Exercice 1

On considère un ordinateur dans lequel les données (binaires) sont stockées dans des registres de 16 bits.

a) Sachant que le premier bit est dédié au codage du signe, donner le plus petit et le plus grand entier représentables sur ce système, ainsi que le nombre d'entiers qu'il est possible d'écrire ainsi. Ce nombre est impair. Pourquoi ?

b) On s'intéresse maintenant aux nombres réels écrits dans la représentation flottante. Le premier bit sert toujours à coder le signe. La mantisse utilise 9 bits et l'exposant 6 bits. Calculer (en base 10) le nombre de chiffres significatifs de cette représentation ainsi que le plus grand réel possible et le plus petit réel strictement positif que l'on peut écrire ainsi. Évaluer l'ordre de grandeur de ε_0 tel que, avec l'arithmétique associée, on ait $1 + \varepsilon = 1, \ \ \forall \varepsilon < \varepsilon_0$.

Exercice 2 (Matrices de Hilbert)

On note H_n la matrice de Hilbert d'ordre n dont le terme générique vaut $\frac{1}{i+j-1}$. Pour $n = 2$ on a

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer H_2^{-1}.

b) On considère la norme ∞ sur $\mathbb{R}^n$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ ||x||_\infty = \max_{i=1..n} |x_i|$$

On admet que la norme matricielle subordonnée à la norme ∞ s'écrit

$$\forall A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \ ||A||_\infty = \max_{i=1..n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Calculer le conditionnement $\mathrm{cond}_\infty(H_2)$ de la matrice de Hilbert d'ordre 2 pour cette norme.

c) Proposer un second membre $b \in \mathbb{R}^2$ et une perturbation de ce second membre $\delta b \in \mathbb{R}^2$, ainsi qu'un vecteur solution $x \in \mathbb{R}^2$ tels que, si

$$H_2 x = b \quad \text{et} \quad H_2(x + \delta x) = b + \delta b,$$

alors on réalise l'égalité dans l'inégalité vue en cours

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq \mathrm{cond}(H_2)\frac{||\delta b||}{||b||}$$

d) On considère la matrice perturbée

$$H_2' = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 3/10 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système $H_2' x = b$ avec $b = (9,5)^T$. Évaluer le facteur d'amplification de l'erreur relative sur x en fonction de l'erreur relative sur la matrice H_2 en norme ∞.

Exercice 3 (calcul de π)

a) On cherche à évaluer sur l'ordinateur de façon précise, pour de petites valeurs de x, la fonction $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

Que se passe-t-il lorsque $|x| < \sqrt{\varepsilon_0}$, où ε_0 est la valeur critique associée à l'arithmétique de l'ordinateur telle que $1 + \varepsilon_0 = 1$ pour la machine ?

b) Modifier l'expression de $f(x)$ pour obtenir une formule qui ne soit pas sensible à ces erreurs d'annulation.

On cherche maintenant à calculer une valeur approchée de π par la méthode des polygones inscrits (découverte par Archimède en 250 avant J.C.).

c) On note A_n la valeur de l'aire d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1. Déterminer l'expression de A_n en fonction de l'angle $\alpha_n = 2\pi/n$ et une relation entre A_n et A_{2n}. On pose $n = 2^k$. En déduire une relation de récurrence pour la suite $x_k = A_{2^k}$. Quelle est la limite de x_k lorsque $k \to \infty$?

d) Si on pose $s_k = \sin(\frac{2\pi}{2^k})$, quelle est la limite de s_k lorsque $k \to \infty$? L'expression trouvée au c) est-elle adaptée à un calcul par ordinateur ? Si l'arithmétique de l'ordinateur a 15 chiffres significatifs, à partir de quel rang k obtiendra-t-on $x_k = 0$?

Proposer une modification de l'expression de la formule de récurrence (similaire à celle trouvée à la question b) pour éviter ce problème.

e) Mêmes questions que c) et d) pour la méthode des polygones circonscrits qui donne une valeur approchée par excès de π.