Part I
Analyse du signal

On munit à présent $L^2(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt$$

[On considérera ici que $L^2(\mathbb{R})$ est restreint aux fonctions continues par morceaux ?]

1 Analyse multi-résolution

1.1 Introduction

Nous allons enrichir la théorie des espaces de Hilbert d'une notion de "finesse" particulièrement adaptée à l'objet central de ce rapport. En effet, dans le cadre de l'approximation d'un signal, que nous modélisons par une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, cette notion prend tout son sens comme le montre l'image ci-dessous.

Figure 1: Une image de voiture pour trois résolutions différentes

Les images peuvent être modélisées comme des fonctions de $\mathbb{R}^2$, pour les coordonnées spatiales, dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^3$) dans le cas d'une image en noir et blanc (resp. en couleur RVB). Dans le cas d'un signal sonore, sachant qu'un son est une onde, il peut être représenté par une fonction de $\mathbb{R}$, pour le temps, dans $\mathbb{R}$, pour l'amplitude de d'oscillation.

Avant de définir l'analyse multi-résolution, explorons plus profondément cette notion de "finesse".

Quelle finesse !

Nous allons prendre pour exemple les signaux unidimensionnels (tels les sons). Soit $f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, nous allons l'approximer par des fonctions constantes par morceaux (dites étagées), dont les morceaux sont de plus en plus petits.

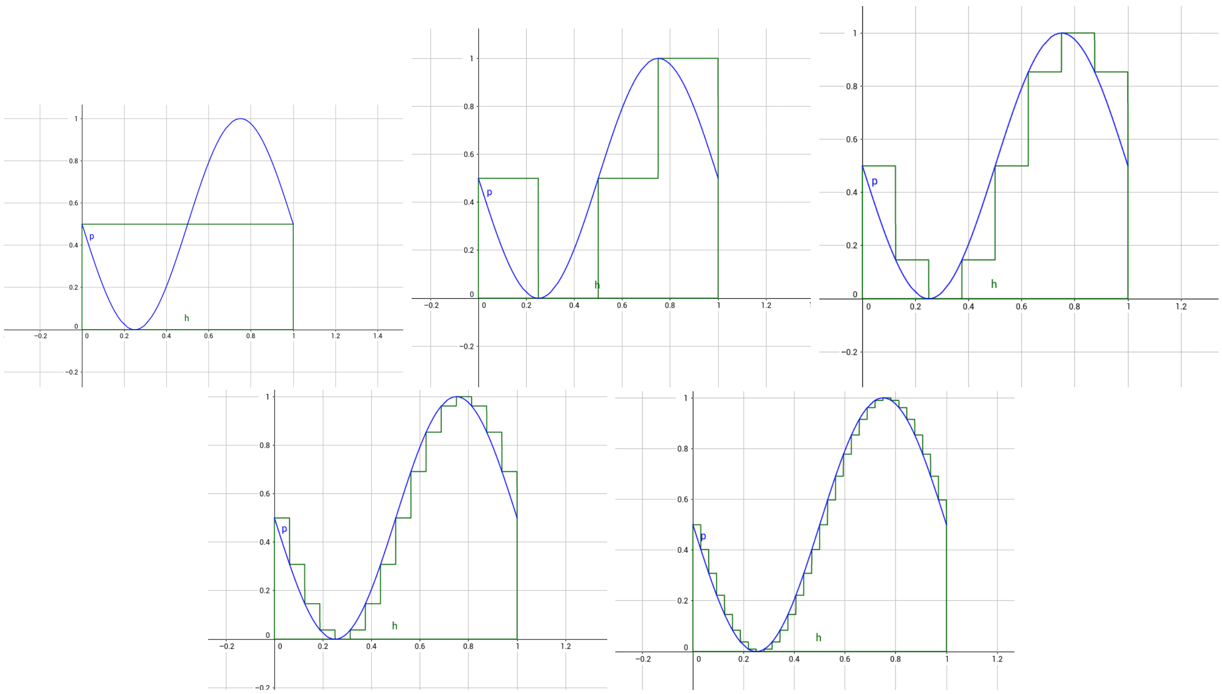

Figure 2: f approximée par des fonctions dont les morceaux sont de tailles 1, 1/2, 1/4, 1/8 et 1/16

Sur la figure on approxime f par des fonctions f_n étagées dont les morceaux sont de tailles 2^{-n}, on peut voir chaque f_n comme une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de la forme suivante

$$f_n = \sum_{k=0}^{2^n} a_{n,k} \mathbb{1}_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[}$$

La première remarque que l'ont peut faire est que chaque $\mathbb{1}_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[}$ est le translaté de $\mathbb{1}_{[0,2^{-n}[}$, que l'on notera I_n. On réécrit alors

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n} a_{n,k} I_n \left(x - k2^{-n}\right)$$

La seconde est que I_n est une contraction de I_1 que l'on notera I. On en tire notre dernière réécriture :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n} a_{n,k} I \left(\frac{x - k2^{-n}}{2^{-n}}\right) = \sum_{k=0}^{2^n} a_{n,k} I\left(2^n x - k\right)$$

Ainsi si on fixe $I = \mathbb{1}_{[0,1[}$ comme fonction de référence dans notre décomposition, la suite de fonctions $(f_n)_n$ est entièrement déterminée par les coefficients $(a_{n,k})_{n,k}$

