Analyse réelle

F. Golse

Table des matières

Chapitre 1

Espaces de Banach

1.1 Rappels sur les espaces complets

Soit (X, d) espace métrique et (x_n) suite de X.

Définition 1.1.1 *La suite (x_n) est de Cauchy si elle vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes*

a) pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N(\epsilon)$ tq. $d(x_m, x_n) < \epsilon$ pour tous $m, n \geq N(\epsilon)$;

b) $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$ pour $n \to \infty$ uniformément en $p \geq 0$;

c) $\operatorname{diam}\{x_n \mid n \geq N\} \to 0$ lorsque $N \to \infty$.

Toute suite convergente est évidemment de Cauchy. La réciproque est fausse en général (prendre $X =]0, 1[$ et $x_n = 2^{-n}$).

Proposition 1.1.2 *Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, elle est convergente.*

Démonstration. Soit (x_n) de Cauchy dans (X, d) et l une valeur d'adhérence de (x_n). Soit $\epsilon > 0$; il existe donc $N(\epsilon) > 0$ tq.

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \text{ pour tous } m, n \geq N(\epsilon)\,.$$

De plus, comme l est une valeur d'adhérence de (x_n),

$$\text{il existe } m \geq N(\epsilon) \text{ tq. } d(x_m, l) < \epsilon\,.$$

Donc, pour tout $n \geq N(\epsilon)$, on a

$$d(x_n, l) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, l) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon\,,$$

et donc $x_n \to l$ pour $n \to \infty$. ■

Définition 1.1.3 *Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.*

L'intérêt principal de la notion de suite de Cauchy est que, dans un espace complet, on peut vérifier qu'une suite est convergente sans en connaître la limite.

Pour vérifier qu'un espace est complet, on se ramène souvent à montrer qu'il est fermé dans un espace plus gros qu'on sait être complet.

Proposition 1.1.4 *Si (X,d) est complet et $Y \subset X$. Alors (Y,d) est complet ssi Y est fermé dans X.*

Démonstration. Supposons que (Y,d) est complet, et soit $l \in \overline{Y}$. Il existe donc (y_n) suite de Y telle que $y_n \to l$ pour $n \to \infty$. Comme la suite (y_n) est convergente dans X, c'est une suite de Cauchy ; comme (Y,d) est complet, (y_n) converge dans Y : ainsi $l \in Y$, d'où Y est fermé.

Réciproquement, supposons Y fermé dans X et soit (y_n) suite de Cauchy dans Y ; comme c'est une suite de Cauchy dans (X,d) complet, elle converge vers une limite $l \in X$. Comme $y_n \in Y$ et Y est fermé, $l \in Y$, cqfd. ∎

L'une des principales applications de la notion d'espace complet à l'Analyse est le théorème du point fixe.

Définition 1.1.5 *Soit (X,d) métrique et $k \geq 0$. Une application $f : X \to X$ est k-lipschitzienne si*

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x,y) \text{ pour tous } x, y \in X\,.$$

Théorème 1.1.6 *Soit (X,d) complet et $f : X \to X$ k-lipschitzienne avec $k < 1$. Alors f admet un point fixe unique.*

Démonstration. Si x et x' sont deux points fixes de f, on a

$$d(x,x') = d(f(x), f(x')) \leq k d(x,x')\,.$$

Comme $k < 1$, on a $d(x,x') = 0$ donc $x = x'$, ce que f a au plus un point fixe.

Soit $x_0 \in X$ quelconque ; on définit une suite (x_n) par récurrence :

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ pour tout } n \geq 0\,.$$

Pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq k^m d(x_0, x_1)\,;$$

donc

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (k^n + \ldots + k^{n+p-1}) d(x_0,x_1) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0,x_1)\,. \end{aligned}$$

Comme $k \in [0,1[$, ceci montre que

$$d(x_n, x_{n+p}) \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty \text{ uniformément en } p \geq 0\,,$$

et donc que la suite (x_n) est de Cauchy. Comme X est complet, elle converge donc vers une limite $x \in X$. En passant à la limite dans la relation de récurrence définissant x_n, on trouve que $f(x) = x$. ∎

1.2 Rappels sur les espaces métriques compacts

Les espaces métriques compacts sont ceux qui sont "approximativement finis".

Définition 1.2.1 *Un espace métrique (X, d) est compact ssi toute suite de points de X admet une valeur d'adhérence (c'est à dire contient une sous-suite convergente).*

Pour démontrer qu'un espace métrique est compact, la notion suivante est souvent utile

Définition 1.2.2 *Un espace métrique (X, d) est précompact ssi, pour tout $\epsilon > 0$, X admet une recouvrement fini par des boules de rayon ϵ.*

En effet, on a la caractérisation suivante :

Proposition 1.2.3 *Un espace métrique (X, d) est compact ssi il est précompact et complet.*

Démonstration. Si (X, d) est compact, il est complet : en effet, toute suite de Cauchy de X, ayant au moins une valeur d'adhérence, est forcément convergente (voir Proposition 1.1.2).

Supposons que X n'est pas précompact. Il existe donc $r > 0$ pour lequel X ne peut pas être recouvert par un nombre fini de boules de rayon r.

Construisons une suite infinie (x_n) de points de X telle que

$$d(x_m, x_n) \geq r \text{ pour tous } m, n \in \mathbf{N} \text{ tq. } m \neq n\,.$$

On part de $x_0 \in X$ quelconque ; il existe forcément $x_1 \in X$ tel que $d(x_1, x_0) \geq r$: autrement $X \subset B(x_1, r)$.

Supposons construits $x_1, \ldots, x_n \in X$ tq. $d(x_i, x_j) > r$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$ distincts. Il existe forcément $x_{n+1} \in X$ tq.

$$d(x_{n+1}, x_i) \geq r\,; \text{ autrement } X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)\,.$$

La suite (x_n) ne peut contenir aucune sous-suite de Cauchy, et donc aucune sous-suite convergente, ce qui contredit l'hypothèse que (X, d) est compact.

Réciproquement, supposons que (X, d) est précompact et complet : on va montrer que toute suite (x_n) de X admet une sous-suite qui est de Cauchy. En effet, en prenant $\epsilon = 2^{-k}$, on voit que, pour tout $k \geq 1$, X admet un recouvrement fini par des boules de rayon 2^{-k}.

Par le principe des tiroirs, l'une des boules de rayon $\frac{1}{2}$ contient une infinité de x_n : on obtient ainsi une suite extraite $(x_{\phi_1(n)})$, où $\phi_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est croissante stricte, à valeurs dans l'une des boules de rayon $\frac{1}{2}$.

En appliquant de nouveau le principe des tiroirs, on voit que l'une des boules de rayons $\frac{1}{4}$ contient une infinité de termes de la suite extraite $(x_{\phi_1(n)})$; en extrayant à nouveau une sous-suite, il existe donc $\phi_2 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ croissante stricte tq. $(x_{\phi_1\circ\phi_2(n)})$ soit à valeurs dans l'une des boules de rayon $\frac{1}{4}$.

Par récurrence, on construit ainsi, pour tout $k \geq 1$, des applications croissantes strictes $\phi_j : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ pour $j = 1, \ldots, k$ et une suite extraite $(x_{\phi_1\circ\ldots\phi_k(n)})$ à valeurs dans l'une des boules de rayon 2^{-k}.

Notons $\Phi_N = \phi_1 \circ \ldots \phi_N$; on a donc

$$d(x_{\Phi_N(m)}, x_{\Phi_N(n)}) \leq \frac{1}{2^{N-1}}\,, \text{ pour tous } m, n \geq 1\,.$$

Considérons maintenant la suite extraite diagonale $(x_{\Phi_N(N)})$: on a

$$d(x_{\Phi_N(N)}, x_{\Phi_M(M)}) \leq \frac{1}{2^{N-1}}$$

pour tout $M > N$, puisque $M = \phi_{N+1} \circ \ldots \circ \phi_M(M)$. Cette suite extraite diagonale est donc de Cauchy, cqfd. ■

Voici une conséquence immédiate de l'équivalence ci-dessus :

Corollaire 1.2.4 *Soit (X, d) espace métrique complet. Pour tout $A \subset X$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\overline{A}$ est compact dans (X, d) ;

b) A est précompact.

Pour démontrer qu'une partie d'un espace métrique est précompacte, on se ramène la plupart du temps à montrer que cette partie peut être approchée par une suite de parties que l'on sait déjà précompactes.

Corollaire 1.2.5 *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Supposons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K_\epsilon \subset X$ précompact tq.*

$$d(x, K_\epsilon) < \epsilon \text{ pour tout } x \in A\,.$$

Alors A est précompact.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$; puisque K_ϵ est précompact, il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que

$$K_\epsilon \subset \bigcup_{1\leq j\leq n} B(x_j, \epsilon)\,.$$

Donc

$$A \subset \bigcup_{1\leq j\leq n} B(x_j, 2\epsilon)\,,$$

cqfd. ■

Voici quelques exemples d'espaces métriques compacts : le segment fermé $[0, 1] \subset \mathbf{R}$, le pavé fermé $[0, 1]^N \subset \mathbf{R}^N$, la sphère unité

$$\mathbf{S}^{N-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^N \mid x_1^2 + \ldots + x_N^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^N\,.$$

Plus généralement :

Proposition 1.2.6 *Les parties compactes de $\mathbf{R}^N$ (ou de $\mathbf{C}^N$) sont les parties fermées et bornées.*

Le résultat suivant est un corollaire immédiat de la définition.

Proposition 1.2.7 *Si (K,d) est un espace métrique compact et $F \subset K$ est fermé dans K, alors (F,d) est compact.*

On rappelle le résultat fondamental suivant (également conséquence triviale de la définition) :

Proposition 1.2.8 *L'image d'un espace métrique compact par une application continue est compacte.*

En particulier, soit (K,d) espace métrique compact non vide et $f : K \to \mathbf{R}$. Alors

$$\inf_{x\in K} f(x) \text{ et } \sup_{x\in K} f(x) \text{ sont atteints.}$$

1.3 Espaces de Banach : généralités et premiers exemples

Tous les espaces vectoriels considérés ici ont pour corps de base $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, sauf mention du contraire.

Définition 1.3.1 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé (evn) complet.*

Voici un corollaire immédiat de la proposition 1.1.4 et de la définition ci-dessus :

Corollaire 1.3.2 *Tout sous-espace vectoriel (sev) fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite.*

On rappelle le résultat suivant :

Théorème 1.3.3 *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire 1.3.4 *Tout evn de dimension finie est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit donc E evn de dimension finie et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de E ; notons, pour tout $x \in E$, $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans cette base, et

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \sup_{1\le j\le n} |x_j| \,.$$

La norme $x \mapsto \|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty$ étant équivalente à la norme de E, on obtient un isomorphisme bi-continu $E \ni x \mapsto (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$; comme $\mathbf{K}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est complet, E est complet. ■

1.3.1 Exemples d'espaces de Banach

Voici quelques exemples d'espaces de Banach, qui sont des espaces de fonctions, importants en Analyse.

Soit F un espace de Banach, dont on note $|\cdot|_F$ la norme (par exemple, F est un evn de dimension finie, $\mathbf{K}^N$ ou même $\mathbf{K}$).

- $B(A,F)$, l'espace des applications bornées de $A \to F$ où A est un ensemble, muni de la norme du sup :
$$\|f\|_B = \sup_{x\in A} |f(x)|_F\,.$$
- $C_b(X,F)$, l'espace des applications continues bornées de (X,d), espace métrique, à valeurs dans F, muni de la norme du sup $\|\cdot\|_B$.
- $C_0(E,F)$, l'espace des applications continues tendant vers 0 à l'infini de E, evn de dimension finie, à valeurs dans F, muni de la norme du sup $\|\cdot\|_B$.
- $C(K,F)$, l'espace des applications continues de (K,d), espace métrique compact, à valeurs dans F, muni de la norme du sup $\|\cdot\|_B$.

La norme du sup $\|\cdot\|_B$ définit sur chacun de ces espaces la topologie de la convergence uniforme des applications à valeurs dans F.

Proposition 1.3.5 *L'espace $B(A,F)$ muni de la norme du sup $\|\cdot\|_B$ est un Banach. L'espace $C_b(X,F)$ est fermé dans $B(X,F)$; l'espace $C_0(E,F)$ est fermé dans $B(E,F)$. Enfin $C(K,F) = C_b(K,F)$.*

Démonstration. Soit (f_n) suite de Cauchy dans $B(A,F)$: pour tout $\epsilon > 0$,
$$\|f_n - f_{n+k}\|_B = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f_{n+k}(x)|_F \to 0$$
lorsque $n \to +\infty$, uniformément en $k \geq 0$. Autrement dit, il existe une suite $\epsilon_n \to 0$ pour $n \to \infty$ tq.
$$\sup_{k\geq 0} \|f_n - f_{n+k}\|_B = \sup_{\substack{k\geq 0\\ x\in A}} |f_n(x) - f_{n+k}(x)|_F \leq \epsilon_n\,.$$
En particulier, pour tout $x \in A$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F, qui est complet. Cette suite converge donc vers une limite que nous notons $f(x)$. Or on sait que
$$|f_n(x) - f_{n+k}(x)|_F < \epsilon_n \text{ pour tous } n, k \geq 0 \text{ et tout } x \in A\,;$$
en passant à la limite pour $k \to +\infty$, on trouve que
$$|f_n(x) - f(x)|_F \leq \epsilon_n \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et tout } x \in A\,;$$
autrement dit, pour tout $n \in \mathbf{N}$
$$\|f_n - f\|_B = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|_F \leq \epsilon_n\,.$$

D'abord, ceci montre que, pour n'importe quelle valeur de n

$$|f(x)|_F \leq \|f_n - f\|_B + \|f_n\|_B \text{ pour tout } x \in A\,,$$

de sorte que $f \in B(A, F)$.

Puis $\|f_n - f\|_B \to 0$, ce qui signifie que $f_n \to f$ pour $n \to \infty$.

L'espace $C_b(X, F)$ est fermé dans $B(X, F)$, car une limite uniforme de fonctions continues est continue ; $C(K, F) = C_b(K, F)$ car toute fonction continue sur un compact y est bornée (et atteint ses bornes).

Enfin $C_0(E, F)$ est fermé dans $C_b(E, F)$: en effet supposons que (f_n) est une suite de $C_0(E, F)$ tq. $f_n(x) \to f(x)$ uniformément en $x \in E$ pour $n \to \infty$. Donc, pour tout $x \in E$, on a

$$|f(x)|_F \leq |f_n(x)|_F + \|f_n - f\|_B\,.$$

Soit $\epsilon > 0$ quelconque ; il existe donc $N(\epsilon)$ tq.

$$\|f_n - f\|_B < \epsilon \text{ pour tout } n \geq N(\epsilon)\,.$$

En particulier, pour $n = N(\epsilon)$, on a

$$|f(x)|_F \leq |f_{N(\epsilon)}(x)|_F + \epsilon\,.$$

En passant à la limite supérieure pour $|x|_E \to \infty$, on trouve que

$$\varlimsup_{|x|_E \to \infty} |f(x)|_F \leq \varlimsup_{|x|_E \to \infty} |f_{N(\epsilon)}(x)|_F + \epsilon = \epsilon\,.$$

Comme $\epsilon > 0$ est quelconque, on trouve finalement que

$$\varlimsup_{|x|_E \to \infty} |f(x)|_F = 0$$

ce qui implique que $f(x) \to 0$ pour $|x|_E \to \infty$. ∎

Voici d'autres exemples d'espaces de Banach, cette fois des espaces de suites :

– on note l'espace des suites multiples bornées

$$\ell^\infty(\mathbf{Z}^N) = \{x : \mathbf{Z}^N \to \mathbf{K} \,|\, \sup_{k \in \mathbf{Z}^N} |x(k)| < \infty\}\,,$$

et, pour tout $x \in \ell^\infty(\mathbf{Z}^N)$,

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbf{Z}^N} |x(k)| < \infty\,.$$

Alors $\ell^\infty(\mathbf{Z}^N)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un Banach. (En fait, $\ell^\infty(\mathbf{Z}^N) = B(\mathbf{Z}^N, \mathbf{K})$ et $\|\cdot\|_\infty$ coïncide avec $\|\cdot\|_B$).

– on note l'espace des suites tendant vers 0 à l'infini

$$c_0(\mathbf{Z}^N) = \{x : \mathbf{Z}^N \to \mathbf{K} \,|\, x(k) \to 0 \text{ pour } |k| \to \infty\}\,.$$

L'espace $c_0(\mathbf{Z}^N)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un sous-espace fermé de $\ell^\infty(\mathbf{Z}^N)$: c'est donc également un espace de Banach.

– pour $1 \leq p < \infty$, on note l'espace des suites p-sommables

$$\ell^\infty(\mathbf{Z}^N) = \left\{ x \,:\, \mathbf{Z}^N \to \mathbf{K} \mid \sum_{k \in \mathbf{Z}^N} |x(k)|^p < +\infty \right\} .$$

On vérifie que

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}^N} |x(k)|^p \right)^{1/p}$$

définit bien une norme sur $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$ (le seul point non trivial, pour $p > 1$ est l'inégalité triangulaire qui, dans ce cas particulier, porte le nom d'inégalité de Minkowski, que nous établirons plus loin). Alors $\ell^\infty(\mathbf{Z}^N)$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach.
Deux cas particuliers importants de ces espaces, que l'on rencontre souvent en Analyse de Fourier, sont $\ell^1(\mathbf{Z}^N)$ et $\ell^2(\mathbf{Z}^N)$.

1.3.2 Séries dans les espaces de Banach

On sait que dans **R** ou **C**, les séries absolument convergentes sont convergentes ; on sait également qu'une série normalement convergente de fonctions continues est uniformément convergente vers une limite continue.

Plus généralement

Définition 1.3.6 *Soit E evn et (x_n) suite de E. On dit que la série*

$$\sum_{n \geq 0} x_n \ \textit{est convergente}$$

ssi la suite des sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n \ \textit{est convergente.}$$

On dit que la série

$$\sum_{n \geq 0} x_n \ \textit{est normalement convergente}$$

ssi la suite des sommes partielles

$$\sum_{n \geq 0} \|x_n\| < \infty .$$

Proposition 1.3.7 *Dans un espace de Banach, toute série normalement convergente est convergente.*

Démonstration. En effet, si la série

$$\sum_{n\geq 0} x_n \text{ est normalement convergente}$$

alors, pour tout $p \geq 0$

$$\|S_{N+p} - S_N\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{N+p} x_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} \|x_n\| \leq \sum_{n\geq N+1} \|x_n\| = R_N \to 0$$

comme reste d'une série convergente. Ainsi la suite (S_N) est de Cauchy, et donc convergente puisque l'espace ambiant est un Banach. ■

En appliquant ce résultat aux espaces de fonctions continues $C_b(X, \mathbf{K}^N)$, $C_0(E, \mathbf{K}^N)$, $C(K, \mathbf{K}^N)$ présentés ci-dessus, on retrouve les résultats classiques sur la convergence normale et uniforme des séries de fonctions.

La réciproque de cette proposition est également vraie :

Proposition 1.3.8 *Un evn où toute série normalement convergente est convergente est un espace de Banach*

Démonstration. Soit (x_n) suite de Cauchy de E ; nous allons construire une sous-suite de (x_n) qui converge. D'après la Proposition 1.1.2, tout la suite (x_n) sera donc convergente.

Puisque (x_n) est de Cauchy, il existe $N_1 \geq 1$ tq.

$$\|x_n - x_m\| \leq \tfrac{1}{2} \text{ pour tous } m, n \geq N_1 \,.$$

Puis il existe $N_2 > N_1$ tq.

$$\|x_n - x_m\| \leq \tfrac{1}{4} \text{ pour tous } m, n \geq N_2 \,.$$

Par récurrence, on construit une suite croissante d'entiers $N_1 < N_2 < \dots$ telle que

$$\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k} \text{ pour tous } m, n \geq N_k \,.$$

En particulier

$$\|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\| \leq 2^{-k} \,.$$

La série

$$\sum_{k\geq 1} (x_{N_{k+1}} - x_{N_k})$$

étant normalement convergente, elle admet une limite dans E, que nous noterons S. De plus, cette série est télescopique :

$$S_j = \sum_{k=1}^{j} (x_{N_{k+1}} - x_{N_k}) = x_{N_j} - x_{N_1}$$

de sorte que

$$x_{N_j} \to x_{N_1} + S \text{ lorsque } j \to \infty \,.$$

Ainsi (x_n) admet une sous-suite convergente, cqfd. ■

1.4 Compacité et espaces de Banach

Une différence topologique fondamentale entre evn de dimension finie et evn de dimension infinie réside dans la caractérisation des parties compactes.

Théorème 1.4.1 *Dans un evn de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.*

Comme on l'a déjà dit, si E est un evn de dimension N, il existe un isomorphisme bicontinu de E sur $\mathbf{K}^N$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ pour lequel le résultat est déjà connu, puisque c'est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass.

En revanche

Théorème 1.4.2 (F. Riesz) *Dans un evn de dimension infinie, la boule unité fermée n'est jamais compacte.*

Commençons par la remarque suivante :

Lemme 1.4.3 *Soit F fermé dans un espace métrique (X,d), et $x \in X \setminus F$. Alors*

$$d(x,F) := \inf_{y\in F} d(x,y) > 0\,.$$

Démonstration du lemme. En général, l'inf n'est pas atteint. Mais il existe $y_n \in F$ tel que $d(x,y_n) \to d(x,F) \geq 0$. Si $d(x,F)=0$, alors $d(x,y_n)\to 0$ pour $n\to\infty$. Donc $y_n \to x$ pour $n\to\infty$; comme $y_n \in F$ et F est fermé, $x\in F$. ■

Passons maintenant à la preuve du théorème de Riesz.

Démonstration. Soit E evn de dimension infinie : on peut donc construire par récurrence une famille libre $\{e_1,e_2,\ldots,e_n,\ldots\}$. Posons $E_n = \mathrm{Vect}\{e_1,\ldots,e_n\}$. Pour tout $n\geq 1$, on va construire

$$x_{n+1}\in E_{n+1} \text{ tel que } \|x_{n+1}\| = 1 \text{ et } d(x_{n+1},E_n) > \tfrac{1}{2}\,.$$

En effet $E_n \neq E_{n+1}$, donc il existe $v_{n+1}\in E_{n+1}\setminus E_n$. Donc $d(v_{n+1},E_n) = r > 0$. Il existe donc $w_n \in E_n$ tq.

$$r \leq \|v_{n+1}-w_n\| < 2r\,.$$

Posons

$$x_{n+1} = \frac{v_{n+1}-w_n}{\|v_{n+1}-w_n\|}\,;$$

$x_{n+1}\in E_{n+1}$ car $E_n\subset E_{n+1}$ et, pour tout $z\in E_n$,

$$\|x_{n+1}-z\| = \frac{\|v_{n+1}-(w_n+\|v_{n+1}-w_n\|z)\|}{\|v_{n+1}-w_n\|} \geq \frac{r}{2r} = \tfrac{1}{2}\,,$$

car $w_n + \|v_{n+1}-w_n\|z \in E_n$ et $d(v_{n+1},E_n) = r$.

En particulier, la suite (x_n) ainsi construite vérifie

$$x_n \in \overline{B(0,1)} \text{ et } \|x_m - x_n\| \geq \tfrac{1}{2} \text{ pour tous } m,n\geq 1 \text{ tq. } m\neq n\,.$$

Donc cette suite n'admet aucune sous-suite qui soit de Cauchy, et donc a fortiori aucune sous-suite convergente. ■

Dans un espace de Banach de dimension infinie, on ne dispose pas de critère général de compacité.

Voici toutefois un exemple canonique de partie compacte dans un espace de dimension infinie. Soient un entier $N \geq 1$ et $1 \leq p < \infty$; on choisit une application

$$q : \mathbf{Z}^N \to [1, +\infty[\text{ telle que } q(k) \to \infty \text{ pour } |k| \to \infty\,.$$

Posons

$$C(q) = \{x \in \ell^p(\mathbf{Z}^N) \,|\, qx \in \ell^p(\mathbf{Z}^N) \text{ et } \|qx\|_p \leq 1\}\,.$$

L'ensemble ainsi construit s'appelle un "cube de Hilbert".

Proposition 1.4.4 *L'ensemble $C(q)$ est compact dans $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$.*

Démonstration. D'abord, vérifions que $C(q)$ est fermé dans $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$: soit (x_n) suite de $C(q)$ telle que $\|x_n - x\|_p \to 0$. Alors, pour tout $R > 0$, on a

$$\begin{aligned}\left(\sum_{|k|\leq R} q(k)^p |x(k)|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{|k|\leq R} q(k)^p |x_n(k)|^p\right)^{1/p} \\ &+ \left(\sum_{|k|\leq R} q(k)^p |x_n(k) - x(k)|^p\right)^{1/p} \\ &\leq 1 + \|x_n - x\|_p \sup_{|k|\leq R} q(k)\,.\end{aligned}$$

Le membre de gauche de cette inégalité ne dépend pas de n ; en passant à la limite en $n \to +\infty$ dans le second membre à R fixé, on trouve que

$$\left(\sum_{|k|\leq R} q(k)^p |x(k)|^p\right)^{1/p} \leq 1\,;$$

puis, en passant au sup en $R > 0$, on trouve que

$$\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}^N} q(k)^p |x(k)|^p\right)^{1/p} \leq 1\,,$$

d'où $x \in C(q)$. Ainsi, $C(q)$ est une partie fermé du Banach $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$: donc $C(q)$ est complet.

