**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования**

**«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

*Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского*

*Кафедра математического анализа*

Направление подготовки: 01.03.01 – «Математика»

Профиль: Математика в цифровой экономике

КУРСОВАЯ РАБОТА

***Случайная последовательность или динамический хаос***

Студент 3 курса

группы 05-803

«\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2021 г. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Шарипова Э.И.

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент

«\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2021 г. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Халиуллин С.Г.

Казань – 2021

**Оглавление**

[Введение 3](#_Toc59286416)

[Случайная последовательность 4](#_Toc59286417)

Модели динамического хаоса8

Проблематика различимости "хаотических" и "стохастических"

последовательностей. Метод корреляционных показателей11

Заключение [18](#_Toc59286419)

[Список литературы 19](#_Toc59286420)

[Приложение 1 20](#_Toc59286420)

**ВВЕДЕНИЕ**

Понятие случайной последовательности имеет сложный характер. Существует бесконечное число критериев, которые можно использовать для проверки того, будет ли последовательность случайной. Если критерии , , … , подтверждают, что последовательность ведет себя случайным образом, то это не означает, вообще говоря, что проверка с помощью -го критерия будет успешной. Помимо этого, статистические свойства детерминированных систем отражают случайный характер их динамики. Правомерным является вопрос: в каком смысле динамические системы могут обладать случайными свойствами? Иногда можно услышать мнение, что хаос и случайность — это собирательные термины, обозначающие одно и то же явление непредсказуемости. Однако такой подход не верен, поскольку хаотические и случайные системы имеют глубокие различия. Данная работа будет об изучении нелинейных хаотических моделей и стохастических последовательностей, исследовании метода корреляционных показателей, который выявляет, является ли последовательность стохастической или динамической.

**СЛУЧАЙНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ**

В разных областях практической и научной деятельности встречаются случаи, когда некоторые эксперименты или наблюдения можно повторить огромное количество раз при одинаковых условиях. В каждом случае нам важно акцентировать внимание на результате наблюдения, выражаемым некоторым характеристическим признаком. В основном под характеристикой понимают количественный характер, т. е при каждом наблюдении что-то вычисляется или измеряется.

В некоторых случаях наблюдаемое явление изучено настолько хорошо, что мы с точностью предсказать каждое отдельное наблюдение. Например, в эксперименте, заключаемое в определении числа полнолуний, наблюдаемых в данной обсерватории, то мы можем на основании астрономических вычислений предсказать значение этого числа на ближайший год. В этом примере предполагается, что явлением управляют простые и известные законы природы, которые используются для практических вычислений.

Тем не менее, в большинстве случаев знания недостаточно точны для того, чтобы можно было предсказывать результаты отдельных наблюдений. Рассмотрим

*Пример:* совершается ряд бросаний монеты, при каждом бросании выпадает либо герб, либо решка. Здесь мы имеем дело с качественной характеристикой- стороной монеты. Однако если обозначит выпадение герба величиной «0» и выпадение решки величиной «1», то получим количественную характеристику. Проведем эксперимент: будем многократно бросать монету и фиксировать выпадение герба или решки. При многократном повторении действий обнаружим, что невозможно точно предсказать, какой стороной упадет монета. Даже если принять все меры к тому, чтобы контролировать условия, влияющие на эксперимент, результат эксперимента при этом может меняться от одного наблюдения к другому самым неправильным образом, сводя все попытки предсказания результата к неудаче.

В таких случаях принято говорить, что дело имеется с *последовательностью случайных экспериментов.* Тогда говорят, что систематическая сводка результатов такой последовательности экспериментов образует *множество статистических данных.* Статистическая теория исследует возможность получить надежные выводы из статистических данных и вырабатывает методы, с помощью которых эти выводы могут быть получены.

Если рассматривать бросание монеты с точки зрения детерминизма, то результат каждого бросания однозначно определяется начальным положением и движением монеты при фиксированных физических условиях. На основании этого может показаться, что теоретически возможно дать точное предсказание результата отдельного бросания монеты. Но невозможно исключить даже небольшие отклонения, величина которых зависит от точности осуществляющего бросания механизма.

Чтобы подойти к исследованию темы курсовой, дадим некоторые определения.

*Опр1*.События А называются случайными, если они обладают следующими свойствами:

1) недетерминированность - обладают отсутствием детерминированности, которое предполагает, что события связаны друг с другом естественной, закономерной причинной связью;

2) обладают статистической регулярностью, которая заключается в устойчивости частот.

