

Ondelettes pour le signal numérique
Frédéric Truchetet
Editions Hermes,
Paris, 1998

Ondelettes pour le signal numérique

Fred Truchetet

Janvier 1998

Ondelettes pour le signal numérique
Frédéric Truchetet
Editions Hermes,
Paris, 1998

2 Ondelettes pour le signal numérique

	Avant-propos	9
Chapitre 1	Historique	11
Chapitre 2	Pourquoi les ondelettes ?	13
Chapitre 3	Quelles ondelettes ?	21
	3.1 Inversion - Admissibilité	21
	3.2 Quelles transformées en ondelettes ?	22
Chapitre 4	Bases orthonormées, analyse multirésolution	25
	4.1 Axiomatique de base	25
	Espaces d'approximation	25
	Espaces des détails	28
	Analyse multirésolution et localisation spatio- fréquentielle	31
	Généralisation : paquets d'ondelettes	35
	4.2 Algorithme récursif	35
	Algorithme d'analyse	37
	Algorithme de reconstruction	41
	4.3 Construction numérique des fonctions de base	45
Chapitre 5	Propriétés et construction	53
	5.1 Propriétés fréquentielles de la fonction d'échelle	54
	Relations avec le filtre associé	54
	Orthonormalité dans Fourier	55
	5.2 Propriétés fréquentielles de l'ondelette	58
	5.3 Résumé des propriétés	62
Chapitre 6	Exemples de bases d'ondelettes	65
	6.1 Ondelettes de Haar	66

		3
	6.2 Ondelette de "Littlewood-Paley"	68
	6.3 Bases splines	70
	6.4 Ondelettes à support compact (Daubechies)	76
Chapitre 7	Passage à deux dimensions	87
	7.1 Cas général	87
	Matrice de changement d'échelle	87
	Axiomatique de base de l'analyse multirésolution	88
	Sur-échantillonnage et sous-échantillonnage	89
	Algorithme récursif et propriétés	92
	7.2 Ondelettes séparables	100
	7.3 Ondelettes quinconces	103
	Exemples d'analyse quinconce orthonormée	111
Chapitre 8	Bases biorthogonales	117
	8.1 Introduction	117
	8.2 Analyse biorthogonale	117
	8.3 Propriétés des bases et des filtres associés	120
	8.4 Bases B-splines biorthogonales	122
	Recherche de solutions avec des filtres RIF symétriques	122
	Cas des B-splines.	124
	Solution avec des filtres récursifs RII	125
Chapitre 9	Trames d'ondelettes	131
	9.1 Bornes de la trame d'ondelettes	132
	9.2 Reconstruction dans le cas d'une trame d'ondelettes	132
Chapitre 10	Exemple de trame d'ondelettes	135
	10.1 Détection de contour multiéchelle	136

4 Ondelettes pour le signal numérique

Annexe A	Fonctions B-splines et bases d'ondelettes	141
	Bibliographie	151
	Index	155

Remerciements

6 Ondelettes pour le signal numérique

Je voudrais remercier tous ceux, collègues, étudiants et proches qui m'ont aidé dans la mise au point de ce document, et particulièrement lors de la réalisation des illustrations et de la correction des erreurs. Que J.C. Devaux, A. Garcia, O. Ialigant et F. Nicolier, trouvent ici l'expression de ma reconnaissance. Et merci surtout à Françoise et Marie-Elise pour leur patience et leur soutien pendant ces trop nombreuses journées de vacances distraites de la vie familiale.

Table des matières

Ondelettes pour le signal numérique
Frédéric Truchetet
Editions Hermes,
Paris, 1998

Ondelettes pour le signal numérique
Frédéric Truchetet
Editions Hermes,
Paris, 1998

Avant-propos

De nombreux documents de synthèse présentant la transformée en ondelettes et ses applications sont actuellement disponibles en librairie. Ils sont souvent de grande qualité et devraient suffire à un étudiant cherchant à acquérir les notions nécessaires à l'utilisation de cet outil de traitement du signal ou à un chercheur qui souhaite connaître l'état de l'art dans le domaine avant de tenter d'y apporter sa contribution éventuelle. Alors pourquoi proposer un document de plus ? La réponse tient en deux points principaux. Tout d'abord, bien que les Français et les chercheurs francophones se soient particulièrement illustrés dans les découvertes qui ont conduit à l'établissement de cette théorie, il existe peu d'ouvrages en langue française proposant une présentation des transformées en ondelettes discrètes. Ensuite, la plupart des ouvrages disponibles sont soit des présentations à caractère «grand public» ne permettant pas de rentrer dans les détails techniques et donc peu utilisables pour qui veut pratiquer la technique présentée, soit des thèses à caractère mathématique affirmé mettant plus l'accent sur la rigueur des raisonnements et la généralité des concepts utilisés que sur les résultats pratiques réellement mis en œuvre dans les applications. C'est pourquoi nous avons voulu proposer un document écrit dans l'esprit des Sciences de l'Ingénieur dans lequel la rigueur mathématique n'est pas totalement absente mais n'est pas, et de loin, la préoccupation majeure. Au risque de faire bondir les puristes, nous avons volontairement omis un certain nombre de cas particuliers et quand la démonstration rigoureuse d'un résultat nous a semblé soit trop lourde soit trop compliquée conceptuellement, nous avons essayé de donner une pseudo-démonstration suffisante pour convaincre et pour faire comprendre l'origine et la portée du résultat. Les éléments fournis dans cette présentation doivent permettre au lecteur d'aborder concrètement l'analyse par transformée en ondelettes des signaux numériques monodimensionnels ou multidimensionnels. Nous avons voulu souligner particulièrement les aspects propres au traitement des images numériques car c'est incontestablement un domaine où la transformée en ondelettes est riche de potentialités. Il est clair que l'ambition de ce cours se limite à une introduction aux transformées en ondelettes discrètes, il n'utilise que les outils mathématiques dont dispose tout étudiant de second cycle universitaire ; il est donc destiné aux étudiants de licence, maîtrise, DEA (à titre d'introduction) et aux élèves ingénieurs. Il ne faut en aucun cas y chercher une présentation exhaustive du sujet et la bibliographie reste également très modeste. Le jeune chercheur souhaitant se spécialiser dans ce domaine devra impérativement compléter les éléments fournis ici à partir d'une recherche bibliographique plus approfondie.

10 Ondelettes pour le signal numérique

Enfin, il faut indiquer que nous nous sommes fortement appuyés, voire adossés, à deux excellents ouvrages écrits par deux des principaux créateurs de cette théorie, Ingrid Daubechies [10] et Martin Vetterli [43]. Nous ne saurions trop recommander au lecteur désireux d'en savoir plus ou de chercher la rigueur mathématique manquant ici de se reporter à ces «bibles» de la transformée en ondelettes.



Une des images favorites des traiteurs de signal 2D

Chapitre 1

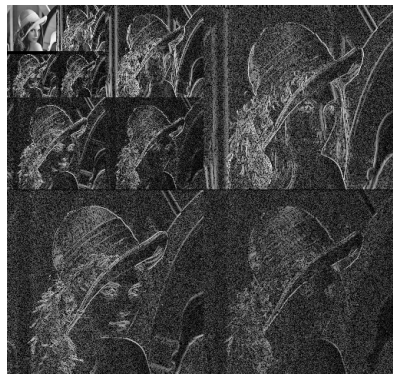
Historique

Le traitement du signal a pour principal objet la description des signaux liés au monde réel dans un but de traitement, d'identification, de compression, de compréhension ou de transmission. Dans ce contexte, les transformations linéaires ont toujours joué un très grand rôle, et parmi ces dernières, la plus célèbre et la plus anciennement étudiée est la transformation de Fourier (1822). Cette transformation permet, comme chacun sait, d'explorer la composition fréquentielle du signal et par ses propriétés de lui appliquer facilement des opérateurs de filtrage. Lors de cette transformation le signal est décomposé sur un ensemble de signaux de «base» qui sont les cosinus et sinus ou l'exponentielle imaginaire, mais, très tôt dans l'histoire du traitement du signal, il est apparu que la décomposition obtenue n'était pas toujours la plus satisfaisante et la première transformation en ondelettes (le nom n'est pas encore utilisé) est proposée par Haar en 1910 ; il serait plus judicieux de parler alors de «paléo-ondelette». La transformée en ondelettes est un outil qui découpe les données, les fonctions ou les opérateurs en composantes fréquentielles suivant une résolution adaptée à l'échelle. Les précurseurs conscients de cette technique ont été des mathématiciens (Calderon 1964), des physiciens (Aslaken et Klauder en 1968, Paul en 1985), et surtout des ingénieurs (ou des chercheurs en sciences pour l'ingénieur) comme Esteban et Galand (1977), Smith et Barnwell (1986), Vetterli (1986), nous pourrions parler dans leur cas de «pré-ondelette». Mais le premier à avoir utilisé la méthode et le premier à avoir proposé le nom d'ondelettes fut Jean Morlet (1983). Le problème traité par Morlet était celui de l'analyse de données issues de sondages sismiques effectués pour des recherches géologiques ; ces données faites de nombreux transitoires sont particulièrement adaptées à une technique d'analyse conservant la notion de localisation de l'événement tout en fournissant une information sur son contenu fréquentiel ce qui est tout l'intérêt de ce type de transformation. Les résultats obtenus par Morlet et formalisés par le physicien Alex Grossmann ont rapidement éveillé l'attention de nombreux chercheurs et bientôt des bases mathématiques solides ont été mises en place faisant apparaître la notion de base orthogonale (Y. Meyer 1985), d'analyse multirésolution (S. Mallat 1989 [25], [26], [27]) et d'ondelettes à support compact (I. Daubechies 1988)[11]. Les ondelettes modernes étaient nées. Les lecteurs intéressés par l'histoire des ondelettes trouveront des renseignements plus complets et

12 Ondelettes pour le signal numérique

des anecdotes passionnantes dans l'excellent ouvrage de B.B. Hubbard [19].

Les recherches tant théoriques qu'appliquées se sont très largement développées ces dernières années au point que les ondelettes sont maintenant très à la mode et qu'on a parfois voulu en faire l'outil idéal adapté à tous les problèmes. Cet optimisme excessif a naturellement conduit à quelques déconvenues. On compte actuellement (en 1997) un volume annuel de plusieurs centaines de publications sur le sujet et une bonne dizaine de congrès internationaux lui sont consacrés ou ont une session spécialisée sur les ondelettes. Les applications les plus prometteuses qui semblent se dégager se retrouvent dans les domaines de l'analyse vocale, de l'analyse des signaux radar et dans le domaine de la compression des images. Les thématiques de recherche s'orientent vers les transformées de signaux périodiques ou à support compact, les transformées multidimensionnelles, les transformées adaptées au problème, les analyses multi-ondelettes, la déconvolution des signaux bruités, les approches multiéchelles dans les algorithmes stochastiques et bien entendu la mise en œuvre des algorithmes de transformée en ondelettes discrète.



Analyse multirésolution de l'image favorite

Chapitre 2

Pourquoi les ondelettes ?

La plupart des signaux du monde réel ne sont pas stationnaires, et c'est justement dans l'évolution de leurs caractéristiques (statistiques, fréquentielles, temporelles, spatiales) que réside l'essentiel de l'information qu'ils contiennent. Les signaux vocaux et les images sont à ce titre exemplaires. Or l'analyse de Fourier (2.1) propose une approche globale du signal, les intégrations sont faites de moins l'infini à plus l'infini, et toute notion de localisation temporelle (ou spatiale pour des images) disparaît dans l'espace de Fourier ; il faut donc trouver un compromis, une transformation qui renseigne sur le contenu fréquentiel tout en préservant la localisation afin d'obtenir une représentation temps/fréquence ou espace/échelle du signal.

- **Transformée de Fourier :**

$$T^{fourier} f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

La première solution qui vient naturellement à l'esprit est de limiter le domaine d'intégration temporel (ou spatial) à l'aide d'une fonction «fenêtre» que l'on pourra faire glisser pour explorer le signal ; on obtient ainsi la transformée de Fourier à fenêtre glissante ; voir l'équation 2.2.

- **Transformation de Fourier à fenêtre glissante :**

$$T^{glisse} f(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) g(s - t) e^{-j\omega s} ds \quad (2)$$

Si on pose :

$$\psi_{t,\omega}(s) = g(s - t) e^{j\omega s} \quad (3)$$

14 Ondelettes pour le signal numérique

on peut interpréter cette transformée comme la projection de f sur la «base» des fonctions fenêtres glissantes ψ :

$$T^{glisse} f(t, \omega) = \langle f, \psi_{t, \omega} \rangle \quad (4)$$

La notation $\langle f, g \rangle$ représente le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ (pour des fonctions réelles)} \quad (5)$$

Un certain nombre de fonctions fenêtres sont utilisées, les plus connues sont les fenêtres de Hanning, de Hamming, et de Gauss (équation 2.6) :

$$g(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (6)$$

dans ce dernier cas la transformation a été baptisée transformation de Gabor (équation 2.8) et on appelle « gaborette » la fonction analysante. On notera que les fonctions enveloppes sont normalisées à 1 ; la norme étant définie par :

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f^*(x)dx \quad (7)$$

- **Transformation de Gabor :**

$$T^{gabor} f(t, \omega) = \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-\frac{(s-t)^2}{2}} e^{-j\omega s} ds \quad (8)$$

On trouvera sur la courbe 2. la représentation de la partie réelle de «gaborettes» pour deux fréquences différentes. On peut vérifier que l'étendue temporelle de la fonction est indépendante de la fréquence analysée par cette fonction.

La résolution dans le plan temps-fréquence de la transformation peut être estimée par les variances de la fonction analysante dans l'espace temporel et dans l'espace fréquentiel :

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \quad (9)$$

Si on considère une gaborette $|\psi(x)| = e^{-\frac{x^2}{2}}$ on a évidemment $\sigma_t = 1$ et dans ce cas comme la transformée d'une gaussienne est une gaussienne ($e^{-\pi x^2}$ se transforme par Fourier en $e^{-\pi f^2}$) on trouve un écart type σ_f dans le domaine fréquentiel tel que : $\sigma_f = \frac{1}{2\pi}$. On constate que les résolutions temporelle σ_t et fréquentielle σ_f

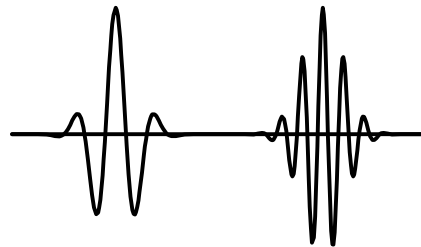


Figure 2. Gaborettes

sont indépendantes, de sorte que le pavage de l'espace temps-fréquence (figure 2.) est régulier.

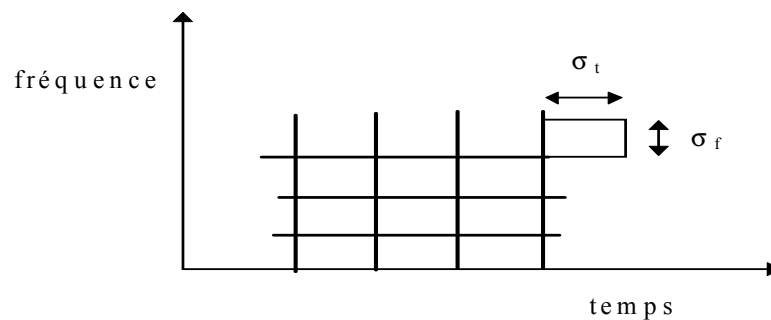


Figure 2. Pavage temps-fréquence pour la transformée à fenêtre glissante

Dans ce cas, on comprend que l'analyse n'est pas idéale car si une résolution temporelle faible est automatiquement liée à la détection des basses fréquences, la détection des composantes hautes fréquences du signal peut être faite avec une résolution temporelle supérieure. Les deux résolutions doivent varier en sens inverse en conservant un produit constant pour un pavage énergétiquement régulier de l'espace temps-fréquence. Ceci doit conduire à une utilisation rationnelle de cet espace par la réalisation dans tous les cas du meilleur compromis possible entre la résolution temporelle et la résolution fréquentielle. Ce programme est réalisé par la transformation en ondelettes dont le principe est précisé dans l'équation suivante (2.10) :

16 Ondelettes pour le signal numérique

• Transformée en ondelettes :

$$T^{ond} f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (10)$$

Dans cette expression, a est le facteur d'échelle et b le paramètre de translation. La variable a joue le rôle de l'inverse de la fréquence : plus a est petit moins l'ondelette (la fonction analysante) est étendue temporellement, donc plus la fréquence centrale de son spectre est élevée. On peut également interpréter cette expression comme une projection du signal sur une famille de fonctions analysantes $\psi_{a,b}$ construite à partir d'une fonction "mère" ψ conformément à l'équation suivante :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (11)$$

On notera que la norme est conservée lors du changement de facteur d'échelle :

$$\begin{aligned} \|\psi_{a,b}\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 a dx \\ &= \|\psi\|^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

On pourra noter :

$$T^{ond} f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle \quad (13)$$

La résolution spatio-temporelle est calculée de la même manière que précédemment : Si la «largeur» temporelle de ψ (l'écart type) est prise comme unité : $\sigma = 1$ alors on peut calculer la «largeur» de $\psi_{a,0}$ avec l'équation 2.9 :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \int t^2 |\psi_{a,0}(t)|^2 dt \\ &= \int t^2 \frac{1}{a} \left| \psi\left(\frac{t}{a}\right) \right|^2 dt \\ &= \int a^2 x^2 \frac{1}{a} |\psi(x)|^2 a dx \end{aligned}$$

ce qui donne : $\sigma_t = a$.

On peut de même calculer l'occupation fréquentielle de l'ondelette en calculant l'écart type pour la transformée de Fourier $\widehat{\psi_{a,0}}^1$ de $\psi_{a,0}$; en prenant comme unité l'écart type de la transformée de Fourier de l'ondelette mère ψ :

$$\begin{aligned}\sigma_\omega^2 &= \int \omega^2 \left| \widehat{\psi_{a,0}}(\omega) \right|^2 d\omega \\ &= \int \omega^2 \frac{1}{a} \left| a \widehat{\psi}(a\omega) \right|^2 d\omega \\ &= \int \frac{\xi^2}{a^2} \frac{1}{a} \left| a \widehat{\psi}(\xi) \right|^2 \frac{d\xi}{a}\end{aligned}\quad (2.14)$$

on trouve $\sigma_\omega = \frac{1}{a}$. De sorte que le pavé élémentaire dans l'espace temps-fréquence est de surface constante tandis que la résolution temporelle est proportionnelle à a et que la résolution fréquentielle est inversement proportionnelle à a comme on le voit sur la figure 2..

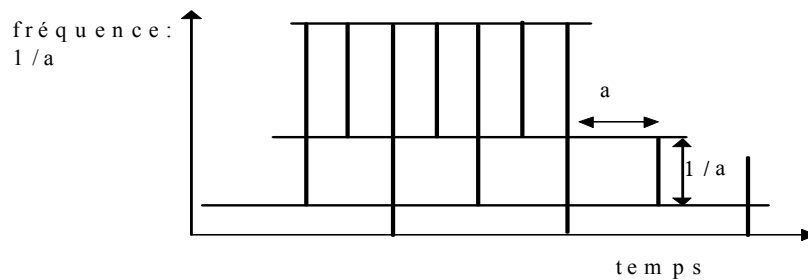


Figure 2. Pavage temps-fréquence pour la transformée en ondelette discrète

Les premières ondelettes utilisées (en dehors de l'ondelette de Haar que nous étudierons plus loin) ont été l'ondelette de Morlet, une gaussienne modulée par une exponentielle complexe, et le « chapeau mexicain », en réalité la dérivée seconde d'une gaussienne.

- Ondelette de Morlet :

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\omega_0 x} \quad (15)$$

¹ On notera souvent dans la suite la transformée de Fourier d'une fonction de façon abrégée comme suit : $\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-j\omega x} dx$

18 Ondelettes pour le signal numérique

- Chapeau mexicain :

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (16)$$

La figure 2. présente le chapeau mexicain pour deux valeurs du facteur d'échelle : $a = 1$ pour la courbe la plus localisée et $a = 2$ pour la courbe la plus étendue (la figure 2. présente la réponse fréquentielle pour $a = 1$). La figure 2. présente la partie réelle de l'ondelette de Morlet pour deux valeurs du facteur d'échelle, on pourra comparer avec la figure 2. où on constate que la fenêtre d'analyse reste constante lors du changement d'échelle (fréquence).

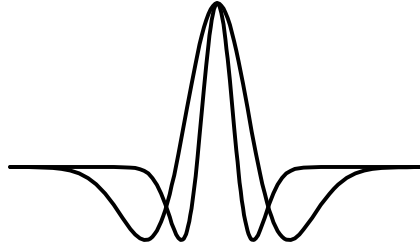


Figure 2. Chapeau mexicain

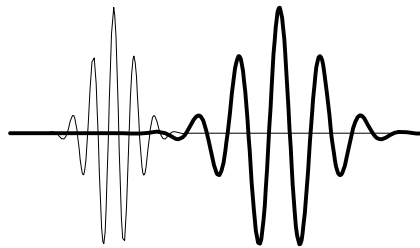


Figure 2. Ondelette de Morlet (partie réelle)

Les représentations fréquentielles des ondelettes de Morlet ($\omega_o = 5$), figure 2., illustrent encore une fois les différences entre la transformée en ondelette et la transformée de Fourier à fenêtre glissante. On vérifie que la largeur spectrale de

l'ondelette varie en fonction du facteur d'échelle inversement à la largeur spatiale.

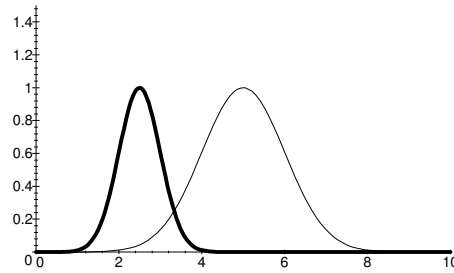


Figure 2. Ondelette de Morlet : $\hat{\psi}(\omega)$

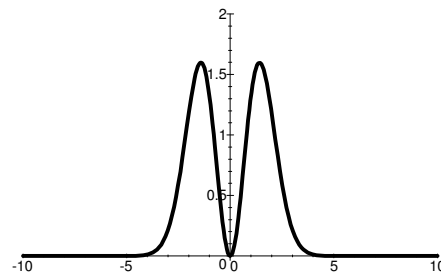


Figure 2. Chapeau mexicain : $\hat{\psi}(\omega)$

Le facteur d'échelle a et le pas de translation b sont des réels et la transformation en ondelettes est continue et donc redondante. Le plan temps fréquence est sur-analysé. Il est donc évident qu'une discrétisation de la transformée doit être envisagée si on souhaite obtenir une transformation non redondante. Le pavage temps-fréquence obtenu par la transformation en ondelettes (figure 2.) suggère une méthode de discrétisation exponentielle pour les échelles et pour le temps. Dans l'expression $\psi(\frac{t-b}{a})$ le pas de translation à l'échelle a est $\frac{b}{a}$. On posera donc :

$$a = a_o^m \text{ et } b = nb_o a_o^m \text{ avec } a_o, b_o \in \mathbb{Z}$$

20 Ondelettes pour le signal numérique

d'où l'expression de la transformée en ondelettes discrète (2.17)² donnée ci-après.

- **Transformée en ondelettes discrète :**

$$T^{ond} f(m, n) = a_o^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi(a_o^{-m} t - n b_o) dt \quad (17)$$

Si on choisit $a_o = 2$ et $b_o = 1$, on parle alors de **transformée dyadique**.

Les bases de la transformée en ondelettes sont posées mais de grandes questions restent posées :

- La transformée est-elle inversible ?
- Le choix des ondelettes est-il contraint ?
- Peut-on former des bases orthonormées d'ondelettes ?
- Existe-il des algorithmes efficaces pour traiter le cas du signal numérique ?
- Comment traiter les signaux à plusieurs dimensions ?

C'est à ces questions et à quelques autres que nous tenterons de répondre dans les chapitres suivants.

² Il est important de noter que c'est la transformée qui est discrète, l'ondelette reste elle une fonction continue.

Chapitre 3

Quelles ondelettes ?

3.1 Inversion - Admissibilité

On peut montrer [10] que si la fonction analysante (l'ondelette) est convenablement choisie, la transformation en ondelettes est inversible et la fonction peut être reconstruite après analyse suivant l'équation (3.1) :

$$f = C_{\psi}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} \langle f, \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b} da db \quad (1)$$

Cette possibilité reste théorique car le calcul n'est possible que numériquement et sa convergence peut-être très lente.

Le coefficient C_{ψ} , si il existe, est donné par l'équation (3.2) :

$$C_{\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{\psi}(\omega) \right|^2 \frac{d\omega}{\omega} \quad (2)$$

La condition d'existence de ce coefficient est également la condition d'admissibilité de la fonction ondelette analysante. Cette condition est explicitée par l'équation 3.3 :

$$\int_0^{+\infty} \left| \widehat{\psi}(\omega) \right|^2 \frac{d\omega}{|\omega|} = \int_{-\infty}^0 \left| \widehat{\psi}(\omega) \right|^2 \frac{d\omega}{|\omega|} < \infty \quad (3)$$

Cette relation se ramène le plus souvent à la condition exprimée par l'équation 3.4 qui n'est pas très contraignante et indique seulement que la fonction ondelette doit être à moyenne nulle. Le choix de l'ondelette est donc en principe très ouvert, il faut cependant noter que la robustesse et la vitesse de convergence de l'algorithme de reconstruction donné par l'équation 3.1 sont très dépendantes du choix de l'ondelette. Il est clair, enfin, que la transformée en ondelettes ne sera intéressante comme outil d'analyse du signal que si la fonction analysante (l'ondelette) reste bien localisée dans

22 Ondelettes pour le signal numérique

le temps et en fréquence.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (4)$$

3.2 Quelles transformées en ondelettes ?

On peut classer les transformées en ondelettes selon la famille à laquelle appartiennent les fonctions analysantes choisies. Les transformées obtenues sont suivant les cas **discrètes** ou **continues**, **redondantes** ou non.

Les transformées continues sont obtenues en prenant le facteur d'échelle a et le pas de translation b dans l'ensemble des nombres réels. Comme nous l'avons fait remarquer dans le chapitre précédent, ces transformées sont évidemment très redondantes car l'espace temps-fréquence est parcouru continûment, ce type de transformation ne peut, dans la pratique, être effectué que de façon approximative et il y a toujours en fait une discrétisation du calcul qui est opérée.

L'approche discrète du problème a le mérite de traiter le problème de l'échantillonnage de l'espace temps-fréquence avec rigueur et de fournir une mesure de l'éventuelle redondance de la transformation obtenue. De plus, dans ce cas, les algorithmes de calcul conduisent souvent à des résultats exacts (voir les bases orthonormées et biorthogonales) sur des intervalles donnés de l'espace temps-fréquence. Nous étudierons donc plus en détail le cas des transformées discrètes qui sont d'ailleurs pratiquement les seules utilisées en traitement des images. Les données numériques sont de plus en plus des données «primaires» des systèmes (caméras CCD) et leur traitement numérique conduit à des données numériques utilisées le plus souvent telles quelles. Les méthodes de traitement discret sont donc fondamentales. Il ne faut pas oublier cependant que si la transformée est discrète, les fonctions de base utilisées ne le sont pas, les ondelettes restent dans tous les cas des fonctions continues. Les coefficients de la transformée sont dénombrables sur un intervalle de l'espace temps-fréquence. Mais la projection de la fonction sur des sous-espaces créés par des sous-familles d'ondelettes est continue et ne pourra en général qu'être estimée numériquement. Parmi les transformées discrètes on distingue les transformées redondantes, dont les trames (traduction libre de «frames») d'ondelettes que nous présenterons sommairement et les transformées non redondantes parmi

lesquelles nous étudierons les plus utilisées, à savoir les bases orthonormées et biorthogonales.

Les paquets d'ondelettes que nous ne présenterons pas en détail ici peuvent appartenir suivant le cas à l'une ou l'autre famille.

Pour résumer, on peut donner le classement sommaire suivant :

- **Transformées redondantes :**

transformée continue,

trame d'ondelettes (frames),

paquet d'ondelettes.

- **Transformées non redondantes :**

analyse multirésolution : base orthonormée,

analyse multirésolution : base biorthogonale,

paquet d'ondelettes.

Cela étant, il reste à examiner les généralisations de la transformée en ondelette unimodale de signaux à une dimension.

La première extension envisageable est le passage du traitement des signaux mono-dimensionnels au traitement des signaux bi-dimensionnels, tri-dimensionnels, voire au-delà. L'intérêt de cette extension est évident pour qui se préoccupe de traitement des images $2D$ et $3D$. Dans ce domaine, nous présenterons les éléments de base sur lesquels s'appuient les principales méthodes de généralisation et nous illustrerons par deux techniques choisies parmi les plus utilisées dans les applications actuelles.

Le deuxième type de généralisation qu'il conviendrait d'examiner est le problème du traitement des signaux vectoriels ou multispectraux. Le cas le plus commun est celui des images couleur. Les multi-ondelettes pourraient constituer une piste intéressante. Mais là, nous sommes vraiment dans le domaine de la recherche et il ne semble pas que les résultats soient suffisamment probants pour qu'ils puissent être présentés ici. Alors, avis aux amateurs...

Ondelettes pour le signal numérique
Frédéric Truchetet
Editions Hermes,
Paris, 1998

Ondelettes pour le signal numérique
Frédéric Truchetet
Editions Hermes,
Paris, 1998

Chapitre 4

Bases orthonormées, analyse multirésolution

4.1 Axiomatique de base

4.1.1 Espaces d'approximation

Nous nous plaçons dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions continues d'une variable réelle et de carré intégrable. Une analyse à la résolution j de la fonction f sera obtenue par action d'un opérateur linéaire A_j sur f , tel que :

$$A_j f \in V_j \quad (1)$$

V_j étant un sous espace de L^2 , A_j sera un projecteur (idempotent).

On construira une analyse multirésolution à l'aide de sous-espaces V_j emboîtés les uns dans les autres, tels que le passage de l'un à l'autre soit le résultat d'un changement d'échelle (zoom).

Par exemple, dans le cas dyadique on aura :

$$f(x) \in V_j \iff f\left(\frac{x}{2}\right) \in V_{j+1} \quad (2)$$

ce qui correspond à une dilatation d'un facteur 2. L'espace V_{j+1} contient des signaux plus "grossiers" que l'espace V_j et il est clair que :

$$V_{j+1} \subset V_j \quad (3)$$

L'axiomatique correspondante peut s'exprimer comme suit :

Soit un ensemble de sous espaces de L^2 tels que :

$$..... \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \subset V_{j+1} \subset V_j \subset$$

26 Ondelettes pour le signal numérique

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad (4.4)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad (4.5)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z} \text{ si } f(x) \in V_j \iff f(2^{-1}x) \in V_{j+1} \text{ (ou } f(2^j x) \in V_0) \quad (4.6)$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \text{ si } f(x) \in V_0 \iff f(x - k) \in V_0 \text{ (invariance par translation)} \quad (4.7)$$

Cet ensemble définit une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$.

Remarque 1 La propriété 4.4 assure la convergence de l'analyse et peut aussi s'écrire :

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = L^2(\mathbb{R}) \quad (8)$$

On dit parfois que $\bigcup_{-\infty}^{+\infty} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Dans ces conditions, on peut montrer qu'il existe une fonction dite fonction d'échelle qui par dilatation et translation engendre une base orthonormée de V_j . Cette fonction sera notée :

$$\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (9)$$

et les fonctions de bases sont construites suivant la relation :

$$\varphi_{j,n}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}x - n) \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \quad (10)$$

Il suffit d'ailleurs que $\varphi(\cdot, -n)$ soit une base de V_0 .

La base sera orthonormée si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \varphi^*(x + n) dx = \delta(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (11)$$

Rappelons (voir équation 2.5) que le produit scalaire³ est défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g^*(x) dx \text{ (pour des fonctions réelles ou complexes)} \quad (12)$$

³ L'analogie avec le produit scalaire dans l'espace géométrique habituel pourra aider à comprendre les différents concepts utilisés (vecteur de base, sous-espace, projection, composantes d'un vecteur, etc...). Il conviendra cependant de se souvenir que l'analogie reste limitée car l'espace géométrique est de dimension 3 alors que l'espace des fonctions est de dimension infinie !

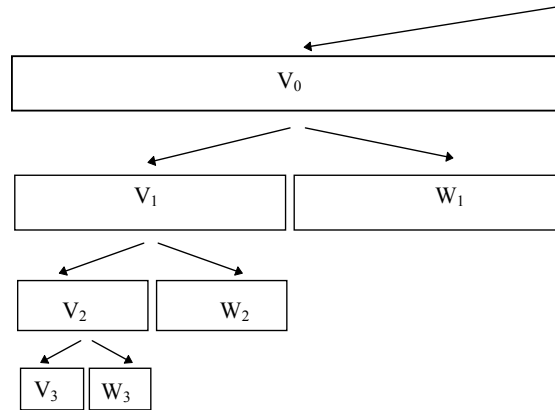


Figure 4. Schéma de l'analyse multirésolution

La relation d'orthogonalité entre les fonctions de base pour une échelle donnée 4.11 pourra donc s'écrire :

$$\langle \varphi_{j,n}, \varphi_{j,k} \rangle = \delta(n - k) \quad \forall n, k, j \in \mathbb{Z} \quad (13)$$

Remarque 2 On peut utiliser plusieurs fonctions φ pour construire par translation une base du sous-espace V_0 , cette liberté est mise à profit dans la construction des **multi-ondelettes**. Les fonctions doivent, bien entendu, être orthogonales entre elles. Sur ce sujet, on pourra consulter les travaux de J. Geronimo [16], [13], ou, à titre introductif, l'ouvrage de G. Strang [35].

L'action du projecteur sur f fournira sa décomposition sur la base des fonctions d'échelle et les coefficients de cette décomposition constituent l'approximation à l'échelle j de f .

$$A_j f = \sum_n \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \varphi_{j,n} \quad (14)$$

On pose :

$$a_n^j = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \quad (15)$$

l'approximation à la résolution j de la fonction f sera définie par la suite discrète des nombres (réels ou complexes) a_n^j .

