Analyse en Ondelettes

Pierre Gervais, Souhaib Boulahia, Chlo Rouyer

9 juin 2017

Table des matires

I Outils prliminaires **3**

1 Espaces de Hilbert . . . 3

1.1 Introduction et dfinition . . . 3

1.2 Bases de Hilbert . . . 3

2 Espaces de Lebesgue . . . 9

II Analyse du signal **10**

3 L'analyse de Fourier . . . 10

3.1 Sries de Fourier . . . 10

3.2 Transforme de Fourier . . . 15

3.3 Transforme de Fourier fentre glissante . . . 17

3.4 Transforme de Fourier discrte . . . 17

III Analyse du signal **18**

4 Analyse multi-rsolution . . . 19

4.1 Introduction . . . 19

4.2 L'analyse multi-rsolution . . . 21

4.3 Espace des dtails . . . 22

5 Ondelettes . . . 23

IV Algorithmes d'encodage et de dcodage **27**

6 Cadre thorique . . . 27

6.1 Validation de l'algorithme . . . 28

7 Version alternative . . . 29

7.1 Optimisation et compression . . . 29

Premire partie

Outils prliminaires

0.1 Espaces de Hilbert

0.1.1 Introduction et dfinition

Nous disposons en dimension finie de nombreux thormes bien utiles, notamment dans le cadre des espaces euclidiens (existence d'une base, toute famille orthogonale est libre, procd d'orthonormalisation de Gramm-Schimdt ...).

Cela se prte parfaitement des tudes gomtriques dans le plan et l'espace que nous connaissons, mais galement la manipulation de certains objets de l'analyse tels que les polynmes de degr au plus $n \in \mathbb{N}$ ou de matrices que l'on identifie certaines applications linaires.

Rappelons rapidement la notion de base :

Dfinition 1. pour un espace vectoriel E, une *base* $\mathcal{B} \subset E$ est une famille *libre* et *gnratrice* : tout lment de E peut s'crire comme une unique combinaison linaire (finie) d'lments de $\mathcal{B}$. Les bases de E sont toutes de mme cardinal, on dfinit grce elles la *dimension* de E comme tant le cardinal de $\mathcal{B}$.

L'axiome du choix nous garanti que tout espace vectoriel admet une base. L'espace des suites finies partir d'un certain rang (que l'on notera ℓ_F), bien que de dimension infinie, possde une base trs simple :

$$\mathcal{U} = \{\nu_1 = (1, 0, 0 \cdots), \nu_2 = (0, 1, 0, \cdots), \nu_3 = (0, 0, 1, 0 \cdots), \nu_4 = (0, 0, 0, 1, 0 \cdots), \cdots\}$$

En effet toute suite de ℓ_F est une combinaison linaire (finie) de tels lments. Cependant cette famille ne constitue pas une base pour l'espace ℓ^1 des suites de module sommable et on souhaite utiliser la famille $\mathcal{U}$ qui est trs naturelle et facile manipuler.

Nous sommes trs tents d'crire les lments de ℓ_F comme une somme infinie d'lments de $\mathcal{U}$, mais pour que cela ait un sens il est ncessaire de dfinir une topologie, par exemple avec une norme, voire une norme induite par un produit scalaire.

La question se pose alors ; pouvons nous gnraliser les outils de gomtrie pour tudier des espaces de dimension infinie ?

C'est dans ce contexte qu'est ne l'analyse de Hilbert au dbut du 20-ime sicle au travers des travaux de Erhard Schimdt, Frigyes Riesz et bien sr David Hilbert.

0.1.2 Bases de Hilbert

Dfinition 2. Un espace vectoriel E est dit *de Hilbert* (ou *Hilbertien*) s'il est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et qu'il est complet pour la norme induite par ce produit scalaire.

On ne s'intressera ici qu' un certain type d'espaces hilbertiens ; ceux qui sont dits *sparables* :

Dfinition 3. Un espace vectoriel norm E est dit *sparable* s'il admet une famille *dense* et *dnombrable*.
C'est--dire s'il existe $F = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{F} = E$

Exemple 1.

1. $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue est sparable : $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, et l'ensemble des rationnels est bien dnombrable.

2. Plus gnralement si $E \cong \mathbb{R}^n$ pour un certain $n \geqslant 1$, et $\mathbf{e} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E, alors on construit l'ensemble des combinaisons linaires de $\mathbf{e}$ coefficients dans $\mathbb{Q}$:

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^{n} q_i e_i \mid \{q_i\}_i \subset \mathbb{Q} \right\}$$

   Cet ensemble est bien dnombrable : il est quipotent $\mathbb{Q}^n$, et il s'agit bien d'une partie dense dans E.
   En effet pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ on peut trouver n suites $\{q_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ telles que $q_{i,j} \to x_i$ $(j \to \infty)$ pour ainsi obtenir $x_j := \sum_{i=1}^{n} q_{i,j} e_i$ de limite x.

On remarque que si on s'autorisait prendre dans le second exemple des coefficients rels on aurait $F = E$ car $\mathbf{e}$ est une base. Dans un cas plus gnral (ou plutt un cas bien particulier ; toujours celui de ℓ^1), si $\mathbf{e}$ n'est pas une base mais seulement une famille libre agrable manipuler et que l'on souhaite absolument utiliser, est-ce que l'ensemble des combinaisons linaires d'lments de e donne tout l'espace initial ? (Non, sinon j'aurais prcis qu'elle tait galement gnratrice).

Dfinition 4. Une partie $P \subset E$ est dite totale si $Vect(P) = \{$combinaisons linaires d'lments de $P\}$ est dense dans E.

Exemple 2. Prenons l'exemple de ℓ^2 muni de la norme suivante

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2}$$

Montrons que toute suite de cet espace s'crit dans $\mathcal{U}$ de la forme $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \nu_n$, o la convergence a lieu au sens de $\| \cdot \|_2$.

Soit $u \in \ell^2$, on a

$$\left\| u - \sum_{k=0}^{n} \nu_k u_k \right\|_2^2 = \|(0, 0, \cdots u_{n+1}, u_{n+2} \cdots)\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k|^2$$

Or $\sum |u_n|^2$ est une suite convergente, la valeur prcdente converge donc bien vers 0. Toute suite de ℓ^2 peut alors tre crite comme une limite de combinaisons linaires d'lments de $\mathcal{U}$, $Vect(\mathcal{U})$ est bien une partie totale de ℓ^2.

La famille $\mathcal{U}$ a beau ne pas tre une base, elle a le mrite d'tre facile apprhender et de permettre de dcomposer tout lment de ℓ^2 en une srie absolument convergente. On munit prsent cet espace du produit scalaire induisant $\| \cdot \|_2$:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \overline{v_n}$$

On remarque que $\mathcal{U}$ est orthonormale pour ce produit scalaire.

Proposition 1. *ℓ^2 muni de ce produit scalaire forme un espace Hilbertien.*

Preuve 1. En effet soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy valeurs dans ℓ^2, on a pour tout $\varepsilon > 0$ un entier $N \geqslant 0$ tel que pour tout $p \geqslant 0$

$$\|u_N - u_{N+p}\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_{N,n} - u_{N+p,n}|^2 \leqslant \varepsilon$$

en notant $u_N = (u_{N,0}, u_{N,1}, u_{N,2} \cdots)$.

On en dduit pour tout n $|u_{N,n} - u_{N+p,n}|^2 \leqslant \varepsilon$ ce qui signifie que chaque suite $(u_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy valeurs dans $\mathbb{C}$ qui lui est complet.

Soient v_n la limite des n-ime composante des suites $(u_N)_{N\in\mathbb{N}}$, on a pour tout M :

$$\sum_{n=0}^{M} |v_n|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{M} |u_{N,n}|^2 \leqslant \lim_{N\to\infty} \|u_N\|_2^2$$

Or la suite $(u_N)_N$ est de Cauchy donc borne, la somme est alors elle aussi borne donc convergente car termes positifs. $(v_n)_n$ est donc bien un lment de ℓ^2.

□

$\mathcal{U}$ est alors une famille orthonorme et totale de ℓ^2, c'est--dire "presque" gnratrice (si on accepte d'abandonner la restriction de combinaisons linaires finies), cela mrite tout de mme un nom !

Dfinition 5. Une famille $\mathcal{F} \subset H$ est appele *base hilbertienne* si elle est orthonormale et totale.

Cette notion est une gnralisation de celle de base, ce qui soulve immdiatement certaines questions :

- Existe-il toujours une base hilbertienne ?
- Les bases Hilbertiennes sont elles toutes de mme cardinal ?
- Toute base hilbertienne est elle encore une famille orthonormale maximale pour l'inclusion et rciproquement ?

