COURS DE MM4

10 mai 2015

Raphaël LEFEVERE, lefevere@math.univ-paris-diderot.fr

Sommaire

Première partie

Algèbre

Table des matières

Rappels, espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$. La structure d'espace vectoriel définit l'addition d'éléments de E et la multiplication par un scalaire d'un élément de E.

Définition 0.1
Soit $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$. $z \in E$ est une *combinaison linéaire de* $(v_1, \ldots, v_n)$ s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que

$$z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i.$$

Définition 0.2
Soit $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$. Cette famille est dite *libre* (ou linéairement indépendante) si pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i = 0 \implies (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Remarque. Dans une famille libre, aucun vecteur n'est nul. En effet, si

$$v_1 = 0$$

alors $(1, 0, \ldots, 0)$ est une combinaison linéaire où les facteurs sont non tous nuls donnant 0.

Définition 0.3
F est un sous-espace vectoriel de E si :

1. $F \subset E$;
2. $0_E \in F$;
3. stabilité par multiplication :
$$\forall v \in F, \forall \lambda \in \mathbf{K},\ \lambda \cdot v \in F\ ;$$
4. stabilité par addition
$$\forall v_1, v_2 \in F,\ v_1 + v_2 \in F.$$

Exemple. Avec $E = \mathbf{R}^2$, le sous-ensemble

$$F = \left\{ (x, y) \,\middle|\, y = x^2 \right\}$$

n'est pas un sous-espace vectoriel. En effet, si $v = (x, y) \in F$ est le vecteur non nul alors pour $\lambda \in \mathbf{K} \setminus \{0, 1\}$ on a pas

$$\lambda \cdot y = \lambda^2 \cdot x^2.$$

Définition 0.4
Soient F un sous-espace vectoriel de E et $(v_1, \dots, v_n) \in F^n$. Cette famille est dite *génératrice* de F si pour tout $v \in F$ il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i.$$

Définition 0.5
Soient F un sous-espace vectoriel de E et $B = (v_1, \dots, v_n) \in F^n$. B est une *base de* F si B est libre et génératrice de F.

Proposition 0.6
Soit F un sous-espace vectoriel de E et $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base de F. Pour tout vecteur $v \in F$ il existe une unique collection $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i.$$

Remarque. Si on se donne une base $B = (v_1, \dots, v_n)$ d'un sous-espace vectoriel F de E alors on peut écrire une bijection entre F et $\mathbf{K}^n$:

$$\phi : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Lemme 0.7
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si $B = (v_1, \dots, v_n)$ et $B' = (w_1, \dots, w_l)$ sont deux bases de F alors $n = l$.

Définition 0.8
Soit F un sous-espace vectoriel de E. La *dimension* de F est le nombre d'éléments de vecteurs d'une base de F. On note ce nombre $\dim F$.

Définition 0.9
Soient E, F deux **K**-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est une *application linéaire* si :

1. $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$ pour tous $\lambda \in \mathbf{K}$ et $v \in E$;
2. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ pour tous $v_1, v_2 \in E$.

Définition 0.10
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1. $\mathrm{Ker}(f) = \{v \in E \mid f(v) = 0_F\}$ est le *noyau* de f ;
2. $\mathrm{Im}(f) = \{f(v) \mid v \in E\}$ est *l'image* de f.

Théorème 0.11
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

Soit $f : E \to F$ avec $\dim E = n$, $\dim F = m$. On identifie f à une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $B' = (f_1, \ldots, f_m)$ une base de F.

Pour tout $v \in F$ il existe une combinaison unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{K}^m$ telle que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i.$$

On pose

$$(v)_{B'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^m.$$

On définit

$$A = \begin{pmatrix} (f(e_1))_{B'} & (f(e_2))_{B'} & \ldots & (f(e_n))_{B'} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$$

comme étant la matrice de f dans les bases B, B'.

Chapitre 1

Formes quadratiques

1 Formes linéaires, espace dual

1.1 Formes linéaires

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition 1.1
Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbf{K}$.

Comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}$, sa dimension est soit nulle soit égale à un. Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ est soit :
— réduit à $\{0\}$;
— égal à $\mathbf{K}$.

Proposition 1.2
Si $\dim E = n < \infty$ et si f est une forme linéaire non nulle sur E alors

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = n - 1.$$

Démonstration
On a par le théorème du rang :

$$n = \dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f) + 1.$$

Exemple. Soit $E = \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{K})$. Pour $v \in E$, on a

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

Soit $u \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{K})$, on considère l'application :

$$f_u(v) = {}^t u \cdot v \in \mathbf{K}.$$

Remarque. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ et soit $f : E \to \mathbf{K}$ une forme linéaire. On pose le vecteur $u = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \in E$ définit par :

$$\forall i \leq n,\ u_i = f(e_i).$$

Soit $v \in E$, on a :

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) \\ f(v) &= \sum_{i=1}^{n} v_i f(e_i) \\ f(v) &= \sum_{i=1}^{n} v_i u_i \\ f(v) &= {}^t u \cdot v. \end{aligned}$$

1.2 Espace dual

Définition 1.3
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le dual de E, noté E^* est l'ensemble des formes linéaires sur E.

E^* est muni d'une addition : soient $f_1, f_2 \in E^*$:

$$\forall x \in E,\ (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Mais aussi d'une multiplication par un scalaire : soient $f \in E^*, \lambda \in \mathbf{K}$:

$$\forall x \in E,\ (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

E^* a donc une structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition 1.4 (Base duale)
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Pour tout $v \in E$, il existe une unique collection $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$. On définit une collection de formes linéaires $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ où pour tout $i \leq n$:

$$e_i^*(v) = \lambda_i.$$

Proposition 1.5
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$. La base duale, $(e_1^*, \dots, e_n^*)$, est une base du dual.
Ainsi,

$$\dim E^* = \dim E.$$

Démonstration
On montre que $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est génératrice et libre.

1. Soient $x^* \in E^*$ et $x \in E$.

$$\begin{aligned} x^*(x) &= x^*\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \\ x^*(x) &= \sum_{i=1}^{n} x_i x^*(e_i) \\ x^*(x) &= \sum_{i=1}^{n} x^*(e_i) \cdot e_i^*(x) \\ x^*(x) &= \left(\sum_{i=1}^{n} x^*(e_i) e_i^*\right)(x). \end{aligned}$$

Ainsi, toute forme linéaire s'écrit comme combinaison linéaire de $(e_1^*, \dots, e_n^*)$.

2. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* = 0.$$
C'est-à-dire :
$$\forall x \in E,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(x) = 0.$$
On choisit n vecteurs $x \neq 0$ particuliers :
$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$
Ainsi, pour e_j fixé :
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(e_j) = \lambda_j = 0.$$
Donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0_{\mathbf{K}^n}$.

PROPOSITION 1.6
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soit f une forme linéaire sur E non nulle. Soit $H = \mathrm{Ker}(f)$. Si g est une forme linéaire telle que $H \subset \mathrm{Ker}(g)$ alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $g = \lambda f$.

DÉMONSTRATION
Si $f \neq 0$ alors il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Soit $x \in E$,
$$x = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 + \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0.$$
On a alors
$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0\right) = 0$$
et donc
$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x_0)} g(x_0)$$
et donc $\lambda = g(x_0)/f(x_0)$ convient.

LEMME 1.7
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n. Pour tout $x \in E$ non nul il existe $x^* \in E^*$ tel que $x^*(x) \neq 0$.

DÉMONSTRATION
On considère la base de E, $(e_1, \dots, e_n)$, où $e_1 = x$ et la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$. Comme $e_1^*(x) = 1$, e_1^* convient.

THÉORÈME 1.8
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$ et soit $(f_1, \dots, f_k)$ une famille libre de formes linéaires avec $k < n$. En posant $H_i = \mathrm{Ker}(f_i)$, on a
$$\dim \bigcap_{i=1}^k H_i = n - k.$$

Démonstration

On complète $(f_1, \ldots, f_k)$ en une base du dual, $B^* = (f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_n)$. On définit

$$u\colon \left| \begin{array}{l} E \to \mathbf{K}^n \\ x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \end{array} \right. .$$

Montrons que u est injective. Soit $x \in E$ tel que $u(x) = 0$. Comme $(f_1^*, \ldots, f_n^*)$ est une base, toute forme s'écrit comme combinaison linéaire de ces vecteurs. Or $u(x) = 0$ et donc toute forme s'annule en x et par le lemme précédent ce n'est possible que si $x = 0$. Donc u est injective et donc bijective puisque $\dim E = \dim \mathbf{K}^n = n$.

Or,

$$\bigcap_{i=1}^{k} H_i = u^{-1}(T)$$

où

$$T = \{y \in \mathbf{K}^n \mid y_1 = 0, \ldots, y_k = 0\}.$$

Or $\dim T = n - k$.

Corollaire 1.9

Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de E^*. Il existe une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de E telle que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$.

Démonstration

En gardant le même u de la démonstration précédente, on a

$$u(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

Comme u est un isomorphisme, on définit pour tout $j \leq n$:

$$v_j = u^{-1}(e_j)$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

1.3 Applications transposées

Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

Définition 1.10

Soit $a : E \to F$ une application linéaire. On définit :

$$^t a : F^* \to E^*$$

par

$$^t a(y^*) = y^*(a).$$

Exemple. Avec $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $F = \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$, les duaux sont :

$$E^* = \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R}),\ F^* = \mathcal{M}_{1,m}(\mathbf{R}).$$

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ et on définit :

$$\forall x \in E,\ a(x) = Ax.$$

On définit la forme y^* sur F par :

$$\forall y \in F,\ y^*(y) = \sum_{i=1}^{m} y_i^* y_i = \begin{pmatrix} y_1^* & \ldots & y_m^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

On définit alors

$$\forall x \in E,\ {}^t a(y^*)(x) = \begin{pmatrix} y_1^* & \dots & y_m^* \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {}^t \left({}^t A \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_m^* \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

L'application transposée est représentée par la matrice transposée de l'application.

Lemme 1.11
On a :

1. soient :
$$E \xrightarrow{a} F \xrightarrow{b} G\ ,$$
alors
$${}^t(b \circ a) = {}^t a \circ {}^t b\ ;$$
2. ${}^t I_d = I_d$;
3. soit $A : E \to F$ inversible, ${}^t\left(A^{-1}\right) = \left({}^t A\right)^{-1}$.

Démonstration
Dans l'ordre :

1. On a :

$$\begin{aligned} \forall z^* \in G^*, \forall x \in E,\ {}^t(b \circ a)(z^*)(x) &= z^*((b \circ a)(x)) \\ &= {}^t b(z^*(a(x))) \\ &= {}^t a \circ {}^t b(z^*(x)). \end{aligned}$$

1.4 Représentation matricielle

Soit $a : E \to F$ une application linéaire de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. On associe à a la matrice $A = \mathrm{mat}(a, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$ où $\boldsymbol{e}$ est une base de E et $\boldsymbol{f}$ une base de F. On a

$$A = \begin{pmatrix} {}_{\boldsymbol{f}}(a(e_1)) & \dots & {}_{\boldsymbol{f}}(a(e_i)) & \dots & {}_{\boldsymbol{f}}(a(e_n)) \end{pmatrix}$$

avec

$${}_{\boldsymbol{f}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},\ v = \sum_{i=1}^{m} x_i f_i.$$

On définit $B = \mathrm{mat}({}^t a, \boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{e}^*)$. On a

$$B = \begin{pmatrix} {}_{\boldsymbol{e}^*}({}^t a(f_1^*)) & \dots & {}_{\boldsymbol{e}^*}({}^t a(f_m^*)) \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire :

$$B_{ij} = {}^t a(f_j^*)(e_i) = f_j^*(a(e_i)) = A_{ji}.$$

Finalement

$$B = {}^t A.$$

2 Formes bilinéaires

2.1 Définition

Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

Définition 2.1
Soit :
$$\varphi : E \times F \to \mathbf{K}$$
une application. C'est une application bilinéaire si elle vérifie les conditions suivantes :

1. pour tout $y \in F$,
$$x \mapsto \varphi(x, y) : E \to \mathbf{K}$$
est linéaire ;
2. pour tout $x \in E$,
$$y \mapsto \varphi(x, y) : F \to \mathbf{K}$$
est linéaire.

Exemples.

1. Prenons $E = F = \mathbf{R}^n$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, l'application
$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
est une forme bilinéaire, c'est le produit scalaire euclidien.
2. En prenant $E = F = \mathbf{R}^4$ (l'espace-temps). Si $x \in \mathbf{R}^4$, on note $x = (x_1, x_2, x_3, t)$. On définit
$$\varphi_2(x, x') = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3 - ctt'.$$
Remarque. Il existe des vecteurs x non nuls tels que $\varphi_2(x, x) = 0$. L'ensemble des ces vecteurs est appelé le « cône de lumière ».
3. Avec $E = F = \mathcal{C}([0, 1])$, on considère :
$$\forall f \in E, \forall g \in G,\ \varphi(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Remarque. Si $\varphi : E \times F \to \mathbf{K}$ est une application bilinéaire, on peut définir
$$D_\varphi : F \to E^*$$
définie par
$$\forall y \in F, \forall x \in E,\ D_\varphi(y)(x) = \varphi(x, y).$$

2.2 Matrice d'une forme bilinéaire

Soient E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E et $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Soit φ une forme bilinéaire sur $E \times F$.

Soit $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$ un vecteur de E et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$ un vecteur de F.
$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, f_j).$$

Définition 2.2
On définit la matrice $\Phi \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ par

$$\Phi_{i,j} = \varphi(e_i, f_j),$$

c'est-à-dire, $\Phi = \mathrm{mat}(\varphi, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$.

On a alors

$$\varphi(x, y) = {}^t X \Phi Y$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Si on prend P et Q inversibles telles que $X = PX'$ et $Y = QY'$ alors Pour

$$\Phi' = {}^t P \Phi Q$$

on a

$$\varphi(x, y) = {}^t X' \Phi' Y'.$$

Définition 2.3
Une forme bilinéaire sur $E \times E$ est dite *symétrique* si

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

Définition 2.4
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et φ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$. On dit que x et y de E sont φ-orthogonaux si $\varphi(x, y) = 0$.

Définition 2.5
Soit $A \subset E$. On définit l'orthogonal de A :

$$A^\perp = \{x \in E \,|\, \forall y \in A,\ \varphi(x, y) = 0\}.$$

Proposition 2.6
Soit $A \subset E$,

1. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel ;
2. si $A_1 \subset A_2$ alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp$;
3. $A \subset A^{\perp\perp}$.

Démonstration
Montrons le point 2 :
Soit $x \in A_2^\perp$, pour tout $y \in A_1$, $\varphi(x, y) = 0$ puisque $y \in A_2$. Donc $x \in A_1^\perp$.

Exemple : l'espace-temps de Minkowski. Soit

$$\varphi_2 : (\mathbf{R}^2)^2 \to \mathbf{R}^2$$

définit pour $x = (x_1, t)$ par :

$$\varphi_2(x, x') = x_1 x_1' - tt'.$$

Le vecteur $x = (1, 2)$ a pour orthogonal (non unique) $y = (2, 1)$.