28 Ondelettes pour le signal numérique

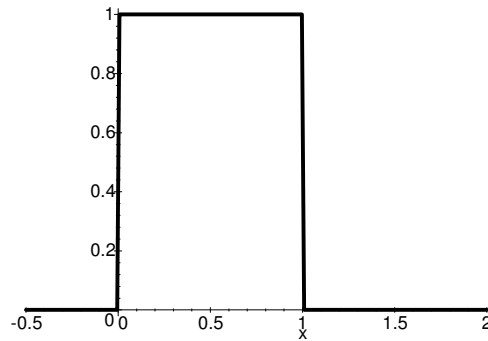


Figure 4. Fonction d'échelle de l'analyse de Haar

Une suite numérique formée par échantillonnage d'un signal continu réel pourra être considérée comme une approximation à une résolution donnée du signal continu.

La base étant orthonormée, la norme de la fonction (l'énergie) peut être calculée à partir de ses "coordonnées" :

$$\|A_j f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n^j|^2 \quad (16)$$

4.1.2 Espaces des détails

L'espace des détails vient compléter l'analyse.

On peut définir pour chaque V_j son complément orthogonal W_j dans V_{j-1} tel que :

$$\begin{aligned} V_{j-1} &= V_j \oplus W_j \\ L^2(\mathbb{R}) &= \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \end{aligned}$$

Comme W_{j-1} est orthogonal à V_{j-1} , alors W_{j-1} sera orthogonal à W_j ; cette propriété s'écrit :

$$\forall j, k \neq j \text{ alors } W_j \perp W_k \quad (17)$$

Les sous-espaces W_j ne forment pas une famille d'espaces emboîtés, mais les propriétés d'échelle et d'invariance par translation sont conservées.

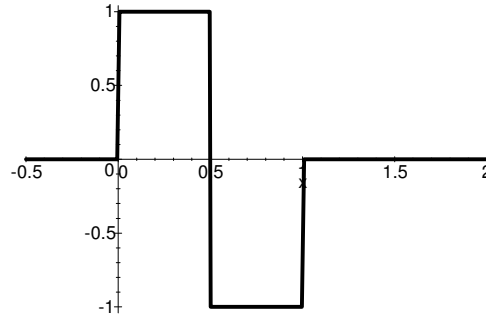


Figure 4. Ondelette mère de l'analyse de Haar

Dans ces conditions, on peut montrer qu'il existe une fonction appelée ondelette qui par dilatations et translations engendre une base orthonormée des W_j et donc de L^2 .

Cette fonction est notée :

$$\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (18)$$

et les fonctions de base sont construites suivant la relation :

$$\psi_{j,n}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}x - n) \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \quad (19)$$

L'orthonormalité de la base d'ondelettes s'écrit :

$$\langle \psi_{j,n}, \psi_{i,k} \rangle = \delta(j-i) \delta(n-k) \quad \forall j, i, n, k \in \mathbb{Z} \quad (20)$$

L'approximation à l'échelle immédiatement plus fine pourra donc être reconstruite en utilisant les détails du signal fournis par sa projection sur la base de W_j suivant la relation suivante :

$$A_{j-1}f = A_j f + \sum_n \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n} \quad (21)$$

On notera D_j le projecteur sur W_j et le signal de détail sera décrit par la suite numérique :

$$d_n^j = \langle f, \psi_{j,n} \rangle \quad (22)$$

30 Ondelettes pour le signal numérique

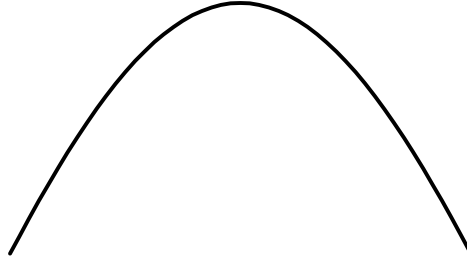


Figure 4. Fonction exemple

donc :

$$D_j f = \sum_n \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n} \quad (23)$$

et la formule de reconstruction s'écrit :

$$A_{j-1} f = A_j f + D_j f \quad (24)$$

Le signal de détail est constitué d'une suite numérique dont les éléments sont aussi les coefficients de la transformée en ondelettes.

Le schéma de la décomposition est représenté symboliquement sur la figure 4. dans laquelle la largeur des rectangles symbolisant les sous-espaces est proportionnelle à la densité de l'échantillonnage réalisé par la projection du signal dans le sous-espace considéré.

Exemple 1 En exemple, on peut présenter l'analyse de Haar. Les sous espaces V_j sont définis par :

$$V_j = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ telles que } \forall k \in \mathbb{Z} \text{ on a } f_{[2^j k, 2^j (k+1)[} = \text{constante} \} \quad (25)$$

Le sous espace V_j est l'ensemble des fonctions constantes sur les intervalles de largeur 2^j . Les fonctions de base sont construites à partir de la fonction d'échelle $\varphi(x)$ égale à 1 de 0 à 1 et nulle partout ailleurs :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad (26)$$

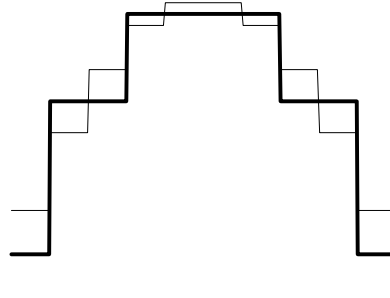


Figure 4. $A_o f$ (en trait fin) et $A_1 f$

La fonction ondelette est définie par :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad (27)$$

Les figures 4. et 4. présentent les représentations graphiques de ces fonctions.

Nous prenons une fonction quelconque pour illustrer la décomposition aux échelles $j = 0$ et $j = 1$. Cette fonction est présentée sur le graphe de la figure 4..

Ses projections sur le sous espace V_o et sur le sous espace V_1 sont présentées dans la figure 4..

La projection sur W_1 , donc le signal de détail, est donnée sur la figure 4..

On vérifie bien que :

$$A_o f = A_1 f + D_1 f$$

conformément à l'équation 4.24.

4.1.3 Analyse multirésolution et localisation spatio-fréquentielle

On aura une illustration plus visuelle de la signification spatio-fréquentielle de l'analyse multirésolution en considérant un signal à 2 dimensions. Nous prendrons

32 Ondelettes pour le signal numérique

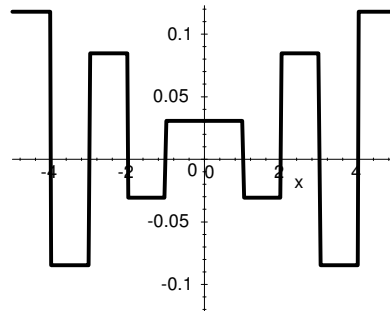


Figure 4. $D_1 f$

une image volontairement dégradée par un bruit haute fréquence (voir les figures du tableau 4.) pour que l'espace fréquentiel soit rempli.

Cette image est décomposée par une analyse de Haar et on obtient une image "grossière" et une image de détails (voir les figures du tableau 4.).

On constate que les détails de l'image (voir les figures du tableau 4.) sont bien localisés, ils correspondent approximativement aux contours et évidemment au bruit ajouté.

L'analyse de Fourier de ces images montre que la localisation fréquentielle est relativement médiocre, la séparation en deux bandes de fréquences n'est pas nette. L'image qui présente le spectre de l'approximation ne devrait contenir que des basses fréquences, tandis que l'image qui donne le spectre de l'image des détails ne devrait révéler que les composantes haute fréquence du signal.

Si la même opération est menée avec une autre analyse multirésolution utilisant des bases (échelle et ondelette) dont la localisation espace-fréquence est mieux équilibrée, on trouve des résultats sensiblement différents. Les bases utilisées dans l'exemple traité ici seront présentées ultérieurement, il s'agit de fonctions construites à partir de B-splines cubiques (voir les images du tableau 4.). L'image de détail (voir les images du tableau 4.) montre que la localisation spatiale est moins bonne que dans l'analyse de Haar.

La localisation fréquentielle des composantes est en revanche bien meilleure et le découpage en deux sous-bandes fréquentielles apparaît nettement sur les images spectrales.



Tableau 4. Image originale et transformée de Fourier

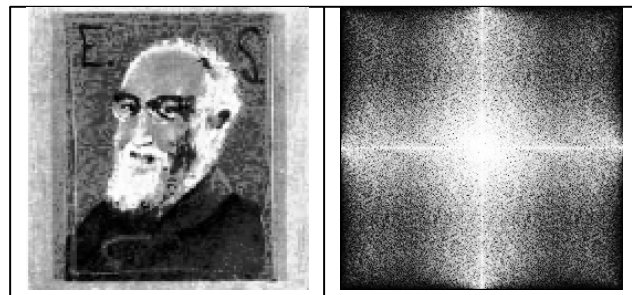


Tableau 4. Analyse de Haar : approximation à l'échelle 1 et son spectre

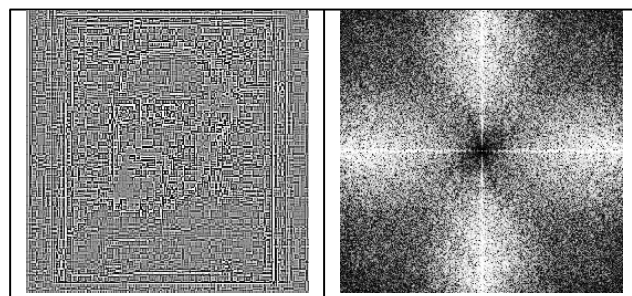


Tableau 4. Analyse de Haar : image des détails à l'échelle 1 et son spectre

34 Ondelettes pour le signal numérique

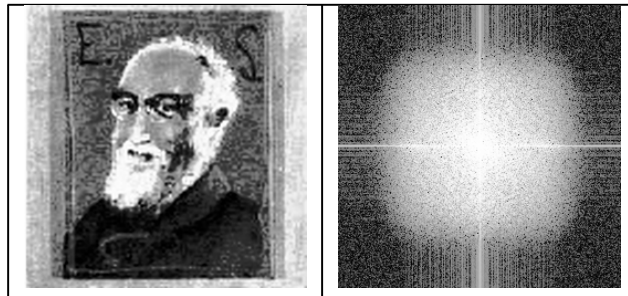


Tableau 4. Analyse B-spline cubique : approximation 1 et son spectre

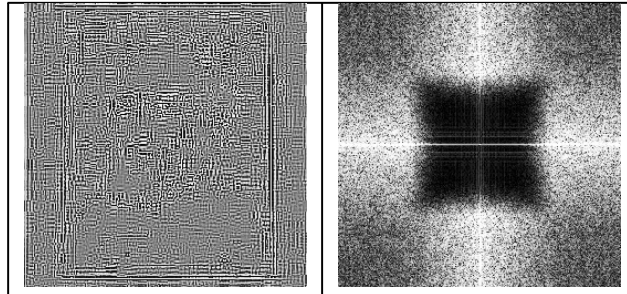


Tableau 4. Analyse B-spline cubique : image des détails 1 et son spectre

4.1.4 Généralisation : paquets d'ondelettes

Le principe de l'analyse multirésolution de l'espace L^2 des fonctions continues d'une variable réelle et de carré intégrable peut-être étendu à des sous-espaces de celui-ci. On peut, par exemple, appliquer le même schéma aux sous-espaces W_j engendrés par l'analyse précédente. Cette analyse peut être menée avec les mêmes bases de fonctions d'échelle et d'ondelettes ou avec des bases différentes. On peut, de même, changer de fonctions de base à chaque échelle. Dans ces algorithmes, la reconstruction parfaite est assurée par la réutilisation lors de la synthèse, pour une résolution donnée, de la même base que lors de l'analyse pour cette résolution.

La généralisation présentée qui consiste à analyser les sous-espaces de détail du signal est baptisée analyse en paquets d'ondelettes. L'algorithme correspondant peut-être schématisé par le diagramme 4..

Cet algorithme conduit à une décomposition en sous-bandes de fréquence du signal ; cette décomposition est ajustable par le choix des composantes. Ce type d'analyse offre une grande souplesse pour l'utilisateur et lui permet de s'adapter au signal à analyser. Les principales applications de l'analyse en paquets d'ondelettes sont dans le domaine de la compression des images. Tous les algorithmes et toutes les propriétés des fonctions d'échelle, des ondelettes et des filtres associés que nous allons étudier dans les paragraphes et chapitres suivants sont utilisables dans ce schéma. Nous ne reviendrons donc pas sur cette généralisation de l'analyse multirésolution.

4.2 Algorithme récursif

Le problème pour effectuer concrètement la décomposition est que l'on ne dispose pas en général du signal f mais seulement d'une approximation à une échelle donnée. Il faut donc trouver un algorithme qui, à partir de cette approximation, permet de trouver l'approximation et les détails à la résolution immédiatement inférieure, ce qui par itérations successives conduit à l'analyse du signal pour toutes les résolutions

36 Ondelettes pour le signal numérique

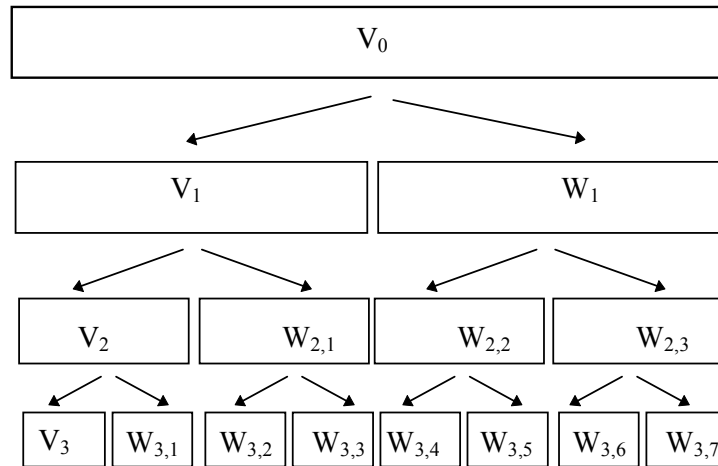


Figure 4. Analyse en paquets d'ondelettes

inférieures à celle de départ. Deux algorithmes principaux ont été mis en évidence : l'algorithme à trous [33] et l'algorithme de Mallat [25][26][27]. Le premier concerne des analyses multirésolution non-orthogonales, le second est pratiquement le seul utilisé dans le cas des analyses orthogonales et biorthogonales. Nous ne présenterons ici que l'algorithme de Mallat. Une présentation complète est donnée dans [32].

4.2.1 Algorithme d'analyse

4.2.1.1 Projection sur les fonctions d'échelle

Le point clef est fourni par la décomposition de $a_n^j = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle$ en fonction de $a_n^{j-1} = \langle f, \varphi_{j-1,n} \rangle$.

Par construction $\varphi(x)$ est une fonction de V_0 ; comme $V_0 \subset V_{-1}$ on peut décomposer $\varphi(x)$ sur la base de V_{-1} . Et donc $\exists h[n]$ suite numérique avec $n \in \mathbb{Z}$ telle que :

$$\varphi(x) = \sum_n h[n] \varphi_{-1,n}(x) \quad (28)$$

avec, conformément à 4.10, $\varphi_{-1,n}(x) = 2^{\frac{1}{2}} \varphi(2x - n)$, soit :

$$h[n] = \langle \varphi, \varphi_{-1,n} \rangle \quad (29)$$

La suite numérique $h[n]$ sera considérée comme étant la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique.

La construction de cette suite peut être menée à partir de la donnée de $\varphi(x)$ et nous verrons qu'un choix de $h[n]$ étant fait (certaines conditions sont à respecter) la fonction d'échelle peut être déterminée. On pourra donc définir une analyse multirésolution indifféremment en partant de la fonction d'échelle ou du filtre numérique associé. Il faut noter que cette dualité d'approche correspond à l'existence de deux écoles : les traiteurs de signal continu qui ont abordé le problème par les fonctions de projection et les traiteurs de signal discret qui ont travaillé sur le filtrage et sur les «bancs de filtres». Il a été largement reconnu et démontré que ces deux approches reposaient en fait sur les mêmes concepts de base et ne différaient pas vraiment ; il n'en reste pas moins que les deux écoles subsistent au moins dans la façon de présenter les choses. Nous nous sommes plutôt placés dans la perspective des traiteurs de signal continu même si dans notre esprit, le signal d'entrée de nos systèmes est discret et correspond directement aux coefficients d'une première projection sur le sous-espace de résolution 0.

Remarque 3 Remarquons tout d'abord que $\varphi(x)$ étant par construction normée (en

38 Ondelettes pour le signal numérique

énergie) on a :

$$\begin{aligned}
 \|\varphi(x)\|^2 &= \langle \varphi, \varphi \rangle = 1 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \varphi^*(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k h[k] \varphi_{-1,k}(x) \sum_n h[n] \varphi_{-1,n}^*(x) dx \\
 &= \sum_k \sum_n h[n] h[k] \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{-1,k}(x) \varphi_{-1,n}^*(x) dx \\
 &= \sum_k \sum_n h[n] h[k] \|\varphi_{-1}(x)\|^2 \delta(n-k)
 \end{aligned}$$

et donc, la norme se conservant à travers les échelles :

$$\sum_n h^2[n] = 1 \quad (30)$$

Montrons que la décomposition est la même pour des échelles quelconques.

On a :

$$\varphi(x) = \sum_n h[n] 2^{1/2} \varphi(2x - n) \quad (31)$$

donc :

$$\varphi_{j,n}(x) = 2^{-j/2} \sum_k h[k] 2^{1/2} \varphi(2(2^{-j}x - n) - k) \quad (32)$$

ce qui en regroupant les indices et les exposants conduit à l'équation :

$$\varphi_{j,n} = \sum_k h[k] \varphi_{j-1,k+2n} \quad (33)$$

Donc on peut calculer les coefficients $a_n^j = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle$ de l'approximation à la résolution j :

$$a_n^j = \sum_k h[k] \langle f, \varphi_{j-1,k+2n} \rangle \quad (34)$$

si on pose $l = k + 2n$, cette expression s'écrit :

$$a_n^j = \sum_l h[l - 2n] \langle f, \varphi_{j-1,l} \rangle \quad (35)$$

et si on note :

$$\tilde{h}[n] = h[-n] \quad (36)$$

la séquence retournée ou le filtre symétrique de h , on obtient :

$$\alpha_n^j = \sum_l \tilde{h}[2n-l] \langle f, \varphi_{j-1,l} \rangle \quad (37)$$

et on aura finalement l'équation réursive suivante :

$$\alpha_n^j = \sum_l \tilde{h}[2n-l] \alpha_l^{j-1} \quad (38)$$

Si on considère α_n^j comme une séquence numérique indexée par n , le calcul précédent peut être interprété comme un produit de convolution entre \tilde{h} et α^{j-1} évalué pour un indice sur deux ; ou encore comme le filtrage de la séquence α^{j-1} par le filtre de réponse impulsionnelle \tilde{h} suivi par un sous-échantillonnage de rapport 2.

Exemple 2 Encore une fois l'exemple de Haar pourra être traité avec profit. Rappelons que dans ce cas la fonction d'échelle est construite à partir de la fonction mère $\varphi(x)$ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad (39)$$

On aura donc :

$$\begin{cases} \varphi_{-1,0}(x) = \sqrt{2}\varphi(2x) = 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \varphi_{-1,0}(x) = \sqrt{2}\varphi(2x) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (40)$$

Ce qui permet la décomposition suivante pour $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{-1,0}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{-1,1}(x)$$

La séquence numérique correspondant à la réponse impulsionnelle du filtre $h[n]$ sera donc :

$$h[n] = \left\{ \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots \right\} \quad (41)$$

L'élément souligné correspond à $n = 0$.

40 Ondelettes pour le signal numérique

4.2.1.2 Projection sur les fonctions ondelettes

Un schéma analogue est bâti à partir de la décomposition de l'ondelette de W_o sur la base de V_{-1} :

$$\psi = \sum_n g[n] \varphi_{-1,n} \quad (42)$$

ou de façon plus détaillée :

$$\psi(x) = \sum_n g[n] \sqrt{2} \varphi(2x - n) \quad (43)$$

ce qui conduit à l'équation de construction de $g[n]$ suivante :

$$g[n] = \langle \psi, \varphi_{-1,n} \rangle \quad (44)$$

$g[n]$ sera également considérée comme la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique ; nous verrons que ce filtre est lié au filtre $h[n]$ et qu'il peut être construit à partir de ce dernier.

Un calcul analogue en tous points au précédent permet d'écrire les coefficients de détail :

$$d_n^j = \langle f, \psi_{j,n} \rangle \quad (45)$$

$$d_n^j = \sum_k g[k] \langle f, \varphi_{j-1,k+2n} \rangle \quad (46)$$

On introduit également le filtre symétrique dont la réponse impulsionnelle correspond à la séquence $g[n]$ retournée :

$$\tilde{g}[n] = g[-n] \quad (47)$$

La décomposition en ondelettes à l'échelle j pourra donc s'écrire :

$$d_n^j = \sum_l \tilde{g}[2n - l] \langle f, \varphi_{j-1,l} \rangle \quad (48)$$

ou encore :

$$d_n^j = \sum_l \tilde{g}[2n - l] a_l^{j-1} \quad (49)$$

Cette relation sera interprétée de la même manière que précédemment.

Exemple 3 Reprenons l'exemple de l'analyse multirésolution de Haar. Rappelons que dans ce cas la fonction d'ondelette est construite à partir de la fonction mère

$\psi(x)$ définie par :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad (50)$$

On aura donc la décomposition suivante pour $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x - 1) \quad (51)$$

soit :

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{-1,0}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{-1,1}(x) \quad (52)$$

La séquence numérique correspondant à la réponse impulsionnelle du filtre $g[n]$ sera donc :

$$g[n] = \left\{ \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots \right\} \quad (53)$$

On constate que dans le cas de l'analyse de Haar, l'algorithme de décomposition est très simple car les filtres $h[n]$ et $g[n]$ impliqués sont très courts. En fait le signal numérique à la résolution inférieure est obtenu par un simple moyennage entre le point étudié et son plus proche voisin, tandis que le signal de détail (perdu lors du changement de résolution) est obtenu en faisant la différence entre le point étudié et son plus proche voisin, le tout à un facteur de normalisation près. Malheureusement nous verrons que cette simplicité algorithmique ne conduit pas à une analyse très performante du point de vue de la résolution spatio-fréquentielle.

La figure 4. résume l'algorithme récursif d'analyse multirésolution de Mallat.

4.2.2 Algorithme de reconstruction

La décomposition est gouvernée par l'équation :

$$A_{j-1}f = \sum_n a_n^j \varphi_{j,n} + \sum_n d_n^j \psi_{j,n} \quad (54)$$

avec $a_n^j = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle$ et $d_n^j = \langle f, \psi_{j,n} \rangle$.

42 Ondelettes pour le signal numérique

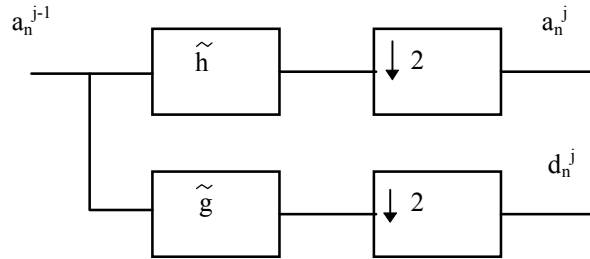


Figure 4. Algorithme d'analyse de Mallat

A_j est un projecteur donc $A_j(A_j f) = A_j f$ ce qui s'écrit :

$$A_{j-1} f = \sum_n a_n^{j-1} \underbrace{\langle A_{j-1} f, \varphi_{j-1,n} \rangle}_{\langle \varphi_{j-1,n}, \varphi_{j-1,n} \rangle} \varphi_{j-1,n} \quad (55)$$

En remplaçant dans a_n^{j-1} le terme $A_{j-1} f$ par son expression donnée dans 4.54, on obtient l'équation suivante :

$$a_n^{j-1} = \sum_k a_k^j \langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j-1,n} \rangle + \sum_k d_k^j \langle \psi_{j,k}, \varphi_{j-1,n} \rangle \quad (56)$$

Or nous avons vu (équation 4.33) au paragraphe précédent que :

$$\varphi_{j,k} = \sum_l h[l] \varphi_{j-1,l+2k} \quad (57)$$

on peut donc évaluer le produit scalaire des fonctions d'échelle pour deux résolutions successives quelconques :

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j-1,n} \rangle = \sum_l h[l] \delta[n-l-2k] \underbrace{\langle \varphi_{j-1,l+2k}, \varphi_{j-1,n} \rangle}_{\langle \varphi_{j-1,n-2k}, \varphi_{j-1,n} \rangle} \quad (58)$$

car les fonctions d'échelle forment une base orthonormée pour une échelle donnée ; ce qui donne :

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j-1,n} \rangle = h[n-2k] \quad (59)$$

et de même pour les ondelettes :

$$\langle \psi_{j,k}, \varphi_{j-1,n} \rangle = g[n-2k] \quad (60)$$

d'où l'équation de reconstruction :

$$a_n^{j-1} = \sum_k a_k^j h[n-2k] + \sum_k d_k^j g[n-2k] \quad (61)$$

Cette équation est une somme d'équations de filtrage (produits de convolution) si on remplace la suite a_k^j par une suite a_l^j qui coïncide avec a_k^j pour $l = 2k$; $a_{2k}^j = a_k^j$ et qui est nulle pour les valeurs de l intermédiaires (et de même pour la suite d_k^j).

$$\begin{aligned} a_k^j &= \{\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet\} \\ a_l^j &= \{\bullet, 0, \bullet, 0, \bullet, 0, \bullet, 0, \bullet, 0, \bullet, 0\} \end{aligned} \quad (62)$$

Cette opération qui consiste à intercaler un zéro entre les échantillons d'une série s'appelle sur-échantillonnage. L'équation 4.61 s'écrit alors :

$$a_n^{j-1} = \sum_l a_l^j h[n-l] + \sum_l d_l^j g[n-l] \quad (63)$$

Remarque 4 Une autre solution aurait été de sous-échantillonner les filtres h et g .

La figure 4. présente l'algorithme de synthèse ou de reconstruction étudié. Les algorithmes d'analyse et de reconstruction que nous venons de présenter sont appelés algorithmes de Mallat ou parfois algorithmes pyramidaux.

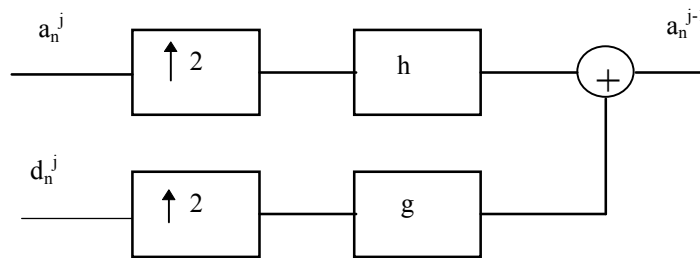


Figure 4. Algorithme de synthèse de Mallat

On peut dire en conclusion que le calcul de la transformée en ondelettes discrète (rappelons que la transformée est discrète, pas les ondelettes) sur des bases orthonormées se ramène à des opérations de filtrage numérique suivies de sous-échantillonnage. La reconstruction est parfaite et s'effectue également par des filtrages numériques précédés de sur-échantillonnage. Les mêmes filtres (à un renversement du temps près) sont utilisés dans les deux cas. La mise en œuvre de cet algorithme doit être menée en profitant au maximum de ces particularités. Toutes les techniques

44 Ondelettes pour le signal numérique

classiques de mise en œuvre de filtres linéaires numériques peuvent être utilisées, mais devront être adaptées. L'étude des conséquences des troncatures et quantifications diverses inhérentes à toute mise en œuvre devra être menée en tenant compte des spécificités de l'algorithme pyramidal.

Comme toujours quand il est question de filtrage linéaire, la nature des filtres utilisés (RIF ou FIR, symétriques ou non, récurrents ou non) conditionne le coût de calcul et le choix de l'éventuelle architecture matérielle d'implantation. Le choix des filtres est lié d'une part aux contraintes liées aux principes de l'analyse multirésolution et d'autre part aux contraintes mises a priori sur les bases d'ondelettes et/ou de fonctions d'échelle choisies. Le chapitre suivant est dédié à l'exploration des contraintes du premier type et fournit les éléments qui doivent servir de guide lors de la construction d'une analyse multirésolution et des filtres et fonctions de base associés.

Nous verrons, dans le prochain paragraphe, comment l'algorithme de reconstruction peut être utilisé pour construire une approximation numérique aussi fine que souhaitée des fonctions d'échelle et des ondelettes à partir des filtres numériques associés.

Exemple 4 *Un bon exercice pour bien comprendre le fonctionnement de cet algorithme très simple consiste à le tester «à la main» sur un cas élémentaire. Nous proposons de traiter le problème de l'analyse et de la reconstruction sur un niveau en échelle d'un signal numérique en forme de rampe par une analyse de Haar.*

Nous avons vu que les filtres associés sont les suivants (le coefficient de rang 0 est souligné) :

$$h[n] = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \text{ et donc } \tilde{h}[n] = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

et :

$$g[n] = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \text{ et donc } \tilde{g}[n] = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

Le signal numérique à analyser sera :

$$a^0[n] = \{ \dots, \underline{0}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \}$$

et nous supposons qu'il constitue la liste des coefficients du signal d'approximation à l'échelle $j = 0$.

On applique le filtre $\tilde{h}[n]$ suivi d'un sous-échantillonnage, ce qui donne :

$$a^1[n] = \left\{ \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{13}{\sqrt{2}} \dots \right\}$$

On fait de même avec $\tilde{g}[n]$, d'où :

$$d^1[n] = \left\{ \dots, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \dots \right\}$$

Pour la reconstruction, on sur-échantillonne en intercalant un 0 entre chaque coefficient avant de filtrer par $h[n]$ et $g[n]$:

$$\begin{aligned} a^1[n] &\rightarrow \left\{ \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{5}{\sqrt{2}}, 0, \frac{9}{\sqrt{2}}, 0, \frac{13}{\sqrt{2}} \dots \right\} \\ d^1[n] &\rightarrow \left\{ \dots, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \dots \right\} \end{aligned}$$

puis après filtrage :

$$\left\{ \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \dots \right\} + \left\{ \dots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots \right\}$$

on retrouve bien la séquence initiale :

$$a^0[n] = \{ \dots, \underline{0}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \}$$

4.3 Construction numérique des fonctions de base

Nous présentons dans ce paragraphe un algorithme qui découle de l'algorithme dyadique de Mallat et qui permet de construire numériquement des approximations des fonctions d'échelle et donc des ondelettes. On peut choisir à volonté la résolution avec laquelle ces approximations sont obtenues. Cet algorithme est souvent appelé *Algorithme cascade*, et il a été proposé initialement, semble-t-il par I. Daubechie en 1988.

Dans l'analyse multirésolution d'une fonction f de L^2 les coefficients de la projection sur le sous espace V_j sont :

$$a_n^j = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \quad (64)$$

La fonction d'échelle mère est :

$$\varphi(x) = \varphi_{0,0}(x) \quad (65)$$

La famille engendrée est orthonormée par translation, on a :

$$\langle \varphi, \varphi_{0,n} \rangle = \delta(n) \quad (66)$$

46 Ondelettes pour le signal numérique

Les ondelettes forment des bases des sous-espaces orthogonaux à V_j , donc :

$$\langle \varphi, \psi_{-j,n} \rangle = 0 \quad \forall j \geq 0 \text{ et } n \in \mathbb{Z} \quad (67)$$

L'analyse multirésolution de la fonction d'échelle $\varphi(x)$ donne donc à l'échelle $j = 0$

$$\begin{aligned} a_n^0 &= \delta(n) \\ \text{et} \\ d_n^0 &= 0 \end{aligned} \quad (68)$$

Ces valeurs peuvent être utilisées comme valeurs initiales pour l'algorithme de reconstruction permettant de calculer les approximations plus fines de φ . Les coefficients de détail restent nuls car nous explorons les échelles négatives :

$$d_n^j = 0 \quad \forall j \leq 0 \text{ et } n \in \mathbb{Z} \quad (69)$$

Nous aurons donc simplement :

$$a_n^{-1} = \sum_k h[n - 2k] a_n^0 \quad (70)$$

cette expression sera simplement itérée, de sorte que l'approximation à l'échelle $-j$ de la fonction d'échelle sera obtenue après j itérations par :

$$a_n^{-j} = \sum_k h[n - 2k] a_n^{-j+1} \quad (71)$$

Nous avons vu que ce calcul se ramène à un sur-échantillonnage de la séquence d'entrée suivi du filtrage de la séquence obtenue par le filtre $h[n]$. La convergence de l'algorithme est assurée par la convergence de l'analyse multirésolution et réciproquement, les axiomes de base indiquent que si $j \rightarrow -\infty$ alors V_j tend vers L^2 . Une analyse mathématique rigoureuse indique qu'une interpolation simple de la séquence a_n^{-j} (considérée comme l'échantillonnée d'une fonction continue) conduit à une fonction continue qui tend vers φ quand $j \rightarrow \infty$. Dans la pratique on pourra utiliser une interpolation par des fonctions polynomiales d'ordre 0 (fonction constante par morceaux) ou 1 (fonction linéaire par morceaux). Pour cette interpolation on admet donc que :

$$\varphi_{j,o}(n) = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(n2^{-j}) \simeq a_n^{-j} \quad (72)$$

A partir de l'approximation de la fonction d'échelle φ on peut construire une approximation à la même résolution de la fonction d'ondelette qui est une combinaison

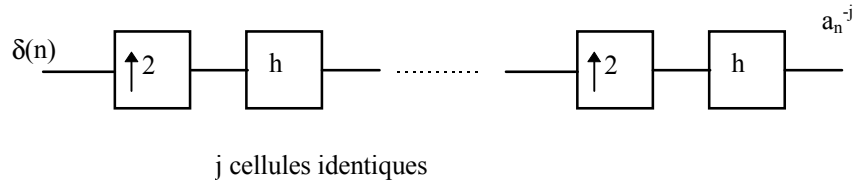


Figure 4. Algorithme cascade pour la fonction d'échelle

linéaire de translatées entières de cette fonction :

$$\psi = \sum_n g[n] \varphi_{-1,n} \quad (73)$$

ce qui s'écrit :

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n g[n] \varphi(2x - n) \quad (74)$$

On peut donc envisager de calculer une approximation de l'ondelette pour des valeurs discrètes de la variable en posant :

$$x = 2^{-j}k, \quad k \text{ étant un entier}$$

il vient :

$$\psi(2^{-j-1}k) = \sqrt{2} \sum_n g[n] \varphi(2^{-j}k - n) \quad (75)$$

ou encore :

$$\psi_{j,o} = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j-1}k) \simeq \sqrt{2} \sum_n g[n] a_{n-2^j k}^{-j} \quad (76)$$

L'interprétation de cette relation en terme de filtrage numérique conduit à introduire une version sur-échantillonnée d'un facteur 2^j du filtre g notée $g^{(j)}$ définie par :

$$g^{(j)}(k) = \begin{cases} g(2^{-j}k) & \text{si } 2^{-j}k \text{ est entier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (77)$$

Dans ces conditions, l'ondelette sera approximée par le filtrage de l'approximé de la fonction d'échelle par le filtre sur-échantillonné :

$$\psi_{j,o} = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j-1}k) \simeq \sqrt{2} g^{(j)} * a_k^{-j} \quad (78)$$

48 Ondelettes pour le signal numérique

Il est, d'autre part, possible de construire un algorithme cascade de la même façon pour obtenir l'approximation de la fonction d'ondelette. En effet, les ondelettes forment des bases des sous-espaces orthogonaux entre eux, donc :

$$\langle \psi, \psi_{-j,n} \rangle = \delta(j, n) \quad \forall j \geq 0 \text{ et } n \in \mathbb{Z} \quad (79)$$

L'analyse multirésolution de la fonction d'ondelette $\psi(x)$ donne donc à l'échelle $j = 0$

$$\begin{aligned} a_n^0 &= 0 \\ \text{et} \\ d_n^0 &= \delta(n) \end{aligned} \quad (80)$$

Ces valeurs peuvent être utilisées comme valeurs initiales pour l'algorithme de reconstruction permettant de calculer les approximations plus fines de φ . Les coefficients d'approximation ne sont nuls qu'à l'échelle 0 et ceux de détails restent nuls pour les échelles plus fines car, comme pour les fonction d'échelle, nous explorons les échelles négatives :

$$d_n^j = 0 \quad \forall j < 0 \text{ et } n \in \mathbb{Z} \quad (81)$$

Nous aurons donc simplement :

$$a_n^{-1} = \sum_k g[n - 2k] d_n^0 \quad (82)$$

et :

$$a_n^{-2} = \sum_k h[n - 2k] a_n^{-1}$$

cette expression sera simplement itérée, de sorte que l'approximation à l'échelle $-j$ de la fonction d'ondelette sera obtenue après j itérations par :

$$a_n^{-j} = \sum_k h[n - 2k] a_n^{-j+1} \quad (83)$$

Nous avons vu que ce calcul se ramène à un sur-échantillonnage de la séquence d'entrée suivi du filtrage de la séquence obtenue par le filtre $h[n]$. La convergence de l'algorithme est toujours assurée par la convergence de l'analyse multirésolution. On aura donc :

$$\psi_{j,o}(n) \simeq a_n^{-j} \quad (84)$$

L'algorithme cascade est donc identique à celui permettant de construire la fonction d'échelle, seule la première étape diffère car c'est le filtre g qui y est appliqué

(à la première itération seulement). On peut vérifier que les deux méthodes proposées pour construire des approximations des ondelettes sont en fait équivalentes.

