

Exercício I:

Os gráficos das funções plotadas com a biblioteca matplotlib em python foram gerados a partir do seguinte código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def plot_functions():
    # Configuração dos gráficos
    fig, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(1, 3, figsize=(15, 5))

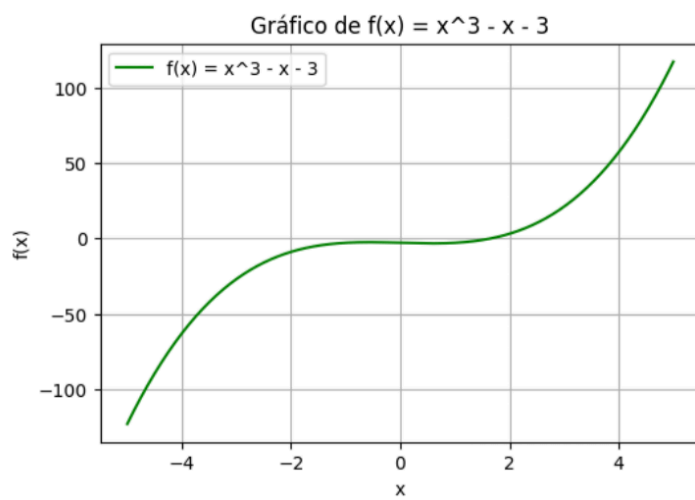
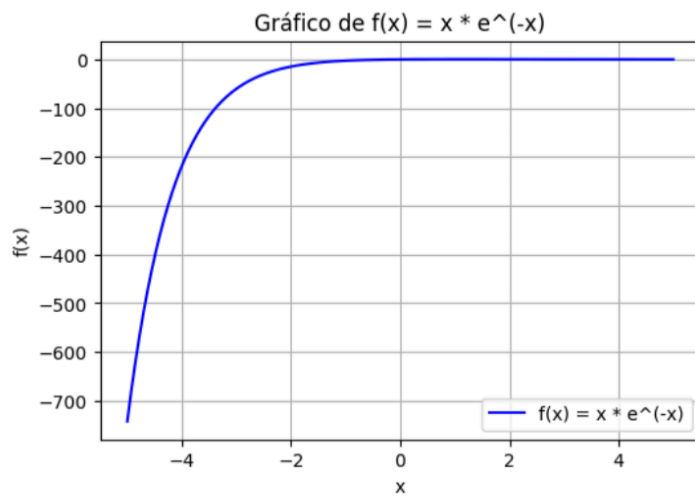
    # Função 1:  $f(x) = xe^{-x}$ 
    x1 = np.linspace(-1, 4, 1000)
    f1 = x1 * np.exp(-x1)
    ax1.plot(x1, f1, 'b-', label='f(x) =  $xe^{-x}$ ')
    ax1.grid(True)
    ax1.axhline(y=0, color='k', linestyle='--', alpha=0.3)
    ax1.axvline(x=0, color='k', linestyle='--', alpha=0.3)
    ax1.set_title('f(x) =  $xe^{-x}$ ')
    ax1.legend()

    # Função 2:  $f(x) = x^3 - x - 3$ 
    x2 = np.linspace(-2, 3, 1000)
    f2 = x2**3 - x2 - 3
    ax2.plot(x2, f2, 'r-', label='f(x) =  $x^3 - x - 3$ ')
    ax2.grid(True)
    ax2.axhline(y=0, color='k', linestyle='--', alpha=0.3)
    ax2.axvline(x=0, color='k', linestyle='--', alpha=0.3)
    ax2.set_title('f(x) =  $x^3 - x - 3$ ')
    ax2.legend()

    # Função 3:  $f(x) = \arctg(x)$ 
    x3 = np.linspace(-2, 2, 1000)
    f3 = np.arctan(x3)
    ax3.plot(x3, f3, 'g-', label='f(x) =  $\arctg(x)$ ')
    ax3.grid(True)
    ax3.axhline(y=0, color='k', linestyle='--', alpha=0.3)
    ax3.axvline(x=0, color='k', linestyle='--', alpha=0.3)
    ax3.set_title('f(x) =  $\arctg(x)$ ')
    ax3.legend()

    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

E os seguintes gráficos foram plotados:



Analisando agora os resultados do Método de Newton para as todas as funções, temos:

- Função $f(x) = xe^{-x}$: A função apresenta comportamento suave e contínuo, com uma raiz evidente em $x = 0$. A análise revelou:
 - Com $x_0 = 2$: O método necessitou de 17 iterações para convergir, demonstrando uma convergência mais lenta devido à distância inicial da raiz. O comportamento é estável, mas a taxa de convergência é moderada devido à natureza exponencial da função.

