Analyse

Isabelle Galagher et Pierre Gervais

October 20, 2016

Contents

Part I

Topologie des espaces vectoriels normés

On considèrera aussi les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Espaces vectoriels normés : premières définitions

1.1 Distances et normes

Définition 1. Étant donné un ensemble E, une *distance sur* E est une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. d est *définie positive* : $d(x,y) \geqslant 0$ et $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. d est symétrique : $d(x,y) = d(y,x)$
3. d vérifie l'*inégalité triangulaire* : $\forall z \in E,\ d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Exemple 1.

- $E = \mathbb{R}$ et $d(x,y) = |x-y|$
- $E = \mathbb{R}^2$ et $d\left(\binom{a}{b}, \binom{c}{d}\right) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

Remarque 1. Par l'inégalité triangulaire, on déduit

- $d(x,z) \geqslant d(x,y) - d(y,z)$
- $d(x,z) \geqslant d(z,y) - d(x,y)$

d'où $|d(x,y) - d(z,y)| \leqslant d(x,z)$

Définition 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, une *norme* sur E est une application notée N ou $\|\cdot\|$ telle que

1. $(x,y) \longmapsto \|x-y\|$ est une distance
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in E,\ \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ (*homogénéité*)

Proposition 1. *Une fonction* $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une norme si et seulement si :*

1. *elle est homogène*
2. *elle est définie*
3. *elle vérifie l'inégalité triangulaire*

Preuve 1.

$\Longrightarrow$

Soit $\|\cdot\|$ une norme.

1. ✓

2. $\|x\| = d(x,0)$ où $d(x,y) = \|x-y\|$, donc $\|x\| \geqslant 0$ et $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow d(x,0) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

3. $\|x+y\| = d(x+y,0) = d(x,-y)$, or $\forall x,y,z \in E,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ donc $d(x,-y) \leqslant d(x,0) + d(0,-y)$
D'où $\|x+y\| \leqslant d(x,0) + d(0,-y) \leqslant \|x\| + \|-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

$\Longleftarrow$
Soit $\|\cdot\|$ vérifiant les trois propriétés, alors soit $d(x,y) = \|x-y\|$ et montrons que d est une distance.

1. $d(x,y) \geqslant 0$ car $\|x-y\| \geqslant 0$ par (2). $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \|x-y\| = 0 \Longleftrightarrow x = y$

2. $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(x-y)\| = \|y-x\| = d(y,x)$

3. $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leqslant \|x-z\| + \|z-x\| \leqslant d(x,y) + d(z,y)$

$\square$

Exemple 2.

1. Dans $\mathbb{R}^n$, on définit les normes $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$, $\|x\|_p = \sqrt[p]{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$ et $\|x\|_\infty = \max\limits_k \|x_k\|$

2. Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'un produit scalaire, $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

3. Soit A un ensemble et F une espace vectoriel normé, et $\mathcal{B}(A,F)$ les fonctions bornées de A dans F, alors $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in A} \|f(x)\|$ est une norme.

4. Sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|$, $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2}$ et$\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$

Définition 3. Deux normes N_1 et N_2 sont dites *équivalentes* s'il existe des constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que $\forall x \in E,\ C_1 N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant C_2 N_2(x)$

Exemple 3. Par exemple dans $\mathbb{R}^n$, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. En effet

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \leqslant 2\|x\|_\infty$$

et $\|x_i| \geqslant \|x\|_\infty,\ i = 1,2$

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes ! Cela n'est en revanche pas vraie en dimension infinie.

1.2 Ouverts et fermés

Définition 4. Soit E un espace vectoriel normé, on appelle *boule fermée* de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\overline{\mathcal{B}}(x,r) = \{u \in E \mid \|x-u\| \leqslant r\}$, et la *boule ouverte* de centre x et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{B}(x,r) = \{u \in E \mid \|x-u\| < r\}$.

Définition 5. Soit $X \subseteq E$

1. On dit que $U \subseteq X$ est un *ouvert* de X si $\forall x \in U,\ \exists r > 0\ :\ \mathcal{B}(x,r) \cap X \subseteq U$

2. On dit que $F \subseteq X$ est un *fermé* de X si son complémentaire dans X est un ouvert de X.

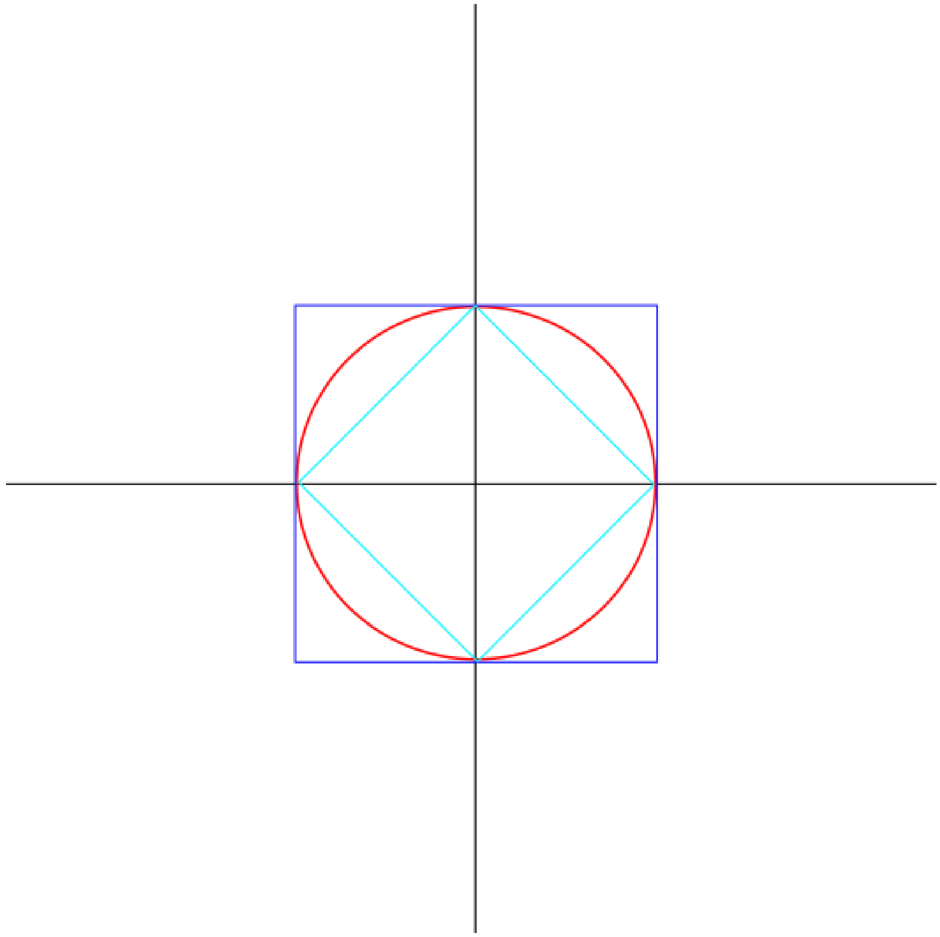

Figure 1: Différentes boules unités
En bleu : $\mathcal{B}_\infty(0,1)$
En rouge : $\mathcal{B}_2(0,1)$
En turquoise : $\mathcal{B}_1(0,1)$

Remarque 2.

1. Un ouvert dans X n'est pas nécessairement ouvert dans E, comme montré dans le deuxième exemple de la figure ci-dessus.

2. Un ouvert de E sera appelé un **ouvert**, de même pour les fermés.

3. Toute boule ouverte est un ouvert.

4. Toute boule fermée est un fermé.

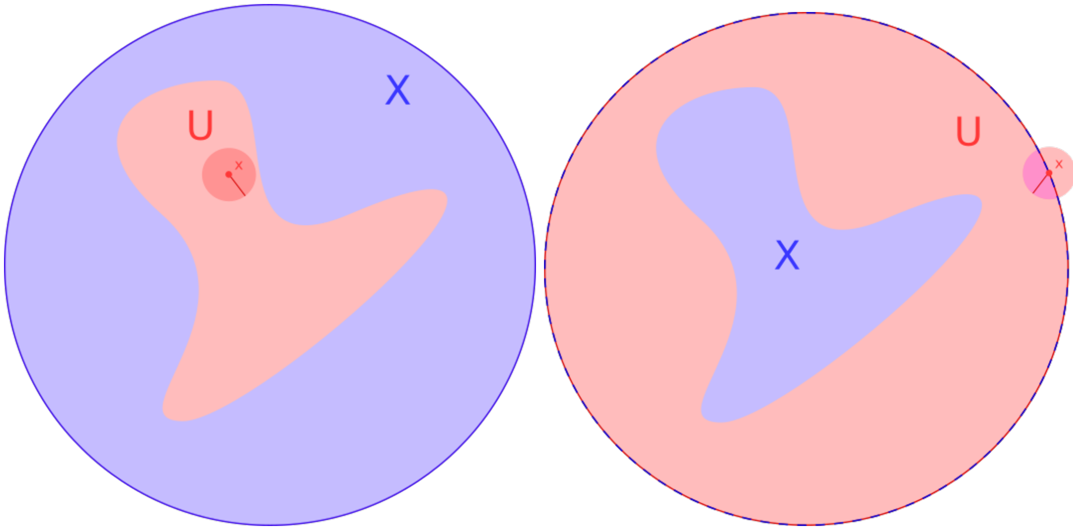

Figure 2: Deux exemples d'ouverts

Preuve 2. On considère une boule ouverte $\mathcal{B}(x_0, r)$, montrons que c'est un ouvert.

