# Analyse en Ondelettes

## Projet mathématiques-informatique

Chloé Rouyer, Pierre Gervais, Souhaib Boulahia

Université Paris Diderot

13 juin 2017

# Introduction


Joseph Fourier (1768 -1830) et Yves Meyer (1939- )

# Sommaire

# Problématique

- Signaux : fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

# Problématique

- Signaux : fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- On veut généraliser les outils de la géométrie euclidienne

# Problématique

- $\ell^2$ et la famille $\{x_n = \delta(n - \cdot)\}_n$

# Problématique

- $\ell^2$ et la famille $\{x_n = \delta(n - \cdot)\}_n$
- But : pouvoir écrire

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n$$

# Espace de Hilbert

Un *espace de Hilbert* est la donnée

# Espace de Hilbert

Un *espace de Hilbert* est la donnée

- D'un espace vectoriel réel $E$

# Espace de Hilbert

Un *espace de Hilbert* est la donnée

- D'un espace vectoriel réel $E$
- D'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini sur $E$

# Espace de Hilbert

Un *espace de Hilbert* est la donnée

- D'un espace vectoriel réel $E$
- D'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini sur $E$
- tel que $E$ soit complet pour la norme induite par ce produit scalaire

# Exemple d'espace hilbertien

$\ell^2$ avec le produit scalaire défini par $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \overline{v_n}$

# Espace de Hilbert séparable

$E$ est dit *séparable* s'il existe $\mathbf{g} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

# Séparabilité et base hilbertienne

$E$ est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne

# Séparabilité et base hilbertienne

$E$ est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne où une *base hilbertienne* est une famille orthonormée **totale**, c'est-à-dire une famille orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $\text{Vect}(\mathcal{B})$ soit dense dans $E$.

# $E$ (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ $E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.

## $E$ (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ $E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout $n$.

# $E$ (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ $E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout $n$.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.

# $E$ (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ $E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout $n$.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.
On construit par récurrence $f_{n+1}$ à l'aide de $f_0, \cdots f_n$ :

# $E$ (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ $E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout $n$.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.
On construit par récurrence $f_{n+1}$ à l'aide de $f_0, \cdots f_n$ :

- on choisit $x \in \mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec $m$ le plus petit possible pour que $x$ existe

# $E$ (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ $E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout $n$.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.
On construit par récurrence $f_{n+1}$ à l'aide de $f_0, \cdots f_n$ :

- on choisit $x \in \mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec $m$ le plus petit possible pour que $x$ existe (il existe car $E$ est de dimension infinie).

# $E$ (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ $E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout $n$.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.
On construit par récurrence $f_{n+1}$ à l'aide de $f_0, \cdots f_n$ :

- on choisit $x \in \mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec $m$ le plus petit possible pour que $x$ existe (il existe car $E$ est de dimension infinie). Ainsi $\mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) = \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n, x)$

# $E$ (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ $E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout $n$.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.
On construit par récurrence $f_{n+1}$ à l'aide de $f_0, \cdots f_n$ :

- on choisit $x \in \mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec $m$ le plus petit possible pour que $x$ existe (il existe car $E$ est de dimension infinie). Ainsi $\mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) = \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n, x)$
- on orthogonalise la nouvelle famille : $y = x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle y, f_k\rangle f_k$

# $E$ (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ $E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout $n$.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.
On construit par récurrence $f_{n+1}$ à l'aide de $f_0, \cdots f_n$ :

- on choisit $x \in \mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec $m$ le plus petit possible pour que $x$ existe (il existe car $E$ est de dimension infinie). Ainsi $\mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) = \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n, x)$
- on orthogonalise la nouvelle famille : $y = x - \sum_{k=0}^{n} \langle y, f_k \rangle f_k$
- on normalise le nouveau vecteur : $f_{n+1} = \frac{y}{\|y\|}$

# $E$ (de dimension infinie) séparable $\Longleftrightarrow$ $E$ admet une base hilbertienne

$\mathbf{g} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\overline{\mathbf{g}} = E$.
On construit par récurrence $\mathbf{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manière à ce que $\{f_0, \cdots f_n\}$ soit orthonormale pour tout $n$.
On pose $f_0 = \frac{g_0}{\|g_0\|}$, $g_0 \neq 0$.
On construit par récurrence $f_{n+1}$ à l'aide de $f_0, \cdots f_n$ :

