

Método Dedutivo

Todas as implicações e equivalências lógicas foram demonstradas até agora pelo "Método das Tabelas-Verdade". Vamos agora exemplificar a demonstração de implicações e equivalências por um método mais eficiente, denominado "Método Dedutivo". No emprego do método dedutivo, o papel mais importante é das equivalências relativas à Álgebra das Proposições, já comprovadamente verdadeiras.

Demonstração das implicações e equivalências pelo Método Dedutivo:

$$a) \quad C \Rightarrow p \quad \Leftrightarrow \quad C \rightarrow p \Leftrightarrow \sim C \vee p \Leftrightarrow T \vee p \Leftrightarrow T$$

$$b) \quad p \Rightarrow T \quad \Leftrightarrow \quad p \rightarrow T \Leftrightarrow \sim p \vee T \Leftrightarrow T$$

Observe que as tabelas verdade de $C \rightarrow p$ e $p \rightarrow T$ mostram que essas condicionais são Tautológicas:

P	C	T	$C \rightarrow p$	$p \rightarrow T$
V	F	V	V	V
F	F	V	V	V

$$\begin{aligned} c) \quad p \wedge q \Rightarrow p & \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow p \\ & \Leftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee p \\ & \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee p \\ & \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee \sim q \\ & \Leftrightarrow T \vee q \\ & \Leftrightarrow T, \text{ logo a relação é válida} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad p \Rightarrow p \vee q & \Leftrightarrow p \rightarrow p \vee q \\ & \Leftrightarrow \sim p \vee (p \vee q) \\ & \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q \\ & \Leftrightarrow T \vee q \\ & \Leftrightarrow T, \text{ logo a relação é válida} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad (p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q & \\ (p \rightarrow q) \wedge p & \\ (\sim p \vee q) \wedge p & \\ p \wedge (\sim p \vee q) & \\ (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) & \\ C \vee (p \wedge q) & \\ p \wedge q \Rightarrow q & \\ *continua como em c) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f) \quad (p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p & \\ (p \rightarrow q) \wedge \sim q & \\ (\sim p \vee q) \wedge \sim q & \\ \sim q \wedge (\sim p \vee q) & \\ (\sim q \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge q) & \\ (\sim q \wedge \sim p) \vee C & \\ \sim q \wedge \sim p \Rightarrow \sim p & \\ *continua como em c) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g) \quad (p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q & \\ (p \vee q) \wedge \sim p & \\ \sim p \wedge (p \vee q) & \\ (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) & \\ C \vee (\sim p \wedge q) & \\ (\sim p \wedge q) \Rightarrow q & \\ *continua como em c) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h) \quad p \wedge q \Rightarrow p \vee q & \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow p \vee q \\ & \Leftrightarrow \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q) \\ & \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) \\ & \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee (\sim q \vee q) \\ & \Leftrightarrow T \vee T \\ & \Leftrightarrow T, \text{ logo a relação é válida} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i) \quad p \Rightarrow q \rightarrow p & \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow p) \\ & \Leftrightarrow \sim p \vee (q \rightarrow p) \\ & \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim q \vee p) \\ & \Leftrightarrow \sim p \vee (p \vee \sim q) \\ & \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee \sim q \\ & \Leftrightarrow T \vee \sim q \\ & \Leftrightarrow T, \text{ logo a relação é válida} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j) \quad p \Rightarrow \sim p \rightarrow q & \Leftrightarrow p \rightarrow (\sim p \rightarrow q) \\ & \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim p \rightarrow q) \\ & \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim \sim p \vee q) \\ & \Leftrightarrow \sim p \vee (p \vee q) \\ & \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q \\ & \Leftrightarrow T \vee q \\ & \Leftrightarrow T, \text{ logo a relação é válida} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k) \quad p \rightarrow q \Rightarrow p \wedge r \rightarrow q & \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q) \\ & \Leftrightarrow \sim(p \rightarrow q) \vee (p \wedge r \rightarrow q) \\ & \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee (p \wedge r \rightarrow q) \\ & \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge r \rightarrow q) \\ & \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim(p \wedge r) \vee q) \\ & \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee \sim r) \vee q) \\ & \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee q) \vee \sim r) \\ & \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim(p \wedge \sim q) \vee \sim r) \\ & \Leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \vee \sim(p \wedge \sim q)) \vee \sim r \\ & \Leftrightarrow T \vee \sim r \\ & \Leftrightarrow T, \text{ logo a relação é válida} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l) \quad p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \sim q \rightarrow C & \\ p \wedge \sim q \rightarrow C & \\ \sim(p \wedge \sim q) \vee C & \\ \sim(p \wedge \sim q) & \\ \sim p \vee \sim \sim q & \\ \sim p \vee q & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow q & \Leftrightarrow p \rightarrow q \\ \text{relação válida} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{m)} \quad p \rightarrow q &\Leftrightarrow p \vee q \rightarrow q \\
 &p \vee q \rightarrow q \\
 &\sim(p \vee q) \vee q \\
 &(\sim p \wedge \sim q) \vee q \\
 &q \vee (\sim p \wedge \sim q) \\
 &(q \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim q) \\
 &(q \vee \sim p) \wedge T \\
 &(\sim p \vee q) \\
 p \rightarrow q &\Leftrightarrow p \rightarrow q \\
 &\text{relação válida}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{n)} \quad (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) &\Leftrightarrow \sim p \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \\
 &(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \\
 &\sim p \vee (q \wedge \sim q) \\
 &\sim p \vee C \\
 &\sim p \Leftrightarrow \sim p \\
 &\text{relação válida}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{o)} \quad p \wedge q \rightarrow r &\Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r) \\
 &\sim p \vee (q \rightarrow r) \\
 &\sim p \vee (\sim q \vee r) \\
 &(\sim p \vee \sim q) \vee r \\
 &\sim(p \wedge q) \vee r \\
 p \wedge q \rightarrow r &\Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r \\
 &\text{relação válida}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{p)} \quad (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) &\Leftrightarrow p \vee q \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \\
 &(\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \\
 &(r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q) \\
 &r \vee (\sim p \wedge \sim q) \\
 &(\sim p \wedge \sim q) \vee r \\
 &\sim(p \vee q) \vee r \\
 p \vee q \rightarrow r &\Leftrightarrow p \vee q \rightarrow r \\
 &\text{relação válida}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{q)} \quad (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) &\Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r \\
 &\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \\
 &(\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r) \\
 &\sim p \vee (q \vee r) \\
 p \rightarrow q \vee r &\Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r \\
 &\text{relação válida}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{r)} \quad (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) &\Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r \vee s \\
 &\Leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \\
 &(\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee s) \\
 &(\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee s) \\
 &\sim(p \wedge q) \vee (r \vee s) \\
 p \wedge q \rightarrow r \vee s &\Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r \vee s \\
 &\text{relação válida}
 \end{aligned}$$