Soit $x \in \mathcal{B}(x_0, r)$, alors $\|x - x_0\| < r$. On cherche r' tel que $\mathcal{B}(x, r') \subseteq \mathcal{B}(x_0, r)$ donc r' doit vérifier

$$\|x - y\| < r' \Longrightarrow \|x_0 - y\| < r$$

.

Mais $\|x_0 - y\| \leqslant \|x - y\| + \|x - x_0\| < \|x - y\| + r$.

Soit $\delta = r - \|x - x_0\| > 0$, on pose alors $r' = \frac{\delta}{2} > 0$, alors $\|x_0 - y\| \leqslant r' + \|x - x_0\| \leqslant r' + r - \delta < r$

$\square$

Proposition 2. *L'intersection de deux ouverts est un ouvert et toute réunion d'ouverts est un ouvert.*

Preuve 3. Soient U et U' deux ouverts, montrons que $U \cap U'$ est un ouvert.

Soit $x \in U \cap U'$, il existe $r > 0$ et $r' > 0$ tels que $(B)(x, r) \subseteq U$ et $\mathcal{B}(x, r') \subseteq U'$.

On pose $\widetilde{r} = \min(r, r')$ et on a $\mathcal{B}(x, \widetilde{r}) \subseteq U \cap U'$

$\square$

Preuve 4. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts, montrons que $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert.

Soit $x \in U$, alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$, il existe donc r tel que $\mathcal{B}(x, r) \subseteq U_{i_0}$ car U_{i_0} est ouvert, d'où $\mathcal{B}(x, r) \subseteq U$.

$\square$

Proposition 3. *Soit $X \subseteq E$, tout ouvert U de X s'écrit sous la forme $U = X \cap \widetilde{U}$, où $\widetilde{U}$ est un ouvert.*

De même pour tout fermé F de X s'écrit $F = X \cap \widetilde{F}$ où $\widetilde{F}$ est un fermé.

Preuve 5. Soit $\widetilde{U}$ un ouvert de E, alors $\widetilde{U} \cap X$ est un ouvert de X par construction.

Inversement soit U ouvert de X, alors $\forall x \in U$, $\exists r(x) > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r(x)) \cap X \subseteq U$

Soit alors $\widetilde{U} = \bigcup_{x \in U} \mathcal{B}(x, r(x))$, alors $\widetilde{U}$ est un ouvert et $U = X \cap \widetilde{U}$ $\square$

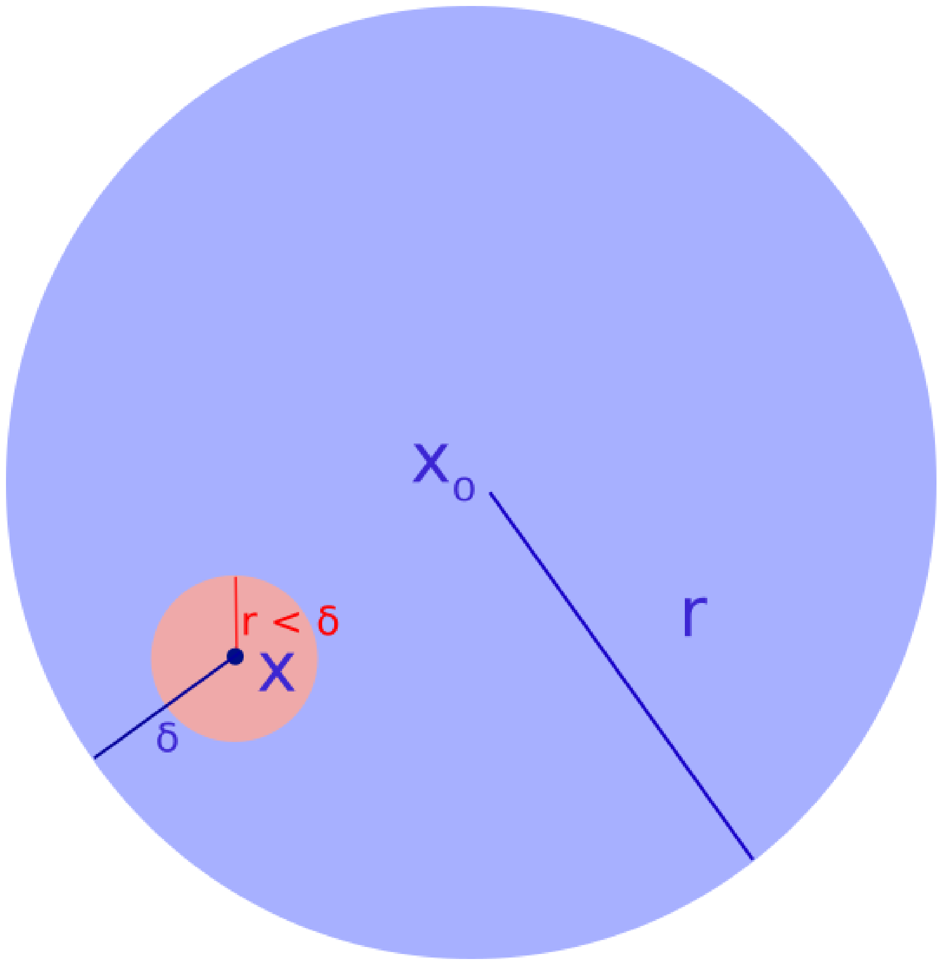

Figure 3: Construction de la boule ouverte

Définition 6. Une suite à valeurs dans E est dite *convergente vers* $x \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Celle-ci est unique et on la note $\lim_n x_n = x$.

On remarquera qu'une suite convergente est bornée.

Preuve 6. Soient x et y deux limites de la suite convergente $(x_n)_n$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un rang N à partir duquel $\|x_n - x\| < \varepsilon$ et $\|y_n - x\| < \varepsilon$, d'où

$$\|x - y\| \leqslant \|x - x_n\| + \|x_n - y\| < 2\varepsilon$$

Cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$ donc $x = y$.

□

Remarque 3. On rappelle que dans $\mathbb{R}$, toute suite majorée croissante est convergente.

Soit $A = \{x_n \mid n \geqslant 0\}$, et on note $l = \sup A$.

Soit $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon$ ne majore pas A donc il existe un rang N à partir duquel $x_n \geqslant l - \varepsilon$, mais on a aussi $x_n \leqslant l$ pour tout n, on a ainsi à partir de N l'encadrement $l - \varepsilon \leqslant x_n \leqslant l + \varepsilon$.

On a de plus que $\lim\limits_n x_n = \sup\{x_n | n \geqslant 0\}$

Remarque 4. Si une suite est convergente pour une norme, alors elle l'est pour toute norme équivalente à celle-ci.

Cela n'est pas vrai en général si les normes ne sont pas équivalentes.

Sur l'ensemble des fonctions continue sur $[0, 1]$ on définit les normes

$$\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)| \text{ et } \|f\| = \int_0^1 |f|$$

On considère la suite de fonction $f_n \ : \ x \longmapsto x^n$, on a

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f_n(x)| = 1$$

mais $\|f_n\| = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$, les normes ne sont pas équivalentes.

Définition 7. On appelle *valeur d'adhérence* de x_n toute limite d'une sous-suite (suite extraite) de (x_n).

Et on appelle *point d'accumulation* d'une suite (x_n) un point x tel que $\forall \varepsilon > 0,\ \forall N,\ \exists n > N \ : \ \|x_n - x\| < \varepsilon$.

Proposition 4. *Tout point d'accumulation d'une suite convergente (x_n) est une valeur d'adhérence, et réciproquement.*

Preuve 7.
Valeur d'adhérence $\Longrightarrow$ point d'accumulation :

Soit x une valeur d'adhérence de (x_n), il existe une fonction entière strictement croissante φ telle que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \ : \ \forall n > N,\ \|x_{\varphi(n)} - x\| < \varepsilon$$

donc x est un point d'accumulation. ✓

Point d'accumulation $\Longrightarrow$ valeur d'adhérence :

Réciproquement, soit x un point d'accumulation d'une suite (x_n), on construit par récurrence φ telle que x soit la limite de $(x_{\varphi(n)})_n$ par

$$\varphi(n) = \begin{cases} 0,\ n = 0 \\ \min\{k > \varphi(n-1) \mid \|x_k - x\| < 2^{-n}\},\ n > 0 \end{cases}$$

L'application est bien strictement croissante.

