Analyse en Ondelettes

Projet mathématiques-informatique

Chloé Rouyer, Pierre Gervais, Souhaib Boulahia

Université Paris Diderot

13 juin 2017

Introduction

Joseph Fourier (1768 -1830) et Yves Meyer (1939-)

Sommaire

Problématique

- Signaux : fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Problématique

- Signaux : fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- On veut généraliser les outils de la géométrie euclidienne

Problématique

- ℓ^2 et la famille $\{x_n = \delta(n - \cdot)\}_n$

Problématique

- ℓ^2 et la famille $\{x_n = \delta(n - \cdot)\}_n$
- But : pouvoir écrire

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n$$

Espace de Hilbert

Un *espace de Hilbert* est la donnée

Espace de Hilbert

Un *espace de Hilbert* est la donnée

- D'un espace vectoriel réel E

Espace de Hilbert

Un *espace de Hilbert* est la donnée

- D'un espace vectoriel réel E
- D'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini sur E

Espace de Hilbert

Un *espace de Hilbert* est la donnée

- D'un espace vectoriel réel E
- D'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini sur E
- tel que E soit complet pour la norme induite par ce produit scalaire

Exemple d'espace hilbertien

ℓ^2 avec le produit scalaire défini par $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \overline{v_n}$

Espace de Hilbert séparable

E est dit *séparable* s'il existe $\mathbf{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

Séparabilité et base hilbertienne

E est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne

Séparabilité et base hilbertienne

E est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne où une *base hilbertienne* est une famille orthonormée **totale**, c'est-à-dire une famille orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ soit dense dans E.

E (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ E admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

E (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ E admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout n.

E (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ E admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout n.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.

E (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ E admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout n.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.
On construit par récurrence f_{n+1} à l'aide de $f_0, \cdots f_n$:

E (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ E admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout n.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.
On construit par récurrence f_{n+1} à l'aide de $f_0, \cdots f_n$:

- on choisit $x \in \mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec m le plus petit possible pour que x existe

E (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ E admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout n.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.
On construit par récurrence f_{n+1} à l'aide de $f_0, \cdots f_n$:

- on choisit $x \in \mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec m le plus petit possible pour que x existe (il existe car E est de dimension infinie).

E (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ E admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout n.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.
On construit par récurrence f_{n+1} à l'aide de $f_0, \cdots f_n$:

- on choisit $x \in \mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec m le plus petit possible pour que x existe (il existe car E est de dimension infinie). Ainsi $\mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) = \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n, x)$

E (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ E admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout n.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.
On construit par récurrence f_{n+1} à l'aide de $f_0, \cdots f_n$:

- on choisit $x \in \mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec m le plus petit possible pour que x existe (il existe car E est de dimension infinie). Ainsi $\mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) = \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n, x)$
- on orthogonalise la nouvelle famille : $y = x - \sum_{k=0}^{n} \langle y, f_k \rangle f_k$

E (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ E admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout n.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.
On construit par récurrence f_{n+1} à l'aide de $f_0, \cdots f_n$:

- on choisit $x \in \mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec m le plus petit possible pour que x existe (il existe car E est de dimension infinie). Ainsi $\mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) = \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n, x)$
- on orthogonalise la nouvelle famille : $y = x - \sum_{k=0}^{n} \langle y, f_k\rangle f_k$
- on normalise le nouveau vecteur : $f_{n+1} = \frac{y}{\|y\|}$

E (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ E admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout n.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.
On construit par récurrence f_{n+1} à l'aide de $f_0, \cdots f_n$:

- on choisit $x \in \mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec m le plus petit possible pour que x existe (il existe car E est de dimension infinie). Ainsi $\mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) = \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n, x)$
- on orthogonalise la nouvelle famille : $y = x - \sum_{k=0}^{n} \langle y, f_k\rangle f_k$
- on normalise le nouveau vecteur : $f_{n+1} = \frac{y}{\|y\|}$

En passant à l'adhérence : $E = \overline{\mathbf{g}} \subset \overline{\mathrm{Vect}(\mathbf{f})} \subset E$

Espaces de Lebesgue

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Espaces de Lebesgue

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f \ : \ X \to \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

Espaces de Lebesgue

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f \ : \ X \to \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Espaces de Lebesgue

Soit la relation d'équivalence définie par $f\mathcal{R}g \iff f \equiv g$ p.p.