Nous avons annonc plus haut que nous ne nous intresserions qu'aux espaces sparables, ce qui nous permet de rpondre la premire question :

Proposition 2. *Tout espace Hilbertien sparable admet une base Hilbertienne.*

Preuve 2. Soit E un espace hilbertien et $\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ une partie dense dans E. Nous allons construire une base hilbertienne $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ partir de $\mathbf{g}$ en l'orthonormalisant par le procd de Gramm-Schmidt.

On supposera $0 \notin \mathbf{g}$ et E de dimension infinie, dans le cas de la dimension finie la suite construite par rcurrence est finie et est une base en tant que famille libre (car orthonorme) maximale.

On note $G_n = \mathrm{Vect}(g_0, g_1 \cdots g_n)$ et $F_n = \mathrm{Vect}(f_0, f_1 \cdots f_n)$.

Construction et orthonormalit On pose $f_0 = \dfrac{g_0}{\|g_0\|}$ et on construit par rcurrence la suite $\mathbf{f}$ de manire ce qu' tout rang $n \in \mathbb{N}$ la famille $(f_0, f_1 \cdots f_n)$ soit orthonormale.

Soit $n \geqslant 0$, on suppose disposer de $f_0, f_1 \cdots f_n$ comme ci-dessus. E est de dimension infinie et $\mathbf{g}$ est dense, il existe alors un plus petit m tel que $G_m \setminus F_n \neq \emptyset$. On choisit un $x \in G_m \setminus F_n$, celui-ci est alors linairement indpendant des vecteurs f_0 f_n, on peut donc l'orthonormaliser :

$$y = x - \sum_{k=0}^{n} \langle x, f_k \rangle f_k$$

$$f_{n+1} = \frac{y}{\|y\|}$$

$(f_0, f_1 \cdots f_{n+1})$ est ainsi une famille orthonormale.

Totalit A tout rang n on a $\{g_0, \cdots g_n\} \subset F_n$ et donc $G_n \subset F_n$. En faisant l'union pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient $\mathbf{g} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. $\mathbf{g}$ tant par hypothse dense dans E, on obtient le rsultat en passant l'adhrence :

$$E = \overline{\mathbf{g}} \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n} = \overline{\mathrm{Vect}(f_0, f_1 \cdots)} \subset E$$

□

Ainsi il existe toujours une base hilbertienne dans un espace hilbertien sparable. De plus, toutes les bases hilbertiennes sont quipotentes entre elles.

Cette proprit est vidente dans le cas de la dimension finie, pour le dmontrer en dimension infinie, il suffit de montrer que toute base s'injecte dans $\mathbb{N}$ o plus gnralement dans un ensemble dnombrable.

Proposition 3. *Dans un espace hilbertien sparable, toutes les bases sont de mme cardinal.*

Preuve 3. Soit E un espace de Hilbert sparable de dimension infinie et $\mathcal{B} = \{f_i \mid i \in I\}$ une base de E.

Par dfinition E admet une famille dense dnombrable $\mathcal{F} = \{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, nous allons approximer notre base par ses lments ce qui donnera une injection de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{F}$.

Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $f \in \mathcal{B}$, il existe un $g \in \mathcal{F}$ distance au plus ε de f, on pose $\varphi_\varepsilon(f) = g$.

Ainsi pour tout $f, f' \in \mathcal{B}$ on a l'ingalit suivante :

$$\|f - f'\| \leqslant \|f - \varphi_\varepsilon(f)\| + \|\varphi_\varepsilon(f) - \varphi_\varepsilon(f')\| + \|f' - \varphi_\varepsilon(f')\| \leqslant 2\varepsilon + \|\varphi_\varepsilon(f) - \varphi_\varepsilon(f')\|$$

$$\|f - f'\| - 2\varepsilon \leqslant \|\varphi_\varepsilon(f) - \varphi_\varepsilon(f')\|$$

$\mathcal{B}$ tant orthonorme, si f et f' sont distincts, la valeur $\|f - f'\| = \sqrt{2}$ est indpendante de f, f' et ε, ainsi pour ε assez petit

$$\forall f, f' \in E,\ f \neq f' \Longrightarrow \|\varphi_\varepsilon(f) - \varphi_\varepsilon(f')\| > 0$$

c'est--dire $\varphi_\varepsilon : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{F}$ est injective car on a $x \neq y \Longrightarrow \varphi_\varepsilon(x) \neq \varphi_\varepsilon(y)$.

□

Rpondons prsent la troisime question : il y a-t-il encore quivalence entre tre une base hilbertienne et tre une famille orthonorme maximale pour l'inclusion ?

La rponse est oui !

Thorme 1. *Dans un espace Hilbertien, une famille orthonorme est une base hilbertienne si et seulement si elle est maximale.*

Ici "maximal" est au sens d'une partie vrifiant une certaine proprit (que tous ses lments soient orthogonaux entre eux), c'est--dire qu'elle contient tous les vecteurs non-nuls orthogonaux tous ses autres lments.

Pour dmontrer ce thorme, nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 1. *Soit $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une famille orthonorme et $F = \mathrm{Vect}(e_0, e_1 \cdots)$*

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall f \in E,\ \sum_{k=0}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 \leqslant \|f\|^2$ *(Ingalit de Bessel)*
2. *L'application $\pi_F : E \longrightarrow \overline{F}$ donne par $\pi_F(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n\rangle e_n$ est bien dfinie et est la projection orthogonale de E sur $\overline{F}$.*

Preuve 4. Preuve de 1. :

Soit $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k \right\|^2 \geqslant 0$$

$$\|f\|^2 + \left\| \sum_{k=0}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k \right\|^2 - 2Re \left\langle f, \sum_{k=0}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k \right\rangle \geqslant 0$$

$$\|f\|^2 + \sum_{k=0}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2 - 2Re \left\langle f, \sum_{k=0}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k \right\rangle \geqslant 0$$

$$\|f\|^2 + \sum_{k=0}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2 - 2Re \sum_{k=0}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2 \geqslant 0$$

$$\|f\|^2 + \sum_{k=0}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2 - 2 \sum_{k=0}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2 \geqslant 0$$

$$\|f\|^2 \geqslant \sum_{k=0}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2$$

Preuve de 2.

La srie $\sum \langle f, e_n \rangle e_n$ vrifie le critre de Cauchy, or l'espace E est complet en tant qu'espace Hilbertien, alors la srie est convergente. En effet pour tout $N, p \geqslant 0$:

$$\left\| \sum_{k=0}^{N} \langle f, e_n \rangle e_n - \sum_{k=0}^{N+p} \langle f, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \left\| \sum_{k=N+1}^{N+p} \langle f, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{k=N+1}^{N+p} |\langle f, e_n \rangle|^2$$

Or par le point prcdent, la srie $\sum |\langle f, e_n \rangle|^2$ est convergente, donc $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{N+p} |\langle f, e_n \rangle|^2$ peut tre rendu aussi petit que l'on souhaite, $\pi_F(f)$ existe donc.

Montrons prsent que $f - \pi_F(f)$ est orthogonal tout vecteur de F, c'est--dire orthogonal tout vecteur de la base de F.

Soit e_i un vecteur de la famille orthonorme, f un vecteur de E

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=0}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k, e_i \right\rangle &= \sum_{k=0}^{n} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, e_i \rangle \\ &= \langle f, e_i \rangle \langle e_i, e_i \rangle \\ &= \langle f, e_i \rangle \end{aligned}$$

Ainsi $\left\langle f - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k, e_i \right\rangle = \langle f, e_i \rangle - \langle f, e_i \rangle = 0$, on en conclut en faisant tendre n vers ∞ que $\pi_F(f) - f \in F^{\perp}$. π_F est bien la projection orthogonale de E sur $\overline{F}$.

□

Nous pouvons prsent revenir la preuve du thorme qui nous intresse.

Preuve 5. Soit $\mathcal{F} = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une famille orthonormale d'un espace hilbertien E.

Si $\mathcal{F}$ est une base hilbertienne, alors elle est maximale : Soit f un vecteur orthogonal tout lment de $\mathcal{F}$, montrons $f \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ tant une base hilbertienne, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une famille de scalaires $(\lambda)_{i\in I}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ fini tel que

$$\left\| f - \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \right\|^2 < \varepsilon$$

$$\left\langle f - \sum_{i\in I} \lambda_i e_i, f - \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \right\rangle < \varepsilon$$

$$\|f\|^2 - \left\langle f, \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i\in I} \lambda_i e_i, f \right\rangle + \sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 < \varepsilon$$

$$\|f\|^2 - \sum_{i\in I} \lambda_i \langle f, e_i\rangle - \sum_{i\in I} \lambda_i \langle e_i, f\rangle + \sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 < \varepsilon$$

On a suppos f orthogonal la famille $\mathcal{F}$:

$$\|f\|^2 + \sum_{i\in I} |\lambda_i|^2 < \varepsilon$$

$$\|f\|^2 < \varepsilon$$

On en dduit $f = 0$, $\mathcal{F}$ est donc maximale.

