Université Paris Diderot
UFR de Mathématiques

Année 2015/2016
U1TC35

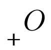
VIII. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

1) a) Montrer qu'une submersion C^∞ envoie un ouvert sur un ouvert.

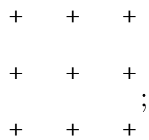
b) Montrer qu'une immersion C^∞ se restreint en un plongement C^∞ dans un certain voisinage de chaque point de son ensemble de définition.

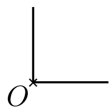
c) Montrer qu'une application $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ injective de classe C^∞ vérifiant $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\|\gamma(t)\| \underset{|t|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ est un plongement.

2) Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ sont-elles des sous-variétés C^∞ ?

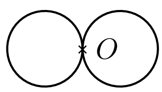
A : 

$x = y = 0$;

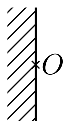
B : 
$x, y \in \mathbb{Z}$;

C : 

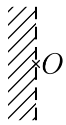
;

D : 

;

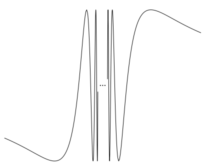
E : 

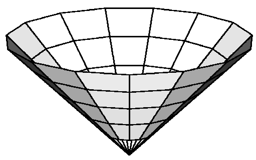
$x > 0$;

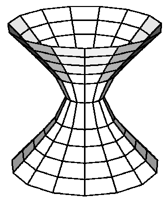
F : 

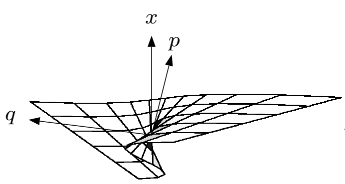
$x \geq 0$;

G : 
$y^2 = x^3$;

H : 
$x \neq 0$ et $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;

I : 
$x^2 + y^2 = z^2$ et $z \geq 0$;

J : 
$x^2 + y^2 - z^2 = 1$;

K : 

$x^3 + px + q = 0$.

3) a) La projection d'une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$, sur $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ (identifié à $\mathbb{R}^p$), est-elle toujours une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^p$?

b) La réunion de deux sous-variétés C^∞ de $\mathbb{R}^n$ est-elle toujours une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$? Cas de l'intersection ?

c) Le produit $X \times Y$ d'une sous-variété C^∞ X de dimension d de $\mathbb{R}^p$ par une sous-variété C^∞ Y de dimension e de $\mathbb{R}^q$ est-il toujours une sous-variété C^∞ de dimension $d+e$ de $\mathbb{R}^{p+q}$?

4) Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ sont-elles des sous-variétés C^∞ ?

– dans $\mathbb{R}^2$: $A \left| \begin{array}{l} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin(2t) \end{array} \right.$, $0 < t < \pi$; $B \left| \begin{array}{l} x(t) = t - \frac{1}{t^2} \\ y(t) = 2t - t^2 \end{array} \right.$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

– dans $\mathbb{R}^3$: $C : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{5} = 1$; $D : (x + \frac{2}{5})^2 + y^2 = 1$; $E = C \cap D$;

$F : x^3 - z = 0$ et $y^3 - z^2 = 0$; $G : z = \sqrt[3]{x+y}$; $H : z = |x+y|^3$;

$I : \overrightarrow{OM} = \big(2 + t\cos(\frac{\theta}{2})\, \underbrace{\overrightarrow{u}_\theta\big) + t\sin(\frac{\theta}{2})\, \overrightarrow{k}}_{\text{coord. cylindriques}}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $-1 < t < 1$.

5) Déterminer, avec les notations de l'exercice précédent, les espaces tangents suivants :

$T_{\left(\frac{7}{4},0\right)}B$; $T_{\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5},2\right)}E$; $T_{(1,1,1)}F$; $T_{(1,-1,0)}G$; $T_{(0,2,0)}I$.