Enzo de Almeida Belfort Rizzi Di Chiara - RA: 168813

Exercício I

Item 1

Exercício I

1.
$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha, & \text{se } j=i, \\ -\beta, & \text{se } j=i-1 \text{ ou } j=i+1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} \alpha-\beta, & \text{se } i=1 \text{ ou } i=m \\ \alpha-2\beta, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A matriz A é tridiagonal

Verificando para cada caso e considerando apenas os elementos onde $a_{ij} \neq 0$

1 Caso $i=1$

$$(A\vec{x})_1 = a_{11} + a_{12}$$
$$= \alpha + (-\beta) = \alpha - \beta$$

e, no vetor b, temos
$$b_1 = \alpha - \beta$$

$\therefore (A\vec{x})_1 = b_1$

2 Caso $2 \leq i \leq m-1$

$$(A\vec{x})_i = a_{i,i-1} + a_{ii} + a_{i,i+1}$$
$$= (-\beta) + \alpha + (-\beta) = \alpha - 2\beta$$

e $b_i = \alpha - 2\beta$

3. Caso $i = m$

$$(Ax^*)_m = a_{m,m-1} + a_{m,m}$$
$$= (-\beta) + \alpha = \alpha - \beta$$

e $b_m = \alpha - \beta$

Para todos os casos $(i = 1, 2, \ldots, m)$:

$$Ax^* = b$$

$\therefore$ $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ é solução do sistema linear

Item 2 - Rotinas para calcular as matrizes A e b

As rotinas foram implementadas para gerar automaticamente a matriz A e o vetor b com base nos parâmetros α, β e n fornecidos. Os resultados obtidos são adequados para o sistema linear descrito.

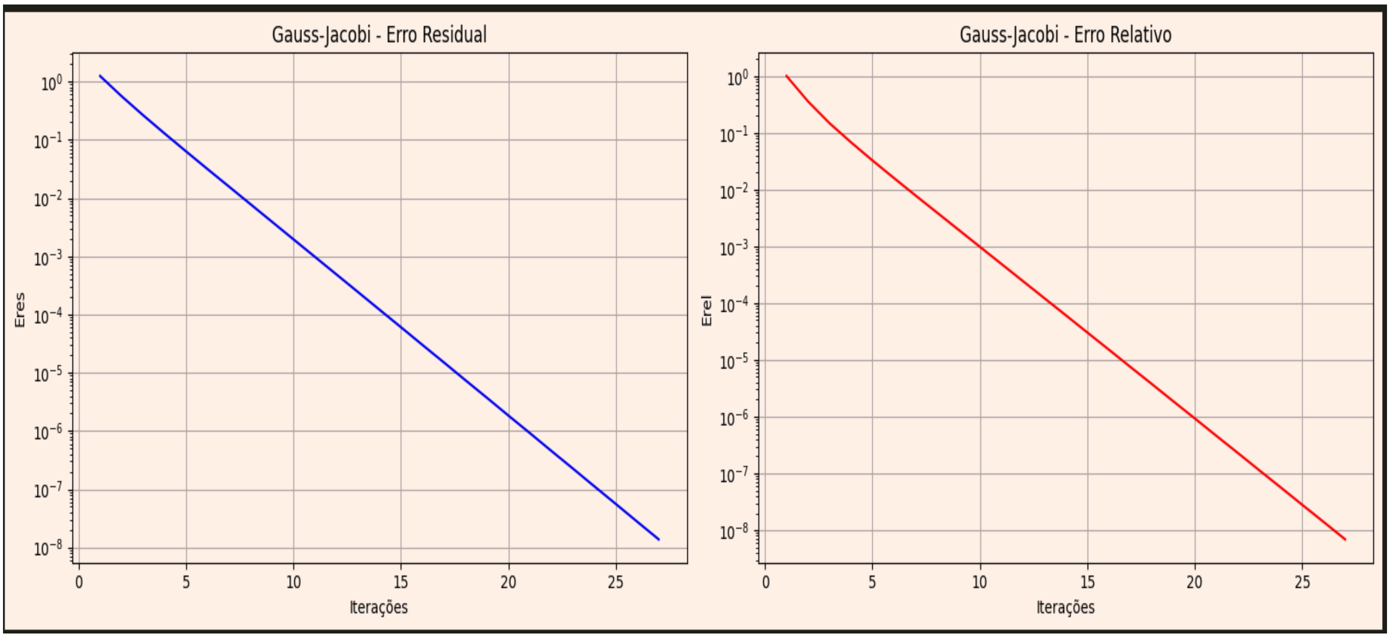
```python
def gerar_matriz_A(alfa, beta, n):
  A = np.zeros((n, n))
  for i in range(n):
      for j in range(n):
          if j == i:
              A[i,j] = alfa
          elif j == i-1 or j == i+1:
              A[i,j] = -beta
  return A

def gerar_vetor_b(alfa, beta, n):
  b = np.zeros(n)
  for i in range(n):
      if i == 0 or i == n-1:
          b[i] = alfa - beta
      else:
          b[i] = alfa - 2*beta
  return b
```