Si $\mathcal{F}$ est maximale, alors c'est une base hilbertienne : D'aprs le lemme prcdent, pour tout $f \in E$, $(f - \pi_F(f)) \in F^\perp$, alors par maximalit de la famille $\mathcal{F}$ on a $f - \pi_F(f) = 0$, d'o le rsultat.

□

0.2 Espaces de Lebesgue

Dfinition 6. tant donns μ une mesure sur $\mathbb{R}$ et $p \in [1, +\infty[$, on dfinit

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) = \left\{ f \,:\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

Il s'agit d'un espace vectoriel. De plus, l'application $\|\cdot\|_p \,:\, \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ donne par

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

dfinit une semi-norme : elle vrifie bien la proprit d'homognit et l'ingalit triangulaire [1], mais pas le fait d'tre dfinie. En effet, certaines fonctions non nulles f vrifient $\|f\|_p = 0$ (si elles sont nulles presque partout). Par exemple,la fonction caractristique de $\mathbb{Q}$.

On peut palier ce problme en quotientant $\mathcal{L}^p$ par son sous espace des fonctions nulles presque partout. Si f et g concident presque partout, alors $\|f\|_p = \|g\|_p$. Cette application reste donc bien dfinie sur l'espace quotient, et on a prsent que $\|[f]\|_p = 0$ implique $f \equiv 0$ presque partout, o $[f]$ est classe d'quivalence de f. Donavant, on utilisera f pour exprimer la classe d'quivalence de f.

Dfinition 7. On note cet espace quotient $L^p(\mathbb{R})$, et on l'appelle espace de Lebesgue. Muni de la norme $\| \cdot \|_p$, il constitue un espace de Banach (thorme de Riesz-Fisher) [2].

On effectue la mme construction pour les fonctions 2π-priodiques que l'on note $L^p(\mathbb{T})$.

Remarque 1. Les fonctions 2π-priodiques peuvent tre vues comme des fonctions dfinies sur le cercle $\mathbb{S}^1$.

1. Thorie de la mesure et de l'intgration, Thierry Gallay, UJF
2. Thorie de la mesure et de l'intgration, Thierry Gallay, UJF

Deuxime partie

Analyse du signal

0.3 L'analyse de Fourier

En termes d'analyse du signal, l'utilisation de l'analyse de Fourier parait tre indispensable. Le principe sous-jacent cette analyse provient de l'tude des Sries de Fourier, qui permet sous certaines conditions de dcomposer un signal priodique en une somme de signaux sinusodaux de mme frquence et de frquences harmoniques.

Nous allons tudier les outils sur lesquels reposent cette analyse, puis observer l'application sur des exemples, qui mettront en valeur les limites de ce procd et la ncessit d'utiliser une analyse plus pousse comme l'analyse en ondelettes. Cette partie sera limite aux fonctions d'une seule variable.

0.3.1 Sries de Fourier

Dans cette partie, nous voulons d'abord tudier le cas des fonctions de $L^2(\mathbb{T})$. On verra que dans cet espace fonctionnel, il existe une base dans laquelle n'importe quelle fonction peut tre dcompose de manire unique. De plus, il sera important de prendre en compte la notion de convergence de cette dcomposition qui est ncessaire dans de nombreuses applications.

On se restreint aux fonctions 2π-priodiques, car l'tude des autres fonctions priodiques reste la mme des coefficients multiplicatifs prs.

Dfinition 8. On munit $L^2(\mathbb{T})$ d'un produit scalaire et de sa norme induite, dfinis par :

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Il s'agit ainsi d'un espace de Hilbert.

Dfinition 9. On dfinit pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e_k(t) := e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}$.

Ces fonctions sont aux polynmes trigonomtriques ce que les puissances de l'indtermine sont aux polynmes classiques.

Dfinition 10. Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{T})$ et N un entier positif, on dfinit sa N-ime srie de Fourier par

$$\begin{aligned} S_N(f) &= \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e_k \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \langle f, e_k\rangle e_k \end{aligned}$$

o c_k est le k-ime coefficient de Fourier de f.

La N-ime srie de Fourier d'une fonction f est sa projection orthogonale sur l'espace engendr par $e_{-N}, e_{-N+1} \cdots e_N$. On retrouve une proprit intuitive des projections orthogonales, qui porte ici le nom d'ingalit de Bessel :

Thorme 2. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a pour tout N, $\|S_N(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$*

Preuve 6.

$$\begin{aligned}
\|f - S_N(f)\|_2^2 &= \langle f - S_N(f), f - S_N(f)\rangle \\
&= \|f\|_2^2 + \|S_N(f)\|_2^2 + \langle f, S_N(f)\rangle + \langle S_N(f), f\rangle \\
&= \|f\|_2^2 + \|S_N(f)\|_2^2 + \langle f, S_N(f)\rangle + \overline{\langle f, S_N(f)\rangle} \\
&= \|f\|_2^2 + \|S_N(f)\|_2^2 - 2Re(\langle f, S_N(f)\rangle) \quad \text{car } \langle f, S_N(f)\rangle = \|S_N(f)\|^2 \\
&= \|f\|_2^2 - \|S_N(f)\|_2^2
\end{aligned}$$

$\|f\|_2^2 - \|S_N(f)\|_2^2 \geqslant 0$, d'o le rsultat. □

On remarque galement que si P est un polynme trigonomtrique, alors $S_N(P) = P$ pour $N = \deg P$.

Proposition 4. *$(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne.*

Preuve 7. On cherche montrer qu'il s'agit d'une famille orthonorme et dont les combinaisons linaires sont denses dans $L^2(\mathbb{T})$. Plus prcisment, qu'elle est orthonorme et que pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k = f \quad (\text{dans } L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2)$$

Soient $k, l \in \mathbb{Z}$, si $k = l$

$$\begin{aligned}
\langle e_k, e_l\rangle = \|e_k\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_k(t)\overline{e_k(t)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-ikt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1dt \\
&= 1
\end{aligned}$$

Sinon,

$$\begin{aligned}
\langle e_k, e_l\rangle_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_k(t)\overline{e_l(t)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-ilt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(k-l)t}}{i(k-l)}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{e^{i(l-k)2\pi} - e^{i(l-k)0}}{i2\pi(l-k)} \\
&= \frac{1-1}{i2\pi(l-k)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Montrons prsent que toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ admet une dcomposition unique dans cette base.

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $\varepsilon > 0$, sachant que les fonctions 2π-priodiques continues sont denses dans $L^2(\mathbb{T})$, il existe f_0 continue et 2π-priodique telle que $\forall t,\ |f(t) - f_0(t)| < \varepsilon$.

Celle-ci tant priodique, on en dduit l'existence de F_0 dfinie sur le cercle unit telle que $f_0(t) = F_0(e^{it})$.

D'aprs le thorme de Stone-Weierstrass, il existe un polynme trigonomtrique P tel que $\forall t,\ |f_0(t) - P(e^{it})| < \varepsilon$. Par l'ingalit triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}
\|S_N(f) - f\|_2 &\leqslant \|S_N(f) - S_N(P)\|_2 + \|S_N(P) - P\|_2 + \|f - P\|_2 \\
&\leqslant 2\|f - P\|_2 + \|S_N(P) - P\|_2 \quad \text{par l'ingalit de Bessel} \\
&\leqslant 2\|f - P\|_2 \quad \text{pour } N \geqslant \deg(P) \\
&\leqslant 2\|f - f_0\|_2 + 2\|f_0 - P\|_2 \\
&\leqslant 4\varepsilon
\end{aligned}$$

□

Comme cette famille est une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$, il est donc possible de dcomposer les fonctions de cet espace dans cette base de manire unique. C'est dire que :

$$\lim_{N \to +\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$$

On dit que la convergence est en moyenne quadratique.

Il est possible d'tendre l'analyse en sries de Fourier pour les fonctions priodiques de $L^1(\mathbb{T})$, tout en conservant une notion de convergence.

Thorme 3. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Si ses coefficients de Fourier forment une famille sommable, $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$, alors :*

$$\lim_{N \to +\infty} \|S_N(f) - f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 0$$

Et f admet un reprsentant continu.

Preuve 8. $S_N(f)$ converge normalement (vers une limite continue) :

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} \|c_p(f) e_p\|_\infty = \sum_{p \in \mathbb{Z}} |c_p(f)| < \infty$$

$S_N(f)$ converge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et donc pour $\|\cdot\|_{L^\infty}$. Par injection continue de $L^\infty(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$, S_N, sa limite dans $L^\infty(\mathbb{T})$ concide avec f (sa limite dans $L^2(\mathbb{T})$). Donc f admet bien un reprsentant continu.

