Université Paris Diderot — Examen du 16/05/2014 (3h)

L2 SN4

Les exercices sont indépendants.

Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté de la rédaction.

Exercice 1

a) Soit $(\alpha_i)_{1\leq i\leq 4} \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un seul polynôme $p \in \mathbb{P}_3$ vérifiant les égalités :

$$p(0) = \alpha_1,\ p'(0) = \alpha_2,\ p(1) = \alpha_3,\ p'(1) = \alpha_4. \tag{1}$$

b) Calculer les quatre polynômes p_1, p_2, p_3, p_4 de $\mathbb{P}_3$ vérifiant les relations (1) avec respectivement $(\alpha_i)_{1\leq i\leq 4}$ égal à $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$. Montrer que le polynôme p de la question a) s'écrit comme une combinaison linéaire des $(p_i)_{1\leq i\leq 4}$:

$$p = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i p_i.$$

c) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4([0,1])$ et soit p_f le polynôme de la question a) avec $\alpha_1 = f(0)$, $\alpha_2 = f'(0)$, $\alpha_3 = f(1)$ et $\alpha_4 = f'(1)$. Montrer que pour chaque point $x \in]0,1[$, il existe un point $\xi_x \in]0,1[$ tel que

$$f(x) - p_f(x) = \frac{\pi(x)}{4} f^{(4)}(\xi_x),$$

avec $\pi(x) = x^2 (x-1)^2$.

d) On approche l'intégrale d'une fonction f à l'aide de la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \sim \int_0^1 p_f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que cette formule est exacte pour les polynômes de $\mathbb{P}_3$. Calculer les poids

$$w_i = \int_0^1 p_i(x)\,\mathrm{d}x$$

pour $1 \leq i \leq 4$ et en déduire une formule explicite de la formule de quadrature.

Exercice 2

On considère la formule de quadrature suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx k f(x_1) + f(x_2).$$

a) Donner la valeur de k et les valeurs possibles pour x_1 et x_2 pour que la formule soit exacte pour les éléments de la base canonique de $\mathbb{P}_2$.

b) Quel est l'ordre maximal de la méthode ?

Exercice 3
Calculer le polynôme p_2 d'interpolation de Lagrange de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ aux points -1,0,1 et tracer sur un même graphe f et p_2.

Exercice 4 (Scilab)
On considère une équation de la forme $f(x) = 0$, où f est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - 2x - 5$.

a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x^* et qu'elle vérifie $1 < x^* < 3$.

b) Ecrire une fonction scilab de la forme

```
function [valeur,derivee] = f(x)
   ...
endfunction
```

qui renvoie la valeur de $f(x)$ (dans le réel `valeur`), et la valeur de $f'(x)$ (dans le réel `derivee`.)

c) Ecrire une fonction scilab de la forme

```
function [sol,nbiter] = newton(f,x0,tol,itermax)
  ...
endfunction
```

qui met en œuvre la méthode de Newton pour la fonction f passée en argument, avec comme points de départ $x_0 = a$.

Le critère d'arrêt sera $|x_{n+1} - x_n| < \texttt{tol} * |x_n|$. Si le nombre d'itérations dépasse `itermax`, la fonction doit afficher un message d'erreur `"la methode ne converge pas"`.