Université Denis Diderot
UFR de Mathématiques

Année 2015/2016
U1TC35

Test n° 8 (durée : 30 mn)

NOM : ____________________________

Question de cours

Donner sans aucune justification un exemple d'espace de Banach réel de dimension infinie dont les éléments sont certaines applications de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Barème : *Question de cours* sur 3 points ; 1) sur $4+4$ points ; 2) sur 5 points ; 2) sur $4+\ldots$ points.

Exercices

1) On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.

Lesquelles des applications linéaires suivantes sont continues ? Si c'est le cas, calculer leur norme.

a) $\varphi_N \colon E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_N(P) := a_N$ quand $P = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{a_n X^n}_{\text{nul pour } n \text{ assez grand}} \in \mathbb{R}[X]$, où $N \in \mathbb{N}$ est fixé.

b) $\psi \colon E \to E$ définie par $\psi(P) = P(X+1)$ quand $P \in \mathbb{R}[X]$ (penser au cas $P = X^n$).

2) Démontrer que l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_1)$ de l'exercice 1 n'est pas complet.

Indication : on pourra considérer la série $(\sum \frac{X^n}{2^n})_{n \geq 0}$ d'éléments de E et utiliser les formes linéaires continues φ_N de l'exercice précédent.$^{(*)}$

$(*)$ Il est possible d'évoquer ici un résultat non-abordé en cours, adapté à la situation, à condition de l'énoncer.

3) On se place à nouveau dans l'espace vectoriel normé $(E, \| \|_1)$ de l'exercice 1.

On fixe deux éléments $U = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k X^k$ et $V = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k X^k$ de $E \setminus \{0\}$.

On pose : $K = \left\{ P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq a_n \leq v_n \right\}$.

a) Démontrer que K est fermé et borné dans E.

b) Question subsidiaire (hors barème).

En déduire que K est compact pour la topologie de $\| \|_1$.