Analyse en Ondelettes

Projet mathématiques-informatique

Chloé Rouyer, Pierre Gervais, Souhaib Boulahia

Université Paris Diderot

12 juin 2017

Introduction

Joseph Fourier (1768 -1830) et Yves Meyer (1939-)

Sommaire

Problématique

- Signaux : fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Problématique

- Signaux : fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- On veut généraliser les outils de la géométrie euclidienne

Problématique

- ℓ^2 et la famille $\{x_n = \delta(n - \cdot)\}_n$

Problématique

- ℓ^2 et la famille $\{x_n = \delta(n - \cdot)\}_n$
- But : pouvoir écrire

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n$$

Espace de Hilbert

Un *espace de Hilbert* est la donnée

Espace de Hilbert

Un *espace de Hilbert* est la donnée

- D'un espace vectoriel réel E

Espace de Hilbert

Un *espace de Hilbert* est la donnée

- D'un espace vectoriel réel E
- D'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini sur E

Espace de Hilbert

Un *espace de Hilbert* est la donnée

- D'un espace vectoriel réel E
- D'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini sur E
- tel que E soit complet pour la norme induite par ce produit scalaire

Espace de Hilbert séparable

E est dit *séparable* s'il existe $\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

Séparabilité et base hilbertienne

E est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne

Séparabilité et base hilbertienne

E est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne où une *base hilbertienne* est une famille orthonormée **totale**, c'est-à-dire une famille orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ soit dense dans E.

E séparable $\Longleftrightarrow$ E admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

E séparable $\Longleftrightarrow$ E admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On orthonormalise par le procédé de Gramm-Schmidt $\mathbf{g}$ pour obtenir une famille $\mathbf{f}$ telle que $\mathrm{Vect}(\mathbf{f}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{g})$

E séparable $\Longleftrightarrow$ E admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On orthonormalise par le procédé de Gramm-Schmidt $\mathbf{g}$ pour obtenir une famille $\mathbf{f}$ telle que $\mathrm{Vect}(\mathbf{f}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{g}) \supset \mathbf{g}$.

E séparable $\Longleftrightarrow$ E admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On orthonormalise par le procédé de Gramm-Schmidt $\mathbf{g}$ pour obtenir une famille $\mathbf{f}$ telle que $\mathrm{Vect}(\mathbf{f}) = \mathrm{Vect}(\mathbf{g}) \supset \mathbf{g}$.
En passant à l'adhérence : $E = \overline{\mathbf{g}} \subset \overline{\mathrm{Vect}(\mathbf{f})} \subset E$

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f \; : \; X \to \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f \ : \ X \to \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Soit la relation d'équivalence définie par $f\mathcal{R}g \iff f \equiv g$ p.p.

Soit la relation d'équivalence définie par $f\mathcal{R}g \iff f \equiv g$ p.p.

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\mathcal{R}$$

Soit la relation d'équivalence définie par $f \mathcal{R} g \iff f \equiv g$ p.p.

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\mathcal{R}$$

$(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ est alors normé ...

Soit la relation d'équivalence définie par $f\mathcal{R}g \iff f \equiv g$ p.p.

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\mathcal{R}$$

$(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ est alors normé … et complet !

Analyse de Fourier

Séries de Fourier

S'applique aux fonctions périodiques. Dans $L^2(\mathbb{T})$

- Les $\{e^{-ikt}\}$ forment une base Hilbertienne

Analyse de Fourier

Séries de Fourier

S'applique aux fonctions périodiques. Dans $L^2(\mathbb{T})$

- Les $\{e^{-ikt}\}$ forment une base Hilbertienne
- $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ on a
  $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} \langle f, e_k \rangle e_k = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e^{-ikt}$

Analyse de Fourier

Séries de Fourier

S'applique aux fonctions périodiques. Dans $L^2(\mathbb{T})$

- Les $\{e^{-ikt}\}$ forment une base Hilbertienne
- $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ on a $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} \langle f, e_k \rangle e_k = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e^{-ikt}$
- Toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ se décompose dans la base des $\{e^{-ikt}\}$

S'applique aux fonctions périodiques. Dans $L^2(\mathbb{T})$

- Les $\{e^{-ikt}\}$ forment une base Hilbertienne
- $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ on a $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} \langle f, e_k \rangle e_k = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e^{-ikt}$
- Toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ se décompose dans la base des $\{e^{-ikt}\}$
- Et $\lim\limits_{N \to \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = f$

Preuve de $\lim_{N\to\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = f$

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, soit $\varepsilon > 0$.
Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction continue telle que $\|f_0 - f\| < \varepsilon$

Preuve de $\lim_{N\to\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = f$

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, soit $\varepsilon > 0$.
Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction continue telle que $\|f_0 - f\| < \varepsilon$
Soit F_0 tel que $f_0 = F_0(e^{it})$
Il existe un polynôme P tel que pour tout t, $\|f_0(t) - P(t)\| < \varepsilon$
Ce qui permet de déduire que :

