Fonctions holomorphes

Pierre Gervais et David Gerard-Varet

January 20, 2017

Contents

1 Rappels

Rappel 1. $K \subseteq \mathbb{C}$ est un compact si et seulement si de tous recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini, ou de manière équivalente si K est un fermé borné, ou encore si toute suite à valeurs dans K admet une sous-suite convergente.

Rappel 2. $A \subseteq \mathbb{C}$ est connexe si A ne peut pas s'écrire comme union disjointe de deux ouverts de A non-vides, ou bien si A ne peut pas s'écrire comme union disjointe de deux fermés de A non-vides, ou bien si les seules parties ouvertes et fermées de A sont A et $\emptyset$.

Exemple 1. $A = D(0,1) \cup \overline{D}(3,1)$ n'est pas connexe.

Rappel 3. Soit $A \subseteq \mathbb{C}$, $f : A \longrightarrow \{0,1\}$, si A est connexe et f est continue alors f est constante.

Rappel 4. $A \subseteq \mathbb{C}$ est connexe par arc si pour tous $x, y \in A$, il existe un chemin $\gamma : [0,1] \longrightarrow A$ continu tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Rappel 5. Si A est connexe par arc, alors A est connexe.

Rappel 6. Si A est convexe, alors A est connexe.

Rappel 7. Soit $x \in A$, la composante connexe de x est l'union des connexes de A contenant x, c'est le plus grand connexe contenant x.

A est l'union disjointe de ses composantes connexes.

Exemple 2. $A = D(0,1) \cup \overline{D}(3,1)$ possède deux composantes connexes, elles apparaissent dans son écriture.

Exemple 3. $A = \mathbb{Z}$, les composantes connexes sont les singletons.

2 Séries entières et fonctions DSE (fonctions développables en série entière)

Par la suite, on considérera toujours les fonctions $U \longrightarrow \mathbb{C}$ ou U est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 1. Un *série entière* est une série de fonctions de la forme

$$z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

où $(a_n)_n$ est une suite complexe.

Proposition 1. *Soit $\varrho := \sup\{r \geqslant 0 \mid \forall n \geqslant 0,\ |a_n| r^n < +\infty\}$, alors pour tout $r < \varrho$ la série entière converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$ et diverge pour tout z tel que $|z| > r$.*

Remarque 1. ϱ est appelé rayon de convergence de la série entière et $D(0,\varrho)$ est le disque de convergence de la série entière.

On ne peut rien affirmer sur le cercle de rayon ϱ.

Preuve 1. Soit $r < \varrho$, il existe r' tel que $r < r' \leqslant \varrho$ (par définition de la borne supérieure) tel que $|a_n|(r')^n$ soit borné, on a alors

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{N} |a_n| (r')^n \left(\frac{r}{r'}\right)^n \leqslant \left(\sup_k |a_k| (r')^k\right) \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{r}{r'}\right)^n$$

ce qui est borné (série géométrique).

La série entière converge donc normalement.

Proposition 2. *Si* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \ell$, $(n \to +\infty)$ *alors* $\varrho = \frac{1}{\ell}$ *si* $\ell > 0$, *et* $\varrho = +\infty$ *si* $\ell = 0$.

Cette propriété vient du critère de D'Alembert.

Exemple 4. Les séries entières suivantes ont pour rayon de convergence 1 : $\sum z^n$, $\sum nz^n$, $\sum(-1)^n z^n$.

Somme et produit de séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, deux séries entières de rayons de convergence ϱ_1 et ϱ_2 de sommes f_1 et f_2.

On pose $s_n := a_n + b_n$ et $p_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Proposition 3. *Les séries entières somme et produit ont des rayons de convergence supérieurs ou égaux à* $R := \min\{\varrho_1, \varrho_2\}$ *et leurs sommes sur* $D(0,R)$ *sont* $f_1 + f_2$ *et* $f_1 \cdot f_2$.

Remarque 2. Le produit (de Cauchy) de deux séries réelles converge si au moins l'une des deux séries converge absolument.

