisfaisable si et seulement si $(\neg F)$ n'est pas valide.

3 Exemples de formalisation

3.1 Contraintes de compatibilité/exclusion

Problème : On possède n produits chimiques à ranger dans $k \leq n$ conteneurs. Certains produits ne peuvent pas être stockés ensemble dans un conteneur.

La contrainte est donnée sous la forme d'un ensemble $\mathcal{L} \subseteq [n]$ tel que $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \mathcal{L}$ si et seulement si les produits i_1, \dots, i_k ne peuvent pas être stockés ensemble.

Enjeu : Écrire une formule propositionnelle F telle que F est satisfaisable si le problème a une solution.

Les variables propositionnelles $\mathcal{P} = p(i, j)$, $i \leq n$, $j \leq k$ sont interprétées par "le produit chimique i est dans le camion j ".

On exprime deux propositions :

- Chaque produit se trouve dans un unique conteneur : $F = \underbrace{\left(\bigwedge_{i \leq n} \left(\bigvee_{j \leq k} p(i, j) \right) \right)}_{\text{Chaque produit } i \text{ est stocké dans au moins un camion } j} \wedge \underbrace{\left(\bigwedge_{i \leq n} \left(\bigwedge_{\substack{j, j' \leq k \\ j \neq j'}} (\neg(p(i, j) \wedge p(i, j'))) \right) \right)}_{\text{Pour chaque produit } i \text{ et chaque paire de camions } j \neq j' \text{ il est faux que } i \text{ est à la fois dans } j \text{ et } j'}$
- On respecte les incompatibilités : $G = \underbrace{\bigwedge_{I \subseteq \mathcal{L}} \left(\bigwedge_{j \leq k} \neg \left(\bigwedge_{i \in I} p(i, j) \right) \right)}_{\substack{\text{Pour chaque ensemble } I \text{ de produits} \\ \text{ne pouvant pas être stockés ensemble} \\ \text{et pour chaque camion } j, \\ \text{aucun produit de } I \text{ n'est présent dans le camion}}}$

4 Équivalence logique usuelles

Proposition 2. *Substitution*

Soient $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{F}$.

- Si F est une tautologie, la formule $F' = F[H_1/p_1, \dots, H_n/p_n]$ est une tautologie, où F' est la formule dans laquelle on remplace chaque p_i par H_i .
- Si $F \equiv G$ alors $F[H_1/p_1, \dots, H_n/p_n] \equiv G[H_1/p_1, \dots, H_n/p_n]$

Exemple 2. Soient $F = (p_1 \rightarrow p_1)$ et $H = ((q_1 \wedge \neg q_3) \vee q_3)$

Si F est une tautologie, alors $((q_1 \wedge \neg q_3) \vee q_3) \rightarrow ((q_1 \wedge \neg q_3) \vee q_3)$ est une tautologie.

Remarque 5. La réciproque est fausse.

Lemme 1. Soit $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$, $F \in \mathcal{F}$ et $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{F}$.

Soit v une valuation de \mathcal{P} avec $\forall i, v(H_i) = \delta_i$.

Alors la valuation v' définie par $v'(p_i) = \delta_i$ vérifie $\bar{v}(F[H_1/p_1, \dots, H_n/p_n]) = \bar{v}'(F)$

Preuve 1. Démontrons le lemme par induction structurale sur F .

On notera $F[H_1/p_1, \dots, H_n/p_n] := F[\bar{H}/\bar{p}]$

- Si $F = \perp$, alors $v(\perp) = v'(\perp) = 0$.
- Si $F = p_1 \in \mathcal{P}$, alors $F' = F[H_1/p_1] = H_1$ et $v'(p_1) = \delta_1 = v(H_1)$.
- Si $F = \neg G$, par hypothèse d'induction $v(G[\bar{H}/\bar{p}]) = v'(G)$.
 $v(F[\bar{H}/\bar{p}]) = 1$
 $v(G[\bar{H}/\bar{p}]) = 1 - v'(G) = v'(F)$

- Si $F = G_1 \wedge G_2$, par hypothèse d'induction

$$\begin{cases} v(G_1[\overline{H}/\overline{p}]) = v'(G_1) \\ v(G_2[\overline{H}/\overline{p}]) = v'(G_2) \end{cases}$$

$$\text{or } v(F[\overline{H}/\overline{p}]) = v(G_1[\overline{H}/\overline{p}]) \cdot v(G_2[\overline{H}/\overline{p}]) = v'(G_1) \cdot v'(G_2) = v'(F)$$

- etc.