Montrons maintenant que $C(q)$ est précompact.

Soit $\epsilon > 0$; puisque $q(k) \to \infty$ pour $|k| \to \infty$, il existe $R > 0$ tel que

$$\text{pour tout } k \in \mathbf{Z}^N \text{ tq. } |k| > R\,, \quad q(k) > \frac{1}{\epsilon}\,.$$

Pour $R > 0$ ainsi choisi, considérons maintenant

$$C_R(q) = \{x \in C(q) \,|\, x(k) = 0 \text{ pour } |k| > R\}\,.$$

Comme $q \geq 1$, $C_R(q)$ est contenu dans la boule unité du sous-espace

$$\ell^p_R(\mathbf{Z}^N) = \{x \in \ell^p(\mathbf{Z}^N) \,|\, x(k) = 0 \text{ pour } |k| > R\}\,,$$

qui est de dimension finie — en fait

$$\ell^p_R(\mathbf{Z}^N) \simeq \mathbf{K}^D$$

où D est le nombre d'éléments $k \in \mathbf{Z}^N$ de norme $|k| \leq R$. Donc $C_R(q)$ est précompact

Or, pour tout $x \in C(q)$, notons x^R la suite définie par

$$x^R(k) = x(k) \text{ si } |k| \leq R\,, \quad x^R(k) = 0 \text{ si } |k| > R\,.$$

Clairement

$$x^R \in C_R(q) \text{ si } x \in C(q)\,.$$

De plus, par définition de R

$$\|x - x^R\|_p = \left(\sum_{|k|>R} |x(k)|^p\right)^{1/p} \leq \epsilon \left(\sum_{|k|>R} q(k)^p |x(k)|^p\right)^{1/p} \leq \epsilon \|qx\|_p \leq \epsilon\,.$$

On vient donc de montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R > 0$ et une partie précompacte $C_R(q)$ de $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$ tq.

$$\text{pour tout } x \in C(q) \text{ on a } d(x, C_R(q)) < \epsilon\,.$$

D'après le Corollaire 1.2.5, $C(q)$ est précompact, cqfd. ■

Un autre exemple très important de critère de compacité en Analyse est le théorème d'Ascoli.

Définition 1.4.5 *Soit (K, d) un espace métrique et F un evn. On dit qu'une partie $A \subset C(K, F)$ est équicontinue si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha(\epsilon) > 0$ tel que*

$$\|f(x) - f(y)\|_F < \epsilon \text{ pour tout } x, y \in K \text{ tq. } d(x, y) < \alpha(\epsilon)\,.$$

Voici un exemple de partie équicontinue d'un usage très fréquent en Analyse : soient $L > 0$ et F un evn. Soit $c > 0$; on pose

$$A_c = \{f \in C^1([0, L], F) \,|\, \sup_{0 \leq x \leq L} \|f'(x)\|_F \leq c\}\,.$$

Alors, pour tout $f \in A_c$, $x, y \in [0, L]$

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq c|x - y| < \epsilon \text{ dès que } |x - y| \leq \alpha(\epsilon) := \tfrac{\epsilon}{c}$$

De façon plus générale, le même argument montre qu'étant donné $k > 0$, l'ensemble des applications k-lipschitziennes de $[0, L]$ dans F est équicontinu.

Théorème 1.4.6 (Ascoli) *Soient (K, d) un espace métrique compact et F un espace de Banach. Soit $A \subset C(K, F)$; pour tout $x \in K$, on note*

$$A(x) = \{f(x) \mid f \in A\} .$$

Supposons que
a) pour tout $x \in K$, $\overline{A(x)}$ est compact dans F ;
b) A est équicontinue en tout point de K.
Alors $\overline{A}$ est compact dans $C(K, F)$ pour la norme du sup.

Démonstration. Il suffit de montrer que A est précompact.

Soit $\epsilon > 0$ et $\alpha(\epsilon) > 0$ le module d'équicontinuité associé pour A.

Comme K est compact, il existe un recouvrement fini de K par des boules de rayon $\alpha(\epsilon)$:

$$K \subset \bigcup_{1 \le i \le M} B_K(x_i, \alpha(\epsilon)) , \text{ avec } x_1, \ldots, x_M \in K .$$

Les ensembles $A(x_i)$ sont précompacts pour $i = 1, \ldots, M$; donc, pour tout $i = 1, \ldots, M$, on a

$$A(x_i) \subset \bigcup_{1 \le j \le N} B_F(y_{i,j}, \epsilon) , \text{ avec } y_{i,1}, \ldots, y_{i,N} \in F .$$

A toute application $\phi\colon \{1, \ldots, M\} \to \{1, \ldots, N\}$, on associe

$$B_\phi = \{f \in A \mid f(x_i) \in B_F(y_{i,\phi(i)}, \epsilon) ,\ i = 1, \ldots, M\} .$$

Clairement

$$A \subset \bigcup_{\phi\colon \{1,\ldots,M\} \to \{1,\ldots,N\}} B_\phi ;$$

d'autre part, la famille des B_ϕ compte au plus N^M éléments — certains B_ϕ peuvent être vides.

Enfin, soient $f, g \in B_\phi$ quelconques, et soit $x \in K$. Forcément x appartient à l'une des boules couvrant K, disons à $B_K(x_i, \alpha(\epsilon))$: alors

$$\|f(x)-g(x)\|_F \le \|f(x)-f(x_i)\|_F+\|f(x_i)-g(x_i)\|_F+\|g(x_i)-g(x)\|_F \le \epsilon+2\epsilon+\epsilon = 4\epsilon .$$

En effet, les deux termes extrêmes du membre de droite de la première inégalité sont majorés par ϵ par équicontinuité de A ; et comme f et g appartiennent à B_ϕ, on a

$$f(x_i) \text{ et } g_(x_i) \in B_F(y_{i,\phi(i)}, \epsilon) , \text{ d'où } \|f(x_i) - g(x_i)\|_F < 2\epsilon .$$

Donc

$$\sup_{x \in K} \|f(x) - g(x)\|_F < 4\epsilon \text{ pour tout } (f, g) \in B_\phi \times B_\phi ,$$

ce qui veut dire que

$$\operatorname{diam} B_\phi \le 4\epsilon .$$

En conclusion, pour tout $\epsilon > 0$, on a construit un recouvrement de K par au plus N^M ensembles B_ϕ de diamètre au plus 4ϵ, cqfd. ∎

1.5 Espaces d'applications linéaires.

Soient E et F deux evn, et $T : E \to F$ une application linéaire.

Proposition 1.5.1 *L'application linéaire T est continue de E dans F ssi elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*
a) T est continue en 0 ;
b) T est bornée sur la boule unité de E ;
c) T est bornée sur la sphère unité de E ;
d) il existe $C > 0$ tq. pour tout $x \in E$, on a

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E \,.$$

Démonstration. Clairement b) implique c) ; d'autre part, c) implique d) avec $C = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F$ puisque, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a

$$\left\| T\frac{x}{\|x\|_E} \right\|_F = \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq C \,.$$

Ensuite d) implique que T est C-lipschitzienne de E dans F, donc continue (et même uniformément continue). Elle vérifie donc a).

Il reste donc à vérifier que a) implique b).

Soit donc $\epsilon > 0$; puisque T est continue en 0, il existe $\alpha > 0$ tq

$$\|Tx\|_F < \epsilon \text{ pour tout } x \in E \text{ tq.} \|x\|_E \leq \alpha \,.$$

Donc, pour tout $u \in \overline{B(0,1)}$, on a $\|\alpha u\|_E \leq \alpha$ et de sorte que

$$\|Tu\|_F \leq \frac{\epsilon}{\alpha} \,,$$

ce qui établit b). ■

On remarque qu'on n'a pas utilisé la compacité de la boule unité de E — propriété qui est fausse en dimension infinie d'après le théorème de Riesz.

On notera $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. On appelle souvent "opérateurs bornés de E dans F" les éléments de $\mathcal{L}(E,F)$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace $\mathcal{L}(E,E)$.

Définition 1.5.2 *La norme de T, notée $\|T\|$, est la meilleure constante C dans le d) ci-dessus ; autrement dit*

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|z\|_E=1} \|Tz\|_F \,.$$

On vérifie que $T \mapsto \|T\|$ définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$. Lorsqu'il y a risque d'ambiguité, on notera aussi cette norme $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Proposition 1.5.3 *Lorsque F est un espace de Banach, $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la norme des applications linéaires continues de E dans F est un espace de Banach.*

Démonstration. En effet : si (T_n) est une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(E, F)$, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n x)$ est de Cauchy dans F ; elle admet donc une limite que l'on note Tx. On vérifie sans peine que T, limite simple d'applications linéaires de E dans F est elle-même une application linéaire.

Puis la suite des restrictions $(T_n|_{\overline{B_E(0,1)}})$ est une suite de Cauchy dans l'espace des applications continues bornées de $\overline{B_E(0,1)}$ à valeurs dans l'espace complet F. Cet espace étant lui-même un Banach, la suite $(T_n|_{\overline{B_E(0,1)}})$ converge unformément vers une application continue bornée qui coïncide avec $T|_{\overline{B_E(0,1)}}$. En particulier l'application linéaire T est continue en 0, donc de E dans F. ∎

Les propriétés suivantes sont évidentes :

Proposition 1.5.4 *Soient E, F, G trois evn. Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $ST \in \mathcal{L}(E, G)$ et on a*

$$\|ST\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|S\|_{\mathcal{L}(F,G)} .$$

1.5.1 L'algèbre $\mathcal{L}(E)$

Un premier cas particulier important est celui des opérateurs bornés d'un evn dans lui-même.

Définition 1.5.5 *On dit qu'un élément $T \in \mathcal{L}(E)$ est inversible si T est une application linéaire bijective de l'espace vectoriel E dans lui-même et que de plus l'application linéaire réciproque T^{-1} est continue.*

La proposition ci-dessus montre que si $T \in \mathcal{L}(E)$ est inversible, alors

$$\|T\| \|T^{-1}\| \geq 1 .$$

Théorème 1.5.6 *Soit E un espace de Banach. Alors l'ensemble des applications linéaires inversibles dans $\mathcal{L}(E)$ est un ouvert.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ inversible ; alors tout opérateur $S \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\|S - T\| < \tfrac{1}{\|T^{-1}\|}$$

est également inversible. Soit $y \in E$; considérons l'application

$$f : E \to E \quad x \mapsto T^{-1}y - T^{-1}(S - T)x .$$

L'application f est k-lipschitzienne sur l'espace complet E, de rapport $k = \|T^{-1}\| \|S - T\| < 1$. D'après le théorème du point fixe, f admet donc un point fixe unique $x_y \in E$: clairement

$$Tf(x_y) = y - (S - T)x_y = Tx_y \, , \text{ soit } Sx_y = y .$$

L'application linéaire S est donc bijective : notons S^{-1} la bijection réciproque, qui est également linéaire.

Montrons que S^{-1} est continue :

$$x_y = T^{-1}y - T^{-1}(S-T)x_y\,,\ \text{d'où}\ \|x_y\| \le \|T^{-1}\|\|y\| + \|T^{-1}\|\|(S-T)\|\|x_y\|$$

et comme $\|T^{-1}\|\|(S-T)\| < 1$, on a

$$\|S^{-1}y\| = \|x_y\| \le \frac{\|T^{-1}\|\|y\|}{1 - \|T^{-1}\|\|(S-T)\|}\,.$$

Donc S^{-1} est continue de norme

$$\|S^{-1}\| \le \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|T^{-1}\|\|(S-T)\|}\,,$$

cqfd. ■

Un cas particulier du résultat ci-dessus est celui où $T = Id_E$; soit $W = Id_E - S$. En supposant que $\|W\| = \|Id_E - S\| < 1$, on voit que la série

$$\sum_{n\ge 0} W^n$$

converge normalement dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E)$; elle converge donc, et sa limite vaut précisément

$$S^{-1} = \sum_{n\ge 0} W^n\,.$$

De plus

$$\|S^{-1}\| \le \sum_{n\ge 0} \|W\|^n = \frac{1}{1 - \|W\|}\,.$$

1.5.2 Formes linéaires continues

Un autre cas particulier important d'opérateurs bornés entre evn est celui où l'espace d'arrivée est le corps de base.

Définition 1.5.7 *Lorsque E est un espace de Banach, on note $E' = \mathcal{L}(E, K)$, qui est appelé le dual topologique de E, et $\|T\|_{E'}$ (ou simplement $\|T\|$ lorsqu'il n'y a pas de risque d'ambiguité) la norme d'application linéaire continue de la forme lináire T.*

Les formes linéaires continues sur un evn E sont les équations des hyperplans fermés de E.

Proposition 1.5.8 *Soit E un evn, et H un sev de E. Alors H est un hyperplan fermé de E ssi il existe $\phi \in E' \setminus \{0\}$ telle que $H = \operatorname{Ker}\phi$.*

Démonstration. On rappelle qu'un sev F de E est un hyperplan de E ssi il existe $f \in E^*$ (le dual algébrique de E) non nulle telle que $F = \operatorname{Ker} f$.

Si $\phi \in E' \setminus \{0\}$, alors $\operatorname{Ker}\phi$ est un hyperplan de E ; il est de plus fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ dans $\mathbf{K}$ par l'application continue ϕ.

Réciproquement, soit H un hyperplan fermé de E : il existe donc $\phi \in E^* \setminus \{0\}$ tq. $H = \operatorname{Ker}\phi$; soit $a \in E \setminus H$: on a donc $\phi(a) \neq 0$, et en changeant a en $a/\phi(a)$, on se ramène au cas où $\phi(a) = 1$.

D'après le Lemme 1.4.3

$$\inf_{x \in H} \|a - x\|_E = r > 0\,.$$

Donc, pour tout $\lambda \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$ et tout $x \in H$, on a

$$\|\lambda a + x\|_E = |\||l\|a - \tfrac{1}{\lambda}(-x)\|_E \geq |\lambda| r$$

autrement dit

$$\|\lambda a + x\|_E \geq r|\phi(\lambda a + x)|\,.$$

Comme tout élément de E se met de façon unique sous la forme $z = \lambda a + x$ avec $\lambda \in \mathbf{K}$ et $x \in H$, on a ainsi montré que

$$|\phi(z)| \leq \tfrac{1}{r}\|z\|_E \text{ pour tout } z \in E\,.$$

Donc ϕ est continue. ∎

1.5.3 Opérateurs compacts

Une généralisation immédiate des formes linéaires continues consiste à considérer les opérateurs de rang fini.

Soient donc E et F deux evn, et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $\operatorname{Im} T$ soit de dimension finie — donc fermé. Donc $\overline{T(B_E(0,1))}$ est fermé et borné dans l'espace de dimension finie $\operatorname{Im} T$: il est donc compact.

Plus généralement

Définition 1.5.9 *Soient E et F deux evn, et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que T est un opérateur compact si*

$$\overline{T(B_E(0,1))} \textit{ est une partie compacte de } F\,.$$

On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F ; on vérifie trivialement que $\mathcal{K}(E, F)$ est un sev de $\mathcal{L}(E, F)$; dans le cas où $E = F$, on note $\mathcal{K}(E)$ l'espace $\mathcal{K}(E, E)$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la définition, et du fait que l'image d'un compact par une application continue est compacte (cf. Proposition 1.2.8).

Proposition 1.5.10 *Soient E_1, E_2, E_3 des evn et $T_j \in \mathcal{L}(E_j, E_{j+1})$ pour $j = 1, 2$. Si T_1 ou T_2 est compact, alors $T_2 \circ T_1$ est un opérateur compact de E_1 dans E_3.*

D'après le théorème de Riesz, pour tout evn de dimension infinie E, l'identité Id_E n'est jamais un opérateur compact de E dans E.

La proposition ci-dessus montre que si $T \in \mathcal{L}(E)$ est inversible, alors T n'est pas un opérateur compact sur E.

Enfin, $\mathcal{K}(E,F)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E,F)$ pour la topologie normique.

Proposition 1.5.11 *Soient E un evn, F un espace de Banach, et $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F. Supposons qu'il existe $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tq.*

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0 \textit{ pour } n \to \infty\,.$$

Alors T est un opérateur compact de E dans F.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $T(B_E(0,1))$ est précompact dans F. Soit donc $\epsilon > 0$ arbitraire.

Puisque $T_n \to T$ dans $\mathcal{L}(E,F)$ pour $n \to \infty$, il existe $N > 0$ tq.

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \epsilon \text{ pour tout } n \geq N(\epsilon)\,.$$

Or $T_{N(\epsilon)}$ est un opérateur compact de E dans F, de sorte que $T_{N(\epsilon)}(B_E(0,1))$ est précompact dans F.

D'après ce qui précède, pour tout $x \in B_E(0,1)$,

$$\operatorname{dist}(Tx, T_{N(\epsilon)}(B_E(0,1))) \leq \|Tx - T_{N(\epsilon)}x\|_F \leq \|T - T_{N(\epsilon)}\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E < \epsilon\,.$$

En posant $K_\epsilon = T_{N(\epsilon)}(B_E(0,1))$ qui est précompact dans F, on trouve que, pour tout $z \in T(B_E(0,1))$, on a $\operatorname{dist}(z, K_\epsilon) < \epsilon$.

On conclut en appliquant le corollaire 1.2.5. ∎

Chapitre 2

Espaces L^p

2.1 Rappels d'intégration

Dans ce cours, il sera exclusivement question d'intégration sur $\mathbf{R}^N$ pour la mesure de Lebesgue.

Un pavé de $\mathbf{R}^N$ est un ensemble de la forme

$$P(a,b) = [a_1, b_1[\times \ldots \times [a_N, b_N[\text{ où } a, b \in \mathbf{R}^N \text{ avec } a_j \leq b_j \text{ pour } j = 1, \ldots, N\,.$$

On note $|P(a,b)|$ la mesure de ce pavé :

$$|P(a,b)| = \prod_{j=1}^{N} (b_j - a_j)\,.$$

Définition 2.1.1 *Un ensemble E de $\mathbf{R}^N$ est de mesure nulle si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite (P_n) de pavés de $\mathbf{R}^N$ telle que*

$$E \subset \bigcup_{n \geq 0} P_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} |P_n| < \epsilon\,.$$

On vérifie que

Proposition 2.1.2 *Une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est un ensemble de mesure nulle ;*

Toute partie dénombrable de $\mathbf{R}^N$ est de mesure nulle : par exemple, $\mathbf{Q}^N$ est de mesure nulle.

Si $(\mathcal{P}_x)$ est une famille de propriétés indexées par $x \in \mathbf{R}^N$, on dit que $\mathcal{P}_x$ est vraie pp. si

$$\{x \in \mathbf{R}^N \,|\, \mathcal{P}_x \text{ est fausse }\} \text{ est un ensemble de mesure nulle.}$$

Par exemple, étant donnée une fonction $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$, on dira que $f(x) \geq 0$ pp. si

$$\{x \in \mathbf{R}^N \,|\, f(x) < 0\} \text{ est un ensemble de mesure nulle.}$$

Comme pour l'intégrale de Riemann, on construit l'intégrale de Lebesgue à partir des fonctions en escalier, pour lesquelles la notion d'intégrale est évidente.

Définition 2.1.3 *Une fonction en escalier à support compact de $\mathbf{R}^N$ est une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques de pavés de $\mathbf{R}^N$ deux à deux disjoints. On notera $E_c(\mathbf{R}^N)$ l'espace vectoriel des fonctions en escalier à support compact sur $\mathbf{R}^N$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.*

Rappelons la notion de fonction mesurable :

Définition 2.1.4 *On dit que $f : \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est mesurable si il existe une suite (ϕ_n) de fonctions de $E_c(\mathbf{R}^N)$ telle que*

$$\phi_n(x) \to f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}^N \text{ lorsque } n \to \infty\,.$$

Les fonctions mesurables vérifient les propriétés suivantes :

Proposition 2.1.5 *a) Soient f et g deux fonctions mesurables sur $\mathbf{R}^N$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Alors $f+g$, fg sont mesurables ; plus généralement, pour tout $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continue, l'application composée $x \mapsto \Phi(f(x), g(x))$ est mesurable.*

b) Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur $\mathbf{R}^N$; alors les fonctions

$$x \mapsto \sup_{n\geq 0}(f_n(x))\,, \quad x \mapsto \inf_{n\geq 0}(f_n(x))$$

sont mesurables, ainsi que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x) = \inf_{n\geq 0}\sup_{k\geq n}(f_k(x)) \text{ et } \underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x) = \sup_{n\geq 0}\inf_{k\geq n}(f_k(x))\,.$$

En particulier

$$\text{si } f_n(x) \to f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}^N\,, \text{ alors } f \text{ est mesurable.}$$

c) Soit f fonction mesurable sur $\mathbf{R}^N$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ telle que $f(x) \neq 0$ pp. en $x \in \mathbf{R}^N$, et $\Phi : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors $\Phi \circ f$ est mesurable. Par exemple, $1/f$ et $\ln|f|$ sont mesurables sur $\mathbf{R}^N$.

On rappelle la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier à support compact :

$$\text{si } \phi(x) = \sum_{j=1}^n \phi_j \mathbf{1}_{P_j}\,, \text{ alors } \int_{\mathbf{R}^N} \phi(x)dx = \sum_{j=1}^n \phi_j |P_j|\,.$$

On définit ensuite l'intégrale d'une fonction mesurable positive :

Définition 2.1.6 *Soit $f : \mathbf{R}^N \to [0, +\infty]$; l'intégrale de f est définie comme suit :*

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx = \sup\left\{ \int_{\mathbf{R}^N} \phi(x)dx \,\middle|\, \phi \in E_c(\mathbf{R}^N) \text{ et } 0 \leq \phi \leq f \text{ pp.} \right\}\,.$$

Ainsi, l'intégrale d'une fonction mesurable positive est toujours un élément bien défini de $[0, +\infty]$; il se peut que

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx = +\infty \, .$$

Théorème 2.1.7 (de convergence monotone) *Soit f_n suite croissante de fonctions mesurables positives sur $\mathbf{R}^N$. Alors*

$$\int_{\mathbf{R}^N} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^N} f_n(x)dx \, .$$

Lemme 2.1.8 (Fatou) *Soit f_n suite de fonctions mesurables positives sur $\mathbf{R}^N$. Alors*

$$\int_{\mathbf{R}^N} \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx = \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^N} f_n(x)dx \, .$$

On définit ensuite la classe des fonctions sommables :

Définition 2.1.9 *Soit $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable. On dit que f est sommable si*

$$\int_{\mathbf{R}^N} |f(x)|dx < \infty \, .$$

On définit alors l'intégrale d'une fonction sommable f comme suit : pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, on pose

$$\begin{aligned} f^+(x) = \sup(f(x), 0) \quad &= \tfrac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) \, , \\ f^-(x) = \sup(-f(x), 0) \quad &= \tfrac{1}{2}(|f(x)| - f(x)) \, . \end{aligned}$$

On a donc

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \text{ et } |f(x)| = f^+(x) + f^-(x) \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}^N \, .$$

Définition 2.1.10 *Alors, si $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ est sommable, f^+ et f^- sont des fonctions sommables positives et on pose*

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^N} f^+(x)dx - \int_{\mathbf{R}^N} f^-(x)dx$$

Une fonction $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ est sommable si $\Re f$ et $\Im f$ sont sommables, ce qui équivaut au fait que

$$\int_{\mathbf{R}^N} |f(x)|dx < \infty \, .$$

Dans ce cas, on pose

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^N} \Re f(x)dx + i \int_{\mathbf{R}^N} \Im f(x)dx \, .$$

Le résultat fondamental sur les fonctions sommables est le suivant :

Théorème 2.1.11 (de convergence dominée) *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur $\mathbf{R}^N$ tq.*

a) $f_n(x) \to f(x)$ pp. en $x \in \mathbf{R}^N$;

b) il existe une fonction sommable g telle que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}^N \text{ et pour tout } n \geq 0\,.$$

Alors f est sommable et

$$\int_{\mathbf{R}^N} f_n(x)dx \to \int_{\mathbf{R}^N} f_n(x)dx \text{ pour } n \to \infty\,.$$

On note $S^1(\mathbf{R}^N)$ l'ensemble des fonctions sommables sur $\mathbf{R}^N$; c'est un espace vectoriel, et

$$f \mapsto \int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx$$

définit une forme linéaire sur $S^1(\mathbf{R}^N)$.

De plus cette forme linéaire est positive sur es fonctions positives : plus précisément, si $f:\ \mathbf{R}^N \to [0,\infty|$ est mesurable, alors

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx \geq 0$$

et

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx \geq 0 \text{ ssi } f(x) = 0 \text{ pp. en } x\,.$$

Considérons maintenant $f\ : \mathbf{R}^{N_1+N_2} \to \mathbf{C}$ comme fonction de deux variables $f(x) = f(x_1, x_2)$, en identifiant $\mathbf{R}^{N_1+N_2}$ au produit cartésien $\mathbf{R}^{N_1} \times \mathbf{R}^{N_2}$.