Montrons à présent que $y_n = x_{\varphi(n)}$ converge vers x :

soit $\varepsilon \in]0, 1[$, on cherche N tel que pour tout $n > N,\ \|x_n - x\| < \varepsilon$.

Pour $N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$ on a

$$\forall n > N,\ \|y_n - x\| < 2^{-n} < \varepsilon$$

$(y_n)_n$ est bien une suite convergeant vers x. ✓

Proposition 5. *Soit E un espace vectoriel normé et $F \subseteq E$.*

F est fermé si et seulement si F contient la limite de toutes ses suites convergentes.

Preuve 8.
F fermé $\Longrightarrow$ F contient les limites de ses suites

Soit (x_n) une suite convergente de F de limite x. Montrons que $x \in F$.

Supposons par l'absurde $x \notin F$, alors $x \in F^C$ qui est ouvert. Il existe donc $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x,r) \subseteq (E \backslash F)$, mais il existe un rang à partir duquel $\|x_n - x\| < \frac{r}{2}$, c'est à dire $x_n \in \mathcal{B}(x,r)$, ce qui contredit $\mathcal{B}(x,r) \subseteq F^C$. ✓

F contient les limites de ses suites $\Longrightarrow$ F est fermé

Montrons que F^C est fermé, ce qui est est équivalent au fait que F soit fermé. Soit $u \in F^C$, on pose $r = \inf\limits_{f \in F} \|f - u\|$.

Supposons par l'absurde que r soit nul, alors pour tout $n > 0$ il existerait un élément $f_n \in F$ tel que $\|u - f_n\| < \frac{1}{n}$. Cela définit alors une suite $(f_n)_n$ à valeurs dans F convergente vers $u \notin F$, ce qui contredit le fait que F contienne ses limites.

On a alors $\mathcal{B}_r(u) \subseteq F^C$, F^C est donc effectivement ouvert. ✓ □

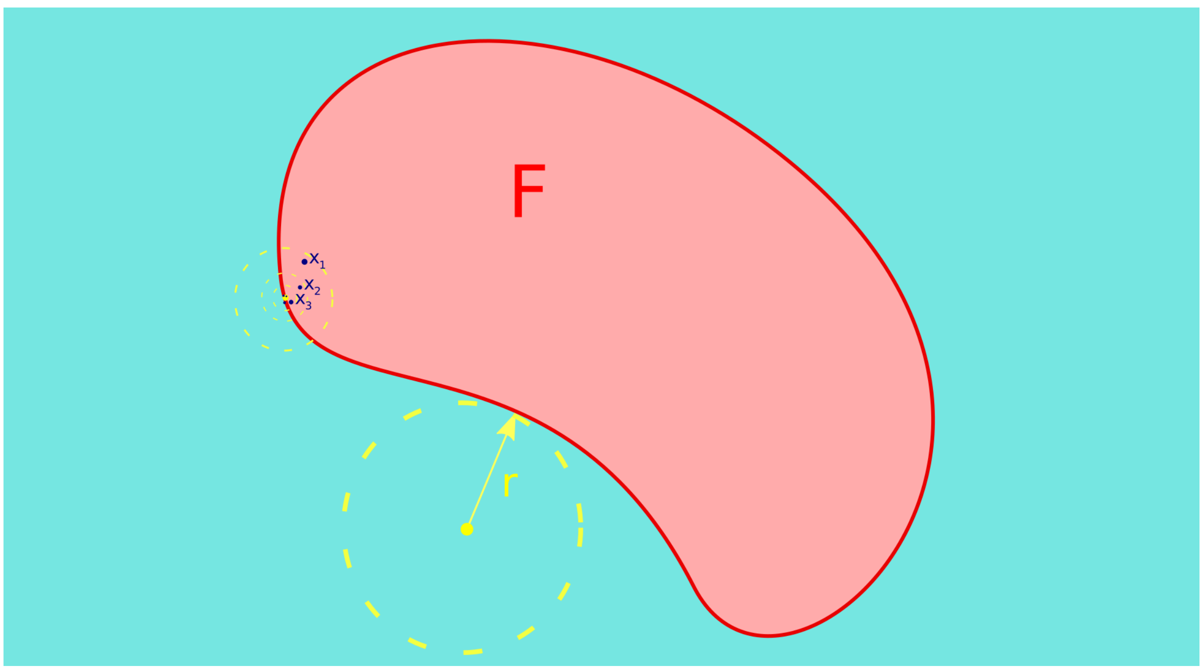

Figure 4: Une partie contenant ses limites est fermée
Si on avait $r = \inf\limits_{f \in F} \|u - f\| = 0$, alors on aurait $u \in F$ car toute boule ouverte centrée en u s'intersecterait avec le fermé F.

Définition 8. Soit X une partie d'un espace vectoriel normé E.

- *L'intérieur de* X est le plus grand ouvert inclus dans X noté $\mathring{X}$.
- *L'adhérence de* X est le plus petit fermé contenant X noté $\overline{X}$.
- *La frontière de* X est l'ensemble $\partial X = Fr(X) = \overline{X} \backslash \mathring{X}$

Exemple 4. Si $X =]0,1]$ sur $\mathbb{R}$ alors $\mathring{X} =]0,1[$, $\overline{X} = [0,1]$ et $Fr(X) = \{0,1\}$.

Remarque 5. X est ouvert si est seulement si $\mathring{X} = X$ et X est fermé si et seulement si $\overline{X} = X$.

En effet, pour X ouvert, $\mathring{X}$ est le plus grand ouvert contenu dans X, donc X.

Réciproquement si $X = \mathring{X}$, l'intérieur d'une partie étant un ouvert on a bien que X est ouvert.

Preuve 9. Intérieur

Soit $\mathring{X}$ l'ensemble des $x \in X$ tels qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x,r) \subseteq X$, alors $\mathring{X}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans X.

En effet, $\mathring{X}$ est ouvert dans X par définiton, donc $\mathring{X} \subseteq$ "réunion des ouverts de X".

Soit U un ouvert de X, montrer que $U \subseteq X$.

Soit $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x,r) \subseteq U$ ar U est ouvert. Donc $x \in \mathring{X}$.

$\mathring{X}$ est donc ouvert, contenu dans X. Il contient tous les ouverts de X, donc c'est le plus grand de X, d'où le résultat. □

Proposition 6. *On caractérise l'adhérence d'une partie X comme étant l'ensemble des limites de sous-suites de X.*

Preuve 10. Soit A l'ensemble des limites de suites convergentes à valeurs dans X.

A est un fermé contenant X

Pour tout $x \in X$, x peut être la limite d'une suite à valeur dans X, c'est à dire $x \in A$ et donc $X \subseteq A$.

Cela signifie en particulier que A contient les limites de ses suites : c'est un fermé. ✓

A est le plus petit fermé contenant X

Montrons que A est minimal, c'est-à-dire que pour tout fermé F vérifiant $X \subseteq F \subseteq A$, on a $F = A$.

F est un fermé contenant X, donc il contient X et les limites des suites convergentes à valeurs dans X, c'est à dire A. ✓

A est donc le plus petit fermé contenant X, c'est à dire $A = \overline{X}$

2 Applications continues

Définition 9. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, soient $X \subseteq E$, $Y \subseteq F$ et f une application de X dans Y.

On dit que f est continue en un point $x \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \ (\forall u, \ \|x - u\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(u)\| < \varepsilon)$$

Théorème 1. *Une application $f \ : \ X \longrightarrow Y$ est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si pour toute suite (y_n) convergeant vers x_0, la suite $(f(y_n))_n$ converge vers $f(x_0)$.*

Exercice 1. Le démontrer

Théorème 2. *Soit une application $f \ : \ X \longrightarrow Y$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue sur X*
2. *l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X*
3. *l'image réciproque de tout fermé de X est une fermé de X.*

Preuve 11.
1.* $\Longrightarrow$ *2.

Soit f continue sur X et U un ouvert de Y. Montrer que $f^{-1}(U) = V$ est un ouvert de X.
Soit $x \in f^{-1}(U)$, alors $f(x) \in U$, il existe donc $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(f(x), r) \subseteq U$.
Or il existe $\delta > 0$ tel que pour $\|x - u\| < \delta$, on a $\|f(x) - f(y)\| < \frac{r}{2}$.
Ainsi si $y \in \mathcal{B}\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$ alors $f(y) \in \mathcal{B}(f(x), r) \subseteq U$, donc $y \in f^{-1}(U)$.
$f^{-1}(U)$ est donc un ouvert. ✓

2.* $\Longrightarrow$ *1.