При проведении опыта с бросанием монеты, мы видели, что в последовательности случайных экспериментов невозможно предсказать отдельные результаты в связи с обнаружением неправильных случайных колебаний, не поддающихся точному учету. Тем не менее, если мы перенесем внимание с индивидуальных экспериментов на последовательность эксперимента в целом, то обнаружится интересное и важное явление: *несмотря на неправильное поведение индивидуальных результатов, средние результаты достаточно длинной последовательности случайных экспериментов проявляют высокую степень устойчивости.* Последовательности, обладающие названным свойством, условимся называть *стохастическими.*

Чтобы понять природу устойчивости и пояснить эту важную закономерность, рассмотрим определенный случайный эксперимент, который может быть повторен большое количество раз при одинаковых условиях. Предположим, что производится последовательность испытаний, в каждом из которых появляется либо не появляется событие А. Испытания проводятся в идентичных условиях, и результаты одних не зависят от других, то есть говорим, что испытания независимы. Пусть µ- число появлений события А в каких-то n заранее назначенных номерах испытаний. Например, в n последовательных испытаниях. При наблюдении частоты фиксированного события A, обнаруживается, что при больших n близка к постоянной и лишь слегка изменяется от одной серии в n испытаниях к другой - это и есть устойчивость частот.

Из графика видно, что частота сильно колеблется при малых n, но постепенно амплитуда колебаний становится меньше. Если бы ряд экспериментов был продолжен при тех же условиях, то при частота выпадения решки близилась бы к значению 0.5.

*Опр 2.* Сложная система, которая чрезвычайно чувствительна к заданию начальных условий или к внешним воздействиям, называется хаосом.

Основным проявлением*динамического хаоса* является экспоненциальное разбегание близких траекторий. Теория Хаоса изучает кажущееся случайным или очень сложное поведение детерминированных динамических систем.

*Опр 3.* Система, состояние которой меняется во времени в соответствии с фиксированными математическими правилами, называется *динамической*.

*Опр 4*. Автокорреляционная функция — зависимость взаимосвязи между функцией (сигналом) и её сдвинутой копией от величины временного сдвига.

**МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА**

Приведем примеры моделей динамического хаоса и обсудим поведение получаемой последовательности:  
*Пример 1*. Одномерная нелинейная динамическая система:

= λ (1-), n1, 0<<1. (1)

Фиксируем = 0,3 и рассмотрим поведение последовательности при разных λ.

1. λ =1. Возьмем 200 первых значений последовательности и построим график.

для λ 1:

= (λ) 0 при n при всех (0,1), =0 –единственное устойчивое состояние, к которому сходятся значения при n.

1. λ =2:

Из графика видно, что для λ=2 = 0,5 – единственное устойчивое состояние, к которому сходятся значения при n. Взяв вещественные λ [2,3) заметим, что у последовательности будет только 1 устойчивое состояние.

1. λ=3:
2. λ=3,4494:
3. λ=3,5696:
4. λ=4 для 1000 первых элементов последовательности:

Можно заметить, что при λ = 4 система имеет бесконечное число состояний равновесий, полностью исчез периодический характер смены состояний. Хотя система = (1-), n1, 0 << 1 является детерминистической, практически невозможно предсказать, где окажется система через некоторое время, если у нас значения и λ будут неточными. Тогда прогноз может отличаться от реальных значений.

Для логистического уравнения (1) возьмем начальные условия: и Подсчитаем рекуррентным образом величины , и найдем значения среднего, дисперсии, автокорреляционной функции (АКФ) для первых 1000 значений системы.

Используя формулы в Exel: СРЗНАЧ(число1; число 2;…), ДИСПР(число1; число2;…), КОРРЕЛ(диапазон1; диапазон2), находим, что среднее E = 0,503727352; дисперсия D = 0,124079124; АКФ представлена в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Значения АКФ для логист.системы | | | | | | | |
| 1 | -0,03223 | 11 | -0,03458 | 21 | 0,019125 | 31 | 0,010252 |
| 2 | -0,0244 | 12 | 0,008659 | 22 | 0,049752 | 32 | -0,07849 |
| 3 | -0,00157 | 13 | 0,016025 | 23 | 0,039419 | 33 | -0,01381 |
| 4 | -0,03049 | 14 | 0,027508 | 24 | -0,01185 | 34 | -0,00135 |
| 5 | 0,007249 | 15 | -0,02337 | 25 | -0,00579 | 35 | -0,00116 |
| 6 | -0,05111 | 16 | 0,007328 | 26 | -0,00146 | 36 | 0,012272 |
| 7 | -0,01318 | 17 | -0,00577 | 27 | 0,004582 | 37 | -0,01416 |
| 8 | 0,000645 | 18 | 0,023077 | 28 | 0,020613 | 38 | -0,01015 |
| 9 | 0,018518 | 19 | -0,04077 | 29 | -0,05037 | 39 | -0,01311 |
| 10 | -0,01841 | 20 | -0,01425 | 30 | 0,041142 | 40 | -0,03144 |

Как видно из таблицы, значения автокорреляционной функции близки к нулю, практически можно считать их некоррелированными. Таким образом, при λ=4 последовательность напоминает реализацию стохастической последовательности типа белого шума.