Théorème 2.1.12 (Tonelli) *Soit $f\ : \mathbf{R}^{N_1+N_2} \to [0,+\infty]$ mesurable. Alors la fonction $f(x_1,\cdot)$ est mesurable pp. en x_1 ; de plus l'application*

$$F_1:\ x_1 \mapsto \int_{\mathbf{R}^{N_2}} f(x_1,x_2)dx_2$$

définie pp. en x_1 est mesurable sur $\mathbf{R}^{N_1}$ et on a

$$\int_{\mathbf{R}^{N_1+N_2}} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^{N_1}} F_1(x_1)dx_1\,.$$

Enonçons maintenant le théorème de Fubini

Théorème 2.1.13 (Fubini) *Soit $f \in S^1(\mathbf{R}^{N_1+N_2})$. Alors la fonction $f(x_1,\cdot)$ est sommable sur $\mathbf{R}^{N_2}$ pour presque tout $x_1 \in \mathbf{R}^{N_1}$; de plus la fonction*

$$F_1:\ x_1 \mapsto \int_{\mathbf{R}^{N_2}} f(x_1,x_2)dx_2$$

définie pour presque tout $x_1 \in \mathbf{R}^{N_1}$ est sommable et on a

$$\int_{\mathbf{R}^{N_1+N_2}} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^{N_1}} F_1(x_1)dx_1\,.$$

Evidemment dans les deux théorèmes précédent, ce qui a été dit de F_1 vaut aussi pour

$$F_2 : x_2 \mapsto \int_{\mathbf{R}^{N_1}} f(x_1, x_2) dx_1$$

qui est définie pour presque tout $x_2 \in \mathbf{R}^{N_2}$, et on a, dans les deux cas

$$\int_{\mathbf{R}^{N_1+N_2}} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^{N_2}} F_1(x_2)dx_2 .$$

Un ensemble $X \subset \mathbf{R}^N$ est dit mesurable si sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_X$ est une fonction mesurable. Les ensembles $\emptyset, \mathbf{R}^N$ sont mesurables ; une réunion dénombrable, ou bien une intersection dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable ; le complémentaire d'un ensemble mesurable dans $\mathbf{R}^N$ est mesurable.

Pour $X \subset \mathbf{R}^N$ mesurable, on définit sa mesure, notée $|X|$, par

$$|X| = \int_{\mathbf{R}^N} \mathbf{1}_X(x)dx .$$

Etant donnés f mesurable sur $\mathbf{R}^N$ à valeurs dans $[0, \infty]$, ou bien à valeurs dans $\mathbf{C}$ et sommable, et $X \subset \mathbf{R}^N$ mesurable, on pose

$$\int_X f(x)dx := \int_{\mathbf{R}^N} \mathbf{1}_X(x)f(x)dx .$$

Réciproquement, étant donné $X \subset \mathbf{R}^N$ mesurable, on dira qu'une fonction f définie sur X est mesurable ssi son prolongement F par 0 à $\mathbf{R}^N$ est mesurable.

On dira que f est sommable sur X ssi F est sommable sur $\mathbf{R}^N$. On définit ainsi l'espace vectoriel $S^1(X)$, et

$$\int_X f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^N} F(x)dx .$$

Tout ce qui été dit plus haut sur les intégrales de fonctions mesurables définies sur $\mathbf{R}^N$ se transpose aux fonctions mesurables définies sur une partie mesurable X de $\mathbf{R}^N$.

Citons enfin une inégalité élémentaire mais très utile :

INÉGALITÉ DE BIENAIMÉ-TCHEBYCHEV

Pour $f \in S^1(X)$ et $\lambda > 0$, l'ensemble $\{x \in X \mid |f(x)| > \lambda\}$ est mesurable et de mesure

$$|\{x \in X \mid |f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda} \int_X |f(x)|dx .$$

2.2 Espaces L^p

Soit $X \subset \mathbf{R}^N$ un ensemble mesurable, de mesure $|X| > 0$. Pour $p \in [1, \infty[$, on note l'espace des applications p-sommables

$$S_p(X) = \left\{ f : X \mapsto \mathbf{C} \text{ mesurable } \mid \int_X |f(x)|^p dx < \infty \right\} .$$

La fonction

$$]0,\infty[\ni z \mapsto z^p \in]0,\infty[$$

étant convexe, pour tout $x \in X$

$$\left(\frac{|f(x)+g(x)|}{2}\right)^p \leq \tfrac{1}{2}(|f(x)|^p + |g(x)|^p)\,.$$

Donc, si $f, g \in S^p(X)$

$$\int_X |f(x)+g(x)|^p dx \leq 2^{p-1}\int_X (|f(x)|^p + |g(x)|^p) dx < \infty$$

de sorte que $f+g \in S^p(X)$. On vérifie alors que $S^p(X)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$.

2.2.1 Inégalités de Jensen, de Hölder et de Minkowski

Soit $m \in S^1(X)$ telle que

$$m(x) \geq 0 \text{ p.p., and } \int_X m(x)dx = 1\,.$$

Soit $\phi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ convexe et continue en 0 ; on sait que ϕ est donc continue sur $\mathbf{R}_+$ et qu'en tout point $z \in]0,\infty[$, la fonction ϕ admet une dérivée à droite $\phi'_d(z)$ et à gauche $\phi'_g(z)$; de plus, pour tout $z \in \mathbf{R}_+$

$$\phi(z) \geq \phi(z_0) + \lambda(z - z_0) \text{ dès que } \lambda \in [\phi'_g(z_0), \phi'_d(z_0)]\,.$$

Inégalité de Jensen

Soit $f : X \to \mathbf{R}_+$ mesurable ; alors

$$\phi\left(\int_X f(x)m(x)dx\right) \leq \int_X \phi(f(x))m(x)dx\,.$$

Démonstration. On pose

$$M = \int_X f(x)m(x)dx\,.$$

Si $M \geq 0$, on a $f(x)m(x) = 0$ p.p., et les deux membres de l'inégalité ci-dessus sont égaux à $\phi(0)$.

Supposons que $M > 0$, et choisissons $\lambda \in [\phi'_g(M), \phi'_d(M)]$: donc on a

$$\phi(z) \geq \phi(M) + \lambda(z - M) \text{ pour tout } z \in \mathbf{R}_+\,.$$

Donc

$$\phi(f(x)) \geq \phi(M) + \lambda(f(x) - M) \text{ pour tout } x \in X\,.$$

En multipliant par $m(x)$ et en intégrant sur X les deux membres de l'inégalité ci-dessus, on trouve que

$$\int_X \phi(f(x))m(x)dx \geq \phi(M) + \lambda \int (f(x) - M)m(x)dx = \phi(M)\,.$$

■

Soit $p \in]1, \infty[$. On notera p' le nombre dual de p, défini par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\,, \quad \text{soit } p' = \frac{p}{p-1}\,.$$

Inégalité de Hölder

Pour tout $(f, g) \in S^p(X) \times S^{p'}(X)$, on a

$$\int_X |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_X |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_X |g(x)|^{p'} dx\right)^{1/p'}\,.$$

Démonstration. D'abord, en changeant f en $|f|$ et g en $|g|$, on peut se ramener au cas où $f \geq 0$ et $g \geq 0$. Si

$$\left(\int_X |g(x)|^{p'} dx\right)^{1/p'} = 0$$

$g(x) = 0$ pp., de sorte que les deux membres de l'inégalité de Hölder sont nuls. On supposera donc que

$$G = \int_X |g(x)|^{p'} dx > 0\,.$$

Posons

$$h(x) = \frac{f(x)g(x)}{g(x)^{p'}} \text{ si } g(x) > 0\,, \text{ et } h(x) = 0 \text{ si } g(x) = 0\,.$$

La fonction h est mesurable, comme limite pp. de la suite de fonctions mesurables

$$h_n(x) = \frac{f(x)g(x)}{\frac{1}{n} + g(x)^{p'}}\,.$$

On applique l'inégalité de Jensen à la fonction h et à la fonction convexe $z \mapsto z^p$:

$$\begin{aligned}\left(\int_X h(x)\tfrac{g(x)^{p'}}{G}dx\right)^p &= \frac{1}{G^p}\left(\int_X f(x)g(x)dx\right)^p \\ &\leq \int_X h(x)^p \tfrac{g(x)^{p'}}{G}dx = \frac{1}{G}\int_X \frac{f(x)^p g(x)^p}{g(x)^{pp'}} g(x)^{p'} dx\,.\end{aligned}$$

Puisque $p + p' = pp'$, cette inégalité se réduit à

$$\left(\int_X f(x)g(x)dx\right)^p \leq G^{p-1} f(x)^p dx\,.$$

Comme $p-1=p/p'$,

$$G^{p-1}=\left(\int_X |g(x)|^{p'}dx\right)^{p/p'}$$

de sorte que la dernière inégalité ci-dessus se réduit précisément à l'inégalité de Hölder. ■

Lorsque $p=2$, on a $p'=2$ et l'inégalité de Hölder se réduit alors à l'inégalité de Cauchy-Schwarz rappelée ci-dessous.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $(f,g)\in S^p(X)\times S^{p'}(X)$, on a

$$\int_X |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_X |f(x)|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_X |g(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

L'inégalité de Minkowski est également fondamentale : elle jouera le rôle de l'inégalité triangulaire dans les espaces L^p.

Inégalité de Minkowski

Pour tout $(f,g)\in S^p(X)\times S^p(X)$, on a

$$\left(\int_X |f(x)+g(x)|^pdx\right)^{1/p}\le\left(\int_X |f(x)|^pdx\right)^{1/p}+\left(\int_X |g(x)|^pdx\right)^{1/p}.$$

On remarque que cette inégalité est encore vraie — et triviale — pour $p=1$.

Démonstration. On se ramène au cas où $f\ge 0$ et $g\ge 0$ pp., car

$$\int_X |f(x)+g(x)|^pdx \le \int_X (|f(x)|+|g(x)|)^pdx$$

puisque

$$|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)| \text{ pour tout } x\in X\,.$$

Pour commencer,

$$\begin{aligned}\int_X (f(x)+g(x))^pdx &= \int_X (f(x)+g(x))^{p-1}f(x)dx\\ &\quad+\int_X (f(x)+g(x))^{p-1}g(x)dx\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}\int_X (f(x)+g(x))^{p-1}f(x)dx &\le \left(\int_X f(x)^pdx\right)^{1/p}\left(\int_X (f(x)+g(x))^{(p-1)p'}dx\right)^{1/p'}\\ &=\left(\int_X f(x)^pdx\right)^{1/p}\left(\int_X (f(x)+g(x))^pdx\right)^{1-\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

et de même

$$\int_X (f(x)+g(x))^{p-1}g(x)dx \le \left(\int_X g(x)^p dx\right)^{1/p}\left(\int_X (f(x)+g(x))^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_X (f(x)+g(x))^p dx \le &\left(\int_X (f(x)+g(x))^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}}\\ &\times\left(\left(\int_X f(x)^p dx\right)^{1/p}+\left(\int_X g(x)^p dx\right)^{1/p}\right).\end{aligned}$$

Soit

$$\int_X (f(x)+g(x))^p dx = 0$$

auquel cas l'inégalité de Minkowski est triviale, soit

$$\int_X (f(x)+g(x))^p dx > 0$$

auquel cas l'inégalité de Minkowski découle de l'avant-dernière inégalité. ∎

C'est un exercice élémentaire d'énoncer et de démontrer, à partir des inégalités de Jensen, de Minkowski et de Hölder, les inégalités analogues pour les espaces de suite de type $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$, et en particulier de vérifier que $x \mapsto \|x\|_p$ définit bien une norme sur $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$.

2.2.2 L^p comme espace de Banach

Pour $1 \le p < \infty$ et pour tout $f \in S^p(X)$, on pose

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p\right)^{1/p}.$$

Pour $p=1$, $f \mapsto \|f\|_1$ définit évidemment une semi-norme sur l'espace des fonctions sommables $S^1(X)$.

Pour $p \in]0,\infty[$, l'inégalité de Minkowski est l'inégalité triangulaire pour $f \mapsto \|f\|_p$; ainsi $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $S^p(X)$.

Pour $f \in S^p(X)$,

$$\|f\|_p = 0 \text{ ssi } f(x) = 0 \text{ pp.}$$

De plus, si f et $g \in S^p(X)$ et vérifient $f(x) = g(x)$ pp. en $x \in X$, alors on a $\|f\|_p = \|g\|_p$.

Posons

$$\mathcal{N} = \{f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}\,\text{mesurable } \mid f(x) = 0 \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}^N\}\,;$$

clairement, $\mathcal{N}$ est un sev de $S^p(X)$ pour tout $1 \le p < \infty$.

Définition 2.2.1 *On pose $L^p(X) = S^p(X)/\mathcal{N}$; de plus, pour $f \in L^p(X)$, on pose*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f_0(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

où f_0 est un représentant quelconque de la classe d'équivalence f dans $S^p(X)$ — en vertu des remarques ci-dessus, la valeur de $\|f\|_p$ ne dépend pas du choix de ce représentant.

L'inconvénient de cette définition est que, pour un point particulier x_0 fixé, on ne peut pas parler de $f(x_0)$ pour $f \in L^p(X)$: comme f est une classe d'équivalence de fonctions égales pp., la valeur en x_0 d'un représentant de cette classe peut-être absolument quelconque.

Toutefois, cet inconvénient est grandement compensé par le résultat suivant.

Théorème 2.2.2 *Pour $p \in [1, \infty[$, $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur l'espace $L^p(X)$ qui est un espace de Banach pour cette norme.*

Démonstration. Que $f \mapsto \|f\|_p$ est évident, puisqu'on a quotienté $S^p(X)$ précisément par l'ensemble des fonctions annulant $\|\cdot\|_p$ — l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de $\|\cdot\|_p$ sont inchangées par passage au quotient.

Pour montrer que $L^p(X)$ est un Banach, il suffit de prouver que toute série normalement convergente dans $L^p(X)$ est convergente (voir Proposition 1.3.8).

Soit donc (f_n) suite de $L^p(X)$ tq.

$$\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_p < \infty\,.$$

Soit g définie par

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} |f_n(x)| \text{ pp. en } x \in X\,.$$

La fonction g est définie pp. en x, mesurable sur X et à valeurs dans $[0, \infty]$, comme limite d'une suite croissante de fonctions mesurables positives ou nulles.

L'inégalité de Minkowski montre que, pour tout N fini, on a

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} |f_n|\right\|_p \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_p\,.$$

En appliquant le lemme de Fatou, on trouve que

$$\|g\|_p \leq \sum_{n\geq 0} \|f_n\|_p < \infty \text{ d'où en particulier } g(x) \text{ est fini pp. en } x \in X\,,$$

grâce à l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev.

Comme $\mathbf{C}$ est complet et que la série

$$\sum_{n\geq 0} f_n(x)$$

est absolument convergente pp. en $x \in \mathbf{R}^N$, elle est convergente pp. en $x \in \mathbf{R}^N$. Notons alors

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}^N ,$$

et montrons que cette série converge vers f dans $L^p(X)$.

En appliquant à nouveau le lemme de Fatou, on voit que

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} f_n \right\|_p \leq \varliminf_{M\to\infty} \left\| \sum_{n=N+1}^{M} f_n \right\|_p \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_p \to 0 \text{ lorsque } N \to \infty$$

car

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_p \text{ est le reste de la série } \sum_{n\geq 0} \|f_n\|_p < \infty .$$

En particulier, $f \in L^p(X)$, cqfd. ■

En considérant le cas de fonctions en escalier de la forme

$$f = \sum_{k\in\mathbf{Z}^N} f_k \mathbf{1}_{P(k,k+\vec{1})}$$

où on a noté $\vec{1} = (1, \ldots, 1)$, le résultat ci-dessus démontre la complétude de $\ell^p(\mathbf{Z}^N)$ pour la norme $\lambda \cdot \lambda_p$.

L'argument de la démonstration implique le résultat suivant :

Corollaire 2.2.3 *Soit (f_n) suite de $L^p(X)$ tq. $f_n \to f$ dans $L^p(X)$ lorsque $n \to \infty$. Il existe une suite extraite de (f_{n_k}) tq.*

a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ pp. en $x \in X$;

b) il existe $g \in L^p(X)$ tq. $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ pour tout $k \geq 0$.

Démonstration. Comme la suite (f_n) converge dans $L^p(X)$, elle est de Cauchy. On peut donc extraire une sous-suite (f_{n_k}) tq.

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k} ;$$

(voir la preuve de la proposition 1.3.8).

On conclut comme dans la preuve du théorème de complétude ci-dessus en posant

$$g(x) = |f_{n_0}(x)| + \sum_{k\geq 0} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| .$$

■

L'inégalité de Hölder montre que, pour tout $1 < p < \infty$ et tout $f \in L^{p'}(X)$ l'application

$$T(f) : \phi \mapsto \int_X f(x)\phi(x)dx$$

est une forme linéaire continue sur $L^p(X)$, de norme

$$\|T(f)\| = \|f\|_{p'} .$$

On admettra le résultat suivant :

Théorème 2.2.4 *L'application linéaire T est une bijection isométrique de $L^{p'}(X)$ dans le dual topologique de $L^p(X)$.*

On identifiera donc $L^{p'}(X)$ à $L^p(X)'$ — cette identification est à l'origine de la terminologie "exposants duaux" désignant p et $p' = \frac{p}{p-1}$.

Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat ; elles demandent soit de connaître un peu plus de théorie de la mesure que ce qui est rappelé ici (en particulier le théorème de Radon-Nikodym), soit d'utiliser des propriétés fines de convexité de la boule unité de $L^p(X)$.

2.2.3 Approximation dans L^p.

Soit X un ouvert non vide de $\mathbf{R}^N$.

Proposition 2.2.5 *Pour $p \in [1, \infty[$, $E_c(X)$ est dense dans $L^p(X)$.*

Démonstration. Pour simplifier un peu, on se restreindra au cas de la dimension 1 : autrement dit, X est un ouvert non vide de $\mathbf{R}$.

Soit donc $f \in L^p(X)$; montrons qu'il existe une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions en escalier à support compact dans X telle que

$$\|f - \phi_n\|_p \to 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

D'abord, toute fonction $f \in L^p(X)$ se décompose sous la forme

$$f(x) = \Re f(x)^+ - \Re f(x)^- + i\Im f(x)^+ - i\Im f(x)^-$$

et chacune des fonctions $(\Re f)^\pm$ et $(\Im f)^\pm$ appartient à $L^p(X)$. Il suffit donc de démontrer la convergence ci-dessus pour $f \geq 0$ pp..

De plus, quitte à prolonger f par 0 en dehors de X, on peut se ramener au cas où $X = \mathbf{R}$.

Soit donc $f \geq 0$ pp. appartenant à $L^p(\mathbf{R})$; comme $f^p \geq 0$ appartient à $L^1(\mathbf{R})$, il existe une suite (ϕ_n) de $E_c(\mathbf{R})$ tq.

$$0 \leq \phi_n(x) \leq f(x)^p \text{ pour tout } n \in \mathbf{N} \text{ et pp. en } x$$

et

$$\int_X \phi_n(x)dx \to \int f(x)^p dx \text{ pour } n \to \infty.$$

Quitte à extraire une sous-suite de (ϕ_n), on peut supposer d'après le corollaire 2.2.3 que $\phi_n(x) \to f(x)^p$ pp. en $x \in \mathbf{R}$.

Or les fonctions ϕ_n sont de la forme

$$\phi_n(x) = \sum_{1\leq j\leq J_n} \lambda_{n,j} \mathbf{1}_{[a_{n,j}, b_{n_j}[}(x)$$

avec

$$\lambda_{n,j} > 0 \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et } j = 1, \ldots, J_n$$

et
$$a_{n,j} < b_{n,j} \leq a_{n,j+1} \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et } j = 1, \ldots, J_n - 1\,.$$
Alors
$$\phi_n(x)^{1/p} = \sum_{1 \leq j \leq J_n} \lambda_{n,j}^{1/p} \mathbf{1}_{[a_{n,j}, b_{n_j}[}(x)$$
définit un élément de $E_c(\mathbf{R})$, et on a
$$\phi_n^{1/p}(x) \to f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R} \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Donc
$$\left| f(x) - \phi_n(x)^{1/p} \right|^p \to 0 \text{ pp. en } x \in \mathbf{R} \text{ pour } n \to \infty$$
et
$$\left| f(x) - \phi_n(x)^{1/p} \right|^p \leq f(x)^p \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}\,.$$
Par convergence dominée, on en déduit que
$$\|f - \phi_n^{1/p}\|_p \to 0 \text{ pour } n \to \infty\,,$$
cqfd. ■

Théorème 2.2.6 *Pour tout ouvert non vide $X \subset \mathbf{R}^N$, l'espace $C_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact dans Ω est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration. A nouveau, par souci de simplicité, nous allons nous restreindre à la dimension 1, c'est à dire au cas où X est un ouvert non vide de $\mathbf{R}$.

Compte tenu de la proposition précédente, il suffit de montrer que, pour toute fonction en escalier à support compact $f \in E_c(\mathbf{R})$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $\phi \in C_c(\mathbf{R})$ tq. $\|f - \phi\|_p < \epsilon$.

Par linéarité, il suffit de considérer le cas où f est la fonction indicatrice d'un intervalle fini :
$$f = \mathbf{1}_{[a,b[} \text{ où } a < b\,.$$

Posons alors
$$\begin{aligned} &C^\epsilon_{[a,b[}(x) = 1 \text{ si } x \in [a,b]\,, \quad C_{[a,b[}(x) = 0 \text{ si } x \leq a - \epsilon \text{ ou } x \geq b + \epsilon \\ &C^\epsilon_{[a,b[}(x) = 1 + \tfrac{1}{\epsilon}(x - a) \text{ si } x \in]a - \epsilon, a[\,, \\ &C^\epsilon_{[a,b[}(x) = 1 - \tfrac{1}{\epsilon}(x - b) \text{ si } x \in]b, b + \epsilon[\,. \end{aligned}$$

Evidemment, $C^\epsilon_{[a,b[}$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ de support $[a - \epsilon, b + \epsilon]$ qui est compact.

Alors, comme pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a
$$0 \leq \mathbf{1}_{[a,b[}(x) \leq C^\epsilon_{[a,b[}(x) \leq 1\,,$$
il s'ensuit que
$$0 \leq |C^\epsilon_{[a,b[}(x) - \mathbf{1}_{[a,b[}(x)| = C^\epsilon_{[a,b[}(x) - \mathbf{1}_{[a,b[}(x) \leq 1$$

de sorte que

$$\|C^{\epsilon}_{[a,b[} - \mathbf{1}_{[a,b[}\|_p^p \leq \int_{\mathbf{R}} (C^{\epsilon}_{[a,b[}(x) - \mathbf{1}_{[a,b[}(x))dx = \epsilon\,,$$

cqfd. ■

Une autre conséquence importante de la densité de la classe des fonctions en escalier à support compact dans L^p est la séparabilité de L^p pour $1 \leq p < \infty$.

Définition 2.2.7 *Un espace métrique est dit séparable si il contient une partie dénombrable dense.*

Par exemple, $\mathbf{R}^N$ (muni de sa topologie d'evn de dimension finie) est séparable, car il contient $\mathbf{Q}^N$ qui est dénombrable et dense.

Tout espace métrique précompact est séparable : en effet, pour tout $m \geq 1$, il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon 2^{-m} ; il suffit de prendre comme partie dénombrable dense l'ensemble des centres de toutes ces boules pour m décrivant $\mathbf{N}^*$. Cette partie est dénombrable car c'est une réunion dénombrable d'ensembles finis ; de plus, pour tout $m \geq 1$, tout point de l'espace précompact considéré est à une distance au plus 2^{-m} d'un de ces centres : cette partie est donc dense.

Théorème 2.2.8 *Pour $p \in [1, \infty[$, l'espace $L^p(X)$ est séparable.*

Démonstration. De nouveau, pour éviter d'avoir à manipuler des notations trop lourdes, nous donnons la démonstration de ce résultat qu'en dimension 1, c'est à dire pour X ouvert non vide de $\mathbf{R}$, et pour des fonctions à valeurs réelles.

Comme pour démontrer la densité de $E_c(X)$ dans $L^p(X)$, il suffit de traiter le cas de $X = \mathbf{R}$, en prolongeant les fonctions définies pp. sur X par 0 en dehors de X.

Considérons, dans $E_c(\mathbf{R})$ la classe

$$E_c^{\mathbf{Q}}(\mathbf{R}) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} l_j \mathbf{1}_{[a_j,b_j[} \right\}$$

avec

$$l_j \in \mathbf{Q} \text{ et } a_j, b_j \in \mathbf{Q} \text{ pour tout } j = 1, \ldots, n\,,$$

et

$$a_j < b_j \leq a_{j+1} \text{ pour tout } n \geq 0 \text{ et } j = 1, \ldots, n-1\,.$$

L'ensemble $E_c^{\mathbf{Q}}(\mathbf{R})$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis — obtenus en restreignant n, les dénominateurs de λ_j et ceux de a_j et de b_j à être plus petits que M tandis que $n \leq M$, $|\lambda_j| \leq M$, $|a|$ et $|b| \leq M$. Donc $E_c^{\mathbf{Q}}(\mathbf{R})$ est un ensemble dénombrable.

Montrons que $E_c^{\mathbf{Q}}(\mathbf{R})$ est dense dans $L^p(\mathbf{R})$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

D'après la proposition 2.2.5, il suffit de vérifier que, pour tout $\phi \in E_c(\mathbf{R})$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $f \in E_c^{\mathbf{Q}}(\mathbf{R})$ tq. $\|\phi - f\|_p < \epsilon$.

