III. Espaces métriques complets

Espaces métriques complets

1) On admet que pour toute application injective $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la formule $\delta(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ détermine une distance δ sur $\mathbb{R}$ (généralisation de l'exercice 6 b de la feuille I).

a) L'espace métrique $(\mathbb{R}, \delta)$ est-il complet quand $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$ pour $x \in \mathbb{R}$?

b) Démontrer que $(\mathbb{R}, \delta)$ est complet si et seulement si $\varphi(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathbb{R}$ (distance usuelle).

2) On note $\mathbb{C}[[X]]$ l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ muni du « produit » $\big((a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}\big) \mapsto \big(\sum\limits_{p+q=n} a_p b_q\big)_{n\geq 0}$.
On dispose sur $\mathbb{C}[[X]]$ de la distance $d\colon (a,b) \mapsto 2^{-v(a-b)}$ déterminée par :
$v((a_n)_{n\geq 0}) = \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \neq 0\}$ quand $(a_n)_{n\geq 0} \neq 0$ et $v(0) = +\infty$ (exercice 11 de la feuille I).

a) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ de $\mathbb{C}[[X]]$, égal à $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, est dense dans $\mathbb{C}[[X]]$.
Indication : vérifier qu'un $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ s'écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ (on le notera donc $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$).

b) Démontrer que $\mathbb{C}[[X]]$ est complet.

3) L'application $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est-elle uniformément continue ?
Indication : on pourra considérer la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ et son image par f.

Théorème du point fixe

4) Déteminer celles des applications suivantes qui sont contractantes et celles qui ont un point fixe :
$f_1\colon \begin{array}{rcl}]0,1] & \to &]0,1] \\ x & \mapsto & \frac{x}{2} \end{array}$; $\quad f_2\colon \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{2}+1 \end{array}$; $\quad f_3\colon \begin{array}{rcl} [1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+2}{x+1} \end{array}$; $\quad f_4\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array}$.

5) Soit $N\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application k-contractante.

a) Démontrer que l'application $A := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - N$ est bijective.
Indication : fixer $y \in \mathbb{R}^n$ et utiliser l'application $N_y\colon x \mapsto N(x) + y$.

b) Démontrer que l'application A^{-1} est $\frac{1}{1-k}$-lipschitzienne.

6) Soient D_1, ..., D_k $(k \geq 2)$ des droites affines non-parallèles de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^n$.
Pour chaque $i \in \{1, ..., k\}$, on note $p_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la projection orthogonale sur D_i.$^{(\star)}$

a) Démontrer que l'application $p_1 \circ p_k \circ p_{k-1} \circ \cdots \circ p_2$ est contractante.

b) En déduire qu'il existe $M_1 \in D_1$, ..., $M_k \in D_k$, tels que :
$$p_2(M_1) = M_2,\ ...,\ p_k(M_{k-1}) = M_k, \text{ et } p_1(M_k) = M_1.$$

7) Soit $n_0 \geq 1$. On considère une norme $\|\ \|$ sur $\mathbb{R}^{n_0}$ et la norme « subordonnée » $|||\ |||$ sur $\mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R})$:
$$|||A||| := \sup_{\substack{X\in\mathbb{R}^{n_0}\\ X\neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \quad \text{pour } A \in \mathfrak{M}(n_0,\mathbb{R}).$$
Soient $A, N \in \mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R})$ tels que $A = I - N$ et $|||N||| < 1$, et $B \in \mathbb{R}^{n_0}$.
On verra dans la feuille V que A est inversible. On note $X \in \mathbb{R}^{n_0}$ la solution de $AX = B$.
Soit $X_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$. On définit $(X^{(n)})_{n\geq 0}$ par : $X^{(0)} = X_0$ et $X^{(n+1)} = NX^{(n)} + B$ pour $n \geq 0$.
Démontrer que $X^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X$ avec $\left\|X^{(n)} - X\right\| \leq \frac{|||N|||^n}{1-|||N|||} \left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|$ pour tout $n \geq 0$.

$(\star)$ Soient $M, N \in \mathbb{R}^n$. Le point $p_i(M)$ est l'unique $M' \in D_i$ tel que $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{D_i}$. D'où : $\overrightarrow{p_i(M)p_i(N)} = \underbrace{\vec{p_i}}_{\text{projection de } \mathbb{R}^n \text{ sur } \overrightarrow{D_i} \text{ parallèlement à } \overrightarrow{D_i}^{\perp}}(\overrightarrow{MN})$.

