# II. Suites et applications continues

## Suites

1) Démontrer que la distance $d_u \colon (f,g) \mapsto \min(\|f-g\|_\infty, 1)$ où $\|f-g\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)-g(x)|$, sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est telle qu'une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ converge vers $f$ au sens de $d_u$ si et seulement si elle converge uniformément vers $f$.

2) a) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de points d'un espace métrique $E$. Démontrer que les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$ sont les limites de ses suites extraites convergentes.

   b) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n) = 0$.
   Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite est un intervalle.

3) Soit $f$ une application d'une partie $A$ d'un espace métrique $E$ dans un espace métrique $F$.

   a) Soient $a \in \overline{A}$ et $l \in F$. Montrer que $\lim\limits_{x\to a,\, x\in A} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $A$ qui converge dans $E$ vers $a$, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $l$.

   b) On suppose $f$ définie sur $E$. Montrer que $f$ est continue si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ convergente d'éléments de $E$, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge dans $F$.

4) Soient $f$ et $g$ deux applications d'un espace métrique $E$ dans un espace métrique $F$.
   On suppose que $f$ et $g$ sont continues et coïncident sur une partie dense $D$ de $E$.
   Montrer qu'elles sont égales.

5) Pour tous $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $x_1,...,x_m \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ et $r_1,...,r_m \in ]0,+\infty[$, on note :
   $$B_{x_1,...,x_m}(f,(r_1,...,r_m)) = \big\{g \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid |g(x_1)-f(x_1)| < r_1 \text{ et } ... \text{ et } |g(x_m)-f(x_m)| < r_m\big\}.$$
   On admet que l'ensemble des réunions de familles de parties de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ qui sont de la forme $B_{x_1,...,x_m}(f,(r_1,...,r_m))$ est une topologie sur $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ (« topologie produit »).

   a) Montrer qu'une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers $f$ pour cette topologie si et seulement si elle converge simplement vers $f$.

   b) On note $A$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulles en dehors d'un ensemble fini.
   Montrer que la fonction 1 est dans $\overline{A}$ sans être limite d'une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $A$.

## Continuité

6) Montrer directement la continuité (pour les topologies usuelles) des applications suivantes :
   $$f_1\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & x\end{array};\quad f_2\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & x+y\end{array};\quad f_3\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & xy\end{array};\quad f_4\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R}.\\ (x,y) & \mapsto & \frac{x}{y}\end{array}$$

7) a) Montrer que $GL(n,\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$.

   b) On considère l'application $f\colon \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}(n,\mathbb{R}).\\ A & \mapsto & A^{-1}\end{array}$
   Pour quels $M \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$ l'application $f$ a-t-elle une limite quand $A \to M$ avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ?

8) Soit $(E,d)$ un espace métrique. On munit $E\times E$ de la distance produit $\delta_\infty$.

   a) Démontrer que $d\colon E\times E \to \mathbb{R}^+$ est continue.

   b) Soit $A \subseteq E$ non-vide. Pour tout $x \in E$, on pose : $d(x,A) = \inf\limits_{a\in A} d(x,a)$.
   Démontrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est continue de $E$ dans $\mathbb{R}^+$.

   c) Vérifier que : $\overline{A} = \{x \in E \mid d(x,A) = 0\}$ .

   d) Soit $x \in E$. A-t-on : $d(x,\overline{A}) = d(x,A)$ ?

9) a) Démontrer que $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x^2y}{x^4+y^2} \end{array}$ est continue.

b) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Démontrer que la restriction de $f$ à la demi-droite $D_\theta=\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\ ;\ r>0\}$ admet pour limite 0 lorsque $(x,y)\to 0$ avec $(x,y)\in D_\theta$.

c) L'application $f$ a-t-elle un prolongement par continuité $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ?

10) On note $\mathscr{C}=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid x^3=y^2\}$, où $\mathbb{C}^2$ est identifié à $\mathbb{R}^4$.

a) Démontrer que l'application $g\colon \begin{array}{ccc} \mathscr{C}\setminus\{(1,1)\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{y+1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ \text{ou} & \\ -\frac{3}{2} & \text{si } x=1 \text{ (auquel cas } y=-1) \end{cases} \end{array}$ est continue.