□

Au del de l'existence d'une convergence, il peut-tre utile d'tudier la vitesse de convergence. Il s'agit d'tudier la dcroissance des coefficients de Fourier d'une fonction.

Thorme 4. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$. Alors, $c_p(f^{(k)}) = (ip)^k c_p(f)$ et il existe une constante C telle que :*

$$|c_p(f)| \leqslant \frac{C}{|p|^k}$$

Preuve 9. Par rcurrence sur k. pour $k = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
c_p(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_0^2 \pi f(t) e^{-ipt} dt \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_0^2 \pi f(t)(-ip) e^{-ipt} dt + \frac{1}{2\pi} \left[f(t) e^{-ipt} \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{ip}{2\pi} \int_0^2 \pi f(t) e^{-ipt} dt \\
&= \frac{ip}{2\pi} c_p(f)
\end{aligned}$$

Et on conclut par rcurrence sur k.

De plus,

$$|c_p(f^{(k)})| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(k)}(t)| dt$$

$$\sup_{[0,2\pi]} |f^{(k)}(t)| =: C$$

Donc $|c_p(f)| = \dfrac{|c_p(f^{(k)})|}{|p|^k} \leqslant \dfrac{C}{|p|^k}$. □

Exemple 3. tudions la dcomposition en sries de Fourier de la fonction 2π-priodique en crneaux dfinie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{sur } [-\pi, 0[\\ 1 & \text{sur } [0, \pi[\end{cases}$$

Calculons d'abord les coefficients de Fourier de la fonction. Pour $p \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} e^{-ipt} dt + \int_{0}^{\pi} e^{-ipt} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{e^{-ipt}}{ip} \right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{e^{-ipt}}{ip} \right]_{0}^{\pi} \right) \\ &= \frac{-i + i(-1)^p}{\pi p} \end{aligned}$$

tudions les valeurs de c_p en fonction de p. Si $p = 2q$, $q \in \mathbb{Z}$, alors

$$c_{2q} = \frac{-i + i(-1)^{2q}}{\pi 2q} = 0$$

Si $p = 2q + 1$, alors :

$$c_{2q+1} = \frac{-i + i(-1)^{2q+1}}{\pi(2q + 1)} = \frac{-2i}{\pi(2q + 1)} = \frac{2}{i\pi(2q + 1)}$$

Ds lors, on peut sommer uniquement sur les termes impairs :

$$\begin{aligned} S_{2N+1} = \sum_{\substack{k=-2N-1 \\ k \neq 0}}^{2N+1} c_k e^{ikt} &= \sum_{\substack{k=-N-1 \\ k \neq 0}}^{N} c_{2k+1} e^{i(2k+1)t} \\ &= \sum_{k=1}^{N} c_{2k+1} e^{i(2k+1)t} + c_{-(2k+1)} e^{-i(2k+1)t} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{2e^{i(2k+1)t}}{i\pi(2k + 1)} - \frac{2e^{-i(2k+1)t}}{i\pi(2k + 1)} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{4}{\pi(2k + 1)} \sin((2k + 1)t) \qquad \text{d'aprs le formule d'Euler} \end{aligned}$$

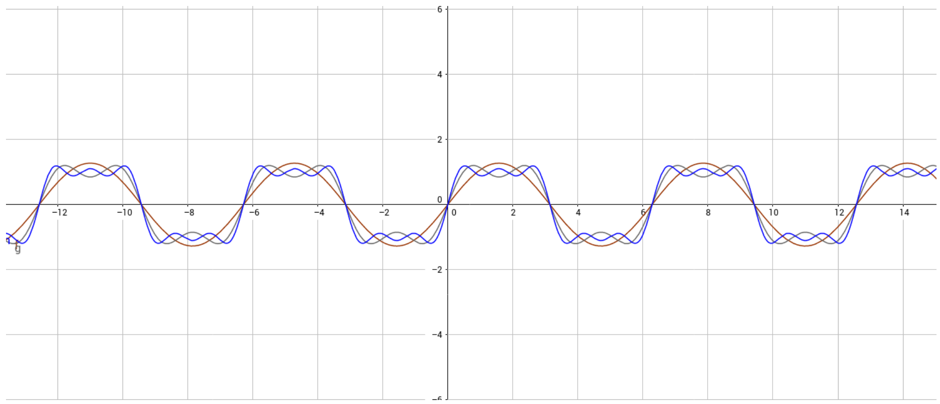

FIGURE 1 – Approximation de la fonction carre par S_1 (rouge), S_3 (vert) et S_5 (bleu)

0.3.2 Transforme de Fourier

La transforme de Fourier permet d'tendre les notions abordes dans le cadre des sries de Fourier dans un cadre plus gnral, notamment pour des fonctions non priodiques. Dans ce cadre, on ne peut plus se restreindre la famille des e_k dfinie prcdemment, car la notion de pulsation n'est plus valable dans ce cadre.

Dfinition 11. Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ valeurs relles ou complexes. La *Transforme de Fourier* est une fonction complexe dfinie par :

$$\mathcal{F}[f](\xi) = F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t}dt$$

Remarque 2. La condition que la fonction f soit intgrale est suffisante pour que l'intgrale soit bien dfinie et que la transforme de Fourier existe. De plus, $F(\xi)$ sera une fonction continue et borne qui tend vers 0 lorsque $|\xi| \longrightarrow \infty$.

En effet, $|f(t)e^{-i\xi t}| \leqslant |f(t)|$ et t fix $\xi \mapsto f(t)e^{-i\xi t}$ est continue.

Preuve 10. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrons que $f(\xi) \to 0$ quand $|\xi| \to \infty$. On peut se contenter de le prouver pour un sous ensemble E dense dans $L^1(\mathbb{R})$ (hypothse $(*)$). En effet soit $\varepsilon > 0$, il existe $h \in E$ tel que $\|f - g\|_1 < \varepsilon/2$, on a ainsi les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\xi t}dt \right| \\
&\leqslant \left| \int_{\mathbb{R}} (f(t) - h(t))e^{-i\xi t}dt \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-i\xi t} \right| \quad \text{par l'ingalit triangulaire} \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t) - h(t)|dt + \left| \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-i\xi t} \right| \\
&= \varepsilon/2 + \left| \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-i\xi t} \right| \\
&= \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \quad \text{pour } \xi \text{ assez grand par l'hypothse } (*)
\end{aligned}$$

L'hypothse $(*)$ est bien vrifie pour E tant l'espace des fonctions continment drivables et support compact. Soit $g \in E$, disons dfinie sur $[a, b]$, on a grce une intgration par partie :

$$\int_a^b f(t)e^{-i\xi t}dt = \frac{i}{\xi}f(t)e^{-i\xi t}\Big|_{t=a}^{t=b} - \frac{i}{\xi}\int_a^b f'(t)e^{-i\xi t}dt \longrightarrow 0 \quad (|\xi| \to \infty)$$

□

Nous pourrons nous restreindre aux fonctions de L^1 pour cette tude. Comme pour l'tude des sries de Fourier, une notion trs importante est de pouvoir reconstruire le signal partir de sa transforme de Fourier. Pour ce faire, il est possible d'utiliser la transforme de Fourier inverse.

Dfinition 12. En ajoutant la condition que f soit continue aux conditions prcdentes, on peut dfinir la *transforme de Fourier inverse* par :

$$\overline{\mathcal{F}}[F](t) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)e^{i\xi t}dt$$

Remarque 3. Si la condition de la continuit de f n'est pas respecte, la transforme de Fourier de f sera quand mme dfinie, mais l'galit entre f et $\overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}[f]]$ ne sera vrifie que presque partout.