Preuve de $\lim_{N\to\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = f$

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, soit $\varepsilon > 0$.
Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction continue telle que $\|f_0 - f\| < \varepsilon$
Soit F_0 tel que $f_0 = F_0(e^{it})$
Il existe un polynôme P tel que pour tout t, $\|f_0(t) - P(t)\| < \varepsilon$
Ce qui permet de déduire que :

$$\begin{aligned}
\|S_N(f) - f\|_2 &\leqslant \|S_N(f) - S_N(P)\|_2 + \|S_N(P) - P\|_2 + \|f - P\|_2 \\
&\leqslant 2\|f - P\|_2 + \|S_N(P) - P\|_2 \\
&\leqslant 2\|f - P\|_2 \\
&\leqslant 2\|f - f_0\|_2 + 2\|f_0 - P\|_2 \\
&\leqslant 4\varepsilon
\end{aligned}$$

Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ f \in V_n \iff f(2\,\cdot) \in V_{n+1}$$

Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ f \in V_n \iff f(2\,\cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe φ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\,\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V_0

Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ f \in V_n \iff f(2\,\cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe φ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\,\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V_0

$$\overline{\bigcup V} = L^2(\mathbb{R})$$

Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ f \in V_n \iff f(2\,\cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe φ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\,\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V_0

$$\overline{\bigcup V} = L^2(\mathbb{R})$$

$$\bigcap V = \{0\}$$

Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ f \in V_n \iff f(2\,\cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe φ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de V_0

$$\overline{\bigcup V} = L^2(\mathbb{R})$$

$$\bigcap V = \{0\}$$

φ est appelée *fonction d'échelle*.

L'espace de détails

L'espace V_{n+1} est plus "fin" que V_n.

L'espace de détails

L'espace V_{n+1} est plus "fin" que V_n.
Soit $P_n \ : \ V_{n+1} \to V_n$ la projection orthogonale

L'espace de détails

L'espace V_{n+1} est plus "fin" que V_n.
Soit $P_n \ : \ V_{n+1} \to V_n$ la projection orthogonale

$$W_n = \ker(P_n)$$

L'espace de détails

L'espace V_{n+1} est plus "fin" que V_n.
Soit $P_n \ : \ V_{n+1} \to V_n$ la projection orthogonale

$$W_n = \ker(P_n) = V_{n+1}^{\perp} \cap V_n$$

L'espace de détails

L'espace V_{n+1} est plus "fin" que V_n.
Soit $P_n \;:\; V_{n+1} \to V_n$ la projection orthogonale

$$W_n = \ker(P_n) = V_{n+1}^{\perp} \cap V_n$$

On définit l'*espace de détails* par

$$V_{n+1} = W_n \oplus V_n$$

L'espace de détails

$$
\begin{aligned}
V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\
&= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
&\vdots \\
&= \underbrace{\bigcap V}_{\{0\}} \oplus \left(\bigoplus_{k<n} W_k \right)
\end{aligned}
$$

L'espace de détails

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\ &= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\ &\vdots \\ &= \underbrace{\bigcap V}_{\{0\}} \oplus \left(\bigoplus_{k<n} W_k \right) \end{aligned}$$

Et en faisant l'union pour tout $n \in \mathbb{Z}$ à droite et à gauche

L'espace de détails

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\ &= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\ &\vdots \\ &= \underbrace{\bigcap V}_{\{0\}} \oplus \left(\bigoplus_{k<n} W_k \right) \end{aligned}$$

Et en faisant l'union pour tout $n \in \mathbb{Z}$ à droite et à gauche

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n$$

L'espace de détails

$$
\begin{aligned}
V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\
&= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
&\ \vdots \\
&= \underbrace{\bigcap V}_{\{0\}} \oplus \left(\bigoplus_{k<n} W_k \right)
\end{aligned}
$$

Et en faisant l'union pour tout $n \in \mathbb{Z}$ à droite et à gauche

$$
\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} W_n \right)
$$

Les ondelettes

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

Les ondelettes

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0

Les ondelettes

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0
- $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$

Les ondelettes

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$

La famille $\psi_{n,k}(t) = \sqrt{2^n}(2^n t - k)$ forme une famille orthonormée de $\displaystyle\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$

Les ondelettes

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$

La famille $\psi_{n,k}(t) = \sqrt{2^n}(2^n t - k)$ forme une famille orthonormée de $\displaystyle\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$

$\{\psi_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$!

De $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$

De $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} W_n\right)$

on déduit pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \varphi_k, f\rangle \varphi_k + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{N}}} \langle \psi_{n,k}, f\rangle \psi_{n,k} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{Z}}} \langle \psi_{n,k}, f\rangle \psi_{n,k}$$