INTERROGATION N. 5

NOM :
PRÉNOM :

Exercice 1 - On pose $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$. Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur X définie par : $(p,q)\mathcal{R}(p',q') \Leftrightarrow pq' = p'q$.

(1) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Pour tout $(p,q) \in X$, on note $\pi(p,q)$ sa classe d'équivalence.

(2) Démontrer qu'il existe une et une seule application $f\colon X/\mathcal{R} \to \mathbb{Q}$ telle que $f\circ\pi(p,q) = \frac{p}{q}$ pour tout $(p,q) \in X$.

Exercice 2 - On admet que l'ensemble $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid (\exists a,b,c \in \mathbb{R}) \ \ ac \neq 0 \text{ et } M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et on note $\Phi\colon G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\Phi\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right), x\right) = \frac{ax+b}{c}$.

(1) Démontrer que Φ est une action de groupe.

(2) Est-elle fidèle ?

Exercice 1 : (1) On remarque que :

$(\forall (p,q), (p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \quad (p,q)\, \mathcal{R}\, (p',q') \Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$.

Donc, R est une relation d'équivalence car la relation binaire "être égal à" en est une.

(2) Soit $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par $\varphi(p,q) = \frac{p}{q}$. En particulier

$(\forall (p,q), (p',q') \in X) \quad (p,q)\, \mathcal{R}\, (p',q') \Rightarrow \varphi(p,q) = \varphi(p',q')$.

Il existe donc une et une seule application $f : X/_{\mathcal{R}} \longrightarrow \mathbb{Q}$ telle que $f \circ \pi = \varphi$, c'est-à-dire $f\circ\pi(p,q) = \frac{p}{q}$ pour tout $(p,q) \in X$.

Date: Mardi 20 octobre 2015.

Exercice 2 : ① Soit $x \in \mathbb{R}$, soient $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $ac \neq 0$ et $a'c' \neq 0$ alors

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x\right) = x$$

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \Phi\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}, x\right)\right) = \Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \frac{a'x + b'}{c'}\right)$$

$$= \frac{aa'x + ab' + bc'}{cc'}$$

$$= \Phi\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}}, x\Bigg).$$

Donc Φ <u>est une action de groupe.</u>

② On a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad \Phi\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, x\right) = \frac{2x}{2} = x.$$

Donc l'<u>action n'est pas fidèle</u>.