Exemple 4. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction dfinie par $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [-a;a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Calculons sa transforme de Fourier :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t}dt \\
&= \int_{-1}^{1} e^{-i\xi t}dt \\
&= \left[-\frac{e^{-i\xi t}}{i\xi}\right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{-e^{-ia\xi} + e^{ia\xi}}{i\xi} \\
&= \frac{2\sin a\xi}{\xi} \qquad \text{d'aprs la formule d'Euler}
\end{aligned}$$

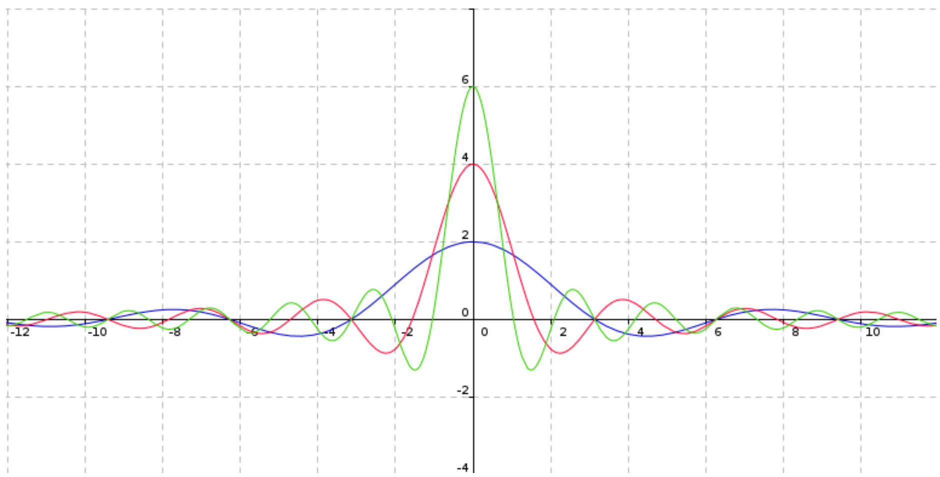

FIGURE 2 – Transforme de Fourier de f pour a = 1 (bleu), 2 (rouge), 3 (vert)

0.3.3 Transforme de Fourier fentre glissante

La transforme de Fourier fentre glissante est une solution par rapport au problme de la notion de temporalit apport par l'tude de signaux continus et non plus priodiques.

En reprenant la dfinition de la transforme de Fourier prcdente, on peut l'tendre pour ajouter la notion de fentre glissante.

Dfinition 13. Soit f une fonction qui possde une transforme de Fourier. On peut dfinir la *Transforme de Fourier fentre glissante* par :

$$F(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} \overline{w(t-\tau)} dt$$

o w est la fonction de fentrage, et τ le paramtre de translation.

Il s'agit ensuite de trouver le format de fentre adquat. La fonction la plus simple imaginer est sans doute la fonction "porte" dfinie par $w(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [-1;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Cependant, il en existe de nombreuses autres dont on parlera plus tard.

Remarque 4. Il existe galement une transforme inverse pour la transforme de Fourier fentre glissante.

0.3.4 Transforme de Fourier discrte

Ces conditions sont nous permettent de dfinir un cadre pour utiliser la transforme de Fourier. Nanmoins, lors d'applications l'informatique, nous ne pouvons pas conserver une infinit de valeurs, et il est ncessaire de pouvoir travailler sur des valeurs discrtes, tout en conservant au plus les proprits pour dcomposer et recomposer les fonctions. Dans le cadre de la transforme de Fourier discrte, au lieu d'utiliser des fonctions, nous allons nous intresser des suites qui correspondront l'chantillonnage de la fonction. Il est important de noter que ces suites seront finies, pour correspondre l'espace de stockage fini des ordinateurs.

Dfinition 14. On dfinit la frquence d'chantillonnage comme le nombre d'chantillons par unit de temps.

Pour que l'chantillonnage soit suffisant pour obtenir une reconstitution de qualit suffisante, on peut se rfrer au thorme de Nyquist-Shannon.

Thorme 5. *Si une fonction $f(t)$ ne contient pas de frquences plus leves que B Hz, il est compltement dcrit en donnant une suite de ses valeurs a des points rgulirement espacs tout les $\frac{1}{2B}$ secondes.*

Dans la mesure o tous les appareils utiliss pour enregistrer des signaux ne peuvent pas capter de valeurs infinies, il sera possible de reconstituer le signal partir de cette suite de valeurs, avec pour limite la qualit des appareils d'enregistrements et non pas les outils mathmatiques. Dans certains cas, l'acuit humaine peut galement servir de limite.

Exemple 5. Pour les enregistrements audios, la frquence d'chantillonnage des fichiers pour le format CD est traditionnellement de 44 100 Hz, ce qui est juste suprieur au double de la frquence la plus leve que peut percevoir l'oreille humaine en thorie, c'est dire 20 000 Hz.

Dfinition 15. On considre une suite $(s_n)_{n\in\{0;N-1\}}$ de N termes. La transforme de Fourier Discrte permet d'obtenir la suite $(S_n)_{n\in\{0;N-1\}}$ de N termes dfinis par :

$$S_k = \sum_{k=0}^{N-1} s_n e^{-2i\pi k \frac{n}{N}}$$

De la mme manire que pour la transforme de Fourier, on pourra galement dfinir la transformation inverse.

Dfinition 16. Dans les mmes conditions que ci dessus, on dfinit la transforme de Fourier discrte inverse par :

$$s_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{2i\pi k \frac{n}{N}}$$

Ces transformations sont sans pertes d'informations, ainsi, si les conditions du thorme de Nyquist-Shannon sur la frquence d'chantillonnage ont t respectes, alors le signal peut tre reconstitu sans perte via ces transformations successives.

L'avantage de l'utilisation de la transforme de Fourier discrte se retrouve galement dans la vitesse d'excution des calculs. En effet, la transforme de Fourier continue d'un chantillon de N termes a une complexit en $O(N^2)$ alors qu'il existe des algorithmes comme celui de La transforme de Fourier rapide, qui sous certaines conditions sur le nombre de termes de la suite transformer, par exemple tre une puissance de 2, peuvent atteindre une complexit en $O(N\log(N))$.

Dans le cas classique, pour calculer chacun des N coefficients, il faut effectuer N multiplications, d'o une complexit en $O(N)$. Dans le cas de l'algorithme de Cooley-Tukey, si N est une puissance de 2, alors il est possible de rcrire la somme S_N en deux sommes, l'une sur les termes pairs et l'autre sur les termes impairs. Ces deux sommes sont des transformes de Fourier discrtes sur $N/2$ points. Grce la priodicit de la transforme de Fourier, on peut dduire que si $S_k = P_k + I_k$, avec P_k et I_k les transformes sur les termes pairs et impairs de longueur $N/2$, alors $S_{k+\frac{N}{2}} = P_k + I_k$. Rcursivement, on peut appliquer cette dcomposition pour calculer P_k et I_k, ce qui nous donne la complexit attendue.

Troisime partie

Analyse du signal

On munit prsent $L^2(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dfini par

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt$$

et de la topologie induite par la norme correspondante.

0.4 Analyse multi-rsolution

0.4.1 Introduction

Nous allons enrichir la thorie des espaces de Hilbert d'une notion de "finesse" particulirement adapte l'objet central de ce rapport. En effet, dans le cadre de l'approximation d'un signal, que nous modlisons par une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, cette notion prend tout son sens comme le montre l'image ci-dessous.

FIGURE 3 – Une image de voiture pour trois rsolutions diffrentes

Les images peuvent tre modlises comme des fonctions de $\mathbb{R}^2$, pour les coordonnes spatiales, dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^3$) dans le cas d'une image en noir et blanc (resp. en couleur RVB). Dans le cas d'un signal sonore, sachant qu'un son est une onde, il peut tre reprsent par une fonction de $\mathbb{R}$, pour le temps, dans $\mathbb{R}$, pour l'amplitude de d'oscillation.

Avant de dfinir l'analyse multi-rsolution, explorons plus profondment cette notion de "finesse".

Quelle finesse !

Nous allons prendre pour exemple les signaux unidimensionnels (tels les sons). Soit $f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, nous allons l'approximer par des fonctions constantes par morceaux (dites tages), dont les morceaux sont de plus en plus petits.

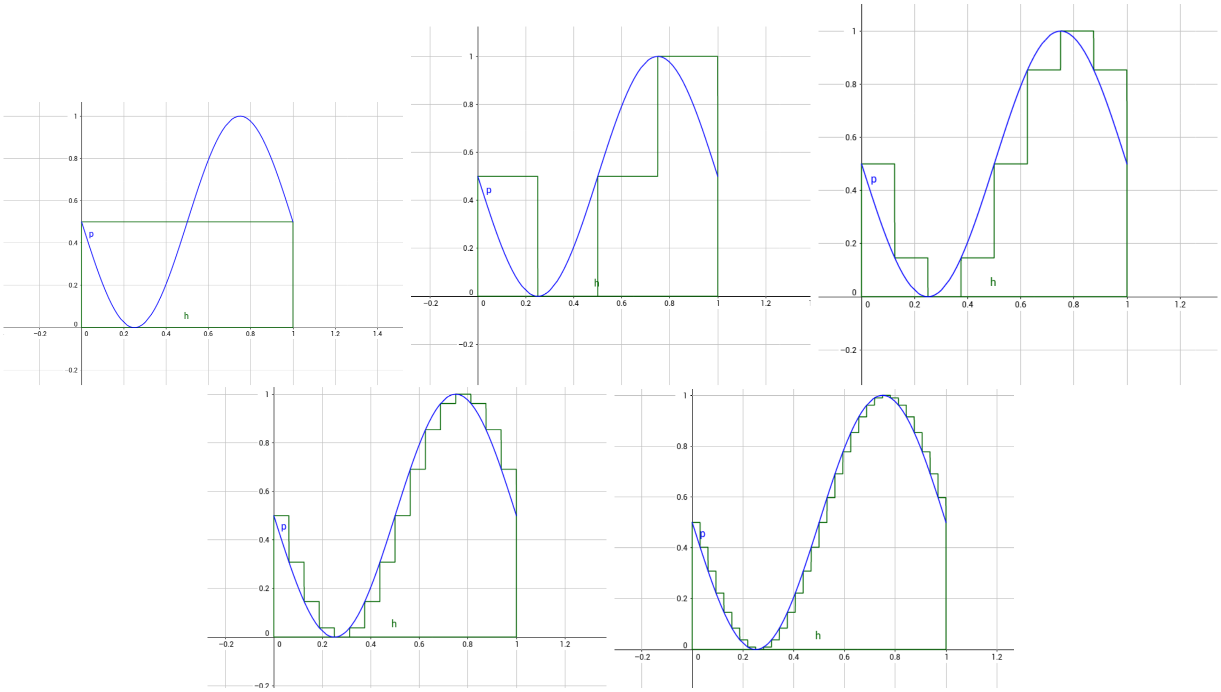

FIGURE 4 – f approxime par des fonctions dont les morceaux sont de tailles 1, 1/2, 1/4, 1/8 et 1/16

