Práctica 3

Números aleatorios.

Ejercicio 1. Para el estudio mediante simulación es necesario generar muchos números aleatorios en la computadora. Estos corresponden a variables aleatorias uniformemente distribuídas en el intervalo $(0,1)$. Existen en la literatura varias rutinas portables, optimizadas para generar enormes cantidades de números pseudo-aleatorios con velocidad razonable. Se propone aprender a implementar las siguientes rutinas:

a) aprender a implementar `RAN2`. Ver "Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing", W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling (Cambridge, 1986). Esta referencia está disponible online `http://www.nr.com/oldverswitcher.html`

b) aprender a implementar `MZRAN`. Ver "Some Portable Very-Long-Period Random Number Generators", G. Marsaglia and A. Zaman, Computers in Physics **8**(1), 117 (1994).

c) aprender a utilizar Mersenne Twister, version de la biblioteca standard de python `(random.random)`.

Para los primeros dos generadores existen implementaciones en `C` y `FORTRAN`.

Ejercicio 2. Se propone el siguiente juego en el cual todas las variables aleatorias que se generan son i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$: Se simula la v.a. U. Si $U < \frac{1}{2}$, se suman dos nuevos números aleatorios. Pero si $U \geq \frac{1}{2}$, se suman tres números aleatorios. El resultado de la suma, en cualquiera de los casos, es una variable aleatoria X. Se gana en el juego si $X \geq 1$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar?.

b) La probabilidad de ganar, ¿Es independiente de U?.

c) Implementar un algoritmo en computadora que estime la probabilidad de ganar, esto es, la fracción de veces que se gana en n realizaciones del juego. Completar la siguiente tabla:

n	$P[X \geq 1]$
100	
1000	
10000	
100000	

Ejercicio 3. Calcule exactamente el valor de las siguientes integrales. Mediante una simulación de Monte Carlo con n iteraciones, calcule a su vez un valor aproximado y compare con el valor exacto.

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{3/2} dx$

b) $\displaystyle\int_0^\infty x \left(1+x^2\right)^{-2} dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y)^2} dx\, dy$

e) $\displaystyle\int_0^\infty dx \int_0^x dy\ e^{-(x+y)}$

Ayuda: Sea: $I_y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < x \\ 0 & \text{si } y \geq x \end{cases}$. Utilice esta función para igualar la integral del item **e)** a otra cuyos términos vayan de 0 a ∞.

Completar la siguiente tabla:

n	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d)**	**(e)**	$\longleftarrow$ integral
100						
1000						
10000						
100000						
1000000						

Ejercicio 4. Para $U_1, U_2, \ldots$ variables aleatorias uniformemente distribuídas en el intervalo $(0,1)$, se define:

$$N = \text{Mínimo}\left\{ n : \sum_{i=1}^{n} U_i > 1 \right\}$$

Es decir, N es igual a la cantidad de números aleatorios que deben sumarse para exceder a 1.

a) Estimar $E[N]$ generando n valores de N y completar la siguiente tabla:

n	$E[N]$
100	
1000	
10000	
100000	
1000000	

b) Calcular el valor exacto de $E[N]$.

Ejercicio 5. Para $U_1, U_2, \ldots$ números aleatorios, se define:

$$N = \text{Máximo}\left\{ n : \prod_{i=1}^{n} U_i \geq e^{-3} \right\}$$

donde: $\displaystyle\prod_{i=1}^{0} U_i = 1$. Mediante n simulaciones determinar:

a)

n	$E[N]$
100	
1000	
10000	
100000	
1000000	

b) $P(N = i)$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, usando $n = 1000000$.

Ejercicio 6. Buffon, un matemático del siglo dieciocho, sugirió la siguiente técnica para calcular el valor de π: Tomar una gran hoja de papel, la cual se encuentra rayada con finas líneas paralelas separadas entre sí por dos centímetros y arrojar al azar, un gran número de veces sobre el papel una fina aguja de un centímetro de largo, de forma que caiga acostada. Se calcula la proporción de veces que la aguja interseca alguna línea del papel y el valor de π se estima como la inversa de dicha proporción.

a) Elaborar un argumento que explique porqué el método de arrojar la aguja funciona para estimar el valor de π.

b) Implementar una simulación en la computadora que utilice la técnica mencionada de arrojar la aguja.

Notar que el problema es equivalente a sortear uniformente la posición del centro de la aguja en un intervalo de ancho 2, y sortear el ángulo que forma la aguja de largo 1 con las líneas del papel, uniformemente entre 0 y π. Para cada prueba verificar a continuación si la proyección de la aguja sobre la recta perpendicular a las líneas del papel, interseca algún extremo del intervalo.

Las variables que se sortean uniformemente son: $r \in [0, 2]$ y $\theta \in [0, \pi]$ (notar que también resulta equivalente a sortear $\theta \in [0, 2\pi]$). En consecuencia las ordenadas de los extremos de la aguja resultan:

$$y_a = r + \frac{1}{2} sen\ \theta \qquad y_b = r - \frac{1}{2} sen\ \theta$$

- Se considera que se produce intersección si $y_b \leq 0$ ó $y_a \geq 2$.
- Claramente, no existirá intersección si $r \in (1/2, 3/2)$.

Completar la siguiente tabla con los valores obtenidos

n	π
1000	
10000	
100000	

Para realizar la simulación se utiliza el valor de π que quiere estimarse. Esto sin embargo, no constituye un fraude dado que sólo se lo utiliza para simular el proceso de arrojar la aguja, no en el cálculo del número en sí.