

Test n° 11 (durée : 30 mn)

NOM : _____

Question de cours

Soit X un sous-ensemble de \mathbb{R}^n et soit d un entier naturel. Quand dit-on que X est une sous-variété différentiable de dimension d et de classe C^∞ de \mathbb{R}^n ?

Exercices

- 1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 telle que

$$f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$

Montrer que l'application $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \frac{f(x,y) - xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad g(0,0) = 0$$

est continue.

- 2) Soit $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $h(x, y) = xy(x + y - 1)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Elle est C^∞ (clair).
- a) Déterminer les points critiques de h .

- b) Parmi les points critiques de h , on trouve les points $(0, 0)$ et $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
Correspondent-ils à un maximum local de h ? à un minimum local de h ?