Sur la figure on approxime f par des fonctions f_n tages dont les morceaux sont de tailles 2^{-n}, on peut voir chaque f_n comme une combinaison linaire de fonctions caractristiques de la forme suivante

$$f_n = \sum_{k=0}^{2^n} a_{n,k} \mathbb{1}_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[}$$

La premire remarque que l'ont peut faire est que chaque $\mathbb{1}_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[}$ est le translat de $\mathbb{1}_{[0,2^{-n}[}$, que l'on notera I_n. On rcrit alors

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n} a_{n,k} I_n \left(x - k2^{-n}\right)$$

La seconde est que I_n est une contraction de I_1 que l'on notera I. On en tire notre dernire rcriture :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n} a_{n,k} I \left(\frac{x - k2^{-n}}{2^{-n}}\right) = \sum_{k=0}^{2^n} a_{n,k} I \left(2^n x - k\right)$$

Ainsi si on fixe $I = \mathbb{1}_{[0,1[}$ comme fonction de rfrence dans notre dcomposition, la suite de fonctions $(f_n)_n$ est entirement dtermine par les coefficients $(a_{n,k})_{n,k}$

0.4.2 L'analyse multi-rsolution

Dans l'exemple introductif, pour tout n on a pu voir que f_n tait une combinaison linaire du translat d'une fonction I_n, f_n appartenait alors l'espace vectoriel engendr par les translations de I_n. De plus, chaque I_n tait la contraction de la fonction I donne par $I_n(t) = I\left(t2^n\right)$. Il s'agissait d'un exemple d'analyse multi-rsolution dont voici la dfinition :

Dfinition 17. Une *analyse multi-rsolution* de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions de carr Lebesgue-intgrables est une suite $V = \{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ de sous-espaces ferms de $L^2(\mathbb{R})$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ V_n \subset V_{n+1} \text{ (croissance)} \tag{1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ f \in V_n \iff f(2\,\cdot) \in V_{n+1}\text{(auto-similarit)} \tag{2}$$

$$\text{Il existe } \varphi \text{ telle que } \{\varphi_k = \varphi(\,\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \text{ forme une base orthonorme de } V_0 \tag{3}$$

$$\overline{\bigcup V} = L^2(\mathbb{R})\text{(densit)} \tag{4}$$

$$\bigcap V = \{0\} \tag{5}$$

φ est appele *fonction d'chelle.*

On peut gnraliser par rcurrence la proprit 2 de la faon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ f \in V_0 \iff t \mapsto f\left(2^n t\right) \in V_n \tag{6}$$

Ce qui met en vidence que plus n est grand, plus l'espace V_n contient des fonctions fines (la fonction est contracte horizontalement). D'aprs les proprits 2 et 3, on peut dduire que toute fonction de V_n est une combinaison linaire de contraction (d'un facteur au plus 2^n) et translation de φ.

Dfinition 18. Une analyse multi-rsolution est dite *localise* si φ vrifie la condition suivante

$$\forall m \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} (1 + |t|)^m |\varphi(t)|^2 dt < +\infty \tag{7}$$

Cette proprit porte bien son nom, si φ la vrifie alors $|\varphi|^2$ dcrot bien plus vite que tout polynme en $\pm\infty$, suffisamment pour tre intgrable. C'est le cas par exemple des gaussiennes et des fonctions support compact. Une telle fonction φ a une masse concentre prs de 0, ce qui limitera les "interfrences" de ses translations dans leurs combinaisons linaires.

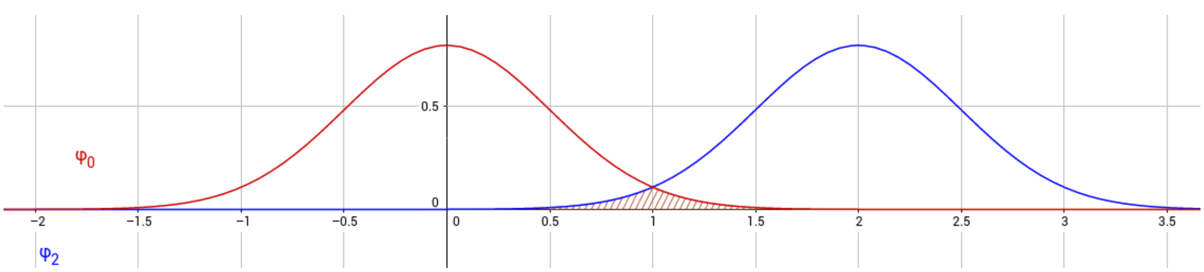

FIGURE 5 – Les gaussiennes sont localises

0.4.3 Espace des dtails

Pour tout n, on dnote par $P_n : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow V_n$ la projection orthogonale sur V_n (on choisit les projections orthogonales car elles minimisent l'erreur commise en passant d'un espace l'autre). Ainsi, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $P_n(f)$ est l'approximation de f avec une prcision 2^{-n}. Sur la figure 4.1, on projette f sur les espaces V_0 V_4.

Penchons nous sur ce qui se passe lorsqu'on passe d'une chelle plus fine une chelle plus grossire.

Soient $f \in L^2(\mathbb{R})$ et f_n son approximation dans V_n (c'est--dire $f_n = P_n(f)$). Le passage de V_n V_{n-1} constitue une perte d'informations car on passe d'un espace plus fin un espace plus grossier.

$$\begin{aligned} f_{n-1} &= P_{n-1}(f_n) \\ &= P_{n-1}((f_n - f_{n-1}) + f_{n-1}) \\ &= \underbrace{P_{n-1}(f_n - f_{n-1})}_{0} + f_{n-1} \end{aligned}$$

La perte de prcision, formalise par $f_n - f_{n-1}$, est donc un lment du noyau de P_{n-1}, savoir $V_{n-1}^{\perp}$. Mais $f_n - f_{n-1}$ tant dans V_n, l'ensemble regroupant les dtails perdus en passant de V_n V_{n-1} est $V_{n-1}^{\perp} \cap V_n$, c'est--dire le complmentaire orthogonal de V_{n-1} dans V_n.

Dfinition 19. Pour tout n on dfinit *l'espace de dtails* W_n comme le complmentaire orthogonal de V_n dans V_{n+1}

$$V_{n+1} = W_n \overset{\perp}{\oplus} V_n$$

Les $(W_n)_n$ ne forment plus une famille monotone, mais leur somme recouvre tous les V_n. En d'autre termes, on peut prsent approximer toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$ par une combinaison linaire d'lments de $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$.

Preuve 11. Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$, on a par dfinition des $(W_n)_n$

$$\begin{aligned} V_{n_0+1} &= V_{n_0} \oplus W_{n_0} \\ &= V_{n_0-1} \oplus (W_{n_0-1} \oplus W_{n_0}) \\ &\dots \\ &= V_{n_0-N} \oplus \left(\bigoplus_{n=n_0-N}^{n_0} W_n \right) \\ &\dots \\ &= \bigcap V \oplus \left(\bigoplus_{n=-\infty}^{n_0} W_n \right) \\ &= \{0\} \oplus \left(\bigoplus_{n=-\infty}^{n_0} W_n \right) \\ &= \bigoplus_{n=-\infty}^{n_0} W_n \end{aligned}$$

On en dduit ainsi $\bigcup V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$ en faisant tendre n_0 vers ∞ (ou plutt en faisant l'union gauche et droite pour tout $n_0 \in \mathbb{Z}$).