On trouvera sur les schémas 4. et 4. une description illustrée de l'algorithme cascade pour la construction de la fonction d'échelle et la méthode qui permet d'en déduire l'ondelette.

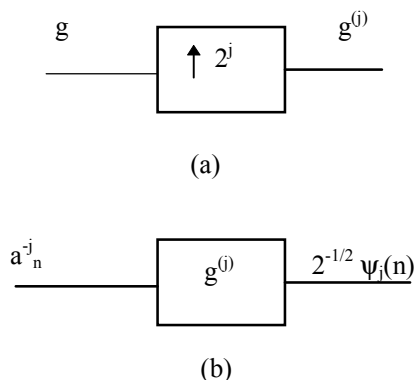


Figure 4. Construction numérique de l'ondelette : (a) sur-échantillonnage du filtre g , (b) construction de ψ

Les figures du tableau 4. montrent la reconstruction progressive de la fonction d'échelle correspondant au filtre de Daubechies pour $N = 2$ (voir paragraphe 6.4). Ces fonctions ne peuvent pas être construites directement car il n'existe aucune formule analytique le permettant. En comparant avec la fonction d'échelle reconstruite par un grand nombre d'itérations, on constate que la convergence de l'algorithme cascade est régulière et rapide.

Cet algorithme cascade peut, en fait, être considéré comme un cas particulier d'un algorithme plus général qui permet de construire des approximations des projections sur les sous-espaces V_j et W_j d'une fonction f de $L^2(\mathbb{R})$. Le calcul direct de ces projections, qui sont des fonctions continues, serait très lourd et l'erreur inévitable affectant le résultat difficile à maîtriser. Ce calcul, dans le cas d'une projection sur V_j consisterait à évaluer l'expression suivante :

$$A_j f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^j \varphi_{j,n} \quad (85)$$

Si on se place dans le cas où $j > 0$, on peut se contenter de l'approximation de

50 Ondelettes pour le signal numérique

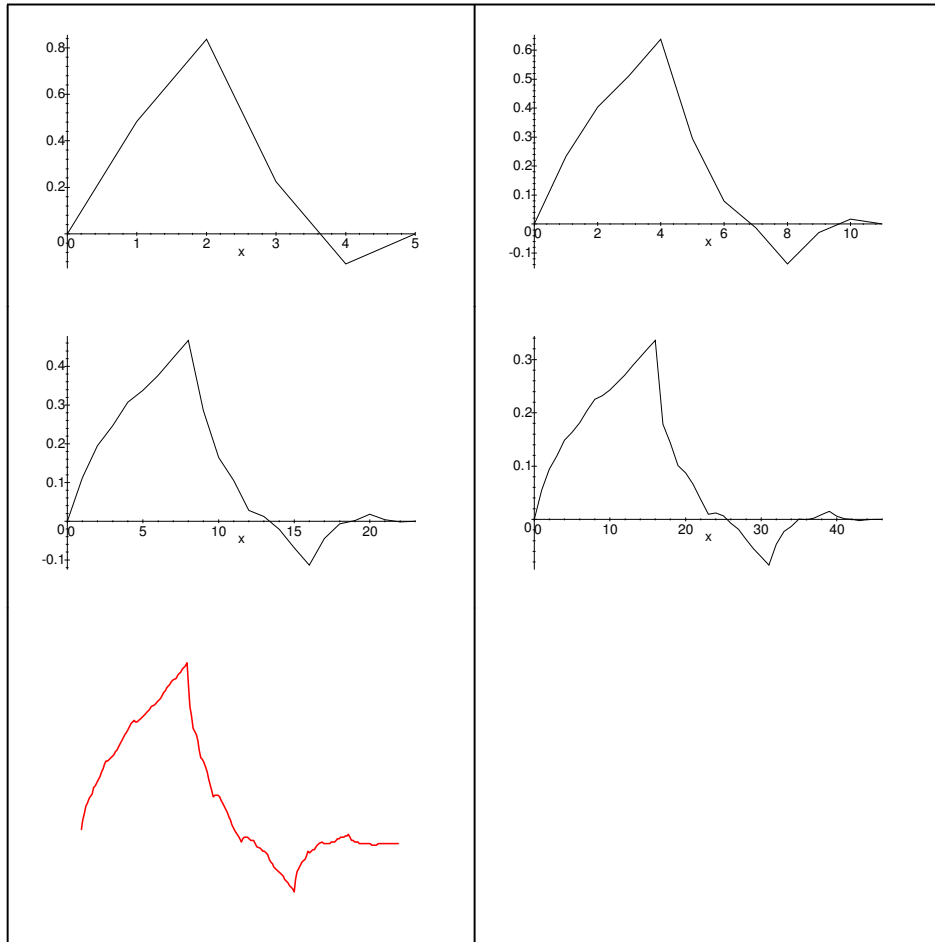


Tableau 4. Premières itérations et fonction d'échelle (Daubechies-2)

$A_j f$ à l'échelle 0 :

$$A_o(A_j f) = A_1(A_j f) + D_1(A_j f) \quad (86)$$

Or, comme $W_1 \perp V_1$ et $V_j \subset V_1$, alors $W_1 \perp V_j$ et donc :

$$D_1(A_j f) = 0 \quad (87)$$

donc :

$$A_o(A_j f) = A_1(A_j f) \quad (88)$$

et en continuant le raisonnement, on montre que :

$$\begin{aligned} A_o(A_j f) &= A_j(A_j f) \\ A_o(A_j f) &= A_j f \end{aligned} \quad (4.89)$$

Comme la décomposition est une transformation bijective, la reconstruction, menée à partir des a_n^j , obtenus par l'analyse de f , et des coefficients de détail mis à zéro, conduit aux coefficients de $A_o(A_j f)$. La séquence de ces coefficients représente une approximation à l'échelle 0 de la projection de f sur le sous-espace V_j .

Pour le signal de détail, $D_j f$, on aura :

$$A_o(D_j f) = A_1(D_j f) + D_1(D_j f) \quad (4.90)$$

$$= A_1(D_j f) \quad (4.91)$$

Car $W_i \perp W_j, \forall j \neq 1$. En poursuivant le raisonnement et en remarquant que $V_j \perp W_j$ et que l'opérateur D_j est idempotent, on arrive à :

$$A_o(D_j f) = A_j(D_j f) + D_j(D_j f) \quad (4.92)$$

$$A_o(D_j f) = D_j f \quad (4.93)$$

On devra donc mener la reconstruction du signal de détail en partant des d_n^j (donnés par l'analyse du signal f) et en mettant à zéro tous les autres coefficients. La séquence des coefficients obtenus constituera une approximation à l'échelle 0 du signal de détail à l'échelle j .

On peut, bien entendu, choisir d'affiner davantage ces approximations en continuant la reconstruction pour des valeurs de j négatives. La reconstruction est menée en utilisant l'algorithme de reconstruction de Mallat. Le résultat nous donne **une vue non sous-échantillonnée du signal d'approximation ou du signal de détail**

52 Ondelettes pour le signal numérique

de f à l'échelle j . C'est la méthode qui a été utilisée pour construire la série des images 4..

On retrouve l'algorithme cascade en prenant $f = \varphi_{j,o}$. On aura $a_n^j = \delta(n)$ et $d_n^j = 0$:

$$\begin{aligned} A_j \varphi_{j,o} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \varphi_{j,o}, \varphi_{j,n} \rangle \varphi_{j,n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) \varphi_{j,n} \\ A_j \varphi_{j,o} &= \varphi_{j,o} \end{aligned} \quad (4.94)$$

et donc :

$$A_o(A_j \varphi_{j,o}) = A_o \varphi_{j,o} \quad (95)$$

Ce qui justifie qu'en reconstruisant à partir d'un Dirac et avec des détails nuls on obtienne une approximation à l'échelle 0 de la fonction d'échelle $\varphi_{j,o}$.

De même, en prenant $f = \psi_{j,o}$, on aura $d_n^j = \delta(n)$ et $a_n^j = 0$:

$$\begin{aligned} D_j \psi_{j,o} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) \psi_{j,n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) \psi_{j,n} \\ D_j \psi_{j,o} &= \psi_{j,o} \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$A_o(D_j \psi_{j,o}) = A_o \psi_{j,o} \quad (97)$$

On retrouve l'algorithme cascade pour l'ondelette.

Chapitre 5

Propriétés et construction

Nous allons, dans ce paragraphe, étudier les propriétés de $h[n]$, $g[n]$, φ et ψ pour en déduire les règles de construction des bases d'ondelettes et de fonctions d'échelle et des filtres associés à une analyse multirésolution. Jusqu'à présent, seuls des cas "pathologiques" et sans intérêt pratique de base orthonormée d'ondelettes non associée à une analyse multirésolution (au sens présenté ici) ont pu être mis en évidence. Nous admettrons donc que base orthonormée d'ondelettes et analyse multirésolution vont ensemble. Nous verrons que la construction commence, en général, par le choix de la fonction d'échelle (ou du filtre numérique associé) et que le reste peut être déduit. Cela peut être déroutant pour ceux qui voudraient commencer par ce qui semblerait le plus naturel à savoir la famille d'ondelettes ; en fait dans ce cas le cheminement est plus complexe et le résultat moins assuré. Et d'ailleurs les contraintes pesant sur les fonctions d'échelles sont moins fortes car elles n'ont à être orthogonales entre elles qu'à l'intérieur d'une même échelle (résolution j) alors que les ondelettes doivent former une base orthonormée globale et être orthogonales à travers les échelles aussi bien que pour une échelle donnée.

Les propriétés des fonctions de base et des filtres associés qui sont données dans ce paragraphe sont liées à l'orthogonalité des bases. Les respecter lors de la construction d'une analyse multirésolution ne garantit pas la convergence de l'algorithme qu'il convient de vérifier par ailleurs. Un bon test est fourni par la formule de récurrence de l'équation 5.6 ou encore par l'algorithme cascade de construction de la fonction d'échelle du paragraphe 4.3.

54 Ondelettes pour le signal numérique

5.1 Propriétés fréquentielles de la fonction d'échelle

5.1.1 Relations avec le filtre associé

Nous avons vu que la suite numérique $h[n]$ pouvait être considérée comme la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique. La réponse fréquentielle de ce filtre est obtenue en exprimant la transformée de Fourier de cette suite. Cette transformée, comme toutes les réponses fréquentielles des filtres numériques est périodique de période 2π ; elle s'écrit comme suit :

$$\hat{h}(\omega) = \sum_n h[n] e^{-in\omega} \quad (1)$$

Or la fonction d'échelle $\varphi(x)$ peut s'exprimer en fonction de h par l'équation 4.28, qui peut s'écrire :

$$\varphi(x) = \sum_n h[n] \sqrt{2} \varphi(2x - n) \quad (2)$$

Si on prend la transformée de Fourier de cette relation et si on utilise les propriétés de cette transformée concernant la translation et le changement d'échelle⁴, on obtient :

$$\hat{\varphi}(\omega) = \sum_n h[n] \sqrt{2} \frac{1}{2} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-in\frac{\omega}{2}} \quad (3)$$

ce qui, en regroupant les termes :

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_n h[n] e^{-in\frac{\omega}{2}} \quad (4)$$

fait apparaître la réponse fréquentielle du filtre numérique exprimée en $\omega/2$, soit la relation suivante :

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (5)$$

cette relation, très importante en pratique, exprime simplement la projection de la fonction d'échelle sur la résolution inférieure dans l'espace de Fourier. En notant

⁴ La transformée d'une fonction dilatée est donnée par : $f(ax) \rightarrow \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

La transformée d'une fonction traduite est donnée par : $f(x - n) \rightarrow \hat{f}(\omega) e^{-in\omega}$.

par anticipation que $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ (voir équation 5.28), on peut d'ailleurs l'étendre par récurrence pour obtenir une relation entre la fonction d'échelle et la réponse fréquentielle du filtre numérique associé :

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{h}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \quad (6)$$

La construction de la fonction d'échelle (dans l'espace de Fourier) convergera si le filtre $h[n]$ choisi conduit à une analyse multirésolution de L^2 .

5.1.2 Orthonormalité dans Fourier

Voyons tout d'abord une conséquence de la formule de Poisson :

$$\sum_n \delta(t - nT) \stackrel{\text{fourier}}{\longleftrightarrow} \frac{2\pi}{T} \sum_n \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}) \quad (7)$$

Si on considère une fonction $\varphi(t)$ de $L^2(\mathbb{R})$ engendrant par translation une famille orthonormée, et donc telle que :

$$\langle \varphi(t), \varphi(t + n) \rangle = \delta(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

ce produit scalaire est l'échantillonné de la fonction d'autocorrélation de $\varphi(t)$ en effet, cette fonction d'autocorrélation s'écrit :

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \varphi(t + \tau) dt = \langle \varphi(t), \varphi(t + \tau) \rangle \quad (9)$$

La transformée de Fourier de cette fonction d'autocorrélation s'écrit :

$$\widehat{r}(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega) \widehat{\varphi}^*(\omega) = |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 \quad (10)$$

La version échantillonnée de cette fonction sera notée $r_e(\tau)$. On aura :

$$r_e(\tau) = r(\tau) \cdot \sum_k \delta(\tau - k) \quad (11)$$

on peut calculer la transformée de Fourier de cette expression en utilisant le théorème de Plancherel pour faire apparaître un produit de convolution et en estimant la transformée du peigne de Dirac par la formule de Poisson (équation 5.7) :

$$\widehat{r}_e(\omega) = \frac{1}{2\pi} \widehat{r}(\omega) * 2\pi \sum_n \delta(\omega - n2\pi) \quad (12)$$

56 Ondelettes pour le signal numérique

Ce qui s'écrit également :

$$\hat{r}_e(\omega) = \sum_n \hat{r}(\omega - 2\pi n) \quad (13)$$

En remplaçant la transformée de la fonction d'autocorrélation par son expression en fonction de $\hat{\varphi}(\omega)$ (équation 5.10) et en écrivant que la transformée d'un Dirac est l'unité, on obtient l'expression 5.14 qui exprime l'orthonormalité de la fonction d'échelle dans Fourier.

$$\sum_n |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1 \quad (14)$$

Cette relation est fondamentale si le choix de la fonction d'échelle est mené dans Fourier ; elle permet d'assurer l'orthonormalité de la base choisie. Elle est également très utilisée pour la construction du filtre numérique associé. Elle se traduit d'ailleurs, comme nous allons le voir maintenant, par une propriété également fondamentale pour ce filtre.

On peut reporter ce résultat dans l'équation 5.5 exprimée à la pulsation double pour obtenir la contrainte qui découle de cette orthonormalité sur la réponse fréquentielle du filtre numérique associé :

$$\sum_n |\hat{\varphi}(2\omega + 2\pi n)|^2 = \sum_n \frac{1}{2} |\hat{\varphi}(\omega + \pi n)|^2 \cdot |\hat{h}(\omega + \pi n)|^2 = 1 \quad (15)$$

Si on sépare dans la sommation les termes correspondant aux indices pairs des impairs :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_n |\hat{h}(\omega + 2n\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2 + \\ & \frac{1}{2} \sum_n |\hat{h}(\omega + (2n+1)\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\omega + (2n+1)\pi)|^2 = 1 \end{aligned} \quad (16)$$

et si on utilise la périodicité de $\hat{h}(\omega)$:

$$|\hat{h}(\omega)|^2 \sum_n \frac{1}{2} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 \sum_n \frac{1}{2} |\hat{\varphi}(\omega + \pi + \pi 2n)|^2 = 1 \quad (17)$$

En utilisant la propriété 5.14 pour les deux termes, on obtient la contrainte correspondant à l'orthonormalité de la fonction d'échelle sur la réponse fréquentielle du filtre numérique :

$$|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (18)$$

Ce résultat va nous permettre de préciser la signification "physique" du filtre $h[n]$. Mais nous devons tout d'abord admettre par avance que la fonction d'échelle n'est pas à moyenne nulle. On peut, pour s'en convaincre, réfléchir à l'analyse multirésolution de la fonction unité, ou se reporter simplement à la relation 5.28.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \neq 0 \iff \widehat{\varphi}(0) \neq 0 \quad (19)$$

Ce résultat est bien entendu lié au fait que la fonction d'échelle permet de lisser le signal lors du passage d'une résolution fine à une résolution plus grossière.

Dans ces conditions l'expression 5.5 conduit à :

$$\widehat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{2} \frac{\widehat{\varphi}(\omega)}{\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (20)$$

Si on applique ce résultat en 0 puis si on le combine avec 5.18 en π , on obtient :

$$\begin{cases} \widehat{h}(0) = \sum_n h[n] = \sqrt{2} \\ \left| \widehat{h}(\pi) \right| = 0 \end{cases} \quad (21)$$

On pourra donc admettre que le filtre h est de la famille des filtres passe-bas ce qui correspond bien à l'idée intuitive que l'on a du passage à une approximation "grossière" du signal par élimination des détails donc des hautes fréquences.

Remarque 5 La relation qui est caractéristique de l'orthonormalité des fonctions d'échelle pour une résolution donnée a son équivalent en ce qui concerne le filtre passe-bas associé. En effet, si on reprend l'équation qui exprime cette propriété :

$$\langle \varphi(t), \varphi(t+n) \rangle = \delta(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (22)$$

en remplaçant $\varphi(t)$ par son expression :

$$\varphi(t) = \sum_n h[n] \sqrt{2} \varphi(2t-n) \quad (23)$$

on montre aisément que la réponse impulsionnelle du filtre doit obéir à la relation suivante 5.24 :

$$\sum_k h[k] h[2n+k] = \delta[n] \quad (24)$$

qui est l'équivalente pour le filtre de 5.22. Malheureusement la contrainte exprimée par cette relation est difficilement utilisable dans la pratique pour construire un filtre et donc une analyse multirésolution associée.

58 Ondelettes pour le signal numérique

L'expression 5.5 va nous permettre d'être plus précis en ce qui concerne les propriétés de la fonction d'échelle, en particulier en ce qui concerne sa valeur moyenne. En effet si on applique cette relation pour $\omega = 2n\pi$ on obtient :

$$\widehat{\varphi}(2n\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{\varphi}(n\pi) \widehat{h}(n\pi) \quad (25)$$

Cette expression est nulle pour n impair (à cause de la propriété 5.21 du filtre) ce qui permet, par récursivité, de s'apercevoir que tous les termes correspondant à $n \neq 0$ sont nuls également :

$$\widehat{\varphi}(2n\pi) = 0 \quad \forall n \neq 0 \quad (26)$$

En appliquant la relation 5.14 en $\omega = 0$ on vérifie que :

$$|\widehat{\varphi}(0)| = 1 \quad (27)$$

Si on choisit la fonction d'échelle telle que sa valeur moyenne soit réelle et positive, ce qui ne doit pas restreindre beaucoup la généralité du problème, on obtient la contrainte suivante :

$$\widehat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1 \quad (28)$$

5.2 Propriétés fréquentielles de l'ondelette

Nous allons examiner, pour la fonction d'ondelette $\psi(x)$ et son filtre numérique associé $g[n]$, les propriétés équivalentes à celles trouvées précédemment. Ces propriétés devraient être plus contraignantes car les fonctions d'ondelette forment une base orthonormée à travers les résolutions, alors que les fonctions d'échelle ne sont orthogonales qu'à l'intérieur d'une échelle donnée.

La fonction d'ondelette se décompose à l'échelle inférieure sur la base des fonctions d'échelle, les coefficients de la décomposition sont les coefficients du filtre numérique associé :

$$\psi(x) = \sum_n g[n] \sqrt{2} \varphi(2x - n) \quad (29)$$

Si on transforme cette expression dans Fourier on obtient la relation suivante :

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (30)$$

L'orthonormalité des ondelettes vis à vis de la translation conduit à une relation analogue à 5.14 :

$$\sum_n \left| \widehat{\psi}(\omega + 2\pi n) \right|^2 = 1 \quad (31)$$

Ce qui, avec le même traitement que précédemment, implique pour le filtre $g[n]$ la propriété suivante :

$$|\widehat{g}(\omega)|^2 + |\widehat{g}(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (32)$$

Pour construire le filtre et l'ondelette, nous avons besoin d'une relation supplémentaire qui va nous être fournie par la traduction dans Fourier de l'orthogonalité de ψ avec φ :

$$\langle \psi, \varphi_{0,k} \rangle = 0, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (33)$$

Ou, en exprimant le produit scalaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \varphi^*(x+k) dx = 0 \quad (34)$$

Remarque 6 Cette relation associée avec la décomposition de l'ondelette sur la base échelle à la résolution inférieure contient la propriété d'orthogonalité de la famille des fonctions d'ondelette à travers les échelles.

On trouve facilement la relation correspondante dans Fourier si on considère (comme précédemment) que ce calcul correspond à l'échantillonnage de la fonction d'intercorrélacion entre ψ et φ .

$$\sum_n \widehat{\psi}(\omega + 2n\pi) \cdot \widehat{\varphi}^*(\omega + 2n\pi) = 0 \quad (35)$$

Cette relation appliquée en $\omega = 0$ et en utilisant la propriété 5.28 implique que :

$$\widehat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (36)$$

Contrairement à la fonction d'échelle, la fonction d'ondelette est à moyenne nulle ce qui en fait d'ailleurs une ondelette admissible.

Si on combine ce résultat avec 5.30 et avec 5.32 on en déduit que :

$$\begin{cases} \widehat{g}(0) = \sum_n g[n] = 0 \\ |\widehat{g}(\pi)| = \sqrt{2} \end{cases} \quad (37)$$

60 Ondelettes pour le signal numérique

Ce qui semblerait indiquer qu'on est en présence d'un filtre passe-haut.

Si dans la relation 5.35 on remplace $\hat{\psi}$ et $\hat{\varphi}$ par les expressions déduites de 5.5 et 5.30 on obtient :

$$\sum_n \hat{g}\left(\frac{\omega}{2} + n\pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + n\pi\right) \cdot \hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + n\pi\right) \hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2} + n\pi\right) = 0 \quad (38)$$

D'où en séparant les indices pairs et impairs :

$$\sum_n \hat{g}\left(\frac{\omega}{2} + 2n\pi\right) \hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + 2n\pi\right) \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + n\pi\right) \right|^2 + \sum_n \hat{g}\left(\frac{\omega}{2} + (2n+1)\pi\right) \hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + (2n+1)\pi\right) \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + (2n+1)\pi\right) \right|^2 = 0$$

Si on utilise la périodicité des transformées de Fourier des filtres numériques et la propriété 5.14 on obtient la relation suivante :

$$\hat{g}(\omega) \hat{h}^*(\omega) + \hat{g}(\omega + \pi) \hat{h}^*(\omega + \pi) = 0 \quad (39)$$

L'interprétation de ce résultat est un peu délicate mais c'est la clef qui permet de construire le filtre g si on a déjà choisi la fonction d'échelle et donc le filtre h .

On peut, tout d'abord, déduire une relation entre les modules des réponses fréquentielles des filtres ; en effet, l'équation 5.39 implique que :

$$\left| \hat{g}(\omega) \right|^2 \left| \hat{h}(\omega) \right|^2 = \left| \hat{g}(\omega + \pi) \right|^2 \left| \hat{h}(\omega + \pi) \right|^2 \quad (40)$$

Si on combine cette relation avec 5.32 et 5.18, on obtient :

$$\left| \hat{g}(\omega) \right|^2 \left| \hat{h}(\omega) \right|^2 = \left(2 - \left| \hat{g}(\omega) \right|^2 \right) \left(2 - \left| \hat{h}(\omega) \right|^2 \right) \quad (41)$$

D'où en simplifiant :

$$\left| \hat{g}(\omega) \right|^2 + \left| \hat{h}(\omega) \right|^2 = 2 \quad (42)$$

D'autre part, si $\hat{h}^*(\omega) \neq 0$ on peut déduire de l'équation 5.39 :

$$\hat{g}(\omega) = -\frac{\hat{g}(\omega + \pi)}{\hat{h}^*(\omega)} \hat{h}^*(\omega + \pi) \quad (43)$$

Dans le cas contraire, $|\hat{h}(\omega + \pi)| = \sqrt{2}$ et donc $\hat{g}(\omega + \pi) = 0$ donc $|\hat{g}(\omega)| = \sqrt{2}$ ou encore : $|\hat{g}(\omega)| = |\hat{h}(\omega + \pi)|$. Dans tous les cas, on peut donc écrire :

$$\hat{g}(\omega) = -\hat{\lambda}(\omega) \cdot \hat{h}^*(\omega + \pi) \quad (44)$$

avec les conditions suivantes sur la fonction $\hat{\lambda}(\omega)$:

$$\begin{cases} \hat{\lambda}(\omega) \text{ est } 2\pi \text{ périodique} \\ \hat{\lambda}(\omega) + \hat{\lambda}(\omega + \pi) = 0 \\ |\hat{\lambda}(\omega)| = 1 \end{cases} \quad (45)$$

Les deux dernières conditions se déduisent des relations 5.39 et 5.42.

La fonction $\hat{\lambda}(\omega)$ doit donc être choisie sur le cercle unité et doit respecter certaines conditions de symétrie ; le choix est loin d'être unique, mais on s'en tient souvent au cas où la linéarité en phase est préservée. Dans cette hypothèse et en l'absence de contrainte supplémentaire, le choix le plus simple est : $\hat{\lambda}(\omega) = e^{-i\omega}$, ce qui donne :

$$\hat{g}(\omega) = -e^{-i\omega} \cdot \hat{h}^*(\omega + \pi) \quad (46)$$

Si on revient dans l'espace habituel pour obtenir une relation entre les réponses impulsionnelles :

$$\hat{g}(\omega) = \sum_n g[n]e^{-in\omega} = \sum_n -e^{-i\omega} \cdot h[n]e^{in(\omega+\pi)} \quad (47)$$

donc :

$$\begin{aligned} \sum_n g[n]e^{-in\omega} &= - \sum_n h[-n]e^{-i\omega} \cdot e^{-in\omega} e^{-in\pi} \\ &= - \sum_n (-1)^n h[-n]e^{-i\omega(n+1)} \\ &= - \sum_n (-1)^{n-1} h[1-n]e^{-i\omega n} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Ce qui implique :

$$g[n] = (-1)^n h[1-n] \quad (49)$$

On obtient bien une relation qui permet de construire le filtre g en connaissant h , il ne faut cependant pas oublier que cette solution est loin d'être unique et que d'autres choix pour la fonction $\hat{\lambda}(\omega)$ sont possibles si besoin.

62 Ondelettes pour le signal numérique

Il est parfois plus intéressant d'exprimer ce résultat dans l'espace des transformées en z , en particulier si les filtres sont susceptibles de mises en œuvre récursives. Le résultat peut être obtenu en remplaçant simplement $e^{i\omega}$ par z dans l'équation 5.46 :

$$G(z) = -z^{-1}H\left(-\frac{1}{z}\right) \quad (50)$$

Remarque 7 La relation 5.46 entre les filtres associés à l'analyse multirésolution permet de trouver une relation entre l'ondelette et la fonction d'échelle. En effet, si on remplace dans 5.30 $\hat{g}(\frac{\omega}{2})$ par son expression déduite de 5.46, on obtient :

$$\hat{\psi}(\omega) = -e^{-i\frac{\omega}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

et en utilisant 5.5 pour exprimer $\hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)$ en fonction de $\hat{\varphi}$ on obtient :

$$\hat{\psi}(\omega) = -e^{-i\frac{\omega}{2}} \frac{\hat{\varphi}^*(\omega + 2\pi)}{\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Cette relation ne semble malheureusement pas utilisable pour déterminer une fonction d'échelle à partir d'une ondelette.

5.3 Résumé des propriétés

Le tableau ci-après résume les principales propriétés présentées dans ce chapitre. Ces propriétés sont utilisées dans la construction des bases orthonormées d'ondelettes associées à des analyses multirésolutions.

On construira, en général, une telle analyse multirésolution en suivant l'une des deux démarches suivantes :

a - On commence par choisir une famille de bases orthonormées de fonctions d'échelle, l'orthogonalisation peut être faite en utilisant le «truc» utilisé pour les bases spline (voir chapitre 6). On détermine ensuite le filtre h associé par projection de la fonction d'échelle sur la base de résolution immédiatement plus fine. On vérifie, en utilisant l'algorithme cascade, que la convergence de l'analyse est correcte. Puis il reste à définir le filtre g à partir du filtre h et à construire à l'aide de l'algorithme cascade la fonction d'ondelette associée.

b - On choisit un filtre numérique h , passe-bas, ayant la propriété d'orthogonalité, vérifiée dans Fourier ou dans l'espace direct ; puis on s'assure, à l'aide de l'algorithme cascade, que l'analyse converge bien et que la fonction d'échelle a des propriétés de compacité et de régularité correctes. On peut, ensuite, construire le filtre g à partir du filtre h et en déduire par l'algorithme cascade la fonction d'ondelette associée. Dans une variante de cette méthode, on peut commencer par choisir un filtre numérique

passé-haut qui sera le filtre g puis, après vérification de la convergence et des bonnes propriétés de la fonction d'ondelette associée, on pourra en déduire le filtre h et la fonction d'échelle correspondante.

Dans les deux cas, on constate que la fonction d'ondelette est déterminée en dernier, ce qui ne correspond pas l'approche la plus naturelle. Il est, en général, très difficile de faire autrement et le choix a priori d'une base d'ondelettes n'est pas la méthode la plus directe pour construire une transformation en ondelettes discrète !

**Résumé des principales propriétés des fonctions et des filtres associés
à une analyse multirésolution orthogonale**

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi(t), \varphi(t+n) \rangle &= \delta(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} & \left\{ \begin{array}{ll} \langle \psi(t), \varphi(t+n) \rangle = 0 & \forall n \in \mathbb{Z} \\ \langle \psi(t), \psi(t+n) \rangle = \delta(n) & \forall n \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \\
 \hat{\varphi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) & \hat{\psi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
 \sum_n |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi n)|^2 &= 1 & \sum_n |\hat{\psi}(\omega + 2\pi n)|^2 &= 1 \\
 |\hat{\varphi}(0)| &= 1 & \hat{\psi}(0) &= 0 \\
 \sum_n \hat{\psi}(\omega + 2n\pi) \cdot \hat{\varphi}^*(\omega + 2n\pi) &= 0 & \hat{g}(\omega) \hat{h}^*(\omega) + \hat{g}(\omega + \pi) \hat{h}^*(\omega + \pi) &= 0 \\
 \sum_k h[k] h[2n+k] &= \delta[n] & \sum_k |h[k]|^2 &= \sum_k |g[k]|^2 = 1 \\
 |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 &= 2 & |\hat{g}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega + \pi)|^2 &= 2 \\
 |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega)|^2 &= 2 & & \\
 \left\{ \begin{array}{l} \hat{h}(0) = \sum_n h[n] = \sqrt{2} \\ |\hat{h}(\pi)| = 0 \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} \hat{g}(0) = \sum_n g[n] = 0 \\ |\hat{g}(\pi)| = \sqrt{2} \end{array} \right. & \\
 \hat{g}(\omega) = -\hat{\lambda}(\omega) \cdot \hat{h}^*(\omega + \pi) & & \left\{ \begin{array}{l} \hat{\lambda}(\omega) \text{ est } 2\pi \text{ périodique} \\ \hat{\lambda}(\omega) + \hat{\lambda}(\omega + \pi) = 0 \\ |\hat{\lambda}(\omega)| = 1 \end{array} \right. &
 \end{aligned}$$

64 Ondelettes pour le signal numérique

Et on peut choisir le filtre g suivant :

$$\widehat{g}(\omega) = -e^{-i\omega} \cdot \widehat{h}^*(\omega + \pi) \quad \text{soit :} \quad g[n] = (-1)^n h[1 - n]$$

Remarque 8 *Les paires de filtres numériques reliés par cette relation sont parfois appelés filtres miroirs en quadrature : QMF. Ils jouent un rôle majeur dans la théorie de la décomposition des signaux en sous-bandes. Cela étant, pour qu'une telle paire de filtres soit à l'origine d'une analyse multirésolution au sens défini précédemment, d'autres propriétés doivent être vérifiées (en particulier la convergence de l'algorithme récursif). Nous n'étudierons pas ici ce problème et laisserons le lecteur consulter l'abondante littérature existant à ce sujet [43].*

Exemple 5 *Nous verrons comment on peut utiliser les propriétés précédentes pour retrouver les éléments de l'analyse multirésolution de Haar. Mais nous réservons à cette présentation d'exemples un chapitre entier, ce qui nous permettra une plus large perspective.*

Chapitre 6

Exemples de bases d'ondelettes

Nous allons, dans ce chapitre, présenter quelques exemples de bases d'ondelettes orthonormées choisis parmi les plus populaires. Nous commencerons par la base la plus simple que nous avons déjà utilisée plusieurs fois comme illustration, l'analyse de Haar ; nous continuerons par une base que l'on pourrait qualifier de duale de la précédente, à savoir la base des ondelettes de "Littlewood-Paley". Nous présenterons ensuite une famille choisie parmi celles qui sont les plus utilisées dans la pratique, la famille des bases construites à partir de fonctions splines. Toutes ces analyses correspondent à des filtres linéaires en phase qui ont donc des propriétés de symétrie appréciées en traitement des images (isotropie gauche-droite) ; malheureusement ces filtres (à part ceux liés à l'analyse de Haar) sont de réponse impulsionnelle infinie (RII) donc de mise en œuvre souvent coûteuse. Nous présenterons donc, pour clore ce chapitre, les bases construites par I. Daubechies qui conduisent à des filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) mais qui ne sont pas linéaires en phase. Nous verrons, dans un chapitre ultérieur (chapitre 8) comment, en relâchant un peu la contrainte d'orthogonalité, on peut construire des bases d'ondelettes non-redondantes conduisant à des filtres linéaires en phase et à réponse impulsionnelle finie ; il s'agit des bases biorthogonales. Pour compléter ce panorama, on pourra trouver une présentation relativement complète des bases d'ondelettes utilisées ou utilisables pour des analyses multirésolution dans [1].