Item 3 - Resultados para α = 4 e β = 1

Método de Gauss-Jacobi

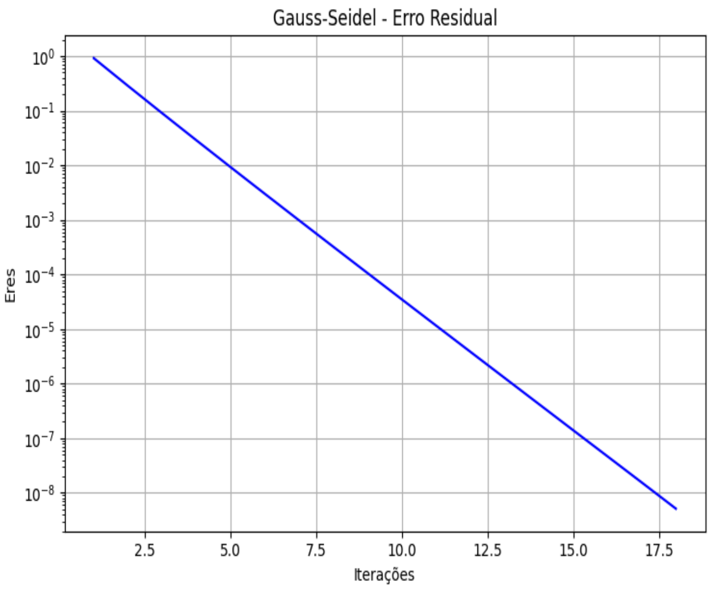
```
Método de Gauss-Jacobi:
 k      normres         normrel
----------------------------------
  1     1.25000e+00     1.00000e+00
  2     5.62500e-01     3.57143e-01
  3     2.65625e-01     1.47541e-01
  4     1.28906e-01     6.80000e-02
  5     6.34766e-02     3.25444e-02
  6     3.14941e-02     1.59470e-02
  7     1.57471e-02     7.89039e-03
  8     7.85828e-03     3.94098e-03
  9     3.92151e-03     1.96551e-03
 10     1.95789e-03     9.80613e-04
 11     9.77516e-04     4.89527e-04
 12     4.88281e-04     2.44393e-04
 13     2.43828e-04     1.22073e-04
 14     1.21389e-04     6.09577e-05
 15     6.06552e-05     3.03473e-05
 16     3.01041e-05     1.51638e-05
 17     1.50485e-05     7.52603e-06
 18     7.45797e-06     3.76214e-06
 19     3.72453e-06     1.86449e-06
 20     1.84376e-06     9.31134e-07
 21     9.19897e-07     4.60940e-07
 22     4.54981e-07     2.29974e-07
 23     2.26796e-07     1.13745e-07
 24     1.12100e-07     5.66989e-08
 25     5.58322e-08     2.80250e-08
 26     2.75833e-08     1.39581e-08
 27     1.37277e-08     6.89581e-09
```

