Université Denis Diderot
UFR de Mathématiques

Année 2015/2016
U1TC35

Test n° 3 (durée : 30 mn)

NOM : ____________________________

Question de cours

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Donner sans démonstration un exemple de distance d sur l'ensemble $X \times Y$ pour laquelle les ouverts de $X \times Y$ sont les réunions des parties de la forme $U \times V$, où U décrit les ouverts de X et V décrit les ouverts de Y.

Barème : *Question de cours* sur 4 points ; 1) sur 4 points ; 2) (a) sur 6 points ; 3) sur 6 points.

Exercices

1) Soit (X, d) un espace métrique et soit Y un sous-ensemble de X. On munit Y de la distance induite par celle de X. Soit A un sous-ensemble de Y. On note $\mathrm{int}_X(A)$ l'intérieur de A dans X et $\mathrm{int}_Y(A)$ l'intérieur de A dans Y. Montrer que $\mathrm{int}_X(A) \subseteq \mathrm{int}_Y(A)$.

2) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On dit qu'un élément x_0 de X est *un point isolé de X* s'il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r est égale à $\{x_0\}$.

a) On considère une application $f\colon X \to Y$ et un point isolé x_0 de X.

Démontrer que f est continue en x_0.

b) Question subsidiaire (hors barème). Soit $x_0 \in X$ tel que pour tout espace métrique (Z, d_Z) et toute application $f\colon X \to Z$, l'application f est continue en x_0.

Démontrer que x_0 est un point isolé de X.

3) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques.

On considère une application $f\colon X \to Y$ et des fermés F_1, ..., F_n de X ($n \geq 1$) tels que :

$X = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ et les restrictions $f_{|F_1}\colon \begin{array}{rcl} F_1 & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$, ..., $f_{|F_n}\colon \begin{array}{rcl} F_n & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ sont continues.

Démontrer que f est continue.