Lista de Exercícios:

Parte I. Todas as relações abaixo são válidas. Prove a validade das relações utilizando o Método Dedutivo.

- | | |
|---|--|
| 1) $p \wedge \sim p \Rightarrow q$ | 19) $p \rightarrow q \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p$ |
| 2) $\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$ | 20) $p \Rightarrow q \rightarrow p \wedge q$ |
| 3) $\sim(p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow p \wedge q$ | 21) $T \Rightarrow \sim((\sim p \vee q) \wedge \sim(p \rightarrow q))$ |
| 4) $\sim p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$ | 22) $(p \rightarrow \sim q) \wedge r \wedge p \Rightarrow r$ |
| 5) $\sim(\sim p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow \sim p \wedge q$ | 23) $p \leftrightarrow p \wedge \sim p \Leftrightarrow \sim p$ |
| 6) $p \wedge r \Rightarrow \sim q \vee r$ | 24) $(p \leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ |
| 7) $p \Rightarrow p \vee r$ | 25) $p \rightarrow q \Rightarrow p \wedge r \rightarrow q$ |
| 8) $p \Rightarrow (p \vee q) \vee r$ | 26) $p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow r \vee q$ |
| 9) $p \Rightarrow \sim p \rightarrow q$ | 27) $p \Rightarrow q \rightarrow (q \rightarrow p)$ |
| 10) $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$ | 28) $p \wedge \sim q \rightarrow C \Leftrightarrow p \rightarrow q$ |
| 11) $(p \rightarrow q) \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q$ | 29) $p \wedge q \Rightarrow p \rightarrow q \vee r$ |
| 12) $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r$ | 30) $p \vee (q \wedge \sim p) \Rightarrow \sim q \rightarrow p$ |
| 13) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \wedge r$ | 31) $\sim p \wedge q \rightarrow r \vee s \Rightarrow \sim s \rightarrow r \vee \sim(\sim p \wedge q)$ |
| 14) $\sim(p \wedge q) \wedge p \Rightarrow \sim q$ | 32) $(p \rightarrow \sim q \wedge q) \rightarrow \sim(r \wedge s) \Leftrightarrow \sim s \vee p \vee \sim r$ |
| 15) $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ | 33) $s \wedge (p \wedge q \rightarrow \sim r \vee s \vee r) \rightarrow q \Rightarrow q \vee \sim s$ |
| 16) $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ | 34) $\sim a \vee \sim b \rightarrow \sim a \Leftrightarrow a \rightarrow a \wedge b$ |
| 17) $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ | 35) $\sim b \Leftrightarrow \sim b \leftrightarrow \sim c \rightarrow \sim d \vee \sim c$ |
| 18) $\sim p \Rightarrow p \vee q \Leftrightarrow q$ | 36) $a \vee b \Leftrightarrow \sim(\sim a \vee b) \vee b$ |

Parte II. Use o Método Dedutivo para reduzir as proposições abaixo à sua forma mais simplificada, e classifique-as em Tautologia, Contradição ou Contingência:

- | | | |
|---|---|--|
| 1) $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$ | 4) $\sim a \rightarrow \sim b \vee a$ | 7) $p \rightarrow (p \rightarrow q \wedge \sim q)$ |
| 2) $(p \rightarrow \sim p) \rightarrow q$ | 5) $(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ | 8) $a \wedge (a \rightarrow b) \rightarrow b$ |
| 3) $(p \rightarrow q) \vee \sim(\sim q \rightarrow \sim p)$ | 6) $\sim(p \vee \sim p) \vee (q \vee \sim q)$ | 9) $\sim(a \wedge b \rightarrow a \vee b)$ |
| 10) $\sim((a \rightarrow a) \rightarrow a) \rightarrow (c \rightarrow (a \rightarrow c))$ | 11) $\sim(\sim a \rightarrow \sim(b \rightarrow (\sim c \rightarrow (a \rightarrow \sim(\sim c \rightarrow c))))$ | |