1.2 L'analyse multi-résolution

Dans l'exemple introductif, pour tout n on a pu voir que f_n était une combinaison linéaire du translaté d'une fonction I_n, f_n appartenait alors à l'espace vectoriel engendré par les translations de I_n. De plus, chaque I_n était la contraction de la fonction I donnée par $I_n(t) = I(t2^n)$. Il s'agissait d'un exemple d'analyse multi-résolution dont voici la définition :

Définition 1. Une *analyse multi-résolution* de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions de carré Lebesgue-intégrables est une suite $V = \{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ de sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{Z},\ V_n \subset V_{n+1}$ *(croissance)*
2. $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ f \in V_n \Longleftrightarrow t \mapsto f(2t) \in V_{n+1}$ *(stabilité par translation entière)*
3. $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ t \mapsto f(t + 2^n) \in V_n \Longleftrightarrow f \in V_n$ *(auto-similarité)*
4. $\overline{\bigcup V} = L^2(\mathbb{R})$ *(densité)*
5. $\bigcap V = \{0\}$

On peut généraliser par récurrence la propriété 3 de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ f \in V_0 \Longleftrightarrow t \mapsto f(2^n t) \in V_n$$

Ce qui met en évidence que plus n est grand, plus l'espace V_n contient des fonctions fines (la fonction est contractée horizontalement). La propriété 4 peut elle aussi être généralisée :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ f \in V_n \Longleftrightarrow t \mapsto f(t - k2^n) \in V_n$$

En combinant ces deux conséquences, on sait alors qu'une fonction f appartient à V_n si et seulement s'il existe $\varphi \in V_0$, $k \in \mathbb{Z}$ tels que $f(t) = \varphi(t2^n - k)$.

Définition 2. S'il existe une fonction normée dont l'ensemble de ses translations forme une base orthonormée de V_0, on l'appelle *fonction d'échelle*. Ainsi pour tout n l'espace V_n est l'ensemble de combinaisons linéaires de dilatations et translations de cette fonction.

Nous nous retrouvons pour tout n avec un espaces de Hilbert V_n de base orthonormée $\{t \to 2^{-n/2}\varphi(2^n t - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (le facteur $2^{-n/2}$ servant à normaliser la fonction).

1.3 Espace des détails

Lorsque l'on passe d'un espace V_{n+1} à V_n, on perd en finesse. On regroupe l'espace qui engendre les détails perdus dans l'espace de détails :

Définition 3. Pour tout n on définit *l'espace de détails* W_n comme le complémentaire orthogonal de V_n dans V_{n+1}

$$V_{n+1} = W_n \overset{\perp}{\oplus} V_n$$

Remarque 1. Toute fonction $f \in \bigcup V$ se décompose de manière unique en une somme de fonctions orthogonales $f = f_1 + f_2$, où $f_1 \in V_n$ et $f_2 \in W_n$ pour un certain n.

En effet, $f \in \bigcup V$ donc il existe n tel que $f \in V_n$. Il s'agit donc d'une combinaison linéaire de translations et contractions d'un facteur au plus 2^{-n} de φ. Il existe d'uniques éléments $f_1 \in V_{n-1}$ et $f_2 \in W_{n-1}$ tels que $f = f_1 + f_2$ et $f_2 \perp f_2$.

Le fait que f_1 et f_2 soit orthogonaux signifie que $f_1\overline{f_2}$ est d'intégrale nulle.

f_2 peut être vu comme le détail perdu en passant de l'échelle V_n à l'échelle V_{n-1}.

Les $(W_n)_n$ ne forment plus une famille monotone, mais leur somme recouvre tout les V_n. En d'autre termes, on peut à présent approximer toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$ par une combinaison linéaire d'éléments de $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$.

Preuve 1. Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$, on a par définition des $(W_n)_n$

$$\begin{aligned}
V_{n_0+1} &= V_{n_0} \oplus W_{n_0} \\
&= V_{n_0-1} \oplus (W_{n_0-1} \oplus W_{n_0}) \\
&\dots \\
&= V_{n_0-N} \oplus \left(\bigoplus_{n=n_0-N}^{n_0} W_n \right) \\
&= \cdots \\
&= \lim_{n\to-\infty} V_n \oplus \left(\bigoplus_{n=-\infty}^{n_0} W_n \right) \\
&= \bigcap V \oplus \left(\bigoplus_{n=-\infty}^{n_0} W_n \right) \\
&= \{0\} \oplus \left(\bigoplus_{n=-\infty}^{n_0} W_n \right) \\
&= \bigoplus_{n=-\infty}^{n_0} W_n
\end{aligned}$$

On en déduit ainsi $\bigcup V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$ en faisant tendre n_0 vers ∞ (ou plutôt en faisant l'union à gauche et à droite pour tout $n_0 \in \mathbb{Z}$).

□

Comme on l'a dit, les $(W_n)_n$ ne forment pas une suite d'espaces emboîtés ; ils sont même orthogonaux deux à deux. Cependant, ils vérifient encore les conditions d'auto-similarité et de stabilité par translation.

Définition 4. Si on peut encore trouver une fonction normée ψ engendrant W_0 par translation et de moyenne nulle (d'intégrale nulle), une telle fonction est appelée *ondelette*.

On définit encore une fois la famille $(\psi_{n,k})_{n,k}$ par $\psi_{n,k}(t) = 2^{-n/2}\psi(2^n t - k)$, et cette fois ci ... cette famille est une base orthonormée de $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$!

Le fait que la famille soit normée est évident, le fait qu'elle soit orthogonale découle de l'orthogonalité des W_n.