INTERROGATION N. 6

NOM :
PRÉNOM :

Exercice 1 - Dans $\mathscr{S}_5$ on pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 3&4&5&2&1 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 5&3&2&4&1 \end{pmatrix}$. Donner la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de σ, σ^2 et $\tau^2\sigma$.

Exercice 2 - Soit un entier $n \geqslant 3$. Déterminer $Z(\mathscr{S}_n)$.

Exercice 1 : $\sigma = (135)(24)$. $\sigma^2 = (135)^2(24)^2$ (des cycles à supports disjoints commutent)

$= (153)$

$\tau = (15)(23)$, $\tau^2 = (15)^2(23)^2$ (des cycles à supports disjoints commutent)

$= Id$

$\tau^2\sigma = (153)(24)$

Exercice 2 : Par l'absurde on suppose qu'il existe $\sigma \in Z(\mathscr{S}_n) \setminus \{Id\}$.

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ alors :

$$\sigma(i) \neq i \Rightarrow (i\ \sigma(i))\,\sigma = \sigma\,(i\ \sigma(i))$$

$$\Rightarrow i = \sigma^2(i)$$

(en appliquant à i).

Puisque $\sigma \neq Id$ il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $i \neq \sigma(i)$.

Puisque $n \geqslant 3$ il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $j \notin \{i, \sigma(i)\}$.

Date: Mardi 17 novembre 2015.

Ainsi, le 3-cycle $(i\ \sigma(i)\ j)$ est bien défini et

$$(i\ \sigma(i)\ j)\circ\sigma = \sigma\circ(i\ \sigma(i)\ j).$$

En appliquant à i on en déduit

$$j = \sigma^2(i) = i.$$

C'est absurde. Donc $Z(\mathfrak{S}_n) \subseteq \{Id\}$.

Or $Z(\mathfrak{S}_n) < \mathfrak{S}_n$. Donc $\underline{Z(\mathfrak{S}_n) = \{Id\}}$.