2.3 Formes quadratiques

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

DÉFINITION 2.7
Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. La forme quadratique Q associée à φ comme étant l'application

$$Q : E \to \mathbf{K}$$

définie par

$$Q(x) = \varphi(x, x).$$

EXEMPLE. En prenant $\varphi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

la forme quadratique associée est

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3.$$

Pour $\varphi : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ définie par

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

on a

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2.$$

LEMME 2.8
Supposons que $\mathbf{K}$ soit de caractéristique différente de 2 et soit $Q : E \to \mathbf{R}$ une forme quadratique. La forme bilinéaire symétrique φ associée est définie par

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ 2\varphi(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y).$$

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}
Q(x + y) &= \varphi(x + y, x + y)\\
Q(x + y) &= \varphi(x, x + y) + \varphi(y, x + y)\\
Q(x + y) &= Q(x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + Q(y)\\
Q(x + y) &= Q(x) + Q(y) + 2\varphi(x, y).
\end{aligned}$$

THÉORÈME 2.9
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$, où $\mathbf{K}$ est de caractéristique différente de 2, et φ une forme bilinéaire symétrique sur E.
Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs φ-orthogonaux.

DÉMONSTRATION
On procède par récurrence sur n.

1. Pour $n = 1$ on prend $e_1 \neq 0$.

2. Supposons que tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n-1$ vérifie le résultat.
   Si $\varphi = 0$ alors il suffit de compléter la base.
   Supposons que $\varphi \neq 0$. Il existe $(x, y) \in E^2$ tel que $\varphi(x, y) \neq 0$. Il existe donc par le résultat précédent $v \in E$ tel que $Q(v) \neq 0$ et alors $\varphi(v, v) \neq 0$. Posons $e_1 = v$. On définit
   $$G = \{e_1\}^{\perp}.$$
   C'est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ [§1] et donc il existe une base ψ-orthogonale $(e_2, \ldots, e_n)$ de G pour la forme linéaire ψ définie par $\psi(x, y) = \varphi(x, y)$ pour tous $x, y \in G$. La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ forme alors une base où les vecteurs sont φ-orthogonaux deux à deux.

2.4 Formes dégénérées

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition 2.10
Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Le *noyau* de φ, noté N_φ, est
$$N_\varphi = \{x \in E \,|\, \forall y \in E,\ \varphi(x, y) = 0\}.$$

Exemple. Pour $E = \mathbf{R}^4$ et la forme
$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_3 y_3$$
on a
$$N_\varphi = \left\{x \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, x_1 = x_3 = 0\right\}.$$

Définition 2.11
Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E de dimension finie. Le *rang* de φ (noté r) est
$$r = \dim E - \dim N_\varphi.$$

Remarque. C'est également le rang de la matrice associée à φ dans la base $\mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est une base de E.

Exemple. En reprenant l'exemple précédent, posons
$$F = \left\{x \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, x_2 = x_4 = 0\right\}.$$
On a $F^{\perp} = N_\varphi$ et $F^{\perp\perp} = E$. Avec
$$G = \left\{x \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, x_1 = 0\right\}$$
on a
$$G^{\perp} = \left\{y \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, \forall x \in G,\ \varphi(x, y) = 0\right\} = \left\{y \in \mathbf{R}^4 \,\middle|\, y_3 = 0\right\} \supset N_\varphi.$$

§1. Si on prend $D(x) = \varphi(x, e_1)$ qui est une forme linéaire sur E alors son noyau est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ et $\operatorname{Ker} D = \{e_1\}^{\perp}$.

Théorème 2.12
Soit E de dimension $n < \infty$ et soit φ une forme bilinéaire symétrique. Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel alors

$$\dim F + \dim F^{\perp} - \dim F \cap N_{\varphi} = \dim E.$$

Démonstration
On considère le cas où $F \cap N_{\varphi} = \{0\}$.
Soit F de dimension $k < n$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k)$ une base de F.

$$F^{\perp} = \{x \in E \,|\, \forall i \leq k,\ \varphi(x, e_i) = 0\}.$$

Posons $l_i : E \to \mathbf{K}$ définie par

$$l_i(x) = \varphi(x, e_i).$$

On a :

$$F^{\perp} = \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(l_i).$$

Or par le résultat 1.8, si $(l_1, \dots, l_k)$ est une famille libre alors la dimension de cette intersection est égale à $n - k$ et alors $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$. Il s'agit donc de montrer que $(l_1, \dots, l_k)$ est une famille libre.
Soit $(c_1, \dots, c_k) \in \mathbf{K}^k$, supposons que

$$\sum_{i=1}^{k} c_i l_i = 0.$$

C'est équivalent à

$$\forall x \in E,\ \varphi\left(x, \sum_{i=1}^{l} c_i e_i\right) e = 0.$$

Or cela veut dire que $\sum_{i=1}^{k} c_i e_i$ appartient à F et N_{φ} et donc cette somme est nulle et comme $(e_1, \dots, e_k)$ est une base, les coefficients $(c_1, \dots, c_k)$ sont tous nuls. Ainsi, $(l_1, \dots, l_k)$ est une famille libre.
Supposons maintenant que $F \cap N_{\varphi} \neq \{0\}$. On montre que $\dim F^{\perp} + k - \dim(F \cap N_{\varphi}) = n$. On prend une base de $F \cap N_{\varphi}$: $(e_1, \dots, e_j)$ et on la complète en une base de F, on obtient $(e_1, \dots, e_j, e_{j+1}, \dots, e_k)$. Il faut montrer que $F^{\perp} = \{y \in E \,|\, \forall i \in \{j+1, j+2, \dots, k\},\ \varphi(y, e_i) = 0\}$.

Démonstration
Soit F de dimension $k < n$ et supposons que $F \cap N_{\varphi}$ soit de dimension j. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E φ-orthogonale telle que pour $i \leq j$ on ait $e_i \in F \cap N_{\varphi}$ et pour $i \leq k$ on ait $e_i \in F$. On a :

$$\varphi = \Psi_{i,j} e_i^* \otimes e_j^*.$$

Soit $\left\{l^i\right\}_{i \leq k}$ une famille de formes sur E définie par

$$l^i = \Psi_{i,j} e_j^*.$$

On définit l'application linéaire :

$$M = l^i e_i : E \to F.$$

On a :

$$\dim \operatorname{Im} M = \dim F - \dim F \cap N_{\varphi}$$

et comme $\operatorname{Ker} M = F^{\perp}$ on a

$$\dim E = \dim \operatorname{Im}(M) + \dim \operatorname{Ker}(M) = \dim F - \dim F \cap N_{\varphi} + \dim F^{\perp}.$$

2.5 Coniques et quadriques

Les coniques sont des courbes de $\mathbf{R}^2$.

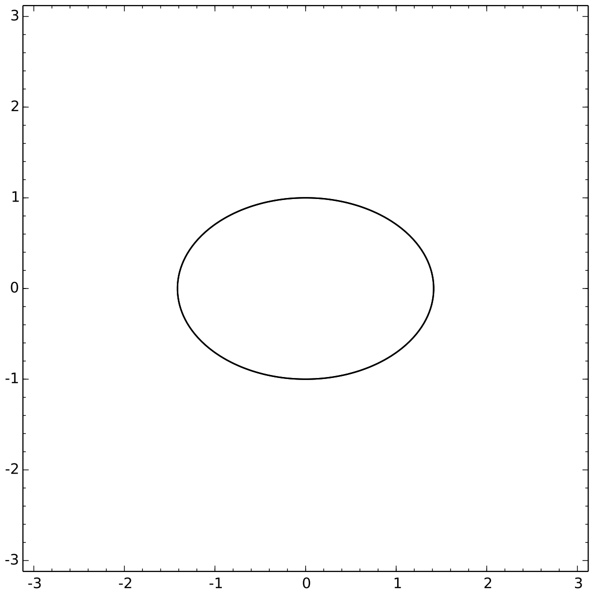


FIGURE 1.1 – Ellipse

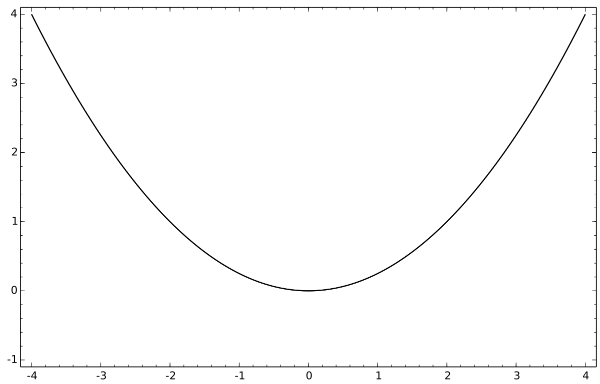


FIGURE 1.2 – Parabole

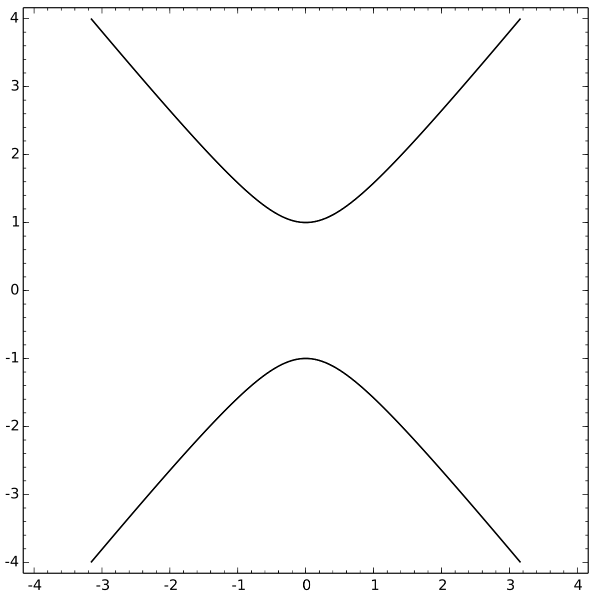


Figure 1.3 – Hyperbole

Les quadriques sont des surfaces dans l'espace $\mathbf{R}^3$.

Les coniques (et les quadriques) sont des ensembles de points de $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^3$) dont les coordonnées cartésiennes $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ (resp. $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$) satisfont :

$$Q(x) + l(x) + c = 0$$

où c est une constante, $Q(x)$ une fonction de la forme :

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j$$

(si $n = 2$ alors c'est une conique, si $n = 3$ c'est une quadrique) et $l(x)$ une application linéaire.

Quelques rappels. Rappelons quelques résultats précédents :

Théorème 2.13
Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\varphi(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$.

Proposition 2.14
Soit F un sous-espace vectoriel de E muni d'une forme bilinéaire symétrique. Alors

$$\dim F + \dim F^\perp - \dim F \cap N_\varphi = \dim E.$$

Définition 2.15
φ est non dégénérée si $N_\varphi = \{0\}$.

Remarque. Si φ est non dégénérée alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et dans ce cas-ci $F = F^{\perp\perp}$. En effet, comme $F \subset F^{\perp\perp}$ et d'après la formule précédente, on a

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim F^\perp + \dim F^{\perp\perp} = \dim E$$

et donc $\dim F = \dim F^{\perp\perp}$ d'où $F = F^{\perp\perp}$.

En conséquence, si $\Phi = \mathrm{mat}(\varphi, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e})$, *i.e.* $\Phi_i, j = \varphi(e_i, e_j)$ pour tous i, j. Alors si $\boldsymbol{e}$ est une base φ-orthogonale alors Φ est diagonale.

Soient $v, w \in E$ et $(e_1, \dots, e_n), (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. Donnons-nous les décompositions : $v = \sum x_i e_i$, $w = \sum y_i e_i$, $v = \sum x'_i e_i$ et $w = \sum y'_i e_i$. On note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Il existe une matrice P inversible telle que $X = PX'$ et $Y = PY'$. On a

$$\varphi(v, w) = {}^t X \Phi Y = {}^t X' \Phi' Y'$$

avec Φ' la matrice dans la base $\boldsymbol{e'}$. Si $\boldsymbol{e'}$ est une base orthogonale alors

$$\varphi(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e'_i, e'_i) x'_i y'_i.$$

En particulier

$$\varphi(v, v) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e'_i, e'_i)(x'_i)^2.$$

Pour $n = 3$ on aurait

$$\varphi(v, v) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + \lambda_3 (x'_3)^2$$

où $\lambda_i = \varphi(e'_i, e'_i)$.

3 Formes quadratiques

3.1 Définitions et propriétés

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition 3.1
$Q : E \to \mathbf{K}$ est une forme quadratique s'il existe une forme bilinéaire φ telle que $Q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$.

Proposition 3.2
Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ et pour tout $x \in E$

$$Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x).$$

Exemple. Pour $E = \mathbf{R}^3$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ on a par exemple la forme quadratique :

$$Q(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2x_3.$$

On peut trouver comme forme bilinéaire associée :

$$\varphi_1(x, y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_3.$$

On a également comme forme $\varphi_2(x, y) = \varphi_1(y, x)$. Il y a une forme symétrique :

$$\varphi_s(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)).$$

Définition 3.3
On appelle *forme polaire* de Q, la forme bilinéaire symétrique sur E définie par

$$2\varphi(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y).$$

Proposition 3.4
Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, φ une forme bilinéaire symétrique et $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base φ-orthogonale. Si

$$q = \operatorname{card}\{i \leq n \,|\, \varphi(e_i, e_i) = 0\}$$

alors

$$q = \dim N_\varphi.$$

Remarque. q ne dépend pas du choix de la base orthogonale.

Démonstration
Supposons que $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ tel que $\varphi(e_j, e_j) = 0$ si, et seulement si, $k < j \leq n$. On montre que $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ est une base de N_φ. On sait que c'est une famille libre et donc il suffit de montrer qu'elle est génératrice.
Soit $v \in N_\varphi$ tel que

$$v = c_1 e_1 + \ldots + c_k e_k + c_{k+1} e_{k+1} + \ldots c_n e_n.$$

Comme $\varphi(v, e_j) = 0$ pour tout j on a $c_i = 0$ pour tout $i \leq k$. Ainsi, v est une combinaison linéaire des e_i pour $i > k$ et donc la famille $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ est génératrice.

Théorème 3.5 (Théorème de Sylvester)
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique φ. Il existe un entier r tel que pour toute base $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ φ-orthogonale de E on ait

$$r = \operatorname{card}\{i \leq n \,|\, \varphi(e_i, e_i) > 0\}.$$

Démonstration
Soient r, s tels que $0 \leq r \leq s \leq n$. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base orthogonale de E telle que

$$\begin{aligned}
&\varphi(f_i, f_i) > 0,\ 1 \leq i \leq r\\
&\varphi(f_i, f_i) < 0,\ r+1 \leq i \leq s\\
&\varphi(f_i, f_i) = 0,\ s+1 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

Soit $(f'_1, \ldots, f'_n)$ une base orthogonale de E telle que pour (r', s') on ait les mêmes conditions que précédemment. Il faut montrer $r = r'$ (qui implique alors $s = s'$).
On considère la collection

$$(f_1, \ldots, f_r, f'_{r'+1}, \ldots, f'_n).$$

Si cette famille est libre, elle a $r + n - r' \leq n$ éléments et donc $r \leq r'$. Mais le même argument pour la famille symétrique $(f'_1, \ldots, f'_{r'}, f_{r+1}, \ldots, f_n)$ montre que $r' \leq r$ et donc $r = r'$.
Supposons que l'on ait

$$c_1 f_1 \ldots + c_r f_r + d_{r'+1} f'_{r'+1} + \ldots d_n f'_n = 0$$

c'est-à-dire

$$v = c_1 f_1 + \ldots + c_r f_r = -(d_{r'+1} f'_{r'+1} + \ldots, d_n f'_n) = -w.$$

On a $\varphi(v,v) = \varphi(w,w)$ c'est-à-dire :

$$c_1^2 \varphi(f_1, f_1) + \ldots + c_r^2 \varphi(f_r, f_r) = d_{r'+1}^2 \varphi(f'_{r'+1}, f'_{r'+1}) + \ldots + d_n^2 \varphi(f'_n, f'_n).$$

Or le terme de gauche est positif par hypothèse et celui de droite négatif. Donc les deux termes sont nuls et donc $c_i = 0$ pour $i \leq r$ et donc $v = 0$ et $w = 0$. Comme v et w sont des combinaisons de vecteurs libres, les coefficients sont tous nuls et donc la famille est libre.