$\square$

Comme on l'a dit, les $(W_n)_n$ ne forment pas une suite d'espaces embots (ils sont mme orthogonaux deux deux), cependant ils vrifient encore les conditions d'auto-similarit et de stabilit par translation.

0.5 Ondelettes

Dfinition 20. Il existe une fonction norme ψ - appele *ondelette* - engendrant W_0 par translation et de moyenne nulle (d'intgrale nulle).

On admettra son existence [3], mais elle peut tre construite explicitement partir de φ.

On dfinit encore une fois la famille $\Psi = \{\psi_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ par $\psi_{n,k}(t) = \sqrt{2}^n \psi(2^n t - k)$, et cette fois ci ... cette famille est une base orthonorme de $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$! Et donc une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$!

Le fait que la famille soit norme est vident, le fait qu'elle soit orthogonale dcoule de l'orthogonalit des W_n.

Exemple 6. On prend comme exemple l'ondelette de Haar qui est donne par

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \\ 0 & 0 \leqslant x \end{cases}$$

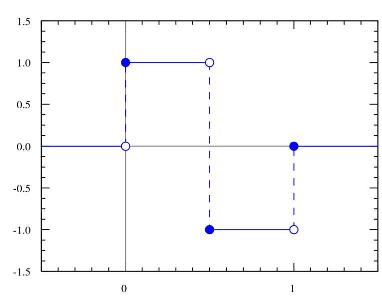

FIGURE 6 – L'ondelette de Haar

ψ est effectivement de moyenne nulle et Ψ est orthonorme :

$$\begin{aligned} \langle \psi_{n,k}, \psi_{m,l} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n,k}(t), \psi_{m,l}(t) dt \\ &= 2^{\frac{m+n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\psi(2^n t - k)\psi(2^m t - l)}_{h(t)} dt \end{aligned}$$

3. Voir *Wavelets and Multiscale Signal Processing* d'Albert Cohen pour une dmonstration de l'existence.

Si le graphe de la fonction h admet un centre de symtrie sur $\mathbb{R}$ alors elle sera d'intgrale nulle (gnralisation du fait que l'intgrale d'une fonction impaire est nulle). Cette remarque nous fournit un argument gomtrique pour justifier que $\langle \psi_{n,k}, \psi_{m,l} \rangle$ vaut 1 si $n = m$ et $k = l$, et 0 sinon.

Supposons $n \neq m$, alors les fonctions peuvent se positionner l'une par rapport l'autre de quatre faons diffrentes, leur produit aura bien un centre de symtrie comme sur le figure.

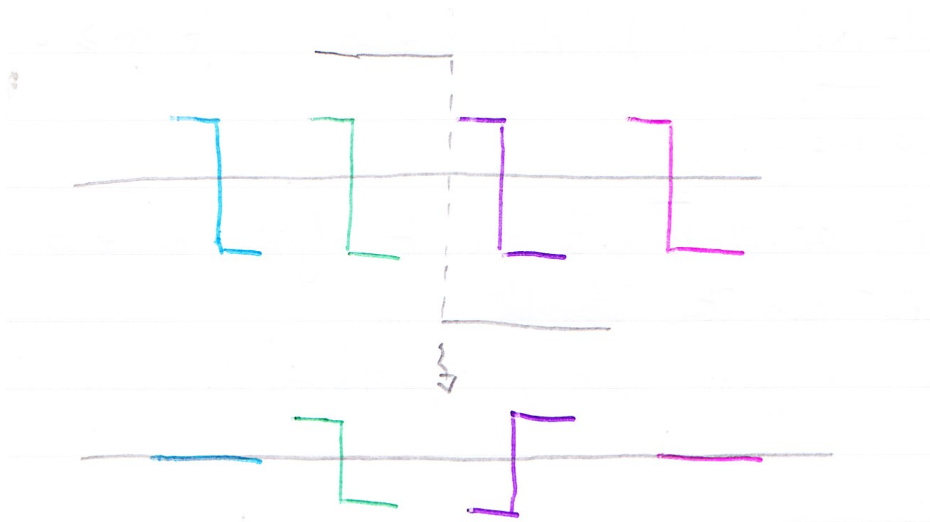

Figure 7 – Le produit de deux ondelettes de Haar diffrentes (la grise par une en couleur) possdent un centre de symtrie dans $\mathbb{R}$.

Exemple 7. Voici un autre exemple d'ondelette appele "Chapeau mexicain" (ou ondelette de Ricker) est dfinie comme la drive seconde d'une gaussienne. Elle est donne par

$$\psi(t) = \lambda e^{-t^2/2}(1 - t^2)$$

avec λ tel que $\|\psi\|_2 = 1$, c'est--dire que

$$\begin{aligned}
1 = \|\psi\|_2^2 &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}(1-t^2)^2 \\
&= \lambda^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt + \int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-t^2} dt \right) \\
&= \lambda^2 \left(\sqrt{2\pi} - \sqrt{2\pi} + \frac{3}{2}\sqrt{2\pi} \right) \\
&= \lambda^2 \frac{3}{2} \sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

donc $\lambda = \dfrac{2^{3/4}}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}$.

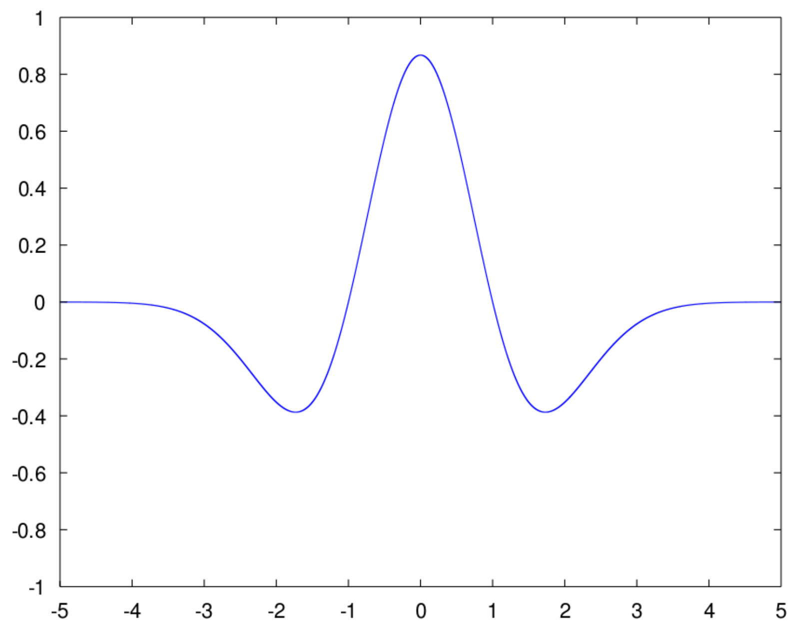

FIGURE 8 – Le chapeau mexicain

Elle est effectivement de moyenne nulle : si g est une gaussienne telle que $g^{(2)} = \psi$ alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = g'(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

car $g'(t)$ est de la forme te^{-t^2}.

Dfinition 21. On dit d'une ondelette qu'elle *a* n *moments nuls* si pour tout $k = 0, 1 \cdots n$ elle vrifie

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k f(t)dt = 0$$

Autrement dit, elle est orthogonale tout polynme de degr au plus n (en gardant bien en tte que les polynmes ne sont pas intgrables).

Une telle ondelette permettra d'obtenir une majoration des coefficients de la transformation en ondelette d'une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ support born grce la formule de Taylor-Lagrange.

Soit f une fonction $n+1$ fois continment drivables support dans un intervalle $I = [-M/2, M/2]$, pour tout point $x_0 \in I$ il existe un polynme P de degr n tel que pour tout $x \in I$

$$f(x) = P(x - x_0) + f^{(n+1)}(c_{x_0,x})\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{avec } |c - x| < |x - x_0|$$

Ce qui nous fournit la majoration

$$
\begin{aligned}
|\langle f, \psi \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(x)dx \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} P(x-x_0)\psi(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n+1)}(c_{x_0,x}) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\psi(x)dx \right|
\end{aligned}
$$

Or ψ est orthogonale tout polynme.

$$
\begin{aligned}
|\langle f, \psi \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n+1)}(c_{x_0,x}) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\psi(x)dx \right| \\
&= \left| \int_{I} f^{(n+1)}(c_{x_0,x}) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\psi(x)dx \right| \quad \text{car } f^{(n+1)} \text{ est support dans } I \\
&\leqslant \int_{I} \left| f^{(n+1)}(c_{x_0,x}) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\psi(x) \right| dx \\
&\leqslant \int_{I} \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\psi(x) \right| dx \|f\|_\infty \\
&\leqslant \int_{I} \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\psi(x) \right| dx \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty \\
&\leqslant \int_{I} |\psi(x)|\, dx \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty \\
&\leqslant N \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty
\end{aligned}
$$

o $N = \int_I |\psi(x)|\, dx$.

