I. Espaces métriques. Espaces topologiques

Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$ pour la distance euclidienne (sans la continuité)

1) a) Soit $A = \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathring{A}$.
La partie A de $\mathbb{R}^2$ est-elle ouverte ? fermée ?
Indication : l'intérieur d'une partie de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des centres de boules ouvertes incluses dans cette partie, et l'adhérence d'une partie de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des limites de suites convergentes dans $\mathbb{R}^2$ de points de cette partie, ce qui donne deux méthodes pour répondre.

b) Soit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1 \text{ et } 0 < y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathring{B}$.
La partie B de $\mathbb{R}^2$ est-elle ouverte ? fermée ?

2) a) Quel est l'intérieur dans $\mathbb{R}$ du segment $[0,1]$?

b) Quel est l'intérieur dans $\mathbb{R}^2$ du segment $[0,1]$ porté par l'axe des abscisses ?

3) a) Montrer que l'adhérence d'un convexe de $\mathbb{R}^n$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$.

b) Ce résultat reste-t-il vrai pour l'intérieur ?

4) a) Soit $G \neq \{0\}$ un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R},+)$. On pose $a = \inf\{x \in G \mid x > 0\}$.
Montrer que : si $a > 0$, $G = a\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$; si $a = 0$, G est dense dans $\mathbb{R}$.

b) Soit $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre complexe de module 1.
On pose $H = \{\omega^n \ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer l'adhérence de H dans $\mathbb{C}$.
Indication : lorsque $\alpha \notin \mathbb{Q}$, étudier la partie $G := \{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x} \in H\}$ de $\mathbb{R}$.

Espaces métriques

5) On pose : $\|(x_1,x_2)\|_{1/2} = (|x_1|^{1/2} + |x_2|^{1/2})^2$ pour $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ ($\|\ \|_{1/2}$ n'est pas une « norme »).
Existe-t-il une distance $d_{1/2}$ sur $\mathbb{R}^2$ dont les boules ouvertes sont exactement les parties de la forme $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-a\|_{1/2} < r\}$ avec $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$?

6) Les applications d_0, δ et $\widetilde{d}$ suivantes sont-elles des distances ?

a) Sur un ensemble E : $d_0(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$ pour $x, y \in E$.

b) Sur $\mathbb{R}$: $\delta(x,y) = |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y|$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Sur un ensemble E muni d'une distance d : $\widetilde{d}(x,y) = \min(d(x,y), 1)$ pour $x, y \in E$.

7) On se place dans un espace métrique (E,d).
Soit $A \subseteq E$. Comparer les diamètres de $\mathring{A}$ et de $\overline{A}$ avec celui de A.

8) On considère un espace métrique non-vide (E,d), un point Ω de E, et une partie A de E.

a) Montrer que A est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule fermée.

b) Montrer que A est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule fermée de centre Ω.

9) On note $\|\ \|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^2$ on pose :
$$d_S(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont alignés avec } 0 \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que d_S définit une distance sur $\mathbb{R}^2$ (« distance SNCF »).

b) Décrire géométriquement la boule ouverte $B(x,r)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

10) On munit l'ensemble $E = \{-1\} \cup [0,1[$ de la distance induite par la distance usuelle dans $\mathbb{R}$.

a) Les parties suivantes A, B, C de E sont-elles ouvertes, fermées ?

$$A = \{-1\}, \qquad B = [0,1[, \qquad C = \left[0, \tfrac{1}{2}\right].$$

Déterminer leurs intérieurs et adhérences.

b) Comparer l'adhérence de la boule ouverte $B(0,1)$ avec la boule fermée $\widetilde{B}(0,1)$.

c) Comparer l'intérieur de la boule fermée $\widetilde{B}(0,1)$ avec la boule ouverte $B(0,1)$.

11) Une distance d sur un ensemble E est dite *ultramétrique* si elle vérifie :

$$\forall x, y, z \in E \quad d(x,z) \leq \max\big(d(x,y), d(y,z)\big).$$

a) Sur l'ensemble $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres complexes, on définit la *valuation* v par

$$v(a) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\} \text{ quand } a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad v(0) = +\infty.$$

Montrer que l'application $d \colon (a,b) \mapsto 2^{-v(a-b)}$ est une distance ultramétrique sur E.

b) Montrer que dans un espace muni d'une distance ultramétrique :

(i) tout triangle est isocèle (c'est-à-dire il a deux cotés de même longueur) ;

(ii) n'importe quel point d'une boule ouverte ou fermée est centre de cette boule ;

(iii) deux boules ouvertes sont soit disjointes, soit l'une incluse dans l'autre ;

(iv) les boules fermées sont des ouverts et les boules ouvertes sont des fermés.

Espaces topologiques

12) Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique. On note $\operatorname{diag} X^2 = \{(x,x) \; ; \; x \in X\}$.
Démontrer que X est séparé si et seulement si $\operatorname{diag} X^2$ est fermé dans $X \times X$.

13) On note $X = (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \cup \{0', 0''\}$ dans $\mathbb{R}^2$, où $\mathbb{R}$ est identifié avec (Ox), $0' = (0,1)$ et $0'' = (0,-1)$.
On pose$^{(\star)}$: $\mathscr{T} = \big\{V\big\}_{V \text{ ouvert de } \mathbb{R}\setminus\{0\}} \cup \big\{(W \setminus \{0\}) \cup F\big\}_{W \text{ ouvert de } \mathbb{R} \text{ contenant } 0 \text{ et } F \subseteq \{0', 0''\}}.$
Montrer que $\mathscr{T}$ est une topologie non-séparée sur X (« droite réelle avec origine dédoublée »).

14) On considère sur $\mathbb{R}^2$ les distances « discrète », « euclidienne » et « SNCF » :
d_0 de l'exercice 6, $d_2 \colon (x,y) \mapsto \|x-y\|_2$ et la distance d_S de l'exercice 9.
Les topologies sur $\mathbb{R}^2$ associées à d_0 et d_S sont-elles égales à la topologie usuelle associée à d_2 ?

15) Soient A et B deux parties d'un espace topologique $(X, \mathscr{T})$.

a) Comparer $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

b) Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Indication : étudier dans $\mathbb{R}$ les parties $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

16) Soit A une partie d'un espace topologique $(X, \mathscr{T})$.

a) Montrer que : $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$ et $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. En déduire que : $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$.

b) Quelles sont les 7 parties de X qu'on obtient en itérant les opérations $\mathring{}$ et $\bar{}$ à partir de A ?

c) Montrer que ces parties sont distinctes quand $X = \mathbb{R}$ et $A = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \cup [2,3[\cup]3,4] \cup \{5\}$.

17) On se place dans un espace topologique $(X, \mathscr{T})$.
Soit $A \subseteq X$. Montrer que ∂A est fermé.
Comparer les frontières de $\mathring{A}$ et de $\overline{A}$ avec celle de A.

18) Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique, Y un sous-ensemble de X.
On munit Y de la topologie induite par celle de X et on note, pour toute partie A de Y :
$\overline{A}^Y$ l'adhérence de A dans Y ; $\overline{A}^X$ l'adhérence de A dans X ;
$\mathring{A}^Y$ l'intérieur de A dans Y ; $\mathring{A}^X$ l'intérieur de A dans X.

a) Montrer que $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$.

b) Montrer que $\mathring{A}^Y \supseteq \mathring{A}^X \cap Y$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

$(\star)$ Il est « clair » (pourquoi ?) que les ouverts de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sont les ouverts de $\mathbb{R}$ qui sont inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.