Part I

Algorithmes d'encodage et de décodage

1 Algorithme d'encodage en 1 dimension

1.1 Cadre

Dans cette partie, on veut encoder une fonction $f : [\![0, N-1]\!] \to [-1, 1]$ quelconque.
On se place dans une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$ notée $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ engendrée par φ.
On rappelle que f peut être recalculé à partir de ses coordonnées $\langle f, \psi_{n,k}\rangle$:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{n,k}\rangle \psi_{n,k}$$

où :

$$\begin{aligned}
\langle f, \psi_{n,k}\rangle &= \int_0^N f(t)\overline{\psi_{n,k}(t)}dt \\
&= \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \int_x^{x+1} \overline{\psi(2^{-n}t - k)}dt \\
&= 2^{-n} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) [F(t)]_{2^{-n}x-k}^{2^{-n}(x+1)-k}
\end{aligned}$$

où F est une primitive de $\overline{\psi}$.

1.2 Code de l'algorithme

1.3 Validation de l'algorithme

Vérifier que cet algorithme est correct consiste à vérifier que les approximations que l'on a du faire pour passer de valeurs infinies à des valeurs finies pour n et k ne sont pas préjudiciables à la validité des résultats produits. Il s'agit donc de vérifier que les valeurs de n et k enlevées sont négligeables. En effet, le reste de l'algorithme ne doit pas donner lieu a des erreurs : la formule utilisée est celle qui a été définie plus tôt, et il est certain de terminer.

1.3.1 Coordonnées $n \leq 0$

La valeur de $\langle f, \psi_{n,k}\rangle$ représente à peu près la variation dans l'intervalle $[2^n k, 2^n(k+1)]$.
Étant donné que f est échantillonnée avec une fréquence de 1, f est constante sur les intervalles $[2^n k, 2^n(k+1)]$ pour $n \leq 0$. On néglige donc la valeur des coordonnées à ces indices. Dans la pratique, cela correspond a des intervalles qui sont plus petits que la fréquence d'échantillonnage: la fonction est donc constante sur l'intervalle, et comme l'ondelette est de moyenne nulle, les valeurs qui lui sont associées sont bien négligeables.

procedure ENCODER(F, f, N)
  for $n \in [\![1, \lceil \log_2 N \rceil]\!]$ **do**
    for $k \in [\![0, \lceil 2^{-n} N - 1 \rceil]\!]$ **do**
      $C[n][k] := 0$
      for $x \in [\![0, N-1]\!]$ **do**
        $C[n][k] := C[n][k] + 2^{-n} \times f[x] \times (F(2^{-n}x - k) - F(2^{-n}(x+1) - k))$
      end for
    end for
  end for
  return C
end procedure

procedure DECODER(ψ, C, N)
  for $x \in [\![0, N-1]\!]$ **do**
    $f[x] := 0$
    for $n \in [\![1, \lceil \log_2 N \rceil]\!]$ **do**
      for $k \in [\![0, \lceil 2^{-n} N - 1 \rceil]\!]$ **do**
        $f[x] := f[x] + C[n][k] \times \psi(2^{-n}x - k)$
      end for
    end for
  end for
  return f
end procedure

1.3.2 Coordonnées $n > \lceil \log_2 N \rceil$

De même que précédemment, $\langle f, \psi_{n,k} \rangle$ représente la variation dans l'intervalle $[2^n k, 2^n (k+1)]$. Or, cela veut dire que $2^n > 2^{\lceil \log_2 N \rceil} \geqslant N$, c'est à dire que les intervalles sont plus grands que le domaine de définition de la fonction. Dès lors, ils ne seront pas utiles.

1.3.3 Coordonnées k

On veut obtenir un recouvrement minimal de $[0, N[$ avec les intervalles disjoints $[2^n k, 2^n (k+1)[$.
Pour que $[2^n k, 2^n (k+1)[\cap [0, N[\neq \emptyset$, il faut que $0 \leq k < 2^{-n} N$.

1.4 Exemples