66 Ondelettes pour le signal numérique

6.1 Ondelettes de Haar

Nous prendrons comme point de départ de la construction la fonction de Haar utilisée comme mère des fonctions d'échelle :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

Nous avons vu que cette fonction pouvait se décomposer sur les fonctions de résolution inférieure suivant :

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t - 1) \quad (2)$$

Si on calcule la transformée de Fourier de cette expression, on obtient :

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{1 + e^{-i\frac{\omega}{2}}}{2} \quad (3)$$

Si on compare ce résultat à l'expression 5.5 démontrée au chapitre précédent, on peut en déduire par simple identification l'expression de la réponse fréquentielle du filtre h associé :

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + e^{-i\omega}) \quad (4)$$

La fonction de transfert du filtre s'écrit donc :

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z^{-1}) \quad (5)$$

Si on détermine le filtre g en utilisant la propriété des filtres miroirs en quadrature (équation 5.46) on obtient :

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - z^{-1}) \quad (6)$$

Ces deux filtres correspondent exactement à ceux trouvés lors des présentations précédentes de cette analyse multirésolution. Si on applique la propriété 5.30, on

obtient la fonction d'ondelette par sa transformée de Fourier :

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{1}{2}(1 - e^{-i\frac{\omega}{2}})\widehat{\varphi}(\frac{\omega}{2}) \quad (7)$$

Soit :

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1) \quad (8)$$

Ce qui correspond à la fonction :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (9)$$

Comme on l'a déjà dit, l'inconvénient majeur de cette analyse est sa très mauvaise résolution fréquentielle (voir figure 4.). Son intérêt majeur est la grande simplicité des filtres et donc de l'algorithme de calcul. La résolution temps-fréquence est illustrée par les courbes ci-après qui regroupent les fonctions d'échelle (6. et 6.) et d'ondelette (6. et 6.) dans les domaines temporels et fréquentiels. Les transformées de Fourier des fonctions d'échelle et d'ondelette sont données par :

$$\widehat{\varphi}(\omega) = e^{-i\frac{\omega}{2}} \frac{\sin \omega/2}{\omega/2} \quad \text{et} \quad \widehat{\psi}(\omega) = \frac{4i}{\omega} e^{-i\frac{\omega}{2}} \sin^2 \frac{\omega}{4} \quad (10)$$

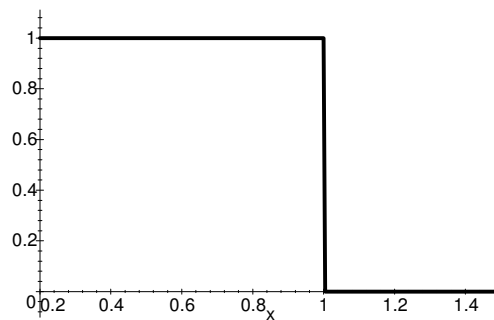


Figure 6. Fonction d'échelle de Haar

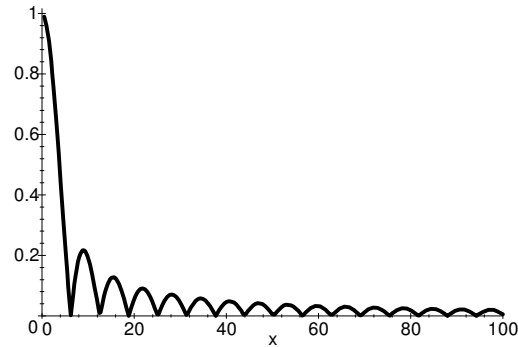


Figure 6. Fonction d'échelle de Haar dans Fourier

6.2 Ondelette de "Littlewood-Paley"

Cette analyse multirésolution s'appuie en fait sur une fonction d'échelle de type sinc. Une telle fonction est l'originale d'une fonction de Haar dans Fourier. En ce sens on peut considérer que c'est l'analyse duale de la précédente.

Nous allons, en effet, prendre comme point de départ la transformée de Fourier de la fonction d'échelle. Celle-ci doit vérifier l'équation 5.14 :

$$\sum_n |\hat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2 = 1$$

et la façon la plus simple d'assurer cette propriété (équivalente à la relation d'orthonormalité) est de choisir $\hat{\varphi}(\omega)$ telle que :

$$|\hat{\varphi}(\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi \leq \omega < \pi \\ 0 & \text{si } \pi \leq \omega \end{cases} \quad (11)$$

Pour rester dans la simplicité et pour assurer une fonction d'échelle réelle on choisira une phase nulle. La fonction d'échelle s'écrira donc :

$$\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \quad (12)$$

Les graphes de ces fonctions sont présentés en 6. et 6..

La réponse fréquentielle du filtre numérique associé est déterminée par :

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \frac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)} \quad (13)$$

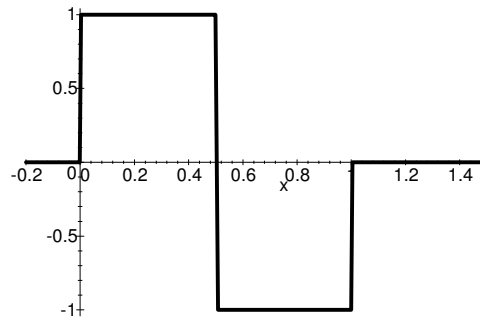


Figure 6. Ondelette de Haar

ce qui donne (on sait que $\hat{h}(\omega)$ est 2π périodique) :

$$\hat{h}(\omega) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } -\pi \leq \omega < \pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6.14)$$

$$\text{et donc } h[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin n\pi/2}{n\pi/2} \quad (6.15)$$

On déduit aisément $\hat{g}(\omega)$ par $\hat{g}(\omega) = -e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi)$:

$$\hat{g}(\omega) = \begin{cases} -\sqrt{2}e^{-i\omega} & \text{si } -\pi \leq \omega < -\pi/2 \\ 0 & \text{si } -\pi/2 \leq \omega < \pi/2 \\ -\sqrt{2}e^{-i\omega} & \text{si } \pi/2 \leq \omega < \pi \end{cases} \quad (6.16)$$

$$\text{et } g[n] = \frac{(-1)^n \sin \frac{1-n}{2}\pi}{\sqrt{2} \frac{1-n}{2}\pi} \quad (6.17)$$

Les filtres $h[n]$ et $g[n]$ sont de longueur infinie (RII) et leur mise en œuvre dans l'espace temporel ne pourra se faire qu'à travers des réalisations approchées. Les calculs seront menés de façon plus efficace dans l'espace de Fourier.

On peut déterminer la fonction d'ondelette de plusieurs façons ; on pourra, par exemple, utiliser la relation 5.30 :

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

70 Ondelettes pour le signal numérique

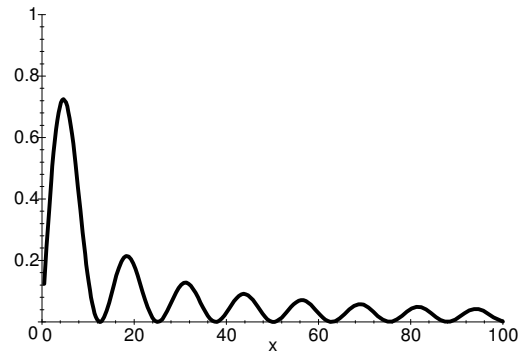


Figure 6. Ondelette de Haar dans Fourier

Soit :

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} -e^{-i\omega} & \text{si } \pi \leq |\omega| < 2\pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (18)$$

La transformée de Fourier inverse conduit à :

$$\psi(t) = \frac{\cos \pi t - \sin 2\pi t}{\pi(t - \frac{1}{2})} \quad (19)$$

L'analyse de Littlewood-Paley souffre évidemment de son manque de localisation temporelle comme on peut le vérifier sur les graphes de la fonction d'ondelette (6.) et de la fonction d'échelle (6.).

6.3 Bases splines

On parle parfois des ondelettes de Battle-Lemarié.

L'idée qui est à la base de cette construction est double :

- améliorer l'analyse de Haar en effectuant une approximation par morceaux des fonctions à analyser qui soit plus fidèle : polynomiale avec raccordement sans discontinuité,
- rapprocher la relation de récurrence suivante :

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_j \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(2^{-j}\omega) \quad (20)$$

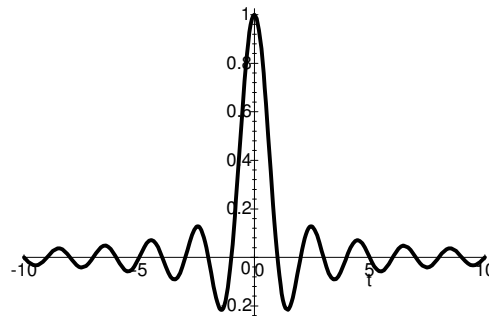


Figure 6. Fonction d'échelle sinc

d'une propriété très voisine des fonctions B-splines.

La difficulté à surmonter est que la famille des fonctions B-splines ne constitue pas une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Les B-splines forment une base pour l'ensemble des fonctions polynomiales par morceaux mais cette base n'est malheureusement pas orthonormale ([41],[42]). Nous allons utiliser une méthode d'orthogonalisation qui pourra être utilisée dans d'autres circonstances. Une annexe (A) à ce cours est consacrée à la présentation détaillée des résultats et des méthodes employées pour la construction des bases B-splines, nous nous contenterons dans ce chapitre de donner les grandes lignes.

Commençons par quelques rappels sur les B-splines.

Soit V_j l'ensemble des fonctions polynomiales par morceaux sur des intervalles de largeur 2^j :

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ telles que } \forall k \in \mathbb{Z}, f|_{[2^j k, 2^j (k+1)[} \text{ est un polynôme de degré } n \right. \\ \left. \text{ayant } n - 1 \text{ dérivées continues en } 2^j k \right\}$$

Les B-splines d'ordre n forment une base non orthonormée pour un tel ensemble, en effet tout élément de V_j peut s'exprimer de façon unique comme une combinaison linéaire de telles fonctions. Ces B-splines sont construites par autoconvolution de la fonction boîte (box) sur l'intervalle en question.

De façon plus précise, en commençant par $j = 0$, et en notant $I(t)$ la fonction

72 Ondelettes pour le signal numérique

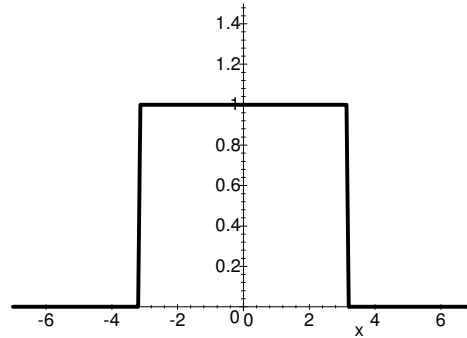


Figure 6. Fonction d'échelle dans Fourier

boîte paire de largeur 1 :

$$I(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (21)$$

la B-spline d'ordre n sera :

$$\begin{aligned} \text{si } n \text{ est impair : } & \beta^{(n)}(t) = n + 1 \underbrace{I(t) * I(t) * \dots * I(t)}_{n \text{ fois}} \\ \text{si } n \text{ est pair : } & \beta^{(n)}(t) = n + 1 \underbrace{I(t - \frac{1}{2}) * I(t - \frac{1}{2}) * \dots * I(t - \frac{1}{2})}_{n \text{ fois}} \end{aligned} \quad (22)$$

Remarque 9 Pour $n = 0$ on retrouve la base de Haar qui est la seule de la série qui soit orthonormée.

Les transformées de Fourier sont évaluées aisément grâce au théorème de Plancherel :

$$\begin{aligned} \text{si } n \text{ est impair : } & \hat{\beta}^{(n)}(\omega) = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^{n+1} \\ \text{si } n \text{ est pair : } & \hat{\beta}^{(n)}(\omega) = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^{n+1} e^{-i(n+1)\frac{\omega}{2}} \end{aligned} \quad (23)$$

La procédure d'orthogonalisation repose sur la relation qui dans l'espace de Fourier assure l'orthonormalité d'une famille de fonctions qui est construite par translation de pas entiers d'une fonction mère. Si on considère une base construite par translations de pas entiers d'une fonction $f(x)$, cette relation, mise en évidence

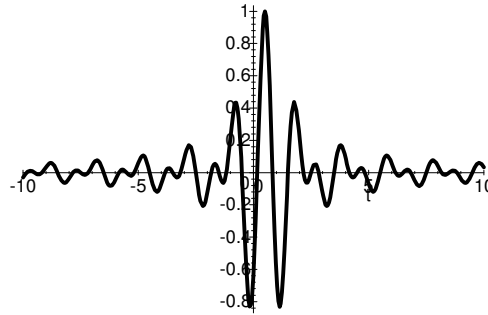


Figure 6. Ondelette de Littlewood-Paley

dans le chapitre précédent (voir 5.14), s'écrit :

$$\sum_k \left| \hat{f}(\omega + 2k\pi) \right|^2 = 1 \quad (24)$$

D'une façon générale, il est clair que la fonction $\sum_k \left| \hat{f}(\omega + 2k\pi) \right|^2$ est 2π - *périodique* dans tous les cas. On peut donc la considérer comme la transformée de Fourier d'une suite numérique.

Si on considère la fonction $\varphi(x)$ dont la transformée de Fourier est normalisée par la racine carrée du terme de gauche de l'expression précédente, la famille engendrée par translations entières de cette fonction sera évidemment orthogonale. Mais, constitue-t-elle une base ?

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{\sqrt{\sum_k \left| \hat{f}(\omega + 2k\pi) \right|^2}} \quad (25)$$

Si on pose ($\sqrt{\sum_k \left| \hat{f}(\omega + 2k\pi) \right|^2}$ est 2π - *périodique*) :

$$\hat{\lambda}(\omega) = \sqrt{\sum_m \left| \hat{f}(\omega + 2m\pi) \right|^2} = \sum_k \lambda[k] e^{-i\omega k} \quad (26)$$

74 Ondelettes pour le signal numérique

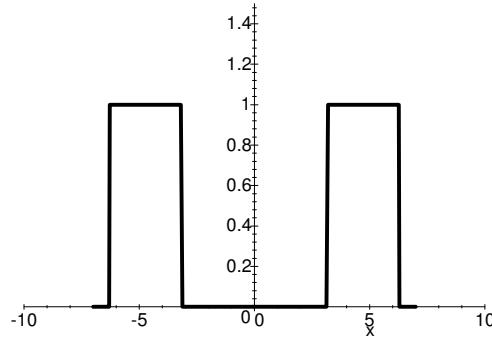


Figure 6. Ondelette de Littlewood-Paley dans Fourier (module)

On aura :

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_k \lambda[k] e^{-i\omega k} \widehat{\varphi}(\omega) \quad (27)$$

Et en revenant à l'original :

$$f(x) = \sum_k \lambda[k] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\omega) e^{i\omega(x-k)} d\omega \quad (28)$$

Ce qui s'écrit également :

$$f(x) = \sum_k \frac{\lambda[k]}{2\pi} \varphi(x - k) \quad (29)$$

On a ainsi décomposé la fonction $f(x)$ en une combinaison linéaire des fonctions de la famille orthogonalisée ; il en sera donc de même pour toute combinaison linéaire des fonctions $f(x)$; la nouvelle famille formera bien une base orthonormée pour l'espace de fonctions considéré.

Remarque 10 *On pourrait de même montrer que $\varphi(x)$ se décompose en combinaisons linéaires de $f(x)$.*

En appliquant le "truc" de l'orthogonalisation (équation 6.25) aux B-splines, on obtient la fonction d'échelle suivante :

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{\widehat{\beta}^{(n)}(\omega)}{\sqrt{\sum_k \left| \widehat{\beta}^{(n)}(\omega + 2k\pi) \right|^2}} \quad (30)$$

Une propriété particulière des fonctions splines facilite la construction des filtres associés. En effet, on a :

$$\sum_k \left| \widehat{\beta}^{(n)}(\omega + 2k\pi) \right|^2 = \widehat{b}^{(2n+1)}(\omega) \quad (31)$$

où l'originale de $\widehat{b}^{(2n+1)}(\omega)$ est la suite numérique obtenue par échantillonnage de la B-spline d'ordre $2n + 1$.

On appelle parfois cette famille de fonctions les B-splines discrètes.

$$b^{(2n+1)}[k] = \beta^{(2n+1)}(x) \Big|_{x=k} \quad (32)$$

La fonction d'échelle est donc finalement construite par :

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{\widehat{\beta}^{(n)}(\omega)}{\sqrt{\widehat{b}^{(2n+1)}(\omega)}} \quad (33)$$

Il est clair, à partir de la remarque faite ci-dessus, que $\varphi(x)$ est une combinaison linéaire de fonctions splines $\beta^{(n)}(x)$ d'ordre n .

Pour déterminer le filtre numérique associé nous avons besoin d'une relation entre $\widehat{\varphi}(\omega)$ et $\widehat{\varphi}(\omega/2)$; en notant que $\beta^n(x)$ est une fonction de V_0 qui peut être exprimée sur V_{-1} alors :

$$\exists \widehat{m}(\omega) \text{ telle que } \widehat{\beta}^{(n)}(\omega) = \widehat{m}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\beta}^{(n)}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (34)$$

D'où :

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{\widehat{m}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\beta}^{(n)}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\widehat{b}^{(2n+1)}(\omega)}} \quad (35)$$

76 Ondelettes pour le signal numérique

Donc :

$$\hat{\varphi}(\omega) = \hat{m}\left(\frac{\omega}{2}\right) \sqrt{\frac{\hat{b}^{(2n+1)}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\hat{b}^{(2n+1)}(\omega)}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (36)$$

Ce qui, avec l'aide de la relation 5.5, donne la réponse fréquentielle du filtre h :

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \hat{m}(\omega) \sqrt{\frac{\hat{b}^{(2n+1)}(\omega)}{\hat{b}^{(2n+1)}(2\omega)}} \quad (37)$$

La réponse impulsionnelle $h[n]$ pourra être déterminée numériquement par transformée de Fourier inverse. Le filtre sera de réponse impulsionnelle infinie (RII) mais la décroissance des coefficients étant rapide, on pourra envisager une mise en œuvre par masque de convolution.

La fonction d'ondelette est construite, par exemple, à partir de la relation suivante :

$$\hat{\psi}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega/2} \hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (38)$$

On peut en déduire que, comme la fonction d'échelle, la fonction d'ondelette $\psi(x)$ est une combinaison linéaire de B-splines $\beta^{(n)}(2x)$ d'ordre n .

Le filtre numérique associé sera obtenu à partir de $h[n]$ comme dans les constructions précédentes.

On trouvera dans l'annexe consacrée spécialement aux bases dérivées des B-splines les résultats détaillés concernant les bases construites à partir des B-splines linéaires et quadratiques. Nous donnons, en particulier, les graphes des fonctions d'échelle et des ondelettes et les coefficients des filtres. On pourra constater que les localisations temporelles et fréquentielles sont beaucoup mieux équilibrées que dans les deux exemples précédents. Ceci est également illustré par l'image 4..

Ces analyses multirésolutions donnent des filtres linéaires en phase mais de réponse impulsionnelle infinie donc souvent coûteux à mettre en œuvre; elles sont cependant intéressantes car elles conviennent bien au traitement des images et conduisent à des représentations non redondantes avec des composantes bien décorréélées. Cette propriété est particulièrement favorable aux algorithmes de compression d'images.

6.4 Ondelettes à support compact (Daubechies)

Nous présentons dans ce paragraphe la construction d'une famille de bases

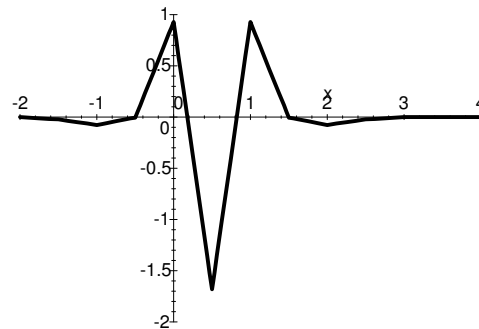


Figure 6. Ondelette (spline linéaire)

d'ondelettes et des filtres associés qui assure la compacité des supports tout en préservant l'orthonormalité. Le prix à payer est l'abandon de la linéarité en phase ou plus simplement de la symétrie (ou antisymétrie) droite-gauche chère aux "traiteurs d'images". Dans un certain nombre de cas, l'abandon de cette symétrie n'a pas des conséquences dramatiques et ces bases ont des applications tout à fait intéressantes en analyse des images. L'avantage de la compacité des fonctions de base et surtout des filtres associés est l'économie en coût de calcul qu'elle procure. Le filtrage peut être effectué très directement par l'application de masques de convolution courts et des applications temps réel sont facilement envisageables, même si dans certains cas la précision requise sur les coefficients réels pèse malgré tout sur l'architecture. Ces bases ont été proposées pour la première fois dans le cadre de l'analyse multirésolution en ondelettes par Ingrid Daubechies en 1988 et la coutume veut que son nom leur soit resté attaché. La construction, dont nous ne présentons que les grandes lignes, prend comme point de départ la contrainte que l'orthonormalité par translation des fonctions d'échelle impose aux filtres passe-bas associés. Ce sont donc des filtres vérifiant ces propriétés qui sont construits; la vérification indispensable de la convergence de l'analyse multirésolution associée ne sera pas abordée ici. Ces précisions et une présentation plus complète et plus rigoureuse peuvent être trouvées dans [10] ou dans [43] ou [35].

Le filtre numérique $h[n]$ associé aux fonctions d'échelle sera du type passe-bas et sa réponse fréquentielle, définie par :

$$\hat{h}(\omega) = \sum_n h[n]e^{-i\omega n} \quad (39)$$

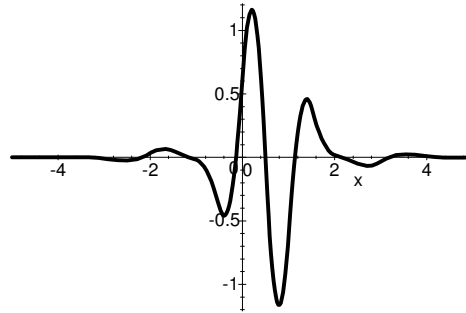


Figure 6. Ondelette (spline quadratique)

sera une fonction complexe 2π – *périodique* ayant comme propriétés :

$$\left| \hat{h}(\omega) \right|^2 + \left| \hat{h}(\omega + \pi) \right|^2 = 2 \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \hat{h}(0) &= \sqrt{2} \\ \text{et } \hat{h}(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (6.41)$$

De plus, il a été montré que pour que les fonctions de base φ et ψ soient régulières (au moins jusqu'à l'ordre N) il fallait que le zéro de $\hat{h}(\omega)$ à $\omega = \pi$ soit d'ordre $N \geq 1$.

Ceci peut s'écrire :

$$\hat{h}(\omega) = \left(\frac{1 + e^{i\omega}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\omega) \quad (42)$$

où $\mathcal{L}(\omega)$ devra être un polynôme trigonométrique de degré fini (support compact) 2π – *périodique* dont le module sera pair et la phase impaire ($h[n]$ est réel). Donc $\left| \hat{h}(\omega) \right|^2$ doit s'exprimer sous forme d'un polynôme en $\cos \omega$. Pour les besoins de la démonstration, on pose :

$$y = \cos^2 \frac{\omega}{2} \quad \text{et donc} \quad 1 - y = \sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1 - \cos \omega}{2}$$

on pourra ainsi écrire :

$$\left| \hat{h}(\omega) \right|^2 = y^N P(1 - y) \quad (43)$$

$P(x)$ étant un polynôme à coefficients réels de degré fini.

La condition d'orthonormalité devient :

$$(1-y)^N P(y) + y^N P(1-y) = 2 \quad (44)$$

La variable y doit être réelle et comprise entre 0 et 1.

I. Daubechies dans [10] donne une solution de cette équation en s'appuyant sur le théorème de Bezout. Elle montre que la solution de degré minimum ($N-1$) s'énonce⁵ :

$$P_N(y) = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k \quad (45)$$

Les solutions de degré supérieur $P(y)$ existent, elles vérifient également la condition d'orthonormalité et on a donc :

$$(1-y)^N (P(y) - P_N(y)) + y^N (P(1-y) - P_N(1-y)) = 0 \quad (46)$$

Donc $P(y) - P_N(y) = R(y)$ est divisible par y^N et la condition précédente s'écrit :

$$R(y) + R(1-y) = 0 \quad \text{ou} \quad R(y + \frac{1}{2}) = -R(-y + \frac{1}{2}) \quad (47)$$

Ce qui signifie que le polynôme $R(y)$ est antisymétrique par rapport à $\frac{1}{2}$.

La solution générale de l'équation qui conditionne l'orthonormalité est finalement :

$$P(y) = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k + y^N R(y) \quad (48)$$

Un autre changement de variable facilite l'interprétation de ce résultat et l'extraction de la racine carrée de $|\hat{h}(\omega)|^2$: on va poser $z = e^{i\omega}$. D'où :

$$1-y = \frac{1-\cos \omega}{2} = \frac{(1-z)(1-z^{-1})}{4} \quad (49)$$

et :

$$y = \frac{1+\cos \omega}{2} = \frac{(1+z)(1+z^{-1})}{4} \quad (50)$$

Avec cette notation la réponse fréquentielle $\hat{h}(\omega)$ du filtre numérique $h[n]$ devient sa fonction de transfert (la transformée en z de sa réponse impulsionnelle) $H(z)$ et on

⁵ Coefficients du binôme : $\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

80 Ondelettes pour le signal numérique

aura :

$$|H(z)|^2 = \left(\frac{(1+z)(1+z^{-1})}{4} \right)^N P\left(\frac{(1-z)(1-z^{-1})}{4} \right) \quad (51)$$

La symétrie qui apparaît dans cette expression en ce qui concerne le rôle joué par la variable z et son inverse z^{-1} a pour conséquence que à chaque zéro z_i du polynôme P correspond un autre zéro pour ce même polynôme : z_i^{-1} . Il faut noter également que le polynôme étant à coefficients réels les zéros apparaissent sous forme de paires de complexes conjugués. On peut donc considérer, en général, des quadruplets : $z_i, z_i^*, z_i^{-1}, z_i^{*-1}$; dans certains cas des éléments peuvent être confondus (si le zéro z_i est réel ou sur le cercle unité).

L'expression de $|H(z)|^2$ pourra être factorisée en produits de termes de la forme :

$$\{(zz_i^{-1} - 1)(zz_i^{*-1} - 1)\} \{(zz_i - 1)(zz_i^* - 1)\}$$

Or $|H(z)|^2$ est réel, donc égal au produit des modules de ses facteurs et :

$$|(zz_i^{-1} - 1)(zz_i^{*-1} - 1)| = |z_i^{-1} z_i^{*-1}| |z^2| (z^{-1} z_i - 1)(z^{-1} z_i^* - 1) \quad (52)$$

Comme le module de z est égal à 1, $|H(z)|^2$ peut être décomposé en un produit de deux polynômes à mêmes coefficients réels :

$$|H(z)|^2 = C(z)C(z^{-1}) \quad (53)$$

Ce qui signifie que $|H(z)|^2$ est la transformée en z de la fonction d'autocorrélation de $c[n]$. Il est clair que sur le cercle unité $h[z]$ et $c[z]$ coïncident car :

$$|H(z)|^2 = H(z).H^*(z) = H(z).H(z^*) = H(z).H(z^{-1}) \quad (54)$$

Cette propriété n'est vraie que si $h[n]$ est une séquence réelle.

Le polynôme $C(z)$ est souvent appelé *facteur spectral* et la technique décrite d'extraction de racine carrée : *factorisation spectrale*. Ce polynôme n'est pas unique, en effet, pour chaque quadruplet de zéros un couple peut être choisi : (z_i, z_i^*) ou (z_i^{-1}, z_i^{*-1}) pour construire $C(z)$.

Dans chaque cas, un zéro est dans le cercle unité et l'autre en dehors ; si on choisit systématiquement le zéro de module inférieur (ou égal) à 1, on obtient la solution à phase minimum. C'est souvent le choix qui est effectué. Il faut noter cependant que ce choix conduit à des filtres très dissymétriques et qu'un "panachage" entre les différentes possibilités pour le choix des zéros permet d'améliorer les choses. On peut obtenir de la sorte des filtres "presque linéaires" en phase. Leur symétrie reste malgré tout très approximative. Le choix d'un zéro ou de l'autre est exclusif et les zéros étant

distincts (sauf si le degré de P est 0) le polynôme $C(z)$ ne sera pas invariant par transformation de z en z^{-1} et donc le filtre $h[n]$ ne sera pas symétrique par rapport à l'origine. On peut d'ailleurs montrer plus généralement que le filtre obtenu (sauf pour $N = 1$) n'est pas linéaire en phase. la vraie linéarité en phase ne peut être obtenue qu'avec des filtres à réponse impulsionnelle infinie comme ceux construits à partir des bases B-splines.

On peut mener l'opération de factorisation spectrale en recherchant les zéros y_i de $P(y)$ et en déduisant les zéros z_i de $|H(z)|^2$ grâce à la relation :

$$z_i = 1 - 2y_i \pm 2\sqrt{y_i(y_i - 1)} \quad (55)$$

Il faut noter qu'un dernier élément de choix pour construire les filtres $h[n]$ est la phase ; en effet la solution du problème est définie à un facteur de phase entier près et toutes les séquences translatées d'un nombre de pas entier par rapport à une séquence solution sont des solutions du problème.

Nous donnons ci-après, à titre d'exemple, quelques solutions à phase minimum pour $R(y) = 0$. Nous détaillerons les calculs pour les cas $N = 1, 2$ et 3 ; puis nous résumerons dans un tableau les coefficients des filtres pour $N < 10$.

82 Ondelettes pour le signal numérique

- $N = 1$

On a $P(y) = 2$ et donc $|H(z)|^2 = \frac{(1+z)(1+z^{-1})}{4} \cdot 2$ soit :

$$H(z) = \frac{1+z}{\sqrt{2}} \quad (56)$$

On retrouve l'analyse multirésolution de Haar.

- $N = 2$

On a $P(y) = 2 + 4y$ et donc $y_1 = -\frac{1}{2}$. On en déduit les zéros (réels) du polynôme en z :

$$z_i = 2 \pm \sqrt{3}$$

Le zéro de module inférieur à 1 est : $z_1 = 2 - \sqrt{3}$; le quadruplet se réduit à un couple (z_1 et z_1^{-1}), ce qui donne :

$$|H(z)|^2 = \left[\frac{(1+z)(1+z^{-1})}{4} \right]^2 \cdot \frac{(z-z_1)(z^{-1}-z_1)}{z_1}$$

soit :

$$H(z) = \frac{(1+z)^2}{4} \cdot \frac{z-z_1}{\sqrt{z_1}} \quad (57)$$

- $N = 3$

On a $P(y) = 2 + 6y + 12y^2$ et les zéros sont $y_i = \begin{cases} -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}i\sqrt{15} \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{12}i\sqrt{15} \end{cases}$. On en déduit les valeurs numériques des zéros du polynôme en z :

$$z_i = \begin{cases} 0, 28725 \pm 0, 15289i \\ 2, 7127 \pm 1, 4439i \end{cases}$$

Le couple de zéros de module inférieur à 1 est : $z_1 = 0, 28725 \pm 0, 15289i$. En regroupant les facteurs qui correspondent à des zéros conjugués pour obtenir des coefficients réels et en tenant compte du facteur constant, on obtient :

$$|H(z)|^2 = \frac{\left[\frac{(1+z)(1+z^{-1})}{4} \right]^3 \cdot (z^2 - 0, 5745z + 0, 10589)(z^{-2} - 0, 5745z^{-1} + 0, 10589)}{\frac{4}{3}z_1z_1^*} \quad (6.58)$$

soit :

$$H(z) = \frac{(1+z)^3}{8} \cdot (2,6614z^2 - 1,529z + 0,28181) \quad (59)$$

Nous obtenons ainsi un filtre à $2N = 6$ coefficients non nuls.

Remarque 11 *Le filtre de fonction de transfert $H(z)$ apparaît toujours sous une forme factorisée avec un premier facteur dont la mise en œuvre est particulièrement facile :*

$$H(z) = \left[\frac{(1+z)}{2} \right]^N \cdot H_N(z) \quad (60)$$

Le deuxième facteur : $H_N(z)$ est un filtre à N coefficients non nuls donc deux fois plus court que le filtre complet et on aura intérêt à considérer les mises en œuvre des deux facteurs séparément. C'est la raison pour laquelle nous ne donnons dans le tableau 6. que les coefficients de $H_N(z)$.

