INTERROGATION N. 9

NOM :
PRÉNOM :

Exercice 1 - Soit un groupe $(G, *)$. Soit H un sous-groupe distingué de G. Démontrer que si G est cyclique alors G/H est cyclique.

Exercice 2 - On pose $X = \{(12)(34), (13)(24), (14)(32)\} \subseteq \mathscr{S}_4$. On rappelle que $V_4 = \{\mathrm{Id}\} \cup X$ et que c'est un sous-groupe distingué de $\mathscr{S}_4$. On note $\pi\colon \mathscr{S}_4 \to \mathscr{S}_4/V_4$ la surjection canonique. On admet qu'il existe un homomorphisme surjectif de groupes $\Phi\colon \mathscr{S}_4 \to \mathscr{S}_X$ tel que, pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_4$, l'application $\Phi(\sigma)$ soit donnée par $\tau \mapsto \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$.

(1) Démontrer qu'il existe un homomorphisme surjectif de groupes $\theta\colon \mathscr{S}_4/V_4 \to \mathscr{S}_X$ tel que $\theta \circ \pi = \Phi$.

(2) En déduire que $\mathscr{S}_4/V_4 \simeq \mathscr{S}_X$.

Exercice 1 : La surjection canonique $G \to G/_H$ est surjective (on la note π) et G est fini donc $G/_H$ est fini.

Soit $a \in G$ un générateur de G.

Soit $x \in G/_H$. Il existe $g \in G$ tel que $\pi(g) = x$.

Et il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a^n = g$.

Or π est un homomorphisme donc $\pi(a^n) = \pi(a)^n$.

Ainsi, $x = \pi(a)^n$.

Donc $G/_H$ est monogène. Donc G est cyclique.

Date: Mardi 8 décembre 2015.

Exercice 2 :

(1) V_4 est un groupe abélien donc

$(\forall \sigma \in \mathcal{S}_4) \quad (\forall \tau \in V_4) \qquad \sigma \in V_4 \Rightarrow \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \tau.$

Donc $V_4 \subseteq \operatorname{Ker} \Phi$. Il existe donc un unique homomorphisme de groupes $\theta : \mathcal{S}_4/V_4 \longrightarrow \mathcal{S}_X$ tel que $\theta \circ \pi = \Phi$.

(2) Par construction, $\operatorname{Im} \theta = \operatorname{Im} \Phi$.

Par hypothèse, $\operatorname{Im} \Phi = \mathcal{S}_X$.

Donc θ est surjectif.

D'après le théorème de Lagrange, $\operatorname{Card}(\mathcal{S}_4/V_4) = \dfrac{\operatorname{Card}(\mathcal{S}_4)}{\operatorname{Card}(V_4)} = \dfrac{24}{4}$
$= 6,$

de plus $\operatorname{Card}(\mathcal{S}_X) = 6$ puisque $\operatorname{Card}(X) = 3$.

Ainsi, $\theta : \mathcal{S}_4/V_4 \longrightarrow \mathcal{S}_X$ est une application surjective entre deux ensembles finis et de même cardinal. Donc elle est bijective.

Or c'est un homomorphisme. Donc c'est un isomorphisme.

Ainsi, $\mathcal{S}_4/V_4 \simeq \mathcal{S}_X$.