Soit $\varepsilon > 0$, on veut trouver $\delta > 0$ tel que si $\|x - y\| < \delta$, alors $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.
Soit $x \in X$, alors $\mathcal{B}_\varepsilon(f(x))$ est un ouvert de de Y, on sait que $f^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(f(x)))$ est un ouvert de X contenant x, il existe donc $\delta > 0$ tel que $\mathcal{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(f(x)))$.
Autrement dit, si $\|x - y\| < \delta$ alors $y \in f^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(f(x)))$, c'est-à-dire $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. ✓

1.* $\Longleftrightarrow$ *2.

On le démontre en passant au complémentaire. ✓

□

Corollaire 1. *Soient $X \subseteq E$, $Y \subseteq F$ et f une application de X dans Y.*

1. *On suppose que f est continue, alors la restriction de f à $X' \subseteq X$ notée $f_{|X'}$ est continue.*
2. *Si X' est un ouvert de X et si $f_{|X'}$ est continue alors f est continue en tout point de X'.*
3. *Soient f et g avec $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ avec E, F, G des espaces vectoriels normés. Si f et g sont continues alors $g \circ f$ est continue.*

Remarque 6. L'hypothèse que X' soit ouvert est nécessaire pour le point 2.

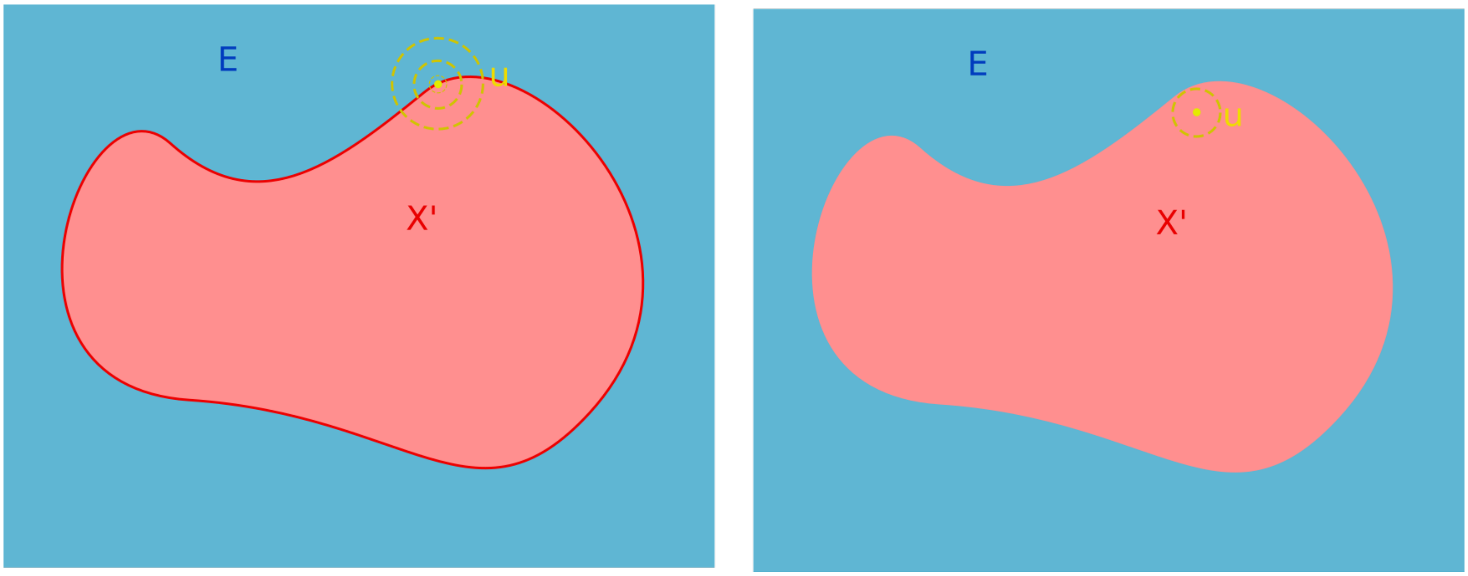

Figure 5: Restriction continue sur une partie non-ouverte ou ouverte

$$f \ : \ \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ u & \longmapsto \quad \text{rouge si } u \in X', \quad \text{bleu sinon} \end{cases}$$

- A gauche, $f_{|X'}$ est continue mais f n'est pas continue sur X' car on ne peut pas trouver une boule ouverte de X' autour du point u.
- A droite, on peut trouver une boule ouverte autour de u car X' est ouvert.

Preuve 12.

Point 1.

Soit $X' \subseteq X$ et V un ouvert de Y, montrons que $\left(f_{|X'}\right)^{-1}(V)$ est un ouvert de X'.
f est continue sur donc il existe U ouvert de E tel que $f^{-1}(V) = X \cap U$.
Mais alors $\left(f_{|X'}\right)^{-1}(V) = X' \cap X \cap U = X' \cap U$ qui est un ouvert de X'.
Donc $f_{|X'}$ est continue. ✓

Point 2.

$f_{|X'}$ est continue, soit $x \in X'$, montrons que f est continue en x.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $y \in X'$ et $\|x - y\| < \delta$ alors $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$
Comme X' est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_r(x) \subseteq X'$.
On choisit $\delta' \leqslant \min\{r, \delta\}$, alors $\forall y \in \mathcal{B}_{\delta'}, \ \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$, donc f est continue en x. ✓

Point 3.

✓

3 Applications uniformément continues, applications linéaires continues

Définition 10. Une application $f : E \longrightarrow F$ est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon,\ \exists \delta > 0\ :\ \forall x, y \in E,\ (\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y\| < \varepsilon)$$

Remarque 7. Si est uniformément continue alors elle est continue, la réciproque ets cependant fausse.

Définition 11. Une fonction f est *k-lipschitzienne* si

$$\forall x, y \in E,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|$$

Théorème 3. *Soit $\varphi : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors les propriétés suivantes ont équivalentes :*

1. *φ est continue*
2. *φ est continue en 0*
3. *φ est uniformément continue*
4. *φ est bornée sur $\mathcal{B}_1(0)$*
5. *φ est k-lipschitzienne.*

Preuve 13. Montrons 2. $\Longrightarrow$ 4. $\Longrightarrow$ 5. $\Longrightarrow$ 3. $\Longrightarrow$ 1. $\Longrightarrow$ 2.

1. $\Longrightarrow$ 2.
✓

2. $\Longrightarrow$ 4.
f est continue en 0, donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\| < \delta \Longrightarrow \|f(x)\| < \varepsilon$
Soit $x \in \mathcal{B}_1(0)$ avec $x \neq 0$, on a :

$$\|x\| < 1$$

$$\|\delta x\| < \delta$$

$$\|f(\delta \cdot x)\| < \varepsilon$$

$$\|f(x)\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$$

✓

4. $\Longrightarrow$ 5.
Supposons que f soit majoré par $M > 0$ sur la boule unité.
Soient $x \neq y \in E$, on a

$$x - y = (x - y) \cdot \frac{\|x - y\|}{\|x - y\|}$$

$$f(x-y) = \|x-y\| f \underbrace{\left(\frac{x-y}{\|x-y\|} \right)}_{\in \mathcal{B}_1(0)}$$

$$f(x-y) = \|x-y\| \cdot M$$

f est M-lipschitzienne. ✓

5. $\Longrightarrow$ 3. $\Longleftarrow$ 1. $\Longrightarrow$ 2.
✓

Définition 12. Soit f une application lipschitzienne, on appelle *constante de Lipschitz de f* ou *norme d'opérateur de f* la valeur $\|f\| = \inf\{k > 0 \mid f \text{ est } k\text{-liptschitzienne}\} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\|$

La norme d'opérateur est comme son nom l'indique une norme, en particulier

$$\forall x, y \in E, \ \|f(x)\| \leqslant \|f\| \|x\|$$

Proposition 7. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, o note $\mathcal{L}_C(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. C'est un espace vectoriel normé si on le munit de la norme d'opérateur.*

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{L}_C(E, E), \ \|\varphi \circ \psi\| \leqslant \|\varphi\| \|\psi\|$$

Remarque 8. On peut étendre ces résultats aux applications bilinéaires : soient E, E' et F trois espaces vectoriels normés, et $f \ : \ E \times E' \longrightarrow F$ bilinéaire continue,sa norme d'opérateur est définie par

$$\|f\| = \sup\{\|f(x, y)\| \mid \|x\| \leqslant 1, \ \|y\| \leqslant 1\}$$

On a en particulier $\|f(x, y)\| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$

4 Espaces produits

Définition 13. Soient (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux espaces vectoriels normés, on construit des normes sur $E_1 \times E_2$ en posant

$$\|(x, y)\|_1 = N_1(x) + N_2(y)$$

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{N_1^2(x) + N_2^2(y)}$$

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{N_1(x), N_2(y)\}$$

On a les relations

$$\|(x, y)\|_\infty \leqslant \|(x, y)\|_2 \leqslant \|(x, y)\|_1 \leqslant 2\|(x, y)\|_\infty$$

Exemple 5. Soit E un espace vectoriel normé, on munit $E \times E$ de la norme définie par $N(x, y) = \|x\| + \|y\|$ et on définit une distance $d(u, v) = \|u - v\|$

d est lipschitzienne :

$$|d(x, y) - d(x', y')| = |\|x - y\| - \|x' - y'\||$$

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leqslant |||(x-y) - (x'-y')|||$$

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leqslant |||(x-x') + (y'-y)|||$$

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leqslant \|(x-x')\| + \|(y'-y)\|$$

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leqslant N((x-x') + (y'-y))$$

d est donc 1-lipschitzienne.

