

VII. EXTREMUMS LOCAUX. INVERSION LOCALE

Extremums locaux

- 1) Déterminer les extremums locaux des applications suivantes, où $\varphi(t) = 3t^2 - 2t^3$:

$$a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad c: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) \quad (x, y) \mapsto x e^y + y e^x \quad (x, y) \mapsto 3x^4 - 4x^2y + y^2$$
- 2) On considère le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et l'application

$$u: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto 8\sqrt{1 - x^2 - y^2} + 5x^2$$
 - a) Montrer que u est bornée et atteint ses bornes.
 - b) Déterminer les bornes de u ainsi que les points où u les atteint.
 - c) Étudier la nature des points critiques de u dans le disque ouvert $\overset{\circ}{D}$.
- 3) On considère l'application $v:]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$
 - a) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Montrer que : $v(x, y) < x$ et $v(x, y) < y$ et $v(x, y) < \frac{1}{x}$ et $v(x, y) < \frac{1}{y}$.
 - b) En déduire que v prend une plus grande valeur.
 - c) Déterminer le maximum de v .
- 4) On pose : $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et $f(x, y) = \frac{e^{x^2+xy+y^2}}{xy}$ pour $(x, y) \in U$.
 - a) Démontrer que f est convexe sur U .^(*)
Indication : appliquer à $\ln \circ f$ le critère de convexité avec la différentielle seconde (exp croît).
 - b) Démontrer que f a un minimum sur U et calculer ce minimum.
Indication : appliquer à f le critère de convexité avec la différentielle première.
- 5) On se donne $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ et pose $g(x) = \|x - a\|_2 + \|x - b\|_2 + \|x - c\|_2$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.
 - a) Vérifier que $g(x) \xrightarrow{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} +\infty$ et en déduire que g a un minimum global.
Indication : on pourra par exemple considérer la partie $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq g(0)\}$ de \mathbb{R}^n .
 - b) Démontrer que l'application $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe.
 - c) Démontrer que si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a, b, c\}$ est point critique de g , alors g atteint son minimum en x .
Indication : supposer par l'absurde que $y \in \mathbb{R}^n$ vérifie $g(y) < g(x)$ puis passer à la limite $t \rightarrow 0^+$ dans l'inégalité $\frac{g((1-t)x+ty)-g(x)}{t} \leq g(y) - g(x)$.
 - d) Déterminer le minimum de g quand $n = 3$ et (a, b, c) est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

(*) (a) Soit f une application d'un convexe C de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . On dit que f est *convexe* si :

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad \text{pour tous } x, y \in C \text{ et } t \in [0, 1];$$

(b) Soit f une application différentiable d'un ouvert convexe U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

L'application f est convexe si et seulement si : $f(y) - f(x) \geq df(x) \cdot (y - x)$ pour tous $x, y \in U$.

(c) Soit f une application deux fois différentiable d'un ouvert convexe U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

L'application f est convexe si et seulement si : $d^2f(x) \cdot h^2 \geq 0$ pour tous $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$.

Inversion locale

- 6) a) Montrer que l'application $f: \mathbb{R} \times]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \times]-1, 1[$ est un C^1 -difféomorphisme.
- $$(x, y) \longmapsto (x - y \sin x, y)$$
- b) Soit $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ associée à une norme donnée sur \mathbb{R}^n .
On considère une application $N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 vérifiant : $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|dN(x)\| < 1$.
Démontrer que l'application $A := \text{id}_{\mathbb{R}^n} - N$ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n .
Indication : fixer $y \in \mathbb{R}^n$ et utiliser l'application $N_y: x \mapsto N(x) + y$.
- 7) On considère l'application $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
- $$(x, y) \longmapsto (x^2 + y^2, x^3 - y^3)$$
- a) Au voisinage de quels points l'application F se restreint-elle en un C^1 -difféomorphisme ?
- b) Pour chaque solution (x_0, y_0) de l'équation
- $$(E): x^2 + y^2 = 2 \text{ et } x^3 - y^3 = 0,$$
- donner une approximation à l'ordre 1 en 0 par rapport à ε de la solution de l'équation
- $$(E_\varepsilon): x^2 + y^2 = 2 - \varepsilon \text{ et } x^3 - y^3 = \varepsilon$$
- qui est « voisine de (x_0, y_0) ».
- 8) On considère l'application $K: \mathfrak{M}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}(2, \mathbb{R})$.
- $$A \longmapsto A^2$$
- a) Existe-t-il une réciproque locale de classe C^1 de K qui envoie $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$? sur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?
- b) Prouver que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est isolé dans $K^{-1}(\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\})$ et que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas intérieur à $K^{-1}(\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\})$.
- 9) a) Montrer qu'il existe un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 contenant $(0, 0)$, et des applications $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , vérifiant :
- $$(*) \quad x(0, 0) = y(0, 0) = 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(u, v)^3 + y(u, v)^2 + u x(u, v) = 2 \\ y(u, v)^3 - v x(u, v)^2 = 1 \end{cases} \quad \text{pour tout } (u, v) \in \Omega.$$
- b) Calculer les développements limités à l'ordre 1 de x et de y en $(0, 0)$.
- 10) On pose : $P_{a,b,c} = X^3 + aX^2 + bX + c$ pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
- a) Soient $a_0, b_0, c_0, x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $P_{a_0, b_0, c_0}(x_0) = 0$.
À quelle condition existe-t-il un voisinage ouvert Ω de (a_0, b_0, c_0) dans \mathbb{R}^3 et une application $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , tels que :
- $$(**) \quad x(a_0, b_0, c_0) = x_0 \quad \text{et} \quad P_{a,b,c}(x(a, b, c)) = 0 \quad \text{pour tout } (a, b, c) \in \Omega ?$$
- b) Trouver une approximation à l'ordre 2 en (h, k) d'une des trois racines de $X^3 + pX + q$, à choisir parmi $x(0, p, q) < y(0, p, q) < z(0, p, q)$, lorsque $p = -1 + h$ et $q = k$ avec $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.
- c) On pose $U := \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid P_{a,b,c} \text{ a 3 racines réelles distinctes}\}$.
On introduit $\rho: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ où x, y, z sont les racines de $P_{a,b,c}$ avec $x < y < z$.
- $$(a, b, c) \mapsto (x, y, z)$$
- Montrer que U est un ouvert connexe de \mathbb{R}^3 et que l'application ρ se restreint (à l'arrivée) en un C^1 -difféomorphisme ρ_0 de U sur un ouvert V de \mathbb{R}^3 .