

Analyse en Ondelettes

Projet mathématiques-informatique

Chloé Rouyer, Pierre Gervais, Souhaib Boulahia

Université Paris Diderot

13 juin 2017



Joseph Fourier (1768 -1830) et Yves Meyer (1939-)

- ① Outils
Analyse de Hilbert
Espaces de Lebesgue
- ② Première approche : Analyse de Fourier
Série de Fourier
Transformée de Fourier
- ③ Ondelettes et application
Analyse multi-résolution

- Signaux : fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

- Signaux : fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- On veut généraliser les outils de la géométrie euclidienne

Contile

Analyse de Hilbert

Espaces de Lebesgue

Première

approche

Analyse de

Fourier

Série de Fourier

Transformée de
Fourier

Ondelettes et
application

Analyse
multi-résolution

- ℓ^2 et la famille $\{x_n = \delta(n - \cdot)\}_n$

- ℓ^2 et la famille $\{x_n = \delta(n - \cdot)\}_n$
- But : pouvoir écrire

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n$$

Un *espace de Hilbert* est la donnée

Un *espace de Hilbert* est la donnée

- D'un espace vectoriel réel E

Un *espace de Hilbert* est la donnée

- D'un espace vectoriel réel E
- D'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini sur E

Un *espace de Hilbert* est la donnée

- D'un espace vectoriel réel E
- D'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini sur E
- tel que E soit complet pour la norme induite par ce produit scalaire

Exemple d'espace hilbertien

$$\ell^2 \text{ avec le produit scalaire défini par } \langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \overline{v_n}$$

E est dit *séparable* s'il existe $\mathbf{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

E est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne

Séparabilité et base hilbertienne

E est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne où une *base hilbertienne* est une famille orthonormée **totale**, c'est-à-dire une famille orthonormée \mathcal{B} telle que $\text{Vect}(\mathcal{B})$ soit dense dans E .

E (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow E$ admet une base hilbertienne

$$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E \text{ telle que } \overline{\mathbf{g}} = E.$$

E (de dimension infinie) séparable $\iff E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \dots, f_n\}$ soit orthonormale pour tout n .

E (de dimension infinie) séparable $\iff E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \dots, f_n\}$ soit orthonormale pour tout n .

On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.

E (de dimension infinie) séparable $\iff E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \dots, f_n\}$ soit orthonormale pour tout n .

On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.

On construit par récurrence f_{n+1} à l'aide de f_0, \dots, f_n :

E (de dimension infinie) séparable $\iff E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \dots, f_n\}$ soit orthonormale pour tout n .

On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.

On construit par récurrence f_{n+1} à l'aide de f_0, \dots, f_n :

- on choisit $x \in \text{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \text{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec m le plus petit possible pour que x existe

E (de dimension infinie) séparable $\iff E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \dots, f_n\}$ soit orthonormale pour tout n .

On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.

On construit par récurrence f_{n+1} à l'aide de f_0, \dots, f_n :

- on choisit $x \in \text{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \text{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec m le plus petit possible pour que x existe (il existe car E est de dimension infinie).

E (de dimension infinie) séparable $\iff E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \dots, f_n\}$ soit orthonormale pour tout n .

On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.

On construit par récurrence f_{n+1} à l'aide de f_0, \dots, f_n :

- on choisit $x \in \text{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \text{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec m le plus petit possible pour que x existe (il existe car E est de dimension infinie). Ainsi $\text{Vect}(g_0 \cdots g_m) = \text{Vect}(f_0 \cdots f_n, x)$

E (de dimension infinie) séparable $\iff E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \dots, f_n\}$ soit orthonormale pour tout n .

On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.

On construit par récurrence f_{n+1} à l'aide de f_0, \dots, f_n :

- on choisit $x \in \text{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \text{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec m le plus petit possible pour que x existe (il existe car E est de dimension infinie). Ainsi $\text{Vect}(g_0 \cdots g_m) = \text{Vect}(f_0 \cdots f_n, x)$
- on orthogonalise la nouvelle famille : $y = x - \sum_{k=0}^n \langle y, f_k \rangle f_k$

E (de dimension infinie) séparable $\iff E$ admet une base hilbertienne

Rouyer,
Gervais,
Boulahia

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \dots, f_n\}$ soit orthonormale pour tout n .

On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.

On construit par récurrence f_{n+1} à l'aide de f_0, \dots, f_n :

- on choisit $x \in \text{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \text{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec m le plus petit possible pour que x existe (il existe car E est de dimension infinie). Ainsi $\text{Vect}(g_0 \cdots g_m) = \text{Vect}(f_0 \cdots f_n, x)$
- on orthogonalise la nouvelle famille : $y = x - \sum_{k=0}^n \langle y, f_k \rangle f_k$
- on normalise le nouveau vecteur : $f_{n+1} = \frac{y}{\|y\|}$

E (de dimension infinie) séparable $\iff E$ admet une base hilbertienne

Rouyer,
Gervais,
Boulahia

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \dots, f_n\}$ soit orthonormale pour tout n .