- $N < 10$

Nous résumons dans le tableau 6. les coefficients des filtres $H_N(z)$. Les valeurs numériques sont empruntées à [10]. On pourra trouver sous la même référence, si besoin, les coefficients des filtres $H(z)$ complets. Les valeurs analytiques n'existent pas pour $N > 3$ et le calcul des zéros de $P(y)$ doit être fait à l'aide d'une méthode numérique (voir par exemple la méthode de Bairstow). Pour des valeurs élevées de N , la précision des calculs peut poser problème et l'orthonormalité des bases obtenues peut alors n'être qu'approximative.

Les fonctions d'échelle correspondantes sont construites par l'algorithme cascade, nous donnons quelques exemples de ces fonctions et de leur étendue spectrale (voir figures du tableau 6.). On constate que lorsque l'ordre des polynômes augmente, la fonction d'échelle gagne en régularité et voit son étendue spectrale diminuer ; cette évolution apparaît de la même façon pour les ondelettes. Elle se paie, évidemment, par l'allongement des filtres associés.

84 Ondelettes pour le signal numérique

N	1	2	3
	$\sqrt{2}$	1,93185165258 -0,517638090205	2,6613644236 -1,52896119631 0,281810335086
N	4	5	6
	3,68604501294 -3,30663492292 1,20436190091 -0,169558428561	5,12327673517 -6,29384704236 3,41434077007 -0,936300109646 0,106743209135	7,13860757441 -11,1757164609 8,04775526289 -3,24691364198 0,719428097459 -0,0689472694597
N	7	8	9
	9,96506292288 -18,9984075665 17,0514392132 -9,03858510919 2,93696631047 -0,547537574895 0,0452753663967	13,9304556142 -31,3485176398 33,6968524121 -22,07104076339 0,38930245651 -2,56627196249 0,413507501939 -0,0300740567359	19,4959090503 -50,6198280511 63,3951659783 -49,3675482281 25,8600363319 -9,244915887755 2,18556614566 -0,310317604756 0,0201458280019

Tableau 6. Coefficients $H_N(z)$ pour les filtres de Daubechies

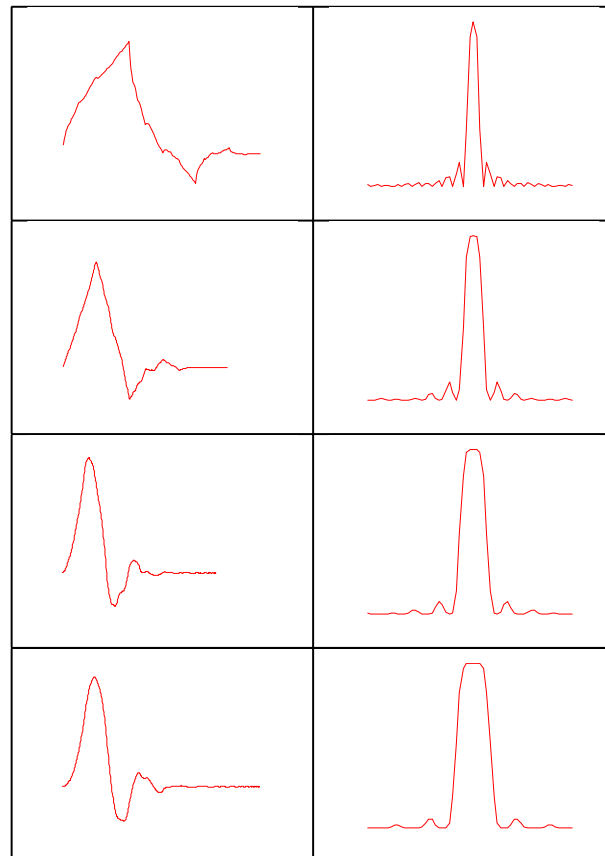


Tableau 6. Fonctions d'échelle Daubechies et leurs spectres ($N=2$ à 5)

Ondelettes pour le signal numérique
Frédéric Truchetet
Editions Hermes,
Paris, 1998

Ondelettes pour le signal numérique
Frédéric Truchetet
Editions Hermes,
Paris, 1998

Chapitre 7

Passage à deux dimensions

7.1 Cas général

Nous allons examiner dans ce chapitre comment les principes de l'analyse multirésolution monodimensionnelle présentés précédemment peuvent être étendus aux signaux multidimensionnels. Nous nous intéresserons plus spécialement au cas des signaux à deux dimensions que nous assimilerons dans la pratique à des images unimodales. L'analyse des signaux multispectraux est un autre problème que nous n'envisagerons pas ici. Cela étant, les propriétés et définitions données dans le premier paragraphe de ce chapitre sont valables quelle que soit la dimension de l'espace auquel appartiennent les fonctions ($2D$, $3D$ et au-delà).

Les fonctions que nous voulons traiter seront de carré intégrable sur \mathbb{R}^N , donc les signaux appartiendront à $L^2(\mathbb{R}^N)$ ($N = 2$ dans le cas des signaux $2D$).

7.1.1 Matrice de changement d'échelle

Les sous-espaces V_j doivent être étendus à N Dimensions et le facteur de dilatation ou d'échelle discret j deviendra une matrice de dilatation ou d'échelle permettant de passer d'une résolution à la suivante (exemple en $2D$) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1)$$

\mathbf{J} sera donc une matrice carrée de dimension $N \times N$ (soit 2×2 à $2D$) soumise à un certain nombre de contraintes ; il faudra en particulier que le dilaté d'un vecteur

88 Ondelettes pour le signal numérique

d'entiers soit un vecteur d'entiers⁶. On aura donc dans le cas $2D$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \implies \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$$

Une conséquence est que la matrice \mathbf{J} doit avoir des coefficients entiers et il en sera de même pour $|\det \mathbf{J}| \cdot \mathbf{J}^{-1}$.

La matrice doit assurer une dilatation suivant chaque dimension donc toutes ses valeurs propres λ_k doivent être supérieures à 1 en module.

$$|\lambda_k| > 1 \quad \forall k \quad (2)$$

Le facteur de dilatation surfacique (ou volumique, ou ...) d'une échelle à l'autre est $|\det \mathbf{J}|$.

Exemple 6 *Matrices de changement d'échelle valides en $2D$:*

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \det = -2 & \det = 2 & \det = 4 \end{array} \quad (3)$$

En $3D$ un exemple intéressant est fourni par la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \det = 2 \quad (4)$$

Il en existe bien d'autres !

7.1.2 Axiomatique de base de l'analyse multirésolution

L'axiomatique de base de l'analyse multirésolution est transposée directement à partir du cas $1D$:

⁶ On notera \mathbf{x} le vecteur colonne $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}$

$$..... \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \subset V_{j+1} \subset V_j \subset \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} &= L^2(\mathbb{R}^N) \\ \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j &= \{0\} \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{Z} \text{ si } f(\mathbf{x}) \in V_j &\iff f(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{x}) \in V_{j+1} \text{ (ou } f(\mathbf{J}^j\mathbf{x}) \in V_0) \\ \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N \text{ si } f(\mathbf{x}) \in V_0 &\iff f(\mathbf{x} - \mathbf{k}) \in V_0 \text{ (invariance par translation)} \end{aligned} \quad (7.7)$$

La translation prendra la forme d'un vecteur entier de \mathbb{Z}^N noté \mathbf{n} , de telle sorte que :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{J}\mathbf{x} - \mathbf{n} \quad (8)$$

où le vecteur \mathbf{x}' est le dilaté, translaté du vecteur \mathbf{x} .

On pourra ainsi construire une famille de fonctions dilatées-translatées à partir d'une fonction mère suivant l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_{j,\mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= |\det \mathbf{J}|^{-\frac{j}{2}} \varphi(\mathbf{J}^{-j}\mathbf{x} - \mathbf{n}) \\ \text{avec : } \begin{cases} \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \\ j \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

L'entier j sera l'échelle ou la résolution.

Il est facile de vérifier que la norme de la fonction est conservée par une telle transformation.

Cette famille constituera une base orthonormée pour le sous-espace V_j si et seulement si la fonction mère translatée $\varphi_{0,\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ est une base orthonormée pour V_0 :

$$\langle \varphi_{j,\mathbf{n}}, \varphi_{j,\mathbf{k}} \rangle = \delta(\mathbf{n} - \mathbf{k}) \quad (10)$$

Les vecteurs \mathbf{n} et \mathbf{k} sont des vecteurs d'entiers.

7.1.3 Sur-échantillonnage et sous-échantillonnage

Les opérations de changement d'échelle conduisent, nous le verrons, dans le cas d'algorithmes discrets à des opérations de sur-échantillonnage et de sous-échantillonnage de signaux numériques définis sur des réseaux ou treillis discrets.

90 Ondelettes pour le signal numérique

Nous noterons Λ le **treillis entier** défini comme l'ensemble des vecteurs entiers :

$$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)^t \text{ où } k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z}$$

Ce réseau se transforme par changement d'échelle et on obtient le **sous-réseau** noté $\Lambda_{\mathbf{J}}$ formé des vecteurs entiers :

$$\mathbf{m} = \mathbf{J}\mathbf{k} \text{ pour } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N$$

Un ensemble Γ_1 associé au sous-réseau $\Lambda_{\mathbf{J}}$ est formé des points obtenus par translation de tout le sous-réseau d'un vecteur entier \mathbf{l}_i donné.

Il y aura $|\det \mathbf{J}|$ ensembles associés Γ_1 distincts pour chaque sous-réseau $\Lambda_{\mathbf{J}}$, il y aura donc $|\det \mathbf{J}|$ vecteurs d'entiers distincts \mathbf{l}_i conduisant à ces échantillonnages (y compris la translation nulle). Nous noterons Γ_1^i l'ensemble associé au vecteur de translation \mathbf{l}_i .

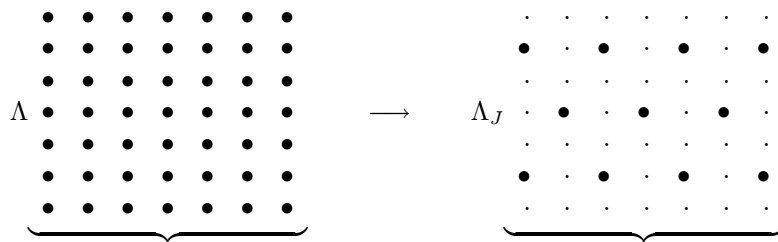
- Prenons un exemple :

Soit la matrice de dilatation $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ de déterminant : -4 .

- Les premiers vecteurs entiers de la maille carrée sont transformés comme suit :

$$\begin{cases} (0,0) \longrightarrow (0,0) \\ (0,1) \longrightarrow (1,-2) \\ (1,0) \longrightarrow (2,0) \\ (1,1) \longrightarrow (3,-2) \end{cases} \quad (11)$$

On peut d'ailleurs vérifier que ces 4 vecteurs forment l'ensemble des \mathbf{l}_i , vecteurs entiers qui en translatant le sous-réseau $\Lambda_{\mathbf{J}}$ permettent de retrouver le réseau complet de départ Λ .



7.1.3.1 Sur-échantillonnage

Lors du sur-échantillonnage, un signal décrit sur Λ sera transcrit sur Λ_J en injectant des 0 aux points n'appartenant pas au sous-réseau :

$$y(\mathbf{n}) = \begin{cases} x(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}) & \text{si } \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n} \in \Lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (12)$$

Si on reprend l'exemple précédent, on obtient une dilatation illustrée par le schéma suivant :

$$\underbrace{\begin{matrix} x_{0,2} & x_{1,2} & x_{2,2} \\ x_{0,1} & x_{1,1} & x_{2,1} \\ x_{0,0} & x_{1,0} & x_{2,0} \end{matrix}}_x \rightarrow \underbrace{\begin{matrix} 0 & x_{1,-1} & 0 & x_{2,-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{0,0} & 0 & x_{1,0} & 0 & x_{2,0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{0,1} & 0 & x_{1,1} & 0 \end{matrix}}_y$$

On notera symboliquement cette opération ainsi :

$$x(\mathbf{n}) \rightarrow \boxed{\uparrow \mathbf{J}} \rightarrow y(\mathbf{n}) \quad (13)$$

7.1.3.2 Sous-échantillonnage

Dans cette opération, seuls les points de Λ appartenant aussi au sous-réseau Λ_J sont conservés :

$$y(\mathbf{n}) = x(\mathbf{J}\mathbf{n}) \quad (14)$$

D'où la décimation illustrée par le schéma ci-dessous.

$$\underbrace{\begin{matrix} x_{0,2} & \boxed{x_{1,2}} & x_{2,2} & \boxed{x_{3,2}} & x_{4,2} \\ x_{0,1} & x_{1,1} & x_{2,1} & x_{3,1} & x_{4,1} \\ x_{0,0} & x_{1,0} & \boxed{x_{2,0}} & x_{3,0} & \boxed{x_{4,0}} \\ x_{0,-1} & x_{1,-1} & x_{2,-1} & x_{3,-1} & x_{4,-1} \\ x_{0,-2} & \boxed{x_{1,-2}} & x_{2,-2} & \boxed{x_{3,-2}} & x_{4,-2} \end{matrix}}_x \rightarrow \underbrace{\begin{matrix} x_{2,-4} & x_{4,-4} & x_{6,-4} & x_{8,-4} \\ \boxed{x_{1,-2}} & \boxed{x_{3,-2}} & x_{5,-2} & x_{7,-2} \\ y_{0,0} & \boxed{x_{2,0}} & \boxed{x_{4,0}} & x_{6,0} \\ x_{-1,2} & \boxed{x_{1,2}} & \boxed{x_{3,2}} & x_{5,2} \\ x_{-2,4} & x_{0,4} & x_{2,4} & x_{4,4} \end{matrix}}_y$$

On notera symboliquement cette opération de la façon suivante :

$$x(\mathbf{n}) \rightarrow \boxed{\downarrow \mathbf{J}} \rightarrow y(\mathbf{n}) \quad (15)$$

7.1.4 Algorithme récursif et propriétés

La première étape de l'analyse multirésolution d'une fonction $f(\mathbf{x})$ consiste en la projection de la fonction sur les sous-espaces emboîtés V_j ; cette projection, comme en 1D est faite par l'intermédiaire de projecteurs agissant sur les fonctions d'échelle qui forment la base de chaque sous-espace :

$$A_j f = \sum_{\mathbf{n} \in \Lambda} \langle f, \varphi_{j,\mathbf{n}} \rangle \varphi_{j,\mathbf{n}} \quad (16)$$

Les coefficients de la projection sont :

$$a_{\mathbf{n}}^j = \langle f, \varphi_{j,\mathbf{n}} \rangle \quad (17)$$

avec :

$$\langle f, \varphi_{j,\mathbf{n}} \rangle = \int_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \varphi_{j,\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{s} \quad (18)$$

$d\mathbf{s}$ étant l'élément de volume infinitésimal.

Il faut remarquer que comme :

$$\varphi_{j,\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = |\det \mathbf{J}|^{-\frac{j}{2}} \varphi(\mathbf{J}^{-j} \mathbf{x} - \mathbf{n})$$

le pas de translation dans \mathbb{R}^N est $\mathbf{J}^j \mathbf{n}$ avec $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N$.

Si on appelle Γ_j^0 l'ensemble de points associé au sous-réseau engendré par $\mathbf{J}^j \mathbf{n}$, la famille des Γ_j^0 forme quand j varie une famille d'ensembles emboîtés qui est dense dans \mathbb{R}^N . Et l'approximation des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^N)$ par la suite emboîtée des sous-espaces V_j correspond à l'approximation de \mathbb{R}^N par la suite emboîtée des Γ_j^0 . Cette remarque introduit un argument heuristique proposé initialement par Y. Meyer [30] qui nous permettra de donner sans véritable démonstration un résultat important concernant les sous-espaces complémentaires d'ondelettes :

On considère le sous-espace complémentaire de V_j dans V_{j-1} noté W_j tel que :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad \text{avec} \quad V_j \perp W_j \quad (19)$$

L'union d'une base orthonormée de V_j et d'une base orthonormée de W_j doit constituer une base orthonormée de V_{j-1} qui sera donc définie avec un pas discret sur Γ_{j-1}^0 construit par $\mathbf{J}^{j-1} \mathbf{n}$.

On note :

$$\psi_{j,\mathbf{n}}^i(\mathbf{x}) = |\det \mathbf{J}|^{-\frac{j}{2}} \psi^i(\mathbf{J}^{-j} \mathbf{x} - \mathbf{n}) \quad (20)$$

une famille orthonormée de W_j ; le pas de translation associé doit donc être sur Γ_j^i l'ensemble de points engendré par :

$$\mathbf{J}^j(\mathbf{n} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{l}_i) \quad (21)$$

Le vecteur de translation \mathbf{l}_i appartient à un ensemble E tel que :

$$\Gamma_{j-1}^0 = \Gamma_j^0 + \sum_{\mathbf{l}_i \in E} \Gamma_j^i \quad (22)$$

Il est clair que l'ensemble E est identique à l'ensemble des vecteurs \mathbf{l}_i définis dans l'introduction à l'exclusion du vecteur nul. il est donc composé de $|\det \mathbf{J}| - 1$ vecteurs différents. On peut donc prévoir qu'**une base de W_j sera engendrée par des translations de $|\det \mathbf{J}| - 1$ familles de fonctions ondelette.**

On est en particulier assuré de n'avoir qu'une famille d'ondelettes en $2D$ si :

$$\mathbf{J}\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) \quad \text{tel que} \quad m + n \in 2\mathbb{Z}\} \quad (23)$$

La projection de la fonction f sur le sous-espace W_j s'écrira :

$$D_j f = \sum_{\mathbf{l}_i \in E} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N} \langle f, \psi_{j,\mathbf{n}}^i \rangle \psi_{j,\mathbf{n}}^i \quad (24)$$

Nous aurons donc $|\det \mathbf{J}| - 1$ **signaux de détail** :

$$d_{\mathbf{n}}^{j,i} = \langle f, \psi_{j,\mathbf{n}}^i \rangle \quad (25)$$

pour chaque **signal d'approximation** $a_{\mathbf{n}}^j$. Et on aura comme en $1D$:

$$A_{j-1}f = A_j f + D_j f \quad (26)$$

7.1.4.1 Algorithmes récursifs : filtres associés

Les algorithmes récursifs de Mallat se généralisent sans modification majeure.

La fonction d'échelle s'exprime comme une combinaison linéaire de fonctions d'échelle de résolution plus fine, les coefficients $h[\mathbf{n}]$ de cette combinaison constituent la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique à N dimensions :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N} h[\mathbf{n}] \varphi_{-1,\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \quad (27)$$

ou encore :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N} h[\mathbf{n}] |\det \mathbf{J}|^{1/2} \varphi(\mathbf{J}\mathbf{x} - \mathbf{n}) \quad (28)$$

94 Ondelettes pour le signal numérique

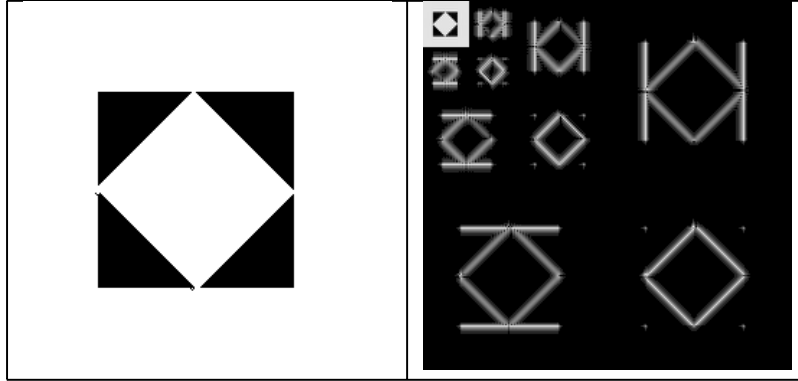


Tableau 7. Analyse de Haar pour l'image carré

soit :

$$h[\mathbf{n}] = \langle \varphi, \varphi_{-1, \mathbf{n}} \rangle \quad (29)$$

La fonction d'échelle est normée donc :

$$\sum_{\mathbf{n}} |h[\mathbf{n}]|^2 = 1 \quad (30)$$

En faisant un changement de variable et en posant $\tilde{h}[\mathbf{n}] = h[-\mathbf{n}]$, on obtient :

$$a_{\mathbf{n}}^j = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^N} \tilde{h}[\mathbf{J}\mathbf{n} - \mathbf{l}] a_{\mathbf{l}}^{j-1} \quad (31)$$

On retrouve donc le même algorithme qu'en 1D en remplaçant simplement le sous-échantillonnage dyadique par un sous-échantillonnage sur le sous-réseau Λ_j comme présenté au début du chapitre.

Les fonctions d'ondelette vont également être exprimées comme des combinaisons linéaires de fonctions d'échelle, les coefficients de ces combinaisons constituent des filtres numériques à N dimensions $g^i[\mathbf{n}]$; il y en a évidemment $|\det \mathbf{J}| - 1$:

$$\psi_{j, \mathbf{n}}^i(\mathbf{x}) = |\det \mathbf{J}|^{1/2} \psi^i(\mathbf{J}^{-j} \mathbf{x} - \mathbf{n}) \quad (32)$$

sachant que :

$$\psi^i(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}} g^i[\mathbf{n}] |\det \mathbf{J}|^{1/2} \varphi(\mathbf{J}\mathbf{x} - \mathbf{n}) \quad (33)$$

soit :

$$g^i[\mathbf{n}] = \langle \psi^i, \varphi_{-1, \mathbf{n}} \rangle \quad (34)$$

Les différents signaux de détail ($|\det \mathbf{J}| - 1$ par échelle) seront obtenus par le même algorithme récursif :

$$d_{\mathbf{n}}^{j,i} = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^N} \tilde{g}^i[\mathbf{J}\mathbf{n} - \mathbf{l}] d_{\mathbf{l}}^{j-1,i} \quad (35)$$

avec également : $\tilde{g}^i[\mathbf{n}] = g^i[-\mathbf{n}]$.

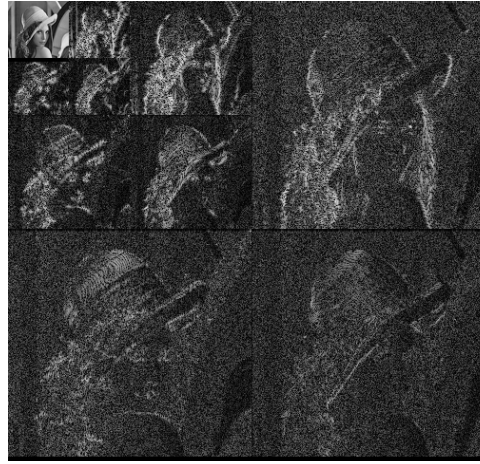


Figure 7. Analyse spline cubique sur 3 niveaux de l'image favorite

7.1.4.2 Propriétés des fonctions d'échelle et des filtres numériques associés

Les propriétés des bases et des filtres associés peuvent être largement généralisées. Les expressions obtenues sont rendues plus lisibles et compactes en utilisant une notation vectorielle pour la transformée de Fourier. On définit donc un vecteur pulsation :

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_N)^t \quad (36)$$

et la notation suivante pour la transformée de Fourier d'un signal discret multidimensionnel :

$$\hat{h}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{k}} h[\mathbf{k}] e^{-i\boldsymbol{\omega}^t \mathbf{k}} \quad (37)$$

La transformée de Fourier étant séparable, il est aisé de montrer que $\hat{h}(\boldsymbol{\omega})$ est une fonction de N variables $2\pi\mathbb{Z}^N$ - *périodique*. Réciproquement toute fonction de N

96 Ondelettes pour le signal numérique

variables, 2π — *périodique* pour chaque variable pourra être considérée comme la transformée de Fourier d'un signal discret à N variables.

La généralisation prend la même forme pour les fonctions continues :

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{\omega}) = \int \cdots \int_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\omega}^t \mathbf{x}} d\mathbf{s} \quad (38)$$

Et la transformée de Fourier d'une fonction dilatée et translatée s'écrira :

$$\varphi(\mathbf{J}\mathbf{x} - \mathbf{n}) \xrightarrow{\text{Fourier}} \frac{1}{|\det \mathbf{J}|} \hat{\varphi}[(\boldsymbol{\omega}^t \mathbf{J}^{-1})^t] e^{-i\boldsymbol{\omega}^t \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n}} = \frac{1}{|\det \mathbf{J}|} \hat{\varphi}(\mathbf{J}^{-t} \boldsymbol{\omega}) e^{-i\boldsymbol{\omega}^t \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n}} \quad (39)$$

si on note un peu abusivement : $\mathbf{J}^{-t} = (\mathbf{J}^{-1})^t$.

On montre, par une démonstration qui peut être recopiée directement à partir du cas $1D$, que la décomposition de la fonction d'échelle sur la base à l'échelle inférieure s'écrit dans Fourier :

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|\det \mathbf{J}|^{1/2}} \hat{h}(\mathbf{J}^{-t} \boldsymbol{\omega}) \hat{\varphi}(\mathbf{J}^{-t} \boldsymbol{\omega}) \quad (40)$$

Les fonctions d'échelle sont orthogonales à leurs translatées à toutes les échelles et en particulier à la résolution 0 :

$$\langle \varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{l}) \rangle = \delta(\mathbf{l}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \quad (41)$$

Cette relation conduit à une relation d'orthonormalité analogue pour le filtre d'échelle :

$$\sum_{\mathbf{k}} h(\mathbf{k}) h(\mathbf{k} - \mathbf{J}\mathbf{l}) = \delta(\mathbf{l}) \quad (42)$$

Si on traduit la relation d'orthogonalité intra-échelle dans Fourier on obtient la relation équivalente suivante :

$$\sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^N} |\hat{\varphi}(\boldsymbol{\omega} + 2\pi \mathbf{l})|^2 = 1 \quad (43)$$

La réponse fréquentielle du filtre d'échelle associé est contrainte d'une façon un peu plus complexe qu'en $1D$; le raisonnement conduisant à ses propriétés peut cependant être mené en suivant la même démarche :

La relation 7.43 est écrite en $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ et combinée à 7.40 :

$$\sum_{\mathbf{l}} \left| \hat{h}(\boldsymbol{\omega} + 2\pi \mathbf{J}^{-t} \mathbf{l}) \right|^2 \left| \hat{\varphi}(\boldsymbol{\omega} + 2\pi \mathbf{J}^{-t} \mathbf{l}) \right|^2 = |\det \mathbf{J}| \quad (44)$$

On cherche à faire apparaître dans cette relation les périodicités de la transformée de Fourier du signal discret $h[\mathbf{k}]$.

Chaque fois que $\mathbf{J}^{-t}\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^N$ on a $\widehat{h}(\boldsymbol{\omega} + 2\pi\mathbf{J}^{-t}\mathbf{l}) = \widehat{h}(\boldsymbol{\omega})$. Chaque valeur de $\mathbf{J}^{-t}\mathbf{l}$ non "entière" donnera en revanche une valeur particulière de $\widehat{h}(\boldsymbol{\omega} + 2\pi\mathbf{J}^{-t}\mathbf{l})$. Chacune de ces valeurs particulières donnera naissance par translations entières à toute une famille de valeurs. Le nombre de telles familles est limité car dans l'opération $\mathbf{J}^{-t}\mathbf{l}$ seuls les points tels que $\mathbf{l} = \mathbf{J}^t\mathbf{n}$ avec $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N$ appartiennent au réseau entier ; les points de Λ n'appartenant pas au sous-réseau $\Lambda_{\mathbf{J}}$ correspondront aux valeurs non entières ; il y en aura donc $|\det \mathbf{J}| - 1$ pour chaque point du sous-réseau.

On va donc considérer une maille élémentaire du sous-réseau et on prendra tous les vecteurs \mathbf{l}_i de cette maille, chacun correspondant à une valeur particulière pour $\widehat{h}(\boldsymbol{\omega} + 2\pi\mathbf{J}^{-t}\mathbf{l}_i)$, valeur qui se répète pour chaque maille et qui peut-être mise en facteur dans la relation précédente. On obtiendra la décomposition suivante :

$$\widehat{h}(\boldsymbol{\omega} + 2\pi\mathbf{n}) + |\det \mathbf{J}| - 1 \text{ termes } \underbrace{\widehat{h}(\boldsymbol{\omega} + 2\pi\mathbf{J}^{-t}\mathbf{l}_1 + 2\pi\mathbf{n}) + \widehat{h}(\boldsymbol{\omega} + 2\pi\mathbf{J}^{-t}\mathbf{l}_2 + 2\pi\mathbf{n}) + \dots}_{(45)}$$

D'où en reportant dans la relation 7.44 :

$$\left| \widehat{h}(\boldsymbol{\omega}) \right|^2 + \sum_{i=1}^{|\det \mathbf{J}|-1} \left| \widehat{h}(\boldsymbol{\omega} + 2\pi\mathbf{J}^{-t}\mathbf{l}_i) \right|^2 = |\det \mathbf{J}| \quad (46)$$

Cette relation est une condition au moins nécessaire pour construire une analyse multirésolution. On sait de plus que $\left| \widehat{h}(\mathbf{0}) \right|^2 = |\det \mathbf{J}|$ (condition de normalité), on doit donc avoir :

$$\sum_{i=1}^{|\det \mathbf{J}|-1} \left| \widehat{h}(2\pi\mathbf{J}^{-t}\mathbf{l}_i) \right|^2 = 0 \quad (47)$$

Ce qui implique que chaque terme doit être nul en ce qu'on peut appeler des pulsations de repliement : $2\pi\mathbf{J}^{-t}\mathbf{l}_i$ avec $\mathbf{l}_i \neq 0$ et $\mathbf{J}^{-t}\mathbf{l}_i \notin \mathbb{Z}^N$, les \mathbf{l}_i sont les vecteurs entiers qui en translatant le sous réseau $\Lambda_{\mathbf{J}}$ reconstituent le réseau Λ entier.

7.1.4.3 Propriétés des fonctions d'ondelette et des filtres numériques associés

Si on considère maintenant une fonction d'ondelette ψ^q qui engendre une partie d'une base de $W_0 \perp V_0$ on peut écrire la même relation d'orthogonalité pour une échelle donnée que pour les fonctions d'échelle. Les conditions étant les mêmes que précédemment, nous obtiendrons les mêmes résultats pour chacun des filtres g^q

98 Ondelettes pour le signal numérique



Figure 7. Image bateau

associés aux différentes ondelettes ψ^q :

$$|\widehat{g^q}(\omega)|^2 + \sum_{i=1}^{|\det \mathbf{J}|-1} |\widehat{g^q}(\omega + 2\pi \mathbf{J}^{-t} \mathbf{l}_i)|^2 = |\det \mathbf{J}| \quad (48)$$

Il y a, comme dans le cas $1D$, une différence avec le filtre h ; en effet le filtre est passe-haut : $|\widehat{g^q}(\omega)| = 0$ donc :

$$\sum_{i=1}^{|\det \mathbf{J}|-1} |\widehat{g^q}(2\pi \mathbf{J}^{-t} \mathbf{l}_i)|^2 = |\det \mathbf{J}| \quad (49)$$

La contrainte liée à l'orthogonalité des fonctions d'ondelette à travers les échelles est mise en évidence en exprimant l'orthogonalité entre V_0 et W_0 :

$$\langle \psi^q, \varphi_{0,\mathbf{k}} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N \quad (50)$$

Ce qui, en utilisant l'orthogonalité par translation des fonctions d'échelle conduit à :

$$\sum_{\mathbf{n}} g[\mathbf{n}] h[\mathbf{n} - \mathbf{J}\mathbf{k}] = 0 \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N \quad (51)$$



Figure 7. Analyse multirésolution de l'image bateau

Encore une fois, les mêmes propriétés exprimées dans Fourier sont souvent plus exploitables pour la construction des filtres. L'équivalent de la relation 7.43 s'écrit :

$$\sum_{\mathbf{n}} \widehat{\psi}^q(\boldsymbol{\omega} + 2\pi \mathbf{1}) \widehat{\varphi}^*(\boldsymbol{\omega} + 2\pi \mathbf{1}) = 0 \quad (52)$$

Sachant que l'on a :

$$\widehat{\psi}^q(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|\det \mathbf{J}|^{1/2}} \widehat{g}^q(\mathbf{J}^{-t} \boldsymbol{\omega}) \widehat{\varphi}(\mathbf{J}^{-t} \boldsymbol{\omega}) \quad (53)$$

En suivant le même raisonnement que précédemment on obtient la relation entre les réponses fréquentielles des filtres :

$$\widehat{g}^q(\boldsymbol{\omega}) \widehat{h}^*(\boldsymbol{\omega}) + \sum_{i=1}^{|\det \mathbf{J}|-1} \widehat{g}^q(\boldsymbol{\omega} + 2\pi \mathbf{J}^{-t} \mathbf{1}_i) \widehat{h}^*(\boldsymbol{\omega} + 2\pi \mathbf{J}^{-t} \mathbf{1}_i) = 0 \quad (54)$$

Cette relation ne permet pas de trouver directement les filtres g^q à partir du filtre h . Un résultat général dans ce domaine reste à trouver.

On peut cependant donner un résultat pour deux cas particuliers importants dans la pratique. En effet si $|\det \mathbf{J}| = 2$ (échantillonnage quinconce par exemple) ou si $\mathbf{J} = 2\mathbf{I}$ (cas séparable) alors il est facile de vérifier qu'une solution analogue au cas 1D est acceptable :

$$\hat{g}^q(\omega) = -e^{i\omega^t \mathbf{l}_q} \hat{h}^*(\omega + 2\pi \mathbf{J}^{-t} \mathbf{l}_q) \quad (55)$$

Cette solution ne semble malheureusement pas marcher dans le cas général.

On trouvera dans [18] une généralisation intéressante des ondelettes de Battle-Lemarié (B-splines cubiques) à deux dimensions sous forme de box spline bivariable et la description des filtres associés.

Nous allons maintenant traiter en détail les deux cas particuliers importants : celui des bases séparables et celui des ondelettes quinconces.