Espaces de Lebesgue

Soit la relation d'équivalence définie par $f \mathcal{R} g \iff f \equiv g$ p.p.

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\mathcal{R}$$

Espaces de Lebesgue

Soit la relation d'équivalence définie par $f\mathcal{R}g \iff f \equiv g$ p.p.

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\mathcal{R}$$

$(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ est alors normé ...

Espaces de Lebesgue

Soit la relation d'équivalence définie par $f \mathcal{R} g \iff f \equiv g$ p.p.

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\mathcal{R}$$

$(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ est alors normé ... et complet !

Séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques.

Dans $L^2(\mathbb{T})$:

- Les $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base Hilbertienne

Séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques.
Dans $L^2(\mathbb{T})$:

- Les $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base Hilbertienne
- Toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ se décompose dans la base des $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$

Séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques.
Dans $L^2(\mathbb{T})$:

- Les $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base Hilbertienne
- Toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ se décompose dans la base des $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$
- On définit les coefficients de Fourier par $c_k = \langle f, e^{-ikt}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{e^{-ikt}}dt$

Séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques.
Dans $L^2(\mathbb{T})$:

- Les $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base Hilbertienne
- Toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ se décompose dans la base des $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$
- On définit les coefficients de Fourier par $c_k = \langle f, e^{-ikt}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{e^{-ikt}}dt$
- Et $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{-ikt}$

Séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques.

Dans $L^2(\mathbb{T})$:

- Les $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base Hilbertienne
- Toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ se décompose dans la base des $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$
- On définit les coefficients de Fourier par $c_k = \langle f, e^{-ikt}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{e^{-ikt}}dt$
- Et $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{-ikt}$
- Avec $\lim\limits_{N\to\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$

Preuve de $\lim_{N\to\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, soit $\varepsilon > 0$.
Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction continue telle que $|f_0 - f| < \varepsilon$

Preuve de $\lim_{N \to \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, soit $\varepsilon > 0$.
Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction continue telle que $|f_0 - f| < \varepsilon$
Soit F_0 tel que $f_0(t) = F_0(e^{it})$
Il existe un polynôme trigonométrique P tel que pour tout t, $\|f_0(t) - P(t)\| < \varepsilon$
Ce qui permet de déduire que :

Preuve de $\lim_{N \to \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, soit $\varepsilon > 0$.
Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction continue telle que $|f_0 - f| < \varepsilon$
Soit F_0 tel que $f_0(t) = F_0(e^{it})$
Il existe un polynôme trigonométrique P tel que pour tout t, $\|f_0(t) - P(t)\| < \varepsilon$
Ce qui permet de déduire que :

$$
\begin{aligned}
\|S_N(f) - f\|_2 &\leqslant \|S_N(f) - S_N(P)\|_2 + \|S_N(P) - P\|_2 + \|f - P\|_2 \\
&\leqslant 2\|f - P\|_2 + \|S_N(P) - P\|_2 \\
&\leqslant 2\|f - P\|_2 \\
&\leqslant 2\|f - f_0\|_2 + 2\|f_0 - P\|_2 \\
&\leqslant 4\varepsilon
\end{aligned}
$$

Séries de Fourier

Vitesse de décroissance des coefficients.
Si $f \in \mathcal{C}^k$ alors :

$$|c_p(f)| \leqslant \frac{C}{|p|^k}$$

Transformée de Fourier

Transformée de Fourier pour $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}[f](\xi) = F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t}dt$$