Proposition 8. *Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés, alors :*

1. *Les projections* $\pi_1 \ : \ \begin{cases} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_1 \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{cases}$ *et* $\pi_2 \ : \ \begin{cases} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_1 \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{cases}$ *sont lipschitziennes.*
2. *Une application* $f \ : \ Y \longrightarrow E_1 \times E_2$ *notée* $f = (f_1, f_2)$ *avec* $f_1 \ : \ Y \longrightarrow E_1$ *et* $f_2 \ : \ Y \longrightarrow E_2$ *est continue si et seulement si* f_1 *et* f_2 *sont continues.*
3. *Si* $f \ : \ E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ *est continue alors pour tout* $x \in E_1$*, l'application* $f_x \ : \ \begin{cases} E_2 & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & f(x,y) \end{cases}$ *est continue et de même* $f_y \ : \ \begin{cases} E_1 & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x,y) \end{cases}$ *est continue pour tout* $y \in E_2$*.*

Preuve 14.

1. Soit $(x,y) \in E_1 \times E_2$, alors $\pi_1(x,y) = x$, donc $\pi_1(x,y) - \pi_2(x',y') = x' - y'$ et donc $\|\pi_1(x,y) - \pi_2(x',y')\| = \|x - x'\| \leqslant \|x - x'\| + \|y - y'\| = N_1(x - x', y - y')$

   π_1 est 1-lipschitzienne.
2. Si f est continue, alors $\pi_1 \circ f = f_1$ est continue comme composée d'applications continues.

   De même $f_2 = \pi_2 \circ f$ est continue.

   Inversement, supposons que $f_1 \ : \ Y \longrightarrow E_1$ et $f_2 \ : \ Y \longrightarrow E_2$ sont continues.

   Montrons que $f = (f_1, f_2) \ : \ \begin{cases} Y & \longrightarrow & E \times E_2 \\ x & \longmapsto & (f_1(x), f_2(y) \end{cases}$

   Soit $(x_n)_n$ une suite de Y convergeant vers $x \in Y$, montrons que $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.

   Comme f_1 est continue, $(f_1(x_n))_n$ converge $f_1(x)$ et de même pour f_2.

   Donc $f(x_n)_n$ converge vers $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$
3. Se démontre de même par caractérisation séquentielle de la continuité.

Remarque 9. Une fonction peut être continue de chaque variable sans être continue du couple de variables, par exemple

$$f \ : \ \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \longmapsto & 0 \end{cases}$$

f est continue pour x et y fixé, mais $\forall \varepsilon > 0, \ f(\varepsilon, \varepsilon) = \frac{1}{2}$ f n'est donc pas continue car $f(0,0) = 0$.

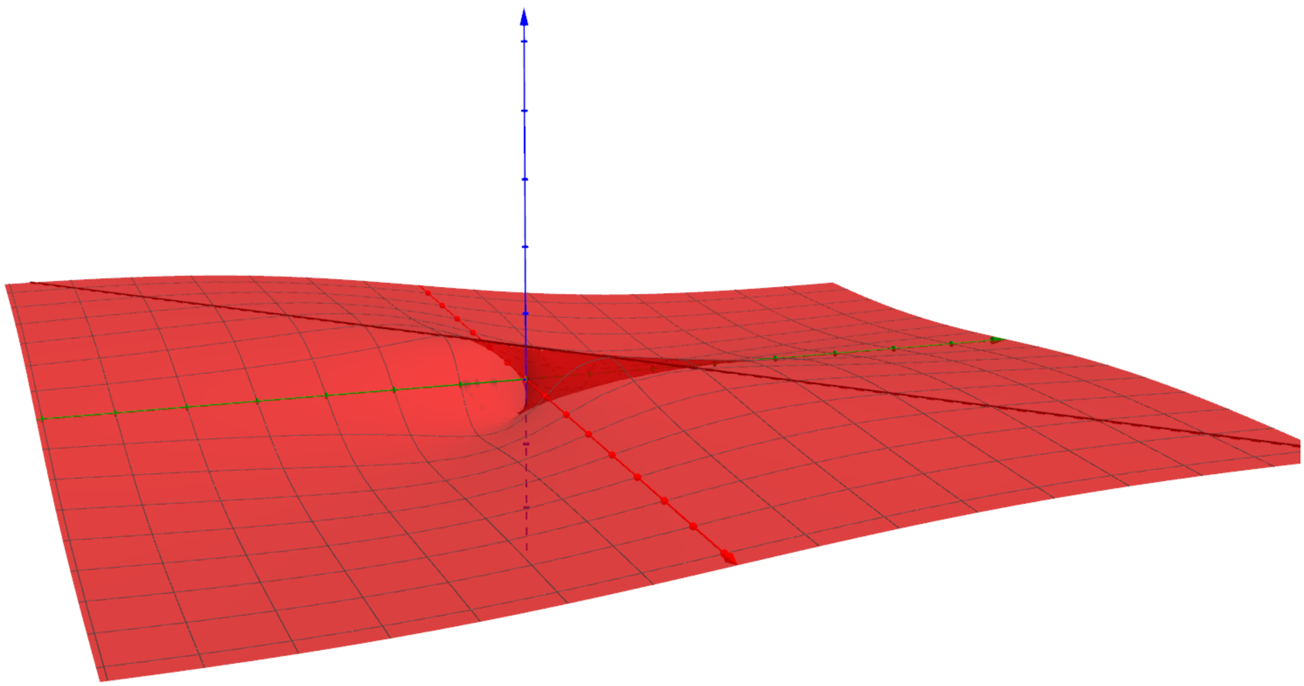

Figure 6: $\left(x, y, \frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ et $(t, t, f(t,t))$

Part II
Compacité et complétude

5 Sous-suites et compacité

Théorème 4. *Bolzano-Weierstrass*
Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

Preuve 15. Soit $(x_n)_n$ bornée par $M > 0$, on définit pour tout $n \geqslant 0$ l'ensemble $Y_n = \{x_k \mid k \geqslant n\}$ et $y_n = \sup Y_n$.
On a alors pour tout n, $Y_{n+1} \subseteq Y_n$ et donc $y_{n+1} \leqslant y_n$.
$(y_n)_n$ est donc une suite minorée par $-M$ décroissante, elle converge ainsi vers une limite $\ell = \inf\{y_n \mid n \geqslant 0\}$.
Construisons une suite $(x_{k_n})_n$ à l'aide d'une suite strictement croissante $(k_n)_n$ d'entiers tels que :

$$\forall n \geqslant 1,\ |x_{k_n} - \ell| \leqslant \frac{1}{n}$$

On choisit $k_0 = 1$ et on suppose avoir construit : $k_0, k_1, k_2, ..., k_{n-1}$.

Par définition de la suite $(y_n)_n$, il existe un entier p_n tel que :

$$0 \leqslant y_{p_n} - \ell \leqslant \frac{1}{n}$$

Mais $(y_k)_k$ est décroissante, alors $\forall k \geqslant p_n$ on a $0 \leqslant y_k - \ell \leqslant \frac{1}{n}$.
y_{p_n} étant une borne supérieure, il existe $k_n \geqslant p_n$ tel que $y_{p_n} - \frac{1}{n} \leqslant x_{k_n} \leqslant y_{p_n}$, ce qui donne :

$$y_{p_n} - \ell - \frac{1}{n} \leqslant x_{k_n} - \ell \leqslant y_{p_n} - \ell$$

En particulier on a :

$$-\frac{1}{n} \leqslant x_{k_n} - \ell \leqslant \frac{1}{n}$$

.

□

Définition 14. Une partie de X d'un espace vectoriel normé est *compacte* si toute suite à valeurs dans X admet une sous-suite convergente dans X.