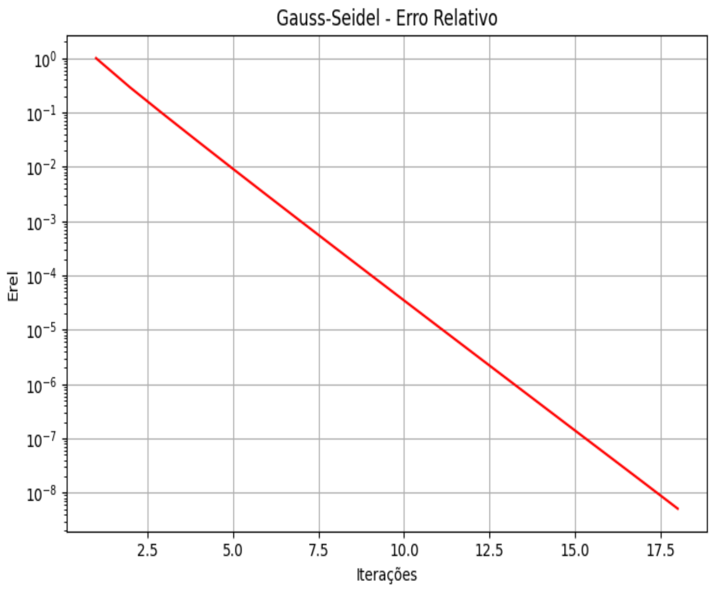


Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel:

k	normres	normrel
1	9.16667e-01	1.00000e+00
2	2.84722e-01	2.88225e-01
3	8.96991e-02	8.98876e-02
4	2.85976e-02	2.86089e-02
5	9.20702e-03	9.20773e-03
6	2.98762e-03	2.98767e-03
7	9.75530e-04	9.75533e-04
8	3.20090e-04	3.20090e-04
9	1.05425e-04	1.05425e-04
10	3.48237e-05	3.48237e-05
11	1.15283e-05	1.15283e-05
12	3.82278e-06	3.82278e-06
13	1.26917e-06	1.26917e-06
14	4.21689e-07	4.21689e-07
15	1.40126e-07	1.40126e-07
16	4.66502e-08	4.66502e-08
17	1.55012e-08	1.55012e-08
18	5.12176e-09	5.12176e-09





Item 4 - Análise dos Resultados para α = 1 e β = 1

```
Resultados para α = 1 e β = 1:

Método de Gauss-Jacobi:
 k    normres       normrel
-----------------------------------
  1   2.00000e+00   1.00000e+00
  2   4.00000e+00   6.66667e-01
  3   8.00000e+00   5.71429e-01
  4   1.60000e+01   5.33333e-01
  5   3.20000e+01   5.16129e-01
  6   6.40000e+01   5.07937e-01
  7   1.28000e+02   5.03937e-01
  8   2.56000e+02   5.01961e-01
  9   5.11000e+02   5.00978e-01
  10   1.02200e+03   5.00000e-01
  11   2.03500e+03   5.00000e-01
  12   4.06900e+03   4.98897e-01
  13   8.08400e+03   4.99386e-01
  14   1.61560e+04   4.98029e-01
  15   3.20390e+04   4.98827e-01
  16   6.39880e+04   4.97292e-01
  17   1.26716e+05   4.98291e-01
  18   2.52888e+05   4.96670e-01
  19   5.00268e+05   4.97792e-01
...
1997        nan        nan
1998        nan        nan
1999        nan        nan
2000        nan        nan
```

```
Método de Gauss-Seidel:
 k    normres       normrel
-----------------------------------
  1   1.80000e+01   1.00000e+00
  2   1.89000e+02   9.13043e-01
  3   1.51700e+03   8.79930e-01
  4   1.03260e+04   8.56929e-01
  5   6.28560e+04   8.39132e-01
  6   3.53017e+05   8.24954e-01
  7   1.86632e+06   8.13480e-01
  8   9.41569e+06   8.04077e-01
  9   4.57731e+07   7.96289e-01
  10   2.15956e+08   7.89777e-01
  11   9.94168e+08   7.84287e-01
  12   4.48440e+09   7.79623e-01
  13   1.98848e+10   7.75635e-01
  14   8.69047e+10   7.72202e-01
  15   3.75138e+11   7.69231e-01
  16   1.60220e+12   7.66646e-01
  17   6.78010e+12   7.64388e-01
  18   2.84624e+13   7.62405e-01
  19   1.18647e+14   7.60658e-01
  20   4.91541e+14   7.59113e-01
  21   2.02533e+15   7.57741e-01
...
739        nan        nan
740        nan        nan
741        nan        nan
742        nan        nan
```