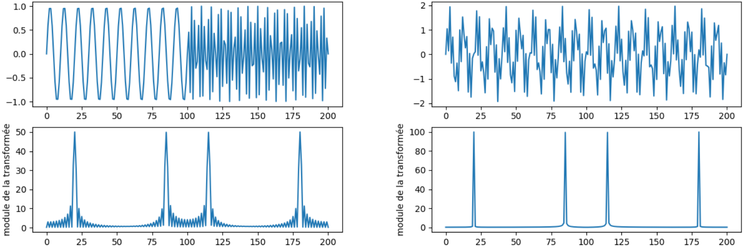
Transformée de Fourier

Transformée de Fourier pour $f \in L^1(\mathbb{R})$

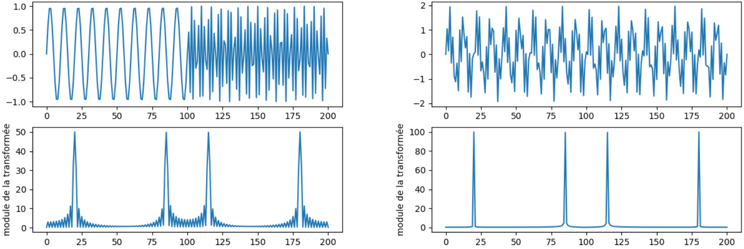
$$\mathcal{F}[f](\xi) = F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt$$

Transformée de Fourier inverse pour $f, F \in L^1(\mathbb{R})$ et f continue

$$\overline{\mathcal{F}}[F](t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi t} dt$$



2 signaux ayant des transformées de Fourier similaires



2 signaux ayant des transformées de Fourier similaires

$$F(\xi,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t}\overline{w(t-\tau)}dt$$

Analyse multi-résolution

Une image de voiture pour trois résolutions différentes

Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ f \in V_n \iff f(2\,\cdot) \in V_{n+1}$$

Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ f \in V_n \iff f(2\,\cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe φ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\,\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V_0

Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ f \in V_n \iff f(2\,\cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe φ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\,\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V_0

$$\overline{\bigcup V} = L^2(\mathbb{R})$$

Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ f \in V_n \iff f(2\,\cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe φ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V_0

$$\overline{\bigcup V} = L^2(\mathbb{R})$$

$$\bigcap V = \{0\}$$

Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ f \in V_n \iff f(2\,\cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe φ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\,\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V_0

$$\overline{\bigcup V} = L^2(\mathbb{R})$$

$$\bigcap V = \{0\}$$

φ est appelée *fonction d'échelle*.

L'espace de détails

L'espace V_{n+1} est plus "fin" que V_n.

L'espace de détails

L'espace V_{n+1} est plus "fin" que V_n.
Soit $P_n \; : \; V_{n+1} \to V_n$ la projection orthogonale

L'espace de détails

L'espace V_{n+1} est plus "fin" que V_n.
Soit $P_n \; : \; V_{n+1} \rightarrow V_n$ la projection orthogonale

$$W_n = \ker(P_n)$$

L'espace de détails

L'espace V_{n+1} est plus "fin" que V_n.
Soit $P_n \; : \; V_{n+1} \to V_n$ la projection orthogonale

$$W_n = \ker(P_n) = V_{n+1} \cap V_n^{\perp}$$

L'espace de détails

L'espace V_{n+1} est plus "fin" que V_n.
Soit $P_n \; : \; V_{n+1} \to V_n$ la projection orthogonale

$$W_n = \ker(P_n) = V_{n+1} \cap V_n^{\perp}$$

On définit l'*espace de détails* par

$$V_{n+1} = W_n \oplus V_n$$

L'espace de détails

$$V_n = V_{n-1} \oplus W_{n-1}$$

L'espace de détails

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\ &= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \end{aligned}$$

L'espace de détails

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\ &= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\ &= V_{n-3} \oplus W_{n-3} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \end{aligned}$$

L'espace de détails

$$
\begin{aligned}
V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\
&= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
&= V_{n-3} \oplus W_{n-3} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
&\vdots \\
&= \underbrace{\bigcap V}_{\{0\}} \oplus \left(\bigoplus_{k<n} W_k \right)
\end{aligned}
$$

L'espace de détails

$$
\begin{aligned}
V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\
&= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
&= V_{n-3} \oplus W_{n-3} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
&\vdots \\
&= \underbrace{\bigcap V}_{\{0\}} \oplus \left(\bigoplus_{k<n} W_k \right)
\end{aligned}
$$

Et en faisant l'union pour tout $n \in \mathbb{Z}$ à droite et à gauche

$$
\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n
$$

L'espace de détails

$$
\begin{aligned}
V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\
&= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
&= V_{n-3} \oplus W_{n-3} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
&\vdots \\
&= \underbrace{\bigcap V}_{\{0\}} \oplus \left(\bigoplus_{k<n} W_k \right)
\end{aligned}
$$