Exemple 6. Toute partie finie d'un espace vectoriel normé est compacte.

Proposition 9. *Toute partie compacte d'un espace vectoriel normé E est fermée et bornée.*

Preuve 16. Soit X une partie compacte de E.

X est fermée
Soit $(x_n)_n$ une suite de X convergeant vers ℓ.
Comme X est compact, $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergente dans X, donc la limite de $(x_n)_n$ appartient à X. ✓

X est bornée
Sinon il existe une suite non-bornée dans X dont aucune sous-suite ne converge. ✓

□

Remarque 10. La réciproque est fausse en général.

Proposition 10. *Si E est de dimension finie, les compacts de E sont les fermés bornés.*

Preuve 17. Soit $F \subseteq E$ un fermé borné et $(x_n)_n$ une suite à valeur dans F.
F est borné, donc $(x_n)_n$ l'est aussi, or par la généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass en dimension finie, $(x_n)_n$ admet une sous-suite $(y_n)_n$ convergente vers un élément y.
Or F est fermé, donc $y \in F$.
F est bien compact.

□

Proposition 11. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés, X une partie de E et f une application continue de X dans F.*
Si X est un compact de E alors $f(X)$ est un compact de F.

Remarque 11. L'image réciproque d'un compact n'est pas nécessairement un compact, par exemple $sin^{-1}([0,1]) = \mathbb{R}$ et pour l'application $f \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$ on a $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}$

Preuve 18. Soit X un compact de E et $(y_n)_n$ une suite de $f(X)$, soit alors $(x_n)_n$ tel que $y_n = f(x_n)$, qui est une suite de X.

Comme X est compact, on peut extraire une sous-suite convergente de (x_n) de limite $\ell \in X$.

Par continuité de f, la suite $(y_n)_n$ converge vers $f(\ell)$ et comme $f(\ell) \in f(X)$, on a bien que $f(X)$ est compact.

□

Corollaire 2. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue avec X compact de E, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

6 Compacité en dimension finie

Lemme 1. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie d.*

Soit $(e_i)_{i \leqslant d}$ une base de E et soit la norme sur E

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i| \text{ où } x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$$

Alors toute partie K compacte de E est incluse dans un ensemble de la forme :

$$\left\{ \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \mid x_i \in [a_i, b_i] \right\}$$

.

Lemme 2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie d de base $e = (e_i)_{i \leqslant d}$.*

Alors les parties compactes de E pour la norme $\| \cdot \|_\infty$ sont les parties fermées bornées pour cette norme dans $\mathbb{R}^d$.

Preuve 19. Soit X un fermé borné de E, alors X est inclus dans un ensemble de la forme $K = \left\{ \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \mid x_i \in [a_i, b_i] \right\}$.

Montrons que X est compact. Soit $(x_n)_n$ une suite de X, alors $(x_n)_n$ est une suite de K qui est un compact, donc (x_n) possède une sous-suite convergente dans K et comme X est fermé, sa limite est dans X.

□

Corollaire 3. *Tout sous-ensemble fermé d'un compact est compact.*

Théorème 5. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie d, toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Preuve 20. Soit E de base $e = (e_i)_{i \leqslant n}$

Soit N une norme sur E et $\|x\|_\infty$ définie pour tout $x = x_1 + e_1 + ... + x_d e_d$ par $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$

$\boldsymbol{N(x) \leqslant C_2 \|x\|_\infty}$

Soit $x \in E$, on a :

$$N(x) = N\left(\sum_i x_i e_i\right)$$

$$N(x) \leqslant \sum_i N(x_i e_i)$$

$$N(x) \leqslant \sum_i |x_i| N(e_i)$$

$$N(x) \leqslant \sum_i |x_i| \leqslant C_2 \|x\|_\infty$$

avec $C_2 = \sum_i N(e_i)$ ✓

$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{\infty}} \leqslant \boldsymbol{\beta N(x)}$

Par l'inégalité triangulaire, on a $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y)$ et d'après l'étape précédente, $|N(x) - N(y)| \leqslant C_2\|x-y\|_\infty$, N est donc continue sur E.

Comme la sphère unité $\mathcal{S}_1^\infty$ est compacte (car bornée et fermé dans E) $N_{|\mathcal{S}_1^\infty}$ est continue et $N_{|\mathcal{S}_1^\infty}(\mathcal{S}_1^\infty)$ est bornée, il existe donc un x_0 tel que $\forall x \in S_1^\infty, N(x) \geqslant N(x_0)$.

On pose $C_1 = N(x_0)$ et on a :

$$\forall x \in E,\ N(x) = \|x\|_\infty \cdot N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geqslant C_1\|x\|_\infty$$

. ✓

□

Théorème 6. *Soient E et F des espaces vectoriels normés de dimension finie, et $\varphi\ :\ E \longrightarrow F$.*

Si φ est linéaire, alors elle continue.

Preuve 21. Soit e une base de E et $\|\cdot\|_\infty$ la norme associée.

Soit N une norme sur F et $x \in E$.

$$N(\varphi(x)) = N\left(\varphi\left(\sum_i x_i e_i\right)\right)$$

$$N(\varphi(x)) = N\left(\sum_i x_i \varphi\left(e_i\right)\right)$$

$$N(\varphi(x)) = \sum_i |x_i| N\left(\varphi\left(e_i\right)\right)$$

$$N(\varphi(x)) \leqslant \|x\|_\infty \sum_i N(\varphi(e_i))$$

φ est donc bien continue.

7 Applications de la compacité

Théorème 7. *Soient E et F deux espaces vectoriels normées et K un compact de E.*

Alors toute application $f\ :\ K \longrightarrow F$ continue est uniformément continue.

Preuve 22. Supposons que f n'est pas uniformément continue, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe x et y dans K tels que $\|x - y\| \leqslant \delta$ et $\|f(x) - f(y)\| \geqslant \varepsilon$.

En particulier, pour tout $n > 0$, il existe x_n et y_n dans K tels que $\|x_n - y_n\| \leqslant \frac{1}{n}$ et $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geqslant \varepsilon$.

Alors $(x_n)_n$ possède une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente dans K vers une limite $x \in K$.

De même pour $(y_{\varphi(n)})$ qui possède une sous-suite $(y_{(\varphi\circ\psi)(n)})$ qui converge vers une limite $y \in K$.

Soient $x'_n = x_{(\varphi\circ\psi)(n)}$ et $y'_n = y_{(\varphi\circ\psi)(n)}$.

Alors $\|x'_n - y'_n\| \leqslant \frac{1}{(\varphi\circ\psi)(n)} \leqslant \frac{1}{n}$.

Donc $x = y$, mais f est continue en x, donc $f(x'_n)$ converge vers $f(x)$ et $f(y'_n)$ converge vers $f(x)$, ce qui est contradictoire avec le fait que $\|f(x'_n) - f(y'_n)\| \geqslant \varepsilon$.

8 Suites de Cauchy

Définition 15. Une suite $(x_n)_n$ est dite *de Cauchy* si :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N\ :\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ (m, n \geqslant N \Longrightarrow \|x_m - x_n\| \leqslant \varepsilon)$$

et de manière équivalente :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N\ :\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ (m \geqslant N \Longrightarrow \|x_m - x_{m+n}\| \leqslant \varepsilon)$$

Remarque 12. Une définition équivalente d'une suite de Cauchy est une suite $(x_n)_n$ telle que $\delta(A_k) \longrightarrow 0,\ (k \to \infty)$ où $A_k = \{x_n | n \geqslant k\}$ et $\delta(X) = \sup\limits_{x,y\in X} \|x - y\|$.

Proposition 12. *Soit $f\ :\ E \longrightarrow F$ une application uniformément continue sur E, si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de E, alors $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy de F.*

Preuve 23. Il s'agit de vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tous $m, n > N$ on a $\|f(x_n) - f(x_m)\| \leqslant \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in E$, on a $\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Comme $(x_n)_n$ est de Cauchy, il existe N tel que si $m, n > N$ alors $\|x_m - x_n\| < \delta$ et par suite $\|f(x_m) - f(x_n)\| < \varepsilon$. □

Proposition 13. *Soit E un espace vectoriel normé.*

1. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
2. *Toute suite convergente est de Cauchy.*
3. *Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*
4. *Si une suite de Cauchy admet une sous-suite convergente, alors elle converge.*

Preuve 24.
Point 1

Soit N tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $\|x_n - x_N\| < 1$, alors $\|x_n\| - \|x_N\| < 1$ d'où $\|x_n\| < 1 + \|x_N\|$ et donc $\|x_n\| \leqslant \max(\|x_0\|, ..., \|x_{N-1}\|, 1 + \|x_N\|)$ ✓

Point 4

On suppose qu'il existe une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente vers une limite ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe N et N' tels que :

$$\forall n \geqslant N,\ \|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et :

$$\forall n, m \geqslant N'\ \|x_n - x_m\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On note $N_0 = \max(N, N')$, si $m \geqslant N_0$ et $n \geqslant N_0$, alors $\|x_m - \ell\| \leqslant \|x_m - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leqslant \varepsilon$. ✓

Corollaire 4. *Dans un compact, toute suite de Cauchy est convergente.*

Remarque 13. En dimension infini, les parties fermées et bornées ne sont pas forcément compactes.
Soit E l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|P\| = \sum_{i=0}^{n} |a_i|, \text{ avec } n \text{ le degré de } P$$

Soit la suite $(P_n)_n = (X^n)_n$, alors pour tout n, $\|P_n\| = 1$
$(P_n)_n$ est une suite de $\mathcal{B}_1$, or celle-ci est bornée et fermée dans E, mais $\|P_n - P_m\| = 2$ si $n \neq m$.
Donc $(P_n)_n$ n'est pas de Cauchy, et n'admet aucune sous-suite convergente. $\mathcal{B}_1$ n'est donc pas de Cauchy.