Définition 3.6
Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E, un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. On dit que φ est de signature (p, q) s'il existe une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que

$$p = \operatorname{card}\{i \leq n \,|\, \varphi(e_i, e_i) > 0\}, \; q = \operatorname{card}\{i \leq n \,|\, \varphi(e_i, e_i) < 0\}.$$

Définition 3.7
Soit Q une forme quadratique sur E, un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, et soit φ sa forme polaire. On dit que :

1. φ (ou Q) est positive si $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$;
2. φ (ou Q) est définie positive si $\varphi(x, x) > 0$ pour tout x non nul.

3.2 Coniques et quadriques

Les coniques et les quadriques sont des ensembles (respectivement dans $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$) d'expression générale :

$$\{x \in \mathbf{R}^n \,|\, Q(x) + l(x) + c = 0\}$$

où c est une constante et

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j, \; l(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

avec les b_{ij} et a_i réels.

Il est possible de trouver P inversible telle que $X' = P^{-1}X$ avec

$$Q(X') = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i')^2$$

et $\lambda_i = Q(e_i')$. De plus

$$l(X') = APX' = \sum_{i=1}^{n} a_i' x_i'.$$

Le nombre de λ_i positifs et négatifs ne dépend pas du choix de la base orthogonale utilisée pour construire P.

Je suppose que coniques et quadriques sont des ensembles dont les coordonnées satisfont :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + c = 0. \tag{1.1}$$

1. Si les λ_i sont tous non nuls alors

$$\lambda_i x_i^2 + a_i x_i = \lambda_i \left(x_i^2 + \frac{a_i}{\lambda_i} x_i \right) = \lambda_i \left(x_i^2 + \frac{a_i}{\lambda_i} x_i + \left(\frac{a_i}{2\lambda_i} \right)^2 \right) - \frac{a_i^2}{4\lambda_i}.$$

Finalement l'équation 1.1 est équivalente à

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i')^2 + c - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{4\lambda_i} = 0$$

avec

$$x'_i = x_i + \frac{a_i}{2\lambda_i}$$

et en posant $c' = c - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{4\lambda_i}$ on a une équivalence :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x'_i)^2 + c' = 0.$$

2. S'il existe un λ_i nul et un λ_j non nul alors on suppose qu'il existe m tel que λ_j est non nul pour tout $j \leq m$ et $\lambda_i = 0$ pour tout $i > m$. L'équation 1.1 est alors équivalente à :

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j (x'_j)^2 + \sum_{j=m+1}^{n} a_j x'_j + c = 0$$

avec

$$\forall j \leq m,\ x'_j = x_j + \frac{a_j}{2\lambda_j}$$

et

$$\forall j > m,\ x'_j = x_j.$$

Pour $n = 2$, les coniques. **1.** Si λ_1 et λ_2 sont non nuls alors l'équation est sous la forme

$$\lambda x_1^2 + \mu x_2^2 = \delta$$

avec $\lambda = \lambda_1$ et $\mu = \lambda_2$.

	Si $\lambda > 0$ et $\mu > 0$	Si $\lambda > 0$ et $\mu < 0$
Si $\delta < 0$	La conique est vide	La conique est une hyperbole d'équation : $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = -1$ avec $a = \sqrt{\frac{-\delta}{\lambda}},\ b = \sqrt{\frac{\delta}{\mu}}$.
Si $\delta > 0$	La conique est une ellipse d'équation : $\left(\frac{x_1^2}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2^2}{b}\right)^2 = 1$ avec $a = \sqrt{\frac{\delta}{\lambda}},\ b = \sqrt{\frac{\delta}{\mu}}$.	La conique est une hyperbole d'équation : $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$ avec $a = \sqrt{\frac{\delta}{\lambda}},\ b = \sqrt{\frac{-\delta}{\mu}}$.
Si $\delta = 0$	La conique est réduite à $\{0\}$	La conique est deux droites sécantes

2. Si $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \neq 0$ alors l'équation se met sous la forme

$$\lambda x_1^2 + a x_2 + k = 0.$$

C'est une parabole si $a \neq 0$.

Chapitre 2

Espaces euclidiens

1 Produit scalaire, normes euclidiennes

Définition 1.1
Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive, φ.

On dit que φ est le produit scalaire de l'espace vectoriel et on note

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ \varphi(x,y) = \langle x, y\rangle\,.$$

Remarque. Si E est muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive mais sans supposer que E est de dimension finie alors E est un espace pré-hilbertien.

Exemples. Exemples usuels :

1. $\mathbf{R}^n$ avec $\varphi_1(x,y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.
2. $$l_2 = \left\{ (a_k)_{k\in\mathbf{N}} \middle| \forall k \in \mathbf{N},\ a_k \in \mathbf{R} \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 < +\infty \right\}$$
   avec le produit scalaire
   $$\varphi_2(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_ky_k,$$
   et comme
   $$|x_ky_k| \leq \frac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2)$$
   alors le produit scalaire est bien défini (il converge absolument). l_2 est un espace pré-hilbertien.
3. $\mathcal{C}([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ avec
   $$\varphi_3(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Définition 1.2
L'application

$$E \ni x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

est appelée la *norme* de $x \in E$.

Proposition 1.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Pour tous x, y de E :
$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Démonstration
Soit $t \in \mathbf{R}$,
$$\langle tx + y, tx + y\rangle \geq 0$$
et en développant on a :
$$t^2 \langle x, x\rangle + 2t \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \geq 0.$$
Le membre de gauche est un polynôme en t de la forme $at^2 + bt + c$. Cette inégalité est vraie aussi si, et seulement si, $4 |\langle x, y\rangle|^2 - 4 \langle y, y\rangle \langle x, x\rangle \leq 0$ c'est-à-dire
$$|\langle x, y)\rangle|^2 \leq (x, x)(y, y)$$
et donc
$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Lemme 1.4
L'application $x \mapsto \|x\|$ satisfait :

1. $\|x\| = 0$ si, et seulement si $x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et pour tout $x \in E$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in E$.

Démonstration
Pour l'inégalité triangulaire on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x, y) \\ &\leq \|x\| + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Lemme 1.5 (Identité du parallélogramme)
Pour tous $x, y \in E$ on a :
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Démonstration
Par définition,
$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$$
et donc
$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2 \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \langle x, y\rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Remarque. Le « théorème » de Pythagore est valide. En effet, si $x \perp y$ alors
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

PROPOSITION 1.6
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une collection de vecteurs orthogonaux deux à deux. On a :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

DÉMONSTRATION
Par récurrence sur n. C'est vrai pour $n = 2$ et

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n \right\|^2$$

or x_n est orthogonal à la somme puisqu'il est orthogonal à chaque x_i pour $i < n$. Ainsi,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right\|^2 + \|x_n\|^2$$

et par hypothèse de récurrence la propriété est vraie.

PROPOSITION 1.7
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Si les x_i sont tous non nuls et orthogonaux deux-à-deux alors la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

DÉMONSTRATION
Supposons :

$$c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = 0$$

alors

$$\|c_1 x_1 + \dots + c_n x_n\| = 0$$

et comme ils sont orthogonaux deux-à-deux :

$$c_1^2 \|x_1\|^2 + \dots + c_n^2 \|x_n\|^2 = 0.$$

Or $\|x_i\|^2 \neq 0$ pour tout i car x_i non nuls et donc les coefficients sont tous nuls. Donc la famille considérée est libre.

THÉORÈME 1.8
Soit E un espace euclidien de dimension finie. Il existe une base orthonormée.

DÉMONSTRATION
On sait qu'il existe une base orthogonale : $(u_1, \dots, u_n)$. Mais la famille $(e_1, \dots, e_n)$ définie pour tout $i \leq n$ par :

$$e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$$

est une base orthonormée.

REMARQUE. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et soit $x \in E$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i.$$

Alors

$$c_i = \langle x, e_i \rangle .$$

Soit $u : E \to E$ et A sa matrice associée dans la base $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{i\leq n\\ j\leq n}}$ alors

$$a_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle .$$

2 Projections orthogonales

2.1 Définition

Définition 2.1
Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. La projection orthogonale de x sur F est un vecteur y de F tel que $x - y \in F^{\perp}$. On note y par $P_F(x)$.

$P_F(x)$ est bien défini :

1. Unicité : soient y_1 et y_2 des vecteurs de F tels que $x - y_1$ et $x - y_2$ sont dans $F^{\perp}$. On a
$$(x - y_2) - (x - y_1) = y_1 - y_2 \in F^{\perp}$$
or $y_1 - y_2 \in F$ et donc $y_1 - y_2 = 0$.
2. Existence (en dimension finie) : il existe une base orthonormée de F, $(e_1, \ldots, e_k)$. On pose
$$y = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle\, e_i.$$
Et on a bien $y - x$ orthogonal à F.

Proposition 2.2
Soient E un espace euclidien, $x \in E$ et F un sous-espace vectoriel. Alors $P_F(x)$ est le vecteur de F le plus proche de x. C'est-à-dire :

$$\|P_F(x) - x\| = \inf_{z\in F} \|z - x\|.$$

Démonstration
Soit $z \in F$,

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 &= \|x - P_F(x) + P_F(x) - z\|^2\\ &= \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - z\|^2\\ &\geq \|x - P_F(x)\|^2.\end{aligned}$$

Remarque. On a $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$, en effet :

$$\|x\|^2 = \|P_F(x) + x - P_F(x)\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2 \geq \|P_F(x)\|^2.$$

Proposition 2.3
Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel.

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Démonstration
Soit $x \in E$, on a

$$x = P_F(x) + x - P_F(x).$$

De plus $F \cap F^\perp = \{0\}$ et donc $E = F \oplus F^\perp$.

2.2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Remarque. Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base orthonormée de F. Si $x \notin F$ alors $y = x - P_F(x)$ est un vecteur de $F^\perp$. On définit

$$e_{k+1} = \frac{y}{\|y\|}.$$

On a bien que e_{k+1} est orthogonal à tous les autres e_i. Ainsi, $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1})$ est une famille orthonormée (et libre).

Théorème 2.4 (Algorithme de Gram-Schmidt)
Soit E un espace euclidien et soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E. On définit par récurrence une base orthonormée de E :

1. $e_1 = f_1/\|f_1\|$.
2. On suppose qu'on a construit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille orthonormée telle que

   $$F = \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

   On définit alors

   $$u_{k+1} = f_{k+1} - P_F(f_{k+1}),\ e_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}.$$

   Le vecteur e_{k+1} appartient bien à l'espace engendré par $(f_1, \dots, f_k, f_{k+1})$ et $e_{k+1} \in F^\perp$. Ainsi, $(e_1, \dots, e_{k+1})$ est un système orthonormée de vecteurs.
3. On continue jusqu'à ce que $k = n$.

Exemple. Avec $\mathbf{R}^3$ muni de :

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

On considère la base :

$$(f_1, f_2, f_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On pose :

$$e_1 = f_1.$$

Avec $F_1 = \operatorname{Vect}(f_1)$ on a :

$$u_2 = f_2 - P_{F_1}(f_2).$$

$$P_{F_1}(f_2) = \langle f_2, f_1 \rangle f_1 = 1 \cdot f_1.$$

Ainsi,

$$u_2 = f_2 - f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On pose alors

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = u_2.$$

On définit $F_2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, on a

$$u_3 = f_3 - P_{F_2}(f_3).$$

$$\begin{aligned} P_{F_2}(f_3) &= \langle f_3, e_1 \rangle e_1 + \langle f_3, e_2 \rangle e_2 \\ &= 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2. \end{aligned}$$

On a finalement,

$$e_3 = u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 2.5
Soit E un espace euclidien et soit l une forme linéaire sur E. Il existe un unique vecteur y tel que

$$\forall x \in E, \ l(x) = \langle y, x \rangle .$$

Démonstration
Si $l = 0$ alors on choisit $y = 0$. Supposons qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $l(x_0) = 1$. Soit $F = \mathrm{Ker}(l)$. On pose $z_0 = P_F(x_0)$ et on pose $y_0 = x_0 - z_0$. Finalement, on prend

$$y = \frac{y_0}{\|y_0\|^2}.$$

On a bien :

$$\begin{aligned} \langle y, x \rangle &= \langle y, x - l(x)y_0 + l(x)y_0 \rangle \\ \langle y, x \rangle &= \langle y, x - l(x)y_0 \rangle + \langle y, l(x)y_0 \rangle \\ \langle y, x \rangle &= \langle y, x - l(x)y_0 \rangle + l(x)\frac{\langle y_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^2}. \end{aligned}$$

On conclut car $x - l(x)y_0 \in F = \mathrm{Ker}(l)$. En effet :

$$l(x - l(x)y_0) = l(x) - l(x)l(y_0) = l(x) - l(x)l(x_0) = 0.$$

3 Endomorphismes des espaces euclidiens

3.1 Endomorphisme adjoint

Théorème 3.1
Soit E un espace euclidien et soit $u : E \to E$ un endomorphisme. Il existe une unique application linéaire $u^* : E \to E$ telle que :

$$\langle y, u(x) \rangle = \langle u^*(y), x \rangle .$$

Définition 3.2
u^* est *l'adjoint* de u.

DÉMONSTRATION
Pour tout y, l'application $x \mapsto \langle y, u(x) \rangle$ est une forme linéaire sur E. Par le théorème précédent, il existe $y^* \in E$ tel que

$$\langle y^*, x \rangle = \langle y, u(x) \rangle .$$

L'application :

$$u^* : y \mapsto y^*$$

convient.

OPÉRATIONS SUR L'ADJOINT. Si u est un endomorphisme de E :

1. $u^{**} = u$;
2. pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $(\lambda u)^* = \lambda u^*$;
3. si v est un endomorphisme sur E, $(u + v)^* = u^* + v^*$.

DÉFINITION 3.3
Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. On dit que u est *symétrique* si $u^* = u$.