□

Preuve 2. Preuve de la proposition Comme $F \equiv G$ si et seulement si $(F \longleftrightarrow G)$ est une tautologie.

On prouve seulement la première partie de la proposition.

Supposons F une tautologie, soit v une valuation de \mathcal{P} , par le lemme précédent il existe v' telle que $v(F[\overline{H}/\overline{p}]) = v'(F)$ comme F est une tautologie, $v'(F) = 1$ et $v(F[\overline{H}/\overline{p}])$ est une tautologie.

□

Par la suite, pour toutes formules propositionnelles A , B et C , les équivalences suivantes se montreront en substituant des variables aux formules.

Propriété 2.

- *Négation* : $\neg\neg A \equiv A$
- *Lois de Morgan* : $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \longrightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$
- *Associativité* : $(A \wedge (B \wedge C)) \equiv ((A \wedge B) \wedge C)$ et $(A \vee (B \vee C)) \equiv ((A \vee B) \vee C)$
- *Expression des connecteurs* : $\perp \equiv (A \wedge \neg A)$ et $\top \equiv (A \vee \neg A)$
- *Distributivité* : $(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
- *Idempotence* : $A \vee A \equiv A$ et $A \wedge A \equiv A$
- *Absorption* : $(A \wedge \perp) \equiv \perp$ et $(A \vee \top) \equiv \top$
- *Neutre* : $(A \wedge \top) \equiv A$ et $(A \vee \perp) \equiv A$

5 Formules normales

Ici $\mathcal{P} = \{x_1, \dots, x_n\}$

Définition 9.

- Un *littéral* est une variable ou une négation de variable.
- Une *clause* (ou *disjonction élémentaire*) est une formule C de la forme $C = \bigvee_{i \in A} x_i \vee \bigvee_{i \in B} \neg x_i$ où $A, B \subseteq \{1, \dots, n\}$.
- La longueur d'une clause C notée $|C|$ est son nombre de variables : $|C| = |A| + |B|$.
- Si $|C| = 1$, C est une *clause unitaire*.

Définition 10.

- F est sous *forme normale disjonctive* (FND ou DNF) si F est une disjonction de conjonctions élémentaires, c'est à dire si F est de la forme

$$F = \bigvee_{i=1}^m \left(\bigwedge_{j \in A_i} x_j \wedge \bigwedge_{j \in B_i} \neg x_j \right)$$

- F est sous *forme normale conjonctive* (FNC ou CNF) si F est une conjonction de disjonctions élémentaires, c'est à dire si F est de la forme

$$F = \bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{j \in A_i} x_j \wedge \bigvee_{j \in B_i} \neg x_j \right)$$

- Si la longueur de chaque clause est bornée par $l > 0$, on dit que F est l -FNC (de même pour l -FND).

Définition 11. Soit F sous forme FNC, c'est à dire si $F = \bigwedge_{i \in I} C_i$ où $(C_i)_{i \in I}$ sont des clauses, la longueur $|F|$ de F est :

$$|F| = \sum_{i \in I} |C_i|$$

Exemple 3.

- $F = (p \wedge q \neg r) \vee (\neg p \wedge r) \vee \neg r$ est une 3-FND.
- $F = p \vee \neg q$ est une 2-FNC à une clause et une 1-FND à deux clauses unitaires.

Remarque 6. Le nombre de clauses différentes possibles est borné : $|I| \leq 2^{|\mathcal{P}|}$

5.1 Tables de vérité et formes normales

Soit v une valuation de \mathcal{P} , on note :

$$C_v^1 = \left(\bigvee_{i \in A_1} x_i \right) \wedge \left(\bigvee_{i \in B_1} \neg x_i \right)$$

$$\text{où } \forall x_i \in \mathcal{P}, \begin{cases} v(x_i) = 1 \iff i \in A \\ v(x_i) = 0 \iff i \in B \end{cases} .$$

On a $A_1 \sqcup B_1 = \mathcal{P}$.