7.2 Ondelettes séparables

Nous nous limiterons au cas dyadique qui est le plus utilisé dans la pratique actuelle. Il est bien adapté aux matrices CCD à maille carrée utilisées actuellement comme capteurs d'image. La matrice de dilatation sera :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{I} \quad (56)$$

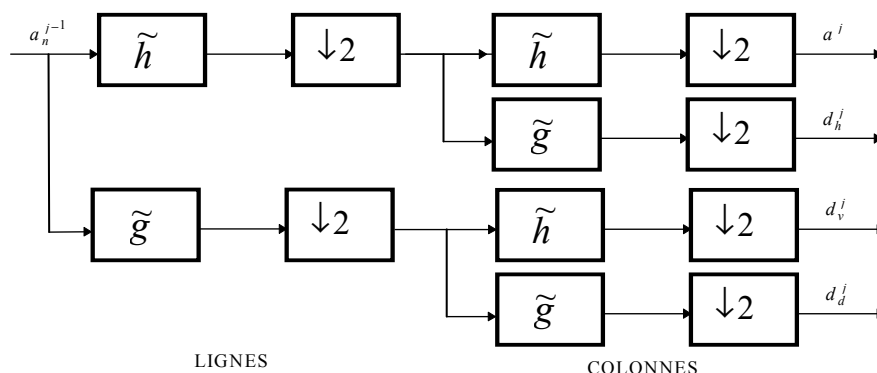


Figure 7. Analyse d'une image sur des bases séparables

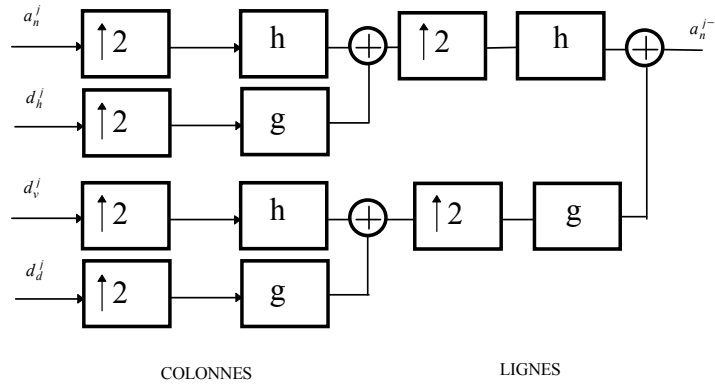


Figure 7. Algorithme de reconstruction

On aura donc :

$$\mathbf{J}\mathbf{x} = 2\mathbf{x} \text{ et } \mathbf{J}^j\mathbf{x} = 2^j\mathbf{x} \quad (57)$$

et la famille de fonctions dilatées-translatées sera notée :

$$\varphi_{j,m,n}(x, y) = 4^{-\frac{j}{2}}\varphi(2^{-j}x - m, 2^{-j}y - n) \quad (58)$$

Le facteur de dilatation surfacique est 4.

Les 3 ($|\det \mathbf{J}| - 1$) vecteurs \mathbf{l}_i qui, dans la maille élémentaire, par contraction (la dilatation inverse) $\mathbf{J}^{-t}\mathbf{l}$ conduisent à des points n'appartenant pas au réseau entier sont les suivants :

$$\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (59)$$

Suivant la méthode exposée dans les paragraphes précédents, on construit l'analyse multirésolution avec les mêmes axiomes que ceux utilisés en 1D en remplaçant la variable par un vecteur :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \quad & \text{si } f(\mathbf{x}) \in V_0 \iff f(\mathbf{x} - \mathbf{k}) \in V_0 \\ \forall j \in \mathbb{Z} \quad & \text{si } f(\mathbf{x}) \in V_j \iff f(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{x}) \in V_{j+1} \quad \text{ou } f(\mathbf{J}^j\mathbf{x}) \in V_0 \end{aligned} \quad (7.60)$$

102 Ondelettes pour le signal numérique

L'opération de dilatation agissant de façon indépendante suivant les deux directions, on crée une analyse multirésolution $2D$ en choisissant comme fonction d'échelle le produit de deux fonctions d'échelle à une variable construites suivant les règles déjà présentées ; le plus simple étant de respecter l'isotropie du traitement et de prendre deux fois la même fonction d'échelle :

$$\varphi_{j,m,n}(x, y) = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}x - m) \cdot 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}y - n) \quad (61)$$

soit :

$$\varphi_{j,m,n}(x, y) = \varphi_{j,m}(x) \cdot \varphi_{j,n}(y) \quad (62)$$

La famille de sous-espaces ainsi construite est le produit tensoriel des sous-espaces à $1D$ suivant x et suivant y .

$$V_{j-1} = v_{j-1} \otimes v_{j-1} = (v_j \oplus w_j) \otimes (v_j \oplus w_j) \quad (63)$$

En développant :

$$V_{j-1} = (v_j \otimes v_j) \oplus [(v_j \otimes w_j) \oplus (w_j \otimes v_j) \oplus (w_j \otimes w_j)] \quad (64)$$

Ce qui s'écrit également :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (65)$$

On constate que, comme prévu, la base du sous-espace de détail (ondelettes) sera constituée par trois familles d'ondelettes :

$$\begin{cases} \psi^h(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \\ \psi^v(x, y) = \psi(x)\varphi(y) \\ \psi^d(x, y) = \psi(x)\psi(y) \end{cases} \quad (66)$$

Dans les trois cas, les ondelettes, comme les fonctions d'échelle, sont séparables et l'algorithme de transformation se déduit directement des algorithmes présentés pour le cas $1D$. Les opérations de filtrages seront menées en cascade suivant lignes puis colonnes (ou inversement). Le signal $2D$ sera donc traité comme un signal $1D$ et les outils de mise en œuvre pourront avoir la même architecture. Toutes les analyses $1D$ peuvent être transposées de la sorte à deux dimensions. Le principe de l'algorithme est illustré par les schémas 7. et 7..

La décomposition d'une image discrète considérée comme l'approximation de départ du signal a^j fournit à chaque étape quatre imagerie, l'une correspond à l'approximation inférieure a^{j+1} et les trois autres sont constituées des coefficients de la décomposition en ondelettes et contiennent les détails perdus lors du passage d'une résolution à la suivante. Ces détails sont, suivant l'imagerie, orientés horizontalement

d_h^{j+1} (correspondant à $\psi^h(x, y)$), verticalement d_v^{j+1} (correspondant à $\psi^v(x, y)$) ou en diagonal d_d^{j+1} (correspondant à $\psi^d(x, y)$).

$$\boxed{a^j} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline a_h^{j+1} & d_h^{j+1} \\ \hline d_v^{j+1} & d_d^{j+1} \\ \hline \end{array}$$

La surface occupée par les quatre imagettes ensemble est la même que la surface occupée par l'image de départ. Il n'y a ni compression ni redondance dans la représentation obtenue (si la transformée est réelle). Trois exemples de telles décompositions sont donnés pour une image synthétique (carré blanc sur fond noir, voir 7.) et pour deux images du monde réel, l'image favorite (figure 7.), et l'image "bateau" (figures 7. et 7.). En fait un quatrième exemple est proposé à la fin du chapitre 1. On pourra constater en particulier la mise en évidence des détails verticaux, horizontaux et diagonaux aux différentes échelles et l'image d'approximation qui reste au troisième niveau. La base d'ondelettes utilisée dans le cas de l'image favorite est une base orthogonale construite à partir des splines cubiques qui est présentée dans le chapitre 6 consacré aux exemples de bases d'ondelettes, tandis que la base utilisée pour l'analyse de "bateau" est la base de Haar. On vérifiera que les détails sont mieux localisés spatialement dans l'analyse de Haar, alors que la perception des échelles est plus nette avec la base spline.

7.3 Ondelettes quinconces

Les analyses séparables dyadiques nécessitent trois familles d'ondelettes, ceci est parfois considéré comme un inconvénient, d'autre part le facteur de dilatation entre deux échelles successives est de 4 ce qui peut sembler élevé. Il est possible de remédier à ces deux problèmes, mais c'est au prix de la perte de la séparabilité des filtres et donc d'une complexité algorithmique un peu plus élevée. Une analyse a été particulièrement bien étudiée et a trouvé des applications pratiques, il s'agit de l'analyse dite en "quinconce". Nous verrons que le facteur de dilatation n'est plus que de 2 entre deux résolutions successives et qu'une seule famille d'ondelettes est nécessaire.

La matrice de dilatation sera dans ce cas :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

qui avec son déterminant égal à -2 devrait conduire aux propriétés annoncées.

$$\mathbf{J}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix} \quad (68)$$

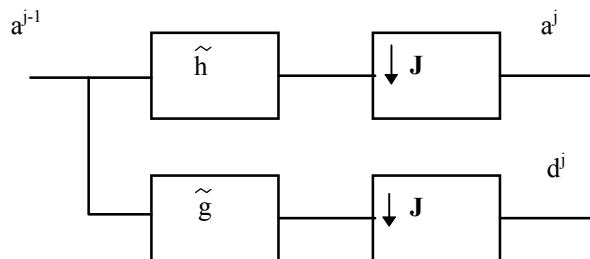


Figure 7. Analyse multirésolution quinconce

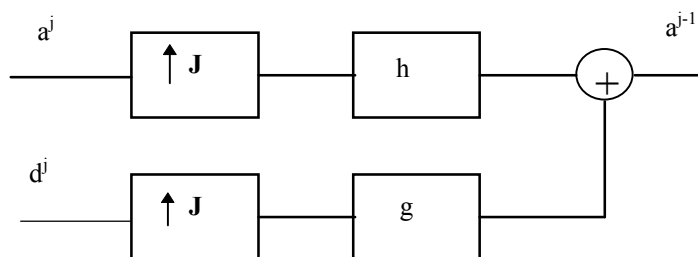
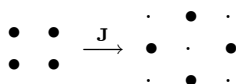


Figure 7. Reconstruction pour l'analyse quinconce

La transformation du maillage (treillis) se fait selon le schéma suivant :



On constate que le pas de dilatation est de $\sqrt{2}$ sur chaque direction et la géométrie du maillage obtenu justifie le nom donné à cette analyse multirésolution.

Remarque 12 *L'échantillonnage est séparable suivant les directions, en effet :*

$$\mathbf{J}^2 = 2\mathbf{I} \implies \begin{cases} \mathbf{J}^{2n} = 2^n \mathbf{I} \\ \mathbf{J}^{2n+1} = 2^n \mathbf{I} \end{cases} \quad (69)$$

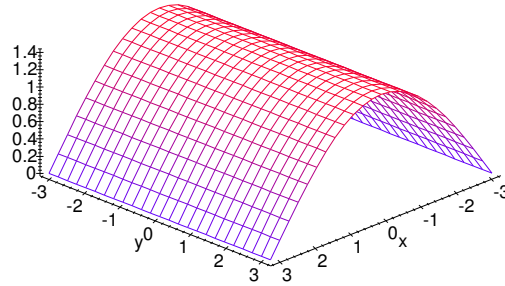


Figure 7. Analyse de Haar : réponse fréquentielle de h

et donc $\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{J}$.

Le vecteur \mathbf{l}_1 est unique dans la maille élémentaire car $|\det \mathbf{J}| - 1 = 1$, il conduit par contraction $\mathbf{J}^{-t}\mathbf{l}$ à un point n'appartenant pas au réseau entier. Ce vecteur doit être choisi dans l'ensemble suivant :

$$\mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (70)$$

La construction des bases orthonormées est menée en appliquant les axiomes déjà présentés.

L'expression générale qui traduit l'orthogonalité des fonctions d'échelle :

$$\langle \varphi_{j,\mathbf{n}}, \varphi_{j,\mathbf{k}} \rangle = \delta(\mathbf{n} - \mathbf{k}) \quad (71)$$

s'écrit dans ce cas :

$$\langle \varphi(\mathbf{J}^{-j}\mathbf{x} - \mathbf{n}), \varphi(\mathbf{J}^{-j}\mathbf{x} - \mathbf{k}) \rangle = 2^j \delta(\mathbf{n} - \mathbf{k}) \quad (72)$$

le pas de translation unitaire à l'échelle j est : $\mathbf{J}^{-j}\mathbf{l}$.

La décomposition de la fonction d'échelle sur la base de résolution inférieure, nécessaire pour la construction du filtre associé s'écrit (si on note $\mathbf{k} = (n, m)^t$) :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{n,m} h[\mathbf{k}] \varphi_{-1,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \quad (73)$$

avec :

$$\varphi_{-1,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = 2^{\frac{1}{2}} \varphi(\mathbf{J}\mathbf{x} - \mathbf{k}) = \sqrt{2} \varphi(x + y - n, x - y - m) \quad (74)$$

106 Ondelettes pour le signal numérique



Tableau 7. Analyse quinconce de Haar sur l'image favorite

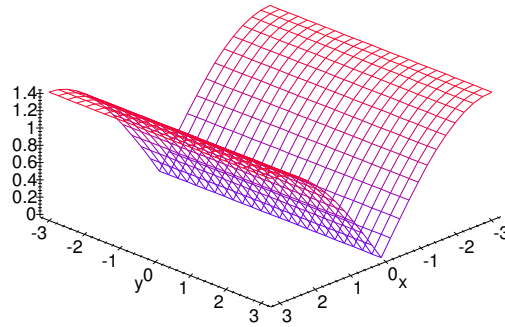


Figure 7. Analyse de Haar : réponse fréquentielle de g

donc :

$$\varphi(x, y) = \sqrt{2} \sum_{n, m} h[n, m] \varphi(x + y - n, x - y - m) \quad (75)$$

$h[n, m]$ est une suite numérique à deux variables considérée comme un filtre numérique bidimensionnel de réponse fréquentielle définie par :

$$\hat{h}(\omega_1, \omega_2) = \sum_n \sum_m h[n, m] e^{-i(n\omega_1 + m\omega_2)} \quad (76)$$

On cherche la transformée de Fourier de la relation :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{n, m} h[\mathbf{k}] 2^{\frac{1}{2}} \varphi(\mathbf{J}\mathbf{x} - \mathbf{k}) \quad (77)$$

La transformée de la fonction dilatée-translatée s'écrit :

$$\varphi(\mathbf{J}\mathbf{x} - \mathbf{k}) \xrightarrow{\text{fourier}} \int \varphi(\mathbf{J}\mathbf{x} - \mathbf{k}) e^{-i\boldsymbol{\omega}^t \mathbf{x}} d\mathbf{s} \quad (78)$$

on pose :

$$\mathbf{X} = \mathbf{J}\mathbf{x} - \mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{J}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{k} = \mathbf{x} \text{ et } dS = ds |\det \mathbf{J}|$$

d'où :

$$\varphi(\mathbf{J}\mathbf{x} - \mathbf{k}) \xrightarrow{\text{fourier}} \frac{1}{|\det \mathbf{J}|} \hat{\varphi}(\mathbf{J}^{-t} \boldsymbol{\omega}) e^{-i\boldsymbol{\omega}^t \mathbf{J}^{-1} \mathbf{k}} \quad (79)$$

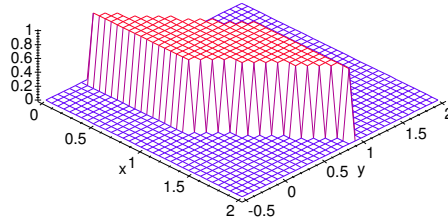


Figure 7. Analyse de Haar : fonction d'échelle

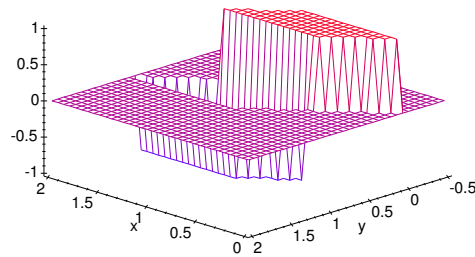


Figure 7. Analyse de Haar : ondelette

avec :

$$\omega^t \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2) \quad (80)$$

et :

$$\omega^t \mathbf{J}^{-1} \mathbf{k} = \frac{1}{2}[(\omega_1 + \omega_2)n + (\omega_1 - \omega_2)m] \quad (81)$$

La relation 7.79 devient :

$$\varphi(\mathbf{J}\mathbf{x} - \mathbf{k}) \xrightarrow{\text{fourier}} \frac{1}{2} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) e^{-in\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} e^{-im\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}} \quad (82)$$

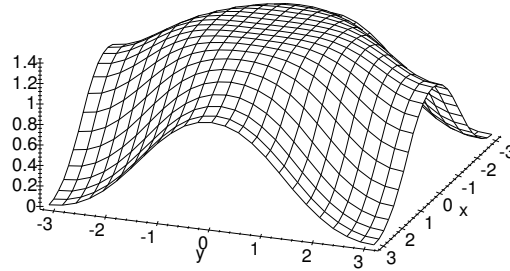


Figure 7. Réponse fréquentielle du filtre h de l'analyse de J.C. Fauveau

D'où la relation pour le filtre numérique associé à la fonction d'échelle :

$$\hat{\varphi}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \quad (83)$$

La relation qui exprime l'orthogonalité des fonctions d'échelle se traduit par :

$$\sum_{\mathbf{k}} |\hat{\varphi}(\boldsymbol{\omega} - 2\pi\mathbf{k})|^2 = 1 \quad (84)$$

De même on trouve pour le filtre⁷ :

$$\left| \hat{h}(\boldsymbol{\omega}) \right|^2 + \left| \hat{h}(\boldsymbol{\omega} + \pi\mathbf{1}) \right|^2 = 2 \quad (85)$$

Et :

$$\begin{cases} \left| \hat{h}(\mathbf{0}) \right| = \sqrt{2} \\ \hat{h}(\pi\mathbf{1}) = 0 \end{cases} \quad (86)$$

ce qui indique que le filtre h est un filtre passe-bas.

Remarque 13 La relation de récurrence peut s'écrire en notation vectorielle :

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega}) \hat{\varphi}(\mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\omega}) \quad \text{car} \quad \mathbf{J}^t = \mathbf{J} \quad (87)$$

⁷ On note $\mathbf{1}$ le vecteur unité : $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

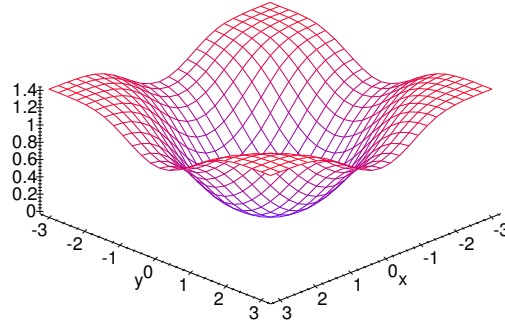


Figure 7. Réponse fréquentielle du filtre g de l'analyse de J.C. Fauveau

ou :

$$\hat{\varphi}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\boldsymbol{\omega}) \hat{\varphi}(\boldsymbol{\omega}) \quad (88)$$

et par récurrence :

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{\omega}) = \prod_n \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\mathbf{J}^{-n}\boldsymbol{\omega}) \quad (89)$$

Par voie de conséquence, on pourra utiliser l'algorithme cascade (voir le paragraphe 4.3) pour construire des approximations des fonctions d'échelle comme dans le cas 1D.

L'ondelette sera construite de la même manière et les résultats peuvent être transposés sans difficulté :

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{n,m} g[\mathbf{k}] 2^{\frac{1}{2}} \varphi(\mathbf{J}\mathbf{x} - \mathbf{k}) \quad (90)$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\boldsymbol{\omega}) \hat{\varphi}(\boldsymbol{\omega}) \quad (91)$$

Et pour le filtre g , un des choix possibles sera :

$$\hat{g}(\boldsymbol{\omega}) = -e^{-i\boldsymbol{\omega}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \hat{h}^*(\boldsymbol{\omega} + \pi \mathbf{1}) \quad (92)$$

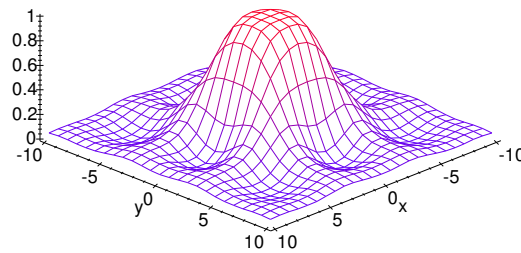


Figure 7. Transformée de Fourier de la fonction d'échelle de J.C. Fauveau

Ce qui donne en revenant aux originaux :

$$g[n, m] = (-1)^{n+m} h[1 - n, -m] \quad (93)$$

On pourra construire le filtre h à partir des filtres étudiés pour la dimension 1 (transformation en $2D$ par la méthode de Mac Clellan par exemple) ou par des méthodes originales (voir [9]). Les filtres ne sont, en général, pas séparables. On trouvera dans [14] une étude complète de l'analyse quinconce et un exemple de base orthonormée ; nous donnons ci-après quelques exemples simples.

Les algorithmes d'analyse et de synthèse (7., 7.) sont exactement les mêmes que dans le cas $1D$, il suffit de remplacer les opérations de sur-échantillonnage et sous-échantillonnage par leurs équivalents présentés au début du chapitre. A chaque étape de l'analyse la surface des images est divisée par 2 et nous avons une image de détail (coefficients d'ondelette) et une image d'approximation.

Pour avoir des informations plus complètes et plus approfondies sur les bases d'ondelettes multidimensionnelles non séparables on consultera [21] ou encore [34]. On constatera que contrairement à ce qui se passe à une dimension, il est possible de trouver des filtres linéaires en phase et à support compact associés aux analyses orthogonales $2D$.

7.3.1 Exemples d'analyse quinconce orthonormée

Nous présentons ici les principaux éléments de deux exemples d'analyse quinconce : analyse de Haar, analyse proposée par Fauveau ([14]) qui s'appuie sur un filtre simple, linéaire en phase, mais à support non compact ; on pourra trouver d'autres analyses

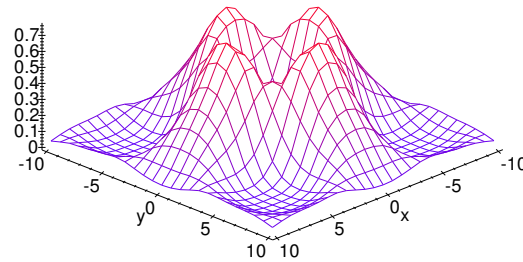


Figure 7. Transformée de Fourier de l'ondelette de J.C. Fauveau

quinconce s'appuyant sur des filtres à support compact proposés par Kovacevic et Vetterli dans [21], [22], [23], [43] ou par Viscito et Allebach [45].

7.3.1.1 Analyse de Haar

On peut étendre directement à $2D$ l'analyse de Haar telle qu'elle a déjà été présentée. Le point de départ sera le filtre associé à la fonction d'échelle :

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z_1^{-1}) \quad (94)$$

soit :

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\omega_1}{2}} \cos \frac{\omega_1}{2} \quad (95)$$

On vérifie aisément que la propriété d'orthogonalité du filtre est vérifiée. Le module de la réponse fréquentielle du filtre h est présenté sur le graphe 7.. Cette réponse a une étendue spectrale illimitée (sur l'intervalle $[0, 2\pi]$), il ne faut donc pas s'attendre, avec cette analyse, à une bonne résolution inter-échelle.

La fonction d'échelle peut être déterminée par l'algorithme cascade (paragraphe 4.3) présenté dans le cas $1D$, ou directement par récurrence à partir de la réponse fréquentielle du filtre. Il est aussi relativement aisé de trouver directement l'expression de la fonction d'échelle satisfaisant l'équation de décomposition :

$$\varphi(x, y) = (u(x - y) - u(x - y - 1))(u(y) - u(y - 1)) \quad (96)$$

Si $u(x)$ est la fonction de Heaviside. La courbe correspondante est donnée en 7..



Tableau 7. Analyse quince (filtre RII) sur 2 niveaux

114 Ondelettes pour le signal numérique

Pour le filtre associé à la fonction d'ondelette, on trouve :

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - z_1^{-1}) \quad (97)$$

Soit :

$$\hat{g}(\omega) = i\sqrt{2}e^{-i\frac{\omega_1}{2}} \sin \frac{\omega_1}{2} \quad (98)$$

La figure 7. présente la réponse fréquentielle du filtre g .

Ce qui nous permet d'écrire la décomposition linéaire de la fonction d'ondelette sur la base des fonctions d'échelle et donc d'obtenir l'ondelette $\psi(x, y)$ correspondante qui est tracée sur la courbe 7..

Les figures du tableau 7. présentent le résultat d'une analyse multirésolution quinconce avec la base de Haar sur l'image "favorite". On observe le rapport 2 entre les surfaces des images à deux résolutions successives et le résultat du sous-échantillonnage quinconce. La faible résolution inter-échelle de l'analyse de Haar conduit à des images de détail presque identiques, à la dimension près, pour toutes les résolutions.

7.3.1.2 Analyse avec filtre RII

Nous présentons dans ce paragraphe un exemple simple de construction de base quinconce s'appuyant sur des filtres linéaires en phase mais de réponse infinie. Cet exemple a été proposé par J.C. Fauveau [14].

Soit une fonction $\hat{\theta}(\omega)$ qui soit 2π -périodique et telle que $\hat{\theta}(\pi\mathbf{1}) = 0$. On pose :

$$\left| \hat{\theta}(\omega) \right|^2 + \left| \hat{\theta}(\omega + \pi\mathbf{1}) \right|^2 = 2p(\omega) \quad (99)$$

Dans ces conditions, il est évident que le filtre normalisé suivant sera acceptable :

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\hat{\theta}(\omega)}{\sqrt{p(\omega)}} \quad (100)$$

Pour assurer la linéarité en phase, on pourra, tout simplement, choisir $\hat{\theta}(\omega)$ sous forme d'un polynôme en $\cos \omega_i$. La solution la plus simple est :

$$\hat{\theta}(\omega) = 2 + \cos \omega_1 + \cos \omega_2 \quad (101)$$

D'où :

$$\hat{h}(\omega) = \frac{2 + \cos \omega_1 + \cos \omega_2}{\sqrt{4 + (\cos \omega_1 + \cos \omega_2)^2}} \quad (102)$$

On peut montrer que ce filtre conduit à une base de fonctions d'échelle qui engendre une analyse multirésolution.

La réponse impulsionnelle (masque de convolution) du filtre est obtenue par transformée de Fourier inverse. Elle est d'étendue infinie, mais si on restreint le calcul aux premiers termes, on en obtient une forme approchée présentée en 7.103.

j	i	g	d	g	i	j
i	h	f	c	f	h	i
g	f	e	b	e	f	g
d	c	b	<u>a</u>	b	c	d
g	f	e	b	e	f	g
i	h	f	c	f	h	i
j	i	g	d	g	i	j

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0.90917 \\ b = 0.20246 \\ c = -0.017627 \\ d = -0.0031278 \\ e = -0.040853 \\ f = -0.013016 \\ g = 0.0024112 \\ h = 0.0040055 \\ i = 0.0014007 \\ j = -0.00048109 \end{array} \right. \quad (103)$$

Les autres éléments de l'analyse se déduisent sans difficulté particulière en appliquant les relations présentées plus haut. Le masque correspondant au filtre g est donné en 7.104 en utilisant les mêmes notations que pour le filtre h (l'élément souligné correspond à l'origine du masque).

-j	i	-g	d	-g	i	-j
i	-h	f	-c	f	-h	i
-g	f	-e	b	-e	f	-g
d	-c	<u>b</u>	-a	b	-c	d
-g	f	-e	b	-e	f	-g
i	-h	f	-c	f	-h	i
-j	i	-g	d	-g	i	-j

(104)

On trouvera des représentations graphiques des réponses fréquentielles des filtres h et g sur les figures 7. et 7.. Les figures 7. et 7. présentent les transformées de Fourier des fonctions d'échelle et d'ondelette associées à cette analyse multirésolution. On constate que les fonctions obtenues ont des étendues spectrales limitées. L'isotropie n'est, en revanche, que très approximative. Des fonctions construites, à partir de bases

116 Ondelettes pour le signal numérique

B-spline cubiques, en utilisant la transformation de Mac Clellan, donnent des résultats plus satisfaisants de ce point de vue, les filtres sont, cependant, plus étendus.

Si on applique cette transformation à l'image "favorite" on obtient les résultats présentés dans les images du tableau 7.. On vérifiera que si la localisation spatiale et le contraste des détails sont plus faibles que pour l'analyse de Haar, leur localisation d'une échelle à l'autre est plus sélective. Certains détails apparaissent nettement à certaines échelles et sont presque absents à d'autres résolutions (voir l'œil, la bouche, la chevelure ou encore les plumes du chapeau). Ceci est la conséquence de la relativement bonne sélectivité spectrale des fonctions d'analyse utilisées.

Chapitre 8

Bases biorthogonales

8.1 Introduction

Malgré de nombreux avantages, les analyses multirésolutions $1D$ ou séparables présentent au moins un inconvénient pratique : si on veut préserver la symétrie droite-gauche du traitement (linéarité en phase), les filtres numériques impliqués dans les algorithmes ont une réponse impulsionnelle infinie. Leur mise en œuvre, sauf cas particulier des filtres récurrents, est donc relativement lourde et/ou le résultat imprécis. Dans les applications liées au traitement des images, cette symétrie du traitement semble très souhaitable ; d'autre part, ce type d'application est particulièrement sensible à la complexité des algorithmes car le nombre de données à traiter est souvent considérable. Ces deux éléments ont conduit les chercheurs à proposer une variante de l'analyse multirésolution conciliant la linéarité en phase et la compacité des supports des filtres associés. La solution proposée fait appel aux bases biorthogonales. Ces familles de fonctions permettent l'analyse multirésolution du signal et assurent la possibilité d'une reconstruction parfaite du signal. L'analyse reste non redondante, possède les propriétés de symétrie et de simplicité requises, mais conduit à une "corrélation" entre les composantes du signal plus grande que dans le cas des bases orthonormées. Le mot "corrélation" étant ici pris au sens commun et non strictement mathématique ; cette idée demanderait d'ailleurs à être précisée plus rigoureusement. Enfin la complexité conceptuelle de l'analyse sur les bases biorthogonales est un peu plus grande car l'analyse et la reconstruction n'utilisent pas les mêmes familles de fonctions, deux jeux de bases duales sont nécessaires.

On trouvera dans [37] une généralisation à $2D$ et pour des dimensions supérieures des bases biorthogonales d'ondelettes.

8.2 Analyse biorthogonale

Deux familles de fonctions duales sont considérées, l'une sera utilisée pour l'analyse (transformée directe) et l'autre pour la reconstruction ou synthèse (transformée inverse). Ces familles sont orthogonales entre elles mais ne sont pas orthogonales en

118 Ondelettes pour le signal numérique

elles-mêmes. Nous avons besoin de deux familles duales de sous-espaces emboîtés définies par les deux familles de fonctions d'échelle, chacune formant une base non orthogonale. Les propriétés à respecter sont l'indépendance linéaire et l'existence et l'unicité de la décomposition.

Si on note V_j et \overline{V}_j les deux familles de sous-espaces, on a :

$$\begin{cases} V_j \subset V_{j-1} \\ \overline{V}_j \subset \overline{V}_{j-1} \end{cases} \quad (1)$$

Les sous-espaces complémentaires sont définis différemment car ils sont complémentaires au sous-espace dual :

$$\begin{cases} W_j \perp \overline{V}_j \\ \overline{W}_j \perp V_j \end{cases} \quad (2)$$

Le passage d'une résolution à la suivante est fait en suivant la décomposition :

$$\begin{cases} V_{j-1} = V_j \oplus W_j & \text{mais } V_j \not\subset W_j \\ \overline{V}_{j-1} = \overline{V}_j \oplus \overline{W}_j & \text{et } \overline{V}_j \not\subset \overline{W}_j \end{cases} \quad \text{avec cependant } W_j \perp \overline{W}_k \quad k \neq j \quad (3)$$

Les propriétés d'orthogonalité des bases des sous-espaces seront les suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \psi_{j,n}, \overline{\psi}_{i,m} \rangle &= \delta(j-i)\delta(n-m) \\ \langle \varphi_{j,n}, \overline{\varphi}_{j,m} \rangle &= \delta(n-m) \end{aligned} \quad (4)$$

L'orthogonalité vis-à-vis de la translation ou de la dilatation n'est requise que d'un espace à son dual. Les couples duaux de sous-espaces peuvent être utilisés dans un ordre indifférent pour l'analyse puis la synthèse.

Pour créer une analyse biorthogonale, il suffira de définir une famille linéairement indépendante complète (une base) de fonctions construites par dilatation-translation d'une fonction mère. Un exemple évident est fourni par les familles de fonctions B-splines. La base duale et les filtres associés sont déterminés par les propriétés d'orthogonalités (équation 8.4) éventuellement exprimées dans l'espace de Fourier.

L'analyse et la synthèse d'un signal se feront suivant des algorithmes analogues à ceux du cas orthonormal :

$$A_{j-1}f = A_jf + D_jf \quad (5)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_j f &= \sum_n \langle f, \bar{\varphi}_{j,n} \rangle \varphi_{j,n} \\ D_j f &= \sum_n \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n} \end{aligned} \quad (6)$$

Les algorithmes récursifs seront identiques, avec pour l'analyse :

$$\begin{cases} a_n^j = \sum_l \tilde{h}[2n-l] a_l^{j-1} \\ d_n^j = \sum_l \tilde{g}[2n-l] a_l^{j-1} \end{cases} \quad (7)$$

Et en reconstruction :

$$a_n^{j-1} = \sum_k a_k^j h[n-2k] + \sum_k d_k^j g[n-2k] \quad (8)$$

Avec, évidemment :

$$\begin{cases} a_n^j = \langle f, \bar{\varphi}_{j,n} \rangle \\ d_n^j = \langle f, \psi_{j,n} \rangle \end{cases} \quad (9)$$

Les algorithmes sont rappelés dans les schémas de la figure 8. ; les rôles des filtres directs et duaux (analyse et synthèse) peuvent être inversés.

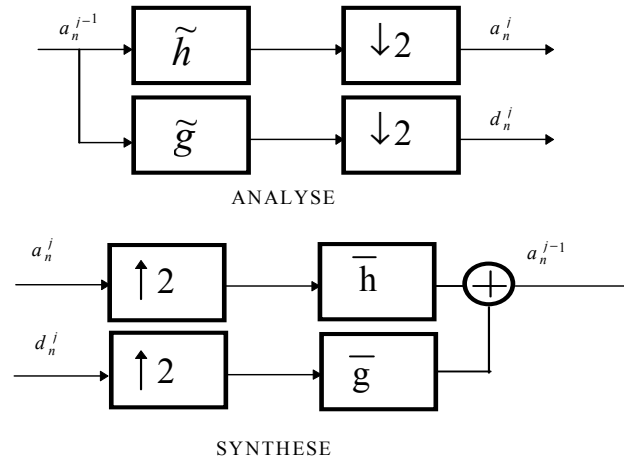


Figure 8. Algorithmes d'analyse et de synthèse

8.3 Propriétés des bases et des filtres associés

Nous allons suivre le même cheminement que pour l'analyse multirésolution classique, sans détailler les démonstrations qui seront pour la plupart décalquées sur les précédentes.