REPRÉSENTATION MATRICIELLE. Soit u un endomorphisme de E, un espace euclidienne, et soit $A = (a_{i,j})_{i,j}$ la matrice de u dans la base $\boldsymbol{e}$ où $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée. On a :

$$\forall i, j \leq n, \ a_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle .$$

Si B désigne la matrice dans la base $\boldsymbol{e}$ de u^* alors

$$B = {}^tA.$$

Si u est symétrique alors

$${}^tA = A.$$

3.2 Intermède

En posant :

$$\mathbf{C}^n = \{Z = (z_1, \ldots, z_n) \,|\, z_i \in \mathbf{C}\} ,$$

on définit sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$:

$$(Z, Z') \mapsto \langle\langle Z, Z' \rangle\rangle = z_1 \overline{z'_1} + \ldots + z_n \overline{z'_n}.$$

PROPOSITION 3.4
On a :

1. $\langle\langle Z, Z' \rangle\rangle = \overline{\langle\langle Z', Z \rangle\rangle}$;
2. $\langle\langle Z, Z' \rangle\rangle = {}^tZ \cdot \overline{Z'}$;
3. $\langle\langle Z, Z \rangle\rangle > 0$ si $Z \neq 0$;
4. si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ alors $\langle\langle AZ, Z' \rangle\rangle = \left\langle Z, {}^t\overline{A}Z' \right\rangle$.

THÉORÈME 3.5
Soit A une matrice réelle $n \times n$ symétrique. Alors si λ est une valeur propre de A alors $\lambda \in \mathbf{R}$.

DÉMONSTRATION
Soit λ une valeur propre de A. Soit $Z \in \mathbf{C}^n$ tel que $Z \neq 0$ et

$$AZ = \lambda Z.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\langle\langle AZ, Z\rangle\rangle &= \lambda \langle\langle Z, Z\rangle\rangle \\
\langle\langle AZ, Z\rangle\rangle &= \left\langle\left\langle Z, {}^t\overline{A}\right\rangle\right\rangle = \langle\langle Z, AZ\rangle\rangle \\
\langle\langle AZ, Z\rangle\rangle &= \langle\langle Z, \lambda Z\rangle\rangle = \overline{\lambda} \langle\langle Z, Z\rangle\rangle .
\end{aligned}$$

Donc $\lambda = \overline{\lambda}$ et donc $\lambda \in \mathbf{R}$.

THÉORÈME 3.6
Soit A une matrice symétrique réelle. Alors A possède un vecteur propre réel non nul.

DÉMONSTRATION
A possède toujours un vecteur propre, Z, dans $\mathbf{C}^n$ pour une certaine valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$. Mais par le résultat précédent, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Posons $Z = X + iY$ avec $X, Y \in \mathbf{R}^n$ non tous deux nuls. On a :

$$\begin{gathered}
AZ = \lambda Z \\
A(X + iY) = \lambda(X + iY) \\
\begin{cases} AX = & \lambda X \\ AY = & \lambda Y \end{cases}
\end{gathered}$$

et donc X ou Y sont deux vecteurs propres réels de A avec pour valeur propre $\lambda \in \mathbf{R}$.

COROLLAIRE 3.7
Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E symétrique. u possède un vecteur propre x non nul de valeur propre réelle.

DÉMONSTRATION
Soit A la matrice associée de u dans une base orthonormée, $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$. Il existe $X \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$AX = \lambda X$$

pour un certain $\lambda \in \mathbf{R}$. Si

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

alors le vecteur :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

convient.

THÉORÈME 3.8
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme symétrique et soit $x \in E$ un vecteur propre non nulle de u. Si $y \in E$ est orthogonal à x alors $u(y)$ est orthogonal à x.

DÉMONSTRATION
Supposons que $\langle x, y\rangle = 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\langle x, u(y)\rangle &= \langle u(x), y\rangle \\ &= \langle \lambda x, y\rangle \\ &= \lambda \langle x, y\rangle = 0.\end{aligned}$$

THÉORÈME 3.9 (Spectral)
Soit E un espace euclidien et soit $u : E \to E$ un endomorphisme symétrique. Il existe orthonormée de vecteurs propre, $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, de u et on a que $A = \mathrm{Mat}(u, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e})$ est diagonale.

DÉMONSTRATION
Par récurrence sur $n = \dim E$.

1. Si $n = 1$ alors c'est vérifié.
2. Soit $n \geq 2$, supposons le résultat vrai pour $\dim E = n - 1$. On sait qu'il existe $x \in E$ qui est vecteur propre de u. Soit $F = x^{\perp}$, F est de dimension $n - 1$. F est un espace euclidien, il s'agit donc de montrer que u laisse stable F. Par le résultat précédent, si y est orthogonal à x, *i.e.* $y \in F$, alors $u(y)$ est également orthogonal à x et donc $u(F) \subset F$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ de vecteurs propres de $u_{|F}$. Mais par définition de F, $(e_1, \ldots, e_{n-1}, x/\|x\|)$ est donc une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

COROLLAIRE 3.10
Soit A une matrice symétrique réelle $(n \times n)$ alors il existe une matrice orthogonale U telle que

$$^{t}UAU = D$$

où D est diagonale.

DÉFINITION 3.11
Soit U une matrice $n \times n$. U est dite *orthogonale* si, et seulement si,

$$^{t}UU = I_n.$$

REMARQUE. U est orthogonale si, et seulement si, ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.

DÉMONSTRATION
A est la représentation matricielle d'un certain endomorphisme symétrique, u, de $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire habituel. D'après le théorème spectral, il existe une base $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ orthonormée de vecteurs propres de u. La matrice, D, de u dans la base $\boldsymbol{f}$ est diagonale.
Avec $U = \mathrm{Mat}(I_d, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e})$ avec $\boldsymbol{e}$ la base canonique, on a

$$U^{-1}AU = D.$$

Puisque $\boldsymbol{f}$ est orthonormée, on a :

$$\left({}^{t}UU\right)_{i,j} = \langle f_i, f_j\rangle = \delta_{i,j}.$$

Mais alors $^{t}UU = I_d$ et donc $U^{-1} = {}^{t}U$.

4 Isométries des espaces euclidiens

Théorème 4.1
Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Pour tous x, y de E :
$$\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle .$$
2. Pour tout $x \in E$:
$$\|u(x)\| = \|x\|.$$
3. u est bijective et
$$u^{-1} = u^*.$$

Démonstration
1 implique 2. En effet, pour $x = y \in E$ on a
$$\|u(x)\|^2 = \|x\|^2.$$
2 implique 1. Par la relation
$$2\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$$
pour tous $x, y \in E$. On a alors
$$2\langle u(x), u(y)\rangle = \|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2 = \|u(x+y)\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2\langle x, y\rangle .$$
2 implique 3. On a $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ par définition de la norme. Donc u injective mais u est un endomorphisme donc u est bijective. De plus :
$$\left\langle u^{-1}(x), y\right\rangle = \left\langle u(u^{-1}(x)), u(y)\right\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$
et donc $u^{-1} = u^*$.
3 implique 2. En effet, pour tous $x, y \in E$,
$$\left\langle u^{-1}(x), y\right\rangle = \langle x, u(y)\rangle .$$
En particulier, pour $x = u(y)$ on a
$$\|y\|^2 = \|u(y)\|^2.$$

Définition 4.2
Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. u est une *isométrie* si elle satisfait une de ces trois propriétés.

Définition 4.3
Soit F un sous-espace vectoriel de E, un espace euclidien. La symétrie orthogonale par rapport à F est donnée pour tout $x \in E$ par
$$s_F(x) = x - 2(x - p_F(x)) = 2p_F(x) - x$$
où p_F est la projection orthogonale sur p_F.

Remarque. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E et si u est une isométrie alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Proposition 4.4
Si λ est une valeur propre d'une isométrie u alors $\lambda = \pm 1$.

Démonstration
Soit x un vecteur propre non nul de valeur propre λ, on a

$$\|x\| = \|u(x)\| = |\lambda| \, \|x\|.$$

Proposition 4.5
Soit u une isométrie de E et soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $u(F) \subset F$. $F^\perp$ est stable par u : $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

Démonstration
Remarquons que si F est stable par u alors $u(F) = F$ puisque u est un automorphisme.
Soit $y \in F^\perp$, il s'agit de montrer que $u(y) \in F^\perp$, c'est-à-dire que pour tout $x \in F$,

$$\langle u(y), x \rangle = 0$$

mais il existe $z \in F$ tel que $x = u(z)$. Or,

$$\langle u(y), u(z) \rangle = \langle y, z \rangle = 0.$$

Lemme 4.6
Soit E un espace euclidien de dimension n et soit F un sous-espace vectoriel de dimension k. Il existe $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ orthonormée telle que $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base orthonormée de F.

Proposition 4.7
Si s est une symétrie orthogonale par rapport à F alors

$$\det(s) = (-1)^{n-k}$$

où $n = \dim E$ et $k = \dim F$.

Démonstration
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée telle que $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base orthonormée de F et $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $F^\perp$.
Soit $S = \mathrm{Mat}(s, \mathcal{B}, \mathcal{B})$, on a

$$S = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\det(s) = (-1)^{n-k}.$$

Théorème 4.8
Soit E un espace euclidien tel que $\dim E = n \geq 2$. Toute isométrie de E est composée d'au plus n symétries orthogonales par rapport à des hyperplans.

4.1 Isométries en dimension 2

Soit E un espace euclidien de dimension 2.

Proposition 4.9
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E. L'endomorphisme u de E est une isométrie si, et seulement si, $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$.

Démonstration
Pour $a, b \in \mathbf{R}$, si $f(e_1) = ae_1 + be_2$ alors on peut remarquer

$$(f(e_1))^{\perp} = \mathrm{Vect}(-be_1 + ae_2).$$

Mais f est une isométrie si, et seulement si,

1. $a^2 + b^2 = 1$;
2. $f(e_2) \in (f(e_1))^{\perp}$.

Il existe donc λ tel que $f(e_2) = \lambda(-be_1 + ae_2)$. Mais comme $\|f(e_2)\| = 1$ on en déduit $\lambda = \pm 1$. Donc $A = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \end{pmatrix}$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.10
Soit $u : E \to E$ une isométrie. u est une symétrie orthogonale par rapport à une droite si, et seulement si, $\det(u) = -1$.

Démonstration
On a vu que $\det(u) = (-1)^{2-k}$ où k est la dimension de F tel que u est une symétrie orthogonale par rapport à F.
Si u est une symétrie orthogonale par rapport à une droite alors $\det(u) = -1$.
Si $\det(u) = -1$ alors c'est une symétrie orthogonale, nécessairement par rapport à un espace de dimension 1, c'est-à-dire une droite.

Définition 4.11
Si u est une isométrie de déterminant 1 alors on dit que u est une *rotation*.

Si $\det(u) = 1$ alors la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ orthonormée est

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$. Il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est bien la représentation d'une rotation d'angle θ.

Lemme 4.12
Si $u : E \to E$ est une isométrie telle que $\det(u) = 1$ alors u ne possède pas de valeurs propres.

Démonstration
u est de la forme dans une base $\mathcal{B}$ orthonormée :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est alors :

$$\chi_A(\lambda) = (a-\lambda)^2 + b^2 = 0$$

si $u \neq \mathrm{id}$ alors $b \neq 0$ et χ_A n'a pas de racine.

4.2 Isométries de l'espace

Soit E un espace euclidien de dimension 3.

Proposition 4.13
Soit u une isométrie telle que $u \neq \mathrm{id}$.

1. 1 est valeur propre et $\dim E(1) = 1$ ($E(1)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1).
2. Soit $P = (E(1))^\perp$. On a $u(x) \in P$ pour tout $x \in P$. De plus $h : P \to P$ définie par $h(x) = u(x)$ est une rotation de P.

Définition 4.14
On définie :

1. Une isométrie $u : E \to E$ est une rotation si $\det u = 1$.
2. L'axe de rotation est $E(1)$.
3. L'angle (ou mesure de la rotation) est l'angle de la rotation de $h : P \to P$.

Proposition 4.15
Soit u une isométrie telle que $\det(u) = -1$. u est une symétrie orthogonale par rapport à un plan ou il existe s et r respectivement une symétrie orthogonale et une rotation tels que $u = r \circ s = s \circ r$.

Deuxième partie

Analyse

Table des matières

Chapitre 3

Intégrale de RIEMANN

1 Intégrale de Riemann sur $[a, b]$

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$ avec $a < b$.

DÉFINITION 1.1
Une subdivision de $[a, b]$ est la donnée de $n \in \mathbf{N}^*$ et d'une suite de points, $\{x_0, \ldots, x_n\}$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Les intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ pour $1 \leq i \leq n$ sont les intervalles de la subdivision.

DÉFINITION 1.2
Une fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ est dite *en escaliers* s'il existe une subdivision π de $[a, b]$ telle que φ est constante les intervalles de π.
On dit alors que π est *adaptée* à φ.

DÉFINITION 1.3
Soit $\pi = (n, \{x_0, \ldots, x_n\})$ et soit $\rho = (p, \{z_0, \ldots, z_p\})$. On dit que ρ est *plus fine* que π si $p > n$ et si $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset \{z_0, \ldots, z_p\}$.

LEMME 1.4
Si $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ est en escaliers, π est une subdivision adaptée à φ et ρ une subdivision plus fine que π alors ρ est adaptée à φ.

DÉMONSTRATION
Chaque intervalle de ρ est dans un intervalle de π et donc φ est constante sur chacun d'eux.

LEMME 1.5
Soient $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbf{R}$ des fonctions en escaliers. Soient π et ρ des subdivisions adaptées à chacune. Il existe une subdivision σ adaptée aux deux fonctions.

DÉMONSTRATION
Supposons que $\pi = (n, \{x_0, \ldots, x_n\})$ et $\rho = (p, \{z_0, \ldots, z_p\})$. On construit σ en ordonnant $\{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{z_0, \ldots, z_p\}$. σ est alors plus fine que π et ρ et donc elle est adaptée à φ et ψ.

LEMME 1.6
Si φ est ψ sont des fonctions en escaliers de $[a, b]$ alors :

1. $\lambda\varphi + \mu\psi$ sont en escaliers pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$;

2. $\max(\varphi, \psi)$ est en escaliers ;
3. $\min(\varphi, \psi)$ est en escaliers.

Définition 1.7
Soit φ une fonction en escaliers et soit $\pi = (n, \{x_0, \ldots, x_n\}$ une subdivision adaptée à φ. *L'intégrale* de φ sur $[a, b]$ est définie par :

$$E(\varphi, \pi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

avec $\xi_i \in]x_i, x_{i-1}[$.
On note

$$E(\varphi, \pi) = \int_a^b \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

Remarque. La valeur de $E(\varphi, \pi)$ ne dépend pas de la subdivision π choisie. En effet, si σ est plus fine que π alors $E(\varphi, \sigma) = E(\varphi, \pi)$. On considère le cas où on rajoute un point z à $\{x_0, \ldots, x_n\}$ tel que $z \in]x_{i_0-1}, x_{i_0}[$. On a

$$\begin{aligned} E(\varphi, \sigma) &= \sum_{j=1}^{i_0-1} \varphi(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) + \varphi(\xi_{i_0})(z - x_{i_0-1}) + \varphi(\xi_{i_0})(x_{i_0} - z) + \sum_{j=i_0+1}^{n} \varphi(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = E(\varphi, \pi). \end{aligned}$$

De plus, si π et ρ sont des subdivisions adaptées alors il existe σ plus fine que π et ρ et qui est adaptée à φ. On a alors $E(\varphi, \pi) = E(\varphi, \sigma) = E(\varphi, \rho)$.