Lemme 2. Soit F une formule, F est équivalente à la FND suivante :

$$\bigwedge_{\substack{v : \mathcal{P} \longrightarrow \{0,1\} \\ \bar{v}(F)=1}} C_v^1$$

On note à présent :

$$C_v^0 = \left(\bigvee_{i \in B} x_i \right) \vee \left(\bigvee_{i \in A} \neg x_i \right)$$

Lemme 3. Soit F une formule, F est équivalente à la FNC suivante :

$$\bigwedge_{\substack{v : \mathcal{P} \longrightarrow \{0,1\} \\ \bar{v}(F)=0}} C_v^0$$

5.2 Systèmes complets de connecteurs

Définition 12. Un système de connecteurs est fonctionnellement complet si toute table de vérité est représentable ar une formule utilisant ces seuls connecteurs.

Corollaire 1. $\{\wedge, \vee, \neg\}$ est fonctionnellement complet, de même pour $\{\wedge, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{\rightarrow, \neg\}$ et $\{\perp, \rightarrow\}$.

5.3 Mise sous forme normale

On cherche comment construire une forme normale équivalente à une formule F donnée, il faut :

- construire la table de vérité de F
- en déduire une FND ou une FNC

Cette méthode est très coûteuse car elle oblige à en passer par l'examen de toutes les valuations. Une autre méthode consiste à jouer avec les équivalences pour trouver une FND ou FNC.

6 Formes normales complètes et bornes inférieures de FND

Définition 13. Soient F une formule sur \mathcal{P} et C une conjonction élémentaire.

On dit que C est *impliquant* de F (ou que F absorbe C) si $(C \rightarrow F)$ est valide.

Remarque 7. $(C \rightarrow F)$ est valide si et seulement si :

$$\forall v : \mathcal{P} \longrightarrow \{0,1\}, (\bar{v}(C) = 1 \implies \bar{v}(F) = 1)$$

Le terme d'absorption est justifié par le fait que $(C \rightarrow F)$ soit valide si et seulement si $C \vee F \equiv F$.

Définition 14. Soit C_1 une conjonction élémentaire, C_1 est un impliquant premier de F si :

- C_1 est un impliquant de F
- aucun impliquant C_2 de F n'absorbe C_1 , c'est-à-dire : pour toute conjonction élémentaire C_2 , si $(C_2 \rightarrow F)$ est valide alors $(C_1 \rightarrow C_2)$ n'est pas valide (c'est à dire $C_1 \vee C_2 \not\equiv C_2$).

En résumé, C_1 est un impliquant de C_2 si et seulement si $(C_1 \rightarrow C_2)$ est valide, si et seulement si $(C_1 \vee C_2 \equiv C_2)$, et si et seulement si C_2 absorbe C_1 .

Exemple 4. $C_2 = (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)$ est un impliquant de $C_1 = (x_1 \wedge \neg x_2)$ car pour toute valuation v , si $\bar{v}(C_2) = 1$, alors $\begin{cases} v(x_1) = 1 \\ v(x_2) = v(x_3) = 0 \end{cases}$ et donc $\bar{v}(C_1) = 1$.
 C_2 est "plus général" que C_1 .

Lemme 4. Soient $C_1 = \bigwedge_{i \in A_1} \neg x_i$ et $C_2 = \bigwedge_{i \in A_2} \neg x_i$
 C_1 est un impliquant de C_2 (C_2 absorbe C_1) si et seulement si $A_2 \subseteq A_1$ et $B_2 \subseteq B_1$.

Exercice 2. Le démontrer.

Exemple 5. $C_1 = x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_4$ et $C_2 = x_1 \wedge \neg x_3$
 C_2 absorbe C_1 .

Lemme 5. Soient $C = \bigwedge_{i \in A} l_i$ où $(l_i)_i$ sont des littéraux et F est une formule.
 C est un impliquant premier de F si et seulement si :

- C est un impliquant de F
- Pour tout $j \in A$, on a que $C_j = \bigwedge_{\substack{i \in A \\ i \neq j}} l_i$ n'est pas un impliquant de F .

Exercice 3. Le démontrer.

Remarque 8. Soit $F = \bigvee_{i \in I} D_i$, chaque D_i est un impliquant de F .

Proposition 3. Toute formule propositionnelle peut être mise sous forme normale disjonctive dont toutes les clauses élémentaires sont les impliquants premiers de F . Une telle FND est dite complète.