- on choisit $x \in \mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) \setminus \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n)$, avec $m$ le plus petit possible pour que $x$ existe (il existe car $E$ est de dimension infinie). Ainsi $\mathrm{Vect}(g_0 \cdots g_m) = \mathrm{Vect}(f_0 \cdots f_n, x)$
- on orthogonalise la nouvelle famille : $y = x - \sum_{k=0}^{n} \langle y, f_k \rangle f_k$
- on normalise le nouveau vecteur : $f_{n+1} = \frac{y}{\|y\|}$

En passant à l'adhérence : $E = \overline{\mathbf{g}} \subset \overline{\mathrm{Vect}(\mathbf{f})} \subset E$

# Espaces de Lebesgue

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

# Espaces de Lebesgue

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f \ : \ X \to \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

# Espaces de Lebesgue

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f \ : \ X \to \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

# Espaces de Lebesgue

Soit la relation d'équivalence définie par $f \mathcal{R} g \iff f \equiv g$ p.p.

# Espaces de Lebesgue

Soit la relation d'équivalence définie par $f \mathcal{R} g \iff f \equiv g$ p.p.

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\mathcal{R}$$

# Espaces de Lebesgue

Soit la relation d'équivalence définie par $f \mathcal{R} g \iff f \equiv g$ p.p.

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\mathcal{R}$$

$(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ est alors normé ...

# Espaces de Lebesgue

Soit la relation d'équivalence définie par $f \mathcal{R} g \iff f \equiv g$ p.p.

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\mathcal{R}$$

$(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ est alors normé ... et complet !

# Séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques.
Dans $L^2(\mathbb{T})$ :

- Les $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base Hilbertienne

# Séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques.
Dans $L^2(\mathbb{T})$ :

- Les $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base Hilbertienne
- Toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ se décompose dans la base des $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$

# Séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques.
Dans $L^2(\mathbb{T})$ :

- Les $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base Hilbertienne
- Toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ se décompose dans la base des $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$
- On définit les coefficients de Fourier par $c_k = \langle f, e^{-ikt}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{e^{-ikt}}dt$

# Séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques.
Dans $L^2(\mathbb{T})$ :

- Les $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base Hilbertienne
- Toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ se décompose dans la base des $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$
- On définit les coefficients de Fourier par $c_k = \langle f, e^{-ikt}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{e^{-ikt}}dt$
- Et $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{-ikt}$

# Séries de Fourier

La décomposition en série de Fourier s'applique aux fonctions périodiques.
Dans $L^2(\mathbb{T})$ :

- Les $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base Hilbertienne
- Toute fonction de $L^2(\mathbb{T})$ se décompose dans la base des $\{e^{-ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$
- On définit les coefficients de Fourier par $c_k = \langle f, e^{-ikt}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{e^{-ikt}}dt$
- Et $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e^{-ikt}$
- Avec $\lim\limits_{N\to\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$

# Preuve de $\lim_{N\to\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, soit $\varepsilon > 0$.
Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction continue telle que $|f_0 - f| < \varepsilon$

## Preuve de $\lim_{N\to\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, soit $\varepsilon > 0$.
Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction continue telle que $|f_0 - f| < \varepsilon$
Soit $F_0$ tel que $f_0(t) = F_0(e^{it})$
Il existe un polynôme trigonométrique $P$ tel que pour tout t, $\|f_0(t) - P(t)\| < \varepsilon$
Ce qui permet de déduire que :