Proposition 1.8
Soient φ et ψ des fonctions en escaliers de $[a, b]$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \psi)(t)\, \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b \varphi(t)\, \mathrm{d}t + \int_a^b \psi(t)\, \mathrm{d}t.$$

2. Si $\varphi \leq \psi$ alors

$$\int_a^b \varphi(t)\, \mathrm{d}t \leq \int_a^b \psi(t)\, \mathrm{d}t.$$

3.

$$\left| \int_a^b \varphi(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)|\, \mathrm{d}t$$

Démonstration
Montrons le 2.
Soit σ une subdivision adaptée à φ et ψ avec $\sigma = (n, \{x_0, \ldots, x_n\})$.

$$\int_a^b \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{n} \varphi(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{n} \psi(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b \psi(t)\, \mathrm{d}t.$$

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$, *i.e.* il existe c tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)| \leq c$. Soient

$$A = \left\{ \int_a^b \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, \varphi_1 \leq f \right\}$$
$$B = \left\{ \int_a^b \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, \varphi_2 \geq f \right\}.$$

A est majoré. En effet, $f(x) \leq c$ pour tout $x \in [a, b]$ et donc si $\varphi_1 \leq f$ alors $\varphi_1(x) \leq c$ pour tout $x \in [a, b]$. Comme $x \mapsto c$ est en escaliers,

$$\int_a^b \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t \leq c(b-a).$$

De même, B est minoré. On pose

$$M = \sup A < +\infty,$$
$$m = \inf B > -\infty.$$

DÉFINITION 1.9
Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. f est intégrable au sens de RIEMANN sur $[a, b]$ si $M = m$.

DÉFINITION 1.10 (Définition équivalente)
Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. f est intégrable au sens de RIEMANN si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ_1 et φ_2 en escaliers tels que

$$\varphi_1 \leq f,\ \varphi_2 \geq f \text{ et } \int_a^b (\varphi_2 - \varphi_1)(t)\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

NOTATION. Si f est intégrable alors on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = M = m$$

son intégrale.

CONTRE-EXEMPLE. Soit h la fonction de DIRICHLET définie sur $I = [0, 1]$ par :

$$h(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbf{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

h n'est pas intégrable au sens de RIEMANN.

Soit φ_1 une fonction en escaliers telle que $\varphi_1 \leq h$. Soit π une subdivision adaptée à φ_1. Sur chaque intervalle de π il existe un irrationnel, y, où $h(y) = 0$ et donc $\varphi_1(x) \leq 0$ pour tout x. De même pour φ_2 en escaliers telle que $\varphi_2 \geq h$. On a $\varphi_2 \geq 1$ et donc $M \neq m$.

PROPOSITION 1.11
Soit f bornée sur $[a, b]$. f est intégrable au sens de RIEMANN si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe φ, ψ en escaliers telles que $|f - \varphi| \leq \psi$ et $\int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon$.

DÉMONSTRATION
Si f est intégrable alors $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_1$ convient.
Réciproquement, on pose $\varphi_1 = \varphi - \psi$ et $\varphi_2 = \varphi + \psi$.

REMARQUE. Soit f RIEMANN-intégrable sur $[a, b]$. Si φ, ψ en escaliers telles que $|f - \varphi| \leq \psi$ alors

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

PROPOSITION 1.12 (Linéarité et majoration)
On a :

1. Soient f_1 et f_2 RIEMANN-intégrables sur $[a, b]$. Pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est RIEMANN-intégrable et
$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Si f et g sont RIEMANN-intégrables sur $[a, b]$ avec $f \leq g$ alors
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Si f est RIEMANN-intégrable alors $x \mapsto |f(x)|$ est RIEMANN-intégrable et
$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

DÉMONSTRATION
On démontre :

2. On a
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{\varphi \leq f} \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \sup_{\varphi \leq g} \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Soit $\varepsilon > 0$, il existe φ et ψ en escaliers telles que $|f - \varphi| \leq \psi$ et $\int \psi < \varepsilon$. On a $||f| - |\varphi|| \leq |f - \varphi| \leq \psi$. Donc $|f|$ est RIEMANN-intégrable, $-|f| \leq f \leq |f|$ donc
$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$
1. Supposons $|\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 1$. f_1 et f_2 sont RIEMANN-intégrables. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ_1, φ_2 et ψ_1, ψ_2 telles que $|f_{1,2} - \varphi_{1,2}| \leq \psi_{1,2}$ et $\int \psi_{1,2} < \varepsilon$. D'où
$$|\lambda_1 + f_1 + \lambda_2 f_2 - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 \varphi_2| \leq |\lambda_1|\,\psi_1 + |\lambda_2|\,\psi_2 = \tilde{\psi}$$
et
$$\int_a^b \tilde{\psi}(x)\,\mathrm{d}x < |\lambda_1|\,\varepsilon + |\lambda_2|\,\varepsilon < \varepsilon.$$
D'où $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ intégrable.

DÉFINITION 1.13
Soit $\pi = (n, \{x_0, \ldots, x_n\})$ une subdivision de $[a, b]$. On note $\delta(\pi)$ le pas de la subdivision.

$$\delta(\pi) = \max(x_i - x_{i-1}).$$

Définition 1.14
Soit π une subdivision de $[a, b]$, $(\pi, \xi) = (\pi, \{\xi_1, \dots, \xi_n\})$ est une division pointée si $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i[$.

Définition 1.15
Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ et soit (π, ξ) une subdivision pointée. La somme de Riemann $\sum_{\pi,\xi}(f)$ est donnée par

$$\sum_{\pi,\xi}(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Proposition 1.16 (Linéarité de la somme de Riemann)
On a

$$\sum_{\pi,\xi}(f + g) = \sum_{\pi,\xi}(f) + \sum_{\pi,\xi}(g).$$

Remarque. Si φ est en escaliers sur $[a, b]$ alors

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{I_i}$$

où $I_i \subset [a, b]$.

Théorème 1.17 (Riemann)
Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$. Si f est Riemann-intégrable alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (\pi, \xi),\ \delta(\pi) < \eta \implies \left| \sum_{\pi,\xi}(f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Lemme 1.18
Soit J un intervalle inclus dans $[a, b]$. Pour toute subdivision pointé (π, ξ),

$$\left| \sum_{\pi,\xi}(\mathbb{1}_J) - \int_a^b \mathbb{1}_J(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \sum_{\pi,\xi}(\mathbb{1}_J) - l(J) \right| \leq 2\delta(\pi)$$

avec $l(J)$ la longueur de J.

Proposition 1.19
Soit φ en escaliers sur $[a, b]$.

$$\forall \varepsilon > 0, \eta n > 0, \forall (\pi, \xi),\ \delta(\pi) < \eta \implies \left| \sum_{\pi,\xi}(\varphi) - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Démonstration
Si φ est en escalier, il existe λ_i, pour $i = 1, \dots, n$ tels que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{I_i}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée (π, ξ) telle que $\delta(\pi) < \eta$ et

$$\left| \sum_{\pi,\xi} (\mathbb{1}_{J_i}) - \int_a^b \mathbb{1}_{J_i}(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon/(2n)$$

et on conclut par l'inégalité triangulaire.

Théorème 1.20 (Riemann)
Soit $f : [a, b]$ Riemann-intégrable. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision (π, ξ) telle que $\delta(\pi) < \eta$:

$$\left| \sum_{\pi,\eta} f - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Démonstration
f est Riemann-intégrable si, et seulement si

$$\sup_{\varphi_1 \leq f} \int_a^b \varphi_1 = \int_a^b f = \inf_{\varphi_2 \geq f} \int_a^b \varphi_2.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe φ_1, φ_2 en escaliers qui encadrent f et dont les intégrales sont $\varepsilon/2$ proches de f. Comme φ_1 et φ_2 sont Riemann-intégrables, il existe $\eta_1, \eta_2 > 0$ tels que pour toute subdivision (π, ξ) telle que $\delta(\pi) < \min(\eta_1, \eta_2) = \eta$.

$$\left| \sum_{\pi,\xi} \varphi_1 - \int_b^c \varphi_1 \right| < \varepsilon/2 \text{ et } \left| \sum_{\pi,\xi} \varphi_2 - \int_a^b \varphi_2 \right| < \varepsilon/2.$$

Lemme 1.21 (Relation de Chasles)
Soient $a < b < c$. f est Riemann-intégrable sur $[a, c]$ si, et seulement si, f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et $[b, c]$ et

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a

$$\int_a^b f - \varepsilon \leq \int_a^b \varphi_1 - \varepsilon/2$$

Soit (π, ξ) tel que $\delta(\pi) < \eta$ alors

$$\int_a^b f - \varepsilon \leq \sum_{\pi,\xi} \varphi_1 \leq \sum_{\pi,\xi} f.$$

On a de même

$$\int_a^b f + \varepsilon \geq \sum_{\pi,xi} f$$

on a alors

$$\left| \int_a^b f - \sum_{\pi,\xi} f \right| \leq \varepsilon.$$

1.1 Continuité

DÉFINITION 1.22 (Continuité sur un compact)
f est continue sur $[a, b]$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a, b], \exists \eta > 0, \forall y \in [a, b],\ |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

DÉFINITION 1.23 (Continuité uniforme sur un compact)
f est uniformément continue sur $[a, b]$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in [a, b]^2,\ |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

THÉORÈME 1.24 (HEINE)
f est continue sur $[a, b]$ si, et seulement si, f est uniformément continue sur $[a, b]$.

THÉORÈME 1.25
Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est RIEMANN-intégrable sur $[a, b]$.

DÉMONSTRATION
Soit $(\pi = (n, (x_0, \ldots, x_n))$ une subdivision de $[a, b]$. Soient $\varepsilon > 0$ et

$$\varphi_\pi : x \mapsto f(a)\mathbb{1}_a(x) + \sum_{i \in \{1, \ldots, n\}} f(x_i)\mathbb{1}_{]x_{i-1}, x_i]}(x).$$

Comme f est continue sur un compact, elle est uniformément continue sur $[a, b]$. Donc

$$\exists \eta > 0, \forall (x, y),\ |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

donc pour π telle que $\delta(\pi) < \eta$ on a

$$|f(x) - \varphi_\pi(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Comme φ_π est en escaliers, f est RIEMANN-intégrable.

THÉORÈME 1.26
Si f est monotone sur $[a, b]$, alors f est RIEMANN-intégrable.

DÉMONSTRATION
Soit $\varepsilon > 0$ et π une subdivision telle que $x_i - x_{i-1} = h$ et $h < \varepsilon/[f(b) - f(a)]$. On pose

$$\varphi_1 : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\mathbb{1}_{[x_{i-1}, x_i[}(x)$$

et

$$\varphi_2 : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathbb{1}_{]x_{i-1}, x_i]}(x).$$

On a

$$\int_a^b \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x = h[f(a) + f(a + h) + \ldots + f(a + (n - 1)h)]$$

et

$$\int_a^b \varphi_2(x)\,\mathrm{d}x = h[f(a + h) + \ldots f(b)]$$

d'où

$$\int_a^b (\varphi_1 - \varphi_2)(x)\,\mathrm{d}x = h(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Théorème 1.27
Si f est C^1 sur $[a, b]$ alors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration
Soit π une subdivision $(n, (x_0, \ldots, x_n))$. Par le théorème des accroissements finis,

$$\forall i, \exists \xi_i \in [x_{i_1}, x_i],\ f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

D'où

$$\sum_{\pi,\xi} f' = \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = f(b) - f(a).$$

De plus, f' est intégrable donc

$$\lim_{\delta(\pi)\to 0} \sum_{\pi,\xi} (f') = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

2 Intégrale double de fonctions à deux variables

2.1 Intégration sur un rectangle

Soit $P = [a, b] \times [c, d]$ un pavé de $\mathbf{R}^2$.

Définition 2.1
Une subdivision de P est la donnée d'un couple (π_x, π_y) où π_x (resp. π_y) est une subdivision de $[a, b]$ (resp. $[c, d]$).
Si $\pi_x = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$ et $\pi_y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ alors *les rectangles de la subdivision* sont les

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i[\times[y_{j-1}, y_j[$$

pour tous $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Définition 2.2
La fonction $\varphi : P \to \mathbf{R}$ est *en escaliers* s'il existe une subdivision π de P telle que φ est constante sur les rectangles de π. π est alors une *subdivision adaptée* à φ.

Définition 2.3
Soit φ une fonction en escaliers sur $P = [a, b] \times [c, d]$. L'intégrale de φ sur P est définie par

$$\int_P \varphi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

où $((x_0, \ldots, x_m), (y_0, \ldots, y_n))$ est une subdivision adaptée à φ et $c_{i,j}$ est la valeur de φ sur $R_{i,j}$.

Définition 2.4
Soit $f : P \to \mathbf{R}$ bornée. Soient M (resp. m) la borne supérieure (resp. inférieure) des intégrales des fonctions en escaliers inférieures (resp. supérieures) à f en tout point sur P.
f est *intégrable au sens de* Riemann si $M = m$ et on définit

$$\int_P f = M = m.$$

Définition 2.5
Soit $f : P \to \mathbf{R}$ bornée. f est intégrable sur P si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe φ_1 et φ_2 en escaliers telles que $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ et

$$\int_P \varphi_2 - \varphi_1 < \varepsilon.$$

Proposition 2.6
Soit $f : P \to \mathbf{R}$ bornée. f est Riemann-intégrable si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ, ψ en escaliers telles que $|f - \varphi| \leq \psi$ et

$$\int_p \psi < \varepsilon.$$

Proposition 2.7
Soit P un pavé de $\mathbf{R}^2$ et soient f et g Riemann-intégrables sur P. Alors :

1. pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda f + \mu g$ est Riemann-intégrable et

$$\int_P \lambda f + \mu g = \lambda \int_P f + \mu \int_P g \ ;$$

2. l'application $(x, y) \mapsto |f(x, y)|$ est Riemann-intégrable sur P et

$$\left|\int_P f\right| \leq \int_P |f|.$$

Définition 2.8
Soit π une subdivision de $P = [a, b] \times [c, d]$. On prend pour tous i, j dans les bornes de π, $\xi_{ij} \in R_{ij}$. (π, ξ) est une *subdivision pointée*.

Définition 2.9
Soit $f : P \to \mathbf{R}$ et (π, ξ) une subdivision pointée. La somme de Riemann associée est

$$\sum_{\pi,\xi}(f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_{ij})\,|R_{ij}|$$

où $|R_{ij}|$ est l'aire de R_{ij}.

Définition 2.10
Si $\pi = (\pi_x, \pi_y)$ est une subdivision de P. Alors $\delta(\pi) = \max(\delta(\pi_x), \delta(\pi_y))$ est *le pas de* π.

Théorème 2.11 (Riemann)
Soit $f : P \to \mathbf{R}$. Si f est Riemann-intégrable sur P alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (\pi, \xi),\ \delta(\pi) < \eta \implies \left| \sum_{\pi,\xi}(f) - \int_P f \right| < \varepsilon.$$

Remarque. Si φ est une fonction en escaliers sur P alors il existe une subdivision π de P et $(c_{ij}) \in \mathbf{R}^{nm}$ telle que pour tous $x, y \in [a,b[\times[c,d[$

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\mathbb{1}_{R_{ij}}(x,y).$$

Lemme 2.12 (Fubini pour les fonctions en escaliers)
Soit $\varphi : P \to \mathbf{R}$ en escaliers.