9 Parties complètes et espaces de Banach

Définition 16. On dit qu'une partie X d'un espace vectoriel normé E est *complète* si toute suite de Cauchy dans X converge dans X. On dit aussi que X est complet.

Proposition 14.

1. *Toute partie compacte est complète.*
2. *Tout espace vectoriel de dimension finie est complet.*
3. *Toute partie complète d'un espace vectoriel normé est fermée.*
4. *Toute partie fermée d'un complet est complète.*

Preuve 25.
Point 2
Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de E de dimension finie, alors elle est bornée, donc elle admet une sous-suite convergente (car E est de dimension finie), et donc $(x_n)_n$ converge. ✓

Point 3
Soit $(x_n)_n$ une suite convergente de X complet, montrons que la limite ℓ de $(x_n)_n$ est dans X.
$(x_n)_n$ est convergente donc elle est de Cauchy. Comme X est complet $(x_n)_n$ converge dans X, d'où le résultat par unicité de la limite. ✓

Point 4
Soit F un ensemble fermé de X complet, montrons que F est complet.
Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de F montrons que $(x_n)_n$ converge dans F.
Comme $F \subseteq X$ qui est complet alors $(x_n)_n$ converge dans X.
Comme F est fermé et que $(x_n)_n$ converge, sa limite est dans F. ✓

Définition 17. Si E est un espace vectoriel normé complet alors on dit que E est un *espace de Banach.*

Exemple 7. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[X], \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R}), \mathbb{C}$ sont complets.

1. $\mathbb{Q}$ n'est pas complet (dans $\mathbb{R}$).
   Considérons la suite
   $$x_0,\ x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$$
   $(x_n)_n$ est bornée par 1 et 2, elle admet donc une sous-suite convergente convergente dans $\mathbb{R}$ de limite ℓ vérifiant $\ell = 1 + \frac{1}{\ell}$, donc $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On rappelle qu'une série $\sum x_n$ est normalement convergente si $\left(\sum \|x_n\|\right)_n$ est convergente.

Proposition 15. *Soit E un espace vectoriel normé, alors E est de Banach si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.*

Preuve 26.

$\Longrightarrow$

Soit $(x_n)_n$ telle que $\sum x_n$ soit normalement convergente.

On note $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_n$ et on montre que $(S_n)_n$ converge dans E.

Soient $n > m$, alors $S_n - S_m = \displaystyle\sum_{i=m+1}^{n} x_i$ et donc $\|S_n - S_m\| \leqslant \displaystyle\sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_i\|$.

Sachant que $\sum \|x_k\|$ converge, on a que $\displaystyle\sum_{i=m+1}^{\infty} \|x_i\| \longrightarrow 0,\ (m \to \infty)$.

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un N tel que pour tout $m \geqslant N$ on a $\displaystyle\sum_{k\geqslant m+1} \|x_k\| \leqslant \varepsilon$, d'où

$$\forall m \geqslant N, \forall n \geqslant 0,\ \|S_n - S_m\| \leqslant \varepsilon$$

.

Donc $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy. Comme E est de Banach, elle converge. ✓

$\Longleftarrow$

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans E, montrons qu'elle converge dans E.
$(x_n)_n$ étant de Cauchy, pour tout $k \geqslant 0$, il existe N_k tel que pour tout$n, m \geqslant N_k$ on a $\|x_n - x_m\| \leqslant 2^{-k}$
On pose $y_k = x_{N_{k+1}} - x_{N_k}$, alors $\|y_k\| \leqslant 2^{-k}$ donc $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \|y_k\|$ converge.
Mais alors $\sum_{k\geqslant 0} y_k$ converge dans E par hypothèse.
On écrit alors :

$$\sum_{i=0}^{k} y_i = y_0 + y_1 + ... + y_k$$

$$\sum_{i=0}^{k} y_i = x_{N_{k+1}} - x_{N_0}$$

Donc $X_{N_{k+1}} = x_{N_0} + \sum_{i=0}^{k} y_i$, alors $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergente, donc ele converge. ✓

□

Proposition 16. *Une partie de X d'un espace vectoriel normé E est complète si et seulement si toute suite décroissante de fermés non-vides de E, dont le diamètre tend vers 0 a une intersection non-vide.*

Preuve 27.
$\Longrightarrow$
Soit $X \subseteq E$ complet et une suite $(F_n)_n$ telle que :

$$\begin{cases} \forall n, \ F_n \neq \emptyset \\ \forall n, \ F_{n+1} \subseteq F_n \\ \delta(F_n) \longrightarrow 0, \ (n \to 0) \end{cases}$$

Pour tout n, on choisit un élément x de F_n, cette suite est de Cauchy car le diamètre des F_n tend vers 0 : en effet si $n > m$, alors $x_n \in F_n$ et $\|x_n - x_m\| \leqslant \delta(F_m)$.

Mais alors $(x_n)_n$ converge dans X, puisque X est complet.

Soit x sa limite, montrons que $x \in \bigcap_{n \geqslant 0} F_n$.

Soit m et soit la suite $(x_n)_{n \geqslant m}$. Cette suite converge vers x et par ailleurs c'est une suite de F_m.

Comme F_m est fermé, on a $x \in F_m$, d'où $x \in \bigcap_{m \geqslant 0} F_m = \bigcap_{m \geqslant 0} F_m$

C'est d'ailleurs l'unique élément de l'intersection puisque $\delta(F_n) \longrightarrow 0 \ (n \to \infty))$ ✓

$\Longleftarrow$
Sot $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de X, montrons que $(x_n)_n$ converge dans X.

Pour tout m on définit le fermé $F_m = \overline{\{x_n | n \geqslant m\}}$.

Alors la famille des F_m est décroissante, les fermés sont non-vides et $\delta(F_m) \longrightarrow 0 \ (m \to \infty)$ car $(x_n)_n$ est de Cauchy.

L'intersection des F_m est formée de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n), par hypothèse cet ensemble est non-vide, donc $(x_n)_n$ possède au moins une sous-suite convergente, donc $(x_n)_n$ converge car elle est de Cauchy. ✓

□

Théorème 8. *Soit A un ensemble et X une partie complète d'un espace vectoriel normé E, alors :*

1. *$\mathcal{F}_b(A, X)$ est un espace de Banach s'il est muni de la norme uniforme.*
2. *Si de plus A est compact, alors l'ensemble $\mathcal{C}(A, X)$ des fonctions continues de A dans X est un espace de Banach.*

Preuve 28.
Point 1
Soit (f_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{F}_b(A, X)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour tous $mn, \geqslant N$, on a $\|f_n - f_m\| \leqslant \varepsilon$.

Alors en particulier pour tout $x \in A, \ \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$, donc pour tout $x \in A$ la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans X, donc elle converge vers une limite $f(x)$ car X est complet.

Il faut vérifier que $f \in \mathcal{F}_b(A, X)$.

On reprend $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$ pour passer à la limite $n \to \infty$ avec $m > N$ fixé, alors $\|f(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$ et donc $\|f(x)\| < \varepsilon + \|f_n(x)\|$.

Donc $f \in \mathcal{F}_b(A, X)$ avec $\|f\| \leqslant \varepsilon + \|f_m\|$.

Enfin il faut vérifier que $\lim\limits_{m\to\infty} \|f_m - f\| = 0$, ce qui est vrai car $\sup_x \|f(x) - f_m(x)\| \leqslant \varepsilon$ dès que $m > N$. ✓

Point 2

On remarque que $\mathcal{C}(A, X) \subseteq \mathcal{F}_b(A, X)$ car A est compact.