| k | xk | f(xk) | f'(xk) | step |
|----|-----------|--------------|---------------|--------------|
| 0 | 4.000000 | 7.326256e-02 | -5.494692e-02 | 2.000000e+00 |
| 1 | 5.333333 | 2.574907e-02 | -2.092112e-02 | 1.333333e+00 |
| 2 | 6.564103 | 9.255968e-03 | -7.845879e-03 | 1.230769e+00 |
| 3 | 7.743826 | 3.356253e-03 | -2.922843e-03 | 1.179724e+00 |
| 4 | 8.892110 | 1.222392e-03 | -1.084923e-03 | 1.148284e+00 |
| 5 | 10.018819 | 4.463740e-04 | -4.018204e-04 | 1.126709e+00 |
| 6 | 11.129698 | 1.632740e-04 | -1.486039e-04 | 1.110879e+00 |
| 7 | 12.228418 | 5.979102e-05 | -5.490151e-05 | 1.098720e+00 |
| 8 | 13.317477 | 2.191367e-05 | -2.026819e-05 | 1.089060e+00 |
| 9 | 14.398663 | 8.036415e-06 | -7.478279e-06 | 1.081185e+00 |
| 10 | 15.473297 | 2.948596e-06 | -2.758036e-06 | 1.074634e+00 |
| 11 | 16.542390 | 1.082255e-06 | -1.016832e-06 | 1.069093e+00 |
| 12 | 17.606730 | 3.973498e-07 | -3.747818e-07 | 1.064340e+00 |
| 13 | 18.666947 | 1.459222e-07 | -1.381051e-07 | 1.060217e+00 |
| 14 | 19.723549 | 5.359896e-08 | -5.088145e-08 | 1.056603e+00 |
| 15 | 20.776958 | 1.969082e-08 | -1.874309e-08 | 1.053409e+00 |
| 16 | 21.827522 | 7.234892e-09 | -6.903435e-09 | 1.050564e+00 |

Convergência atingida: $|f(x_k)| < \epsilon$

Resultado final:

Solução aproximada: $x = 21.827522$

Valor de $f(x)$: $7.234892e-09$

Número de iterações: 17

- Com $x_0 = 0.5$: A convergência foi alcançada em apenas 6 iterações, evidenciando uma eficiência significativamente maior. A proximidade do ponto inicial à raiz real facilitou uma convergência mais rápida e precisa.

| k | x_k | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ | step |
|---|-----------|---------------|--------------|---------------|
| 0 | -0.500000 | -8.243606e-01 | 2.473082e+00 | -1.000000e+00 |
| 1 | -0.166667 | -1.968934e-01 | 1.378254e+00 | 3.333333e-01 |
| 2 | -0.023810 | -2.438322e-02 | 1.048478e+00 | 1.428571e-01 |
| 3 | -0.000554 | -5.540165e-04 | 1.001108e+00 | 2.325581e-02 |
| 4 | -0.000000 | -3.064250e-07 | 1.000001e+00 | 5.534034e-04 |
| 5 | -0.000000 | -9.389621e-14 | 1.000000e+00 | 3.064248e-07 |

Convergência atingida: $|f(x_k)| < \text{epsilon}$

Resultado final:

Solução aproximada: $x = -0.000000$

Valor de $f(x)$: $-9.389621e-14$

Número de iterações: 6

- Função $f(x) = x^3 - x - 3$: Esta função cúbica apresenta características interessantes que afetam o comportamento do método:
 - Com $x_0 = 0.57$: O método não conseguiu convergir no limite de 20 iterações. Este comportamento pode ser atribuído à proximidade de um ponto de inflexão onde $f'(x) \approx 0$, causando instabilidade numérica e oscilações nas aproximações.