Pour commencer, les filtres h associés à chaque base de fonction d'échelle ont les mêmes propriétés que dans le cas orthonormal (voir l'équation 5.5) :

$$\begin{cases} \widehat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \widehat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{cases} \quad (10)$$

La relation d'orthogonalité des fonctions d'échelle prend une forme un peu différente :

$$\sum_n \widehat{\varphi}(\omega + 2n\pi) \cdot \widehat{\varphi}^*(\omega + 2n\pi) = 1 \quad (11)$$

Remarque 14 Cette relation permet de trouver une base duale si une fonction d'échelle est choisie. On peut, en effet, poser :

$$\sum_n |\widehat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2 = \widehat{q}(\omega) \quad (12)$$

La fonction obtenue est 2π -périodique et donc :

$$\frac{\sum_n |\widehat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2}{\widehat{q}(\omega)} = \sum_n \frac{|\widehat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2}{\widehat{q}(\omega + 2n\pi)} = 1 \quad (13)$$

Si on compare cette relation et 8.11 on constate que la fonction $\overline{\varphi}$ telle que :

$$\widehat{\overline{\varphi}}^*(\omega) = \frac{\widehat{\varphi}^*(\omega)}{\widehat{q}(\omega)} \quad (14)$$

satisfait l'équation 8.11 et donc constitue une base duale acceptable pour la fonction d'échelle φ choisie. Cette solution n'est pas unique et n'est pas toujours la plus simple (voir cas des splines) mais elle existe presque toujours.

On obtient aussi une relation entre les filtres associés aux deux bases duales

$$\widehat{h}(\omega) \widehat{h}^*(\omega) + \widehat{h}(\omega + \pi) \widehat{h}^*(\omega + \pi) = 2 \quad (15)$$

On peut vérifier aisément que les deux filtres obtenus sont de type passe-bas et qu'ils ont les mêmes propriétés en 0 et π que dans le cas des bases orthonormées :

$$\begin{aligned}\widehat{h}(0) &= \widehat{\bar{h}}(0) = \sqrt{2} \\ \widehat{h}(\pi) &= \widehat{\bar{h}}(\pi) = 0\end{aligned}\tag{16}$$

Remarque 15 Si on utilise la famille duale déterminée par la relation 8.14 on obtient le filtre associé suivant :

$$\widehat{\bar{h}}(\omega) = \widehat{h}(\omega) \frac{\widehat{q}^*(\omega)}{\widehat{q}^*(2\omega)}\tag{17}$$

Mais, répétons le, cette solution n'est pas la seule possible !

Pour les fonctions d'ondelette, on suit la même démarche et l'équation 5.30 reste vraie pour les deux bases duales :

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \widehat{\bar{\psi}}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{\bar{g}}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\bar{\varphi}}\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}\tag{18}$$

L'orthonormalité vis-à-vis de la translation n'est vérifiée qu'entre une base et sa duale et la propriété dans Fourier se traduit donc par :

$$\sum_n \widehat{\psi}(\omega + 2n\pi) \cdot \widehat{\bar{\psi}}^*(\omega + 2n\pi) = 1\tag{19}$$

qui conduit pour les filtres g associés à :

$$\widehat{g}(\omega) \widehat{\bar{g}}^*(\omega) + \widehat{g}(\omega + \pi) \widehat{\bar{g}}^*(\omega + \pi) = 2\tag{20}$$

La même méthode que pour la fonction d'échelle permet donc de construire la base d'ondelette duale quand on connaît la base initiale. Mais il reste à relier la base initiale à la base de fonction d'échelle choisie. Pour cela il faut exploiter l'orthogonalité de l'ondelette avec le dual de la fonction d'échelle (relation 8.2). Cette propriété traduite dans l'espace de Fourier s'écrit :

$$\sum_n \widehat{\psi}(\omega + 2n\pi) \cdot \widehat{\bar{\varphi}}^*(\omega + 2n\pi) = 0\tag{21}$$

D'où pour les filtres numériques associés :

$$\widehat{g}(\omega) \widehat{\bar{h}}^*(\omega) + \widehat{g}(\omega + \pi) \widehat{\bar{h}}^*(\omega + \pi) = 0\tag{22}$$

A partir de cette relation, on peut montrer (voir le raisonnement du chapitre 5 sur les propriétés) qu'une solution pour le choix du filtre g qui respecte la linéarité en

122 Ondelettes pour le signal numérique

phase est donnée par la relation :

$$\widehat{g}(\omega) = -e^{-i\omega} \widehat{h}^*(\omega + \pi) \quad (23)$$

Formule qui par transformée de Fourier inverse donne :

$$g[n] = (-1)^n \overline{h}[1 - n] \quad (24)$$

Et nous avons ainsi les principaux éléments qui permettent de construire une analyse sur bases biorthogonales. Un choix intéressant pour une telle base (comme il a déjà été indiqué) est la famille des B-splines. Ces fonctions présentent en effet les qualités de symétrie recherchées ainsi que la compacité du support propice à des mises en œuvre économiques. Nous proposons, dans le paragraphe suivant, les éléments permettant de construire ces bases.

8.4 Bases B-splines biorthogonales

La détermination de ces bases s'appuie sur un résultat plus général qui peut s'appliquer à tous les cas où des filtres linéaires en phase et à réponse impulsionnelle finie sont recherchés. Nous présenterons donc tout d'abord cette propriété puis nous en verrons l'application dans le cas des bases B-splines.

8.4.1 Recherche de solutions avec des filtres RIF symétriques

La construction des bases biorthogonales est menée dans ce cas à partir de la construction des filtres associés. En fait il suffit de définir les filtres h et \overline{h} pour avoir tous les éléments. Ces filtres doivent vérifier les propriétés 8.15 et 8.16 et nous leur imposerons de plus d'être à réponse impulsionnelle finie et à phase linéaire. Sans restreindre outre mesure la généralité, et pour alléger les écritures nous admettrons, dans un premier temps, que le déphasage apporté par ces filtres est nul. Dans ce cas le nombre de coefficients du filtre est impair ; nous donnerons directement les résultats concernant le cas où le nombre de coefficients est pair.

Dans ces conditions la fonction de transfert d'un tel filtre s'écrit :

$$H(z) = \dots + h[2]z^{-2} + h[1]z^{-1} + h[0] + h[1]z + h[2]z^2 + \dots \quad (25)$$

ce qui donne pour la réponse fréquentielle :

$$\widehat{h}(\omega) = \dots + h[2]e^{-2i\omega} + h[1]e^{-i\omega} + h[0] + h[1]e^{i\omega} + h[2]e^{2i\omega} + \dots \quad (26)$$

On peut donc exprimer cette réponse fréquentielle sous forme d'un polynôme en $\cos \omega$, de sorte qu'en introduisant pour être plus général un retard k entier pour la

réponse impulsionnelle :

$$\widehat{h}(\omega) = e^{-ik\omega} p(x) \text{ avec } x = \cos \omega \quad (27)$$

Le même travail peut être fait sur le filtre dual et la propriété 8.15 s'écrit :

$$p(x)\overline{p}(x) + p(-x)\overline{p}(-x) = 2 \quad (28)$$

La propriété 8.16 se traduit par :

$$p(-1) = \overline{p}(-1) = 0 \quad (29)$$

Une factorisation est donc toujours possible et :

$$p(x) = (1+x)^l r(x) \quad (30)$$

en reportant dans l'expression 8.28 et en posant $L = l + \bar{l}$ (\bar{l} est l'exposant entier correspondant à l dans $\overline{p}(x)$ le polynôme du filtre dual) on obtient :

$$(1+x)^L r(x)\overline{r}(x) + (1-x)^L r(-x)\overline{r}(-x) = 2 \quad (31)$$

on fait un dernier changement de variable en posant $u = \sin^2 \frac{\omega}{2}$ et en introduisant le polynôme $P(u) = 2^{L-1} r(x)\overline{r}(x)$, l'équation 8.31 s'écrit :

$$(1-u)^L P(u) + u^L P(1-u) = 1 \quad (32)$$

La résolution de cette équation a été menée à bien par I. Daubechies ([10]) et la solution générale est de la forme :

$$P(u) = \sum_{m=0}^{L-1} \binom{L-1+m}{m} u^m + u^L R(1-2u) \quad (33)$$

où $R(u)$ est un polynôme impair.⁸

Dans le cas où le nombre de coefficients du filtre est pair, le polynôme $p(x)$ prend la forme :

$$p(x) = e^{-i\frac{\omega}{2}} (1+x)^{l+\frac{1}{2}} r(x) \quad (34)$$

et le résultat final est le même avec $L = l + \bar{l} + 1$.

⁸ Coefficients du binôme : $\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

8.4.2 Cas des B-splines.

On choisit pour fonction d'échelle une génératrice de base B-spline d'ordre n (voir l'annexe sur les fonctions B-splines) :

$$\varphi(x) = \beta^{(n)}(x) \quad (35)$$

avec :

$$\begin{aligned} \text{si } n \text{ est impair : } & \hat{\beta}^{(n)}(\omega) = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^{n+1} \\ \text{si } n \text{ est pair : } & \hat{\beta}^{(n)}(\omega) = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^{n+1} e^{-i(n+1)\frac{\omega}{2}} \end{aligned} \quad (36)$$

ce qui permet de déduire aisément :

$$\begin{aligned} \text{si } n \text{ est impair : } & \hat{\beta}^{(n)}(\omega) = \hat{\beta}^{(n)}\left(\frac{\omega}{2}\right) \left(\cos \frac{\omega}{4}\right)^{n+1} \\ \text{si } n \text{ est pair : } & \hat{\beta}^{(n)}(\omega) = \hat{\beta}^{(n)}\left(\frac{\omega}{2}\right) \left(\cos \frac{\omega}{4}\right)^{n+1} e^{-i(n+1)\frac{\omega}{4}} \end{aligned} \quad (37)$$

avec la relation 5.5 on en déduit la forme de la réponse fréquentielle du filtre associé :

$$\begin{aligned} \text{si } n \text{ est impair : } & \hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{n+1} \\ \text{si } n \text{ est pair : } & \hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{n+1} e^{-i(n+1)\frac{\omega}{2}} \end{aligned} \quad (38)$$

Si n l'ordre des splines est impair, le filtre aura également un nombre de coefficients impair et inversement, si n est pair, le filtre aura un nombre de coefficients pair.

Si n est impair, le filtre h sera identifié à $p(x)$ (on prend $k = 0$) avec $2l = n + 1$ et $r(x) = 2^{-\frac{n}{2}}$.

Si n est pair, le filtre h devra être identifié à $e^{-ik\omega} p(x)$ avec $2l + 1 = 2k + 1 = n + 1$ et $r(x) = 2^{-\frac{n}{2}}$.

On peut choisir le cas le plus simple : $R(u) \equiv 0$. Ce qui donnera pour les filtres duaux les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \text{si } n \text{ est impair : } & \hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{2\bar{l}} \sum_{m=0}^{\bar{l} + \frac{n-1}{2}} \binom{\bar{l} + \frac{n-1}{2} + m}{m} \left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^m \\ \text{si } n \text{ est pair : } & \hat{h}(\omega) = \sqrt{2} e^{-i(n+1)\frac{\omega}{2}} \left(\cos \frac{\omega}{2}\right)^{2\bar{l}+1} \sum_{m=0}^{\bar{l} + \frac{n}{2}} \binom{\bar{l} + \frac{n}{2} + m}{m} \left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^m \end{aligned} \quad (39)$$

Chaque valeur choisie de \bar{l} (entier positif ou nul) donne un filtre dual, nous mettrons donc ainsi en évidence des familles de bases biorthogonales. Un fait remarquable et intéressant pour la mise en œuvre est que, par construction, les coefficients de ces filtres sont des fractions rationnelles.

On trouvera ci-après les coefficients des filtres associés aux fonctions d'échelle pour des bases splines linéaires et quadratiques pour $\bar{l} = 1$ et $\bar{l} = 2$.

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$h[n]$	0	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	0	0
$\bar{h}[n]$	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{8}$	0	0
"	$\frac{3\sqrt{2}}{128}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{64}$	$-\frac{1\sqrt{2}}{8}$	$\frac{19\sqrt{2}}{64}$	$\frac{45\sqrt{2}}{64}$	$\frac{19\sqrt{2}}{64}$	$-\frac{1\sqrt{2}}{8}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{64}$	$\frac{3\sqrt{2}}{128}$

Filtres associés aux fonctions d'échelle splines linéaires

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$h[n]$	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{3\sqrt{2}}{8}$	$\frac{3\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	0	0
$\bar{h}[n]$	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	0
"	$\frac{3\sqrt{2}}{64}$	$-\frac{9\sqrt{2}}{64}$	$-\frac{7\sqrt{2}}{64}$	$\frac{45\sqrt{2}}{64}$	$\frac{45\sqrt{2}}{64}$	$-\frac{7\sqrt{2}}{64}$	$-\frac{9\sqrt{2}}{64}$	$\frac{3\sqrt{2}}{64}$

Filtres associés aux fonctions d'échelle splines quadratiques

Les fonctions d'échelle duales associées seront déterminées par récurrence à partir des filtres duaux. On peut déterminer les filtres associés aux ondelettes g et \bar{g} à partir des filtres h et \bar{h} puis en déduire par récurrence les fonctions d'ondelettes.

8.4.3 Solution avec des filtres récursifs RII

Si on limite les contraintes concernant les filtres à la linéarité en phase, il est possible de construire de façon systématique des bases biorthogonales s'appuyant sur les fonctions splines en utilisant des filtres récursifs.

On peut pour ce faire utiliser les relations 8.14 et 8.17 :

$$\widehat{\varphi}^*(\omega) = \frac{\widehat{\varphi}^*(\omega)}{\widehat{q}(\omega)} \quad \text{et} \quad \widehat{h}(\omega) = \widehat{h}(\omega) \frac{\widehat{q}^*(\omega)}{\widehat{q}^*(2\omega)} \quad (40)$$

avec :

$$\sum_n |\widehat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2 = \widehat{q}(\omega) \quad (41)$$

On choisira pour fonction d'échelle $\varphi(x)$ une fonction de base spline d'ordre n :

$$\varphi(x) = \beta^{(n)}(x) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{si } n \text{ est impair : } \widehat{\beta}^{(n)}(\omega) = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^{n+1} \\ \text{si } n \text{ est pair : } \widehat{\beta}^{(n)}(\omega) = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^{n+1} e^{-i(n+1)\frac{\omega}{2}} \end{cases} \quad (42)$$

126 Ondelettes pour le signal numérique

On peut montrer que pour ces fonctions d'échelles,

$$\hat{q}(\omega) = \sum_n \left| \hat{\beta}^{(n)}(\omega + 2n\pi) \right|^2 = \hat{b}^{(2n+1)}(\omega) \quad (43)$$

où $b^{(2n+1)}[n]$ l'originale de $\hat{b}^{(2n+1)}(\omega)$ est la suite numérique constituée par l'échantillonnée de $\beta^{(2n+1)}(x)$ la spline d'ordre $2n + 1$. Le calcul pratique est fait en calculant l'échantillonnée de la fonction d'autocorrélation de $\beta^{(n)}(x)$ évaluée en n :

$$b^{(2n+1)}[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^{(n)}(x) \beta^{(n)}(x - n) dx \quad (44)$$

Cette suite est de longueur finie égale à $2n + 1$ car les fonctions splines sont compactes et elle présente une symétrie analogue à celle des splines, donc le filtre numérique correspondant est de type RIF à phase linéaire. Il en est de même de :

$$\hat{q}(2\omega) = \hat{b}^{(2n+1)}(2\omega) \quad (45)$$

dont la longueur est $2n + 1$. Le rapport $\frac{\hat{q}^*(\omega)}{\hat{q}^*(2\omega)}$ est donc une fraction rationnelle de polynômes en $z = e^{i\omega}$ au sens large (avec des exposants positifs et négatifs). Quant au filtre $h[n]$ associé à la fonction d'échelle il sera, comme précédemment, de la forme :

$$\begin{aligned} \text{si } n \text{ est impair : } & \hat{h}(\omega) = \sqrt{2}(\cos \frac{\omega}{2})^{n+1} \\ \text{si } n \text{ est pair : } & \hat{h}(\omega) = \sqrt{2}(\cos \frac{\omega}{2})^{n+1} e^{-i(n+1)\frac{\omega}{2}} \end{aligned} \quad (46)$$

donc sous la forme d'un polynôme en z . Le filtre $h[n]$ sera donc linéaire en phase et RIF, tandis que le filtre $\bar{h}[n]$ sera lui aussi linéaire en phase mais RII et sous une forme permettant sa mise en œuvre récursive d'ordre $2n$ (mais avec un indice sur deux manquant !). Cette mise en œuvre devra cependant être précédée de la séparation des parties causales et des parties anticausales. Cette technique, désormais classique, a été présentée par R. Deriche [12] et ne sera pas rappelée ici. On peut seulement noter que l'algorithme qui, à l'analyse, demande une décimation de rapport deux trouvera une résonance naturelle avec le terme récursif des filtres qui ne comporte qu'un terme sur deux. Une mise en œuvre bien conçue devrait pouvoir utiliser avec profit cette propriété.

Voyons les exemples des splines linéaires et quadratiques. Les principaux résultats de base sont démontrés dans l'annexe consacrée aux B-splines ; on se contente de les rappeler :

$$\begin{aligned} \text{Sp. lin.} & \quad \hat{b}^{(3)}[\omega] = \frac{1}{6}e^{i\omega} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}e^{-i\omega} \\ \text{Sp. qua.} & \quad \hat{b}^{(5)}[\omega] = \frac{1}{120}e^{i2\omega} + \frac{13}{60}e^{i\omega} + \frac{11}{20} + \frac{13}{60}e^{-i\omega} + \frac{1}{120}e^{-i2\omega} \end{aligned} \quad (47)$$

et :

$$\frac{\hat{h}(\omega)}{\sqrt{2}} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{i\omega} + \frac{1}{4}e^{-i\omega} & \text{pour les splines linéaires} \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8}e^{-i\omega} + \frac{3}{8}e^{-i2\omega} + \frac{1}{8}e^{-i3\omega} & \text{pour les splines quadratiques} \end{cases} \quad (48)$$

Ce qui permet de déduire les filtres associés aux bases de fonctions d'échelle et à leurs bases duales.

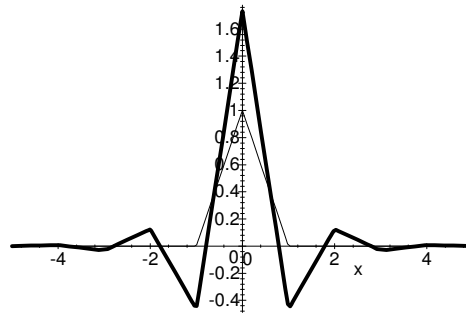


Figure 8. Fonction d'échelle et sa duale

- Spline linéaire : $n = 1$

$$H(z) = \sqrt{2}\left(\frac{z}{4} + \frac{1}{2} + \frac{z^{-1}}{4}\right) \quad (49)$$

$$\overline{H}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{z}{4} + \frac{1}{2} + \frac{z^{-1}}{4}\right) \frac{\frac{z}{6} + \frac{2}{3} + \frac{z^{-1}}{6}}{\frac{z^2}{6} + \frac{2}{3} + \frac{z^{-2}}{6}} \quad (50)$$

- Spline quadratique : $n = 2$

$$H(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2} + \frac{1}{8}z^{-3}\right) \quad (51)$$

$$\overline{H}(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2} + \frac{1}{8}z^{-3}\right) \frac{\frac{z^{-2}}{120} + \frac{13}{60}z^{-1} + \frac{11}{20} + \frac{13}{60}z + \frac{z^2}{120}}{\frac{z^{-4}}{120} + \frac{13}{60}z^{-2} + \frac{11}{20} + \frac{13}{60}z^2 + \frac{z^4}{120}} \quad (52)$$

128 Ondelettes pour le signal numérique

Des filtres associés aux fonctions d'ondelettes peuvent être déterminés suivant la règle générale déjà énoncée :

$$\hat{g}(\omega) = -e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi) \quad (53)$$

Règle qui s'écrit également :

$$G(z) = -z^{-1} \overline{H}\left(-\frac{1}{z}\right) \quad (54)$$

D'où par exemple pour les splines linéaires :

$$G(z) = \sqrt{2} \left(\frac{z^{-2}}{4} - \frac{z^{-1}}{2} + \frac{1}{4} \right) \frac{-\frac{z}{6} + \frac{2}{3} - \frac{z^{-1}}{6}}{\frac{z^2}{6} + \frac{2}{3} + \frac{z^{-2}}{6}} \quad (55)$$

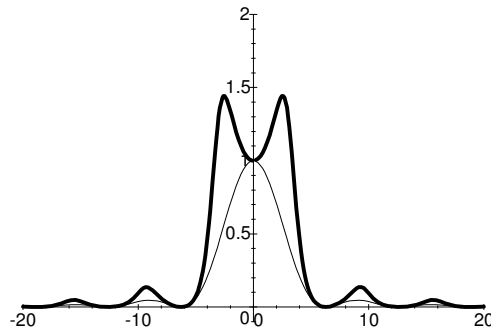


Figure 8. Fonctions d'échelle dans Fourier

On peut montrer facilement que la fonction d'échelle duale est une combinaison linéaire de fonctions splines du même ordre que la fonction directe. En effet $\frac{1}{\hat{q}(\omega)}$ est une fonction 2π -périodique, il existe donc une suite numérique $x[n]$ telle que :

$$\frac{1}{\hat{q}(\omega)} = \sum_n x[n] e^{-in\omega} \quad (56)$$

avec :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n\omega}{\hat{q}(\omega)} d\omega \quad (57)$$

(car $\frac{1}{\hat{q}(\omega)}$ est par construction une fonction paire) et donc :

$$\widehat{\varphi}^*(\omega) = \sum_n x[n] \widehat{\varphi}^*(\omega) e^{-in\omega} \quad (58)$$

et en revenant aux originaux :

$$\overline{\varphi}(t) = \sum_n x[n] \varphi(t - n) \quad (59)$$

L'exemple des fonctions d'échelle de bases biorthogonales construites suivant cette méthode pour une spline linéaire est illustré par les graphes 8. et 8. où la fonction duale est en trait gras. L'occupation spectrale de la fonction d'échelle duale est très voisine de celle de la fonction directe (si on tient compte de la différence d'amplitude).

La régularité de la fonction duale, qui est un paramètre important pour les applications en compression d'images, est la même pour la famille duale que pour la famille directe. Ceci est loin d'être le cas pour les bases biorthogonales splines utilisant des filtres RIF où la régularité est nettement moins bonne pour les bases duales si on limite l'ordre des filtres.

Ondelettes pour le signal numérique
Frédéric Truchetet
Editions Hermes,
Paris, 1998

Ondelettes pour le signal numérique
Frédéric Truchetet
Editions Hermes,
Paris, 1998

Chapitre 9

Trames d'ondelettes

Les familles d'ondelettes utilisées dans les algorithmes de transformée discrète ne forment pas forcément des bases, les ondelettes admissibles ne constituent d'ailleurs des bases que dans des cas tout à fait rarissimes. Des algorithmes d'analyse et de reconstruction utilisables pour ces familles d'ondelettes ont été proposés car, pour des applications bien précises, on peut vouloir imposer comme ondelette une famille de fonctions donnée. Un ensemble relativement large de fonctions d'ondelette a cependant été identifié et ses propriétés analysées, il s'agit des trames[31]. Les transformées en trames d'ondelettes (en anglais, le terme consacré est **frames**) se situent parmi les transformées redondantes et discrètes. Rappelons que d'une façon générale, une transformée en ondelettes discrète d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ est définie par l'expression 2.17 :

$$T^{ond} f(m, n) = a_o^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi(a_o^{-m} t - n b_o) dt \quad (1)$$

où m l'échelle et n la translation sont des nombres entiers. $\psi(t)$ est la mère de la famille des dilatées-translatées qui constituent les ondelettes. Il suffit pour que cette transformée soit inversible que la famille d'ondelettes choisie soit admissible (3.3) :

$$\int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{|\omega|} = \int_{-\infty}^0 |\hat{\psi}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{|\omega|} < \infty \quad (2)$$

Cette famille de fonctions n'a aucune raison d'être une base (au sens classique) pour $L^2(\mathbb{R})$ et, en règle générale, la condition d'indépendance linéaire n'est pas vérifiée. L'existence et l'unicité de la décomposition sont cependant assurées par construction ($\forall f$) de même que l'existence de la reconstruction. On peut s'intéresser à la robustesse de la reconstruction et à la redondance de l'analyse ; Nous verrons comment la notion de trames et la recherche des bornes de ces trames permet une estimation de cette redondance et assure la robustesse de la reconstruction.

9.1 Bornes de la trame d'ondelettes

On dira qu'une famille d'ondelettes forme une trame, si il existe deux réels A et B tels que $\forall f$:

- **Relation d'encadrement de la trame** (généralisation du théorème de Parseval)

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (3)$$

A et B sont les bornes de la trame et $0 < A \leq B < \infty$.

Si $A = B$, la trame est dite serrée (tight frame) et A est le taux de redondance ou de sur-échantillonnage.

Si $A = B = 1$ et si ψ est normée, alors la famille d'ondelettes forme une base orthonormée et la relation 9.3 devient simplement le théorème de Parseval (9.4) :

$$\sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 = \|f\|^2 \quad (4)$$

Remarque 16 *En fait la notion de trame est beaucoup plus générale et dépasse largement le cas des ondelettes ; nous n'en présentons ici que les aspects nécessaires à la compréhension des algorithmes.*

La stabilité de la reconstruction pour la transformée en ondelette impose que la famille forme une trame. On peut montrer qu'une trame serrée assure une redondance minimum et une reconstruction robuste. Le calcul des bornes d'une trame est un problème difficile, il existe cependant une méthode permettant d'estimer un majorant de B et un minorant de A (voir [10]). Malheureusement, cet encadrement peut être très large, il ne garantit souvent que l'existence des bornes.

9.2 Reconstruction dans le cas d'une trame d'ondelettes

La reconstruction de la fonction après son analyse et à partir des coefficients de cette analyse est théoriquement toujours possible et stable si on est en présence d'une trame. La difficulté est de donner un algorithme pratique.

La transformée directe est notée de façon simplifiée :

$$(Tf)_{m,n} = \langle f, \psi_{m,n} \rangle \quad (5)$$

c'est un opérateur linéaire de $L^2(\mathbb{R})$ dans $l^2(\mathbb{Z}^2)$. La propriété 9.3 implique qu'il est borné :

$$\|Tf\|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (6)$$

l'opérateur adjoint de T existe donc, on le note T_{ad} et il peut être calculé par :

$$\langle T_{ad}c, f \rangle = \langle c, Tf \rangle = \sum_{m,n} c_{m,n} \langle f, \psi_{m,n} \rangle^* \quad (7)$$

$$= \sum_{m,n} c_{m,n} \langle \psi_{m,n}, f \rangle$$

donc :

$$T_{ad}c = \sum_{m,n} c_{m,n} \psi_{m,n} \quad (8)$$

ce qui implique :

$$T_{ad}Tf = \sum_{m,n} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n} \quad (9)$$

Si on reporte ce résultat dans 9.3 on obtient les inégalités suivantes :

$$AI \leq T_{ad}T \leq BI \quad (10)$$

si I est l'opérateur identité. On en conclut que $T_{ad}T$ est inversible et la famille de fonctions construites par :

$$\bar{\psi}_{m,n} = (T_{ad}T)^{-1} \psi_{m,n} \quad (11)$$

constitue une trame duale d'ondelettes qui a pour bornes B^{-1} et A^{-1} .

$$B^{-1} \|f\|^2 \leq \sum_{m,n} |\langle f, \bar{\psi}_{m,n} \rangle|^2 \leq A^{-1} \|f\|^2 \quad (12)$$

La reconstruction de la fonction est alors menée par :

$$f = (T_{ad}T)^{-1} T_{ad}Tf \quad (13)$$

soit :

$$\begin{aligned} f &= (T_{ad}T)^{-1} \sum_{m,n} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n} \\ &= \sum_{m,n} \langle f, \psi_{m,n} \rangle (T_{ad}T)^{-1} \psi_{m,n} \end{aligned} \quad (9.14)$$

134 Ondelettes pour le signal numérique

et donc :

$$f = \sum_{m,n} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \bar{\psi}_{m,n} \quad (15)$$

Il est aisé de constater que les rôles des deux familles d'ondelettes peuvent être inversés :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{m,n} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \bar{\psi}_{m,n} \\ f &= \sum_{m,n} \langle f, \bar{\psi}_{m,n} \rangle \psi_{m,n} \end{aligned} \quad (9.16)$$

Le problème est, bien entendu, le calcul de la fonction duale qui nécessite la connaissance des bornes de la trame. Car on peut montrer que :

$$\bar{\psi}_{m,n} = \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^{\infty} \left(I - \frac{2}{A+B} T_{ad} T \right)^k \psi_{m,n} \quad (17)$$

et :

$$T_{ad} T \psi_{m,n} = \sum_{l,p} \langle \psi_{m,n}, \psi_{l,p} \rangle \psi_{l,p} \quad (18)$$

Chapitre 10

Exemple de trame d'ondelettes

Il existe une infinité d'exemples de trames d'ondelettes, et les ondelettes historiques de Morlet ou le chapeau mexicain donnent naissance à des trames. Mallat a donné un exemple intéressant ([28]) de trame d'ondelettes avec un algorithme de reconstruction très voisin des algorithmes utilisés dans le cas des analyses multirésolutions. Nous avons voulu présenter un exemple plus original conduisant à une application intéressante en traitement des images : la détection optimale des contours flous dans une image bruitée.

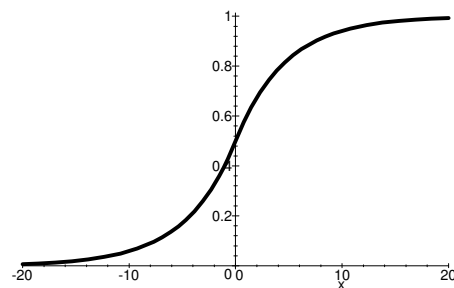


Figure 10. Modèle de contour

10.1 Détection de contour multiéchelle

Nous proposons donc dans ce chapitre un exemple de décomposition en trame d'ondelettes adaptées à la détection des contours flous dans une image bruitée.

Dans cet exemple, la fonction d'ondelette est choisie en fonction de ses propriétés vis-à-vis de la détection des contours sur des images bruitées. La démarche suivie s'inspire de celle inaugurée par J. Canny [6] qui propose, pour déterminer un filtre adapté à la détection des contours, d'optimiser trois critères. Cette optimisation garantit des performances optimales en ce qui concerne le rapport signal sur bruit de l'image contour, la localisation du contour et la suppression des contours multiples. Le contour théorique choisi par Canny pour son étude était un échelon abrupt, Bourenanne [5] suivant d'autres auteurs a proposé un modèle plus réaliste mettant en évidence un temps de montée du contour. La fonction choisie est illustrée en 10. qui correspond à l'équation 10.1 avec $s = 1$. Le facteur $1/s$ joue le rôle de facteur d'échelle.

$$C(x) = \begin{cases} \frac{e^{sx}}{2} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{e^{-sx}}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

En suivant la démarche de Canny, on montre aisément que le filtre de détection optimum correspondant doit avoir pour réponse impulsionnelle la fonction impaire 10.2 illustrée par la courbe 10. :

$$f(x) = \begin{cases} k s x e^{-msx} + e^{-msx} - e^{-sx} & \text{si } x > 0 \\ k s x e^{msx} - e^{msx} + e^{sx} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

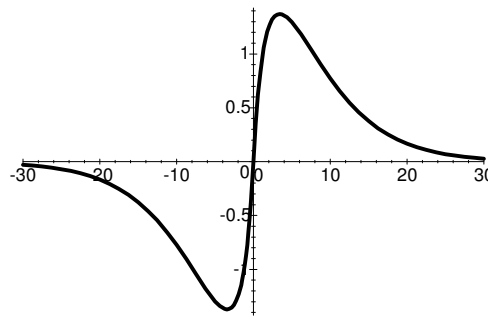


Figure 10. Réponse du détecteur généralisé

Compte tenu de l'invariance de la forme du détecteur à travers les échelles, il est tentant d'essayer d'utiliser cette fonction pour définir une famille d'ondelettes adaptées à la détection des contours. La décomposition d'un signal sur cette famille de fonctions doit conduire à une détection multiéchelle des contours permettant de détecter des variations plus ou moins abruptes de luminance dans des conditions optimales vis-à-vis du bruit présent dans l'image initiale.

Il est intéressant de vérifier si la famille d'ondelettes obtenue constitue une trame et si c'est le cas de chercher un réglage des paramètres conduisant à la trame la plus serrée possible et donc fournissant l'analyse la moins redondante possible.

L'ondelette après normalisation sera définie par :

$$\psi(x) = \begin{cases} N\sqrt{s}(ksxe^{-msx} + e^{-msx} - e^{-sx}) & \text{si } x > 0 \\ N\sqrt{s}(ksxe^{msx} - e^{msx} + e^{sx}) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

les coefficients s et m étant des paramètres constants susceptibles d'être ajustés, N est le facteur de normalisation de l'ondelette.

L'estimation de la transformée en ondelettes d'une fonction quelconque sera faite par l'approximation numérique de l'intégrale 2.17 :

$$\langle f, \psi_{p,q} \rangle = a_o^{-\frac{p}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi(a_o^{-p}t - qb_o) dt \quad (4)$$

Le calcul des bornes de la trame, si elles existent, est mené à l'aide des expressions proposées par I. Daubechies [10], qui donnent un majorant et un minorant des bornes inférieure et supérieure. Nous rappelons ci-après les expressions de ces bornes.

$$A = \frac{2\pi}{b_o} \left\{ \inf_{1 \leq |\omega| \leq u} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{\psi}(u^p \omega) \right|^2 - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_o}k\right) \beta\left(-\frac{2\pi}{b_o}k\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (5)$$

$$B = \frac{2\pi}{b_o} \left\{ \sup_{1 \leq |\omega| \leq u} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{\psi}(u^p \omega) \right|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_o}k\right) \beta\left(-\frac{2\pi}{b_o}k\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (6)$$

$$\text{avec } \beta(x) = \sup_{\omega} \sum_p \left| \widehat{\psi}(a_o^p \omega) \right| \left| \widehat{\psi}(a_o^p \omega + x) \right| \quad (7)$$

138 Ondelettes pour le signal numérique

s	A	B	$\frac{B}{A}$
2	15.52	16.16	1.04
4	6.72	9.12	1.36
8	0.54	7.38	13.55

Tableau 10. Bornes de la trame

Le calcul numérique mené avec $k = 0.564$ et $m = 0.215$ (valeurs qui optimisent les critères de Canny) montre que les bornes sont finies, donc la famille constitue bien une trame. Le tableau 10. donne quelques résultats obtenus pour différentes valeurs de s dans le cas dyadique ($a_o = 2$ et $b_o = 1$).