# Preuve de $\lim_{N\to\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$

Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, soit $\varepsilon > 0$.
Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction continue telle que $|f_0 - f| < \varepsilon$
Soit $F_0$ tel que $f_0(t) = F_0(e^{it})$
Il existe un polynôme trigonométrique $P$ tel que pour tout t, $\|f_0(t) - P(t)\| < \varepsilon$
Ce qui permet de déduire que :

$$\begin{aligned}
\|S_N(f) - f\|_2 &\leqslant \|S_N(f) - S_N(P)\|_2 + \|S_N(P) - P\|_2 + \|f - P\|_2 \\
&\leqslant 2\|f - P\|_2 + \|S_N(P) - P\|_2 \\
&\leqslant 2\|f - P\|_2 \\
&\leqslant 2\|f - f_0\|_2 + 2\|f_0 - P\|_2 \\
&\leqslant 4\varepsilon
\end{aligned}$$

# Séries de Fourier

Vitesse de décroissance des coefficients.
Si $f \in \mathcal{C}^k$ alors :

$$|c_p(f)| \leqslant \frac{C}{|p|^k}$$

# Transformée de Fourier

Transformée de Fourier pour $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}[f](\xi) = F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t}dt$$

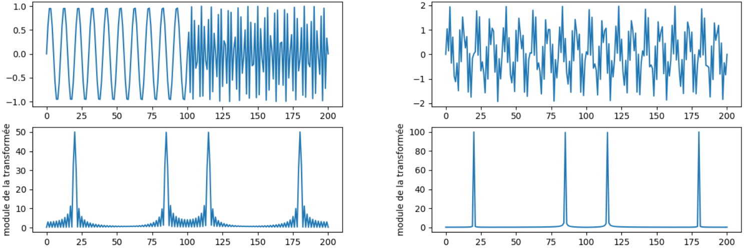
# Transformée de Fourier

Transformée de Fourier pour $f \in L^1(\mathbb{R})$

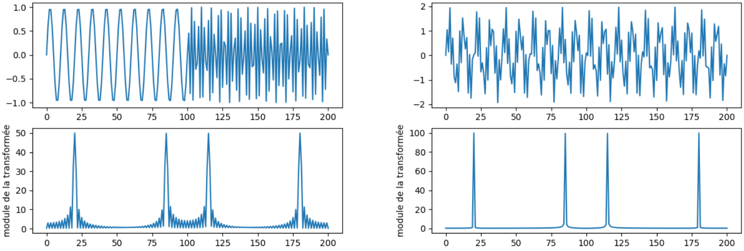
$$\mathcal{F}[f](\xi) = F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t}dt$$

Transformée de Fourier inverse pour $f, F \in L^1(\mathbb{R})$ et $f$ continue

$$\overline{\mathcal{F}}[F](t) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)e^{i\xi t}dt$$




2 signaux ayant des transformées de Fourier similaires




2 signaux ayant des transformées de Fourier similaires

$$F(\xi,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t}\overline{w(t-\tau)}dt$$

# Analyse multi-résolution

Une image de voiture pour trois résolutions différentes

# Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

# Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

# Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ f \in V_n \iff f(2\,\cdot) \in V_{n+1}$$

# Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ f \in V_n \iff f(2\,\cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe $\varphi$ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\,\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de $V_0$

# Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ f \in V_n \Longleftrightarrow f(2\,\cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe $\varphi$ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de $V_0$

$$\overline{\bigcup V} = L^2(\mathbb{R})$$

# Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ f \in V_n \iff f(2\,\cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe $\varphi$ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\,\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de $V_0$

$$\overline{\bigcup V} = L^2(\mathbb{R})$$

$$\bigcap V = \{0\}$$

# Analyse multi-résolution

Une *analyse multi-résolution* de $L^2(\mathbb{R})$ est une famille de sous-espaces fermés $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ V_n \subset V_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \ f \in V_n \iff f(2\,\cdot) \in V_{n+1}$$

Il existe $\varphi$ telle que $\{\varphi_k = \varphi(\,\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée de $V_0$

$$\overline{\bigcup V} = L^2(\mathbb{R})$$

$$\bigcap V = \{0\}$$

$\varphi$ est appelée *fonction d'échelle*.

# L'espace de détails

L'espace $V_{n+1}$ est plus "fin" que $V_n$.