Ecrivons
$$\phi=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{1}_{[\alpha_j,\beta_j[}$$
avec
$$\alpha_j<\beta_j\le\alpha_{j+1}\text{ pour tout }n\ge 0\text{ et }j=1,\dots,n-1\,.$$

Par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$, étant donné $\epsilon>0$, il existe $l_j\in\mathbf{Q}$ tel que $|\lambda_j-l_j|<\epsilon$ pour $j=1,\dots,n$; de même il existe $a_j,b_j\in\mathbf{Q}$ pour $j=1,\dots,n$ tels que l'on ait
$$|\alpha_j-a_j|+|\beta_j-b_j|<\epsilon\text{ pour }j=1,\dots,n\,,$$
ainsi que
$$a_j<b_j\le a_{j+1}\text{ pour tout }n\ge 0\text{ et }j=1,\dots,n-1\,.$$
Posons alors
$$f=\sum_{j=1}^{n}l_j\mathbf{1}_{[a_j,b_j[}\in E_c^{\mathbf{Q}}(\mathbf{R})\,.$$

Estimons
$$\begin{aligned}\|\phi-f\|_p&\le\sum_{j=1}^{n}\|\lambda_j\mathbf{1}_{[\alpha_j,\beta_j[}-l_j\mathbf{1}_{[a_j,b_j[}\|_p\\&\le\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j-l_j|\|\mathbf{1}_{[\alpha_j,\beta_j[}\|_p+\sum_{j=1}^{n}|l_j|\|\mathbf{1}_{[\alpha_j,\beta_j[}-\mathbf{1}_{[a_j,b_j[}\|_p\,.\end{aligned}$$
La première somme dans le membre de droite est majorée par
$$n\epsilon|\operatorname{supp}(f)|$$
La seconde est majorée par
$$\begin{aligned}&\left(\sup_{x\in\mathbf{R}^N}|f(x)|+\epsilon\right)\sum_{j=1}^{n}\|\mathbf{1}_{[\alpha_j,\beta_j[}-\mathbf{1}_{[a_j,b_j[}\|_p\\&\qquad\le\left(\sup_{x\in\mathbf{R}^N}|f(x)|+\epsilon\right)\sum_{j=1}^{n}|[\alpha_j,\beta_j[\Delta[a_j,b_j[|^{1/p}\,.\end{aligned}$$
Or
$$|[\alpha_j,\beta_j[\Delta[a_j,b_j[|\le|\alpha_j-a_j|+|\beta_j-b_j|\le 2\epsilon\,.$$
Donc au total
$$\|\phi-f\|_p\le n|\operatorname{supp}(f)|\epsilon+n\left(\sup_{x\in\mathbf{R}^N}|f(x)|+\epsilon\right)(2\epsilon)^{1/p}=O(\epsilon^{1/p})$$
cqfd. ■

2.3 L'espace L^∞

Soit $X \subset \mathbf{R}^N$ un ensemble mesurable et $g : X \to [0, \infty]$ une fonction mesurable.

Définition 2.3.1 *On appelle "borne supérieure essentielle" de g, le nombre*

$$\operatorname*{supess}_{x \in X} g = \inf\{\lambda \geq 0 \,|\, g^{-1}(]\lambda, \infty]) \text{ est de mesure nulle } \}$$

Dans cette définition l'inf est atteint, car

$$g^{-1}(]\operatorname*{supess}_{x \in X} g, \infty]) = \bigcup_{n \geq 1} g^{-1}(]\operatorname*{supess}_{x \in X} g + \tfrac{1}{n}, \infty])$$

et que le membre de droite est de mesure nulle comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle.

Définition 2.3.2 *Pour $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ fonction mesurable définie pp., on pose*

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{supess}_{x \in X} |f(x)| \,.$$

On définit

$$L^\infty(X) = \{f : X \to \mathbf{C} \ \text{ mesurable tq. } \|f\|_\infty < \infty\}/\mathcal{N}$$

où

$$\mathcal{N} = \{f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C} \text{mesurable tq. } f(x) = 0 \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}^N\} \,.$$

Proposition 2.3.3 *L'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ définit une norme sur l'espace $L^\infty(X)$ qui en fait un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (f_n) série normalement convergente dans $L^\infty(X)$:

$$\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty = M < \infty \,.$$

Notons $E_n = \{x \in X \text{ tq. } |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\}$. Alors

$$E = \bigcup_{n \geq 0} E_n \text{ est de mesure nulle}$$

comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle, et

$$\sum_{n \geq 0} |f_n(x)|_\infty \leq M \text{ pour tout } x \in X \setminus E \,.$$

Comme $\mathbf{C}$ est complet, il existe $f : X \setminus E \to \mathbf{C}$ telle que

$$\sum_{n \geq 0} f_n(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in X \setminus E \,.$$

Clairement, $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X \setminus E$; de plus f est mesurable comme somme d'une série de fonctions mesurables convergeant pp. : donc $f \in L^\infty(X)$.

Enfin

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \right| \leq \sum_{n>N} \|f_n\|_\infty \text{ pour tout } x \in X \setminus E$$

c'est à dire que

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} f_n \right\| \leq \sum_{n>N} \|f_n\|_\infty \to 0$$

pour $N \to \infty$, cqfd. ■

On vérife sans peine que es inégalités de Hölder et de Minkowski valent encore pour $p = 1$ et $p' = \infty$.

Proposition 2.3.4 *Soit X ouvert non vide de $\mathbf{R}^N$; l'espace $L^\infty(X)$ n'est pas séparable.*

Démonstration. Soit $X =]a, b[$; alors l'espace $L^\infty(X)$ n'est pas séparable : considérons en effet la famille de fonctions

$$\phi_z(x) = 1 \text{ si } a < x_1 < z\,, \text{ et } \phi_z(x) = 0 \text{ si } z \leq x < b\,.$$

Cette famille est non dénombrable ; d'autre part

$$\|\phi_z - \phi_{z'}\|_\infty = 1 \text{ pour tous } z \neq z' \in]a, b[\,.$$

Il ne peut donc exister de suite dénombrable dense dans $L^\infty(]a, b[)$. Ceci démontre le résultat annoncé en dimension $N = 1$: en effet, X contient un intervalle ouvert $]a, b[$ avec $a < b$, et $L^\infty(]a, b[)$ s'identifie au sous-espace de $L^\infty(X)$ des fonctions nulles pp. en dehors de $]a, b[$. Le cas d'un N général est identique. ■

De même, $C_c(\Omega)$ n'est jamais dense dans $L^\infty(\Omega)$ pour $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert non vide, car une limite uniforme de fonctions continues est continue. En fait, l'adhérence dans $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ de $C_c(\mathbf{R}^N)$ est l'espace $C_0(\mathbf{R}^N)$ des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

2.4 Convolution

Commençons par définir le produit de convolution pour les fonctions continues à support compact.

Définition 2.4.1 *Soient $f, g \in C_c(\mathbf{R}^N)$. Le produit de convolution de f par g est la fonction*

$$f \star g : x \mapsto \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y) g(y) dy\,.$$

On vérifie par convergence dominée que $f \star g$ est continue ; de plus, on a la majoration élémentaire suivante du support de $f \star g$:

Majoration du support de $f \star g$

$$\operatorname{supp}(f\star g) \subset \operatorname{supp}(f)+\operatorname{supp}(g) := \{x_1+x_2 \text{ tq. } x_1 \in \operatorname{supp}(f) \text{ et } x_2 \in \operatorname{supp}(g)\}\,.$$

On vérifie également que

$$f \star g = g \star f \text{ autrement dit que } f \star g(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(y)g(x-y)dy\,.$$

Nous allons établir ensuite l'inégalité fondamentale qui joue, pour le produit de convolution, le rôle de l'inégalité de Hölder pour le produit usuel des fonctions.

Inégalité de Young

Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$; alors pour f, g continues à support compact sur $\mathbf{R}^N$, on a

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q\,.$$

Avant de donner la preuve de cette inégalité, énonçons une extension de l'inégalité de Hölder :

Inégalité de Hölder

Soient $p_1, \ldots, p_n \geq 1$ tels que $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n} = 1$. Alors, pour tous $f_1 \in L^{p_1}(X)$,...,$f_n \in L^{p_n}(X)$

$$\|f_1 \cdot \ldots \cdot f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \ldots \|f_n\|_{p_n}\,.$$

Démonstration. Appliquer l'inégalité de Hölder à $f = f_1$ et $g = f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$ et faire un raisonnement par récurrence sur n. ■

Démonstration. Le cas où $r = \infty$ découle d'une simple application de l'inégalité de Hölder usuelle ('a deux facteurs).

En passant aux modules de f et g, on voit qu'il suffit de montrer cette inégalité pour f et g positives ou nulles.

Alors, en appliquant l'inégalité de Hölder ci-dessus avec $n = 3$, $p_1 = r$, $p_2 = (\frac{1}{p} - \frac{1}{r})^{-1}$ et $p_3 = (\frac{1}{q} - \frac{1}{r})^{-1}$, on trouve que

$$\begin{aligned}
\|f \star g\|_r^r &= \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)^{\frac{p}{r}} g(y)^{\frac{q}{r}} f(x-y)^{1-\frac{p}{r}} g(y)^{1-\frac{q}{r}} dy\right)^r dx \\
&\leq \int_{\mathbf{R}^N} f^p \star g^q(x) \left(\int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)^p dy\right)^{r\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} \left(\int_{\mathbf{R}^N} g(y)^q dy\right)^{r\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)} dx \\
&= \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbf{R}^N} f^p \star g^q(x) dx\,.
\end{aligned}$$

Ensuite, on applique le théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^N} f^p \star g^q(x)dx &= \iint_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} f(x-y)^p g(y)^q dxdy \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} g(y)^q \left(\int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)^p dx\right) dy \\ &= \|f^p\|_1 \int_{\mathbf{R}^N} g(y)^q dy = \|f\|_p^p \|g\|_q^q\,.\end{aligned}$$

En regroupant les deux formules ci-dessus, on aboutit à

$$\|f\star g\|_r^r \le \|f\|_p^{r-p}\|g\|_q^{r-q}\|f\|_p^p\|g\|_q^q = \|f\|_p^r\|g\|_q^r\,,$$

qui est précisément le résultat annoncé. ■

Nous allons définir le produit de convolution $f\star g$ pour f et $g\in L^1(\mathbf{R}^N)$. Par densité de $C_c(\mathbf{R}^N)$ dans $L^1(\mathbf{R}^N)$, il existe une suite (f_n) de $C_c(X)$ tq. $f_n\to f$ dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ pour $n\to\infty$. La même formule que ci-dessus permet de définir $f_n\star g(x)$ pour tout $x\in\mathbf{R}^N$; on vérifie par convergence dominée que $f_n\star g$ est continue sur $\mathbf{R}^N$.

Puis, en appliquant le théorème de Tonelli comme dans la preuve de l'inégalité de Young (avec ici $p=q=1$), on trouve que pour tout $n\ge 0$

$$\|f_n\star g\|_1 \le \|f_n\|_1\|g\|_1\,.$$

Le seul point un peu délicat est la question de mesurabilité : pour tout $n\ge 0$, la fonction $(x,y)\mapsto f_n(x-y)$ est mesurable car continue, et de même la fonction $(x,y)\mapsto g(y)$ (définie pp. en (x,y)) est mesurable puisque $g\in L^1(\mathbf{R}^N)$. Donc la fonction produit

$$(x,y)\mapsto f_n(x-y)g(y)$$

est mesurable sur $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N$.

Comme $f_n\to f$ dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ pour $n\to\infty$, la suite (f_n) est de Cauchy dans $L^1(\mathbf{R}^N)$; comme

$$\|(f_n-f_{n+m})\star g\|_1 \le \|f_n-f_{n+m}\|_1\|g\|_1$$

la suite $(f_n\star g)$ est de Cauchy dans $L^1(\mathbf{R}^N)$: elle converge donc car $L^1(\mathbf{R}^N)$ est complet.

Définition 2.4.2 *Pour $f,g\in L^1(\mathbf{R}^N)$, on définit*

$$f\star g = \lim_{n\to\infty} f_n\star g$$

pour toute suite (f_n) de fonctions continues à supports compacts sur $\mathbf{R}^N$ tq. $f_n\to f$ dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ pour $n\to\infty$. De plus

$$\|f\star g\|_1 \le \|f\|_1\|g\|_1\,.$$

On doit seulement vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de la suite (f_n) convergeant vers f dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ pour $n \to \infty$. Soit (ϕ_n) une autre suite de fonctions continues à supports compacts sur $\mathbf{R}^N$ tq. $\phi_n \to f$ dans $L^1(\mathbf{R}^N)$ pour $n \to \infty$: on a

$$\|(f_n - \phi_n) \star g\|_1 \leq \|f_n - \phi_n\|_1 \|g\|_1 \to 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Donc $f_n \star g$ et $\phi_n \star g$ convergent vers la même limite pour $n \to \infty$, cqfd.

Enfin, par la même méthode, on montre que, pour tout $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ et tout $g \in L^q(\mathbf{R}^N)$, et pourvu que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, on définit ainsi un élément unique de $f \star g \in L^p(\mathbf{R}^N)$

Définition 2.4.3 *Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tq. $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Pour tout $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ et tout $g \in L^q(\mathbf{R}^N)$, on pose*

$$f \star g = \lim_{n \to \infty} f_n \star g$$

pour toute suite (f_n) de fonctions continues à supports compacts sur $\mathbf{R}^N$ tq. $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbf{R}^N)$ pour $n \to \infty$. De plus

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q\,.$$

L'une des applications les plus importantes de la convolution est l'approximation par des fonctions régulières des éléments de $L^p(\mathbf{R}^N)$.

Commençons par rappeler la construction d'approximation de l'identité.

On choisit d'abord une fonction ϕ de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^N$ et à support compact. Voici comment on en construit une : considérons la fonction

$$\Phi : r \mapsto \exp\left(\frac{1}{r-1}\right) \text{ pour } r < 1\,, \quad \text{et } r \mapsto 0 \text{ pour } r \geq 1\,.$$

C'est un exercice classique que de vérifier que Φ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et que $\operatorname{supp} \Phi =]-\infty, 1]$.

La fonction $\phi : x \mapsto \Phi(\|x\|_2)$ est donc de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^N$ comme composée de Φ et de la fonction $x \mapsto \|x\|_2^2$ (où $\|x\|_2$ désigne la norme euclidienne canonique de $x \in \mathbf{R}^N$). Son support est l'image réciproque du support de Φ par l'application $x \mapsto \|x\|_2^2$, c'est à dire que

$$\operatorname{supp} \phi = \overline{B}_2(0,1)\,,$$

(où $\overline{B}_2(0,1)$ désigne la boule unité fermée de $\mathbf{R}^N$ muni de la norme euclidienne canonique). Enfin $\phi > 0$ dans la boule ouverte $B_2(0,1)$: donc

$$\int_{\mathbf{R}^N} \phi(x)dx > 0\,.$$

On va donc poser

$$\chi(x) = \frac{\phi(x)}{\int_{\mathbf{R}^N} \phi(x)dx}\,, \text{ et } \chi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^N}\chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \text{ pour } x \in \mathbf{R}^N \text{ et } \epsilon > 0\,.$$

Clairement, $\chi_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ avec

$$\operatorname{supp} \chi_\epsilon = \overline{B}_2(0,\epsilon)\,, \quad \chi_\epsilon \geq 0\,, \quad \int_{\mathbf{R}^N} \chi_\epsilon(x)dx = 1\,.$$

Rappelons ensuite le théorème de dérivation sous le signe somme :

Théorème 2.4.4 (de dérivation sous le signe somme) *Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^D$ un ouvert, et $f : \Omega \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$; supposons que f vérifie les propriétés suivantes :*
a) pour tout $x \in \Omega$, l'application partielle $f(x,\cdot) \in L^1(\mathbf{R}^N)$;
b) pour presque tout $y \in \mathbf{R}^N$, l'application

$$\Omega \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y) \in \mathbf{C}$$

est continue sur Ω ;
c) il existe $G \in L^1(\mathbf{R}^N)$ telle que, pour presque tout $y \in \mathbf{R}^N$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y_j}(x,y)\right| \leq G(y) \text{ pour tout } x \in \Omega\,.$$

Alors la fonction

$$F : \Omega \ni x \mapsto F(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x,y)dy \in \mathbf{C}$$

admet une dérivée partielle en x_j donnée par la formule

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)dy$$

qui est continue sur Ω.

L'approximation des éléments de $L^p(\mathbf{R}^N)$ par des fonctions régulières s'obtient par convolution de la façon suivante :

Proposition 2.4.5 *Soit $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$f \star \chi_\epsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ et } f \star \chi_\epsilon \to f \text{ dans } L^p(\mathbf{R}^N)$$

pour $\epsilon \to 0$.

Commençons par un résultat intermédiaire fondamental.

Lemme 2.4.6 *Pour $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}$ et $h \in \mathbf{R}^N$, on note $\tau_h f$ la fonction f translatée de h, soit*

$$\tau_h f : x \mapsto (\tau_h f)(x) = f(x-h)\,.$$

Alors, pour tout $1 \leq p < \infty$ et pour tout $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\|\tau_h f - f\|_p \to 0 \text{ pour } |h| \to 0\,.$$

Ce résultat est faux pour $p = \infty$: par exemple, si $N = 1$ et $f = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$ est la fonction d'Heaviside, alors

$$\|\tau_h f - f\|_\infty = 1 \text{ pour tout } h \neq 0\,.$$

C'est d'ailleurs ce même principe qui permet de voir que L^∞ n'est pas séparable.
Démonstration du lemme. Soit $\epsilon > 0$ et $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$; par densité de $C_c(\mathbf{R}^N)$ dans $L^p(\mathbf{R}^N)$ (cf. théorème 2.2.6), il existe $f_\epsilon \in C_c(\mathbf{R}^N)$ tq.

$$\|f - f_\epsilon\|_p < \epsilon\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}\|\tau_h f - f\|_p &\leq \|\tau_h f - \tau_h f_\epsilon\|_p + \|\tau_h f_\epsilon - f_\epsilon\|_p + \|f_\epsilon - f\|_p \\ &= 2\|f_\epsilon - f\|_p + \|\tau_h f_\epsilon - f_\epsilon\|_p \leq 2\epsilon + \|\tau_h f_\epsilon - f_\epsilon\|_p\,.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\overline{\lim_{|h|\to 0}}\, \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\epsilon + \overline{\lim_{|h|\to 0}}\, \|\tau_h f_\epsilon - f_\epsilon\|_p \leq 2\epsilon$$

car, pour tout $\epsilon > 0$, $\tau_h f_\epsilon \to f_\epsilon$ dans $L^p(\mathbf{R}^N)$ pour $|h| \to 0$ par convergence dominée. Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire dans l'inégalité ci-dessus, on trouve finalement que $\overline{\lim}_{|h|\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$, cqfd. ∎
Démonstration de la proposition. Vérifions que $\chi_\epsilon \star f \to f$ dans $L^p(\mathbf{R}^N)$ pour $\epsilon \to 0$.

En effet :

$$f(x) - f_\epsilon(x) = f(x) - \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)\chi_\epsilon(y)dy = \int_{\mathbf{R}^N} (f(x) - f(x-y))\chi_\epsilon(y)dy\,,$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\|f - f_\epsilon\|_p^p &\leq \int_{\mathbf{R}^N} \left|\int_{\mathbf{R}^N} |f(x) - f(x-y)|\chi_\epsilon(y)dy\right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x) - f(x-y)|^p \chi_\epsilon(y)dy\right) dx\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Jensen pour la fonction convexe $z \mapsto z^p$.

En appliquant ensuite le théorème de Tonelli, on trouve que

$$\begin{aligned}\|f - f_\epsilon\|_p^p &\leq \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x) - f(x-y)|^p dx\right) \chi_\epsilon(y)dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^N} \|f - \tau_y f\|_p^p \chi_\epsilon(y)dy = \int_{\mathbf{R}^N} \|f - \tau_{\epsilon z} f\|_p^p \chi(z)dz\,.\end{aligned}$$

Or $\|f - \tau_{\epsilon z} f\|_p^p \to 0$ pour tout $z \in \mathbf{R}^N$ lorsque $\epsilon \to 0$; d'autre part $\|f - \tau_{\epsilon z} f\|_p^p \leq 2^p \|f\|_p^p$ pour tout $z \in \mathbf{R}^N$ et $\epsilon > 0$. Par convergence dominée, la dernière intégrale dans le membre de droite tend vers 0 avec ϵ.

Montrons ensuite que f_ϵ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^N$.

Il suffit pour cela d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme à la fonction

$$(x,y) \mapsto \chi_\epsilon(x-y)f(y)\,.$$

Notons que, pour tout $\alpha=(\alpha_1,\ldots,a_N)\in\mathbf{N}^N$, et tout $x\in B_2(0,R)$ on a

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_N}\chi_\epsilon}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}(x-y)f(y)\right|\\ &\qquad\le \epsilon^{-\alpha_1-\ldots-\alpha_N}\sup_{z\in\mathbf{R}^N}\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_N}\chi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}(z)\right|\mathbf{1}_{|y|\le R+\epsilon}|f(y)|\,.\end{aligned}$$

Le membre de droite de cette inégalité est de la forme

$$C_\epsilon\mathbf{1}_{|y|\le R+\epsilon}|f(y)|\,.$$

Or, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{\mathbf{R}^N}\mathbf{1}_{|y|\le R+\epsilon}|f(y)|dy\le|B_2(O,R+\epsilon)|^{1/p'}\|f\|_p\,.$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, on montre par récurrence que $\chi_\epsilon\star f$ admet des dérivées partielles continues de tous ordres sur $\mathbf{R}^N$, cqfd.
■

Une conséquence très facile de la proposition précédente est la densité dans $L^p(\mathbf{R}^N)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact.

Théorème 2.4.7 *Soit $p\in[1,\infty[$. Alors $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbf{R}^N)$.*

Evidemment, le résultat est faux pour $p=\infty$, puisque $C_c(\mathbf{R}^N)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbf{R}^N)$.

Démonstration. Soit $\eta>0$ arbitraire ; pour $n\in\mathbf{N}^*$ assez grand,

$$\|f-f\mathbf{1}_{B(0,n)}\|_p<\eta\,.$$

En effet,

$$f(x)-f(x)\mathbf{1}_{B(0,n)}(x)\to 0 \text{ pp. en } x \text{ pour } n\to\infty\,,$$

tandis que

$$|f(x)-f(x)\mathbf{1}_{B(0,n)}(x)|^p\le|f(x)|^p \text{ avec } |f|^p\in L^1(\mathbf{R}^N)$$

de sorte que, par convergence dominée,

$$\|f-f\mathbf{1}_{B(0,n)}\|_p\to 0 \text{ pour } n\to\infty\,.$$

Puis, pour n ainsi choisi,

$$\|f_n-f_n\star\chi_\epsilon\|_p<\eta$$

pour $\epsilon > 0$ assez petit, grâce à la proposition précédente.

Par conséquent, pour tout $\eta > 0$, on a ainsi construit $f_n \star \chi_\epsilon$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^N$ et tq.

$$\|f - f_n \star \chi_\epsilon\|_p < 2\eta \,.$$

On conclut en vérifiant que $f_n \star \chi_\epsilon$ est à support dans $\overline{B(0, n+\epsilon)}$ qui est compacte, ce qui découle de la majoration du support d'un produit de convolution donnée au début de cette section, cqfd. $\blacksquare$

Chapitre 3

Espaces de Hilbert

3.1 Définitions et premiers exemples

Soit $\mathfrak{H}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, muni d'une forme sesquilinéaire notée $(x|y)$, qui est antilinéaire en la première variable et linéaire en la seconde.

On suppose cette forme sesquilinéaire définie positive, de sorte que l'application $x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur $\mathfrak{H}$.

Définition 3.1.1 *On dit que l'espace vectoriel $\mathfrak{H}$ muni de la forme sesquilinéaire $(\cdot|\cdot)$ est un espace de Hilbert si $\mathfrak{H}$ est complet pour la norme $x \mapsto \sqrt{(x|x)}$.*

Voici quelques exemples d'espaces de Hilbert :
- tout espace euclidien ou hermitien de dimension finie est un espace de Hilbert ;
- l'espace $\ell^2(\mathbf{Z}^N)$ muni de la forme sesquilinéaire

$$(x|y) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^N} \overline{x(k)} y(k) \,;$$

- l'espace $L^2(X)$ muni de la forme sesquilinéaire

$$(f|g) = \int_X \overline{f(x)} g(x) dx \,.$$

La complétude de ces espaces a été établie dans le chapitre précédent.

Pour $A \subset \mathfrak{H}$ on note

$$A^\perp = \{x \in \mathfrak{H} \,|\, (x|a) = 0 \text{ pour tout } a \in A\} \,.$$

L'orthogonal $A^\perp$ est un sev fermé de $\mathfrak{H}$ (comme intersection d'une famille indexée par A de sev fermé de $\mathfrak{H}$).

Clairement, $A^\perp = \overline{A}^\perp$: en effet, $A \subset \overline{A}$ donc on a $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$. D'autre part, si $x \perp A$ alors $x \perp \overline{A}$. En effet, étant donné $a \in \overline{A}$, il existe (a_n) suite de A tq. $a_n \to A$ pour $n \to \infty$: donc, comme $(x|a_n) = 0$ et $(x|a_n) \to (x|a)$ pour $n \to \infty$, on en déduit que $(x|a) = 0$.