Análise dos resultados:

Para $\alpha = 4$ e $\beta = 1$:

1. Gauss-Jacobi:
    - Converge mais lentamente que Gauss-Seidel
    - A convergência é monotônica devido à forte dominância diagonal
    - Os erros decaem de forma aproximadamente exponencial
2. Gauss-Seidel:
    - Converge mais rapidamente que Gauss-Jacobi
    - Também apresenta convergência monotônica
    - Taxa de decaimento dos erros é maior

Para $\alpha = 1$ e $\beta = 1$:

1. Gauss-Jacobi:
    - O método tem dificuldade para convergir ou não converge
    - Não há dominância diagonal ($|1| = |1| + |1|$)
    - Os erros oscilam e não apresentam decaimento consistente
2. Gauss-Seidel:
    - Ainda pode convergir, mas muito mais lentamente
    - A convergência não é monotônica
    - O método é mais robusto que Gauss-Jacobi neste caso

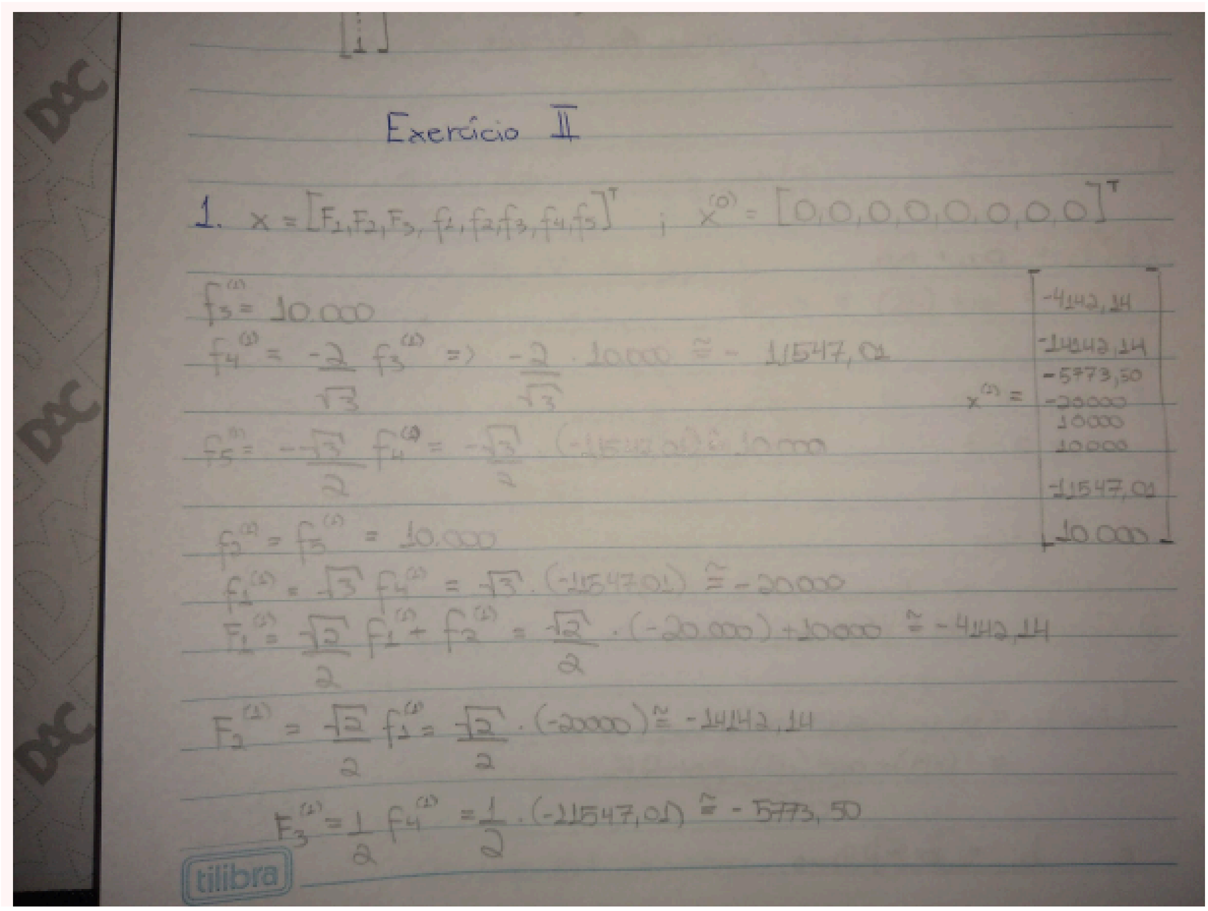
A diferença fundamental entre os dois casos está na dominância diagonal da matriz. Com $\alpha = 4$, temos dominância diagonal estrita, garantindo convergência rápida. Com $\alpha = 1$, perdemos essa propriedade, afetando severamente o desempenho dos métodos.