Donc il suffit de montrer que $\mathcal{C}(A, X)$ est fermé pour la norme uniforme, ce qui est vrai par la limite uniforme de fonctions continues. ✓

□

Théorème 9. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés avec F complet, alors l'ensemble $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F munie de la norme d'opérateur est un espace de Banach.*

Preuve 29. On sait que $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace vectoriel normé, il ne reste qu'à démontrer qu'il est complet.

Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy à valeur dans $\mathcal{L}_c(E, F)$, montrons qu'elle converge vers un élément u de $\mathcal{L}_c(E, F)$.

On sait que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N\ :\ \forall n, m,\ (n, m \geqslant N \Longrightarrow\ \|u_n - u_m\| \leqslant \varepsilon)$$

Ce qui veut dire que

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u_n(x) - u_m(x)\| \leqslant \varepsilon$$

Donc pour tout x, $(u_n(x))_n$ est une suite de Cauchy, et sachant F complet on peut poser $u(x) = \lim\limits_n u_n(x)$.

Il reste à démontrer que u est une application linéaire et que :

$$\lim_n \|u_n - u\| = 0$$

ce qui impliquera entre autre la continuité de u.

- Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, u_n est linéaire alors par passage à la limite :

$$u_n(x + \lambda y) = u_n(x) + \lambda u_n(y) \longrightarrow u(x) + \lambda u(y)\ (n \to \infty)$$

- En passant à la limite en m, on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N\ :\ (n \geqslant N \Longrightarrow \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u_n(x) - u(x)\| \leqslant \varepsilon)$$

Ainsi $\lim\limits_n \|u_n - u\| = 0$, et de plus elle est bornée grâce au théorème précédent.

10 Applications

Théorème 10. *Théorème de Riesz*

Soit E un espace vectoriel normé, alors E est de dimension fini si et seulement si la boule unité fermée de E est compacte.

Preuve 30. Montrons que si la boule unité fermée est compacte, alors E est de dimension finie.

Supposons par l'absurde que E de dimension infinie et que sa boule unité fermée B soit compacte.

On construira par récurrence une suite $(x_n)_n$ de Cauchy de B telle que $\|x_n - x_m\| \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui contredira le fait que la boule unité fermée soit compacte car cette suite ne possède aucune sous-suite convergente.

On pose $x_0 = 0$ et on suppose construits $x_0, ..., x_n$ dans B tels que $\|x_i - x_j\| \geqslant \frac{1}{2}$ pour tous $i, j \leqslant n$.

Soit $F_n = \text{Vect}(x_0, x_1, ..., x_n)$, alors $\dim F_n \leqslant n + 1$, sachant E de dimension infinie, il existe un élément $a \in E \backslash F_n$.

On note $d(a, F_n) = \min_{f \in F_n} \|a - f\|$, et soit b tel que $\|a - b\| \leqslant 2 \cdot d(a, F_n)$.

Posons $x_{n+1} = \frac{a-b}{\|a-b\|}$, alors $x_{n+1} \in B$.

Il reste à vérifier que : $\forall k \leqslant n,\ \|x_{n+1} - x_k\| \geqslant \frac{1}{2}$

On remarque que $d(a, F_n) = d(a - b, F_n)$, en effet :

$$d(a-b, F_n) = \min_{f \in F_n} \|a - b - f\| = \min_{f \in F_n} \|a - (b+f)\| = \min_{b+f \in F_n} \|a - (b+f)\| = \min_{f' \in F_n} \|a - f'\|$$

De même $d(\frac{a-b}{\|a-b\|}, F_n) = \frac{d(a-b, F_n)}{\|a-b\|}$.

Donc $d(x_{n+1}, F_n) = \frac{1}{\|a-b\|} d(a-b, F_n) = \frac{1}{\|a-b\|} d(a, F_n) \geqslant \frac{1}{\|a-b\|} \cdot \frac{\|a-b\|}{2} \geqslant \frac{1}{2}$

Enfin on a $\forall k \leqslant n,\ d(x_n, F_n) \leqslant \|x_{n+1} - x_k\|$

Théorème 11. *Théorème du point fixe*

Soit E un espace vectoriel normé et X une partie complète de E non-vide.

Soit $f\ :\ X \longrightarrow X$ un application contractante, c'est-à-dire k-Lipschitzienne avec $0 < k < 1$, alors :

1. *f possède un unique point fixe z_0*
2. *pour tout point $x \in X$, la suite définie par*

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = f(x_n),\ n \geqslant 0 \end{cases}$$

converge vers z_0.

Preuve 31. Soit $x \in X$ et la suite $(x_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = f(x_n),\ n \geqslant 0 \end{cases}$$

Montrons que cette suite converge.

Comme X est complet, il suffit de vérifier que $(x_n)_n$ est de Cauchy :

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\|$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k \cdot \|x_n - x_{n-1}\| = k \cdot \|f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})\|$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k \cdot \|f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})\| = k^2 \cdot \|x_{n-1} - x_{n-2}\|$$

...

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k^n \|x_1 - x_0\|$$

Soient n et m, on a :

$$\|x_{n+m} - x_n\| = \|x_{n+m} - x_{n+m-1} + x_{n+m-1} ... + x_{n+1} - x_n\|$$

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \|x_{n+j} - x_{n+j-1}\|$$

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leqslant \sum_{j=1}^{m} k^{n+j-1} \|x_1 - x_0\| = k^n \sum_{j=1}^{\infty} k^{j-1} \|x_1 - x_0\|$$

Donc comme $k < 1$, on a que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, et X étant complet on en déduite que $(x_n)_n$ converge dans X vers un élément ${}_0 \in X$.

Montrons que $f(z_0) = z_0$ puis que z_0 est l'unique point fixe de f.

On sait que $x_{n+1} = f(x_n)$, comme f est continue et donc par passage à la limite $z_0 = f(z_0)$.

z_0 est de plus unique car si on a deux points fixes z et z', on a $\|z - z'\| = \|f(z) - f(z')\| \leqslant k \cdot \|z - z'\|$, donc nécessairement $z = z'$ car $0 < k < 1$.

$\square$

Part III
Fonctions dérivables

11 Rappels sur les fonctions dérivables réelles

Définition 18. Soit f une fonction définie su un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soi $x_0 \in I$, on dit que f est dérivable en x_0 si :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est fini.

Cette limite s'appelle la dérivée de f en x et se note $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

La fonction f est *dérivable sur* I si elle est dérivable en tout point de I et on note f' ou $\frac{df}{dx}$ la fonction dérivée $x \longmapsto f'(x)$.

Propriété 1. - *Une fonction dérivable est continue*

- *Soient f et g dérivables sur un même intervalle, alors on a :*
  - $(f + g)' = f' + g'$
  - $(\lambda f)' = \lambda f$
  - $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

- $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$

Proposition 17. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Preuve 32. On peut supposer que x_0 est un maximum local, pour $h > 0$ assez petit on a

$$\frac{f(x_+h_0) - f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

et

$$\frac{f(x_-h_0) - f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

et en passant à la limite :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_+h_0) - f(x_0)}{h} = 0$$

□

Théorème 12. *Théorème de Rolle*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,b[$, s'il existe a et b tels que $f(a) = f(b)$ alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve 33. f est continue sur $[a,b]$ donc bornée et atteint ses bornes, on pose alors :

$$m = \min_{[a,b]} f$$

$$M = \max_{[a,b]} f$$

et soitx_0 tel que $f(x_0) = m$ et x_1 tel que $f(x_1) = M$.
Si $x_0 = x_1$, c'est que la fonction est constante, et donc $\forall x \in]a,b[f'(x) = 0$, alors $m = M$.
Sinon, ce sont des extremums locaux et par la proposition précédente, la dérivée s'annule en ce point.

□

Théorème 13. *Théorème des accroissements finis*
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Preuve 34. Appliquer le théorème de Rolle à $\phi : t \longmapsto f(t) - f(a) - \frac{t-a}{b-a}(f(b) - f(a))$

Corollaire 5.

- *Si $f' \geqslant 0$ alors f est croissante.*
- *Si $f' \leqslant 0$ alors f est décroissante.*
- *Si $f' = 0$ alors f est constante.*

Corollaire 6. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f' > 0$.*
Alors $f(I)$ est ouvert, f est bijective de I sur $f(I)$ et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Preuve 35. Montrons que f^{-1} est dérivable.

Soit $x_0 \in I$ et $x \in I$, on pose $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$.

Alors si $y \longrightarrow y_0$ on a $x \longrightarrow x_0$ par continuité de f^{-1}.

On veut calculer

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - (f^{-1})'(y_0)}{y - y_0}$$

alors par $\lim_{x \to x_0} \frac{(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

on a

$$\lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - (f^{-1})'(y_0)} = f'(x_0)$$

et comme $f'(x_0) > 0$ on a

$$\lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - (f^{-1})'(y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$