1. Pour tout $x \in [a,b]$ (resp. $y \in [c,d]$), la fonction $y \mapsto \varphi(x,y)$ (resp. $x \mapsto \varphi(x,y)$) est en escaliers.
2. La fonction
$$x \mapsto \int_c^d \varphi(x,y)\,\mathrm{d}y$$
est en escaliers sur $[a,b]$. De même,
$$y \mapsto \int_a^b \varphi(x,y)\,\mathrm{d}x$$
est en escaliers sur $[c,d]$.
3. On a
$$\int_P \varphi = \int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b \varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Démonstration (2. et 3.)
Par la remarque et la linéarité de l'intégrale, il suffit de le montrer pour les fonctions indicatrices de $Q = I \times J = [\alpha,\beta[\times[\gamma,\delta[\subset P$. On prend donc $\varphi = \mathbb{1}_Q$. On a :

$$\int_P \mathbb{1}_Q = (\beta-\alpha)(\delta-\gamma).$$

Pour tous $(x,y) \in P$,
$$\mathbb{1}_Q(x,y) = \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}(x)\mathbb{1}_{[\gamma,\delta[}(y).$$

Ainsi,
$$\int_c^d \mathbb{1}_Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \mathbb{1}_{[\alpha,\beta[}\int_c^d \mathbb{1}_{[\gamma,\delta[}(y)\,\mathrm{d}y = \mathbb{1}_{[a,b[}(x)(\delta-\gamma).$$

Donc
$$\int_a^b\int_c^d \mathbb{1}_Q(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = (\beta-\alpha)(\delta-\gamma).$$

Et de même en considérant $[a,b]$ en premier temps.

Théorème 2.13 (Fubini)
Soit $f : P \to \mathbf{R}$ avec $P = [a,b]\times[c,d]$ et f est Riemann-intégrable sur P.
Si pour tout $x \in [a,b]$, $y \mapsto f(x,y)$ est Riemann-intégrable sur $[c,d]$ alors

$$x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_P f = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

De même en échangeant les rôles de x et y.

$$\int_P f = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Démonstration

On note

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

définie pour tout $x \in [a,b]$. On montre que F est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, *i.e.* pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left| \int_P f - \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ_1, φ_2 en escaliers sur P telles que $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ et $\int_P(\varphi_2 - \varphi_1) < \varepsilon$. On pose pour tout $x \in [a,b]$,

$$\Phi_1(x) = \int_c^d \varphi_1(x,y)\,\mathrm{d}y \leq F(x) \leq \int_c^d \varphi_2(x,y)\,\mathrm{d}y = \Phi_2(x).$$

Comme Φ_1 et Φ_2 sont en escaliers et

$$\int_a^b \Phi_2 - \Phi_1 = \int_P (\varphi_2 - \varphi_1) < \varepsilon$$

par le lemme précédent, F est intégrable. De plus

$$\int_P \varphi_1 = \int_a^b \Phi_1 \leq \int_a^b F \leq \int_a^b \Phi_2 = \int_P \varphi_2$$

et donc

$$\int_P \varphi_1 - \varphi_2 \leq \int_a^b F - \int_P f \leq \int_P (\varphi_2 - \varphi_1)$$

d'où

$$\left| \int_a^b F - \int_P f \right| \leq \int_P \varphi_2 - \varphi_1 < \varepsilon.$$

2.2 Intégration sur domaines plus généraux

Définition 2.14

f est Riemann-intégrable à support borné sur $\mathbf{R}^2$ s'il existe un pavé P tel que $f(x) = 0$ pour $x \notin P$ et si f est Riemann-intégrable sur tout pavé $Q \supset P$. Dans ce cas, on note

$$\int_Q f = \int f.$$

Définition 2.15

Soit $A \subset \mathbf{R}^2$. On dit que A est *quarrable* si :

1. A est borné ;

2. $\mathbb{1}_A$ est Riemann-intégrable à support borné.

L'aire de la surface est donnée par

$$|A| = \int \mathbb{1}_A.$$

Proposition 2.16
Soit $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ positive et Riemann-intégrable alors

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x \in [a,b], 0 \leq y \leq g(x)\right\}$$

est un ensemble quarrable de $\mathbf{R}^2$ et

$$|A| = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Définition 2.17
Soit $A \subset \mathbf{R}^2$ quarrable et soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. On dit que f est Riemann-intégrable sur A si $\mathbb{1}_A f$ est Riemann-intégrable à support borné. On définit

$$\int_A f = \int \mathbb{1}_A f = \int_P \mathbb{1}_A f$$

où $P \supset A$.

Proposition 2.18
Soit $g : [a,b] \to \mathbf{R}$, positive et Riemann-intégrable. Soit

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x \in [a,b], 0 \leq y \leq g(x)\right\}.$$

Soit f Riemann-intégrable sur A et telle que pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est Riemann-intégrable sur $[0, g(x)]$. Alors l'application

$$x \mapsto \int_0^{g(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b \int_0^{g(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_A f.$$

Exemple. Avec $[a,b] = [0,1]$, $g(x) = x$ et $f(x,y) = x^2 y$ on a :

$$\begin{aligned}\int_A f &= \int_0^1 \int_0^x x^2 y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^4}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

2.3 Coordonnées polaires

EXEMPLE. On cherche à intégrer sur le domaine

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leq R^2,\ y \geq 0\right\}$$

la fonction

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

$$\int_D f = \int_{-R}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

L'application :

$$T\colon \left|\begin{array}{r}]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\to \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\} \\ (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}\right.$$

est inversible.

PROPOSITION 2.19
Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, RIEMANN-intégrable sur un domaine quarrable D. Soit $\hat{f}$ définie sur $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ par

$$\hat{f}(r,\theta) = rf(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Alors $\hat{f}$ est intégrable sur $T^{-1}(D)$ et

$$\int_D f = \int_{T^{-1}(D)} \hat{f}.$$

$$\int_D f = \int_0^R \int_0^\pi re^{-r^2/2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \pi \int_0^R re^{-r^2/2} = \pi(1-e^{-R^2/2}).$$

Pour

$$D_R = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leq R^2\right\}$$

on a

$$\int_{D_R} f = 2\int_D f = 2\pi(1-e^{-R^2/2}).$$

PROBLÈME.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\ I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \lim_{R\to+\infty} \int_{D_R} f = 2\pi \\ I &= \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Chapitre 4

Suites et séries de fonctions

1 Suites de fonctions

1.1 Définitions

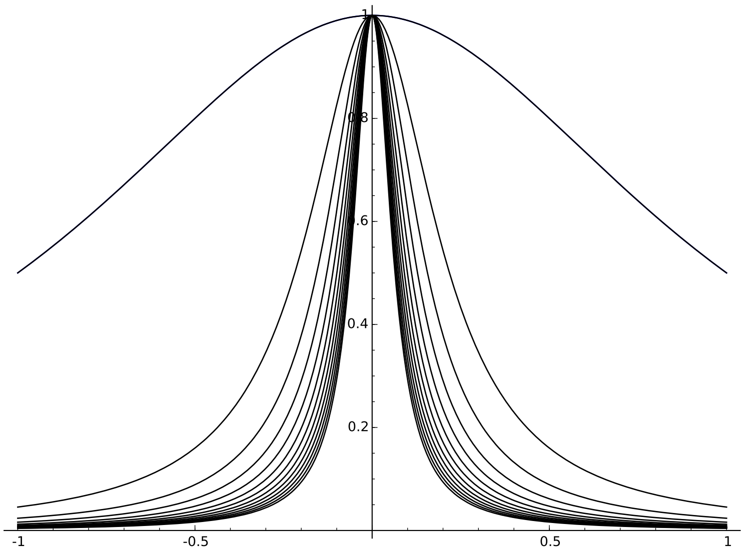
Exemple. Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}.$$

Pour tout x non nul,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+nx^2} = 0.$$

Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 1$ pour tout n.



f_n « tend » vers la fonction :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \delta_{x,0}$$

et on a montré que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$.

Soit $X \subset \mathbf{R}$.

Définition 1.1
Soit $f_n : X \to \mathbf{R}$ définie pour $n \in \mathbf{N}$.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge simplement* (ou ponctuellement) vers $f : X \to \mathbf{R}$ si

$$\forall x \in X,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

REMARQUE. La limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas nécessairement continue.

DÉFINITION 1.2
Soit $f : X \to \mathbf{R}$. La norme uniforme de f est

$$\|f\|_{X,u} = \sup \{|f(x)| \mid x \in X\}.$$

Si f n'est pas bornée sur X alors $\|f\|_{X,u} = +\infty$.

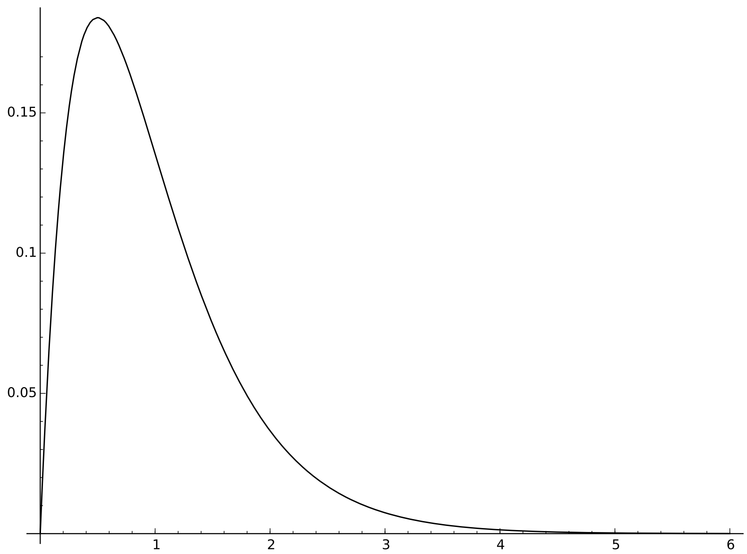
REMARQUE. Si $x \mapsto |f(x)|$ atteint son maximum sur X en x_0 alors $\|f\|_{X,u} = |f(x_0)|$.

DÉFINITION 1.3
La distance entre $f, g : X \to \mathbf{R}$ est

$$d(f,g) = \|f - g\|_{X,u}.$$

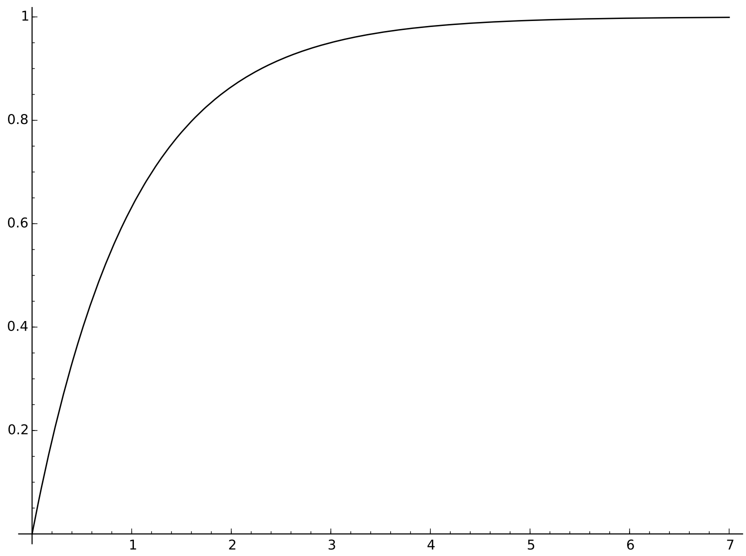
EXEMPLES.

1. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$ et $f : x \mapsto xe^{-ax}$ pour $x \in X = [0, +\infty[$.



   On a
$$\|f\| = \frac{1}{ea}.$$

2. Pour $f : x \mapsto 1 - e^{-x}$.



On a

$$\|f\| = 1.$$

DÉFINITION 1.4
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit $\|\cdot\| : E \to \mathbf{K}$. C'est une norme si :

1. pour tous $x, y \in E$, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$;
2. pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ et pour tout $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$;
3. pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.

EXEMPLES. Soit $C([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues définies sur $[a,b]$. On définit, pour $f \in C([a,b])$,et $p > 0$,

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

et alors $\|\cdot\|_p$ est une norme, la norme L^p.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

est une norme.

PROPOSITION 1.5
Soit $X \subset \mathbf{R}$. $\|\cdot\|_{X,u}$ est une norme sur l'espace vectoriel des fonctions bornées sur X.

DÉFINITION 1.6
Soit $f_n : X \to \mathbf{R}$ pour $n \in \mathbf{N}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f : X \to \mathbf{R}$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{X,u} = 0.$$

PROPOSITION 1.7
La convergence uniforme implique la convergence simple.

Démonstration
Supposons que f_n converge uniformément vers f sur X. On sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \ \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

En particulier,

$$\forall x \in X, \ |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|$$

d'où le résultat.

Définition 1.8
Soit $X \subset \mathbf{R}$. $x_0 \in \mathbf{R}$ est adhérent à X si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in X, \ |x - y| < \varepsilon.$$

L'ensemble des points adhérents à X est notée $\overline{X}$.

1.2 Suites de nombres réels et normes

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite telle que $a_n \in \mathbf{R}$ pour tout n entier.
S'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, \ n \geq \mathbf{N} \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

Définition 1.9
On dit que (a_n) est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{N}, \ (n \geq N \text{ et } m \geq N) \implies |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Proposition 1.10
Si (a_n) est une suite de nombres réels, elle est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.

Remarques. Soit E un espace vectoriel muni d'une norme, $\|\cdot\|$.

1. Pour tous $v, w \in E$, $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\|$.
2. Une suite de vecteurs $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $v \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, \ n \geq N \implies \|v_n - v\| < \varepsilon.$$

3. D'après le premier et le second point, si (v_n) converge vers v alors

$$\lim_{n \to +\infty} \|v_n\| = \|v\|.$$

1.3 Limites fonctionnelles

Soit (f_n) une suite de fonctions de $X \to \mathbf{R}$, telle que $\lim f_n(x)$ existe pour tout $x \in X$. Soit $f(x) = \lim f_n(x)$.

Soit $x_0 \in \overline{X}$, est-ce qu'on a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)?$$

Proposition 1.11
Soit (f_n) une suite convergent uniformément vers f sur X. Si pour $x_0 \in \overline{X}$ tel que pour tout n, $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = l_n \in \mathbf{R}$, alors $\lim l_n$ existe.

Démonstration
On montre que $(l_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Pour tout $x \in X$ et pour tous $n, m \in \mathbf{N}$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{X,u}.$$

Donc

$$\lim_{x\to x_0} |f_n(x) - f_m(x)| = |l_n - l_m| \leq \|f_n - f_m\|.$$

Or pour tout $\varepsilon > 0$ on peut prendre n et m assez grands tels que $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ par hypothèse de convergence uniforme.

Théorème 1.12
Soit (f_n) une suite uniformément convergente vers f sur X. Soit $x_0 \in \overline{X}$ tel que $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Démonstration (Technique des trois ε)
On montre que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in X,\ |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

où $l = \lim l_n$. Pour tout $n_0 \in \mathbf{N}$,

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - l_{n_0}| + |l_{n_0} - l|\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition des limites, il existe n_0 tel que pour tout x, $|f(x) - f_{n_0}(x)|$ et $|l_{n_0} - l|$ par $\varepsilon/3$. Il existe également $\eta > 0$ tel que si $x \in X$ et si $|x - x_0| < \eta$ alors $|f_{n_0}(x) - l_{n_0}| < \varepsilon/3$. Finalement, pour $x \in X$ tel que $|x - x_0| < \eta$ on a $|f(x) - l| < \varepsilon$.