Preuve 3. Soit n le nombre de variables, à équivalence logique près il n'existe qu'un nombre fini de conjonctions élémentaire (au plus 3^n) donc d'impliquants premiers de F .

Par exemple : $\mathcal{P} = \{x_1, x_2, x_3\}$, chaque variable peut apparaître ou pas dans la clause.

Si elle apparaît, cela peut être positivement ou négativement.

Soient $(D_i)_{i \leq m}$ des impliquants premiers de F .

- F absorbe chacun de ses impliquants

- F est équivalente à une FND : $\bigvee_{i \in A} C_i$

donc par associativité de la disjonction :

$$F \equiv \bigvee_{i \in A} C_i \vee \bigvee_{i=1}^m D_i$$

Pour tout j , par absorption, $\bigvee_{i \in A} C_i \vee D_j \equiv F$.

Chaque C_i est un impliquant :

- Soit C_i est premier
- Soit C_i est absorbé par un impliquant premier D_j (c'est à dire $C_i \vee D_j \equiv D_j$).

Par associativité et absorptions successives, on a :

$$F = \bigvee_{i=1}^m D_i$$

Notation 4. Par abus de langage, on appelle les modèles de F l'ensemble des valuations S_F satisfaisant F .

Si C est un impliquant de F , $S_C \subseteq S_F$ et si C est un impliquant premier de F , S_C est maximal au sens de l'inclusion.

Définition 15. Soient $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$, $F = \bigvee_{i \in I} C_i$ et C_i des conjonctions élémentaires.

- F est *première* si chaque C_i est un impliquant premier.
- F est *redondante* s'il existe $j \in I$ tel que $F \equiv \bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} C_i$
- F est *non-redondante* si pour tout $j \in I$, $F \not\equiv \bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} C_i$.

La redondance est une généralisation de la notion d'absorption : si C_j vérifie $F \equiv \bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} C_i$, alors C_j est absorbée

par $\bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} C_i$

Exemple 6. $C_1 = x \wedge y$, $C_2 = x \wedge \neg y$, $C_3 = x$ et $F = \bigvee_{i=1}^3 C_i$, on a $F \equiv \bigvee_{i=1}^2 C_i \equiv C_3$ car C_1 et C_2 sont des impliquants de C_3 .

Lemme 6. Si F est complète, alors F est première, mais l'inverse n'est pas vrai si la forme complète est redondante.

Ces notions sont utiles pour caractériser des FND (de longueurs) minimales de certaines formules.

6.1 Formules propositionnelles positives

Définition 16. Soit \mathcal{P} un ensemble de variables propositionnelles, on définit l'ordre \leq sur les valuations par

$$\forall v_1, v_2 : \mathcal{P} \longrightarrow \{0, 1\}, v_1 \leq v_2 \iff \forall x \in \mathcal{P}, v_1(x) \leq v_2(x)$$

Définition 17. Une formule F est *positive* si pour tout valuation v_1, v_2 telles que $v_1 \leq v_2$ on a $\overline{v_1}(F) \leq \overline{v_2}(F)$.

Proposition 4. Soit F une formule, elle est positive si et seulement si tous les impliquants premiers de F sont positifs, c'est-à-dire si elle ne contient aucun littéral négatif.

Remarque 9. Si une formule est positive alors elle peut être écrite sans utiliser de négation.

Preuve 4.

F positive $\implies F$ tous les littéraux de F sont positifs

Soit F une formule positive, et C un impliquant premier de F contenant un littéral négatif.

$$C = \bigwedge_{i \in A} x_i \wedge \bigwedge_{i \in B} \neg x_i, B \neq \emptyset$$

$C' = \bigwedge_{i \in A} x_i$ absorbe C , or C est un impliquant premier, donc C ne peut pas être absorbé par un autre impliquant de F .

Alors C' n'est pas un impliquant de F , d'où l'existence d'une valuation v satisfaisant C' mais pas F .

Si $\bar{v}(C') = 1$ alors $\forall i \in 1, v(x_i) = 1$ et $\forall i \in B, v(x_i) \in \{0, 1\}$.