# L'espace de détails

L'espace $V_{n+1}$ est plus "fin" que $V_n$.
Soit $P_n \ : \ V_{n+1} \rightarrow V_n$ la projection orthogonale

# L'espace de détails

L'espace $V_{n+1}$ est plus "fin" que $V_n$.
Soit $P_n \; : \; V_{n+1} \to V_n$ la projection orthogonale

$$W_n = \ker(P_n)$$

# L'espace de détails

L'espace $V_{n+1}$ est plus "fin" que $V_n$.
Soit $P_n \ : \ V_{n+1} \to V_n$ la projection orthogonale

$$W_n = \ker(P_n) = V_{n+1} \cap V_n^{\perp}$$

# L'espace de détails

L'espace $V_{n+1}$ est plus "fin" que $V_n$.
Soit $P_n \ : \ V_{n+1} \to V_n$ la projection orthogonale

$$W_n = \ker(P_n) = V_{n+1} \cap V_n^{\perp}$$

On définit l'*espace de détails* par

$$V_{n+1} = W_n \oplus V_n$$

# L'espace de détails

$$V_n = V_{n-1} \oplus W_{n-1}$$

# L'espace de détails

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\ &= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \end{aligned}$$

# L'espace de détails

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\ &= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\ &= V_{n-3} \oplus W_{n-3} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \end{aligned}$$

# L'espace de détails

$$
\begin{aligned}
V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\
&= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
&= V_{n-3} \oplus W_{n-3} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
&\vdots \\
&= \underbrace{\bigcap V}_{\{0\}} \oplus \left( \bigoplus_{k<n} W_k \right)
\end{aligned}
$$

# L'espace de détails

$$\begin{aligned}
V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\
&= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
&= V_{n-3} \oplus W_{n-3} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
&\vdots \\
&= \underbrace{\bigcap V}_{\{0\}} \oplus \left( \bigoplus_{k<n} W_k \right)
\end{aligned}$$

Et en faisant l'union pour tout $n \in \mathbb{Z}$ à droite et à gauche

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$$

# L'espace de détails

$$
\begin{aligned}
V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} \\
&= V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
&= V_{n-3} \oplus W_{n-3} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} \\
&\vdots \\
&= \underbrace{\bigcap V}_{\{0\}} \oplus \left( \bigoplus_{k<n} W_k \right)
\end{aligned}
$$

Et en faisant l'union pour tout $n \in \mathbb{Z}$ à droite et à gauche

$$
\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n = V_0 \oplus \left( \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} W_n \right)
$$

# Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

# Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \Longleftrightarrow f(2\cdot) \in W_1 \Longleftrightarrow f(2^n\cdot) \in W_n$$

# Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \Longleftrightarrow f(2\cdot) \in W_1 \Longleftrightarrow f(2^n\cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

# Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2\cdot) \in W_1 \iff f(2^n\cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $W_0$

# Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2\cdot) \in W_1 \iff f(2^n\cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $W_0$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$

# Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \iff f(2\cdot) \in W_1 \iff f(2^n\cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $W_0$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$

$\{\sqrt{2^n}\psi(2^n \cdot -k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $W_n$.

# Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \Longleftrightarrow f(2\cdot) \in W_1 \Longleftrightarrow f(2^n\cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $W_0$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$

$\{\sqrt{2^n}\psi(2^n\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $W_n$.
La famille définie par $\psi_{n,k}(t) = \sqrt{2^n}(2^n t - k)$ forme une famille orthonormée de $\displaystyle\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$

# Les ondelettes

$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite croissante mais on conserve l'auto-similarité.

$$f \in W_0 \Longleftrightarrow f(2\cdot) \in W_1 \Longleftrightarrow f(2^n\cdot) \in W_n$$

Il existe $\psi \in W_0$ tel que

- $\{\psi(\cdot + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $W_0$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$

$\{\sqrt{2^n}\psi(2^n\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $W_n$.
La famille définie par $\psi_{n,k}(t) = \sqrt{2^n}(2^n t - k)$ forme une famille orthonormée de $\displaystyle\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n$

$\{\psi_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ !

De $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} W_n\right)$

De $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} W_n\right)$
on déduit pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{Z}}} \langle \psi_{n,k}, f\rangle \psi_{n,k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \varphi_k, f\rangle \varphi_k + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{N}}} \langle \psi_{n,k}, f\rangle \psi_{n,k}$$