1.4 Continuité

Théorème 1.13
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n : I \to \mathbf{R}$ continue en $x_0 \in I$. Si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f : I \to \mathbf{R}$. Alors f est continue en x_0. En particulier, la limite uniforme de fonctions continues sur X est continue sur X.

Démonstration
f_n est continue en x_0, donc pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0).$$

On veut montrer que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Mais on sait que

$$f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$$

donc il faut montrer

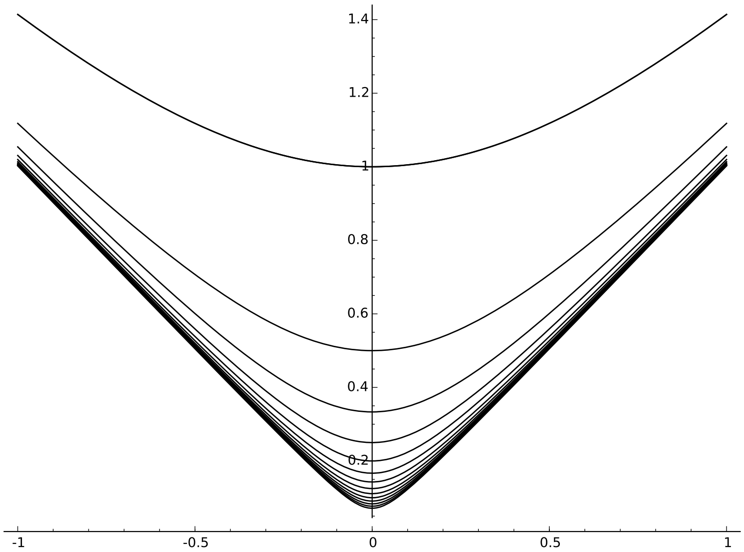
$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Mais c'est vrai par le résultat précédent.

Remarque. La convergence uniforme ne préserve pas la dérivabilité. En effet, la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$$

converge uniformément vers $x \mapsto |x|$ qui n'est pas dérivable en 0.



1.5 Dérivabilité

Proposition 1.14
Soit I un intervalle ouvert et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec pour tout n, $f_n : I \to \mathbf{R}$ dérivable sur I et tel que la suite (f_n') converge uniformément sur I vers g.
S'il existe $x_0 \in I$ tel que $(f_n(x_0))$ converge alors $(f_n(x))$ converge pour tout $x \in I$.
En particulier, si $f(x) = \lim f_n(x)$ alors pour tout $J \subset I$ borné, (f_n) converge uniformément sur J vers f.

Démonstration
On montre que pour tout $x \in I$, la suite de terme général $f_n(x) - f_n(x_0)$ est une suite de Cauchy. Pour $y_n = f_n(x) - f_n(x_0)$ et $\varphi(x) = f_m(x) - f_n(x)$ on a :

$$|y_m - y_n| = |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq |\varphi'(c)|\,|x - x_0|$$

où $c \in I$ d'après le théorème des accroissements finis. Mais

$$|\varphi'(c)| = |f_m'(c) - f_n'(c)| \leq \|f_m' - f_n'\|$$

qui peut être rendu suffisamment petit pour n assez grand.

Théorème 1.15
Soit I un intervalle ouvert. Soit $f_n : I \to \mathbf{R}$ des fonctions indexées par $n \in \mathbf{N}$, dérivables et telles que :

1. La suite $(f_n')_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers $g : I \to \mathbf{R}$ sur I.
2. Il existe $x_0 \in I$ tel que $(f_n(x_0))$ converge.

Alors :

1. $(f_n(x))$ converge pour tout $x \in I$ et on pose $f(x) = \lim f_n(x)$.
2. Pour tout intervalle J borné dans I, (f_n) converge uniformément sur J.
3. $f : I \to \mathbf{R}$ est dérivable et $f' = g$.

DÉMONSTRATION 1. Déjà démontré.

2. On regarde pour $x \in I$,

$$\left| \overbrace{f_m(x) - f_m(x_0)}^{y_m} - \overbrace{(f_n(x) - f_n(x_0))}^{y_n} \right| \leq \|f'_m - f'_n\| \, |x - x_0| \, ..$$

En passant à la limite $n \to +\infty$ on a :

$$|f_m(x) - f_m(x_0) - (f(x) - f(x_0))| \leq \|f'_m - g\| \, |x - x_0| \, .$$

En effet, si (h_n) converge uniformément vers h alors $\lim \|h_n\| = \|h\|$.
Soit $J \subset [-M, M]$. On a alors pour tout $x \in J$,

$$|f_m(x) - f_m(x_0) - (f(x) - f(x_0))| \leq 2M\|f'_m - g\|$$

et donc

$$|f_m(x) - f(x)| \leq 2M\|f'_m - g\| + |f_m(x_0) - f(x_0)|$$

mais comme le membre de droite ne dépend pas de x,

$$\|f_m - f\| \leq 2M\|f'_m - g\| + |f_m(x_0) - f(x_0)|$$

et le membre de droite tend bien vers 0 quand $m \to +\infty$.

3. Soit $x_1 \in I$, on pose $I^* = I \setminus \{x_1\}$ et f_n^* définie sur I^* par

$$f_n^*(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1}.$$

On pose également pour $x \in I^*$:

$$f^*(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

On montre que

$$\lim_{n \to +\infty} \|f^* - f_n^*\| = 0.$$

On sait que pour tout $x \in I^*$,

$$|f_n^*(x) - f_m^*(x)| \leq \|f'_n - f'_m\|.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tous $n, m \geq N$ on a $\|f'_n - f'_m\| \leq \varepsilon$ et on fait tendre m vers l'infini ce qui donne

$$|f_n^*(x) - f^*(x)| \leq \varepsilon$$

pour $n \geq N$ et pour tout $x \in I^*$. Finalement,

$$\sup_{x \in I^*} |f_n^*(x) - f^*(x)| \leq \varepsilon.$$

CONTRE-EXEMPLE. On considère sur $[0, 1]$:

$$f_n(x) = x\left(1 + \frac{1}{n}\right) + (-1)^n.$$

On a $f'_n(x) = 1 + 1/n$, pour $g = 1$ on a $\|f'_n - g\| \to 0$ mais $(f_n(x))$ ne converge nulle part.

1.6 Intégrabilité

En posant $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0, 1]$ on a que f_n ne converge pas uniformément vers $\delta_{1,x}$ mais pourtant $\int_0^1 f_n \to 0$ et $\int_0^1 \delta_{1,x} \, \mathrm{d}x = 0$. On a pu dans ce cas échanger l'intégrale et la limité alors que la convergence n'est pas uniforme.

Théorème 1.16
Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Alors f est intégrable et

$$\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n.$$

Proposition 1.17
Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. Si pour tout $\alpha > 0$ il existe $f_\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}$ telle que :

1. $\|f_\alpha - f\| \leq \alpha$;
2. f_α est intégrable sur $[a, b]$;

alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Démonstration
Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\alpha = \varepsilon/[4(b - a)]$. Il existe f_α et g_1, g_2 en escaliers telles que $g_1 \leq f_\alpha \leq g_2$ et $\int g_2 - g_1 < \varepsilon/2$. f_α est intégrable et $\|f - f_\alpha\| \leq \alpha$. On définit $h_1 = g_1 - \alpha$ et $h_2 = g_2 + \alpha$ en escaliers. On a :

$$h_1 = g_1 - \alpha \leq f_\alpha - \alpha \leq f \leq f_\alpha + \alpha \leq g_2 + \alpha = h_2.$$

De plus $\int g_2 - g_1 < \varepsilon/2 + 2\alpha(b - a) = \varepsilon$.

Démonstration (Théorème)
Il reste à démontrer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Mais

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \,\mathrm{d}x \leq (b - a)\|f_n - f\| \to 0.$$

2 Séries de fonctions

2.1 Rappel sur les séries numériques

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes. Soit $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$, de terme général

$$\forall n \in \mathbf{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

la suite des sommes partielles.

1. On dit que la série de terme général a_n converge si (S_n) converge et on note la limite $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.
2. On dit que $\sum a_n$ converge absolument si $\sum |a_n|$ converge. Si $\sum |a_n|$ converge alors $\sum a_n$ converge.
3. Si (a_n) et (b_n) sont deux suites de nombres réels positifs telles que $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors si $\sum b_n$ converge alors $\sum a_n$ converge.

2.2 Séries de fonctions

Soit X une partie de $\mathbf{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications de $X \to \mathbf{R}$. Pour tout $x \in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite numérique. On peut considérer le problème de la convergence de $\sum f_n(x)$ pour $x \in X$.

DÉFINITION 2.1
Pour tous les $x \in X$ tels que $\sum f_n(x)$ converge, on définit

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

On définit $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in X,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

Si S est défini pour $X' \subset X$ alors S est la *limite simple* de (S_n) sur X'.

REMARQUE. Si $\sum f_n(x)$ converge de somme S, on définit $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ et on a $\lim R_n(x) = 0$. Réciproquement, soient $S : X \to \mathbf{R}$ et (R_n) vérifiant pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$R_n(x) = S(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = S(x) - S_n(x).$$

Si pour $x \in X$, $\lim R_n(x) = 0$ alors $\sum f_n(x)$ converge de somme $S(x)$.

DÉFINITION 2.2 (Convergence normale)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur $X \neq \emptyset$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. $\sum f_n$ *converge normalement* si la série numérique $\sum \|f_n\|_{X,u}$ est convergente.

EXEMPLE. Pour

$$X_1 = \left\{ x \in \mathbf{R} \,\middle|\, |x| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

et $h_n(x) = x^n$, la série $\sum h_n(x)$ converge normalement sur X_1. En effet,

$$\|h_n\|_{X_1,u} = \sup_{x\in X_1} |h_n(x)| = \frac{1}{2^n}$$

et $\sum 1/2^n$ converge en tant que série géométrique de raison $1/2$. Mais sur

$$X_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \leq 1\}$$

on a $\|h_n\|_{X_2,u} = 1$ et donc $\sum \|h_n\|_{X_2,u}$ diverge.

DÉFINITION 2.3
Soit $\sum f_n$ pour $f_n : X \to \mathbf{C}$ une série de fonctions. Soit (v_n) une suite de nombres réels strictement positifs. On dit que $\sum v_n$ est une série majorante pour $\sum f_n$ si

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in X,\ |f_n(x)| \leq v_n.$$

Proposition 2.4
$\sum f_n$ est normalement convergente si, et seulement si, elle admet une série majorante convergente.

Exemple. On regarde la série de la suite (f_n) définie sur X par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \ f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + nx^8 + x^{24} + n^2}.$$

On a pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

qui est de série convergente. Donc $\sum f_n$ est normalement convergente.

Proposition 2.5
Soit (f_n) une suite de fonctions définies de X dans $\mathbf{R}$ telle que $\sum f_n$ converge normalement. Alors (S_n) est uniformément convergente vers S où $S(x) = \lim S_n(x)$ pour tout $x \in X$.

Démonstration
On procède en deux parties.

1. On montre que la limite de $S_n(x)$ quand $n \to +\infty$ existe pour tout $x \in X$ si, et seulement si, $\sum f_n(x)$ est convergente. On a

$$\sum_{k=0}^{n} |f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_n\|_{X,u} = T_n$$

   et T_n converge car $\sum \|f_n\|_{X,u}$ converge. Par comparaison $\sum |f_n(x)|$ converge. Donc pour tout $x \in X$, $\sum |f_n(x)|$ converge et donc $\sum f_n(x)$ converge et donc $S(x) = \sum f_n(x)$ est bien définie.
2. On montre que le reste converge uniformément vers 0, *i.e.*

$$\sup_{x \in X} |S(x) - S_n(x)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} |S(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_{X,u}. \end{aligned}$$

   Mais

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_{X,u} \to 0$$

   car c'est le reste de $\sum \|f_n\|_{X,u}$.

Théorème 2.6
Soit $X \subset \mathbf{R}$ et $x_0 \in \overline{X}$. Si $\sum f_n$ converge normalement sur X et si f_n admet une limite

en x_0 alors on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

DÉMONSTRATION
On a

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

On sait que S_n converge uniformément, on en conclut en utilisant le théorème d'échange de limites pour les suites de fonctions.

THÉORÈME 2.7
Soit $\sum f_n$ qui converge normalement sur X et telle que f_n est une fonction continue sur X pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

est une fonction continue.

THÉORÈME 2.8
Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f_n : I \to \mathbf{R}$ dérivable sur I pour tout n et telle que

1. $\sum f_n'$ converge normalement ;
2. il existe x_0 tel que $\sum f_n(x_0)$ converge.

Alors $\sum f_n(x) = S(x)$ est dérivable pour tout $x \in I$ et $S'(x) = \sum f_n'(x)$.

THÉORÈME 2.9
Soit $\sum f_n$ qui converge normalement sur $[a, b]$ et telle que f_n est intégrable pour tout n. Alors $\sum f_n$ est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n.$$

Chapitre 5

Séries entières

1 Définitions

1.1 Série entière et rayon de convergence

> Définition 1.1
> Soient $x_0 \in \mathbf{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. Une *série entière* sur $\mathbf{R}$ est une série de fonctions notée
> $$\forall x \in \mathbf{R},\ \sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$$
> qui est $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto a_n(x-x_0)^n$ pour tout x réel.

On se demande pour quels $x \in \mathbf{R}$, la série $\sum a_n(x-x_0)^n$ converge.

Exemples.

1. On regarde la série
$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2^n}.$$
   - Si $x = 0$ alors la série converge, vers 0.
   - Si $x = 1$ alors la série est géométrique et elle converge car de raison $1/2$.
   - Si $x = -1$ alors la série converge à nouveau (absolument).
   - Si $x = 2$ alors la série diverge.
   - Si $x = 2 - \varepsilon$ avec ε petit alors la série converge.

   Finalement, pour $x \in]-2, 2[$, la série converge.
2. Pour la série :
$$\sum_{n\geq 0} 2^n x^n$$
   le disque de convergence est $]-1/2, 1/2[$.
3. Avec
$$\sum_{n\geq 0} 2^{n^2} x^n$$
   la série converge uniquement pour $x = 0$.
4. De même, la série
$$\sum_{n\geq 0} n! x^n$$
   ne converge que pour $x = 0$.

Définition 1.2
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. On définit :

$$B = \left\{ r \in \mathbf{R}_+ \,\middle|\, \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n r^n| < \infty \right\}.$$

Lemme 1.3
B est un intervalle de la forme $[0, R[$ ou $[0, R]$ avec $R \in [0, +\infty]$.

Démonstration
On montre que si $r > 0$ et $r \in B$ et si r' est tel que $0 < r' < r$ alors $r' \in B$. On a bien

$$\forall n \in \mathbf{N},\ |a_n (r')^n| \leq |a_n|\, r^n \leq M < \infty.$$

Définition 1.4
Le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n x^n$ est $R = \sup B$.

Proposition 1.5
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière et soit $0 < R \leq \infty$.

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, si $|x| < R$ alors $\sum a_n x^n$ converge absolument.
2. Pour tout $\eta > 0$ avec $\eta < R$, $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-\eta, \eta]$.
3. $\sum a_n x^n$ diverge si $|x| > R$.

Démonstration
On remarque que le deuxième point implique le premier.