C est un impliquant de F donc pour toute valuation v' , si $\bar{v}'(C) = 1$ alors $\bar{v}'(F) = 1$, par exemple :

$$\begin{cases} v'(x_i) = 1, \forall i \in A \\ v'(x_i) = 0, \forall i \in B \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \bar{v}(F) = 0, \forall i \in A \\ \bar{v}'(F) = 1, \forall i \in B \\ v' \leq v \end{cases}$$

On sait que F est positive alors $1 = v'(F) \leq v(F) = 0$, contradiction. \checkmark

F tous les littéraux de F sont positifs \implies F positive

On considère une forme (par exemple complète) de F :

$$F \equiv \bigvee_{i \in I} C_i$$

où $(c_i)_i$ sont des impliquants premiers de F .

Par hypothèse chaque C_i est positif, on doit montrer que F est positive, c'est-à-dire que

$$\forall v, v' : (v \leq v' \implies \bar{v}(F) \leq \bar{v}'(F))$$

Soit v une valuation, on pose $A_v = \{i | v(x_i) = 0\}$.

Par définition, pour tout j on a

$$\bar{v}(C_j) = 0 \iff C_j \text{ ne contient que des variables de } A_v$$

Soit v' une autre valuation telle que $v \leq v'$, on a $A_{v'} \subseteq A_v$, donc $\{C_j | \bar{v}(C_j) = 1\} \subseteq \{C_j | \bar{v}'(C_j) = 1\}$, d'où :

$$\bar{v}(F) \leq \bar{v}'(F)$$

\checkmark

Proposition 5. *Soit F une formule positive, alors la FND complète de F est positive et non-redondante. Elle est l'unique FND première de F .*

Remarque 10. Il n'existe pas de forme équivalente plus courte : aucun impliquant premier n'est redondant.

Preuve 5. Soit F une formule positive de variables x_1, \dots, x_n .

Par les propositions précédentes, la FND complète $\bigvee_{i \in I} C_i$ de F n'a que des impliquants premiers positifs.

Supposons par l'absurde qu'il existe $j \in I$ telle que C_j soit superflue (que F soit redondante), c'est à dire que $F \equiv \bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} C_i$.

On pose $C_j = \bigwedge_{a \in A} x_a$, considérons la valuation v telle que $v(x_a) = 1 \iff a \in A$. On a $\bar{v}(C_j) = 1$ donc $\bar{v}(F) = 1$.

Or $F \equiv \bigvee_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} C_i$, donc il existe $i \neq j$ tel que $\bar{v}(C_i) = 1$.

Posons à présent $C_i = \bigwedge_{b \in B} x_b$, on sait que C_i et C_j sont des impliquants premiers de F

Donc C_i (resp. C_j) n'absorbe pas C_j (resp. C_i), d'après une proposition précédente $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$, il existe alors $b \in B$ tel que $b \notin A$, donc $v(b) = 0$ et $\bar{v}(C_i) = 0$, ce qui est contradictoire.

Part II

Compléments

7 Calcul propositionnel

7.1 Théorème de lecture unique

Définition 18. Soient $w_0, w_1 = a_1 \dots a_n \in \mathcal{M}$, on dit que w_0 est un segment initial de w_1 , noté $w_0 \subseteq w_1$ si $w_0 = a_1 \dots a_i$ avec $1 \leq i \leq n$, et w_0 est un segment propre, noté $w_0 \subsetneq w_1$ si $i < n$.

Lemme 7. Soit $F \in \mathcal{F}$ et $G \subsetneq F$, alors $M \notin \mathcal{F}$

Autrement dit, aucune formule n'est le préfixe d'une autre.

Proposition 6. On note $o[F]$ le nombre de parenthèses ouvrantes d'une formule F et $f[F]$ pour ses parenthèses fermées.

$$1. \forall F \in \mathcal{F}, o[F] = f[F]$$

$$2. \forall F \in \mathcal{F}, \forall M \in \Sigma^*, M \subsetneq F \implies \begin{cases} o[M] > f[M], \text{ et donc } M \notin \mathcal{F} & (a) \\ \mathbf{x-ou} \ M = \neg \dots \neg \notin \mathcal{F} & (b) \\ \mathbf{x-ou} \ M = \varepsilon \notin \mathcal{F} & (c) \end{cases}$$

Preuve 6. Soient $F \in \mathcal{F}$ et $M \subsetneq F$, montrons le second point.

