INTERROGATION N. 3

NOM :
PRÉNOM :

Exercice 1 - Soit un groupe $(G, *)$. Soient $x, y \in G$. On suppose que x et y sont d'ordre fini et que l'ordre (noté m) de x est premier à l'ordre (noté n) de y.

(1) Démontrer que $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$.

(2) On suppose que $x * y = y * x$. Déterminer l'ordre de $x * y$.

Exercice 2 - Soit f un homomorphisme surjectif d'un groupe abélien $(G, +)$ dans un groupe $(H, *)$. Démontrer que H est un groupe abélien.

1 (1) On a : - $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ est sous-groupe de G comme intersection de sous-groupes de G,
- $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \subseteq \langle x \rangle$ et $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \subseteq \langle y \rangle$.

Donc $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ est sous-groupe de $\langle x \rangle$ et de $\langle y \rangle$.
Le théorème de Lagrange s'applique :

$$\mathrm{Card}(\langle x \rangle \cap \langle y \rangle) \mid \mathrm{Card}(\langle x \rangle) = m \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}(\langle x \rangle \cap \langle y \rangle) \mid \mathrm{Card}(\langle y \rangle) = n.$$

Or $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$. Donc $\mathrm{Card}(\langle x \rangle \cap \langle y \rangle) = 1$.

Ainsi, $\underline{\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = e}$.

(2) Soit $\ell \in \mathbb{N}$, si $y^\ell * x = x * y^\ell$ alors
$$y^{\ell+1} * x = y * y^\ell * x = y * x * y^\ell = x * y^{\ell+1}.$$

Ainsi, une récurrence sur $\ell \in \mathbb{N}$ démontre que $y^\ell * x = x * y^\ell$.

Date: Mardi 6 octobre 2015.

Soit $l \in \mathbb{N}$, si $(x*y)^l = x^l * y^l$ alors

$$(x*y)^{l+1} = (x*y)^l * x * y = x^l * y^l * x * y = x^l * x * y^l * y$$
$$= x^{l+1} * y^{l+1}.$$

Une récurrence sur $l \geq 0$ démontre donc que $(x*y)^l = x^l * y^l$.

En particulier $(x*y)^{mn} = x^{mn} * y^{mn} = (x^m)^n * (y^n)^m = e^n * e^m = e$

On note d l'ordre de $x*y$. Donc $\underline{d \mid mn}$.

On a $e = (x*y)^d = x^d * y^d$.

Donc $x^{-d} = y^d \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$.

Donc $m \mid d$ et $n \mid d$. Or $\mathrm{pgcd}(m,n) = 1$. Donc $\underline{mn \mid d}$.

Donc l'ordre de $\underline{x*y \text{ est } mn}$.

(2) Soient $h, k \in H$; comme f est surjectif, il existe $g, g' \in G$ tels que $f(g) = h$ et $f(g') = k$;

alors

$$\begin{aligned} h * k &= f(g) * f(g') \\ &= f(g * g') && (f \text{ est un homomorphisme}) \\ &= f(g' * g) && (G \text{ est abélien}) \\ &= f(g') * f(g) && (f \text{ est un homomorphisme}) \\ &= k * h. \end{aligned}$$

Donc $\underline{H \text{ est abélien}}$.