| k | xk | f(xk) | f'(xk) | step |
|-------|-------------|---------------|---------------|---------------|
| <hr/> | | | | |
| 0 | -133.216838 | -2.364032e+06 | 5.323918e+04 | -1.337868e+02 |
| 1 | -88.812837 | -7.004450e+05 | 2.366216e+04 | 4.440400e+01 |
| 2 | -59.210934 | -2.075335e+05 | 1.051680e+04 | 2.960190e+01 |
| 3 | -39.477424 | -6.148778e+04 | 4.674401e+03 | 1.973351e+01 |
| 4 | -26.323271 | -1.821646e+04 | 2.077744e+03 | 1.315415e+01 |
| 5 | -17.555850 | -5.396295e+03 | 9.236236e+02 | 8.767421e+00 |
| 6 | -11.713323 | -1.598377e+03 | 4.106058e+02 | 5.842526e+00 |
| 7 | -7.820594 | -4.735001e+02 | 1.824851e+02 | 3.892729e+00 |
| 8 | -5.225860 | -1.404904e+02 | 8.092885e+01 | 2.594734e+00 |
| 9 | -3.489886 | -4.201451e+01 | 3.553792e+01 | 1.735974e+00 |
| 10 | -2.307642 | -1.298104e+01 | 1.497563e+01 | 1.182244e+00 |
| 11 | -1.440831 | -4.550326e+00 | 5.227984e+00 | 8.668106e-01 |
| 12 | -0.570452 | -2.615182e+00 | -2.375246e-02 | 8.703789e-01 |
| 13 | -110.671961 | -1.355434e+06 | 3.674385e+04 | -1.101015e+02 |
| 14 | -73.783233 | -4.016026e+05 | 1.633090e+04 | 3.688873e+01 |
| 15 | -49.191651 | -1.189887e+05 | 7.258455e+03 | 2.459158e+01 |
| 16 | -32.798539 | -3.525304e+04 | 3.226232e+03 | 1.639311e+01 |
| 17 | -21.871540 | -1.044369e+04 | 1.434093e+03 | 1.092700e+01 |
| 18 | -14.589102 | -3.093583e+03 | 6.375257e+02 | 7.282438e+00 |
| 19 | -9.736618 | -9.163117e+02 | 2.834052e+02 | 4.852484e+00 |

Número máximo de iterações atingido.

Resultado final:

Solução aproximada: $x = -9.736618$

Valor de $f(x)$: $-9.163117e+02$

Número de iterações: 20

- Com $x_0 = 0.62$: A convergência foi alcançada em 10 iterações para $x^* \approx 1.6717$, com erro residual de aproximadamente 9.466×10^{-8} . A pequena alteração no ponto inicial foi suficiente para evitar a região problemática e permitir a convergência.

| k | x_k | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ | step |
|--|-----------|--------------|--------------|---------------|
| <hr/> | | | | |
| 0 | 22.693577 | 1.166146e+04 | 1.543995e+03 | 2.207358e+01 |
| 1 | 15.140793 | 3.452789e+03 | 6.867308e+02 | -7.552784e+00 |
| 2 | 10.112929 | 1.021150e+03 | 3.058140e+02 | -5.027864e+00 |
| 3 | 6.773808 | 3.010389e+02 | 1.366534e+02 | -3.339121e+00 |
| 4 | 4.570872 | 8.792775e+01 | 6.167861e+01 | -2.202937e+00 |
| 5 | 3.145292 | 2.497066e+01 | 2.867859e+01 | -1.425579e+00 |
| 6 | 2.274585 | 6.493521e+00 | 1.452121e+01 | -8.707072e-01 |
| 7 | 1.827410 | 1.275095e+00 | 9.018285e+00 | -4.471749e-01 |
| 8 | 1.686020 | 1.067694e-01 | 7.527993e+00 | -1.413900e-01 |
| 9 | 1.671837 | 1.014612e-03 | 7.385120e+00 | -1.418299e-02 |
| 10 | 1.671700 | 9.466481e-08 | 7.383742e+00 | -1.373860e-04 |
| 11 | 1.671700 | 8.881784e-16 | 7.383741e+00 | -1.282071e-08 |
| <hr/> | | | | |
| Convergência atingida: $ f(x_k) < \epsilon$ | | | | |
| Resultado final: | | | | |
| Solução aproximada: $x = 1.671700$ | | | | |
| Valor de $f(x)$: 8.881784e-16 | | | | |
| Número de iterações: 12 | | | | |

- Função $f(x) = \arctg(x)$: A função arco tangente apresenta características particulares que influenciam a convergência:
 - Com $x_0 = 1.45$: O método convergiu em 12 iterações, demonstrando um comportamento estável apesar da não-linearidade da função.