2. Soit η tel que $0 < \eta < R$. Pour tout $x \in [-\eta, \eta]$,

$$|a_n x^n| \leq |a_n|\, \eta^n = |a_n|\, (\eta + \varepsilon)^n \frac{\eta^n}{(\eta + \varepsilon)^n}$$

avec $\varepsilon > 0$ tel que $\eta + \varepsilon < R$. Mais pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $|a_n|\, (\eta + \varepsilon)^n \leq M$ et donc

$$|a_n x^n| \leq M \left(\frac{\eta}{\eta + \varepsilon} \right)^n$$

mais

$$\frac{\eta}{\eta + \varepsilon} = q < 1$$

et $\sum M q^n$ converge absolument.

3. Si $|x| > R$ alors la suite $(|a_n x^n|)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée. Nécessairement, $\lim |a_n x^n| \neq 0$ si elle existe et donc la série $\sum a_n x^n$ diverge.

1.2 Disque de convergence

Définition 1.6
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière et soit $R > 0$ son rayon de convergence. Le *disque de convergence* de $\sum a_n x^n$ est l'ensemble $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| < R\} =]-R, R[$.

Remarque. Pour R fini, il n'y a pas de règle générale sur la convergence de $x = \pm R$.

Exemple. La série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$$
avec $\alpha \geq 0$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

1. Si $\alpha = 0$ alors $\sum x^n$ ne converge pas pour $x = \pm 1$.
2. Si $\alpha = 1$ alors la série $\sum x^n/n$ diverge pour $x = 1$ et converge pour $x = -1$.
3. Si $\alpha = 2$ alors la série converge pour $x = \pm 1$.

Rappel. Soit $\sum a_n$ une série de termes général $a_n \geq 0$.

1. Critère de d'Alembert. Si $\lambda = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (dans le cas où cette limite existe) alors :
   — si $\lambda < 1$ alors $\sum a_n$ converge ;
   — si $\lambda > 1$ alors $\sum a_n$ diverge.
2. Critère de Cauchy. Si $\lambda = \lim (a_n)^{1/n}$ (lorsque cette limite existe) alors
   — si $\lambda < 1$ alors la série $\sum a_n$ converge ;
   — si $\lambda > 1$ alors $\sum a_n$ diverge.

Exemples. R est *l'unique* (voir la proposition 3) réel positif tel que $\sum a_n x^n$ converge absolument pour $|x| < R$ et diverge pour $|x| > R$.

— On considère la série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}.$$
On veut montrer qu'il existe $R > 0$ tel que si $|x| < R$ alors $\sum |x|^n/n$ converge. On applique le critère de Cauchy :
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{|x|^n}{n}\right)^{1/n} &= |x| \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \\ &= |x| \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}\ln n} \\ &= |x|\end{aligned}$$
et donc par le critère de Cauchy, pour $|x| < 1$ la série converge et pour $|x| > 1$ la série diverge. D'où $R = 1$.

— Pour
$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$$
on a
$$\lambda = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x^{n+1}|}{|x|^n} \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x|$$
et donc par le critère de d'Alembert, $R = 1$.

Proposition 1.7
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Si $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ existe dans $[0, +\infty]$ alors
$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Proposition 1.8
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Si $\lim |a_n|^{1/n}$ existe dans $[0, +\infty]$ alors
$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}}.$$

Exemples.

— On considère la série $\sum a_n x^n$ avec pour tout $n \in \mathbf{N}$, a_n défini par :

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} \text{ si } n \text{ impair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On réécrit cette série sous la forme

$$\sum_{k \geq 0} a_{2k+1} x^{2k+1} = x \sum_{k \geq 0} a_{2k+1} x^{2k} = x \sum_{k \geq 0} c_k y^k$$

avec $c_k = a_{2k+1}$ et $y = x^2$. Comme $c_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, on peut appliquer le critère de d'Alembert.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k \to +\infty} \frac{c_k}{c_{k+1}} \\ &= \lim_{k \to +\infty} \frac{(2k+3)!}{(2k+1)!} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

— On prend cette fois

$$a_n = \begin{cases} 2^n \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{k \geq 0} a_{2k} x^{2k} = \sum_{k \geq 0} c_k y^k$$

et on applique le critère de Cauchy. On obtient :

$$\begin{aligned} R' &= \frac{1}{\lim\limits_{k \to +\infty} (c_k)^{1/k}} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{k \to +\infty} 2^{\frac{2k}{k}}} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Donc si $|x^2| = x^2 < 1/4$ la série $\sum a_n x^n$ converge, si $x^2 > 1/4$ alors la série diverge. Donc le rayon de la série $\sum a_n x^n$ est $1/2$.

2 Opérations sur les séries entières

2.1 Addition, multiplication, dérivation et intégration

Proposition 2.1

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'. Pour tout x tel que $|x| < \min(R, R')$, la série $\sum (a_n + b_n) x^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Proposition 2.2

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'. Soit :

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$$

des coefficients indexés par $n \in \mathbf{N}$. Pour tout x tel que $|x| < \min(R, R')$, la série $\sum c_n x^n$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right).$$

Cela se démontre en utilisant la convergence absolue des séries entières pour tout x tel que $|x| < \min(R, R')$.

Proposition 2.3

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence, R, strictement positif. La série $\sum n a_n x^{n-1}$ possède le même rayon de convergence. De plus,

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est dérivable sur $]-R, R[$ et

$$\forall x \in]-R, R[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Démonstration

Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et R' celui de $\sum n a_n x^{n-1}$.

1. $R \geq R'$. Soit x tel que $|x| < R'$, on montre que $\sum |a_n| |x|^n$ converge. Mais

$$|a_n| |x|^n \leq n |a_n| |x|^n = |x| n |a_n| |x|^{n-1}$$

donc $|a_n| |x|^n$ est majorée par le terme général d'une série convergente.

2. $R \leq R'$. Soit x tel que $|x| < R$. On montre que $\sum n |a_n| |x|^{n-1}$ converge. Il existe $M > 0$ tel que $|a_n| |x|^n \leq M$ pour tout n (car $\sum |a_n| |x|^n$ converge). Soit $r > 0$ tel que $|x| < r < R$. On peut supposer que l'on a également $|a_n| r^n \leq M$. On a alors :

$$n |a_n| |x|^{n-1} = n |a_n| \frac{|x^{n-1}|}{r^{n-1}} r^{n-1} \leq n q^{n-1} \frac{M}{r}$$

où $q = |x| / r < 1$. Donc $n |a_n| |x|^{n-1}$ est majoré par le terme général d'une série convergente et donc la série $\sum n |a_n| |x|^{n-1}$ est convergente pour $|x| < R$.

Donc on a bien $R = R'$.

Il reste à montrer que $f : x \mapsto \sum a_n x^n$ est dérivable pour tout $x \in]-R, R[$ et alors $f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$.

On sait que pour tout $\eta > 0$ la série $\sum n a_n x^{n-1}$ est normalement convergente sur $[-\eta, \eta]$. On en déduit que la suite $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$h_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

converge uniformément vers

$$h : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Mais $h_n(x) = f_n'(x)$ où $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. On a aussi $\lim f_n(0) = f(0) = a_0$. Donc

$$f'(x) = \lim_{n \to +\infty} h_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Proposition 2.4

$\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. La fonction $f :]-R, R[\to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

a pour primitives sur $]-R, R[$ les fonctions

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + c$$

avec $c \in \mathbf{R}$.

Démonstration

Si R' est le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ alors $R = R'$. Mais alors pour $x \in]-R, R[$, la fonction

$$F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + c$$

est dérivable sur $]-R, R[$ et $F' = f$.

Application. On peut calculer une primitive sous forme de série entière de :

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^7}\, \mathrm{d}x.$$

En effet, en posant :

$$f(x) = \frac{1}{1-x^7}$$

on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^7)^n$$

pour $|x| < 1$. f admet pour primitive :

$$F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{7n+1}}{7n+1} + c$$

avec $c \in \mathbf{R}$. Et donc finalement :

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^7}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{7n+1} \frac{1}{7n+1}.$$

Proposition 2.5

Soit $\sum a_n x^n$ et $R > 0$ son rayon de convergence. La fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

pour $x \in]-R, R[$ est de classe C^∞ et pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in]-R, R[$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Corollaire 2.6
Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k.$$

Corollaire 2.7
Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières. Soit $r > 0$ tel que $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ converge pour tout $x \in]-r, r[$. Si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = g(x)$$

alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = b_n$.

Démonstration
On prend les dérivées successives de f et g en 0 et on utilise le corollaire précédent.

2.2 Série de Taylor

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ contenant 0 non réduit à $\{0\}$.
On rappel le théorème de Taylor(-Lagrange) :

Théorème 2.8
Soit f dérivable $(n+1)$ fois sur I. Pour tout $x \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right) + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Définition 2.9
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ qui possède des dérivées de tous ordres en 0. On appelle *série de* Taylor de f en 0, la série entière :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \mathrm{T}^f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

On pose :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ T_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Remarques-questions.

1. Quels sont les $x \neq 0$ pour lesquels la série converge ?
2. Est-ce qu'on a $f(x) = T^f(x)$ si $R > 0$?

Exemple. En prenant pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$. On a :

$$\mathrm{T}^f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

En posant $\mathrm{T}^f(x) = \sum a_n x^n$ on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \end{aligned}$$

et donc le rayon de convergence est $R = +\infty$. On montre que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \lim_{n\to+\infty} \left| f(x) - T_n^f(x) \right| = 0.$$

Par le théorème de Taylor, pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\left| f(x) - T_n^f(x) \right| = \left| f^{(n+1)}(\theta x) \right| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, la série $\sum x^n/n!$ est convergente et donc $(x^n/n!)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Fonctions usuelles. Deux tableaux de fonctions usuelles.

Fonction	Série de Taylor	Disque de convergence
$\cos x$	$T^f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k!)}$	$\mathbf{R}$
$\sin x$	$T^f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$\mathbf{R}$
$\mathrm{ch}\, x$ §1	$T^f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$\mathbf{R}$
$\mathrm{sh}\, x$ §2	$T^f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$\mathbf{R}$

Table 5.1 – Fonctions exponentielles

§1. On définit le cosinus hyperbolique par :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

§2.

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Fonction	Série de TAYLOR	Disque de convergence
$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$	$T^f(x) = \sum_{k\geq 0} x^k$	$]-1,1[$
$f(x) = \dfrac{1}{1+x}$	$T^f(x) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k x^k$	$]-1,1[$
$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$T^f(x) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k x^{2k}$	$]-1,1[$
$f(x) = \ln(1+x)$	$T^f(x) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$	$]-1,1]$
$f(x) = \operatorname{Arctan} x$	$T^f(x) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$]-1,1]$

TABLE 5.2 – Fonctions géométriques

CONTRE-EXEMPLE. On veut trouver une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ avec $0 \ni I$ et C^∞ telle que pour tout $x \neq 0$,

$$T^f(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

diverge. On a un candidat :

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} e^{-n} \sin(n^2 x).$$

On a bien sûr $f(0) = 0$. On pose

$$h_n(x) = e^{-n} \sin(n^2 x).$$

On a pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$h_n'(x) = e^{-n} n^2 \cos(n^2 x)$$

et

$$|h_n'(x)| \leq e^{-n} n^2.$$

Donc la série $\sum h_n'$ converge normalement sur $\mathbf{R}$ et donc il en est de même pour $\sum h_n$.

On peut vérifier que f est C^∞. En effet, pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} h_n(x) = e^{-n} n^{2k} u_k(n^2 x)$$

avec

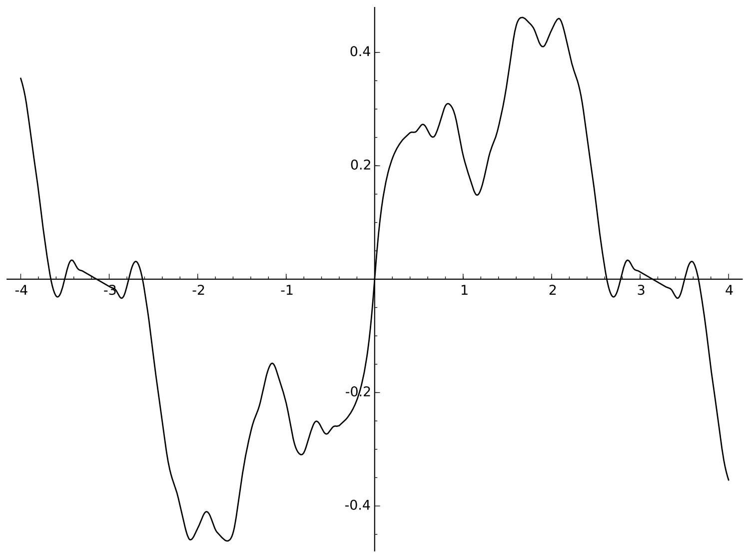
$$u_k(x) = \begin{cases} \pm \cos x \text{ si } k \text{ implair} \\ \pm \sin x \text{ si } k \text{ pair} \end{cases}.$$

Mais

$$\left| \sum_{u\geq 0} e^{-u} u^{2k} u_k(u^2 k) \right| \leq \sum_{n\geq 0} e^{-n} n^{2k} < \infty$$

et donc la série des dérivées k-ième converge normalement sur $\mathbf{R}$. f est bien C^∞ et

$$\left| f^{(k)}(0) \right| = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-u} u^{2k} \text{ si } k \text{ impair} \\ 0 \text{ si } k \text{ pair} \end{cases}.$$



On montre par l'absurde que

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!} |x|^k$$

diverge pour tout $x \neq 0$. Supposons que cette série converge. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et pour tout $r > 0$:

$$\sum_{m=0}^{k} \frac{\left|f^{(2m+1)}(0)\right|}{(2m+1)!} r^{2m+1} \leq c.$$

Et donc :

$$\sum_{m=0}^{k} \frac{r^{2m+1}}{(2m+1)!} \sum_{u=0}^{+\infty} e^{-u} u^{2(2m+1)} \leq c$$

$$\sum_{u=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{k} e^{-u} \frac{u^{2(2m+1)}}{(2m+1)!} r^{2m+1} \leq c$$

et donc pour tout N et k entiers :

$$\sum_{u=0}^{N} \sum_{m=0}^{k} e^{-u} \frac{u^{2(2m+1)}}{(2m+1)!} r^{2m+1} \leq c$$

et en particulier

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} \sum_{u=0}^{N} \sum_{m=0}^{k} e^{-u} \frac{u^{2(2m+1)}}{(2m+1)!} r^{2m+1} &= \sum_{u=0}^{N} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u^{2(2m+1)}}{(2m+1)!} r^{2m+1} \\ &= \sum_{u=0}^{N} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(u^2 r)^{2m+1}}{(2m+1)!} \leq c \\ &= \sum_{u=0}^{N} \sinh(u^2 r) \leq c \end{aligned}$$

mais

$$\sinh(u^2 r) e^{-u} \sim \frac{e^{u^2 r}}{2} e^{-u}$$

au voisinage de $n = +\infty$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sinh(u^2 r) e^{-u} = +\infty$$

d'où la contradiction.

Exemple de fonction plate. Soit :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

avec $f(0) = 0$. On a :

$$T^f(x) = 0$$

pour tout x réel. Mais $f(x) > 0$ pour tout x on nul. Donc $f(x) \neq T^f(x)$ pour tout x non nul.