Université Denis Diderot - Paris 7 — Année 2012-2013
L3 - Topologie et calcul différentiel — Examen

Le 11 janvier 2013, 8h30 – 11h30.

Les documents et appareils électroniques (calculatrices et téléphones en particulier) sont interdits. Les réponses doivent être justifiées de façon claire et précise.

Question de cours. Enoncer le théorème des fonctions implicites.

Exercice 1. Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques non vides. On munit l'espace produit $E = E_1 \times E_2$ de la distance

$$\forall x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \quad \forall y = (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2, \quad d\,(x, y) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)).$$

On note p la projection de E sur E_1 :

$$p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_1 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1. \end{array}$$

(1) Démontrer que l'application p est continue.

(2) Soit $x \in E$, soit $r > 0$. On désigne par $B_r(x)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r. Démontrer que $p(B_r(x))$ est une boule ouverte de E_1, dont on précisera le centre et le rayon.

(3) Soit $x \in E$, soit $r > 0$. On désigne par $\overline{B}_r(x)$ la boule fermée de centre x et de rayon r. Démontrer que $p(\overline{B}_r(x))$ est une boule fermée de E_1, dont on précisera le centre et le rayon.

(4) Démontrer que pour tout ouvert U de E, $p(U)$ est un ouvert de E_1.

(5) Soit (E', d') un espace métrique, et $f : E_1 \longrightarrow E'$.

  (a) Montrer que si $U \subset E'$, alors $f^{-1}(U) = p\left((f \circ p)^{-1}(U)\right)$.

  (b) En déduire que f est continue de E_1 dans E' si et seulement si $f \circ p$ est continue de E dans E'.

(6) On considère le cas où $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$. On pose $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ x_1 x_2 = 1\}$.

  (a) F est-il fermé ?

  (b) $p(F)$ est-il fermé ?

Exercice 2. Soit (E, d) un espace métrique. On dit que la distance d est ultramétrique si elle vérifie

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E, \forall z \in E, \quad d(x, z) \leq \max\left(d(x, y), d(y, z)\right).$$

(1) On définit la distance d par $\forall x \in E,\ \forall y \in E, \quad d(x, y) = 1$ si $x \neq y$, et $d(x, x) = 0$. Démontrer que d est ultramétrique.

(2) On suppose dans cette question que d est ultramétrique.

  (a) Soient x, y, z des éléments de E. Démontrer que si $d(x, y) \neq d(y, z)$, alors $d(x, z) = \max\left(d(x, y), d(y, z)\right)$.

  (b) Démontrer qu'une boule ouverte est à la fois ouverte et fermée.

(c) Démontrer qu'une boule fermée est à la fois ouverte et fermée.

(d) Démontrer que si deux boules ouvertes ont un point commun, l'une est contenue dans l'autre.

(3) Soit p un nombre premier. Pour $n \in \mathbb{Z}^*$, on note $\nu(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de $|n|$ en facteurs premiers. Pour tout nombre rationnel non nul $x = \pm\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on pose $\nu(x) = \nu(a) - \nu(b)$.

(a) Pour $x \in \mathbb{Z}^*$ et $y \in \mathbb{Z}^*$, calculer $\nu(xy)$ en fonction de $\nu(x)$ et $\nu(y)$.

(b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{Q}^*$, $\nu(x)$ ne dépend pas du choix de la représentation $x = \pm\frac{a}{b}$.

(c) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{Q}^*, \ \forall y \in \mathbb{Q}^*, \quad \nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$.

(d) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{Z}^*, \ \forall y \in \mathbb{Z}^*$, tels que $x+y \neq 0$, $\nu(x+y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$.

(e) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{Q}^*, \ \forall y \in \mathbb{Q}^*$, tels que $x+y \neq 0$, $\nu(x+y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$.

(f) Sur $\mathbb{Q}$, on définit la distance d par

$$d(x,y) = p^{-\nu(x-y)} \text{ si } x \neq y, \quad d(x,x) = 0.$$

Démontrer que d est une distance ultramétrique.

(g) Démontrer que la suite $x_n = p^n$ vérifie $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, pour la distance d définie ci-dessus.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique compact, et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que la suite $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de fonctions continues converge simplement vers f. On suppose de plus que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est-à-dire que

$$\forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) \leq f_{n+1}(x).$$

(1) Démontrer que $\forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) \leq f(x)$.

(2) En supposant que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f n'est pas uniforme, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x_n) \leq f(x_n) - \varepsilon.$$

(3) En déduire l'existence d'un $x \in X$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) \leq f(x) - \varepsilon$.

(4) Conclure que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme.

Exercice 4. On définit

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x^2 + 2y^2 + z^2 - 5, x^2 + y^2 - 2z), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & y + z. \end{array}$$

On pose $P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y,z) = (0,0)\right\}$.

(1) Démontrer que les applications φ et f sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

(2) Démontrer que P est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^3$.

(3) Calculer la jacobienne $D\varphi(x,y,z)$ en un point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$.

(4) Déterminer le rang de $D\varphi(x,y,z)$ pour $(x,y,z) \in P$.

(5) Trouver les points d'extremum de f sur P et préciser s'il s'agit de maxima ou de minima.