3.2 Le théorème de la projection et ses applications

Le résultat fondamental de la théorie des espaces de Hilbert est le

Théorème 3.2.1 (de la projection sur un convexe fermé) *Soit C convexe fermé (non vide et de complémentaire non vide) d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Soit $x \in \mathfrak{H} \setminus C$. Alors*

a) il existe un point $P_C x \in C$ unique tel que

$$\|x - P_C x\| = \inf_{y \in C} \|x - y\| \,;$$

on prolonge P_C à $\mathfrak{H}$ tout entier en posant $P_C x = x$ pour tout $x \in C$;

b) le point $P_C x$ est l'unique point $y \in C$ tel que

$$(x - y | z - y) \leq 0 \text{ pour tout } z \in C \,;$$

c) l'application P_C est contractante :

$$\|P_C x - P_C x'\| \leq \|x - x'\| \,.$$

On rappelle l'identité du parallélogramme, qui est caractéristique des normes hilbertiennes

Identité du parallélogramme

Pour tous $x, y \in \mathfrak{H}$, on a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \,.$$

Démonstration. Soit $d = \operatorname{dist}(x, C)$; comme C est fermé et $x \notin C$, alors $d > 0$.

Posons $F_n = C \cap \overline{B}_2(x, d + \frac{1}{n})$; alors pour tout $n \geq 1$, F_n est fermé dans $\mathfrak{H}$. De plus

$$\ldots \subset F_n \subset \ldots \subset F_2 \subset F_1 \,.$$

Enfin, diam $F_n \to 0$ pour $n \to \infty$. En effet, soient $y, z \in F_n$: alors, grâce à l'identité du parallélogramme

$$\|z - y\|^2 = 2(\|y - x\|^2 + \|z - x\|^2) - 4\|\tfrac{1}{2}(y + z) - x\|^2 = 4(d + \tfrac{1}{n})^2 - 4d^2 = 4d(\tfrac{2}{n} + \tfrac{1}{n^2})$$

Montrons que l'intersection des F_n est réduite à un point. En effet

$$\operatorname{diam} \bigcap_{n \geq 0} F_n = 0 \,.$$

Donc cette intersection contient au plus un point. Montrons qu'elle n'est pas vide : pour tout $n \geq 1$, on choisit $x_n \in F_n$; clairement

$$\operatorname{diam} \{x_n \,|\, n \geq N\} \leq \operatorname{diam} F_N \to 0 \text{ pour } N \to \infty \,.$$

Donc la suite (x_n) est de Cauchy, dans C qui est fermé dans $\mathfrak{H}$ complet, de sorte que C est complet. Donc la suite (x_n) admet une limite dans C ; notons la ξ :

$$\{\xi\} = \bigcap_{n\geq 1} F_n = C \cap \bigcap_{n\geq 1} \overline{B}_2(x, d + \tfrac{1}{n})$$

Comme $\|\xi - x\| \leq d + \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, on a construit ainsi un point ξ tel que

$$\xi \in C \text{ et } \|\xi - x\| = d = \inf_{z\in C} \|z - x\| \,.$$

S'il existait un autre point ξ' cérifiant ces deux propriétés, on aurait

$$\{\xi, \xi'\} \subset C \cap \bigcap_{n\geq 1} \overline{B}_2(x, d + \tfrac{1}{n}) = \bigcap_{n\geq 1} F_n$$

comme cette intersection est un singleton, $\xi' = \xi$. On a donc construit $P_C x = \xi$, ce qui démontre le a).

Pour ce qui est du point b), observons d'abord que, pour tout $z \in C$ et tout $t \in [0, 1]$, le point $(1 - t)P_C x + tz$ appartient à C. Donc par définition de la projection P_C

$$\begin{aligned}\|x - P_C x\|^2 &\leq \|x - (1 - t)P_C x - tz\|^2 \\ &= \|x - P_C x\|^2 - 2t(x - P_C x|z - P_C x) + t^2\|z - P_C x\|^2 \,.\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$-2t(x - P_C x|z - P_C x) + t^2\|z - P_C x\|^2 \geq 0 \text{ pour tout } t \in]0, 1[\,;$$

en divisant les deux membres de cette inégalité par t on trouve

$$(x - P_C x|z - P_C x) \leq \tfrac{1}{2}t\|z - P_C x\|^2 \text{ pour tout } t \in]0, 1[\,.$$

En faisant $t \to 0$, on trouve que $(x - P_C x|z - P_C x) \leq 0$.

Réciproquement, si $\xi \in C$ vérifie

$$(x - \xi|z - \xi) \leq 0 \text{ pour tout } z \in C\,,$$

on a

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 = \|x - \xi + \xi - z\|^2 &= \|x - \xi\|^2 - 2(x - \xi|z - \xi) + \|z - \xi\|^2 \\ &\geq \|x - \xi\|^2 \text{ pour tout } z \in C\,,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\xi = P_C x$. Ceci conclut la preuve du point b).

Passons au caractère contractant de l'application P_C : pour tous $x, y \notin C$ (afin déviter les cas triviaux) on décompose

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 = \|x - P_C x\|^2 + \|P_C x - P_C y\|^2 + \|P_C y - y\|^2 + 2(x - P_C x|P_C x - P_C y) \\ + 2(P_C x - P_C y|P_C y - y) + 2(x - P_C x|P_C y - y)\end{aligned}$$

D'après le b),

$(x - P_C x | P_C x - P_C y) \leq 0$ while $(P_C x - P_C y | P_C y - y) \leq 0 (P_C x - P_C y | P_C y - y)$

de sorte que

$$\|x - y\|^2 \geq \|P_C x - P_C y\|^2 + \|(x - P_C x) + (y - P_C y)\|^2 \geq \|P_C x - P_C y\|^2 ,$$

ce qui conclut la preuve du point c). ■

Dans le cas particulier où le convexe fermé est un sev F, le théorème permet donc de définir $P_F \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}, F)$ tq. pour tout $x \in \mathfrak{H}$,

$$P_F x \in F \text{ et } x - P_F x \perp F ;$$

cette projection est une contraction :

$$\|P_F\| \leq 1 .$$

Comme dans le cas des espaces euclidiens de dimension finie, toute forme linéaire sur un espace de Hilbert est représentée par un vecteur.

Théorème 3.2.2 (de représentation de F. Riesz) *Soit $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert et L forme linéaire continue sur $\mathfrak{H}$. Alors il existe un unique vecteur $\xi \in \mathfrak{H}$ tel que*

$$L(x) = (\xi | x) \text{ pour tout } x \in \mathfrak{H} ;$$

de plus

$$\|L\|_{\mathfrak{H}'} = \|\xi\|_{\mathfrak{H}} .$$

Démonstration. Soit L forme linéaire continue non nulle sur $\mathfrak{H}$; donc $H = \operatorname{Ker} L$ est un hyperplan fermé de $\mathfrak{H}$.

Soit $x \in \mathfrak{H} \setminus H$: notons $u = \frac{x - P_H x}{\|x - P_H x\|}$. Montrons que

$$L(x) = L(u)(u|x) \text{ pour tout } x \in \mathfrak{H} .$$

En effet, $\mathfrak{H} = H \oplus \mathbf{C} u$ et

$$L(\lambda u + h) = \lambda L(u) = L(u)(u | \lambda u + h) \text{ pour tout } h \in H \text{ et } \lambda \in \mathbf{C} .$$

Donc L est représenté par le vecteur $\overline{L(u)} u$.

Si L est représenté par deux vecteurs ξ et ξ', alors

$$\|\xi - \xi'\|^2 = (\xi - \xi' | \xi - \xi') = L(\xi - \xi') - L(\xi - \xi') = 0 ,$$

de sorte que $\xi = \xi'$.

Enfin, si ξ représente la forme linéaire continue L, on a

$$|L(x)| = |(\xi|x)| \leq \|\xi\| \|x\| e \text{ et } |L(\xi)\| = \|\xi\|^2 .$$

Donc $\|L\| = \|\xi\|$, cqfd. ■

Voici une application importante du théorème de représentation, qui permet de tester si un sev de $\mathfrak{H}$ est dense.

Théorème 3.2.3 *Soit $V \subset \mathfrak{H}$ un sev. Alors V est dense ssi $V^\perp = \{0\}$.*

Démonstration. D'abord $\overline{V}^\perp = V^\perp$. Alors, si V est dense, $\overline{V} = \mathfrak{H}$ de sorte que $V^\perp = \overline{V}^\perp = \mathfrak{H}^\perp = \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $V^\perp = \{0\}$. Si $\overline{V} \neq \mathfrak{H}$, on choisit $x \in \mathfrak{H} \setminus \overline{V}$, et soit $P_{\overline{V}}x$. Alors

$$x - P_{\overline{V}}x \in \overline{V}^\perp \subset V^\perp = \{0\}$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $x \notin \overline{V}$. ■

Corollaire 3.2.4 *Soit V un sev de $\mathfrak{H}$. Alors $(V^\perp)^\perp = \overline{V}$.*

Démonstration. L'inclusion

$$V \subset (V^\perp)^\perp$$

est évidente ; comme $(V^\perp)^\perp$ est fermé, on en déduit que

$$\overline{V} \subset (V^\perp)^\perp .$$

Le sev fermé $W = (V^\perp)^\perp$ de $\mathfrak{H}$ est un espace de Hilbert pour la restriction à W du produit hermitien de $\mathfrak{H}$.

L'orthogonal de V dans W est

$$V^\perp \cap W = V^\perp \cap (V^\perp)^\perp = \{0\} .$$

Donc V est dense dans W, c'est à dire que

$$\overline{V} = W$$

cqfd. ■

3.3 Bases hilbertiennes

A partir de cette section, on considèrera exclusivement dans ce chapitre le cas des espaces de Hilbert séparables. (Rappelons qu'un espace métrique est dit séparable s'il contient une partie dénombrable dense).

Soit donc $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert séparable et $D \subset \mathfrak{H}$ dénombrable et dense dans $\mathfrak{H}$. On supposera dans tout ce qui suit que $\mathfrak{H}$ est de dimension infinie, le cas des espaces euclidiens (ou hermitiens) de dimension finie étant bien connu.

Soit $V = \operatorname{Vect} D$; clairement V est dense dans $\mathfrak{H}$ puisque $D \subset V$ et $\mathfrak{H} = \bar{D} \subset \bar{V}$.

Définition 3.3.1 *On dit qu'une famille $(\xi_i)_{i\in I}$ (non nécessairement dénombrable) de vecteurs de $\mathfrak{H}$ est totale si $\operatorname{Vect}\{\xi_i \,|\, i \in I\}$ est dense dans $\mathfrak{H}$.*

D'après le théorème de la base incomplète, on peut extraire de D une partie libre, qui sera donc une base de V. Cette partie libre est une suite infinie $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$; dans le cas contraire, V serait de dimension finie, donc fermé dans $\mathfrak{H}$; puisque d'autre part V est dense dans $\mathfrak{H}$, l'espace $\mathfrak{H}$ serait lui-même de dimension finie, contrairement à notre hypothèse.

Par conséquent, pour tout espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, on obtient donc au moyen de la construction ci-dessus une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\{x_n \,|\, n \in \mathbf{N}\} \text{ est libre et totale dans } \mathfrak{H}\,.$$

3.3.1 Procédé d'orthogonalisation de Schmidt

Ce procédé a déjà été rencontré dans l'étude des espaces euclidiens ou hermitiens de dimension finie.

On va définir par récurrence une suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathfrak{H}$ vérifiant les propriétés suivantes

(i) la partie $\{y_n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ est orthogonale dans $\mathfrak{H}$;

(ii) pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\mathrm{Vect}\{y_n \,|\, 1 \le n \le N\} = \mathrm{Vect}\{x_n \,|\, 1 \le n \le N\}$$

Pour cela, on pose

$$y_0 = x_0\,;$$

comme $\{x_n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ est libre, $y_0 = x_0 \neq 0$.

Puis on cherche y_1 sous la forme

$$y_1 = x_1 + t_{10} y_0\,;$$

la condition

$$(y_1|y_0) = 0 \text{ équivaut à } t_{10} = -\frac{(x_1|y_0)}{(y_0|y_0)}\,.$$

Ensuite, on cherche y_2 sous la forme

$$y_2 = x_2 + t_{20} y_0 + t_{21} y_1\,;$$

puisque la partie $\{y_0, y_1\}$ est orthogonale, la condition

$$(y_2|y_j) = 0 \text{ équivaut à } t_{2j} = -\frac{(x_2|y_j)}{(y_j|y_j)} \text{ pour } j = 0, 1\,.$$

Notons que $y_j \neq 0$ pour $j = 0, 1$: on a vu que $y_0 \neq 0$; pour ce qui est de y_1, notons que y_1 est une combinaison linéaire de la partie libre $\{x_0, x_1\}$ dont la coordonnée sur x_1 est non nulle. Comme la partie $\{x_0, x_1\}$ est libre, $y_1 \neq 0$.

Passons à l'argument de récurrence : on suppose construits $y_0, \ldots, y_{i-1}$ tels que $(y_k|y_l) = 0$ pour $k \neq l$ et vérifiant (ii) pour $N = 0, \ldots, i-1$; on va alors chercher y_i sous la forme

$$y_i = x_i + \sum_{j=0}^{i-1} t_{ij} y_j\,.$$

Cherchons les coefficients t_{ij} pour que

$$(y_i|y_j) = (x_i|y_j) + t_{ij}(y_j|y_j)\,, \quad j = 0, \ldots, i-1\,.$$

D'abord $y_j \neq 0$ pour $j = 0, \ldots, i-1$: en effet y_j est une combinaison linéaire de $\{x_0, \ldots, x_j\}$ dont la coordonnée sur x_j vaut 1. Or la partie $\{x_0, \ldots, x_j\}$ est libre, donc $y_j \neq 0$. On pose donc

$$t_{ij} = -\frac{(x_i|y_j)}{(y_j|y_j)}\,, \quad j = 0, \ldots, i-1\,.$$

Ainsi, la partie $\{y_0, \ldots, y_i\}$ est orthogonale ; de plus

$$y_i \in \mathrm{Vect}\{y_0, \ldots, y_{i-1}, x_i\} = \mathrm{Vect}\{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i\}$$

puisque l'hypothèse de récurrence assure que

$$\mathrm{Vect}\{y_0, \ldots, y_{i-1}\} = \mathrm{Vect}\{x_0, \ldots, x_{i-1}\}\,.$$

3.3.2 Egalité de Parseval et applications

Soit $\mathfrak{H}$ espace de Hilbert séparable de dimension infinie.

Définition 3.3.2 *On appelle base hilbertienne de $\mathfrak{H}$ toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que*

$$(x_k|x_l) = \delta_{kl} \text{ pour } k, l \geq 0\,, \text{ et } \{x_n \,|\, n \geq 0\} \text{ totale dans } \mathfrak{H}\,.$$

La terminologie "base hilbertienne" est trompeuse : une base hilbertienne d'un espace de Hilbert n'en est une base que si cet espace est de dimension finie.

La construction de la section précédente permet de prouver l'existence d'une base hilbertienne

Théorème 3.3.3 *Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie admet au moins une base hilbertienne.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{H}$ espace de Hilbert séparable. On a vu que $\mathfrak{H}$ contient au moins une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ libre et totale dans $\mathfrak{H}$.

Grâce au procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on construit, à partir de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ qui est libre, orthogonale et totale.

On obtient donc une base hilbertienne de $\mathfrak{H}$ en posant

$$e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}\,, \qquad n \geq 0\,.$$

■

Soit donc $(e_n)_{n\geq 0}$ suite orthonormée de $\mathfrak{H}$; pour tout $x \in \mathfrak{H}$, on notera

$$\hat{x}(n) = (e_n|x)\,, \quad n \in \mathbf{N}\,.$$

$\boxed{\text{Inégalité de Bessel}}$

Pour tout $x \in \mathfrak{H}$, on a

$$\sum_{n\geq 0} |\hat{x}(n)|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Démonstration. Notons $V_n = \mathrm{Vect}\{e_0, \dots, e_n\}$; pour tout $x \in \mathfrak{H}$, on a

$$P_{V_n} x = \sum_{k=0}^{n} \hat{x}(k) e_k$$

de sorte que

$$\sum_{k=0}^{n} |\hat{x}(k)|^2 = \|P_{V_n} x\|^2 \leq \|x\|^2 .$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$, on obtient l'inégalité de Bessel. ■

$\boxed{\text{Egalité de Parseval}}$

Les deux conditions suivantes sont équivalentes
(i) la suite orthonormée $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale dans $\mathfrak{H}$;
(ii) pour tout $x \in \mathfrak{H}$, on a

$$\sum_{n\geq 0} |\hat{x}(n)|^2 = \|x\|^2 ;$$

(iii) pour tous $x, y \in \mathfrak{H}$, on a

$$\sum_{n\geq 0} \overline{\hat{x}(n)} \hat{y}(n) = (x|y) .$$

Démonstration. Montrons que (i) implique (ii). Soit $x \in \mathfrak{H}$; comme $V = \mathrm{Vect}\{e_n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $\mathfrak{H}$, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $v_n \to x$ dans $\mathfrak{H}$ pour $n \to \infty$.

Comme chaque v_n est une combinaison linéaire finie des $(e_n)_{n\geq 0}$,

$$\mathrm{dist}(x, \mathrm{Vect}\{e_0, \dots, e_N(n)\}) \leq \|x - v_n\|$$

où

$$N(n) = \min\{N \in \mathbf{N} \,|\, v_n \in \mathrm{Vect}\{e_0, \dots, e_N\}\} .$$

Donc

$$\|x - P_{\mathrm{Vect}\{e_0,\dots,e_n\}} x\|^2 = \mathrm{dist}(x, \mathrm{Vect}\{e_0, \dots, e_n\}) \to 0 \text{ pour } n \to \infty .$$

Or, d'après le théorème de Pythagore

$$P_{\mathrm{Vect}\{e_0,\dots,e_n\}} x = \sum_{k=0}^{n} (e_k|x) e_k$$

et

$$\|x - P_{\mathrm{Vect}\{e_0,\ldots,e_n\}}x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |(e_k|x)|^2 \,.$$

On en déduit (ii).

Réciproquement, (ii) implique (i) : soit en effet $x \perp \mathrm{Vect}\{e_n \,|\, n \geq 0\}$. Alors $\hat{x}(n) = (e_n|x) = 0$ pour tout $n \geq 0$; donc $x = 0$ d'après (ii). D'après le théorème 3.2.3, ceci implique que $\mathrm{Vect}\{e_n \,|\, n \geq 0\}$ est dense dans $\mathfrak{H}$.

Comme (iii) implique clairement (ii), montrons que (ii) implique (iii). Cela découle immédiatement de l'identité suivante, vérifiée par toute norme hermitienne sur un espace vectoriel complexe — et donc en particulier par le module sur $\mathbf{C}$, qui est la norme associée au produit scalaire hermitien canonique de $\mathfrak{H}$ défini par $< x|y >= \overline{x}y$.

IDENTITÉ DE POLARISATION

Pour tous $x, y \in \mathfrak{H}$, on a

$$(x|y) = \tfrac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2 + i|x-iy|^2 - i|x+iy|^2)$$

$\blacksquare$

L'intérêt des bases hilbertiennes est de ramener à un modèle unique très simple tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie — de même que tous les espaces vectoriels de dimension finie N sur $\mathbf{C}$ s'identifient à $\mathbf{C}^N$ par choix d'une base.

Théorème 3.3.4 (de Riesz-Fischer) *Soit $\mathfrak{H}$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie sur $\mathbf{C}$; soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ base hilbertienne de $\mathfrak{H}$. Alors*

1) pour tout $x \in \mathfrak{H}$, on a

$$x = \sum_{k\geq 0} \hat{x}(k) e_k \,,$$

où la série ci-dessus converge dans $\mathfrak{H}$;

2) l'application linéaire

$$\Phi : \, (x_k)_{k\geq 0} \mapsto \Phi((x_k)_{k\geq 0}) = \sum_{k\geq 0} x_k e_k$$

est un isomorphisme de $\ell^2(\mathbf{N})$ sur $\mathfrak{H}$ qui est de plus unitaire et donc isométrique :

$$(\Phi((x_k)_{k\geq 0})|\Phi((y_k)_{k\geq 0})_{\mathfrak{H}} = ((x_k)_{k\geq 0}|(y_k)_{k\geq 0})_{\ell^2(\mathbf{N})} \,.$$

Démonstration. Le point 1) est une conséquence de l'égalité de Parseval appliquée au vecteur

$$y = x - P_{\mathrm{Vect}\{e_0,\ldots,e_n\}}x$$

pour lequel

$$\hat{y}(k) = 0 \text{ si } k = 0,\ldots,n\,, \text{ et } \hat{y}(k) = \hat{x}(k) \text{ pour } k > n\,.$$

Donc

$$\|x - P_{\mathrm{Vect}\{e_0,\ldots,e_n\}}x\|^2 = \sum_{k>n} |\hat{x}(k)|^2$$

et comme le membre de droite est le reste d'un série convergente, on trouve que

$$P_{\mathrm{Vect}\{e_0,\ldots,e_n\}}x \to x \text{pour } n \to \infty\,.$$

Or

$$P_{\mathrm{Vect}\{e_0,\ldots,e_n\}}x = \sum_{k=0}^{n} \hat{x}(k)e_k$$

d'où le résultat annoncé.

Passons à la démonstration du point 2).

Montrons tout d'abord que l'application Φ est bien définie sur $\ell^2(\mathbf{N})$. Soit donc $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N})$; posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n} x_k e_k \in \mathfrak{H}\,.$$

Nous allons montrer que la suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathfrak{H}$: en effet, comme la famille $(e_n)_{n\geq 0}$ est orthonormée dans $\mathfrak{H}$, on a

$$\|\xi_{n+p} - \xi_n\|_{\mathfrak{H}}^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |x_k|^2 \leq \sum_{k\geq n+1} |x_k|^2 \to 0 \text{ pour } n \to \infty$$

puisque le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est le reste d'une série convergente. Donc

$$\|\xi_{n+p} - \xi_n\|_{\mathfrak{H}}^2 \to 0 \text{ pour } n \to \infty \text{ uniformément en } p \geq 0\,,$$

de sorte que la suite $(\xi_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathfrak{H}$. Comme $\mathfrak{H}$ est complet, la suite $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, et sa limite est précisément

$$\sum_{k\geq 0} x_k e_k = \Phi((x_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N}))\,.$$

Que Φ ainsi définie soit unitaire est exactement la traduction de la forme (iii) de l'égalité de Parseval ci-dessus. On en déduit en particulier que, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ appartenant à $\ell^2(\mathbf{N})$,

$$\|\Phi((x_k)_{k\in\mathbf{N}})\|_{\mathfrak{H}} = \|(x_k)_{k\in\mathbf{N}}\|_{\ell^2(\mathbf{N})}\,,$$

de sorte qu'en particulier $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{0\}$. Enfin $\mathrm{Im}\,\Phi = \mathfrak{H}$ d'après 1), cqfd. ■

Attention : pour $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N})$, la série

$$\sum_{k\geq 0} x_k e_k$$

est convergente mais en général pas normalement convergente dans $\mathfrak{H}$.

3.3.3 Exemples de bases hilbertiennes

Voici quelques exemples de bases hilbertiennes couramment utilisées en Analyse.

1) On considère l'espace de Hilbert $\mathfrak{H} = L^2([0,1])$; tout élément de $\mathfrak{H}$ s'identifie à une fonction définie pp., mesurable et périodique[1] de période 1 et dont le carré du module est sommable sur une période. Alors la théorie L^2 des séries de Fourier (qui sera exposée en détail au chapitre suivant) montre que la suite $(e^{i2\pi kx})_{k\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathfrak{H}$.

2) Soit comme ci-dessus $\mathfrak{H} = L^2([0,1])$; la suite $(\sin(\pi n x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2([0,1])$ (c'est la base diagonalisant l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ avec conditions de Dirichlet en $x=0$ et $x=1$). On notera la différence avec la base hilbertienne précédente : les fréquences sont ici multiples de π et non de 2π, bien que l'intervalle soit de même longueur. L'idée est ici d'identifier tout élément de $\mathfrak{H}$ à une fonction impaire[2] appartenant à l'espace de Hilbert $L^2([-1,1])$, étendue en une fonction périodique de période 2 définie pp. sur $\mathbf{R}$: on sait qu'alors la série de Fourier d'une telle fonction ne comprend que des modes sinus.

3) On considère maintenant l'espace de Hilbert $\mathfrak{H} = L^2([-1,1])$; pour tout $n \in \mathbf{N}$ on définit le n-ième polynôme de Legendre par la formule

$$P_0(x) = 1\,, \quad P_n(x) = \tfrac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,,\ n \geq 1\,.$$

La suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ constitue une base hilbertienne de polynômes orthogonaux de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$.

4) Considérons encore l'espace de Hilbert $\mathfrak{H} = L^2([-1,1])$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on définit le n-ième polynôme de Tchebychev par la formule

$$P_0(x) = 1\,, \quad P_n(x) = 2^{1-n}\cos(n \arccos(x))$$

La suite $(\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-x^2)^{-1/4}P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est également une base hilbertienne de $\mathfrak{H}$.