*Пример 2.* , , (2)

Пусть Рассмотрим графики функции при n = 100 и n=1000:

Аналогично примеру 1, найдем среднее, дисперсию и АКФ для (2):

E = -0,403836785; D = 0,230880371; Значения АКФ существенно отличаются от нуля, поэтому трудно назвать величины некоррелированными.**ПРОБЛЕМАТИКА РАЗЛИЧИМОСТИ «ХАОТИЧЕСКИХ» И «СТОХАСТИЧЕСКИХ» ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ. МЕТОД КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ.**

При рассмотрении логистического отображения, мы увидели, что нелинейная динамическая система может проявлять свойства типа «стохастического белого шума». Возникает вопрос: возможно ли отличить «стохастические» и «хаотические» последовательности? Для этого рассмотрим метод корреляционных показателей, разработанный Р. Л. Смитом.

Согласно работам [6] и [7] функция

где – число тех пар , для которых в рассматриваемой последовательности

играет основную роль при различении «хаотичности» и «стохастичности».

Также рассматривается функция

где – число тех пар , для которых все компоненты векторов отличаются не более чем на . (В случае

Иначе это условие можно переформулировать так: возьмем произвольный вектор длины m. Это – некоторая точка в m-мерном пространстве. Надо ответить на вопрос: сколько других точек попадет в -окрестность этой точки. А метрика задается таким образом:

max  *,* где компоненты различных векторов. Тогда и есть сумма числа точек, попавших в окрестность каждой точки (каждого вектора).

Для стохастических последовательностей типа «белого шума» при малых функция

*,* (2)

где «фрактальный» показатель (корреляционная размерность) = m. Данным свойством обладает и логистическая система из примера 1. Показатель тесно связан с хаусдорфовой размерностью.

В качестве оценок корреляционной размерности берем величину

где

С помощью программы на языке программирования Java посчитаем корреляционную размерность для логистической системы, гауссовского белого шума, экономических показателей S&P500 и IBM и сравним их.

1. Для логистической последовательности и начальными значениями

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица 1 (Значения для логистической системы) | | | | | | |
| j\m | m=1 | m=2 | m=3 | m=4 | m=5 | m=10 |
| j=20 | 0,790634 | 1,339914 | 1,620635 | 1,552235 | 1,052567 | – |
| j=30 | 0,831836 | 1,159149 | 1,274656 | 1,979823 | 2,579557 | – |
| j=35 | 0,851351 | 1,154411 | 0,886477 | 1,020343 | 0,779911 | – |
| j=40 | 0,854406 | 1,05494 | 1,186102 | 1,379815 | 0,875698 | – |

2. Далее cгенерируем последовательность приближенного гауссовского белого шума в Microcoft Exel’e, используя формулы:

возвращает равномерно распределенное случайное число большее или равное нуля и меньшее единицы;

возвращает обратное значение стандартного нормального распределения.

Для гауссовского белого шума с

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица 2 (Значения для гауссовского белого шума) | | | | | | |
| j\m | m=1 | m=2 | m=3 | m=4 | m=5 | m=10 |
| j=20 | 0,99944 | 2,9945 | 4,193533 | – | – | – |
| j=30 | 0,992284 | 2,145644 | 0 | – | – | – |
| j=35 | 0,998557 | 3,254965 | – | – | – | – |
| j=40 | 1,006171 | 4,460909 | – | – | – | – |

Согласно теории, изложенной в работе [6] идея различения «хаотических» и «стохастических» последовательностей основана на том наблюдении, что корреляционная размерность у «стохастических» последовательностей больше, чем у «хаотических». Однако, если статистика используется для низкоразмерного хаоса, который имеет < m, статистический вывод будет неверным, а вывод из проверки гипотезы неоднозначным. Кроме того, показатель корреляции может говорить о различиях только для близкого к нулю. Любая статистика, основанная на показателе корреляции, должна учитывать этот момент.