On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.

On construit par récurrence f_{n+1} à l'aide de f_0, \dots, f_n :

- on choisit $x \in \text{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \text{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec m le plus petit possible pour que x existe (il existe car E est de dimension infinie). Ainsi $\text{Vect}(g_0 \cdots g_m) = \text{Vect}(f_0 \cdots f_n, x)$
- on orthogonalise la nouvelle famille : $y = x - \sum_{k=0}^n \langle y, f_k \rangle f_k$
- on normalise le nouveau vecteur : $f_{n+1} = \frac{y}{\|y\|}$

En passant à l'adhérence : $E = \overline{\mathbf{g}} \subset \overline{\text{Vect}(\mathbf{f})} \subset E$

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Soit la relation d'équivalence définie par $f \mathcal{R} g \iff f \equiv g$ p.p.

Soit la relation d'équivalence définie par $f \mathcal{R} g \iff f \equiv g$ p.p.

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\mathcal{R}$$

Soit la relation d'équivalence définie par $f \mathcal{R} g \iff f \equiv g$ p.p.

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\mathcal{R}$$

$(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ est alors normé ...

Soit la relation d'équivalence définie par $f \mathcal{R} g \iff f \equiv g$ p.p.

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\mathcal{R}$$

$(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ est alors normé ... et complet !

La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques.

Dans $L^2(\mathbb{T})$:

- Les $\{e^{-ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une base Hilbertienne

La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques.

Dans $L^2(\mathbb{T})$:

- Les $\{e^{-ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une base Hilbertienne
- Toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ se décompose dans la base des $\{e^{-ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$

La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques.

Dans $L^2(\mathbb{T})$:

- Les $\{e^{-ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une base Hilbertienne
- Toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ se décompose dans la base des $\{e^{-ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- On définit les coefficients de Fourier par
$$c_k = \langle f, e^{-ikt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{e^{-ikt}} dt$$

La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques.

Dans $L^2(\mathbb{T})$:

- Les $\{e^{-ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une base Hilbertienne
- Toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ se décompose dans la base des $\{e^{-ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- On définit les coefficients de Fourier par
$$c_k = \langle f, e^{-ikt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{e^{-ikt}} dt$$
- Et $S_N(f) = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{-ikt}$

La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques.

Dans $L^2(\mathbb{T})$:

- Les $\{e^{-ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une base Hilbertienne
- Toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ se décompose dans la base des $\{e^{-ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$
- On définit les coefficients de Fourier par
$$c_k = \langle f, e^{-ikt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{e^{-ikt}} dt$$
- Et $S_N(f) = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{-ikt}$
- Avec $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$

Preuve de $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, soit $\varepsilon > 0$.

Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction continue telle que $|f_0 - f| < \varepsilon$

Preuve de $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, soit $\varepsilon > 0$.

Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction continue telle que $|f_0 - f| < \varepsilon$

Soit F_0 tel que $f_0(t) = F_0(e^{it})$

Il existe un polynôme trigonométrique P tel que pour tout t ,

$$\|f_0(t) - P(t)\| < \varepsilon$$

Ce qui permet de déduire que :

Preuve de $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, soit $\varepsilon > 0$.

Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction continue telle que $|f_0 - f| < \varepsilon$

Soit F_0 tel que $f_0(t) = F_0(e^{it})$

Il existe un polynôme trigonométrique P tel que pour tout t ,

$$\|f_0(t) - P(t)\| < \varepsilon$$

Ce qui permet de déduire que :

$$\begin{aligned} \|S_N(f) - f\|_2 &\leq \|S_N(f) - S_N(P)\|_2 + \|S_N(P) - P\|_2 + \|f - P\|_2 \\ &\leq 2\|f - P\|_2 + \|S_N(P) - P\|_2 \\ &\leq 2\|f - P\|_2 \\ &\leq 2\|f - f_0\|_2 + 2\|f_0 - P\|_2 \\ &\leq 4\varepsilon \end{aligned}$$

Vitesse de décroissance des coefficients.