5) Soit maintenant $\mathfrak{H} = L^2(\mathbf{R})$; on définit le n-ième polynôme d'Hermite par la formule

$$H_0(x) = 1\,, \quad H_n(x) = (-1)^n \pi^{1/4}\sqrt{2^n n!}\,e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \text{ pour } n \geq 1$$

Alors $(e^{-x^2/2}H_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathfrak{H}$.

Les trois derniers exemples sont construits à partir de systèmes de polynômes orthogonaux ; ces polynômes ont une grande importance en analyse numérique, par exemple pour les formules de quadrature permettant le calcul numérique d'intégrales.

[1] C'est à dire une fonction tq. $f(x+1) = f(x)$ pp. en $x \in \mathbf{R}$.

[2] C'est à dire une fonction f vérifiant $f(x) = f(-x)$ pp. en $x \in [-1,1]$.

3.4 Convergence faible

Soit $\mathfrak{H}$ espace de Hilbert séparable de dimension infinie sur $\mathbf{C}$.

Définition 3.4.1 *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathfrak{H}$ converge faiblement vers $x \in \mathfrak{H}$, ce que l'on note*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ pour } n \to \infty$$

si, pour tout $\xi \in \mathfrak{H}$, on a

$$\text{pour tout } \xi \in \mathfrak{H}\,, \text{ on a } (\xi|x_n) \to (\xi|x) \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Toute suite convergente dans $\mathfrak{H}$ est évidemment faiblement convergente, et vers la même limite. Nous verrons plus loin que la réciproque est fausse, sauf évidemment dans le cas où $\mathfrak{H}$ est de dimension finie. Donc la notion de convergence faible n'a d'intérêt que dans le cas d'espaces de dimension infinie.

Toute suite convergente dans $\mathfrak{H}$ est évidemment bornée ; c'est encore vrai de toute suite faiblement convergente dans $\mathfrak{H}$, mais la démonstration de ce fait est loin d'être évidente.

Théorème 3.4.2 *Toute suite faiblement convergente de $\mathfrak{H}$ est bornée.*

Cet énoncé est une variante (dans le cadre hilbertien) du théorème de Banach-Steinhaus. Ce dernier résultat se démontre habituellement au moyen du théorème de Baire ; voici toutefois une preuve élémentaire du résultat ci-dessus qui n'utilise pas le théorème de Baire — cet argument est dû à D. Sarason.

Démonstration. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suite de $\mathfrak{H}$ faiblement convergente. Pour tout $\xi \in \mathfrak{H}$, la suite de nombres complexes $(\xi|x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, donc bornée :

$$\sup_{n\geq 0} |(\xi|x_n)| = M(\xi) < \infty\,.$$

Evidemment

$$\text{si } \sup_{|\xi|=1} M(\xi) = M^* < \infty\,, \text{ alors } \|x_n\| \leq M^* \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}\,.$$

(En effet, en choisissant $\xi = x_n/\|x_n\|$ pour $x_n \neq 0$, on trouve que $\|x_n\| \leq M^*$ pour tout $n \in \mathbf{N}$).

Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée dans $\mathfrak{H}$. Alors il existe $n_1 \geq 0$ et $e_1 \in \mathfrak{H}$ tel que $\|e_1\| = 1$ et

$$|(e_1|x_{n_1})| \geq 1\,.$$

Considérons maintenant $V_1 = (\mathrm{Vect}\{e_1, x_{n_1}\})^\perp$; alors si la suite $(P_{V_1}x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ était bornée, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ le serait aussi. En effet, si $\hat{e}_1 \in \mathrm{Vect}\{e_1, x_1\}$ et la famille $\{e_1, \hat{e}_1\}$ est orthonormée, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|(e_1|x_n)| \leq M(e_1) \text{ et } |(\hat{e}_1|x_n)| \leq M(\hat{e}_1)\,.$$

Donc

$$\|x_n\|^2 = \|P_{V_1}x_n\|^2 + M(e_1)^2 + M(\hat{e}_1)^2\,,$$

de sorte que $(x_n)_{n\geq 1}$ serait bornée si $(P_{V_1}x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ était bornée.

Donc la suite $(P_{V_1}x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée, de sorte qu'il existe $e_2 \in V_1$ de norme 1 et $n_2 \geq 0$ tels que

$$|(e_2|x_{n_2})| \geq 2(2 + M(e_1))\,.$$

Notons $V_2 = (\mathrm{Vect}\{e_1, e_2, x_{n_1}, x_{n_2}\})^\perp$; comme ci-dessus, la suite $(P_{V_2}x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée, faute de quoi la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ serait bornée. Alors, il existe $e_3 \in V_2$ de norme 1 et $n_3 \geq 0$ tels que

$$|(e_3|x_{n_3})| \geq 3(3 + M(e_1) + \tfrac{1}{2}M(e_2))\,.$$

Par récurrence, on construit une suite de vecteurs unitaires $(e_k)_{k\geq 1}$ et une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, notée $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}^*}$, telles que

$$e_k \perp e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}$$

et

$$|(e_k|x_{n_k})| \geq k(k + M(e_1) + \tfrac{1}{2}M(e_2) + \ldots + \tfrac{1}{k-1}M(e_{k-1}))\,.$$

Soit maintenant le vecteur

$$f = \sum_{k\geq 1} \tfrac{1}{k} e_k\,;$$

comme la suite $(e_k)_{k\geq 1}$ est orthonormée et que

$$\sum_{k\geq 1} \tfrac{1}{k^2} < \infty$$

la série définissant f converge dans $\mathfrak{H}$.

Calculons alors

$$\begin{aligned}
|(f|x_{n_k})| &= \left| \tfrac{1}{k}(e_k|x_{n_k}) + \sum_{j=1}^{k-1} \tfrac{1}{j}(e_j|x_{n_k}) \right| \\
&\geq \frac{1}{k}|(e_k|x_{n_k})| - \sum_{j=1}^{k-1} \tfrac{1}{j}M(e_j) \\
&\geq \left(k + \sum_{j=1}^{k-1} \tfrac{1}{j}M(e_j)\right) - \sum_{j=1}^{k-1} \tfrac{1}{j}M(e_j) \geq k\,.
\end{aligned}$$

Ceci est en contradiction avec le fait que

$$|(f|x_{n_k})| \leq M(f) < \infty \text{ pour } k \geq 1\,.$$

Donc l'hypothèse selon laquelle la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée est en contradiction avec le fait que cette suite est faiblement convergente, cqfd.

■

Voici une première caractérisation très naturelle de la convergence faible.

Proposition 3.4.3 *Soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de $\mathfrak{H}$. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathfrak{H}$ converge faiblement vers $x \in \mathfrak{H}$ si et seulement si elle est bornée et*

$$\textit{pour tout } k \in \mathbf{N}\,,\ \textit{on a } \hat{x}_n(k) \to \hat{x}(k) \ \textit{pour } n \to \infty\,,$$

où $\hat{x}_n(k) = (e_k|x_n)$.

Cette proposition montre en particulier que toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert de dimension finie est convergente pour la topologie définie par la norme. En effet, si $(e_1, \ldots, e_N)$ est une base orthonormée de $\mathfrak{H}$, si une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathfrak{H}$ converge faiblement, les suites $(e_k|x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des coordonnées de x_n convergent pour $1 \le k \le N$, ce qui implique évidemment que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en norme.
Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathfrak{H}$ telle que $x_n \rightharpoonup x$ pour $n \to \infty$; alors $\hat{x}_n(k) = (e_k|x_n) \to (e_k|x)$ pour $n \to \infty$; de plus, d'après le théorème ci-dessus, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Réciproquement, supposons que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie

$$\|x_n\| \le M \text{ et } \hat{x}_n(k) \to \lambda_k \text{ pour tout } n \ge 0\,.$$

D'après la forme (ii) de l'égalité de Parseval, on a

$$\sum_{k\ge 0} |\hat{x}_n(k)|^2 \le M^2$$

de sorte que

$$\sum_{k\ge 0} |\lambda_k|^2 \le M^2\,.$$

Par conséquent, la série

$$\sum_{k\ge 0} \lambda_k e_k$$

converge dans $\mathfrak{H}$; notons alors

$$x = \sum_{k\ge 0} \lambda_k e_k\,.$$

D'après la forme (iii) de l'égalité de Parseval, on a

$$(\xi|x_n - x) = \sum_{k\ge 0} \overline{\hat{\xi}(k)}(\hat{x}_n(k) - \lambda_k)\,,$$

ainsi que

$$\|\xi\|^2 = \sum_{k\ge 0} |\hat{\xi}(k)|^2\,.$$

Comme la série au membre de droite ci-dessus converge, étant donné $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tq.

$$\sum_{k>N} |\hat{\xi}(k)|^2 < \epsilon^2\,.$$

Alors

$$|(\xi|x_n - x)| \leq \left|\sum_{k=0}^{N} \overline{\hat{\xi}(k)}(\hat{x}_n(k) - \lambda_k)\right| + 2M\epsilon$$

de sorte que, pour $n \to \infty$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |(\xi|x_n - x)| \leq 2M\epsilon\,.$$

Comme ceci vaut pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |(\xi|x_n - x)| = 0$$

et donc que

$$x_n \rightharpoonup x \text{ pour } n \to \infty\,.$$

■

Comme l'espace $\mathfrak{H}$ est de dimension infinie, sa boule unité fermée n'est pas compacte, et donc il existe des suites bornées de $\mathfrak{H}$ dont aucune suite extraite ne converge dans $\mathfrak{H}$. (C'est le cas, par exemple, de toute base hilbertienne de $\mathfrak{H}$).

Mais il en va tout autrement pour la convergence faible, et c'est là tout l'intérêt de cette notion.

Théorème 3.4.4 *Toute suite bornée de $\mathfrak{H}$ admet une sous-suite faiblement convergente.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suite de $\mathfrak{H}$ telle que $\|x_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et soit $(e_k)_{k\in\mathbf{N}}$ base hilbertienne de $\mathfrak{H}$.

Soit $\hat{x}_n(k) = (e_k|x_n)$; alors

$$|\hat{x}_n(k)| \leq M \text{ pour tous } k, n \in \mathbf{N}\,.$$

Comme la suite $(\hat{x}_n(0))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, il existe $\phi_0 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$\hat{x}_{\phi_0(n)}(0) \to \lambda_0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Comme la suite $(\hat{x}_{\phi_0(n)}(1))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, il existe $\phi_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$\hat{x}_{\phi_0\circ\phi_1(n)}(1) \to \lambda_1 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Comme cette suite est extraite de $(\hat{x}_{\phi_0(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, on a aussi

$$\hat{x}_{\phi_0\circ\phi_1(n)}(0) \to \lambda_0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Par récurrence, on construit $\phi_j : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$\hat{x}_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_j(n)}(k) \to \lambda_k \text{ pour } n \to \infty \text{ et } k = 0, \ldots, j\,.$$

Considérons la suite extraite $(\hat{x}_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_n(n)})_{n\in\mathbf{N}}$. Cette suite est bornée ; d'autre part, pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$\hat{x}_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_n(n)}(k) \to \lambda_k \text{ pour } n \to \infty \text{ et tout } k \in \mathbf{N}\,.$$

D'après la proposition précédente, on en déduit que la suite extraite $(\hat{x}_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_n(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est faiblement convergente, cqfd.. ■

Voici un exemple important de suite convergeant faiblement mais pas en norme. Soient $\mathfrak{H}$ espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de $\mathfrak{H}$. Alors

$$e_n \rightharpoonup 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

En effet, pour tout $x \in \mathfrak{H}$, on a

$$\sum_{n\geq 0} |(e_n|x)|^2 \leq \|x\|^2\,;$$

comme la série au membre de gauche de l'inégalité ci-dessus converge, la suite $(e_n|x) \to 0$ pour $n \to \infty$.

Evidemment, e_n ne converge pas vers 0 en norme puisque $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \geq 1$.

Théorème 3.4.5 *Soient $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ et $\mathfrak{H}$ des espaces de Hilbert séparables et B une application bilinéaire — ou sesquilinéaire — continue de $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$ à valeurs dans $\mathfrak{H}$. Soient $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ respectivement.*

a) si $x_n \rightharpoonup x$ dans $\mathfrak{H}_1$ et $y_n \rightharpoonup y$ dans $\mathfrak{H}_2$ pour $n \to \infty$, on n'a pas forcément $B(x_n, y_n) \rightharpoonup B(x, y)$ dans $\mathfrak{H}$ pour $n \to \infty$;

b) si $x_n \to x$ dans $\mathfrak{H}_1$ et $y_n \rightharpoonup y$ dans $\mathfrak{H}_2$ pour $n \to \infty$, alors $B(x_n, y_n) \rightharpoonup B(x, y)$ dans $\mathfrak{H}$ pour $n \to \infty$.

Démonstration. Pour ce qui est du a) considérons le cas où $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2$ et $\mathfrak{H} = \mathbf{C}$. Soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de $\mathfrak{H}_1$; choisissons alors les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par

$$x_n = y_n = e_n\,, \quad n \in \mathbf{N}\,,$$

ainsi que

$$B(x, y) = (x|y)\,.$$

On vient de voir que $e_n \rightharpoonup 0$ dans $\mathfrak{H}_1$; pourtant

$$B(e_n, e_n) = (e_n|e_n) = 1$$

de sorte que l'on n'a pas

$$\text{la relation } B(e_n, e_n) \rightharpoonup 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Passons à la démonstration du point b). D'après le principe de bornitude uniforme, la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée : il existe donc $M > 0$ tq.

$$|y_n| \leq M\,, \qquad n \in \mathbf{N}\,.$$

D'autre part, pour tout $z \in \mathfrak{H}$, l'application

$$\phi : \mathfrak{H}_2 \ni y \mapsto (z|B(x,y)) \in \mathbf{C}$$

définit une forme linéaire continue sur $\mathfrak{H}_2$; d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $\xi \in \mathfrak{H}_2$ représentant ϕ, c'est à dire que

$$(z|B(x,y)) = (\xi|y)\,, \qquad \text{pour tous } z \in \mathfrak{H}\,,\ x \in \mathfrak{H}1 \text{ et } y \in \mathfrak{H}_2\,.$$

Alors

$$(z|B(x_n,y_n) - B(x,y)) = (z|B(x_n - x, y_n)) + (z|B(x, y_n - y))\,.$$

Le premier terme au membre de droite vérifie

$$|(z|B(x_n - x, y_n))| \leq CM\|z\|\|x_n - x\| \to 0 \text{ pour } n \to 0\,;$$

quant au second

$$(z|B(x, y_n - y)) = (\xi|y_n - y) \to 0 \text{ pour } n \to \infty\,,$$

d'où finalement

$$(z|B(x_n,y_n) - B(x,y)) \to 0 \text{ pour } n \to \infty\,,$$

cqfd. ■

3.5 Opérateurs dans les espaces de Hilbert

Dans toute cette section, $\mathfrak{H}$ désigne un espace de Hilbert séparable.

3.5.1 Adjoint d'un opérateur borné

Soit T opérateur borné sur $\mathfrak{H}$ — ce qui signifie que T est une application linéaire continue de $\mathfrak{H}$ dans lui-même.

Soient $x, y \in \mathfrak{H}$; considérons la forme linéaire sur $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{H} \ni x \mapsto (y|Tx)$$

elle est manifestement continue ; donc, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un vecteur $z \in \mathfrak{H}$ unique tel que

$$(z|x) = (y|Tx) \text{ pour tout } x \in \mathfrak{H}\,.$$

Ce vecteur z sera noté

$$z = T^*y$$

c'est à dire que pour tous $x, y \in \mathfrak{H}$

$$(y|Tx) = (T^*y|x)\,.$$

Définition 3.5.1 *L'application $\mathfrak{H} \ni y \mapsto T^*y \in \mathfrak{H}$ est linéaire et continue sur $\mathfrak{H}$: on l'appelle "opérateur adjoint de T".*

On vérifie sans peine que

$$(T+S)^* = T^* + S^*\,,\ (\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*\,,\ (TS)^* = S^*T^*\,.$$

Notons que

$$\|T^*\| = \|T\|\,.$$

(En effet, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$\|T^*x\|^2 = (T^*x|T^*x) = (x|TT^*x) \leq \|T\|\|x\|\|T^*x\|$$

d'où $\|T^*\| \leq \|T\|$; pour l'inégalité inverse, utiliser le fait que $(T^*)^* = T$.)

Proposition 3.5.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$; alors*

$$\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp\,.$$

Démonstration. Pour tous $x, y \in \mathfrak{H}$, on a

$$(x|Ty) = (T^*x|y)\,.$$

Alors, si $T^*x = 0$, on a $x \perp Ty$ pour tout $y \in \mathfrak{H}$, c'est à dire que $x \perp \mathrm{Im}\,\mathfrak{H}$: donc

$$\mathrm{Ker}(T^*) \subset \mathrm{Im}(T)^\perp\,.$$

Réciproquement, si $x \perp \mathrm{Im}(T)$, on a

$$(T^*x|y) = 0$$

pour tout $y \in \mathfrak{H}$; en prenant $y = T^*x$, on trouve que

$$(T^*x|T^*x) = \|T^*x\|^2 = 0\,.$$

Donc $T^*x = 0$ c'est à dire que $x \in \mathrm{Ker}(T^*)$. Ainsi on a montré que

$$\mathrm{Im}(T)^\perp \subset \mathrm{Ker}(T^*)\,.$$

On conclut donc que $\mathrm{Im}(T)^\perp = \mathrm{Ker}(T^*)$. ■

La notion d'adjoint permet de montrer sans difficulté que

Proposition 3.5.3 *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tq. $x_n \rightharpoonup x$ dans $\mathfrak{H}$, et toute application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, on a*

$$Tx_n \rightharpoonup Tx \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Démonstration. En effet, pour tout $y \in \mathfrak{H}$, on a

$$(y|Tx_n) = (T^*y|x_n) \to (T^*y,|x) = (y|Tx) \text{ pour } n \to \infty\,,$$

ce qui démontre le résultat annoncé. ■

Voici une caractérisation très simples des opérateurs compacts dans un espace de Hilbert.

Proposition 3.5.4 *Soit $\mathfrak{H}$ espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Alors T est un opérateur compact si et seulement si*

$$Tx_n \to 0 \text{ pour } n \to \infty$$

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tq.

$$x_n \rightharpoonup 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Démonstration. Supposons que T est un opérateur compact sur $\mathfrak{H}$ et que

$$x_n \rightharpoonup 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

D'après le principe de bornitude uniforme, il existe $M > 0$ tq.

$$\|x_n\| \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}\,.$$

Donc $(Tx_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de $\overline{T(B(0, M+1))}$ qui est compact. D'autre part, il résulte de la proposition précédente que

$$Tx_n \rightharpoonup 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Donc la seule valeur d'adhérence possible de la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (pour la topologie de la norme) est 0 ; comme cette suite est à valeurs dans un compact, on en déduit que

$$Tx_n \to 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Réciproquement, supposons que

$$Tx_n \to 0 \text{ pour } n \to \infty$$

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tq.

$$x_n \rightharpoonup 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Montrons que $\overline{T(B(0,1))}$ est compact. Il suffit donc de montrer que toute suite de $T(B(0,1)$ admet une sous-suite convergente en norme. Soit donc $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $T(B(0,1))$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe donc $x_n \in \mathfrak{H}$ tq.

$$Tx_n = y_n \text{ et } \|x_n\| < 1\,.$$

Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, il existe une suite extraite $n_k \to \infty$ pour $k \to \infty$ tq.

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ pour } k \to \infty\,;$$

donc

$$y_{n_k} = Tx_{n_k} \to Tx \text{ pour } k \to \infty\,,$$

cqfd. ■

Théorème 3.5.5 *Soit $\mathfrak{H}$ espace de Hilbert séparable et soit $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Si T est un opérateur compact, son adjoint T^* est également un opérateur compact.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathfrak{H}$ tq.

$$x_n \rightharpoonup 0 \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Comme T^* est une application linéaire continue sur $\mathfrak{H}$

$$T^* x_n \rightharpoonup 0 \text{pour } n \to \infty\,;$$

donc

$$\|T^* x_n\|^2 = (x_n | TT^* x_n) \to 0 \text{pour } n \to \infty\,.$$

En effet, $TT^* x_n \to 0$ pour $n \to \infty$ puisque T est compact et que $T^* x_n \rightharpoonup 0$; enfin, le produit scalaire converge vers 0 d'après le théorème 3.4.5. ■

3.5.2 Spectre des opérateurs compacts

La théorie spectrale des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert séparable diffère très peu de celle des matrices.

Théorème 3.5.6 (Alternative de Fredholm) *Soit K opérateur compact sur $\mathfrak{H}$, et soit $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Alors*

a) $\operatorname{Ker}(\lambda I - K)$ *est de dimension finie,*

b) $\operatorname{Im}(\lambda I - K) = \operatorname{Ker}(\lambda I - K^*)^\perp$.

En particulier, b) implique que $\Im(\lambda I - K)$ est fermé et de codimension finie.

Démonstration. Commençons par le a) : le sev $\operatorname{Ker}(\lambda I - K)$ est fermé dans $\mathfrak{H}$ (comme noyau d'une application linéaire continue) : c'est donc un espace de Hilbert pour la restriction du produit scalaire de $\mathfrak{H}$.

D'autre part, $K(\operatorname{Ker}(\lambda I - K)) \subset \operatorname{Ker}(\lambda I - K)$ et K coïncide avec λI sur $\operatorname{Ker}(\lambda I - K)$. Comme K est un opérateur compact, il en va de même pour $K\big|_{\operatorname{Ker}(\lambda I - K)}$. Autrement dit, λI est un opérateur compact sur $\operatorname{Ker}(\lambda I - K)$: ceci n'est possible que si $\lambda = 0$ ou si $\operatorname{Ker}(\lambda I - K)$ est de dimension finie (voir chapitre 1, section 1.5.3).

Passons au point b). Commençons par montrer que $\operatorname{Im}(\lambda I - K)$ est fermée. En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathfrak{H}$ tq.

$$y_n = (\lambda I - K)x_n \to y \text{ pour } n \to \infty\,.$$

Quitte à soustraire à x_n sa projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}(\lambda I - K)$, on peut supposer que

$$x_n \perp \operatorname{Ker}(\lambda I - K)\,.$$

Nécessairement, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Sinon, il existerait une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ tq.

$$\|x_{n_k}\| \to \infty \text{ pour } k \to \infty\,.$$

Alors la suite $(z_k)_{k\in\mathbf{N}}$ définie par

$$z_k = \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \text{ vérifie } \|z_k\| = 1$$

Elle admet donc une sous-suite $(z_{k_l})_{l\in\mathbf{N}}$ tq.

$$z_{k_l} \rightharpoonup z \text{ pour } l \to \infty\,.$$

D'après la proposition 3.5.4

$$Kz_{k_l} \to Kz \text{ pour } l \to \infty\,;$$

d'autre part

$$(\lambda I - K)z_{k_l} = \frac{y_{n_{k_l}}}{\|x_{n_{k_l}}\|} \to 0 \text{pour } l \to \infty$$

de sorte que

$$\lambda z_{k_l} \to Kz \text{ pour } l \to \infty$$

Autrement dit,

$$z \in \operatorname{Ker}(\lambda I - K)$$

mais comme d'autre part

$$z_{k_l} \perp \operatorname{Ker}(\lambda I - K) \text{ pour tout } l \in \mathbf{N}$$

puisque $x_n \perp \operatorname{Ker}(\lambda I - K)$ pour tout $n \geq 0$, on en déduit que

$$z \in \operatorname{Ker}(\lambda I - K)^{\perp}\,.$$

Par conséquent $z = 0$. Mais puisque $\lambda \neq 0$ et que $\lambda z_{k_l} \to Kz$, il s'ensuit que

$$z_{k_l} \to 0 \text{ pour } l \to \infty\,.$$

Or ceci est contradictoire avec le fait que

$$\|z_{k_l}\| = 1 \text{pour tout } l \in \mathbf{N} \text{ par construction de la suite } (z_n)_{n\in\mathbf{N}}\,.$$

Ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est nécessairement bornée. Il existe donc une sous-suite $(x_{n_p})_{p\to\infty}$ tq.

$$x_{n_p} \rightharpoonup x \text{ pour } p \to \infty\,.$$

Donc

$$(\lambda I - K)x_{n_p} \rightharpoonup (\lambda I - K)x = y \text{pour } p \to \infty\,,$$

ce qui montre que $y \in \operatorname{Im}(\lambda I - K)$. Ainsi on a montré que $\operatorname{Im}(\lambda I - K)$ est fermée.

D'après la proposition 3.5.2 et le corollaire 3.2.4

$$\operatorname{Im}(\lambda I - K) = \overline{\operatorname{Im}(\lambda I - K)} = (\operatorname{Im}(\lambda I - K)^{\perp})^{\perp} = \operatorname{Ker}(\lambda I - K^*)^{\perp}\,.$$

■

3.5.3 Les opérateurs de Hilbert-Schmidt

On considère ici le cas particulier où $\mathfrak{H} = L^2(\mathbf{R}^N)$.

Définition 3.5.7 *Un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbf{R}^N)$ est une application linéaire T de la forme*

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} k(x,y)f(y)dy$$

où $k \in L^2(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$.