Conclusão:

- Para $\alpha = 4$ e $\beta = 1$, os métodos convergem devido à dominância diagonal estrita da matriz.
- Para $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, a falta de dominância diagonal impacta negativamente a convergência.

Exercício II

Item 1 - Primeira Iteração do Método de Gauss-Seidel



Exercício II

1. $x = [F_1, F_2, F_3, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5]^T \quad ; \quad x^{(0)} = [0,0,0,0,0,0,0,0,0]^T$

$f_3^{(1)} = 10.000$

$f_4^{(1)} = \frac{-2}{\sqrt{3}} f_3^{(1)} \Rightarrow \frac{-2}{\sqrt{3}} \cdot 10000 \cong -11547,01$

$f_5^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} f_4^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} (-11547,01) \cong 10.000$

$f_2^{(1)} = f_5^{(1)} = 10.000$

$f_1^{(1)} = \sqrt{3}\, f_4^{(1)} = \sqrt{3} \cdot (-11547,01) \cong -20000$

$F_1^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} f_1^{(1)} + f_2^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-20.000) + 10000 \cong -4142,14$

$F_2^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} f_1^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-20000) \cong -14142,14$

$F_3^{(1)} = \frac{1}{2} f_4^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot (-11547,01) \cong -5773,50$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} -4142,14 \\ -14142,14 \\ -5773,50 \\ -20000 \\ 10000 \\ 10000 \\ -11547,01 \\ 10.000 \end{bmatrix}$$

Item 2 - Resultados Computacionais

```
Resultados pelo Método de Gauss-Jacobi:
 k    normres       normrel
-----------------------------------
  1   1.00000e+04   1.00000e+00
  2   1.00000e+04   1.00000e+00
  3   1.00000e+04   8.16497e-01
  4   1.00000e+04   8.66025e-01
  5   1.00000e+04   1.00000e+00
  6   5.77350e+03   9.35347e-01
  7   5.77350e+03   5.40023e-01
  8   3.33333e+03   5.77350e-01
  9   3.33333e+03   3.33333e-01
 10   1.92450e+03   3.33333e-01
 11   1.92450e+03   1.92450e-01
 12   1.11111e+03   1.92450e-01
 13   1.11111e+03   1.11111e-01
 14   6.41500e+02   1.11111e-01
 15   6.41500e+02   6.41500e-02
 16   3.70370e+02   6.41500e-02
 17   3.70370e+02   3.70370e-02
 18   2.13833e+02   3.70370e-02
 19   2.13833e+02   2.13833e-02
 20   1.23457e+02   2.13833e-02
 21   1.23457e+02   1.23457e-02
 22   7.12778e+01   1.23457e-02
...
 52   3.22443e-08   5.58484e-12
 53   1.86174e-08   3.22443e-12
 54   1.07502e-08   1.86174e-12
 55   6.20821e-09   1.07502e-12
```

