

Álgebra das Proposições

As propriedades da Álgebra das Proposições demonstram algumas relações tautológicas entre propriedades simples e compostas, a serem demonstradas pelo método da tabela verdade e, posteriormente, pelo método dedutivo.

Demonstre as seguintes propriedades pelo método da tabela verdade:

Propriedades da Conjunção (\wedge)

- a) Idempotente: $A \wedge A \Leftrightarrow A$
- b) Comutativa: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
- c) Associativa: $(A \wedge B) \wedge D \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge D)$
- d) Identidade:
 - (i) $A \wedge T \Leftrightarrow A$
 - (ii) $A \wedge C \Leftrightarrow C$
 - (iii) $A \wedge \sim A \Leftrightarrow C$

Obs. A propriedade da identidade exprime que T e C são respectivamente elemento neutro e elemento absorvente da conjunção.

Propriedades da Disjunção (\vee)

- a) Idempotente: $A \vee A \Leftrightarrow A$
- b) Comutativa: $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
- c) Associativa: $(A \vee B) \vee D \Leftrightarrow A \vee (B \vee D)$
- d) Identidade:
 - (i) $A \vee T \Leftrightarrow T$
 - (ii) $A \vee C \Leftrightarrow A$
 - (iii) $A \vee \sim A \Leftrightarrow T$

Obs. A propriedade da identidade exprime que T e C são respectivamente elemento absorvente e elemento neutro da disjunção.

Propriedades da Conjunção e da Disjunção

- a) Distributivas:
 - (i) $A \wedge (B \vee D) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge D)$
 - (ii) $A \vee (B \wedge D) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee D)$
- b) Absorção:
 - (i) $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
 - (ii) $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$
- c) Regra da Condicional: $A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim A \vee B$
- d) Regra da Contraposição: $A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim B \rightarrow \sim A$

e) Regras de De Morgan:

- (i) $\sim(A \wedge B) \Leftrightarrow \sim A \vee \sim B$
- (ii) $\sim(A \vee B) \Leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$

Obs. também é possível definir essas duas regras como:

$$A \vee B \Leftrightarrow \sim(\sim A \wedge \sim B) \quad e$$

$$A \wedge B \Leftrightarrow \sim(\sim A \vee \sim B)$$

f) Regra e negação da Bicondicional:

- (i) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$
- (ii) $\sim(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B) \Leftrightarrow A \leftrightarrow \sim B \Leftrightarrow \sim A \leftrightarrow B \Leftrightarrow A \underline{\vee} B$