Vérifions tout d'abord que T est continu : pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$

$$\|Tf\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbf{R}^N} \left| \int_{\mathbf{R}^N} k(x,y)f(y)dy \right|^2 dx \leq \iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} |k(x,y)|^2 dxdy \int_{\mathbf{R}^N} |f(y)|^2 dy\,.$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc T est bien continue sur $\mathfrak{H}$, de norme

$$\|T\| \leq \left(\iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} |k(x,y)|^2 dxdy \right)^{1/2}\,.$$

Proposition 3.5.8 *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbf{R}^N)$ est compact.*

Démonstration. Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbf{R}^N)$ de noyau intégral $k \equiv k(x,y)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $L^2(\mathbf{R}^N)$ telle que $f_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ pour $n \to \infty$. Montrons que $Tf_n \to 0$ dans $L^2(\mathbf{R}^N)$.

D'abord, pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$, la fonction $k(x,\cdot)$ appartient à $L^2(\mathbf{R}^N)$: donc, pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$,

$$\int_{\mathbf{R}^N} k(x,y)f_n(y)dy \to 0 \text{ dans } L^2(\mathbf{R}^N) \text{ pour } n \to \infty\,.$$

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$\left| \int_{\mathbf{R}^N} k(x,y)f_n(y)dy \right|^2 \leq \int_{\mathbf{R}^N} |k(x,y)|^2 dy \|f_n\|_{L^2}^2\,.$$

Comme $f_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbf{R}^N)$ lorsque $n \to \infty$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée ; soit donc

$$M = \sup_{n\in\mathbf{N}} \|f_n\|_{L^2}^2\,.$$

Alors

$$|\int_{\mathbf{R}^N} k(x,y)f_n(y)dy|^2 \leq M^2 \|k(x,\cdot)\|_{L^2}^2$$

et $x \mapsto \|k(x,\cdot)\|_{L^2}^2$ appartient à $L^1(\mathbf{R}^N)$ d'après le théorème de Fubini puisque

$$\iint_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} |k(x,y)|^2 dxdy < \infty\,.$$

Le théorème de convergence dominée entraîne donc que

$$\int_{\mathbf{R}^N} \left| \int_{\mathbf{R}^N} k(x,y) f_n(y) dy \right|^2 dx \to 0$$

c'est à dire que

$$T f_n \to 0 \text{ pour } n \to \infty \,,$$

cqfd. ■

3.5.4 Application aux équations intégrales

On considère une équation intégrale de la forme

$$\| f(x) - \int_{\mathbf{R}^N} k(x,y) f(y) dy = g(x)$$

où $g \in L^2(\mathbf{R}^N)$ est une fonction donnée, tandis que $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$ est l'inconnue. On suppose dans ce qui suit que $k \in L^2(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N)$.

En appliquant l'alternative de Fredholm à l'opérateur de Hilbert-Schmidt (qui est donc compact) défini par

$$(Kf)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} k(x,y) f(y) dy \,,$$

on aboutit à ce qui suit.

Soit l'équation homogène

$$\lambda \phi(x) - \int_{\mathbf{R}^N} k(x,y) \phi(y) dy = 0 \,;$$

si elle admet pour seule solution la fonction nulle pp. $\phi = 0$, alors l'équation intégrale avec second membre ci-dessus admet une unique solution.

Supposons maintenant que l'équation intégrale homogène admette au moins une solution non nulle.

L'équation intégrale avec second membre n'admet de solution que si la fonction g vérifie la relation de compatibilité

$$\int_{\mathbf{R}^N} \overline{\phi(x)} g(x) dx = 0$$

pour toute solution ϕ de l'équation intégrale homogène.

Auquel cas, l'équation intégrale admet au moins une solution ; de plus toute solution de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et d'une solution arbitraire de l'équation homogène.

Chapitre 4

Analyse de Fourier

4.1 Fonctions mesurables périodiques

Définition 4.1.1 *Soit f une fonction mesurable à valeurs complexes définie pp. sur $\mathbf{R}$. On dira que f est périodique de période 1 si*

$$f(x+1) = f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}\,.$$

Auquel cas

$$f(x+k) = f(x) \text{ pour tout } k \in \mathbf{Z} \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}\,.$$

A priori, l'ensemble de mesure nulle $\mathcal{N}_k$ sur lequel cette relation n'a pas lieu dépend de $k \in \mathbf{Z}$; mais en choisissant

$$\mathcal{N} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{N}_k$$

on voit que l'égalité ci-dessus a lieu pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathcal{N}$ et tout $k \in \mathbf{Z}$; de plus $\mathcal{N}$ est de mesure nulle comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle.

Alors f passe au quotient et définit une application $\tilde{f} : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$; inversement, l'application $\tilde{f}$ détermine f de façon unique. Dans la suite, on notera $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Soit donc f une fonction mesurable à valeurs complexes définie pp. sur $\mathbf{R}$; soient $p \in [1, \infty[$ et $a \in \mathbf{R}$ quelconque ; alors

$$\int_a^{a+1} |f(x)|^p dx = \int_0^1 |f(x)|^p dx\,.$$

Définition 4.1.2 *Pour tout $p \in [1, \infty[$, on note $L^p(\mathbf{T})$ l'espace des fonctions f à valeurs complexes définies et mesurables pp. sur $\mathbf{R}$ et de période 1 tq. $f\big|[a, a+1[\in L^p([a, a+1[)$, où a est un réel quelconque. On note*

$$\|f\|_{L^p(\mathbf{T})} = \left(\int_a^{a+1} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}\,.$$

Enfin, si f est une fonction mesurable à valeurs complexes définie pp. sur $\mathbf{R}$ et périodique de période 1, on a

$$\operatorname{supess}_{x\in[a,a+1[}|f(x)| = \operatorname{supess}_{x\in\mathbf{R}}|f(x)| \text{ pour tout } a \in \mathbf{R}\,.$$

Définition 4.1.3 *On note $L^\infty(\mathbf{T})$ le sous-espace fermé de $L^\infty(\mathbf{R})$ formé des fonctions périodiques de période* 1*. De plus, pour $f \in L^\infty(\mathbf{T})$, on a*

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbf{T})} = \operatorname{supess}_{x\in[a,a+1[}|f(x)| = \operatorname{supess}_{x\in\mathbf{R}}|f(x)|\,.$$

4.2 Séries de Fourier

Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, posons

$$e_k(x) = e^{i2\pi kx}\,, \qquad x \in \mathbf{R}\,.$$

On remarque que

$$\int_0^1 \overline{e_k(x)}e_l(x)dx = \delta_{kl}\,, \quad k,l \in \mathbf{Z}\,.$$

Ainsi, la suite $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est-elle orthonormée dans $L^2(\mathbf{T})$.

Etant donnée une fonction $f \in L^1(\mathbf{T})$, on note

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 \overline{e_k(x)}f(x)dx\,, \qquad k \in \mathbf{Z}\,.$$

Lemme 4.2.1 (Riemann-Lebesgue) *Pour tout $f \in L^1(\mathbf{T})$, la suite $\hat{f}(k)$ vérifie*

$$\hat{f}(k) \to 0 \textit{ pour } |k| \to \infty\,.$$

Démonstration. Comme $e_k(-x-\frac{1}{2k}) = -e_k(-x)$,

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \int_0^1 e_k(-x)f(x)dx = -\int_0^1 e_k(-x-\tfrac{1}{2k})f(x)dx\\ &= -\int_{\frac{1}{2k}}^{1+\frac{1}{2k}} e_k(-y)f(y-\tfrac{1}{2k})dx = -\int_0^1 e_k(-y)f(y-\tfrac{1}{2k})dx = -\widehat{\tau_{1/2k}f}(k)\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\hat{f}(k) = -\tfrac{1}{2}\int_0^1 e_k(-y)(\tau_{1/2k}f(y)-f(y))dy$$

de sorte que

$$|\hat{f}(k)| \le \tfrac{1}{2}\|\tau_{1/2k}f - f\|_{L^1(\mathbf{T})} \to 0$$

lorsque $|k| \to \infty$, d'après le Lemme 2.4.6. ■

La série de Fourier de f est

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{f}(k)e_x(x)\,;$$

les questions suivantes se posent alors naturellement :

– pour quelles classes de fonctions f la série de Fourier de f est-elle convergente, et dans l'affirmative, en quel sens converge-t-elle ?
– lorsque la série de Fourier de f converge, converge-t-elle vers f ? et dans l'affirmative, en quel sens converge-t-elle ?
– quelles sont les propriétés de la fonction f qu'on peut lire aisément sur la suite des coefficients de Fourier ?

Pour $N \in \mathbf{N}$, notons $S_N[f]$ la somme partielle de la série de Fourier :

$$S_N[f](x) = \sum_{|k|\le N} \hat{f}(k) e_k(x) .$$

Lemme 4.2.2 *Pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $f \in L^2(\mathbf{T})$, la somme partielle de la série de Fourier $S_N[f]$ est la projection orthogonale de f sur le sev. de dimension finie* $\mathrm{Vect}\{e_k \,|\, |k| \le N\}$.

Démonstration. Comme la famille $(e_k)_{|k|\le N}$ est orthonormée, on a

$$f - S_N[f] \perp e_k \text{ pour tout } k \in \mathbf{Z} .$$

Donc $S_N[f]$ est la projection orthogonale de f sur $\mathrm{Vect}\{e_k \,|\, |k| \le N\}$. ■

En particulier, si on savait que la famille $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est totale dans $L^2(\mathbf{T})$, on en déduirait immédiatement que, pour tout $f \in L^2(\mathbf{T})$

$$S_N[f] \to f \text{ dans } L^2(\mathbf{T}) \text{ pour } N \to \infty .$$

Avant que d'étudier si la suite $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est totale dans $L^2(\mathbf{T})$, nous allons donner une autre expression de $S_N[f]$, plus commode d'un certain point de vue. En effet

$$S_N[f](x) = \sum_{|k|\le N} \int_0^1 f(y) e_k(x) e_k(-y) dy = \int_0^1 f(y) \sum_{|k|\le N} e_k(x-y) dy ,$$

de sorte que

$$S_N[f](x) = \int_0^1 D_N(x-y) f(y) dy , \quad N \in \mathbf{Z}$$

où la fonction D_N est le noyau de Dirichlet, défini comme suit :

$\boxed{\text{NOYAU DE DIRICHLET}}$

$$\begin{aligned} D_N(x) = \sum_{|k|\le N} e_k(x) &= e^{-i2\pi N x} \frac{e^{i2\pi(2N+1)x} - 1}{e^{i2\pi x} - 1} \\ &= e^{-i2\pi N x} \frac{e^{i2\pi(N+\frac{1}{2})x}\big(e^{i2\pi(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i2\pi(N+\frac{1}{2})x}\big)}{e^{i\pi x}\big(e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}\big)} \\ &= \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)} . \end{aligned}$$

Il existe des fonctions f continues sur $\mathbf{T}$ telles que $S_N[f]$ ne converge pas uniformément vers f pour $N \to \infty$ — en fait, on peut montrer que pour tout $x_0 \in \mathbf{T}$, l'ensemble des fonctions $f \in C(\mathbf{T})$ telles que

$$sup_{N\geq 0}|S_N(f)(x_0)| = \infty$$

est dense dans $C(\mathbf{T})$ pour la topologie de la convergence uniforme. Ce résultat s'obtient par un argument abstrait de topologie (par le théorème de Banach-Steinhaus, lui-même basé sur un argument de catégorie de Baire). Un exemple explicite d'une fonction f continue sur $\mathbf{T}$ telle que $S_N[f]$ ne converge pas uniformément vers f lorsque $N \to \infty$ est dû à Du Bois-Reymond (1873).

D'autre part, si $f \in L^2(\mathbf{T})$, on sait aujourd'hui que $S_N[f](x) \to f(x)$ pp. en $x \in \mathbf{T}$; ceci est un résultat difficile obtenu par Carleson (1965).

Ces deux remarques suggèrent que l'approximation de f par $S_N[f]$ n'est pas la plus naturelle pour établir que la suite $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est totale dans $L^2(\mathbf{T})$.

4.2.1 La théorie de Fejer

Au lieu de s'intéresser à la convergence de $S_N[f]$ vers f, on va étudier un problème plus simple, à savoir la convergence au sens de Cesarò de $S_N[f]$ vers f.

On pose donc

$$\Sigma_N[f] = \tfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n[f]\,.$$

A partir de l'expression de $S_N[f]$ basée sur le noyau de Dirichlet, on va mettre $\Sigma_N[f]$ sous la forme

$$\Sigma_N[f](x) = \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy\,, \quad N \in \mathbf{Z}$$

où la fonction F_N est le noyau de Dirichlet, défini comme suit :

Noyau de Fejer

$$\begin{aligned}
F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) &= \frac{1}{\sin(\pi x)}\Im\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i\pi(2k+1)x}\right)\\
&= \frac{1}{N\sin(\pi x)}\Im\left(e^{i\pi x}\frac{e^{i2\pi Nx}-1}{e^{i2\pi x}-1}\right)\\
&= \frac{1}{N\sin(\pi x)}\Im\left(e^{i\pi Nx}\frac{e^{i\pi Nx}-e^{-i\pi Nx}}{e^{i\pi x}-e^{-i\pi x}}\right)\\
&= \frac{1}{N\sin(\pi x)}\Im\left(e^{i\pi Nx}\frac{\sin(\pi Nx)}{\sin(\pi x)}\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\pi Nx)}{\sin(\pi x)}\right)^2\,, \quad x \neq 0
\end{aligned}$$

expression qui se prolonge par continuité en 0 en posant

$$F_N(0) = N\,.$$

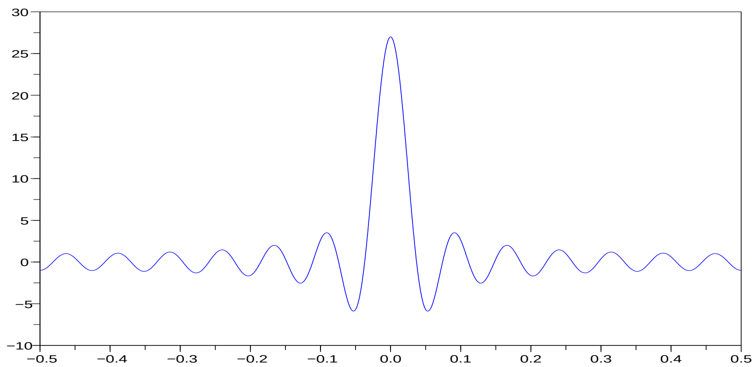

FIG. 4.1 – Le noyau de Dirichlet pour $N = 13$

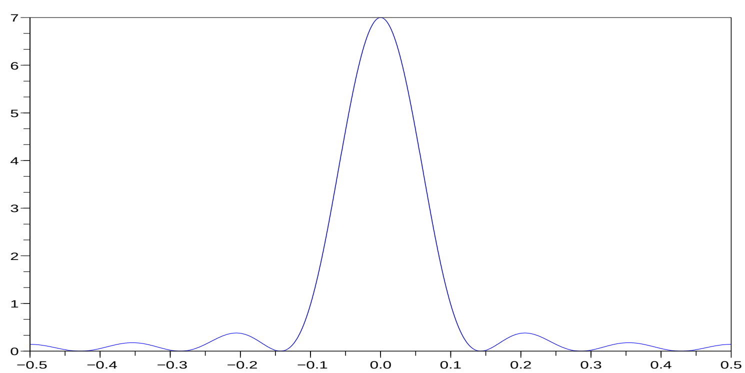

FIG. 4.2 – Le noyau de Fejer pour $N = 7$

On remarque que, par opposition avec le noyau de Dirichlet, le noyau de Fejer est positif ou nul. On verra bientôt l'importance considérable de ce fait.

Regroupons ensemble, dans l'expression du noyau de Fejer, tous les termes de la forme $e_k(x)$: on trouve que

$$\begin{aligned}F_N(x) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{|k|\le n} e_k(x) = \frac{1}{N}\sum_{|k|\le N-1}\left(\sum_{|k|\le n\le N-1} 1\right) e_k(x)\\ &= \frac{1}{N}\sum_{|k|\le N-1}(N-|k|)e_k(x) = \sum_{|k|\le N-1}\left(1-\tfrac{|k|}{N}\right) e_k(x)\end{aligned}$$

Théorème 4.2.3 (Fejer) *Soit* $1 \le p < \infty$.

1) Pour tout $f \in L^p(\mathbf{T})$, $\Sigma_N[f] \to f$ *dans* $L^p(\mathbf{T})$ *lorsque* $N \to \infty$.

2) Soit $f \in C(\mathbf{T})$ *; alors* $\Sigma_N[f] \to f$ *uniformément sur* $\mathbf{T}$ *lorsque* $N \to \infty$.

Démonstration. Le calcul de la série de Fourier du noyau de Fejer ci-dessus montre que

$$\int_0^1 F_N(x)dx\hat{F}_N(0) = 1\,.$$

Commençons par démontrer le point 1). Il vient

$$\begin{aligned}f(x) - \Sigma_N[f](x) = f(x) - \int_0^1 f(x-y)F_N(y)dy &= \int_{-1/2}^{1/2}(f(x)-f(x-y))F_N(y)dy\\ &= \int_{-1/2}^{1/2}(f-\tau_y f)(x)F_N(y)dy\,.\end{aligned}$$

Par conséquent, comme $F_N \ge 0$

$$\|f-\Sigma_N[f]\|_p \le \int_{-1/2}^{1/2}\|f-\tau_y f\|_p F_N(y)dy\,.$$

Soit alors $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$; on a

$$\begin{aligned}\|f-\Sigma_N[f]\|_p &\le \int_{-\epsilon}^{\epsilon}\|f-\tau_y f\|_p F_N(y)dy\\ &\quad + \int_{\epsilon}^{1/2}\|f-\tau_y f\|_p F_N(y)dy + \int_{-1/2}^{-\epsilon}\|f-\tau_y f\|_p F_N(y)dy\,.\end{aligned}$$

Lorsque $y \in]-\frac{1}{2}, -\epsilon[\cup]\epsilon, \frac{1}{2}[$, on a

$$F_N(y) \ge \frac{1}{N\pi^2\epsilon^2}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\|f-\Sigma_N[f]\|_p &\le \int_{-\epsilon}^{\epsilon}\|f-\tau_y f\|_p F_N(y)dy + \frac{2}{N\pi^2\epsilon^2}\cdot 2\|f\|_p\\ &\le \sup_{|y|\le\epsilon}\|f-\tau_y f\|_p\int_{-\epsilon}^{\epsilon}F_N(y)dy + \frac{4\|f\|_p}{N\pi^2\epsilon^2}\,.\end{aligned}$$

En passant à la limite supérieure pour $N \to \infty$ à ϵ fixé, on en déduit que

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \|f - \Sigma_N[f]\|_p \le \sup_{|y|\le\epsilon} \|f - \tau_y f\|_p \,.$$

Enfin, en passant à la limite pour $\epsilon \to 0$ dans cette dernière inégalité, on trouve que

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \|f - \Sigma_N[f]\|_p = 0$$

d'après le Lemme 2.4.6, cqfd.

Le point 2) se vérifie de même en utilisant la norme du sup au lieu de la norme L^p. ■

La démonstration ci-dessus montre à quel point la positivité de F_N est cruciale pour ce résultat. On laisse au lecteur le soin de se convaincre qu'il n'est pas possible d'adapter cette démonstration au cas des sommes partielles de la série de Fourier de f — c'est à dire d'y remplacer $\Sigma_N[f]$ par $S_N[f]$. En effet, le noyau de Dirichlet n'est pas positif ou nul sur $\mathbf{T}$.

4.2.2 La théorie L^2

Théorème 4.2.4 *La suite $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{T})$.*

Démonstration. On sait déjà que cette suite est orthonormée dans $L^2(\mathbf{T})$. D'après le théorème de Fejer, elle est totale dans $L^2(\mathbf{T})$, cqfd. ■

La théorie L^2 des séries de Fourier est alors un cas particulier de la théorie des espaces de Hilbert séparables de dimension infinie. En voici les résultats principaux, rassemblés dans l'énoncé ci-dessous.

Théorème 4.2.5 *Soit $f \in L^2(\mathbf{T})$. Alors*

1) la suite $(\hat{f}(k))_{k\in\mathbf{Z}}$ vérifie **l'égalité de Parseval**

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 \,;$$

2) pour $f, g \in L^2(\mathbf{T})$, on a

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \overline{\hat{f}(k)}\hat{g}(k) = \int_0^1 \overline{f(x)}g(x)dx \,;$$

3) on a

$$S_N[f] \to f \text{ dans } L^2(\mathbf{T}) \text{ pour } N \to \infty$$

4) de même

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{f}(k)e_k(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R} \,.$$

Démonstration. Les points 1) et 2) traduisent l'égalité de Parseval pour la base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{T})$.

Le point 3) découle de l'égalité de Parseval appliquée á

$$g_N = f - S_N[f] = (I - P_{V_N})f$$

où P_{V_N} est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\{e_k \,|\, |k| \leq N\}$ — voir le Lemme 4.2.2. Donc

$$\hat{g}_N(k) = 0 \text{ si } |k| \leq N\,, \text{ et } \hat{g}_N(k) = \hat{f}(k) \text{ si } |k| > N\,.$$

Ainsi

$$\|f - S_N[f]\|_2^2 = \sum_{|k|>N} |\hat{f}(k)|^2 \to 0 \text{pour } N \to \infty$$

comme reste d'une série convergente d'après le point 1).

Le point 4) se démontre de même : il s'agit de faire voir que

$$f - \sum_{-N_1\leq k\leq N_2} \hat{f}(k)e_k \to 0 \text{ dans } L^2(\mathbf{T}) \text{pour } N_1, N_2 \to \infty\,.$$

Or

$$\left\| f - \sum_{-N_1\leq k\leq N_2} \hat{f}(k)e_k \right\|_2^2 \leq \sum_{|k|>\min(N_1,N_2)} |\hat{f}(k)|^2 \to 0 \text{pour } \min(N_1, N_2) \to \infty$$

comme ci-dessus, cqfd. ■

Le résultat ci-dessous caractérisant les parties compactes de $L^2(\mathbf{T})$ est une application directe de l'égalité de Parseval.

Théorème 4.2.6 *Soit $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^2(\mathbf{T})$. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte ssi*

$$\sum_{|k|>N} |\hat{f}(k)|^2 \to 0 \textit{ pour } N \to \infty \textit{ uniformément en } f \in \mathcal{F}\,.$$

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F}$ est relativement compact. Soit donc $\epsilon > 0$; comme $\mathcal{F}$ est précompact, il existe $f_1, \ldots, f_M \in \mathcal{F}$ tq. pour tout $f \in \mathcal{F}$, il existe $m \in \{1, \ldots, M\}$ vérifiant

$$\|f - f_m\|_{L^2}^2 \leq \epsilon\,.$$

D'après l'égalité de Parseval, les M séries

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{f}_m(k)|^2$$

sont convergentes, puisque $f_m \in L^2(\mathbf{T})$. Les restes de ces séries convergent donc vers 0, et comme ces séries sont en nombre fini, il existe donc $N \in \mathbf{N}$ tq.

$$\sum_{|k|>N} |\hat{f}_m(k)|^2 < \epsilon\,.$$

Or, toujours d'après l'égalité de Parseval, on a

$$\sum_{|k|>N} |\hat{f}(k) - \hat{f}_m(k)|^2 \leq \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{f} - \hat{f}_m(k)|^2 = \|f - f_m\|_{L^2}^2 \leq \epsilon\,.$$

Donc

$$\sum_{|k|>N} |\hat{f}(k)|^2 \leq 2 \sum_{|k|>N} |\hat{f}(k) - \hat{f}_m(k)|^2 + 2 \sum_{|k|>N} |\hat{f}_m(k)|^2 \leq 4\epsilon\,.$$

Comme ϵ peut-être choisi arbitrairement petit, et que N dépend seulement de ϵ à travers M, on en déduit que la condition de l'énoncé est nécessaire.

Cette condition est également suffisante : en effet, si elle est vérifiée, l'ensemble

$$\hat{\mathcal{F}} = \{(\hat{f}(k))_{k\in\mathbf{Z}} \mid f \in \mathcal{F}\}$$

est une partie de $\ell^2(\mathbf{Z})$ tq. il existe $q : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}_+$ vérifiant

$$q(k) \to +\infty \text{ pour } |k| \to \infty \text{ et } \sum_{k\in\mathbf{Z}} q(k)^2 |f(k)|^2 \leq 1 \text{ pour tout } f \in \mathcal{F}\,.$$

Voici comment on peut construire une telle suite q. D'après la condition de l'énoncé, il existe $N_1 > 0$ tq.

$$\sum_{|k|>N_1} |\hat{f}(k)|^2 \leq \tfrac{1}{2}\,, \text{ pour tout } f \in \mathcal{F}\,;$$

puis il existe $N_2 > N_1$ tq.

$$\sum_{|k|>N_2} |\hat{f}(k)|^2 \leq \tfrac{1}{4}\,, \text{ pour tout } f \in \mathcal{F}\,.$$

Par récurrence, on construit ainsi une suite $1 < N_1 < N_2 < \ldots < N_m$ tq.

$$\sum_{|k|>N_m} |\hat{f}(k)|^2 \leq 2^{-m}\,, \text{ pour tout } f \in \mathcal{F}\,.$$

En sommant toutes ces inégalités, on trouve que

$$\sum_{|k|>N_1} \left(\sum_{m\geq 1} m \mathbf{1}_{N_{m-1}<|k|\leq N_m} \right) |\hat{f}(k)|^2 \leq 1\,,$$

ce qui suggère de prendre

$$q(|k|) = \sum_{m\geq 1} m \mathbf{1}_{N_{m-1}<|k|\leq N_m}\,.$$

Avec ce choix de q, il est clair que $\hat{\mathcal{F}}$ est inclus dans le cube de Hilbert $\mathcal{C}(q) \subset \ell^2(\mathbf{Z})$, lequel est compact. Ceci montre que $\hat{\mathcal{F}}$ est relativement compact dans $\ell^2(\mathbf{Z})$.