*Indication* : remarquer que $g(x,y)=\frac{x^2+x+1}{y-1}$ quand $y\neq 1$.

b) Existe-t-il une application continue $\widetilde{g}:\mathscr{C}\to\mathbb{C}$ dont la restriction à $\mathscr{C}\setminus\{(1,1)\}$ est $g$ ?

11) L'application $h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } |x|\leq|y| \\ \text{ou} & \\ y^2 & \text{si } |x|>|y| \end{cases} \end{array}$ est-elle continue ?

### Homéomorphisme

12) a) On munit $\mathbb{R}^n$ de sa distance euclidienne usuelle.

Montrer que l'application $u\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+\|x\|} \end{array}$ se restreint en un homéomorphisme $v\colon \mathbb{R}^n\to B(0,1)$.

b) Exhiber une distance sur $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ qui induit la topologie de $\mathbb{R}$ et donne comme voisinages de $-\infty$ (resp. $+\infty$) les parties contenant $[-\infty,\alpha[$ (resp. $]\alpha,+\infty]$) pour un $\alpha\in\mathbb{R}$.

13) On considère le cercle unité $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$.

a) L'application $f\colon \begin{array}{ccc} [0,2\pi[ & \to & S^1 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$ est-elle un homéomorphisme ?

b) Même question pour l'application $g\colon \begin{array}{ccc} ]0,2\pi[ & \to & S^1\setminus\{(1,0)\} \\ t & \mapsto & (\cos t,\sin t) \end{array}$.

14) Soit $n\in\mathbb{N}$. On note $S^n$ la sphère unité euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$, $N=(0,...,0,1)$ et $S=(0,...,0,-1)$ ses deux pôles. À chaque $A\in\mathbb{R}^{n+1}$ on associe *l'inversion $I_A$ de pôle $A$ et rapport* 2 définie par : $I_A\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{A\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{A\} \\ M & \longmapsto & M' \end{array}$ où $M'$ est déterminé par l'égalité $\overrightarrow{AM'}=2\,\frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|^2}$.

a) Démontrer que $I_N$ se restreint en une bijection $p_N : S^n\setminus\{N\}\to\mathbb{R}^n\times\{0\}$.

Donner une construction géométrique de l'image $M'$ d'un point $M$ de $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{N\}$ par $p_N$.

*Indication* : vérifier que $I_A\circ I_A=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{A\}}$ et utiliser la caractérisation de $S^n$ reliée à $[N,S]$.

b) Démontrer que $p_N$ est un homéomorphisme (appelé $\underbrace{\textit{projection stéréographique de pôle } N}_{\text{cf. la vidéo http://www.dimensions-math.org/Dim\_CH1.htm}}$).

### Continuité uniforme

15) L'application $f\colon x\mapsto\sin(\frac{1}{x})$ de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est-elle uniformément continue ?

16) a) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application uniformément continue.

Montrer qu'il existe $u\geq 0$ et $v\geq 0$ tels que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad |f(x)|\leq u|x|+v$.

b) Soit $a>0$. L'application $f_a\colon x\in\mathbb{R}\mapsto|x|^a\in\mathbb{R}$ est-elle uniformément continue ?

### Distances équivalentes

17) On considère sur $\mathbb{R}^2$ les distances « euclidienne » $d_2$ et « SNCF » $d_S$.

a) L'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ est-elle continue de $(\mathbb{R}^2,d_S)$ dans $(\mathbb{R}^2,d_2)$ ? de $(\mathbb{R}^2,d_2)$ dans $(\mathbb{R}^2,d_S)$ ?

b) Soit $a\in\mathbb{R}^2$. Déduire du a) que l'application $x\mapsto d_2(a,x)$ est continue de $(\mathbb{R}^2,d_S)$ dans $\mathbb{R}$.

18) Soit $(E,d)$ un espace métrique. On pose : $\widetilde{d}(x,y)=\min(d(x,y),1)$ pour $x,y\in E$.

a) Montrer que les distances $d$ et $\widetilde{d}$ sont topologiquement équivalentes.

b) Sont-elles toujours Lipschitz-équivalentes ?