3 Fonctions analytiques (ou DSE)

Définition 2. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $z_0 \in U$. $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *analytique* en z_0 s'il existe $r > 0$ tel qu'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $\varrho \geqslant r$ tels que

$$\forall z \in D(z_0, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

f est analytique sur U si elle est analytique en tout point de U.

Exemple 5. Les polynômes sont analytiques sur $\mathbb{C}$. Soit $P(z) = \sum_{n=0}^{N} p_n z^n$, on a pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{P^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

3.1 Zéros isolés et prolongement analytique

Proposition 4. *Principe des zéros isolés (version série entière)*

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ *la somme d'une série entière de rayon de convergence* $\varrho > 0$ *et telle que* $f(0) = 0$ *(donc que* $a_0 = 0$*). S'il existe* $n \geqslant 1$ *tel que* $a_n \neq 0$, *alors* $z = 0$ *est un zéro isolé de* f , *c'est-à-dire qu'il existe* $r > 0$ *tel que* f *soit non-nulle sur* $D(0, r) \setminus \{0\}$

Preuve 2. Soit $m := \min\{n \mid a_n \neq 0\}$, m est bien défini par hypothèse et

$$f(z) = z^m \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^{n-m}}_{g(z)}$$

avec $g(0) = a_m \neq 0$ et g est continue en 0.

Donc il existe $r > 0$ telle que $g(z) \neq 0$ pour tout z tel que $|z - z_0| < r$ et donc $f \neq 0$ sur $D(0,r) \setminus \{0\}$

□

Remarque 3. On en déduit que si $f = 0$ au voisinage de 0 (ou s'il n'existe aucun voisinage de 0 dans lequel $f \neq 0$), alors $a_n = 0,\ \forall n$, mais aussi que si $\sum a_n z^n = \sum b_n z^n$ dans les mêmes conditions, alors $a_n = b_n,\ \forall n$.

Corollaire 1. Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in U$, si f est analytique en z_0, alors le développement associé est unique.

Preuve 3. Si $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n = \sum b_n (z - z_0)^n$ pour $|z - z_0| < r$ avec r assez petit, alors la série entière $\sum (a_n - b_n) z^n$ est nulle sur $D(0,r)$, donc $z = 0$ est un zéro non-isolé et $a_n - b_n = 0$ pour tout n.

Théorème 1. *Principe du prolongement analytique*

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions analytiques sur U.

Si f et g coïncident sur une partie $\Sigma \subseteq U$ admettant un point d'accumulation de U, alors f et g coïncident sur U.

Rappel 8. Un point d'accumulation $z_0 \in \mathbb{C}$ de Σ est la limite de points dans $\Sigma \setminus \{z_0\}$

Preuve 4.

Etape 1 f et g sont analytiques en z_0 avec $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ et $g(z) = \sum b_n (z - z_0)^n$ pour z dans un voisinage de z_0.

On a $f(z) - g(z) = \sum (a_n - b_n)(z - z_0)^n$ qui est nulle sur Σ, et donc en z_0 par passage à la limite. Comme z_0 est un point d'accumulation de Σ, z_0 n'est pas un zéro isolé de la série entière $\sum (a_n - b_n)(z - z_0)^n$ (car il n'existe aucun voisinage de z_0 dans lequel elle est nulle), donc $a_n = b_n$ pour tout n par unicité du développement.

Etape 2 On introduit $A = \{b \in U \mid f = g \text{ au voisinage de } b\ \}$. On a $A \neq \emptyset$ car il contient z_0 par l'étape 1. Comme U est connexe, il suffit de montrer que A est ouvert et fermé dans U (on aura ainsi $A = U$ et le résultat)

- A est ouvert : soit $b \in A$, f et g coïncident sur le disque $D(b,r)$ pour un certain $r > 0$, alors $D(b,r) \subseteq A$.
- A est fermé : soit $(b_n)_n$ une suite convergente à valeurs dans A et de limite b (on peut supposer $b_n \neq b,\ \forall n$). $(b_n)_n$ est alors une suite à valeurs dans $A \setminus \{b\}$ et b est donc un point d'accumulation de A.

  Alors par l'étape 1, on a $f = g$ au voisinage de b, donc $b \in A$.

□