Université Paris 7 — Paris Diderot
Licence de Mathématiques
Topologie et calcul différentiel

Année 2011-2012
U1TC35/U2TC35

Examen partiel du 2 novembre 2011

I − On considère un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E muni d'une norme $\|\ \|$. On note d la distance sur E associée à cette norme. Soit K un compact non vide contenu dans E. Pour tout $x \in E$, on pose :

$$d(x,K) = \inf_{y \in K} d(x,y)$$

1) Montrer qu'il existe une fonction f de E dans K telle que :

$$\forall x \in E, \quad d(x, f(x)) = d(x,K)$$

Déterminer l'image de f.

2) On suppose que f est continue. Montrer que K est connexe.

II − On considère un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E muni d'une norme $\|\ \|$. On note d la distance sur E associée à cette norme. Soient X et Y deux parties non vides de E. Pour tout réel $c \geq 0$, on note $Z(c)$ le sous-ensemble de $E \times E$ formé des couples $(x,y) \in E \times E$ tels que :

$$x \in X, \quad y \in Y, \quad d(x,y) \leq c$$

1) On suppose X et Y fermés. Montrer que $Z(c)$ est fermé.

2) Soit x un point de l'adhérence $\overline{X}$ de X et y un point de Y. Soit c un réel strictement supérieur à $d(x,y)$. Montrer que (x,y) appartient à l'adhérence de $Z(c)$.

3) On suppose que pour tout $c \geq 0$, $Z(c)$ est fermé. Montrer que X et Y sont fermés.

4) On suppose E de dimension finie. On suppose X fermé et Y compact. Montrer que $Z(c)$ est compact.

III − Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et croissante (au sens large). Pour tous réels x et y on pose : $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$.

1) Montrer que d est une distance sur $\mathbf{R}$ si et seulement si f est strictement croissante.

2) On suppose dorénavant f strictement croissante. Montrer que toute boule ouverte de $(\mathbf{R}, d)$ est un ouvert de $\mathbf{R}$.

3) Montrer que la topologie de $(\mathbf{R}, d)$ est la topologie usuelle de $\mathbf{R}$.

4) Construire une isométrie de $(\mathbf{R}, d)$ sur un ouvert de $\mathbf{R}$.

5) On suppose que f est la fonction $x \mapsto e^x$. Montrer qu'il existe une boule fermée de $(\mathbf{R}, d)$ qui n'est pas compacte.

Corrigé et résultats sur :
http ://www.math.jussieu.fr/~vogel/topo-cd.cor.pdf
http ://www.math.jussieu.fr/~vogel/topo-cd.res.pdf