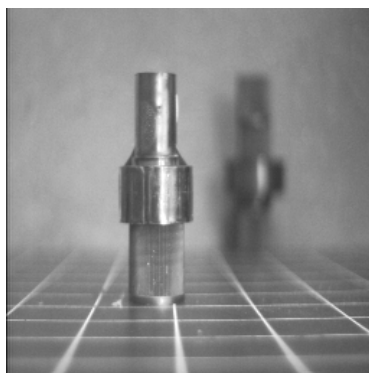


Figure 10. Image originale présentant des contours plus ou moins nets

On constate que la construction d'une base orthonormée est impossible, il semble que l'on doive se contenter d'une trame presque serrée.

Comme c'est indiqué plus haut, pour le calcul pratique de la décomposition d'un signal sur cette trame d'ondelettes, on effectuera un échantillonnage numérique de l'équation 10.4 qui est équivalente à un produit de convolution, l'ondelette échantillonnée étant considérée comme la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique. Pour l'extension en deux dimensions un filtrage séparable sera utilisé : un filtre de régularisation ayant comme réponse impulsionnelle l'intégrale de la fonction d'ondelette est appliqué suivant les lignes de l'image tandis que le filtre ondelette est appliqué suivant les colonnes. Le même processus est répété en permutant lignes et colonnes et les modules des deux images obtenues sont additionnés pour obtenir les images des coefficients d'ondelettes c'est à dire les contours. Pour les détails on pourra se référer à [40]. Nous donnons simplement dans les images de la figure 10. et du tableau 10. un exemple de détection de contours multiéchelle réalisée suivant cet algorithme sur une image présentant des contours de netteté variable. On constate

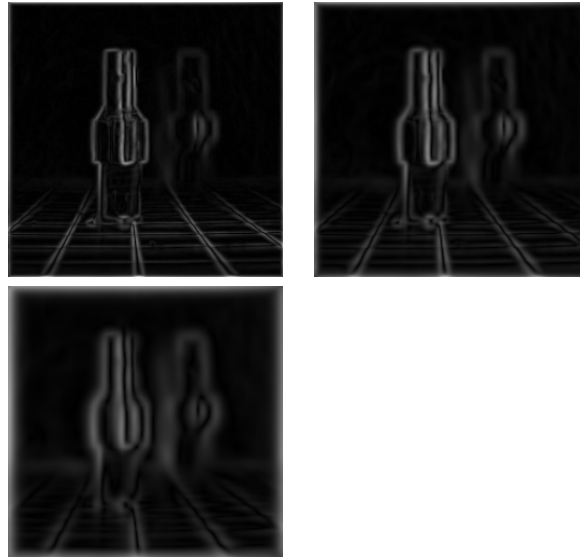


Tableau 10. Images du module de la transformée en ondelette pour trois échelles dyadiques successives

aisément la complémentarité des détections, les contours nets (objet au premier plan) sont détectés avec précision sur l'échelle la plus fine, tandis que les contours flous ne peuvent être observés que sur l'échelle la plus grossière (contours de l'objet le plus lointain). Le problème qui reste à résoudre est la fusion de ces informations. C'est un problème qui se pose fréquemment en analyse multirésolution ; il existe un certain nombre de méthodes (classification géométrique, réseaux de neurones, logique floue, etc.) et un certain nombre de stratégies (coarse to fine ou fine to coarse, analyse mixte,...) permettant de proposer des solutions plus ou moins performantes. Il faut cependant dire que ce sujet est encore largement du domaine de la recherche et, en tout, hors du propos de ce cours.

Ondelettes pour le signal numérique
Frédéric Truchetet
Editions Hermes,
Paris, 1998

Ondelettes pour le signal numérique
Frédéric Truchetet
Editions Hermes,
Paris, 1998

Annexe A

Fonctions B-splines et bases d'ondelettes

Les B-splines sont construites par autoconvolution de la fonction boîte (box) notée $I(t)$:

$$I(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

la B-spline d'ordre n sera :

$$\begin{aligned} \text{si } n \text{ est impair : } & \beta^{(n)}(t) = n + \underbrace{1I(t) * I(t) * \dots * I(t)}_{n-1 \text{ fois}} \\ \text{si } n \text{ est pair : } & \beta^{(n)}(t) = n + \underbrace{1I(t - \frac{1}{2}) * I(t - \frac{1}{2}) * \dots * I(t - \frac{1}{2})}_{n-1 \text{ fois}} \end{aligned} \quad (2)$$

Remarque 17 Pour $n = 0$ on retrouve la base de Haar qui est la seule de la série qui soit orthonormée.

Les transformées de Fourier sont évaluées aisément grâce au théorème de Plancherel :

$$\begin{aligned} \text{si } n \text{ est impair : } & \hat{\beta}^{(n)}(\omega) = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^{n+1} \\ \text{si } n \text{ est pair : } & \hat{\beta}^{(n)}(\omega) = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^{n+1} e^{-i(n+1)\frac{\omega}{2}} \end{aligned} \quad (3)$$

Les deux graphes des figures 10. et 10. présentent les B-splines linéaires et quadratiques, dont les équations sont obtenues à partir des relations précédentes :

$$\beta^{(1)}(t) = \begin{cases} t + 1 & \text{si } -1 < t \leq 0 \\ -t + 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

$$\beta^{(2)}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ -\frac{3}{2} + 3t - t^2 & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ \frac{9}{2} - 3t + \frac{t^2}{2} & \text{si } 2 < t \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5)$$

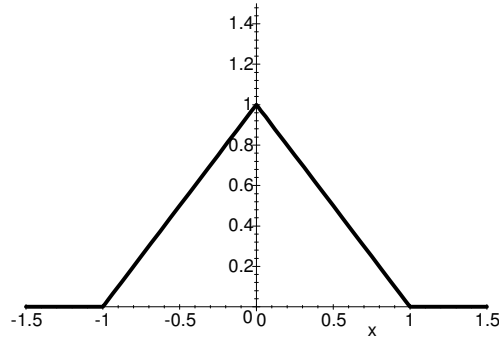


Figure 10. Spline linéaire

Pour construire les bases orthonormées nous avons besoin des splines discrètes d'ordre $2n+1$, soit pour les splines linéaires et quadratiques de $b^{(3)}[k]$ et de $b^{(5)}[k]$. On peut calculer ces suites numériques en remarquant que $b^{(2n+1)}[k]$ est l'échantillonnée de la fonction d'autocorrélation de $\beta^{(n)}(t)$ (on pourra démontrer cette propriété en utilisant un argument identique à celui utilisé pour démontrer la relation 5.14) :

$$b^{(2n+1)}[k] = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^{(n)}(t) \beta^{(n)}(t+k) dt \quad (6)$$

Ce qui donne (l'élément souligné correspond à $k=0$) :

$$b^{(3)}[k] = \left\{ \dots, 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{\underline{3}}, \frac{1}{6}, 0, \dots \right\} \quad (7)$$

$$b^{(5)}[k] = \left\{ \dots, 0, \frac{1}{120}, \frac{13}{60}, \frac{11}{\underline{20}}, \frac{13}{60}, \frac{1}{120}, 0, \dots \right\} \quad (8)$$

On détermine les réponses fréquentielles :

$$\widehat{b}^{(3)}(\omega) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \omega \quad (9)$$

$$\widehat{b}^{(5)}(\omega) = \frac{11}{20} + \frac{13}{30} \cos \omega + \frac{1}{60} \cos 2\omega \quad (10)$$

D'où les fonctions d'échelle :

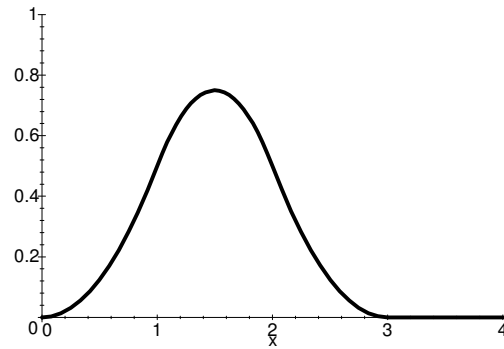


Figure 10. Spline quadratique

- Spline linéaire :

$$\hat{\varphi}(\omega) = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \omega}} \quad (11)$$

Les premiers coefficients de la décomposition de

$$\varphi(x) = \sum_k q[k] \beta^{(1)}(x - k) \quad (12)$$

sont :

k	0	1	2	3	4
$q[k]$	1.2917	-0.17466	0.03521	-0.00787	0.00185

- D'où le graphe de la fonction d'échelle sur la figure 10..
- Spline quadratique :

$$\hat{\varphi}(\omega) = \left(\frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{20} + \frac{13}{30} \cos \omega + \frac{1}{60} \cos 2\omega}} e^{-i3\frac{\omega}{2}} \quad (13)$$

Les premiers coefficients de la décomposition de

$$\varphi(x) = \sum_k q[k] \beta^{(2)}(x - k) \quad (14)$$

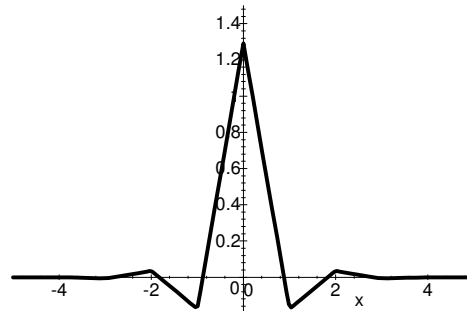


Figure 10. Fonction d'échelle B-spline linéaire

sont :

k	0	1	2	3	4	5
$q[k]$	1.5855	-0.38331	0.12241	-0.043756	0.01647	-0.00638

- D'où le graphe de la fonction d'échelle sur la figure 10..

On trouvera sur la figure 10. les graphes des transformées de Fourier des fonctions d'échelle obtenues (le trait fin correspond à la spline linéaire et le trait gras à la spline quadratique) :

Ces courbes sont très voisines et l'évolution de l'allure de ces courbes, quand l'ordre des splines augmente, est significative ; si l'ordre tend vers l'infini, la fonction tend vers un filtre passe-bas parfait de bande égale à π .

La détermination des filtres numériques associés (voir paragraphe 6.3) passe par la détermination de la fonction :

$$\hat{m}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\hat{\beta}^{(n)}(\omega)}{\hat{\beta}^{(n)}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (15)$$

celle-ci peut être faite directement ou en utilisant la décomposition des splines sur la résolution inférieure. Nous donnons, ci-après, directement les résultats obtenus :

$$\hat{m}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\omega}{2} & \text{pour les splines linéaires} \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} e^{-i\frac{\omega}{2}} + \frac{3}{8} e^{-i2\frac{\omega}{2}} + \frac{1}{8} e^{-i3\frac{\omega}{2}} & \text{pour les splines quadratiques} \end{cases} \quad (16)$$

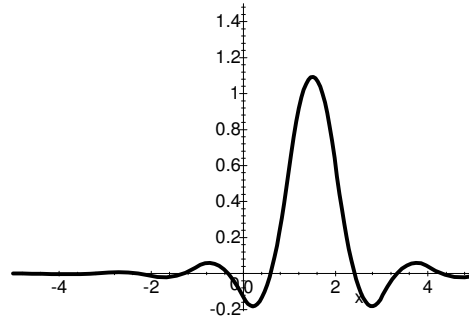


Figure 10. Fonction d'échelle B-spline quadratique

Ce qui donne pour les filtres :

$$\text{Spline linéaire : } \hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \omega \right) \sqrt{\frac{2 + \cos \omega}{2 + \cos 2\omega}} \quad (17)$$

$$\text{S. quad. : } \hat{h}(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{8} (1 + 3e^{-i\omega} + 3e^{-2i\omega} + e^{-3i\omega}) \sqrt{\frac{33 + 26 \cos \omega + \cos 2\omega}{33 + 26 \cos 2\omega + \cos 4\omega}} \quad (18)$$

Cette dernière réponse fréquentielle est bien 2π - *périodique* et correspond à un original réel ($\hat{h}(-\omega) = \hat{h}^*(\omega)$); le filtre obtenu est évidemment linéaire en phase comme le montre cette autre forme de la même expression :

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\cos \frac{3\omega}{2} + 3 \cos \frac{\omega}{2} \right) \sqrt{\frac{33 + 26 \cos \omega + \cos 2\omega}{33 + 26 \cos 2\omega + \cos 4\omega}} e^{-i3\frac{\omega}{2}} \quad (19)$$

D'où les réponses impulsionnelles :

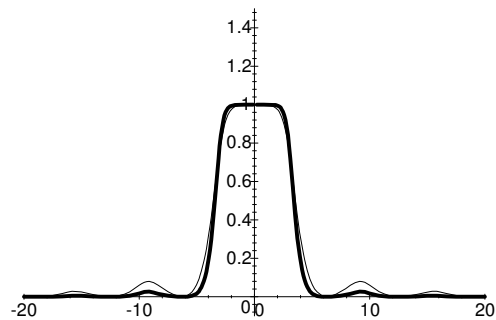


Figure 10. Fonctions d'échelle B-spline dans Fourier

$ k $	$h[k]$ (linéaire)	k	$h[k]$ (quadratique)
0	0.81765	2	0.68037
1	0.3973	3	0.13796
2	-0.06910	4	-0.12484
3	-0.05195	5	-0.02075
4	0.01697	6	0.04198
5	0.00999	7	0.00424
6	-0.00388	8	-0.01511
7	-0.00202	9	-0.00112
8	0.00092	10	0.00571

Le filtre correspondant aux splines quadratique est symétrique par rapport à $\frac{3}{2}$ de sorte que $h[2] = h[1]$, $h[3] = h[0]$, etc.

Les calculs sont de plus en plus lourds quand le degré des splines augmente mais leur complexité n'augmente pas. Nous nous contenterons de donner ci-après les principaux coefficients du filtre h pour les splines cubiques qui correspondent à un cas intéressant dans la pratique de l'analyse des images. On nomme parfois la base d'ondelettes associée, la base de Battle-Lemarié. Son principal inconvénient est la longueur (en théorie infinie, en pratique > 22) de la réponse impulsionnelle des filtres. La mise en œuvre pourra être, dans de nombreux cas, menée avec profit dans l'espace de Fourier.

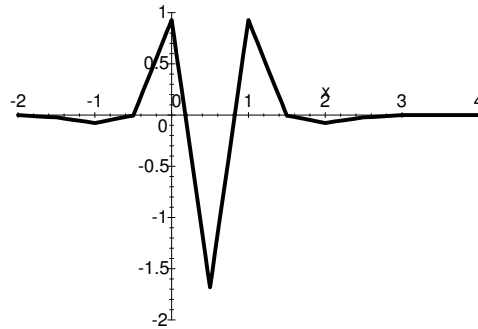


Figure 10. Ondelette (spline linéaire)

$ k $	$h[k]$ (cubique)	k	$h[k]$ (cubique)
0	0.76612	9	0.00820
1	0.43392	10	-0.00435
2	-0.05020	11	-0.00388
3	-0.11004	12	0.00219
4	0.03208	13	0.00188
5	0.04207	14	-0.00110
6	-0.01718	15	-0.00093
7	-0.01798	16	0.00056
8	0.00869	17	0.00046

Encore une fois, la réponse impulsionnelle est en réalité de longueur infinie et le nombre de coefficients à retenir est fonction de la précision recherchée pour l'analyse. On pourra vérifier que les filtres obtenus sont bien normalisés : $\sum_n |h[n]|^2 = 1$.

Il reste à déterminer la fonction d'ondelette, pour cela nous utilisons la relation :

$$\hat{\psi}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega/2} \hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (20)$$

Si on remplace les fonctions par leurs expressions, on obtient les relations listées ci-après.

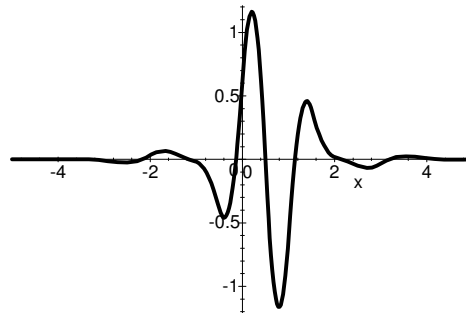


Figure 10. Ondelette (spline quadratique)

- Spline linéaire :

$$\hat{\psi}(\omega) = -\frac{1 - \cos \frac{\omega}{2}}{2\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \frac{\omega}{2}}} \sqrt{\frac{2 - \cos \frac{\omega}{2}}{2 + \cos \omega}} e^{-i\frac{\omega}{2}} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{4}}{\frac{\omega}{4}}\right)^2 \quad (21)$$

Cette relation se met sous la forme :

$$\hat{\psi}(\omega) = \hat{q}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\beta}^{(1)}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (22)$$

La fonction $\hat{q}(\omega)$ est 2π - *périodique* par construction ce qui nous permet d'exprimer $\psi(t)$ comme une combinaison linéaire de B-splines :

$$\psi(t) = \sum_k 2q[k] \beta^{(1)}(2t - k) \quad (23)$$

Comme pour les fonctions d'échelle, les coefficients de la suite numérique $q[k]$ sont calculés numériquement par transformée de Fourier inverse. Les premiers coefficients sont donnés dans le tableau suivant et le graphe de la fonction dans la figure 10..

k	1	2	3	4	5
$q[k]$	-.84097	-0.46358	-0.00248	-0.03872	0.00982

- Spline quadratique :

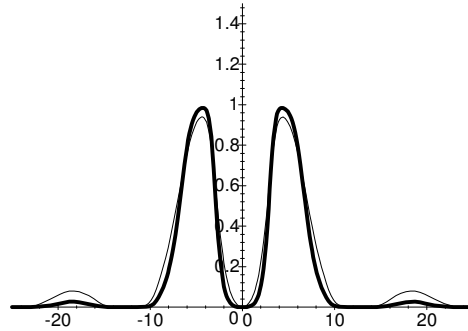


Figure 10. Ondelettes B-spline dans Fourier

On reprend les mêmes notations.

$$\hat{q}\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\frac{i(3\sin\frac{\omega}{4} - \sin 3\frac{\omega}{4})}{4\sqrt{\frac{11}{20} + \frac{13}{30}\cos\frac{\omega}{2} + \frac{1}{60}\cos\omega}} \sqrt{\frac{33 - 26\cos\frac{\omega}{2} + \cos\omega}{33 + 26\cos\omega + \cos 2\omega}} e^{i\frac{\omega}{4}} \quad (24)$$

et, bien entendu :

$$\hat{\beta}^{(2)}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \left(\frac{\sin\frac{\omega}{4}}{\frac{\omega}{4}}\right)^3 e^{-i3\frac{\omega}{4}} \quad (25)$$

Les premiers coefficients de la décomposition en combinaison de splines sont les suivants :

k	0	1	2	3	4	5
$2q[k]$	-1.9633	0.73284	0.04723	-0.00898	-0.09186	0.02480

Sachant que la fonction est antisymétrique par rapport à $\frac{1}{2}$: $q[0] = -q[-1]$, $q[1] = -q[-2]$, etc., et avec la relation :

$$\psi(t) = \sum_k 2q[k]\beta^{(2)}(2t - k) \quad (26)$$

on obtient le graphe de la figure 10..

Les transformées de Fourier des fonctions d'ondelettes sont données dans le graphe de la figure 10. (en gras la courbe correspondant aux splines quadratiques).

On pourra déduire les coefficients des filtres numériques associés aux ondelettes de ceux des filtres $h[k]$ en suivant la méthode habituelle.

Ondelettes pour le signal numérique
Frédéric Truchetet
Editions Hermes,
Paris, 1998

Ondelettes pour le signal numérique
Frédéric Truchetet
Editions Hermes,
Paris, 1998

Bibliographie

- [1] P. Abry, A. Aldroubi, «Designing Multiresolution Analysis-type Wavelets and their Fast Algorithms», The Journal of Fourier Analysis and Applications, vol.2, n°2, pp.135-159, 1995.
- [2] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, I. Daubechies, «Image coding using wavelet transform», IEEE trans. on Image Processing, vol.1, N°2, pp.205-216, april 1992.
- [3] M. Barlaud, T. Gaidon, P. Mathieu, J.C. Fauveau, «Edge detection using recursive biorthogonal wavelet transform», IEEE, vol. CH2977, pp. 2553-2556, 1991.
- [4] M. Barlaud, P. Solé, T. Gaidon, M. Antonini, P. Mathieu, «Pyramidal Lattice Vector Quantization for Multiscale Image Coding», IEEE trans. on Image Processing, vol. 3, n°4, pp. 367-381, july 1994.
- [5] E. Bourenanne, M. Paindavoine, F. Truchetet, «An improvement of Canny-Deriché Filter for ramp edge detection», journal de Traitement du signal et des images, vol. 10, n°4, pp. 297-310, 1993.
- [6] J. Canny, «A Computational approach of Edge Detection», IEEE trans on PAMI, vol. 8, n°6, Nov. 1986.
- [7] C. K. Chui, «An introduction to Wavelets», Academic Press, San Diego, CA, 1992.
- [8] A. Cohen, «Ondelettes et traitement numérique du signal», Masson, Paris, 1992.
- [9] A. Cohen, I. Daubechies, «Non-separable bidimensional wavelet bases», Revista Matematica Iberoamericana, vol.9, n°1, pp. 51-137, 1993.
- [10] I. Daubechies, «Ten Lectures on Wavelets», SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [11] I. Daubechies, «Orthonormal bases of compactly supported wavelets», Com. on Pure Appl. Math., vol. 41, pp. 909-996, nov. 1988.
- [12] R. Deriche, «Using Canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge

- detector», Int. Journal of Computer Vision, vol. 1, n°2, pp. 167-187, 1987.
- [13] G. Donovan, J. Geronimo, D. Hardin, P. Massopust, «Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation functions», SIAM J. Math. Anal., vol. 27, N°4, pp. 1158-1192, 1996.
 - [14] J.C. Fauveau, «Analyse multirésolution avec un facteur de résolution $\sqrt{2}$ », Journal de Traitement du Signal, vol. 7, N°2, pp. 117-128, 1990.
 - [15] G. Gasquet, P. Witomski, «Analyse de Fourier et applications», Masson, Paris, 1990.
 - [16] G. Geronimo, D. Hardin, P. Massopust, «Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions», J. Approx. Theory, vol. 78, pp. 373-401, 1994.
 - [17] K. Gröchenig, W.R. Madych, «Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similar tilings of \mathbb{R}^n », IEEE trans. on Inf. theory, vol. 38, N°2, pp. 556-568, march 1992.
 - [18] W. He, M.J. Lai, «Digital filters associated with bivariate box spline wavelets», journal of Electronic Imaging, vol.6, n°4, pp. 453-466, oct. 1997.
 - [19] B.B. Hubbard, «Ondes et Ondelettes», Pour la science, dif. BELIN, Paris, 1995.
 - [20] B. Jawerth, W. Sweldens, «An overview of wavelet based multiresolution analyses», web site, [//www.mathsoft.com/wavelets.html](http://www.mathsoft.com/wavelets.html), pp. 1-39, 1997.
 - [21] J. Kovacevic, M. Vetterli, «Nonseparable two- and three-dimensional wavelets», IEEE trans. on Signal Processing, vol. 43, n°5, pp. 1269-1273, may 1995.
 - [22] J. Kovacevic, M. Vetterli, «FCO sampling of digital video using perfect reconstruction filter banks», IEEE trans. on image processing, vol. 2, n°1, pp. 118-122, jan. 1993.
 - [23] J. Kovacevic, M. Vetterli, «Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for \mathbb{R}^n », IEEE trans. on information theory, vol. 38, n°2, pp. 533-555, mar. 1992.
 - [24] W.R. Madych, «Some elementary properties of multiresolution analyses of $L^2(\mathbb{R}^n)$ », Wavelets - A tutorial in theory and applications- C.K. Chui ed., pp. 259-294, Academic press, 1992.

- [25] S. Mallat, «Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ », Trans. Am. Math. Soc., vol. 315, N° 1, pp. 69-87, sep. 1989.
- [26] S. Mallat, «Multifrequency channel decomposition of images and wavelet models», IEEE Trans. on Accoustic Speech and Signal Proc., vol.37, N° 12, pp. 2091-2110, dec. 1989.
- [27] S. Mallat, «A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet represntation», IEEE, PAMI, vol. 11, N° 7, pp. 674-693, july 1989.
- [28] S. Mallat, S. Zhong, «Characterization of signals from multiscale edges», IEEE trans. on PAMI, vol. 14, n°7, pp. 710-732, july 1992.
- [29] P. Mathieu, M. Barlaud, M. Antonini, «Compression d'images par transformée en ondelettes et quantification vectorielle», Journal de Traitement du Signal, vol.7, N°2, pp. 101-115, 1990
- [30] Y. Meyer, «Ondelettes et Opérateurs I- Ondelettes», Hermann, Paris, 1990.
- [31] S.C. Pei, M.H. Yeh, «An Introduction to Discrete Finite Frames», IEEE Signal processing magazine, pp. 84-96, nov.1997.
- [32] O. Rioul, P. Duhamel, «Fast Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transform», IEEE Transaction on information theory, vol.38, n°2, pp. 569-586, mar. 1992.
- [33] M.J. Shensa, «The Discrete Wavelet Transform : Wedding the à Trous and Mallat Algorithms», IEEE Transactions on signal processing, vol.40, n° 10, pp. 2464-2482, oct. 1992.
- [34] D. Stanhill, Y. Y. Zeevi, «Two-dimensional orthogonal wavelets with vanishing moments», IEEE trans. on Signal Processing, vol. 44, n° 10, pp. 2579-2590, oct. 1996.
- [35] G. Strang, T. Nguyen, «Wavelets and filter banks», Wellesley-Cambridge Press, Wellesley MA, 1996.
- [36] G. Strang, «Wavelets», American Scientist, vol. 82, pp. 250-255, may-june 1994.
- [37] M.G. Strintzis, «Optimal Biorthogonal Wavelet Bases for Signal Decomposition», IEEE Transaction on signal processing», vol.44,n°6, pp. 1406-1417, june 1996.
- [38] B. Torrèsani, «Analyse continue par ondelettes », InterEditions et CNRS Editions,

154 Ondelettes pour le signal numérique

Paris, 1995.

- [39] F. Truchetet, A. Forys, «Implementation of still-image compression-decompression scheme on FPGA circuits», Still-image Compression, SPIE, vol.2669, pp.66-75, jan.1996.
- [40] F. Truchetet, O. Laligant, E. Bourenanne, J. Mitéran, «Frame of wavelets for edge detection», SPIE, Optics imaging and instrumentation, vol. 2303, pp. 141-152, San Diego, july 1994.
- [41] M. Unser, A. Aldroubi, M. Eden, «B-spline signal processing : part I-theory», IEEE trans. on PAMI, vol. 41, n°2, pp. 821-832, 1993.
- [42] M. Unser, A. Aldroubi, M. Eden, «B-spline signal processing : part II-Efficient design and applications», IEEE trans. on PAMI, vol. 41, n°2, pp. 834-848, 1993.
- [43] M. Vetterli, J. Kovacevic, « Wavelets and Subband Coding », Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [44] M. Vetterli, C. Herley, « Wavelet and Filter Banks : Relationships and New Results», proc. IEEE, ICASSP, pp. 1723-1726, Albuquerque, 1990.
- [45] E. Viscito, J.P. Allebach, «The analysis and design of multidimensional FIR perfect reconstruction filter banks for arbitrary sampling lattices», IEEE trans. on circuits and systems, vol. 38, n° 1, pp. 29-41, jan. 1991.
- [46] B. A. Wandell, «Foundations of Vision», Sinauer Associates, Sunderland, MA, 1995.

Index

- admissibilité, 59
 - ondelette, 21
- algorithme à trous, 36
- algorithme cascade, 45, 49, 110
- algorithme d'analyse, 37
- algorithme de Mallat, 45
- algorithme récursif, 41, 92, 119
- analyse en sous-bandes, 64
- analyse multirésolution, 23, 25, 46, 48, 62, 77, 88, 135
- approximation, 27, 45, 47, 93
 - signal, 49
- Aslaken et Klauder, 11
- axiomatique, 88
 - multirésolution, 25
- B-spline, 71, 124, 141
- B-spline discrète, 75, 142
- B-spline linéaire, 141
- B-spline quadratique, 141
- Bairstow, 83
- banc de filtres, 37
- base, 118
- base biorthogonale, 23, 65, 117, 122
- base duale, 117
- base orthonormée, 23
- Battle-Lemarié, 100, 146
 - ondelette, 70
- Bezout, 79
- borne de trame, 137
- bornes de trame, 132
- Calderon, 11
- Canny, 136
- cascade
 - algorithme, 45
 - algorithme généralisé, 49
- changement d'échelle, 25, 54
- chapeau mexicain
 - ondelette, 17
- coefficients de détail, 40
- complément orthogonal, 28
- compression, 76, 103, 129
- compression d'image, 35
- construction des bases, 53
- contraction, 105
- convergence, 46, 48, 77
 - analyse multirésolution, 26
- décimation, 91
- décomposition, 30
- décomposition en ondelettes, 40
- détail, 93, 102
 - signal, 51
- détecteur généralisé, 136
- détection de contours, 136
- détection multiéchelle, 137
- Daubechies, 11, 65, 76
 - filtres de, 83
- dilaté d'un vecteur, 88
- dilatation, 26, 91, 103

- dilatation surfacique, 88
- Dirac, 52
- dyadique, 20, 45, 100
 - analyse, 25
- échantillonnage, 30, 75
- échantillonnage séparable, 104
- échelle, 89
- équation réursive, 39
- espace de détail, 28
- espaces emboîtés, 28
- Esteban et Galand, 11
- facteur d'échelle, 16, 136
- facteur de dilatation, 87
- facteur spectral, 80
- factorisation spectrale, 80
- famille de bases biorthogonales, 124
- famille orthogonalisée, 74
- Fauveau, 111
- fenêtre glissante, 13
- filtrage, 39
- filtre associé, 75, 93, 96, 114, 120
- filtre bidimensionnel, 107
- filtre de régularisation, 138
- filtre dual, 119
- filtre g, 40, 59, 61, 99, 110, 115, 121
- filtre h, 37, 76, 83, 109, 114, 120, 124
- filtre miroir en quadrature, 64
- filtre numérique, 37
- filtre passe-bas, 57, 109
- filtre passe-haut, 60, 98
- filtre récursif, 125
- filtres QMF, 64
- fonction boîte, 71, 141
- fonction d'échelle, 26, 37, 45, 46, 54, 75, 92, 102, 120, 129
- fonction d'autocorrélation, 55, 80
- fonction de base, 26
- fonction de transfert, 79, 122
- fonction fenêtre, 13
- fonction mère, 16
- fonction polynomiale par morceau, 71
- fonction régulière, 78
- Fourier, 11, 13
- frame, 131
 - trame, 22
- fusion, 139
- Gabor
 - transformation, 14
- gaborette, 14
- Gauss, 14
- Geronimo, 27
- Grossmann, 11
- Haar, 11, 39, 40, 64, 66, 72, 82, 112, 141
 - analyse, 30
 - ondelette, 17
- Hamming, 14
- Hanning, 14
- Heaviside, 112
- idempotent, 25
- image, 87
- imagerie, 102
- interpolation, 46
- invariance par translation, 28
- Kovacevic, 112
- linéaire en phase, 81
- linéarité en phase, 114
- Littlewood-Paley, 65, 68
- localisation fréquentielle, 76
- localisation temporelle, 70, 76
- Mac Clellan, 111

- maillage, 104
- Mallat, 11, 36, 93
 - algorithme, 36
 - trame, 135
- matrice d'échelle, 87
- matrice de dilatation, 87, 100
- Meyer, 11, 92
- Morlet, 11
 - ondelette, 17
- multi-ondelettes, 27
- multiéchelle, 136
- norme, 14, 37
- ondelette, 40, 45, 46, 58, 76, 93, 94, 97, 102, 110, 121
 - base, 29
- ondelette quinconce, 103
- ondelettes à support compact, 77
- ondelettes séparables, 100
- opérateur adjoint, 133
- orthogonal, 53
 - sous-espace, 28
- orthogonalisation, 75
- orthogonalité, 59, 96, 98, 105, 118, 120
- orthonormalité de la fonction d'échelle, 56
- orthonormalité du filtre associé, 56, 57
- paquet
 - ondelettes, 23, 35
- Parseval, 132
- Paul, 11
- peigne de Dirac, 55
- phase minimum, 81
- Plancherel, 55, 72, 141
- Poisson, 55
- polynôme trigonométrique, 78
- produit de convolution, 39
- produit scalaire, 14, 26
- projecteur, 25
- projection, 92
- propriétés des filtres, 62
- propriétés des fonctions d'échelle, 62
- propriétés des ondelettes, 62
- propriétés fréquentielles des ondelettes, 58
- pulsation de repliement, 97
- pyramidal
 - algorithme, 43
- quinconce, 100
- récurrence, 109
- récuratif
 - algorithme, 41
- régularité, 129
- réponse fréquentielle, 54, 96
- réseau, 89
- résolution, 25, 89
- résolution fréquentielle, 14, 67
- résolution spatio-fréquentielle, 41
- résolution temporelle, 14
- résolution temps-fréquence, 67
- reconstruction, 21, 30, 41, 132
 - algorithme, 46, 48
- redondance, 22, 103, 132
- RIF, 65
- RII, 65, 114, 126
- séquence retournée, 39
- signal de détail
 - multirésolution, 29
- signal multidimensionnel, 87
- Smith et Barnwell, 11
- sous-échantillonnage, 39, 89, 91
- sous-espace complémentaire, 92

sous-espace dual, 118
sous-réseau, 90
spline, 65, 70
Strang, 27
sur-échantillonnage, 89, 91, 132

temps-fréquence, 14
tight frame, 132
trame, 131
 frame, 22
trame duale, 133
trame serrée, 132, 138
transformée de Fourier, 54, 95
transformée en ondelettes, 16
 multirésolution, 30

transformée en ondelettes discrète, 20
transformée en z , 62
transformée inverse, 21
transformation de Fourier, 13
 fenêtre glissante, 14
translation, 26, 54, 89, 98, 105
 orthogonalité, 72
 transformée en ondelettes, 16
treillis, 89, 104

valeur moyenne, 58
valeur propre, 88
vecteur pulsation, 95
Vetterli, 11, 112