- Si $F = \neg G = \neg g_1 \dots g_n$
 - cas (c) : $M = \varepsilon$
 - cas (b) : $M = \neg$
 - $M = \neg g_1 \dots g_i \subsetneq G$, $i < n$
alors soit $o[M] = o[g_1 \dots g_i] > f[g_1 \dots g_i] = f[M]$, ce qui rentre dans le cas (a)
soit $g_1 \dots g_i = \underbrace{\neg \dots \neg}_{i \text{ fois}}$, alors $M = \underbrace{\neg \dots \neg}_{i+1 \text{ fois}}$: on est encore dans le cas (b).
- Si $F = (G \circ H) = (g_1 \dots g_m \circ h_1 \dots h_n)$ et $M \subsetneq F$, soit $M = \varepsilon$ (cas (c)), soit $M \neq \varepsilon$ avec
 - $M = ($ alors $o[M] = 1 > f[M] = 0$
 - $M = (g_1 \dots g_i$, $1 \leq i \leq m$, donc $o[M] = o[g_1 \dots g_i] + 1 > f[M] = f[g_1 \dots g_i]$
 - $M = (G \circ$ donc $o[M] = 1 + o[G] > f[M] = f[G]$
 - $M = (G \circ h_1 \dots h_i$, $1 \leq i \leq n$, alors $o[M] = 1 + o[G] + o[h_1 \dots h_i]$
 $o[M] = 1 + f[G] + o[h_1 \dots h_i] > f[G] + f[h_1 \dots h_i] = f[(G \circ h_1 \dots h_i)] = f[M]$

- Si $F \in \mathcal{P}$, $M = \varepsilon$, c'est le cas (c).

□

Preuve 7. Soit $F \in \mathcal{F}$

- Si $F \in \mathcal{P}$ pour tout $q \in \mathcal{P} \setminus \{F\}$, $q \neq F$.
 $\forall G \in \mathcal{F}$, $F \neq \neg G$ car $|\neg G| \geq 2 > 1 = |F|$
 $\forall G, H \in \mathcal{F}$, $\forall \star \in \{\wedge, \vee, \longrightarrow\}$, $(G \star H) \neq F$ car $|F| = 1 < 5 \leq |(G \star H)|$
- Si $F = \neg G$ avec $G \in \mathcal{F}$, pour tout $q \in \mathcal{F}$ on a $q \neq F$.
 $\forall H \neq G$ on a $\neg H \neq F$
 $\neg G \neq (H \star K)$ pour toute formules H et G et tout opérateur \star .
- Si $F = (G_1 \star G_2)$, supposons $F = (H_1 \circ H_2)$ que l'on réécrit

$$a_1 \dots a_k \star b_1 \dots b_l = c_1 \dots c_m \circ d_1 \dots d_n$$

Montrons $G_1 = H_1$, ce qui impliquera $\star = \circ$ et $G_2 = H_2$.

On est face à l'un des deux cas :

$$(*) \quad \underbrace{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}_{G_1 \in \mathcal{F}} \subseteq \underbrace{c_1 c_2 c_3 \dots c_m}_{H_1 \in \mathcal{F}}$$

$$(**) \quad c_1 c_2 c_3 \dots c_m \subseteq a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

les deux cas sont symétriques, on suppose (*) et par l'absurde que $G_1 \neq H_1$, c'est à dire $G_1 \subsetneq H_1$, ce qui implique d'après le lemme $G_1 \notin \mathcal{F}$.

On a également $\forall F \in \mathcal{F}$, $\neg G \neq (G_1 \star G_2)$ et $\forall p \in \mathcal{P}$, $p \neq (G_1 \star G_2)$.

□

Exercice 3 Soit $C = \bigwedge_{i \in I} l_i$ et F telle que C soit un impliquant de F .

S'il existe j tel que C_j implique F , alors C n'est pas premier

Supposons qu'il existe j tel que C_j soit un impliquant de F .

$C = C_j \wedge l_j$ alors si une valuation v est telle que $\bar{v}(C) = 1$, c'est que $\bar{v}(C_j) = \bar{v}(l_j) = 1$

Cela signifie que C est un impliquant de C_j , C n'est donc pas un impliquant premier de F . ✓

Si pour tout j C_j n'implique pas F , alors C est premier

✓