| k | xk | f(xk) | f'(xk) | step |
|--|-----------|--------------|--------------|---------------|
| ----- | | | | |
| 0 | 22.693577 | 1.166146e+04 | 1.543995e+03 | 2.207358e+01 |
| 1 | 15.140793 | 3.452789e+03 | 6.867308e+02 | -7.552784e+00 |
| 2 | 10.112929 | 1.021150e+03 | 3.058140e+02 | -5.027864e+00 |
| 3 | 6.773808 | 3.010389e+02 | 1.366534e+02 | -3.339121e+00 |
| 4 | 4.570872 | 8.792775e+01 | 6.167861e+01 | -2.202937e+00 |
| 5 | 3.145292 | 2.497066e+01 | 2.867859e+01 | -1.425579e+00 |
| 6 | 2.274585 | 6.493521e+00 | 1.452121e+01 | -8.707072e-01 |
| 7 | 1.827410 | 1.275095e+00 | 9.018285e+00 | -4.471749e-01 |
| 8 | 1.686020 | 1.067694e-01 | 7.527993e+00 | -1.413900e-01 |
| 9 | 1.671837 | 1.014612e-03 | 7.385120e+00 | -1.418299e-02 |
| 10 | 1.671700 | 9.466481e-08 | 7.383742e+00 | -1.373860e-04 |
| 11 | 1.671700 | 8.881784e-16 | 7.383741e+00 | -1.282071e-08 |
| ----- | | | | |
| Convergência atingida: f(xk) < epsilon | | | | |
| Resultado final: | | | | |
| Solução aproximada: x = 1.671700 | | | | |
| Valor de f(x): 8.881784e-16 | | | | |
| Número de iterações: 12 | | | | |

- Com $x_0 = 1$: A convergência foi notavelmente mais rápida, requiring apenas 4 iterações. Este caso ilustra como a escolha do ponto inicial pode impactar significativamente a eficiência do método.

| k | xk | f(xk) | f'(xk) | step |
|--|-----------|---------------|--------------|---------------|
| ----- | | | | |
| 0 | -0.570796 | -5.186694e-01 | 7.542568e-01 | -1.570796e+00 |
| 1 | 0.116860 | 1.163323e-01 | 9.865277e-01 | 6.876562e-01 |
| 2 | -0.001061 | -1.061022e-03 | 9.999989e-01 | -1.179209e-01 |
| 3 | 0.000000 | 7.963096e-10 | 1.000000e+00 | 1.061023e-03 |
| ----- | | | | |
| Convergência atingida: f(xk) < epsilon | | | | |
| Resultado final: | | | | |
| Solução aproximada: x = 0.000000 | | | | |
| Valor de f(x): 7.963096e-10 | | | | |
| Número de iterações: 4 | | | | |

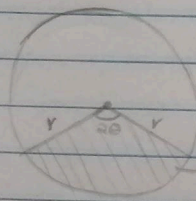
Considerações Gerais:

A análise demonstra que o Método de Newton é sensível tanto à escolha do ponto inicial quanto às características específicas da função em estudo. Em particular, a proximidade de pontos onde a derivada se aproxima de zero pode causar problemas de convergência, enquanto pontos iniciais mais próximos da raiz tendem a resultar em convergência mais rápida.

Exercício II:

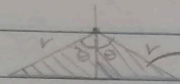
Exercício II:

1. $V(\theta) = h \cdot A(\theta)$



Área do setor circular:

$$\frac{2\theta}{2\pi} \pi r^2 = \theta r^2$$



Área do triângulo:

$$A = \frac{1}{2} r^2 \sin(2\theta)$$

∴ A área de petróleo contida em uma seção transversal circular qualquer será:

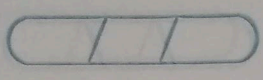
$$A(\theta) = \theta r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin(2\theta)$$

$$A(\theta) = r^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right)$$

E seu volume será:

$$V(\theta) = h \cdot A(\theta)$$

$$V(\theta) = h \cdot r^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right)$$



$$2. \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \quad V(\theta) = 250$$

$$V(\theta) = hr^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right)$$

$$\Rightarrow 250 = 10 \cdot 6^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right)$$

$$250 = 360 \theta - 180 \sin(2\theta)$$

$$250 = 360 \theta - 180 (2 \sin(\theta) \cos(\theta))$$

$$\frac{250}{360} = \theta - \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$V(\theta) = 360 \theta - 360 \sin(\theta) \cos(\theta) = 360(\theta - \sin \theta \cos \theta)$$

para $\theta = \frac{\pi}{3}$, temos:

$$V = 360 \cdot \frac{\pi}{3} - 360 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$V = 120 \pi - 90 \sqrt{3} \approx 221,11$$

para $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos:

$$V = 360 \cdot \frac{\pi}{2} - 360 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$V = 180 \pi \approx 565,49$$

$$V(\theta) = hr^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right)$$

$$\Rightarrow 250 = 10 \cdot 6^2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right)$$

$$250 = 360\theta - 180 \sin(2\theta)$$

$$250 = 360\theta - 180(2 \sin(\theta) \cos(\theta))$$

$$\frac{250}{360} = \theta - \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$360$$

$$V(\theta) = 360\theta - 360 \sin(\theta) \cos(\theta) = 360(\theta - \sin\theta \cos\theta)$$

pl $\theta = \frac{\pi}{3}$, temos:

$$V = 360 \frac{\pi}{3} - 360 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$V = 120\pi - 90\sqrt{3} \approx 221,11$$

pl $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos:

$$V = 360 \frac{\pi}{2} - 360 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$V = 180\pi \approx 565,49$$