Quatrime partie

Algorithmes d'encodage et de dcodage

0.6 Cadre thorique

D'un point de vue pratique, les fonctions sont reprsentes comme des fonctions en escalier, qui de plus sont support borns (disons sur $[0,1]$). C'est--dire que l'on manipule des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ de la forme

$$f = \sum_{j=0}^{2^{N_0}-1} a_j \mathbb{1}_{[2^{-N_0}j, 2^{-N_0}(j+1)[}$$

Le calcul des coefficients s'en retrouve ainsi simplifi :

$$\begin{aligned}
\langle f, \psi_{n,k} \rangle &= \int_0^1 f(t)\overline{\psi_{n,k}(t)}dt \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} a_j \overline{\psi_{n,k}(t)}dt \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{j}^{j+1} a_j \overline{\frac{1}{\sqrt{2^n}}\psi(2^n t - k)}dt \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} a_j \frac{1}{\sqrt{2^{3n}}} \int_{2^n j - k}^{2^n(j+1)-k} \overline{\psi(u)}du \quad \text{o } 2^n t - k = u \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} a_j \frac{1}{\sqrt{2^{3n}}} (F(2^n j - k) - F(2^n(j+1) - k))
\end{aligned}$$

o F est une primitive de $\overline{\psi}$ et $N = 2^{N_0}$.

tant face des fonctions en escalier avec un pas fixe, on peut les reprsenter comme des vecteurs de $\mathbb{R}^N$, o la $(j+1)$-ime coordonne est la valeur prise sur le $(j+1)$-ime intervalle. On note $\tilde{f} = (a_j, a_1 \cdots a_N)$ et $\widetilde{\psi}_{n,k} = \left(\frac{1}{\sqrt{2^{3n}}}(F(2^n j - k) - F(2^n(j+1) - k))\right)_{j=0,1\cdots N-1}$, on a alors

$$\langle f, \psi_{n,k} \rangle = \widetilde{\psi}_{n,k} \, {}^{\mathrm{t}}\widetilde{f}$$

De plus, en dfinissant $S_n = (\langle f, \psi_{n,k} \rangle)_{k=0,1\cdots s(n)}$, avec $s(n)$ le plus grand k que l'on souhaitera calculer, et

$$P_n = \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}_{n,0} \\ \widetilde{\psi}_{n,1} \\ \vdots \\ \widetilde{\psi}_{n,s(n)} \end{pmatrix}$$

on a enfin

$$S_n = P_n \, {}^{\mathrm{t}}\tilde{f}$$

Chaque P_n est alors le projecteur de f sur l'espace de dtails W_n, les coefficients sont alors stocks dans le vecteur S_n.

Remarque 5. La matrice $\widetilde{f}$ est de taille $1 \times N$, P_n de taille $s(n) \times N$ et S_n de taille $1 \times s(n)$.

L'algorithme de compression consiste alors en le remplissage des matrices de projection pour chaque niveau de dtail et en la multiplication pour obtenir chaque S_n. Nous proposons l'algorithme naf suivant :

```
procedure ENCODER(F, f̃, N_0, s)
    P_0 = Construire(F, 0, s(0))
    for n = 1, 2 ··· N_0 do
        P_n = Construire(F, n, s(n))
        S_n = P_n ᵗf̃
        P_{-n} = Construire(F, -n)
        S_{-n} = P_{-n} ᵗf̃
    end for
    return (S_0, S_{-1}, S_1 ··· S_{N_0}, S_{-N_0})
end procedure

procedure DCODER(ψ, A = (α_{n,k})_{n,k}, N_0, s(n))
    for x = 0, 2^{-1} ··· 2^{-N_0} do
        f(x) = 0
        for n = 0, 1 ··· N_0 do
            for k = 0, 1 ··· s(n) do
                f(x) = f(x) + α_{n,k} × ψ(2^{-n} x - k)
            end for
        end for
    end for
    return f
end procedure
```

0.6.1 Validation de l'algorithme

Vrifier que cet algorithme est correct consiste vrifier que les approximations que l'on a du faire pour passer de valeurs infinies des valeurs finies pour n et k ne sont pas prjudiciables la validit des rsultats produits. Il s'agit donc de vrifier que les valeurs de n et k enleves sont ngligeables. En effet, le reste de l'algorithme ne doit pas donner lieu a des erreurs : la formule utilise est celle qui a t dfinie plus tt, et il est certain de terminer.

Coordonnes $n \leq 0$

La valeur de $\langle f, \psi_{n,k} \rangle$ reprsente peu prs la variation dans l'intervalle $[2^n k, 2^n (k+1)]$.

tant donn que f est chantillonne avec une frquence de 1, f est constante sur les intervalles $[2^n k, 2^n (k+1)]$ pour $n \leq 0$. On nglige donc la valeur des coordonnes ces indices. Dans la pratique, cela correspond a des intervalles qui sont plus petits que la frquence d'chantillonnage : la fonction est donc constante sur l'intervalle, et comme l'ondelette est de moyenne nulle, les valeurs qui lui sont associes sont bien ngligeables.

Coordonnes $n > \lceil \log_2 N \rceil$

De mme que prcdemment, $\langle f, \psi_{n,k} \rangle$ reprsente la variation dans l'intervalle $[2^n k, 2^n (k+1)]$. Or, cela veut dire que $2^n > 2^{\lceil \log_2 N \rceil} \geqslant N$, c'est dire que les intervalles sont plus grands que le domaine de dfinition de la fonction. Ds lors, ils ne seront pas utiles.

Coordonnes k

On veut obtenir un recouvrement minimal de $[0, N[$ avec les intervalles disjoints $[2^n k, 2^n(k+1)[$.

Pour que $[2^n k, 2^n(k+1)[\cap[0, N[\neq \emptyset$, il faut que $0 \leq k < 2^{-n}N$.

Exemple 8. Nous allons dcomposer la fonction $f(t) = t$ dfinie sur $[0,1]$ dans la base de l'ondelette de Haar, la famille donne par

$$\psi_{n,k}(t) = \begin{cases} \sqrt{2}^n & 2^{-n}k \leqslant t < 2^{-n}(k+1/2) \\ -\sqrt{2}^n & 2^{-n}(k+1/2) \leqslant t < 2^{-n}(k+1) \end{cases}$$

Les coefficients sont

$$\begin{aligned}\alpha_{n,k} &= \int_0^1 \psi_{n,k}(t)f(t)dt \\ &= \sqrt{2^n}\int_{2^{-n}k}^{2^{-n}(k+1/2)} tdt - \sqrt{2^n}\int_{2^{-n}(k+1/2)}^{2^{-n}(k+1)} tdt \\ &= \sqrt{2^n}\frac{t^2}{2}\Big|_{2^{-n}k}^{2^{-n}(k+1/2)} - \sqrt{2^n}\frac{t^2}{2}\Big|_{2^{-n}(k+1/2)}^{2^{-n}(k+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}^{3n+4}}\end{aligned}$$

0.7 Version alternative

Si l'on ne souhaite pas utiliser de coefficients pour des n ngatifs, on peut l'viter en intgrant φ dans la dcomposition.

En reprenant les calculs de la preuve XXX, on peut aisment retrouver

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n = V_0 \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}} W_n\right)$$

Autrement dit, on peut dcomposer tout fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ ainsi :

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\varphi_k, f\rangle\varphi_k + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{N}}}\langle\psi_{n,k}, f\rangle\psi_{n,k}$$

0.7.1 Optimisation et compression

L'intrt de ce type d'algorithme est de pouvoir compresser les informations pour encoder le signal en perdant le moins d'informations possible. Pour cela, on peut agir deux niveaux.

Niveaux de dtail

Le premier point sur lequel on peut travailler est le niveau de dtail. Lorsqu'on observe l'algorithme, on peut voir que les coefficients pour les premires valeurs de n sont moins nombreux, du fait qu'il suffise de quelques ondelettes pour parcourir le domaine de dfinition. Ce sont ces coefficients qui donnent la structure gnrale du signal et sont plus impactant que les niveaux de dtails suivants. On peut donc penser qu'il est possible d'arrter l'algorithme plus aprs moins d'itrations que ce que le l'on a dfini prcdemment car les dtails suivant seront ngligeables.

Encodage des coefficients

Un autre point sur lequel on peut travailler est l'encodage des coefficients, ou tout du moins leur niveau de prcision. En effet, il n'est pas forcment utile d'avoir une grande prcision sur la valeur du coefficient. De plus, partir d'un certain rang, comme on l'a pens prcdemment, la plupart des coefficients sont ngligeables. Pour optimiser le volume des coefficients forms, il peut tre utile de ne stocker que les coefficients non nuls, qui seront bien moins nombreux.