Université Denis Diderot - Paris 7 Janvier 2015
L2 - Algèbre et analyse approfondies

Examen 51DE01MT - durée : 3 heures

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

Question de cours. Enoncer la règle de Cauchy de convergence de séries (sans démonstration).

Exercice 1. On dit que deux permutations $v, w \in S_n$ sont conjuguées s'il existe $g \in S_n$ tel que $w = gvg^{-1}$.

1. Soit $v = (a_1, \ldots, a_p)$ un cycle de longueur p et $g \in S_n$, montrer que gvg^{-1} est le cycle $w = (g(a_1), \ldots, g(a_p))$.
2. Soit $v = (a_1, \ldots, a_p)$ et $w = (b_1, \ldots, b_p)$ deux cycles de longueur p, déterminer $g \in S_n$ tel que $w = gvg^{-1}$.
3. En déduire que deux cycles sont conjugués si et seulement si ils ont même longueur.
4. Démontrer que deux permutations $v, w \in S_n$ sont conjuguées si et seulement les longeurs des cycles dans leurs décompositions en produit de cycles de supports disjoints coincident.
5. En utilisant la question 4, déterminer si les permutations suivantes sont conjuguées dans S_7
$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
6. On appelle classe de conjugaison d'un élément $w \in S_5$ l'ensemble $\{gwg^{-1}\,;\, g \in S_5\}$. Déduire de la question précédente le nombre de classes de conjugaison dans S_5.
7. L'ordre d'une permutation $w \in S_5$ est le plus petit entier strictement positif r tel que $w^r = \mathrm{id}$. Quel est l'ordre d'un cycle de longueur p ? Quels sont les ordres possibles pour un élément de S_5 ?

Exercice 2. La suite de Fibonacci est la suite numérique $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$, avec $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

1. Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que, pour $n \geqslant 1$, on a
$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que A admet deux valeurs propres réelles distinctes que l'on note λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
3. Trouver des vecteurs propres e_1 et e_2 associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2, sous la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer les coordonnés du vecteur $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2). On les note x_1 et x_2.
5. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$. Déterminer $A^n(e_1)$ et $A^n(e_2)$ puis montrer que $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda_1^n\, x_1\, e_1 + \lambda_2^n\, x_2\, e_2$.

6. Donner une expression de F_n en fonction de λ_1 et λ_2.
7. Donner un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3. Soit $f :]-1,1[\cup]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = (x^2-1)\,\mathrm{Log}\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

Notons Γ le graphe de f.

1. Démontrer que f admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0. Donner ce développement limité. Démontrer que f' admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 donné par $f'(x) = -2+4x^2+o(x^2)$. En déduire que Γ admet une tangente (T) au point d'abscisse 0 dont on donnera une équation et la position par rapport à Γ.
2. Démontrer qu'au voisinage de $z=0$ on a $f(1/z) = 2/z - 4z/3 + o(z)$. En déduire que Γ admet une asymptote (A). Donner une équation de (A) et préciser la position de Γ par rapport à (A).

Exercice 4. On considère la suite numérique (u_n) telle que $u_n = n!\prod_{k=1}^{n}\sin(a/k)$ pour tout $n \geqslant 1$, où $a \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$, $a \notin \pi\mathbb{N}$ est un paramètre.

1. Démontrer que le signe de u_n ne dépend pas de n si n est suffisament grand. On suppose que $a \neq 1$. En étudiant la suite (u_{n+1}/u_n) préciser
   a) la nature de la série $\sum u_n$,
   b) la nature de la suite (u_n).
2. Posons $a_n = \mathrm{Log}(n\sin(1/n))$ pour tout $n \geqslant 1$.
   a) Quelle est la nature de la série $\sum a_n$?
   b) Quelle est la nature de la suite (u_n) pour $a=1$?

Exercice 5. Etudier la convergence des séries suivantes

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{n^2+\mathrm{Log}(n)+5^n}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}},$$

$$S_4 = \sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right), \quad S_5 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{n^n}.$$