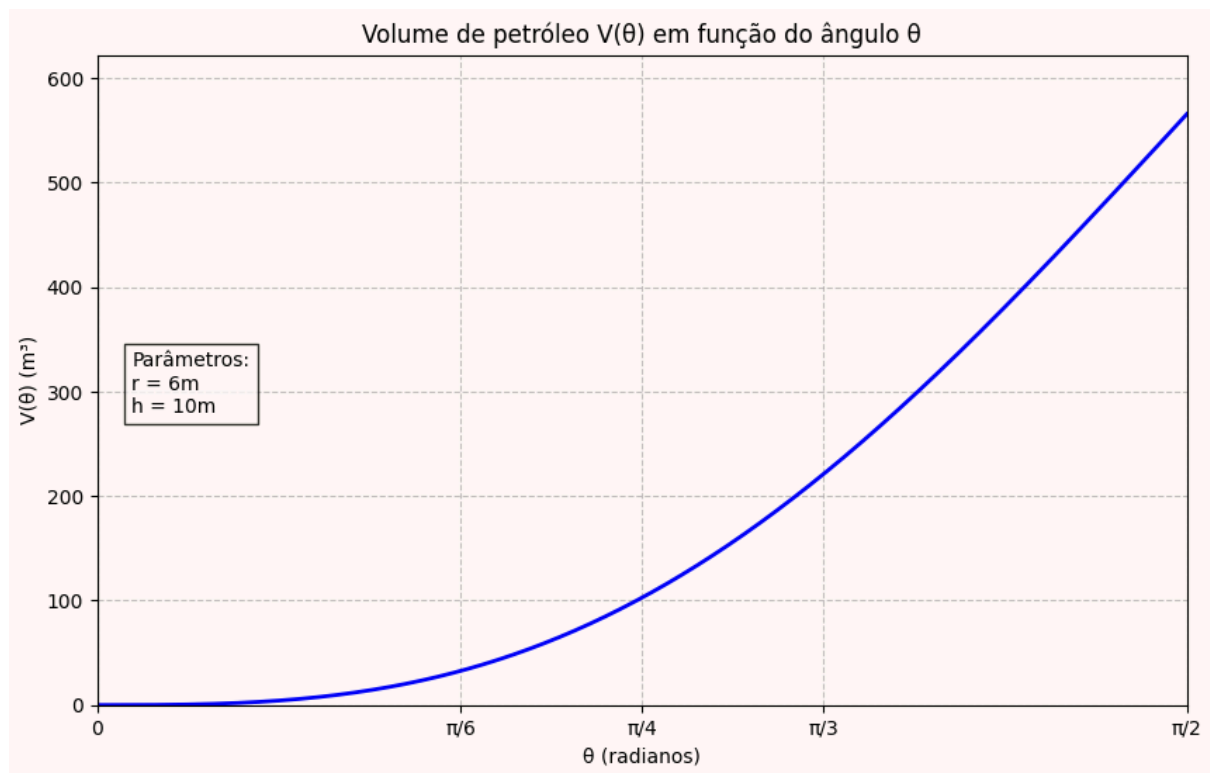
Então, basta provar que $V(\theta)$ é crescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ pl provar que só existe um $\theta \mid V(\theta) = 250$

$$V'(\theta) = 360(1 - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)) = 360(\overbrace{\sin^2\theta + \sin^2\theta}^1 - \cos^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$V'(\theta) = 360(2 \sin^2\theta) = \underbrace{720 \sin^2\theta}_{>0}$$

tilibra \therefore Só há um $\theta \mid V(\theta) = 250$ em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

Plotando a função V , temos:



Pelo método de Newton, conclui-se que a solução aproximada de θ quando $V = 250 \text{ m}^3$ é $x = 1.099177$

| k | x_k | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ | step |
|---|----------|--------------|--------------|---------------|
| 0 | 1.100709 | 8.760958e-01 | 5.722728e+02 | 5.358874e-02 |
| 1 | 1.099178 | 6.819492e-04 | 5.713815e+02 | -1.530906e-03 |
| 2 | 1.099177 | 4.150991e-10 | 5.713808e+02 | -1.193509e-06 |

Convergência atingida: $|f(x_k)| < \text{epsilon}$

Resultado final:

Solução aproximada: $x = 1.099177$

Valor de $f(x)$: $4.150991\text{e-}10$

Número de iterações: 3