Si $f \in \mathcal{C}^k$ alors :

$$|c_p(f)| \leq \frac{C}{|p|^k}$$

Transformée de Fourier pour $f \in L^1(\mathbb{R})$

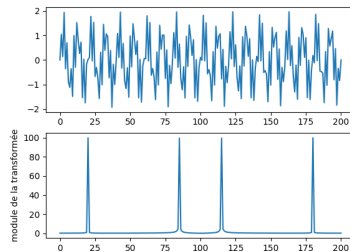
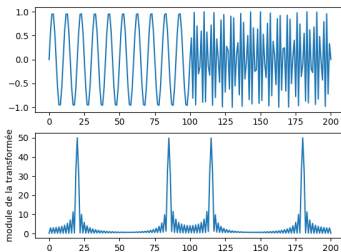
$$\mathcal{F}[f](\xi) = F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt$$

Transformée de Fourier pour $f \in L^1(\mathbb{R})$

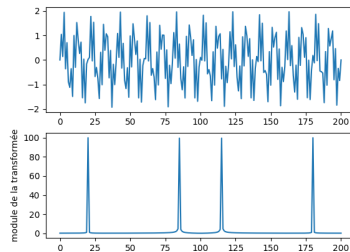
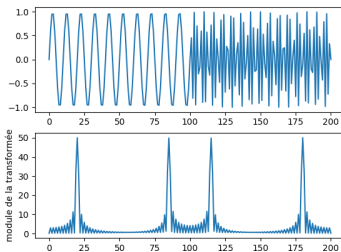
$$\mathcal{F}[f](\xi) = F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt$$

Transformée de Fourier inverse pour $f, F \in L^1(\mathbb{R})$ et f continue

$$\overline{\mathcal{F}}[F](t) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi t} dt$$



2 signaux ayant des transformées de Fourier similaires



2 signaux ayant des transformées de Fourier similaires

$$F(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} \overline{w(t - \tau)} dt$$



Une image de voiture pour trois résolutions différentes

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, V_n \subset V_{n+1}$$

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}), f \in V_n \iff f(2 \cdot) \in V_{n+1}$$

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}), f \in V_n \iff f(2 \cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe φ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\cdot + k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V_0

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}), f \in V_n \iff f(2 \cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe φ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\cdot + k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V_0

$$\overline{\bigcup V} = L^2(\mathbb{R})$$

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}), f \in V_n \iff f(2 \cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe φ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\cdot + k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V_0

$$\overline{\bigcup V} = L^2(\mathbb{R})$$

$$\bigcap V = \{0\}$$

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}), f \in V_n \iff f(2 \cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe φ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\cdot + k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V_0

$$\overline{\bigcup V} = L^2(\mathbb{R})$$

$$\bigcap V = \{0\}$$

φ est appelée *fonction d'échelle*.

L'espace V_{n+1} est plus "fin" que V_n .

L'espace V_{n+1} est plus "fin" que V_n .

Soit $P_n : V_{n+1} \rightarrow V_n$ la projection orthogonale

L'espace V_{n+1} est plus "fin" que V_n .

Soit $P_n : V_{n+1} \rightarrow V_n$ la projection orthogonale

$$W_n = \ker(P_n)$$

L'espace V_{n+1} est plus "fin" que V_n .

Soit $P_n : V_{n+1} \rightarrow V_n$ la projection orthogonale

$$W_n = \ker(P_n) = V_{n+1} \cap V_n^\perp$$

L'espace V_{n+1} est plus "fin" que V_n .

Soit $P_n : V_{n+1} \rightarrow V_n$ la projection orthogonale

$$W_n = \ker(P_n) = V_{n+1} \cap V_n^\perp$$

On définit l'*espace de détails* par

$$V_{n+1} = W_n \oplus V_n$$

$$V_n = V_{n-1} \oplus W_{n-1}$$

Préface

Analyse de Hilbert

Espaces de Lebesgue

Première

approche

Analyse de

Fourier

Série de Fourier

Transformée de

Fourier

Ondelettes et
application

Analyse

multi-résolution

Outline

Analyse de Hilbert

Espaces de Lebesgue

Première

approche

Analyse de

Fourier

Série de Fourier

Transformée de
Fourier

Ondelettes et
application

Analyse
multi-résolution

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\ &= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\ &= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\ &= V_{n-3} \oplus W_{n-3} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \end{aligned}$$

Onfile

Analyse de Hilbert

Espaces de Lebesgue

Première

approche

Analyse de

Fourier

Série de Fourier

Transformée de

Fourier

Ondelettes et
application

Analyse

multi-résolution

$$\begin{aligned}
 V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\
 &= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
 &= V_{n-3} \oplus W_{n-3} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
 &\vdots \\
 &= \underbrace{\bigcap_{\{0\}} V}_{\{0\}} \oplus \left(\bigoplus_{k < n} W_k \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\
 &= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
 &= V_{n-3} \oplus W_{n-3} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
 &\vdots \\
 &= \underbrace{\bigcap_{\{0\}} V}_{\{0\}} \oplus \left(\bigoplus_{k < n} W_k \right)
 \end{aligned}$$

