

Test n° 1 (durée : 30 mn)

NOM : _____

Questions de cours

a) Soit E un ensemble. Donner la définition d'une distance sur E .

b) Soient (E, d) un espace métrique et $A \subseteq E$.

Quand dit-on que A est un ouvert de E ?

Quand dit-on que A est un fermé de E ?

Exercices

- 1) Soit E un ensemble. Soit $d_0 : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ l'application définie par

$$\forall x, y \in E \quad d_0(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a vu en TD que d_0 est une distance sur E .

Montrer que, dans l'espace métrique (E, d_0) , tout sous-ensemble de E est à la fois ouvert et fermé.

2) On considère l'espace métrique $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ où $d_{|\cdot|}$ est la distance définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad d_{|\cdot|}(x, y) = |x - y|.$$

Montrer que $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$.