Espaces de Banach

8) On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme infini sur $[0,1]$: $\|P\|_{L^\infty([0,1])} = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $\|\ \|_{L^\infty([0,1])}$ est-il un espace de Banach ?

b) L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de $\|\ \|_{L^\infty([0,1])}$ est-il un espace de Banach ?

9) On munit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\ \|_1$ définie par : $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$ pour $f \in E$.

a) Si $n \geq 2$, on détermine $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ par : $f_n|_{[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}]} = 0$, $f_n|_{[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}]}$ affine, $f_n|_{[\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1]} = 1$. Démontrer que $(f_n)_{n\geq 2}$ est une suite de Cauchy dans $(E,\|\ \|_1)$.

b) On suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ converge dans $(E,\|\ \|_1)$ vers un élément f. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)-1|\,\mathrm{d}x = 0$.

c) En déduire que l'espace vectoriel normé $(E,\|\ \|_1)$ n'est pas un espace de Banach.

10) a) Soient A un ensemble et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Démontrer que l'espace vectoriel $(\mathbb{K}^A)_b$ des applications bornées de A dans $\mathbb{K}$, muni de $\|\ \|_\infty$, est un espace de Banach.

b) On note : $c_0 := \{(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\} \subseteq l^\infty$.
Démontrer que c_0, muni $\|\ \|_\infty$, est un espace de Banach.

c) Soit X un espace topologique. Démontrer que l'espace vectoriel $\mathscr{C}_b(X,\mathbb{C})$ formé des applications continues bornées de X dans $\mathbb{C}$, muni de $\|\ \|_\infty$, est un espace de Banach.

d) Soit $r \in]0,1[$. On considère $f\colon \begin{array}{ccc} \mathscr{C}([-r,r],\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}([-r,r],\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto & \psi \end{array}$ où $\psi\colon \begin{array}{ccc} [-r,r] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t + 1 \end{array}$.
Déduire du théorème du point fixe que f admet un unique point fixe.
Déterminer ce point fixe par un calcul direct.

11) On note $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel formé des applications de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Le sous-espace vectoriel $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ est-il un espace de Banach pour $\|\ \|_\infty$?

b) On pose : $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ pour $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.
Démontrer que $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\ \|$ est un espace de Banach.

Complété d'un espace métrique

12) Soit (E,d) un espace métrique. On dit qu'un espace métrique $(\widetilde{E},\tilde{d})$ muni d'une application isométrique $\tilde{i} : E \to \widetilde{E}$ est *un complété* de (E,d) si $(\widetilde{E},\tilde{d})$ est complet et $\tilde{i}(E)$ est dense dans $\widetilde{E}$.

a) Décrire, par exemple, un complété de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de $\|\ \|_{L^\infty([0,1])}$.

b) Soit $x_0 \in E$. Pour tous $x, z \in E$, on pose $\varphi_x(z) := d(x,z) - d(x_0,z)$.
Démontrer que les φ_x vérifient : $\varphi_x \in (\mathbb{R}^E)_b$ et $\|\varphi_x - \varphi_y\|_\infty = d(x,y)$ pour $x, y \in E$.
En déduire un complété de (E,d).

c) On suppose donnés deux complétés $(\widetilde{E},\tilde{d})$ et $(\breve{E},\breve{d})$ de E.
Démontrer qu'il existe une bijection isométrique $j\colon \widetilde{E} \to \breve{E}$ telle que $\breve{i} = j \circ \tilde{i}$.

Séries absolument convergentes

13) Soient $n_0 \geq 1$ et $A, B \in \mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C})$. On fixe une norme subordonnée $|||\ |||$ sur $\mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C})$ (exercice 7).

a) Démontrer que la série $(\sum \frac{A^n}{n!})_{n\geq 0}$ converge dans $\mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C})$.

b) On pose : $\exp A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$. Démontrer que : $\det(\exp A) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}$.

c) On suppose que $BA = AB$. Vérifier que : $\exp(A+B) = \exp A \exp B$.
Indication : remarquer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{0\leq i+j\leq n} \frac{A^i B^j}{i!j!}$ pour tout $n \geq 0$.

d) En déduire que pour toute $A \in \mathfrak{M}(n_0,\mathbb{R})$ antisymétrique, on a : $\exp A \in SO(n_0,\mathbb{R})$.