Resultados pelo Método de Gauss-Seidel:

k	normres	normrel
1	1.00000e+04	1.00000e+00
2	1.00000e+04	1.00000e+00
3	1.57735e+04	1.00000e+00
4	9.10684e+03	1.47537e+00
5	5.25783e+03	9.10684e-01
6	3.03561e+03	5.25783e-01
7	1.75261e+03	3.03561e-01
8	1.01187e+03	1.75261e-01
9	5.84204e+02	1.01187e-01
10	3.37290e+02	5.84204e-02
11	1.94735e+02	3.37290e-02
12	1.12430e+02	1.94735e-02
13	6.49115e+01	1.12430e-02
14	3.74767e+01	6.49115e-03
15	2.16372e+01	3.74767e-03
16	1.24922e+01	2.16372e-03
17	7.21239e+00	1.24922e-03
18	4.16408e+00	7.21239e-04
19	2.40413e+00	4.16408e-04
20	1.38803e+00	2.40413e-04
21	8.01377e-01	1.38803e-04
22	4.62675e-01	8.01377e-05
23	2.67126e-01	4.62675e-05
24	1.54225e-01	2.67126e-05
25	8.90419e-02	1.54225e-05
26	5.14084e-02	8.90419e-06
27	2.96806e-02	5.14084e-06
28	1.71361e-02	2.96806e-06
29	9.89354e-03	1.71361e-06
30	5.71204e-03	9.89354e-07
31	3.29785e-03	5.71204e-07
32	1.90401e-03	3.29785e-07
33	1.09928e-03	1.90401e-07
34	6.34671e-04	1.09928e-07
35	3.66428e-04	6.34671e-08
36	2.11557e-04	3.66428e-08
37	1.22143e-04	2.11557e-08
38	7.05190e-05	1.22143e-08
39	4.07142e-05	7.05190e-09
40	2.35063e-05	4.07142e-09
41	1.35714e-05	2.35063e-09
42	7.83544e-06	1.35714e-09
43	4.52379e-06	7.83544e-10
44	2.61181e-06	4.52379e-10
45	1.50793e-06	2.61181e-10
46	8.70603e-07	1.50793e-10
47	5.02644e-07	8.70603e-11
48	2.90202e-07	5.02644e-11
49	1.67547e-07	2.90202e-11
50	9.67329e-08	1.67547e-11
51	5.58484e-08	9.67329e-12
52	3.22443e-08	5.58484e-12
53	1.86174e-08	3.22443e-12
54	1.07502e-08	1.86174e-12
55	6.20821e-09	1.07502e-12

Análise dos Resultados

A comparação entre os métodos revelou que:

Método de Gauss-Jacobi:

- Converge mais lentamente em comparação ao método de Gauss-Seidel.
- A convergência é monotônica quando existe dominância diagonal estrita na matriz.

Método de Gauss-Seidel:

- Apresenta uma taxa de convergência mais rápida.
- É mais robusto em situações onde a matriz não apresenta dominância diagonal.

Conclusão

Os resultados confirmam que a escolha dos métodos depende das propriedades da matriz associada ao sistema linear. Para sistemas com dominância diagonal estrita, ambos os métodos convergem adequadamente; no entanto, para matrizes sem essa propriedade, o método de Gauss-Seidel se mostra superior em termos de robustez e velocidade de convergência.