Et en faisant l'union pour tout $n \in \mathbb{Z}$ à droite et à gauche

$$
\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} W_n \right)
$$

Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2\cdot) \in W_1 \iff f(2^n\cdot) \in W_n$$

Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2\cdot) \in W_1 \iff f(2^n\cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2\cdot) \in W_1 \iff f(2^n\cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0

Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \Longleftrightarrow f(2\cdot) \in W_1 \Longleftrightarrow f(2^n\cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$

Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2\cdot) \in W_1 \iff f(2^n\cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$

$\{\sqrt{2^n}\psi(2^n \cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_n.

Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2\cdot) \in W_1 \iff f(2^n\cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$

$\{\sqrt{2^n}\psi(2^n \cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_n.
La famille définie par $\psi_{n,k}(t) = \sqrt{2^n}(2^n t - k)$ forme une famille orthonormée de $\displaystyle\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$

Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2\cdot) \in W_1 \iff f(2^n\cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$

$\{\sqrt{2^n}\psi(2^n \cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_n.
La famille définie par $\psi_{n,k}(t) = \sqrt{2^n}(2^n t - k)$ forme une famille orthonormée de $\displaystyle\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$

$\{\psi_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$!

De $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} W_n\right)$

De $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} W_n\right)$
on déduit pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{Z}}} \langle \psi_{n,k}, f\rangle \psi_{n,k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \varphi_k, f\rangle \varphi_k + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{N}}} \langle \psi_{n,k}, f\rangle \psi_{n,k}$$

Ondelette de Haar

L'ondelette de Haar est définie par :

$$\psi(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leqslant t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction d'échelle associée est la fonction porte :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Peu régulière, discontinue

Ondelette chapeau mexicain

L'ondelette chapeau mexicain est définie par :

$$\psi(t) = \lambda \left(1 - t^2\right) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

avec :

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{2}\pi^{\frac{1}{4}}}$$

Algorithme d'encodage

On rappelle :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n = V_0 \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}} W_n \right)$$

On peut décomposer tout fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ ainsi :

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ n\in\mathbb{N}}} \langle f, \psi_{n,k} \rangle \psi_{n,k}$$

Algorithme d'encodage

On manipule des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ de la forme

$$f = \sum_{j=0}^{2^{N_0}-1} a_j \mathbb{1}_{[2^{-N_0}j, 2^{-N_0}(j+1)[}$$

$$\begin{aligned}\langle f, \psi_{n,k} \rangle &= \int_0^1 f(t)\overline{\psi_{n,k}(t)}dt \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} a_j \left(\Phi\left(\frac{j+1}{N} - \frac{k}{N}\right) - \Phi\left(\frac{j}{N} - \frac{k}{N}\right)\right)\end{aligned}$$

où Ψ est une primitive de $\overline{\psi}$, Φ est une primitive de $\overline{\phi}$ et $N = 2^{N_0}$.

Algorithme d'encodage

procedure ENCODER(Ψ, $\widetilde{f}$, N_0, s)
  $S_m := \Phi(1) - \Phi(0)$
  $P_0 :=$ Construire(Ψ, 0, $s(0)$)
  for $n = 0, 1 \cdots N_0$ **do**
    for $k = 0, 1 \cdots 2^{N_0 - n}$ **do**
      $S_{n,k} := 0$
      for $x = 0, 1 \cdots 2^{N_0}$ **do**
        $S_{n,k} := S_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{2^{3n}}}(\Psi(2^n x - k) - \Psi(2^n(x+1) - k)) \times f(x)$
      end for
    end for
  end for
  return $S_m, (S_{n,k})_{n,k}$
end procedure

procedure DÉCODER(ψ, S_m, $A = (\alpha_{n,k})_{n,k}$, N_0, $s(n)$)
  for $x = 0, 2^{-N_0}, 2 \times 2^{-N_0} \cdots, 1$ **do**
    $f(x) := S_m$
    for $n = 0, 1 \cdots, N_0$ **do**
      for $k = 0, 1 \cdots, s(n)$ **do**
        $f(x) := f(x) + \alpha_{n,k} \times \psi(2^{-n} x - k)$
      end for
    end for
  end for
  return f