Or, d'après le théorème de Riesz-Fischer appliqué à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{T})$ et à sa base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$, l'application

$$L^2(\mathbf{T}) \ni f \mapsto (\hat{f}(k))_{k\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme isométrique. Par conséquent $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^2(\mathbf{T})$ puisque son image $\hat{\mathcal{F}}$ par l'isomorphisme ci-dessus est relativement compact dans $\ell^2(\mathbf{Z})$. ■

4.2.3 Convergence ponctuelle des sommes partielles

Ni la théorie de Fejer, ni la théorie L^2 ne répondent toutefois à la question pourtant naturelle de la convergence ponctuelle des sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction donnée. L'observation suivante est le point crucial pour la réponse à cette question.

Lemme 4.2.7 (U. Dini) *Soit f continue par morceaux sur $\mathbf{T}$ et $x_0 \in \mathbf{T}$ fixé. Supposons que*

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{|f(x_0+y)+f(x_0-y)-2f(x_0)|}{|y|} dy < \infty\,.$$

Alors

$$S_N[f](x_0) \to f(x_0) \text{ pour } N \to \infty\,.$$

Démonstration. Ecrivons que

$$\begin{aligned} f(x_0) - S_N[f](x_0) &= f(x_0) - \int_{-1/2}^{1/2} f(x_0-y) D_N(y) dy \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} (f(x_0) - f(x_0-y)) D_N(y) dy \end{aligned}$$

où D_N est le noyau de Dirichlet, dont on rappelle que

$$\int_{-1/2}^{1/2} D_N(y) dy = \hat{D}_N(0) = 1\,.$$

Comme D_N est une fonction paire, on peut symmétriser la dernière intégrale dans le membre de droite ci-dessus, pour trouver que

$$\begin{aligned} f(x_0) - S_N[f](x_0) &= f(x_0) - \int_{-1/2}^{1/2} f(x_0-y) D_N(y) dy \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} (f(x_0) - \tfrac{1}{2}(f(x_0+y)+f(x_0-y))) D_N(y) dy\,. \end{aligned}$$

Pour $|y| \le \frac{1}{2}$, on a $|\sin(\pi y)| \ge 2|y|$, de sorte que la fonction

$$\phi_{x_0}(y) = \frac{f(x_0+y)+f(x_0-y)-2f(x_0)}{\sin(\pi y)}\,, \quad \text{pour } y \neq 0$$

appartient à $L^1([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ puisque

$$|\phi_{x_0}(y)| \leq \frac{|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)|}{2|y|} .$$

En appliquant le lemme de Riemann-Lebesgue à la fonction périodique impaire de période un dont la restriction à $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ vaut ϕ_{x_0}, on trouve que

$$f(x_0) - S_N[f](x_0) = -\int_{-1/2}^{1/2} \phi_{x_0}(y) \sin(\pi(2N+1)y) dy \to 0 \text{ pour } N \to \infty ,$$

cqfd. ■

Corollaire 4.2.8 *Soit f höldérienne d'exposant $\alpha > 0$ sur $\mathbf{T}$. Alors*

$$S_N[f](x) \to f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbf{T} \text{ lorsque } N \to \infty .$$

Démonstration. En effet, pour une telle fonction f, on a

$$\frac{|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x_0)|}{|y|} = O(|y|^{\alpha-1})$$

pour tout $x \in \mathbf{T}$. ■

4.2.4 Propriétés des séries de Fourier

Notons

$$D_x = \tfrac{1}{2\pi i} \frac{d}{dx}$$

Proposition 4.2.9 *Pour f et $g \in L^1(\mathbf{T})$, on note $f \star g$ l'élément de $L^1(\mathbf{T})$ défini par*

$$f \star g(x) = \int_0^1 f(x-y) g(y) dy .$$

1) pour tout $f \in C^1(\mathbf{T})$, et plus généralement pour $f \in C(\mathbf{T})$ de classe C^1 par morceaux, on a

$$\widehat{D_x f}(k) = k \hat{f}(k) , \qquad k \in \mathbf{Z} ;$$

2) pour tout $f \in C^n(\mathbf{T})$, plus généralement pour $f \in C^{n-1}(\mathbf{T})$ de classe C^n par morceaux, on a

$$\widehat{D_x^n f}(k) = k^n \hat{f}(k) , \qquad k \in \mathbf{Z} ;$$

3) pour tout $f \in L^1(\mathbf{T})$ et tout $z \in \mathbf{R}$, on a

$$\widehat{\tau_z f}(k) = e_k(-z) \hat{f}(k) , \qquad k \in \mathbf{Z} ;$$

4) pour tout $f, g \in L^1(\mathbf{T})$, on a

$$\widehat{f \star g}(k) = \hat{f}(k) \hat{g}(k) , \qquad k \in \mathbf{Z} .$$

Démonstration. Observons que

$$D_x e_k = k e_k\,,\ \text{pour tout } k \in \mathbf{Z}\,.$$

Donc, pour $f \in C^1(\mathbf{T})$, on trouve, par intégration par parties

$$\begin{aligned}\int_0^1 e_k(-x)f(x)dx &= -\int_0^1 \frac{1}{k}D_x(e_k(-x))f(x)dx \\ &= -\frac{1}{k}\big[e_k(-x)f(x)\big]_0^1 + \frac{1}{k}\int_0^1 e_k(-x)D_x f(x)dx\end{aligned}$$

ce qui démontre le point 1). Le point 2) découle du point 1) par récurrence.

Pour le point 3),

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_z f}(k) &= \int_0^1 f(x-z)e_k(-x)dx \\ &= \int_0^1 f(x-z)e_k(-(x-z))e_k(-z)dx \\ &= e_k(-z)\int_0^1 f(y)e_k(-y)dx = e_k(-z)\hat{f}(k)\end{aligned}$$

Soient enfin f et $g \in C(\mathbf{T})$. Alors, en appliquant le théorème de Fubini, on voit que

$$\begin{aligned}\widehat{f\star g}(k) &= \int_0^1 e_k(-x)\left(\int_0^1 f(x-y)g(y)dy\right)dx \\ &= \int_0^1\int_0^1 e_k(-(x-y))f(x-y)e_k(-y)g(y)dydx \\ &= \int_0^1 e_k(-y)g(y)\left(\int_0^1 e_k(-(x-y))f(x-y)dx\right)dy \\ &= \int_0^1 e_k(-y)g(y)\left(\int_{x-1}^x e_k(-z)f(z)dx\right)dy \\ &= \int_0^1 e_k(-y)g(y)\left(\int_0^1 e_k(-z)f(z)dx\right)dy = \hat{f}(k)\hat{g}(k)\,.\end{aligned}$$

Ceci démontre le point 4) pour des fonctions f et g continues et périodiques de période 1. Le cas général de fonctions L^1 s'en déduit par densité de $C(\mathbf{T})$ dans $L^1(\mathbf{T})$. ■

Une conséquence des points 1) et 2) est que l'on peut lire la régularité d'une fonction $f \in C(\mathbf{T})$ sur la rapidité avec laquelle les coefficients de Fourier de f tendent vers 0 à l'infini.

Corollaire 4.2.10 *Soit $f \in C(\mathbf{T})$ de classe C^1 par morceaux. Alors*

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{f}(k)e_k(x) = f(x)$$

et la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbf{T}$.

Démonstration. D'après le point 1) de la proposition ci-dessus, on a

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{k}\widehat{D_x f}(k)\,, \quad k \in \mathbf{Z}\,.$$

Comme $D_x f$ est continue par morceaux sur $\mathbf{T}$, c'est un élément de $L^2(\mathbf{T})$, de sorte que

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{D_x f}(k)|^2 < \infty\,.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{|k|}|\widehat{D_x f}(k)|^2 \leq \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{D_x f}(k)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{|k|^2}\right)^{1/2}$$

de sorte que

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(k)| < \infty$$

d'où le résultat. ■

4.3 Intégrale de Fourier

4.3.1 La transformée de Fourier sur L^1

Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$; on définit la transformée de Fourier de f par la formule

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i2\pi\xi x} f(x)dx\,.$$

Lemme 4.3.1 (Riemann-Lebesgue) *Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$; la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est une fonction continue tendant vers 0 à l'infini :*

$$\hat{f}(\xi) \to 0 \textit{ lorsque } |\xi| \to \infty\,.$$

Démonstration. Que $\hat{f}$ tende vers 0 à l'infini se démontre comme dans le cas périodique, c'est à dire pour les coefficients des séries de Fourier.

Montrons que $\hat{f}$ est continue : si $\xi_n \to \xi$ pour $n \to \infty$, alors $e^{-i2\pi\xi_n x} f(x) \to e^{-i2\pi\xi x} f(x)$ pp. pour $n \to \infty$; d'autre part $|e^{-i2\pi\xi_n x} f(x)| = |f(x)|$ et donc

$$\hat{f}(\xi_n) = \int_{\mathbf{R}} e^{-i2\pi\xi_n x} f(x)dx \to \int_{\mathbf{R}} e^{-i2\pi\xi x} f(x)dx = \hat{f}(\xi)$$

lorsque $n \to \infty$, cqfd. ■

Voici quelques propriétés de base de l'intégrale de Fourier.

Proposition 4.3.2 *Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$. Alors*

1) $\widehat{\tau_y f}(\xi) = e^{-i2\pi\xi y}\hat{f}(\xi)$ pour tous $y, \xi \in \mathbf{R}$;

2) pour tout $k \in \mathbf{R}$, notons e_k la fonction définie par $e_k(x) := e^{-i2\pi kx}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$; alors $\widehat{e_k f} = \tau_k \hat{f}$;

3) pour tout $g \in L^1(\mathbf{R})$, on a

$$\widehat{f \star g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\,, \qquad \textit{pour tout } \xi \in \mathbf{R}\,;$$

4) notons $\check{f}$ la fonction définie par $\check{f}(x) = f(-x)$;

$$\textit{si } g = \overline{\check{f}}\,, \qquad \textit{alors } \hat{g} = \overline{\hat{f}}\,;$$

5) pour tout $\lambda > 0$, notons $m_\lambda f$ la fonction définie par $m_\lambda f(x) = \lambda f(x/\lambda)$; alors

$$\tfrac{1}{\lambda}\widehat{m_\lambda f} = m_{1/\lambda}\hat{f}\,;$$

6) si $x \mapsto |x|^m f(x)$ appartient à $L^1(\mathbf{R})$, alors $\hat{f}$ est de classe C^m sur $\mathbf{R}$ et l'on a

$$D_\xi^m \hat{f} = (-1)^m \widehat{(x^m f)}\,,$$

où $D_\xi = \frac{1}{2i\pi}\frac{d}{d\xi}$.

Démonstration. Les points 1), 2), 4) et 5) résultent de changement de variables affines très simples.

L'énoncé 3) se démontre d'abord dans le cas où $f, g \in C_c(\mathbf{R})$ comme dans le cas des séries de Fourier ; on conclut ensuite par densité de $C_c(\mathbf{R})$ dans $L^1(\mathbf{R})$.

L'énoncé 6) est une application directe du théorème de dérivation sous le signe somme. ∎

Théorème 4.3.3 (Formule d'inversion de Fourier) *Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ tq. sa transformée de Fourier $\hat{f}$ satisfait*

$$\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})\,.$$

Alors

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{i2\pi\xi x}\hat{f}(\xi)d\xi \ \textit{pp. en } x \in \mathbf{R}\,.$$

Démonstration.

<u>Une fonction auxiliaire :</u> soit $\phi :\ x \mapsto e^{-|x|}$; alors

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$$

En effet

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-|x|+i2\pi\xi x}d\xi = \int_{-\infty}^{0} e^{x+i2\pi\xi x}dx + \int_0^{+\infty} e^{-x+i2\pi\xi x}dx \\ &= \frac{1}{1+i2\pi\xi} + \frac{1}{1-i2\pi\xi} = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}\,.\end{aligned}$$

Pour $\lambda > 0$, on pose

$$\phi_\lambda(x) = e^{-\lambda|x|}$$

on trouve alors que

$$\hat{\phi}_\lambda(\xi) = \frac{1}{\lambda}\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2\xi^2}$$

<u>Une formule de convolution :</u> soit $f \in L^1(\mathbf{R})$; on a

$$f \star \hat{\phi}_\lambda(x) = \int_{\mathbf{R}} \phi_\lambda(z)\hat{f}(z)e^{i2\pi zx}dz$$

En effet, en appliquant le théorème de Fubini, on trouve que

$$\begin{aligned} f \star \hat{\phi}_\lambda(x) &= \int_{\mathbf{R}} f(x-y)\left(\int_{\mathbf{R}} \phi_\lambda(z)e^{i2\pi zy}dz\right)dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} \phi_\lambda(z)\left(\int_{\mathbf{R}} f(x-y)e^{i2\pi zy}dy\right)dz \\ &= \int_{\mathbf{R}} \phi_\lambda(z)\left(\int_{\mathbf{R}} f(u)e^{i2\pi z(x-u)}dy\right)dz = \int_{\mathbf{R}} \phi_\lambda(z)\hat{f}(z)e^{i2\pi zx}dz\,. \end{aligned}$$

<u>La fonction $\hat{\phi}_\lambda$ comme approximation de l'identité :</u> d'abord pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\hat{\phi}_\lambda(\xi) \geq 0 \text{ et } \int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}_\lambda(\xi)d\xi = 1\,.$$

Soit alors $g \in L^p(\mathbf{R})$ pour $1 \leq p < \infty$; alors

$$\|g - g \star \hat{\phi}_\lambda\|_{L^p} \to 0 \text{ lorsque } \lambda \to 0\,.$$

En effet

$$\begin{aligned} g(x) - g \star \hat{\phi}_\lambda(x) &= g(x) - \int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}_\lambda(y)g(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}_\lambda(y)(g(x) - g(x-y))dy = \int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}_\lambda(y)(g - \tau_y g)(x)dy \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|g - g \star \hat{\phi}_\lambda\|L^p &\leq \int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}_\lambda(y)\|g - \tau_y g\|_{L^p}dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda}\hat{\phi}\left(\frac{y}{\lambda}\right)\|g - \tau_y g\|_{L^p}dy = \int_{\mathbf{R}} \hat{\phi}(y)\|g - \tau_{\lambda z} g\|_{L^p}dz \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.4.6

$$\|g - \tau_{\lambda z} g\|_{L^p} \to 0 \text{ pp. en } z \text{ pour } \lambda \to 0\,.$$

D'autre part,

$$\hat{\phi}(y)\|g - \tau_{\lambda z} g\|_{L^p} \leq 2\|g\|_{L^p}\hat{\phi}(y)$$

de sorte que, comme la fonction $\hat{\phi}$ appartient à $L^1(\mathbf{R})$, le théorème de convergence dominée entraîne la convergence annoncée.
Conclusion : partons de la formule de convolution ci-dessus

$$f \star \hat{\phi}_\lambda(x) = \int_{\mathbf{R}} \phi_\lambda(z)\hat{f}(z)e^{i2\pi zx}dz\,.$$

Observons que

$$\phi_\lambda(z)\hat{f}(z)e^{i2\pi zx} \to \hat{f}(z)e^{i2\pi zx} \text{ pp. en } z\text{lorsque } \lambda \to 0\,;$$

de plus

$$|\phi_\lambda(z)\hat{f}(z)e^{i2\pi zx}| \leq |\hat{f}(z)| \text{ et } \hat{f} \in L^1(\mathbf{R})\,.$$

Par convergence dominée, le membre de droite de la formule de convolution converge vers

$$\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(z)e^{i2\pi zx}dz$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$ lorsque $\lambda \to 0$. Le membre de gauche converge vers f dans $L^1(\mathbf{R})$; il existe donc une suite $\lambda_n \to 0$ pour $n \to \infty$ telle que

$$f \star \hat{\phi}_{\lambda_n}(x) \to f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbf{R} \text{ lorsque } n \to \infty\,.$$

On en déduit que

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(z)e^{i2\pi zx}dz \text{ pp. en } x \in \mathbf{R}$$

cqfd. ∎

4.3.2 La transformée de Fourier sur L^2

La théorie L^2 des séries de Fourier reposait sur le fait que la suite de fonctions $(e^{-i2\pi kx})_{k\in\mathbf{Z}}$ constitue une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{T})$. Il est impossible de s'inspirer ici de cette idée car aucune fonction de la forme $x \mapsto e^{-i2\pi\xi x}$ n'appartient à $L^2(\mathbf{R})$.

Malgré tout, on a un analogue de l'égalité de Parseval :

Egalité de Plancherel

Pour tout $f, g \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{g}(\xi)}\hat{f}(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g(x)}f(x)dx\,.$$

En particulier, pour $f = g$, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx\,.$$

Démonstration. Posons

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)} \text{ et } F = \tilde{f} \star f\,.$$

Evidemment, $\tilde{f} \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$ de sorte que, d'après l'inégalité de Young, $F \in L^1 \cap L^\infty(\mathbf{R})$, avec

$$\|F\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}^2 \text{ et } \|F\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^2}^2\,.$$

En fait

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(-(x-y))} f(y)dy = (\tau_x f|f)_{L^2}$$

pp. en $x \in \mathbf{R}$. D'autre part, d'après le lemme 2.4.6, on sait que, pour $f \in L^2(\mathbf{R})$ fixée, l'application

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \tau_x f \in L^2(\mathbf{R})$$

est uniformément continue, de sorte que la relation ci-dessus montre que F est égale pp.à la fonction continue $x \mapsto (\tau_x f|f)_{L^2}$. Dans la suite, on identifiera la classe d'équivalence F de fonctions égales pp. avec ce représentant continu particulier, en posant

$$F(x) = (\tau_x f|f)_{L^2} \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}\,.$$

On utilise alors la formule de convolution par la fonction ϕ_λ, c'est à dire la deuxième étape de la démonstration de la formule d'inversion de Fourier. Comme $F \in L^1(\mathbf{R})$,

$$F \star \hat{\phi}_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(z)\phi_\lambda(z)e^{i2\pi zx}dz$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$, de sorte qu'en particulier, pour $x = 0$, l'on a

$$F \star \hat{\phi}_\lambda(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(z)\phi_\lambda(z)dz\,.$$

Or $F \in C_b(\mathbf{R})$: en procédant comme dans la troisième étape de la preuve de la formule d'inversion de Fourier, on voit que

$$\|F - F \star \hat{\phi}_\lambda\|_{L^\infty} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(y)\|F - \tau_{\lambda z}F\|_{L^\infty}dz\,.$$

Comme F est uniformément continue,

$$\|F - \tau_{\lambda z}F\|_{L^\infty} \to 0 \text{ pour tout } z \in \mathbf{R}$$

lorsque $\lambda \to 0$; d'autre part

$$|\hat{\phi}(y)|\|F - \tau_{\lambda z}F\|_{L^\infty} \leq 2\|F\|_{L^\infty}\hat{\phi} \in L^1(\mathbf{R})$$

de sorte que, par convergence dominée, l'on a

$$F \star \hat{\phi}_\lambda \to F \text{uniformément sur } \mathbf{R}$$

lorsque $\lambda \to 0$. En particulier,

$$F \star \hat{\phi}_\lambda(0) \to F(0) = \|f\|_{L^2}^2 \text{ pour } \lambda \to 0\,.$$

Enfin

$$\hat{F} = \widehat{(\overline{\check{f}} \star f)} = |\hat{f}|^2\,,$$

tandis que

$$\phi_\lambda(z) \uparrow 1 \text{ pour tout } z \in \mathbf{R} \text{ lorsque } \lambda \downarrow 0\,.$$

Par convergence monotone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(z)\phi_\lambda(z)dz \uparrow \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(z)|^2 dz$$

ce qui démontre l'égalité de Plancherel pour $f = g$. ■

A partir de l'égalité de Plancherel, il devient très simple de définir la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$.

Théorème 4.3.4 (Transformation de Fourier-Plancherel) *Il existe une unique application linéaire $\mathcal{F} :\, L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ tq.*

1) pour tout $f, g \in L^2(\mathbf{R})$, on a

$$(\mathcal{F}f|\mathcal{F}g)_{L^2} = (f|g)_{L^2(\mathbf{R})}\,;$$

2) pour tout $f \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$ on a

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) \text{ pp. en } \xi \in \mathbf{R}\,.$$

Cette application linéaire est un isomorphisme d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$ défini par

$$(\overline{\mathcal{F}}\phi)(x) = (\mathcal{F}f)(-x)\,.$$

Pour établir ce résultat, on aura besoin du lemme de prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace complet.

Lemme 4.3.5 *Soit (X, d) un espace métrique, $A \subset X$ dense, (Y, δ) un espace complet, et une application $f :\, A \to Y$ uniformément continue.*

Alors f admet un unique prolongement par continuité à X.

Démonstration. L'existence et l'unicité de $\mathcal{F}$ découlent immédiatement du lemme en posant $X = Y = L^2(\mathbf{R})$ et $A = L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$ qui est dense dans $L^2(\mathbf{R})$ puisque contenant $C_c(\mathbf{R})$ que l'on sait être dense dans $L^2(\mathbf{R})$, et en considérant l'application linéaire

$$L^1 \cap L^2(\mathbf{R}) \ni f \mapsto \hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$$

qui est une isométrie pour la norme L^2, et donc est uniformément continue pour cette norme.

L'égalité de Plancherel qui a été démontrée sur $L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$ se prolonge alors immédiatement par continuité et densité en 1) sur $L^2(\mathbf{R})$.

Si $f \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$, on a $\hat{\phi}_\lambda \star f \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$ où $\phi_\lambda(x) = e^{-\lambda|x|}$ comme dans la preuve du théorème d'inversion de Fourier. De plus

$$\widehat{\hat{\phi}_\lambda \star f} = \phi_\lambda \star \hat{f} \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R})\,.$$

(La borne L^2 vient de l'égalité de Plancherel, et la borne L^1 de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de ce que ϕ_λ et $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$). D'après le théorème d'inversion de Fourier

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(\hat{\phi}_\lambda \star f) = \hat{\phi}_\lambda \star f\,.$$

Or $\phi_\lambda \star f \to f$ dans $L^2(\mathbf{R})$ pour $\lambda \to 0$ car $f \in L^2(\mathbf{R})$ — cf. la troisième étape de la preuve du théorème d'inversion de Fourier. Puisque $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont des isométries de $L^2(\mathbf{R})$, en passant à la limite pour $\lambda \to 0$, on trouve que

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f) = f \text{ pour tout } f \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R})\,.$$

Par densité de $L^1 \cap L^2(\mathbf{R})$ dans $L^2(\mathbf{R})$, comme $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont des isométries pour la norme L^2, on trouve que

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = I\,.$$

Puis en appliquant cette relation à $f(-x)$ où f est une fonction arbitraire de $L^2(\mathbf{R})$, on voit que

$$\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} = I$$

cqfd. ∎

Démonstration du lemme de prolongement. Voici comment on construit le prolongement $\tilde{f}$ de f à X.

Soit $x \in X \setminus A$; comme A est dense dans X, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de points de A convergeant vers x.

Comme cette suite converge, elle est de Cauchy dans X.

Comme f est uniformément continue sur A, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans Y ; et comme Y est complet, on en déduit que cette suite admet une limite dans Y, que l'on choisira pour $\tilde{f}(x)$.

Si $(a'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une autre suite de points de A convergeant vers x, il résulte de l'uniforme continuité de $\tilde{f}$ sur A que les deux suites $(f(a_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(f(a'_n))_{n\in\mathbf{N}}$ ont même limite dans Y. Ainsi, $\tilde{f}(x)$ est défini de façon unique.

Montrons que $\tilde{f}$ est uniformément continue sur X. Soit $\epsilon > 0$; notons $\alpha = \alpha(\epsilon) > 0$ le module de continuité de f sur A. Autrement dit

$$a, a' \in A \text{ et } d(a,a') < \alpha \Longrightarrow \delta(f(a), f(a')) < \epsilon\,.$$

Soient alors x et $x' \in X \setminus A$ quelconques tq. $d(x,x') < \alpha/3$; par densité de A dans X et d'après la construction de $\tilde{f}$, il existe a et $a' \in A$ tq.

$$d(x,a) < \alpha/3\,, \quad d(x',a') < \alpha/3 \text{ tandis que } \delta(\tilde{f}(x), f(a)) < \epsilon \text{ et } \delta(\tilde{f}(x'), f(a')) < \epsilon\,.$$

Donc
$$d(a,a') < d(a,x) + d(x,x') + d(x',a') < \alpha$$
de sorte que $\delta(f(a), f(a')) < \epsilon$ et
$$\delta(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) < \delta(\tilde{f}(x), f(a)) + \delta(f(a), f(a')) + \delta(\tilde{f}(a'), f(x'))\,.$$
En conclusion
$$x, x' \in X \text{ et } d(x,x') < \alpha/3 \Longrightarrow \delta(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x') < 3\epsilon\,,$$
ce qui prouve que $\tilde{f}$ est uniformément continue sur X.

L'unicité du prolongement continu de f vient de ce que deux applications continues de X dans Y coïncidant sur une partie dense de X sont nécessairement égales sur X tout entier. ■