MP4 | Université Paris 7
2012-2013 | Denis Diderot

EXAMEN
Première Session
Vendredi 17 Mai (durée 3h)

Exercice 1.

1. (Préliminaire)
   (a) Pour chaque entier n, soit $I_n = \int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$. En faisant une intégration par parties, calculer I_{n+1} en fonction de I_n.
   (b) Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3.
2. Calculer $I = \iiint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, où
   $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/(x^2+y^2) - 1 < z < 1 - (x^2+y^2)\}$ (On pourra faire le calcul en coordonnées cylindriques).

Exercice 2. Notons $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes (à une variable) à coefficients réels et de degré ≤ 3. On s'intéresse ici plus spécialement au sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/P(0) = 0\}.$$

On définit sur E le produit scalaire suivant :

$$\langle P, Q\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Donner la matrice M de ce produit scalaire dans la base $\underline{P} = (P_1, P_2, P_3)$ de E, où pour $k \in \{1,2,3\}$, $P_k(t) = t^k$.
2. En munissant E du produit scalaire ci-dessus, on en fait un espace euclidien. Montrer que l'orthonormalisé de Gram-Schmidt de $\underline{P}$ est $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où :

$$\varepsilon_1 = \sqrt{3}P_1 \ ; \ \varepsilon_2 = \sqrt{5}P_2 \ ; \ \varepsilon_3 = \frac{5\sqrt{7}}{2}(P_3 - \frac{3}{5}P_1).$$

3. (a) Soit $P \in E$. On l'écrit $P = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3$ (où $a,b,c \in \mathbb{R}$). Calculer $P(1)$ en fonction de a, b et c.
   (b) Considérons le sous-espace vectoriel F de E défini par :

$$F = \{P \in E/P(1) = 0\}.$$

   Construire une base orthonormée de $F^{\perp}$.

(c) En déduire la distance de P_1 à F.

Exercice 3. Considérons les plans vectoriels P_0 et P_1 de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ définis par les équations suivantes :

$$P_0 : \ x + y = 0 \ , \ P_1 : \ y + z = 0.$$

1. Pour chacun des sous-espaces $P_0^\perp$, P_0 , $P_1^\perp$ et P_1 de $\mathbb{R}^3$, construire une base orthonormée.
2. On note σ_0 et σ_1 les symétries orthogonales par rapport P_0 et P_1. Calculer les matrices S_0 de σ_0 et S_1 de σ_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. On pose $\sigma = \sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \sigma_0$. Montrer que la matrice de σ dans la base canonique est :
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
4. Montrer que σ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan P que l'on déterminera.(On pourra d'abord montrer que σ est un endomorphisme à la fois symétrique et orthogonal) .
5. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle σ se diagonalise. Calculer la matrice de σ dans cette base.

Exercice 4. Soit le système différentiel suivant :

$$(S) \begin{cases} x' = -2x + 4y - 3 \\ y' = -4x + 2y - 3 \end{cases}$$

1. Montrer que le système (S) admet un unique point d'équilibre X_0 que l'on calculera.
2. (a) Donner une base de l'espace vectoriel réel des solutions réelles de (H) : Le système homogène associé à (S).
   (b) En déduire l'ensemble des solutions réelles du système (S) (On pourra utiliser le (1)).
3. Montrer que chaque trajectoire de (S) vérifie une équation de la forme : $h(x, y) = k$ où $h(x, y) = 3(x - y + 1)^2 + (x + y)^2$ et où k est une constante positive.
4. (a) Dans le système (H), 0 est-il stable ?
   (b) Dans le système (S), X_0 est-il stable ?