Et en faisant l'union pour tout $n \in \mathbb{Z}$ à droite et à gauche

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n$$

$$\begin{aligned}
 V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\
 &= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
 &= V_{n-3} \oplus W_{n-3} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
 &\vdots \\
 &= \underbrace{\bigcap_{\{0\}} V}_{\{0\}} \oplus \left(\bigoplus_{k < n} W_k \right)
 \end{aligned}$$

Et en faisant l'union pour tout $n \in \mathbb{Z}$ à droite et à gauche

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} W_n \right)$$

$\{W_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$\{W_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2 \cdot) \in W_1 \iff f(2^n \cdot) \in W_n$$

$\{W_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2 \cdot) \in W_1 \iff f(2^n \cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

$\{W_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2 \cdot) \in W_1 \iff f(2^n \cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0

$\{W_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2 \cdot) \in W_1 \iff f(2^n \cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0
- $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$

$\{W_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2 \cdot) \in W_1 \iff f(2^n \cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0
- $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$

$\{\sqrt{2^n} \psi(2^n \cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_n .

$\{W_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2 \cdot) \in W_1 \iff f(2^n \cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0
- $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$

$\{\sqrt{2^n} \psi(2^n \cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_n .

La famille définie par $\psi_{n,k}(t) = \sqrt{2^n} \psi(2^n t - k)$ forme une famille orthonormée de $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n$

$\{W_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2 \cdot) \in W_1 \iff f(2^n \cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0
- $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$

$\{\sqrt{2^n} \psi(2^n \cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_n .

La famille définie par $\psi_{n,k}(t) = \sqrt{2^n} \psi(2^n t - k)$ forme une famille orthonormée de $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n$

$\{\psi_{n,k}\}_{n,k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$!

$$\text{De } \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} W_n \right)$$

De $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} W_n \right)$
on déduit pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{Z}}} \langle \psi_{n,k}, f \rangle \psi_{n,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N}}} \langle \psi_{n,k}, f \rangle \psi_{n,k}$$

L'ondelette de Haar est définie par :

$$\psi(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction d'échelle associée est la fonction porte :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Peu régulière, discontinue

L'ondelette chapeau mexicain est définie par :

$$\psi(t) = \lambda \left(1 - t^2\right) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

avec :

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{2\pi}^{\frac{1}{4}}}$$

On rappelle :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = V_0 \overset{\perp}{\oplus} \left(\overset{\perp}{\bigoplus}_{n \in \mathbb{N}} W_n \right)$$

On peut décomposer toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ ainsi :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N}}} \langle f, \psi_{n,k} \rangle \psi_{n,k}$$

On manipule des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ de la forme

$$f = \sum_{j=0}^{2^{N_0}-1} a_j \chi_{[2^{-N_0}j, 2^{-N_0}(j+1)[}$$

$$\begin{aligned} \langle f, \psi_{n,k} \rangle &= \int_0^1 f(t) \overline{\psi_{n,k}(t)} dt \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} a_j \left(\Phi \left(\frac{j+1}{N} - \frac{k}{N} \right) - \Phi \left(\frac{j}{N} - \frac{k}{N} \right) \right) \end{aligned}$$

où Ψ est une primitive de $\overline{\psi}$, Φ est une primitive de $\overline{\phi}$ et $N = 2^{N_0}$.

```

1: procedure ENCODER( $\Psi, \tilde{f}, N_0, s$ )
2:    $S_m := \Phi(1) - \Phi(0)$ 
3:    $P_0 := \text{Construire}(\Psi, 0, s(0))$ 
4:   for  $n = 0, 1 \dots N_0$  do
5:     for  $k = 0, 1 \dots 2^{N_0-n}$  do
6:        $S_{n,k} := 0$ 
7:       for  $x = 0, 1 \dots 2^{N_0}$  do
8:          $S_{n,k} := S_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{2^{3n}}}(\Psi(2^n x - k) - \Psi(2^n(x+1) - k)) \times f(x)$ 
9:       end for
10:    end for
11:  end for
12:  return  $S_m, (S_{n,k})_{n,k}$ 
13: end procedure

14: procedure DÉCODER( $\psi, S_m, A = (\alpha_{n,k})_{n,k}, N_0, s(n)$ )
15:  for  $x = 0, 2^{-N_0}, 2 \times 2^{-N_0} \dots, 1$  do
16:     $f(x) := S_m$ 
17:    for  $n = 0, 1 \dots, N_0$  do
18:      for  $k = 0, 1 \dots, s(n)$  do
19:         $f(x) := f(x) + \alpha_{n,k} \times \psi(2^{-n}x - k)$ 
20:      end for
21:    end for
22:  end for
23:  return  $f$ 

```