Из таблицы II и III трудно сделать какие-либо выводы, поскольку для определенных m и корреляционную размерность невозможно вычислить. Помимо этого, значения в работе [6] не совпадают со значениями, вычисленными в программе, поскольку мы точно не знаем, какие использовались и как генерировался гауссовский белый шум.

Если сравнить корреляционные размерности для логистической последовательности и гауссовского белого шума, приведенного в работе [6], то для и малых то можно заметить существенные различия, хотя разницы между эмпирическими средними, дисперсией и корреляцией практически нет.

Ниже приведены таблицы из [6]:

**

**

3. Рассмотрим таблицу для значений последовательности из примера 2:

, , , .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Значения для | | | | | | |
| j\m | m=1 | m=2 | m=3 | m=4 | m=5 | m=10 |
| j=20 | 0,953076 | 1,253817 | 1,197746 | 1,148284 | 1,094389 | 0,960652 |
| j=30 | 0,983862 | 1,348033 | 1,313559 | 1,32202 | 1,349289 | 1,576429 |
| j=35 | 0,994112 | 1,378147 | 1,397267 | 1,43264 | 1,508693 | 1,841215 |
| j=40 | 1,005759 | 1,408126 | 1,476493 | 1,625355 | 1,780409 | 1,994826 |

Сравнив значения с таблицей 3b, можно сделать вывод, что корреляционная размерность у «стохастической» последовательности больше, чем у «хаотической» из примера 2. В данном случае метод работает.

4. Для иллюстрации проблематики различимости «стохастичности» «хаотичности» в финансовых рядах приведем таблицы значений корреляционных размерностей для величин для индекcов IBM S&P500 (таблицы 4а,4б; по 5903 наблюдениям в период времени 2.07.196231.12.1985гг.).



Из сравнения двух таблиц можно сказать, что экономические показатели ведут себя скорее как стохастический белый шум, но это не отвергает гипотезу о том, что близкими свойствами могут обладать и какие-то другие «хаотические» последовательности с большой «корреляционной размерностью».

Посчитаем фрактальный показатель для финансового индекса S&P500 по 5900 наблюдения в период времени с 18.11.71 24.03.1995. Данные взяты с сайта: <https://investfunds.ru/indexes/222/>.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| j\m | m=1 | m=2 | m=3 | m=4 | m=5 | m=10 |
| j=20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| j=30 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| j=35 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| j=40 |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 |

Из таблицы можно сделать вывод о том, что невозможно сказать о «природе» последовательности, сравнив ее с таблицей для гауссовского белого шума. Возможно, это связано с нестабильностью экономических показателей, которая в определенные периоды времени различна.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Многие нелинейные системы, несмотря на полную детерминированность, т.е. отсутствие шумов, стохастических возмущений и т.п., могут демонстрировать поведение, подобное случайным процессам. Метод корреляционных показателей может быть использован для того, чтобы отличить нелинейную детерменистическую систему (таблица 1) от стохастического белого шума (таблица 2 ).Из таблиц видно, что показатель корреляции не очень хорошо работает при обнаружении даже низкоразмерного детерминированного процесса при наличии стохастического шума (таблица 4). Помимо этого реальные экономические данные не демонстрируют низкоразмерный хаос. Для эмпирической работы с показателем корреляции, требуется большая осторожность при выборе . При определенных m и эпсилон сложно говорить о каких-то различиях.

Таким образом, в вопросе различимости случайной последовательности от динамического хаоса необходимы новые методы, которые могли бы справиться с небольшими размерами выборки, различными размерностями и их особенностями.

# Список используемой литературы

1. Ширяев А.Н. Вероятность: Учеб. пособ. для вузов. - 2-е изд.перераб. и доп. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 640 с.

2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том1. Факты. Модели. Москва. ФАЗИС, 1998. – 512 с.

3. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику: Учебник. М.: Издательство ЛКИ, 2010. – 600 с.

4. Кнут Д. Искусство программирования. Т.2. Москва, Вильямс, 2000.- 832 с.

5. Шилдт Г: Java. Руководство для начинающих, 7-е издание. -Пер. с англ. // Под ред. В.Г. Гинзбурга. Издательство: Диалектика, 2018. – 406 с.

6. Liu Т., Granger С .W.J., Heller W.P. Using the correlation exponent to decide whether an economic series is chaotic / / Pesaran M.H., Potter S.M. (Eds). Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics. New York: Wiley, 1993.

7. Smith R.L. Estimating dimension in noisy chaotic time series / / Journal of the Royal Statistical Society. Ser. B. 1992. V. 54. №2. P. 329-351.

**Приложение 1**

Код программы на языке программирования Java:













