Henri Reboul & Jean-Pierre Cordoni / 05/05/2025

Théorie cosmologique & CosmoGravity

Le résumé de Théorie cosmologie présenté ci-dessous est centré sur les relations mathématiques qui sont utilisées dans le code des simulations UNIVERS de CosmoGravity. Il contient toutefois au début une brève présentation de la relativité générale et de son lien avec la «cosmologie» qui est l'étude de l'Univers dans son ensemble. Et vers la fin est proposé une transition (structuration physiquement assez rapide) qui permet la simulation TRAJECTOIRES qui est l'étude en relativité génarale de l'environnement gravitationnel local d'un unique objet massif (étoile, planète, ... trou noir)

1 Relativité générale

La relativité générale est une **théorie géométrique relativiste de la gravitation (TGRG)** c'est-à-dire une théorie qui *«relie»* la géométrie du contenant (espace-temps) à son contenu (matière-énergie) et qui, localement, rejoint la relativité restreinte [1].

2 Principe Cosmologique

Le principe cosmologique postule que **l'univers est homogène et isotrope** c'est-à-dire pareil partout (espace 3D) et dans toutes directions. Les seuls changements possibles sont donc avec le temps : un temps qui est le même partout puisque rien ne «bouge» [2]. C'est effectivement l'hypothèse d'une très forte et étrange symétrie [3].

Quand, en 1917, Einstein l'utilise il était hasardeux de considérer que le ciel observé, alors à faible distance, était uniforme à beaucoup plus grande échelle. Et ce «Principe cosmologique» était en bonne partie motivé par le fait que son extrême symétrie permettait avec la reltivité générale d'en déduire des solutions «analytiques» à une époque où le «numérique» et les grosses puissances de calcul avaient encore un horizon bien lointain.

Mais, progressivement, les observations des astres, puis celles du rayonnement de fond cosmologique (RFC) [4], ont conforté la vraisemblance de ce principe du moins à grande distance (aujourd'hui à $d > 10^{24}$ m). Et ce RFC nous montre un contenu à l'état de plasma opaque lorsque, environ 380 000 ans après le big bang, il devient un gaz neutre et transparent remarquablement homogène puisque, en masse volumique ρ, ses inhomogénéités sont infimes : $\delta\rho/\rho \approx 10^{-5}$.

1. La relativité restreinte (Einstein, 1905) «reliait» déjà d'une part l'espace et le temps (espace-temps de Minkowski) et, d'autre part, la matière et l'énergie avec l'équivalence $E = mc^2$
2. ne change de «lieu»
3. On est beaucoup plus habitué en effet à notre échelle de penser à un paysage, une structure, qui changent d'un point de l'espace à un autre mais très peu ou très lentement avec le temps que le contraire
4. CMB (ou CMBR) en anglais pour Cosmic Microwave Background (Radiation)

3 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Toute **TGRG** associée au principe cosmologique implique que la symétrie du contenu (matière-énergie) soit la même que celle du contenant (espace-temps) et que la forme la plus générale de sa *«métrique»* (carré ds^2 de l'élément de longueur spatio-temporelle 4D) soit celle de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (**FLRW**)[5] :

$$\mathbf{ds^2 = -R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2\right] + c^2dt^2 \quad avec \quad k = -1,\ 0\ ou\ +1} \tag{1}$$

où r est une coordonnée radiale et où $R(t)$ est le *«facteur d'échelle»*, $R(t)$, une fonction réelle, définie, positive de la variable *temps cosmique* t qui multiplie la distance entre les points fixes de l'espace 3D. Les 3 possibilités pour k définissent les 3 types de topologie spatiale mono-connexes compatibles avec les hypothèses : S^3 (espace [hyper]-sphérique), (espace E^3 euclidien), H^3 (espace [hyper]-hyperbolique)[6].

Le temps t est le *«temps cosmique»*. Il est orthogonal (indépendant des 3 coordonnées spatiales). Il est le même pour tous les observateurs «au repos»[7] (r, θ et φ constants), qualifiés souvent de *«comobiles»* (un peu improprement puisqu'ils qu'ils ne «bougent» pas).

Le taux d'expansion $H(t)$ est défini comme la dérivée logarithmique de $R(t)$: $H(t) \overset{déf}{=} \dot{R}(t)/R(t)$. Sa valeur présente se note $H_0 = H(t_0)$ et sa dimension est donc l'inverse d'un temps. Pour des raisons historiques de méthode de mesure des distances on l'exprime souvent en km s^{-1} Mpc^{-1}[8].

En suivant la trajectoire des photons (pour lesquels $ds = 0$) entre émission et réception on en déduit que si une source émet deux signaux lumineux le premier au temps t_e et le deuxième au temps $t_e + dt_e$, un observateur les recevra aux temps t_0 et $t_0 + dt_0$ avec :

$$\mathbf{\frac{dt_0}{dt_e} = \frac{R(t_0)}{R(t_e)}} \tag{2}$$

Aux très petites périodes T, longueurs d'onde λ et grandes fréquences ν de la lumière, cela peut s'écrire :

$$\mathbf{\frac{R(t_0)}{R(t_e)} \approx \frac{T_0}{T_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} \overset{déf}{=} 1 + z} \tag{3}$$

z désignant par défaut le décalage spectral cosmologique.

4 Décalages spectraux

On connait 3 principaux décalages spectraux : cosmologique z_c, Doppler z_D et gravitationnel z_g. z_D (l'effet Doppler) est dù à un vrai déplacement de la source où/et de l'observateur et z_g à la gravitation locale. Généralement dans l'observation d'un astre lointain les

5. établie de manière de plus en plus générale entre 1922 et 1935 par les 4 auteurs

6. Le principe cosmologique implique que la courbure (positive, négative ou nulle) de l'espace 3D soit dans chacun des 3 cas la même partout

7. Ce «temps cosmique» est approximativement le temps de la montre (ou du smartphone) tant que l'observateur ne se dépace pas à des vitesses relativistes où ne s'aventure près du rayon de Schwarzschild d'une masse

8. Mpc : Mégaparsec, 1 Mpc = 10^6 pc et 1 pc (parsec) $\overset{déf}{=}$ 3.0856775814672 10^{16} m

trois causes de décalage sperctral sont successives pour générer le décalage spectral observé : En s'éloignant d'un objet massif la lumière subit un z_g, puis à plus grande échelle, son déplacement local engendre un décalage z_D et enfin à très grandes distances, le facteur d'echelle de l'espace produit un décalage pectral cosmologique z_c.Cette succession dans le temps permet alors d'écrire que le décalage spectral observé z est le résultat de la suite chronologique (gravitation, vitesse, cosmologie) des 3 causes selon : $1 + z_g$, puis $1 + z_D$ et enfin $1 + z_c$, soit la relation :

$$1 + z = (1 + z_c) \cdot (1 + z_D) \cdot (1 + z_g) \tag{4}$$

Comme pour les objets lointains (concernés par la variation du facteur d'échelle) on est le plus souvent dans le cas où $z_c \gg z_D \gg z_g$, le z observé est peu différent du z_c. Dans la suite de cet exposé on identifiera par défaut le z au z_c. On peut reamarquer que cela est d'ailleurs formellemnt exact avec le principe cosmologique.

5 Univers et relativité générale

La relativité générale d'Einstein, publiée en 1915-1916, est d'abord appliquée à la gravitation locale (Schwarzschild, 1916) qui relève des simulatuions «Trajectoires» de Cosmo-Gravity. La transition entre notre univers (presque) parfaitement homogène du début à celui extrèmement structuré d'aujourd'hui sera décrite vers la fin de ce document.

Einstein est le premier, en 1917 [9] à appliquer sa théorie à l'Univers et, pour en obtenir un modèle statique [10], il rajoute dans son équation la «constante cosmologique» en précisant *«Nous pouvons en effet ajouter à gauche de l'équation du champ le tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$ multiplié par une* **constante universelle** $-\lambda$ *provisoirement inconnue, sans que cela ne détruise la covariance générale : nous substituons à l'équation du champ» :*

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{g}_{\mu\nu}\mathcal{R} - \mathcal{R}_{\mu\nu} - \lambda\mathbf{g}_{\mu\nu} = \frac{\mathbf{8\pi G}}{\mathbf{c^4}}\mathcal{T}_{\mu\nu} \tag{5}$$

Il est noter qu'avec l'addition du terme $\lambda g_{\mu\nu}$ le membre de gauche de l'équation devient le tenseur le plus général (construit à partir des $g_{\mu\nu}$) dont la dérivée covariante soit nulle.

Cette lettre minuscule λ est devenue majuscule Λ dans l'écriture usuelle [11].

Les $g_{\mu\nu}$ sont les coefficients de la métrique. En raison de sa symétrie seuls les termes croisés ($\mu = \nu$) de celle de FLRW (1) ne sont pas nuls :

$$g_{11} = -\frac{R^2(t)}{1 - kr^2}\ , \quad g_{22} = -R^2(t)r^2, \quad g_{33} = -R^2(t)r^2 \sin^2\theta, \quad g_{44} = c^2 \tag{6}$$

6 Modèles d'univers de Friedmann-Lemaître

Avec la relativité générale comme **TGRG**, en introduisant les coefficients ($g_{\mu\nu}$) de dr^2, $d\theta^2$, $\mathrm{d}\varphi^2$ et dt^2 de la métrique FLRW dans l'équation d'Einstein elle se transforme en 2

9. Einstein, 1917, Sitzungsberichte der Königlich PreuBischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 142-152
10. ni expansion ni contraction de l'espace 3D
11. λ désignant souvent en physique la «longueur d'onde»

équations différentielles, les équations de Friedmann-Lemaître FL1 et FL2, sur le facteur d'échelle $\mathbf{R(t)}$ dans lesquelles $p(t)$ et $\rho(t)$ (pression et masse volumique) sont les deux seuls paramètres physiques décrivant le contenu : p et ρ qui sont, d'après le principe cosmologique, spatialement homogènes (donc pas fonction de r,θ ou φ) et isotropes (donc scalaires, même pour la pression) [12] :

$$-\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{R^2}} - \frac{\mathbf{\dot{R}^2}}{\mathbf{c^2R^2}} - \frac{\mathbf{2\ddot{R}}}{\mathbf{Rc^2}} + \mathbf{\Lambda} = \frac{\mathbf{8\pi Gp}}{\mathbf{c^4}} \quad \mathbf{(FL1)} \quad \text{et} \quad \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{R^2}} + \frac{\mathbf{\dot{R}^2}}{\mathbf{c^2R^2}} - \frac{\mathbf{\Lambda}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{8\pi G\rho}}{\mathbf{3c^2}} \quad \mathbf{(FL2)} \tag{7}$$

On en déduit FL3 de FL1 et FL2 :

$$\frac{\mathbf{d(\rho R^3)}}{\mathbf{dR}} + \mathbf{3p}\frac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{c^2}} = \mathbf{0} \quad \mathbf{(FL3)} \tag{8}$$

Et FL2 peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{\dot{R}^2 = H_\circ^2\ R_\circ^2} \left[\mathbf{\Omega_{r\circ}}\frac{\mathbf{R_\circ^2}}{\mathbf{R^2}} + \mathbf{\Omega_{m\circ}}\frac{\mathbf{R_\circ}}{\mathbf{R}} + \mathbf{\Omega_{\Lambda\circ}}\frac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{R_\circ^2}} + \mathbf{\Omega_{k\circ}}\right] \tag{9}$$

avec

$$\mathbf{\Omega_r(t)} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathbf{8\pi G\rho_r(t)}}{\mathbf{3H^2(t)}}\ ,\ \mathbf{\Omega_m(t)} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathbf{8\pi G\rho_m(t)}}{\mathbf{3H^2(t)}}\ ,\ \mathbf{\Omega_\Lambda(t)} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathbf{\Lambda c^2}}{\mathbf{3H^2(t)}} \ \text{ et }\ \mathbf{\Omega_k(t)} \stackrel{\text{déf}}{=} -\frac{\mathbf{kc^2}}{\mathbf{R^2(t)H^2(t)}} \tag{10}$$

G est la constante de la loi de force de la gravitation universelle de Newton entre deux masses m_1 et m_2 distantes de d [13].

$\Omega_r(t)$ est le paramètre de densité de rayonnement (lumière ou particules ultra-relativistes qui ont la même équation d'état $p = \frac{1}{3}\rho c^2$ (cf. §7 Neutrinos primordiaux).

$\Omega_m(t)$ est le paramètre de densité de matière (y compris la matière sombre non baryonique)

$\Omega_\Lambda(t)$ est le paramètre de densité de Λ. On l'appelle aussi constante cosmologique réduite (mais $\Omega_\Lambda(t)$ n'est généralement pas une constante).

$\Omega_k(t)$ est le paramètre de densité de courbure (ou courbure réduite). Elle dépend de k, qui représente la courbure de l'univers. Si :

— k = 1 : espace (3D) [hyper]-sphérique
— k = 0 : espace (3D) euclidien (dans ce cas $\Omega_k(t) = 0 \ \ \forall t$)
— k = -1 : espace (3D) [hyper]-hyperbolique.

Ω_{r0} est le paramètre de densité le mieux connu car la densité d'énergie lumineuse ρ_{r0} est essentiellement celle du rayonnement de fond cosmologique (RFC). On peut vraisemblablement lui rajouter celle des neutrinos primordiaux non encore détectés et qui dans l'hypothèse la plus simple ont une densité d'énergie égale à $\sim 69\%$ de celle du RFC (cf. § suivant).

On déduit de FL2 :

$$\mathbf{\Omega_r(t) + \Omega_m(t) + \Omega_\Lambda(t) + \Omega_k(t) = 1} \quad \forall \mathbf{t} \tag{11}$$

12. les fluides du contenu sont donc des *fluides parfaits (sans viscosité)*
13. $F = -Gm_1m_2/d^2$

Il suffit donc de mesurer trois des quatre Ω_i à un instant donné pour déterminer le quatrième [14]. Comme aujourd'hui Ω_{r0} est bien connu et, de plus, inférieur à 10^{-4}, la connaissance de notre modèle d'univers est essentiellement liée aux mesures de Ω_{m0} et $\Omega_{\Lambda 0}$.

Le graphe interactif permet ainsi de simuler différents univers avec un simple clic sur le diagramme Ω_{m0} - $\Omega_{\Lambda 0}$ (les valeurs des autres paramètres sont par défaut celles du modèle Λ-CDM déduit des résultats 2015 de la mission Planck de l'ESA). Il faut noter que cette approximation n'est valable pour les temps où Ω_{m0} et $\Omega_{\Lambda 0}$ sont dominants. C'est pourquoi il est plus précis de modifier les valeurs numériques présentes des paramètres cosmologiques. Pour Ω_{r0}, le RFC ayant un spectre thermique de corps noir, c'est la température T_0 qui est à choisir. Une option permet également de choisir (forcer) $\Omega_k = 0 = \Omega_{k0}$. Enfin le code permet aussi de tenir compte des neutrinos primordiaux (paragraphe suivant) et d'atteindre une précision raisonnable au-delà de la première seconde pour l'univers observé.

Le graphe interactif montre les séparatrices entre différents genres de graphes de $a(t)$ avec ou sans Big Bang ou Big Crunch, RAJOUTER ACCELERATING DECELERATING.

Le choix d'un modèle d'univers très proche d'une (à fortiori deux) séparatrice(s) peut dans certains cas mettre en défaut le code.

La masse volumique ρ_r ($\rho_r = u_r/c^2$ avec u_r l'énergie volumique) d'un corps noir est liée à sa seule température T :

$$\rho_r = \frac{4\sigma T^4}{c^3} \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2} \tag{12}$$

Par défaut les **constantes fondamentales** ont les valeurs de notre univers mais elles restent modifiables au choix dans les simulations (dans l'hypothèse multivers elles pourraient effectivement être différentes) :

- **Boltzmann k** $= 1.380649 \cdot 10^{-23}$ m^2.kg.s^{-2}.K^{-1} (CGPM 2018)
- **Planck h** $= 6.62607015 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s ou kg m^2 s^{-1},(CGPM 2018)
- **gravitation universelle G** $= 6.67430(15) \cdot 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2} (CODATA 2018)
- **vitesse de la lumière dans le vide c** $= 299792458$ m . s^{-1} (CGPM 1983)

On définit les coordonnées réduites : $\mathbf{a} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{R(t)/R(t_0)}$ (en conséquence $a = (1+z)^{-1}$ ou $z = (1-a)/a$ si z est purement cosmologique) et $\tau \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{H_0(t-t_0)}$ les dérivées première et seconde de $a(\tau)$ s'écrivent :

$$\boldsymbol{\frac{da}{d\tau} = \left[\frac{\Omega_{r0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{\Lambda 0}\, a^2 + \Omega_{k0}\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2a}{d\tau^2} = -\frac{\Omega_{r0}}{a^3} - \frac{1}{2}\frac{\Omega_{m0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda 0}\, a} \tag{14}$$

avec les conditions initiales : $a(0) = (da/d\tau)(0) = 1$.

Ainsi les données H_0, Ω_{r0}, Ω_{m0}, et $\Omega_{\Lambda 0}$ que l'on déduit des observations permettent de résoudre l'équation différentielle ci-dessus et donc de connaître $a(\tau)$ pour tout τ (et de là $a(t)$ tour tout t) et donc de tracer son graphique (ce qui est la première action de la partie

14. c'était évidemment le but de cette paramétrisation

simulation).

On peut bien sûr remettre en question les valeurs mésurées des paramètres de notre univers ou simplement imaginer des univers différents. Selon les valeurs des Ω_i choisies, on obtient alors des modèles différents avec ou sans singularité(s). Si $H_0 > 0$:
— Univers avec Big-Bang et pas de Big Crunch
— Univers avec Big-Bang et Big-Crunch
— univers sans Big Bang mais avec Big Crunch
— Univers sans Big Bang ni Big Crunch

Dans notre univers actuel le paramètre de densité de rayonnement est très faible ($\Omega_{r0} < 10^{-4}$) alors que Ω_{m0} et $\Omega_{\Lambda 0}$ sont voisins de 1/3 et 2/3. Dans ces conditions ce sont essentiellement Ω_{m0} et $\Omega_{\Lambda 0}$ qui déterminent le type d'univers : les séparatrices dans le champ $\{\Omega_{m0}, \Omega_{\Lambda 0}\}$ sont indiquées sur le diagramme interactif à gauche de la fenêtre de simulation.

CosmoGravity permet de simuler des UNIVERS très variés parmi lesquels beaucoup sont incompatbles avec notre présence dans l'univers. Par exemple ceux sans Big Bang ne permettent pas d'expliquer la nucléosynthèse des éléments légers, le rayonnement de fond cosmologique et ceux qui ont une durée trop courte semblent incompatibles avec les milliards d'années nécessaires pour l'évolution de la matière [15] et de la vie [16].

7 Neutrinos primordiaux

Bien que non encore détectables en raison de leur très faibles énergies et malgré la question encore ouverte de leur masse très faible (mais non nulle ?) ils sont vraisemblablement aussi nombreux que les photons et avec un spectre de Planck (corps noir) mais de température plus basse en raison de leur découplage plus ancien avec la matière. Traduite en densité leur regroupement avec les photons du RFC revient [17] à mutiplier le paramètre Ω_r des photons par 1,6913. CosmoGravity Univers permet de choisir la prise en compte du seul RFC, celle du RFC et des neutrinos ou aucun des deux : par défaut RFC et neutrinos sont pris en compte dans le calcul.

8 Calcul des durées et des âges

Toujours en suivant la trajectoire des photons on démontre les relations (entre distances, temps, décalages spectraux, diamètres apparents, ...) qui sont utilisées dans CosmoGravity (notamment dans la boite à outils de la fenêtre «Calculette Cosmologique»). Ces expressions utilisent souvent la fonction $E(x)$, très pratique pour simplifier l'écriture des relations. On la définit arbitrairement comme :

$$\mathbf{E(x) \overset{déf}{=} \Omega_{r\circ}(1+x)^4 + \Omega_{m\circ}(1+x)^3 + (1 - \Omega_{m\circ} - \Omega_{r\circ} - \Omega_{\Lambda\circ})(1+x)^2 + \Omega_{\Lambda\circ}} \quad (15)$$

et l'on obtient alors :

$$\frac{\mathbf{H(z)}}{\mathbf{H_\circ}} = \mathbf{E^{\frac{1}{2}}(z)} = \Big[\Omega_{r\circ}(1+z)^4 + \Omega_{m\circ}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{m\circ} - \Omega_{r\circ} - \Omega_{\Lambda\circ})(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda\circ}\Big]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

15. poussière d'étoiles

16. ces contraintes *anthropiques* sont bien moindres dans les simulations de TRAJECTOIRES puisque notre univers actuel contient une extrême variété d'astres différents

17. approximation avec un nombre *effectif* de saveurs de neutrinos 3,045 au lieu de 3 pour compenser le découplage non total des neutrinos lors de l'anihilatiion electron-positron (vers t $\approx$ 1s)

L'intérêt de cette expressions simple $H(z)/H_0 = E^{1/2}(z)$ est la simplicité du lien entre dt et dz le long d'une ligne de visée c'est que, contrairement à t z **est une observable**.

De $z = R_0/R - 1$ on déduit $dz = -(1+z)\ H(t)dt$ et donc : $\mathbf{dt = -H_0^{-1}(1+z)^{-1}E^{-1/2}(z)dz}$.

En intégrant cette relation on obtient les durées en fonction des décalages :

$$\mathbf{t_2 - t_1 = \frac{1}{H_\circ}\int_{z_2}^{z_1}(1+x)^{-1}E^{-\frac{1}{2}}(x)\ dx} \tag{17}$$

On en déduit l'expression de l'âge ($t_\circ$) d'un univers FL à Big Bang en fonction de ses paramètres $H_\circ$ et $\Omega_{i\circ}$ et celle de l'âge de cet univers lors de l'émission d'une lumière reçue aujourdhui avec un décalage spectral z :

$$\mathbf{t_\circ = \frac{1}{H_\circ}\int_{0}^{\infty}(1+x)^{-1}E^{-\frac{1}{2}}(x)\ dx} \quad ; \qquad \mathbf{t_e = \frac{1}{H_\circ}\int_{z}^{\infty}(1+x)^{-1}E^{-\frac{1}{2}}(x)\ dx} \tag{18}$$

CosmoGravity permet aussi le calcul inverse : z en fontion de t.

Note sur le décalage spectral cosmologique et les calculs du futur :

Pour un univers d'$a(t)$ continûment croissant de 0 à l'infini comme notre modèle standard ΛCDM, $z(t_0) = 0$ à l'instant présent, $z \to +\infty$ plus nous observons dans le passé et ... $z \to -1$ dans le futur. Pour résumer : $-1 < z < \infty$. Bien évidemment, ces z négatifs (pour des modèles à $a(t)$ croissant) ne sont pas observables aujourd'hui mais ils permettent de ... calculer le futur (cf. § 7 et 8) comme par exemple pour la distance présente (et donc le z mesurable) des plus lointains objets auxquels nous pourrions envoyer aujourd'hui un message qui pourrait être reçu en un temps fini : notre présent *«horizon cosmologique des évènements»*.

9 Calcul des distances

On obtient l'expression exacte de la «distance métrique» d_m en «intégrant» la trajectoire d'un photon depuis son émission à l'instant t_e et à la coordonnée r jusqu'à sa réception à l'instant $t_\circ$ en $r = 0$ avec un décalage spectral cosmologique z.

Selon que la courbure spatiale est négative (d_{m-}), nulle ($d_{m\circ}$) ou positive (d_{m+})

$$\mathbf{d_{m-} = \frac{c}{H_\circ \mid \Omega_{k\circ} \mid^{\frac{1}{2}}}}\sinh\left\{\mathbf{\mid \Omega_{k\circ} \mid^{\frac{1}{2}} \int_0^{z_c} E^{-\frac{1}{2}}(x)dx}\right\} \tag{19}$$

$$\mathbf{d_{m\circ} = \frac{c}{H_\circ}\int_0^{z_c} E^{-\frac{1}{2}}(x)dx} \tag{20}$$

$$\mathbf{d_{m+} = \frac{c}{H_\circ \mid \Omega_{k\circ} \mid^{\frac{1}{2}}}}\sin\left\{\mathbf{\mid \Omega_{k\circ} \mid^{\frac{1}{2}} \int_0^{z_c} E^{-\frac{1}{2}}(x)dx}\right\} \tag{21}$$

CosmoGravity permet aussi le calcul inverse : z en fonction de d

10 Calcul des horizons

Dans la fenêtre principale Univers de CosmoGravity les distances et décalages spectraux de ces horizons sont calculés pour le temps présent t_0 (d_{p0} et z_{p0} pour l'horizon des particules et d_{e0} et z_{e0} pour celui des événements).

10.1 Horizon cosmologique des particules

L'horizon cosmologique des particules est la plus grande distance métrique présente $d_{p\circ}$ d'où nous pouvons recevoir un signal aujourd'hui (t_0). Ces plus grandes distances correspondent à un z infini et s'expriment donc :

$$\mathbf{d_{p\circ-}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{H_\circ} \mid \mathbf{\Omega_{k\circ}} \mid^{\frac{1}{2}}} \sinh\left\{\mid \mathbf{\Omega_{k\circ}} \mid^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x})\mathbf{dx}\right\} \tag{22}$$

$$\mathbf{d_{p\circ}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{H_\circ}} \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x})\mathbf{dx} \tag{23}$$

$$\mathbf{d_{p\circ+}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{H_\circ} \mid \mathbf{\Omega_{k\circ}} \mid^{\frac{1}{2}}} \sin\left\{\mid \mathbf{\Omega_{k\circ}} \mid^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x})\mathbf{dx}\right\} \tag{24}$$

10.2 Horizon cosmologique des événements

L'horizon cosmologique des événements est la plus grande distance d_e où nous pouvons aujourd'hui (t_0) envoyer un signal qui sera reçu en un temps fini. C'est aussi la plus grande distance d'un objet dont nous pouvons recevoir en un temps fini un signal émis auhourd'hui. CosmoGravity calcule cette distance dans la page pricipale pour le temps présent t_0. Les expressions de $d_{e\circ-}$, $d_{e\circ}$ et $d_{e\circ+}$ sont semblables à celles des $d_{p\circ-}$, $d_{p\circ}$ et $d_{p\circ+}$ en remplaçant les bornes 0 et ∞ de l'intégrale par -1 et 0 pour les univers avec Big Bang et sans Big Crunch.

11 Calcul de la dérive du décalage spectral cosmologique

Au fil du temps le décalage spectral cosmologique observé d'un objet fixe varie avec le facteur d'échelle $a(t)$. Appelons z_S le décalage observé aujourd'hui (à t_0) de cette source lointaine. La mesure de ce changement parait difficile à réaliser car la dérive sur quelques années ou dizaines d'années est très faible et qu'elle est de plus polluée par les autres causes de décalage spectral (essentiellement le décalage Doppler-Fizeau dû à un vrai déplacement). Mais avec les performances des prochains très grands relevés, le rapport signal/bruit pourra être considérablement amélioré par les multiplcations des nombres de mesures et d'objets mesurables.

En supposant que le décalage est purement cosmologique (Théorie Univers, équation 3) :

$$z(t_0) = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1 \tag{25}$$

et en suivant Balbi et Quercellini, 2007 [18]

$$z(t_0 + \Delta t_0) = \frac{a(t_0 + \Delta t_0)}{a(t_e + \Delta t_e)} - 1 \tag{26}$$

$$\Delta z = z(t_0 + \Delta t_0) - z(t_0) = \frac{a(t_0 + \Delta t_0)}{a(t_e + \Delta t_e)} - \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \tag{27}$$

18. Balbi et Quercellini, 2007, «The time evolution of cosmological redshift as a test of dark energy» MNRAS 382, 1623, https ://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/2007MNRAS.382.1623B

Avec un développement à l'ordre 1 en $\Delta t_0/t - 0$ (*«Humainement»* $\Delta t_0/t_0 \ll 1$)

$$\Delta z \simeq \Delta t_0 \left[\frac{\dot{a}(t_0) - \dot{a}(t_e)}{a(t_e)}\right] \tag{28}$$

Comme

$$H(z) \overset{déf}{=} \dot{a}(z)/a(z) \tag{29}$$

la dérive de décalage spectral peut s'exprimer ($\Delta t_0 \ll t_0$) :

$$\frac{\Delta z}{\Delta t_0} \simeq [H_0 \cdot (1 + z_S) - H(z_S)] = H_0 \cdot [1 + z_S - E^{1/2}(z_S)] \tag{30}$$

La dérive de décalage spectral est donc liée à la fonction $H(z)$ (cf. équation 16) qui dépend des paramètres cosmologiques H_0 et Ω_{i0}. La mesure de cette dérive de z serait une méthode indépendante pour mieux connaître les différents fluides cosmiques et, notamment l'évolution dans le temps des paramètres de densité et, de là, leurs équations d'état. La dimension de $\Delta z/\Delta t_0$ est l'inverse d'un temps. Son unité pratique est l'an^{-1}.

Remarque : Il n'y a pas de dérive de décalage pour un z_S tel que $H(z_S) = (1 + z_S)H_0$.

12 Calcul des diamètres apparents

En raison de la trajectoire nécessairement radiale des photons reçus dans un espace-temps isotrope, le diamètre apparent d'un objet (ou l'écart angulaire entre deux sources de même z) est défini au moment de l'émission, c'est-à-dire au moment où la distance de la source était $(1 + z)$ fois plus petite qu'au moment de l'observation. Plus mathématiquement la métrique de la surface $r = r$ et $t = t_e$ est celle d'une 2-sphère euclidienne de rayon $R_e r = R_0 r/(1 + z)$ et la relation euclidienne entre diamètre linéaire D_e, distance métrique d_m et diamètre apparent ϕ_0 est donc utilisable :

$$\phi_\mathbf{0} = \frac{\mathbf{D_e(1 + z)}}{\mathbf{d_m}} \tag{31}$$

$d_A \overset{déf}{=} d_m/(1 + z)$ est appelé «distance-diamètre apparent» pour retrouver la relation classique $\phi = D/d_A$.

CosmoGravity permet aussi le calcul inverse : z en fonction de ϕ

13 Calculs de photométrie

En considérant les «surfaces d'ondes» émises par une source et arrivant sur l'observateur, on montre que l'éclat observé (puissance reçue par unité de surface normale à la direction de la source) E_0 d'un astre d'intensité I_e (flux émis par unité d'angle solide dans la direction de l'observateur) et de décalage cosmologique z présente (en l'absence d'absorption sur le trajet) un éclat observé

$$\mathbf{E_0} = \frac{\mathbf{I_e}}{\mathbf{d_m^2(1 + z)^2}} \tag{32}$$

Par rapport à la relation «classique» il y a au dénominateur le facteur $(1+z)^2$. L'explication est que ces photons subissent un décalage spectral et donc une baisse de fréquence ν et donc d'énergie ($E = h\nu$) et, par ailleurs, le «débit» (nombre par seconde) de photons est également divisé par $dt_0/dt_e = 1 + z$ (les photons émis pendant un temps dt_e sont reçus pendant un temps $dt_0 = (1 + z)dt_e$ d'où le deuxième facteur $(1 + z)$ pour l'éclat observé (puissance reçue par unité de surface orhogonale)

Si l'on suppose que l'intensité de l'astre est isotrope, sa «luminosité» (puissance émise) est :

$$L_e = 4\ \pi\ I_e \quad \text{et} \quad \mathbf{E_0} = \frac{\mathbf{L_e}}{\mathbf{4\ \pi\ d_m^2(1+z)^2}} \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathbf{L_e}}{\mathbf{4\ \pi\ d_L^2}} \tag{33}$$

$\mathbf{d_L} \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{d_m(1+z)}$ est la «distance luminosité» (qui permet de retrouver la relation classique entre éclat et distance comme on l'a fait ci-dessus avec la "distance diamètre apparent").

Magnitudes et modules de distance. Éclats et luminosités ont une dynamique impressionante en astronomie (l'éclat du soleil est $\sim 10^{25}$ fois celui des galaxies que pourra détecter (en 2027 ?) le télescope ELT). On utilise depuis l'antiquité le concept de «grandeur» qui depuis a été défini sous l'appellation «magnitude apparente» m comme une échelle logarithmique d'éclat E avec $\mathbf{m} \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{-2.5\log_{10} E + cte}$. Et on appelle «magnitude absolue» M la magnitude apparente qu'aurait la source si elle était située à une distance de 10 pc, c'est donc une mesure logarithmique de luminosité.

On appelle «module de distance» μ la différence $m - M$ pour un astre. On en déduit aisément que, dans un espace transparent,

$$\mu \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{m - M = -5 + 5\log_{10} d_{pc}} \tag{34}$$

m comme M peuvent être "bolométriques" (toutes longueurs d'ondes et avec un récepteur parfait) ou dépendre de la courbe de sensibilité spectrale de l'instrumentation mais dans tous les cas le module de distance garde l'expression ci-dessus (en supposant la parfaite transparence du milieu entre la source et l'observateur). Si l'on observe des «standards de luminosité» on connait leur luminosité (donc leur M) et la mesure de leur m permet de connaître leur distance. Bien évidemment pour les distances cosmologiques c'est la «distance-luminosité» $d_L = d_m(1 + z)$ qu'il faut utiliser dans la relation classique :

$$\mu \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{m - M = -5 + 5\log_{10} d_{L(pc)}} \tag{35}$$

14 Modèles monofluides

Des solutions analytiques existent pour certains des modèles d'univers de Friedmann-Lemaître. C'est notamment (mais pas uniquement) le cas pour ceux dont un seul paramètre de densité Ω_i est non nul. Ces modèles particuliers ont par ailleurs l'avantage d'être des approximations à certaines époques d'un univers FL multi-fluides.

Puisque $\mathbf{\Omega_m(t) + \Omega_r(t) + \Omega_\Lambda(t) + \Omega_k(t) = 1} \quad \forall \mathbf{t}$, si un seul des Ω_i est non nul il est donc toujours égal à 1. Quatre cas se présentent : $\Omega_m(t) = 1$, $\Omega_r(t) = 1$, $\Omega_\Lambda(t) = 1$ et, pourquoi pas, $\Omega_k(t) = 1$.

14.1 Matière, $\Omega_m = 1 \quad \forall t$

Pour cet univers «de poussière» (matière non-relativiste) ou d'Einstein-de Sitter (1932) $p \approx 0$ et : $\rho_m R^3 = cte = \rho_{m0} R_0^3$

L'équation de Friedmann-Lemaître FL2 entraîne alors (en prenant comme origine du temps celui de la singularité : $R(t = 0) = 0$)

$$\mathbf{R(t) = (6\pi G\rho_{m0}R_0^3)^{\frac{1}{3}} \ t^{\frac{2}{3}}} \tag{36}$$

$$\Omega_m(t) \stackrel{déf}{=} \frac{8\pi G\rho_m(t)}{3H^2(t)}, \quad \Rightarrow \quad \rho_{m0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \tag{37}$$

De même puisque

$$H \stackrel{déf}{=} \frac{\dot{R}}{R}, \qquad H(t) = \frac{2}{3\ t} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{H_0 = \frac{2}{3\ t_0}} \tag{38}$$

il vient

$$\mathbf{a(t) \stackrel{déf}{=} \frac{R(t)}{R_0} = \left[\frac{3H_0}{2}\right]^{2/3} t^{\frac{2}{3}}} \tag{39}$$

L'horizon des particules $dp_\circ$ a dans ce cas une expression simple. En effet

$$E(x) = (1+x)^3 \quad et \quad \mathbf{d_{p\circ} = \frac{c}{H_\circ} \int_0^\infty E^{-\frac{1}{2}}(x)dx = \frac{2c}{H_0}} \tag{40}$$

et comme

$$H = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = \frac{2}{3t}, \tag{41}$$

alors $d_{p\circ} = 3ct_0$

14.2 Rayonnement, $\Omega_r = 1 \quad \forall t$

Avec $p_r = \frac{1}{3}\rho_r c^2$ et FL3 : $\rho_r R^4 = cte = \rho_{r0} R_0^4$

Dans cet «univers de Weinberg» l'équation de Friedmann-Lemaître FL2 entraîne :

$$R^2\dot{R}^2 = \frac{8\pi\ G}{3}\ \rho_{r0}R_0^4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R(t) = \left[\frac{32\pi G\rho_{r0}R_0^4}{3}\right]^{\frac{1}{4}} \ t^{\frac{1}{2}}} \tag{42}$$

$$\Omega_r(t) \stackrel{déf}{=} \frac{8\pi G\rho_r(t)}{3H^2(t)}, \quad \Rightarrow \quad \rho_{r0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \tag{43}$$

De même puisque

$$H \stackrel{déf}{=} \frac{\dot{R}}{R}, \quad H = \frac{1}{2t} \quad \text{et} \quad \mathbf{H_0 = \frac{1}{2t_0}} \tag{44}$$

Il vient

$$\mathbf{a(t) \stackrel{déf}{=} \frac{R(t)}{R_0} = [2H_0]^{\frac{1}{2}} \ t^{\frac{1}{2}}} \tag{45}$$

L'horizon des particules $dp_\circ$ a dans ce cas comme avec le précédent une expression simple : $dp_\circ = 2ct_0$

Note : Comme la densité d'énergie de rayonnement d'un corps noir est

$$u_r = \rho_r c^2 = \frac{4\sigma T^4}{c} \quad \text{et que} \quad \Omega_r \overset{déf}{=} \frac{8\pi G\rho_r}{3H^2} = 1 \tag{46}$$

la température T_r ne dépend que de H :

$$T_r = \left[\frac{3H^2c^3}{32\pi G\sigma}\right]^{\frac{1}{4}} \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3} \quad \text{et} \quad \mathbf{T_r} = \left[\frac{\mathbf{45c^5h^3}}{\mathbf{64\pi^6Gk^4}}\right]^{\frac{1}{4}}\mathbf{H^{\frac{1}{2}}} \tag{47}$$

14.3 Constante cosmologique, $\Omega_\Lambda = 1 \quad \forall t$

L'équation de Friedmann-Lemaître FL2 entraîne pour cet univers de de-Sitter

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{\Lambda c^2}{3} = cte \tag{48}$$

Donc $\Lambda \geq 0$ et

$$\mathbf{H} = \pm\ \mathbf{c}\ \left[\frac{\mathbf{\Lambda}}{\mathbf{3}}\right]^{\mathbf{1/2}} = \mathbf{cte} = \mathbf{H_0} \tag{49}$$

et

$$\mathbf{a(t)} \overset{\mathbf{déf}}{=} \frac{\mathbf{R(t)}}{\mathbf{R_0}} = \mathbf{e^{H_0\cdot(t-t_0)}} \tag{50}$$

14.4 Courbure, $\Omega_k = 1 \quad \forall t$

La somme des équations de Friedmann-Lemaître FL1+FL2 entraîne pour l'univers de Milne : $\ddot{R} = 0$. Donc :

$$R(t) = \alpha t + \beta \quad , \quad \dot{R} = \alpha = cte \quad \text{et} \quad H_0 \overset{déf}{=} \frac{\dot{R}_0}{R_0} = \frac{\alpha}{R_0} \tag{51}$$

En conséquence

$$\mathbf{a(t)} \overset{\mathbf{déf}}{=} \frac{\mathbf{R(t)}}{\mathbf{R_0}} = \mathbf{H_0t} + \frac{\beta}{\mathbf{R_0}} = \mathbf{H_0\cdot t + cte} \tag{52}$$

En prenant comme origine du temps celui de a=0

$$\mathbf{a(t)} = \mathbf{H_0\cdot t} \quad \text{et} \quad \mathbf{t_0} = \mathbf{(H_0)^{-1}} \tag{53}$$

15 Cosmologies alternatives

15.1 Bref historique

Le modèle ΛCDM (avec Λ constante géométrique) est, avec des valeurs différentes des paramètres, celui publié par G. Lemaître en 1931. Toutefois c'est le modèle d'Einstein-de-Sitter (EdS) de 1932 (sans Λ qu'Einstein avait reniée) qui a été ensuite le plus considéré. Dans les années 1980 les mesures du taux d'expansion et celles de la densité de matière, baryonique ou non, avec un $\Omega_{m0} \approx 0.3$, donnaient un âge de l'univers EdS plus petit que celui des plus vieilles étoiles (13 milliards d'années) qu'expliquait par contre très bien un $\Omega_\Lambda \approx 0.7$.

Ce n'est qu'en 1998 que les premières mesures sur les supernovae de type SNIa ont confirmé un $\Omega_\Lambda > 0$ et que les observations par ballon («Boomerang»> et «Maxima») (1999-2000) ont mis en évidence le diamètre apparent du premier pic acoustique du rayonnement de fond cosmologique. En croisant les contraintes des observations tirées des relations éclats, décalage stectral des supernovae SNIa avec celles du diamètre apparent ($\phi \approx 1°$) du premier pic acoustique du RFC, le modèle ΛCDM avec $\Omega_{m0} \approx 0.3$ et $\Omega_{\Lambda 0} \approx 0.7$ entrainant un âge de ~13,8 milliards d'années, est devenu le modèle standard de la cosmologie encore utilisé en 2024.

15.2 Tensions

Mais des nouvelles mesures ont fait apparaître des "tensions" avec le modèle ΛCDM standard. On peut citer :
- **"H_0 tension"** : les mesures directes des "standards de luminosité" donnent $H_0 \approx 73\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$ alors que celles déduites plus indirectement du RFC s'accordent vers $H_0 \approx 67\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$ avec des écarts statistiques de plusieurs σ.
- **"σ_8 tension"** : La structuration observée de l'univers à l'échelle d'environ[19] $8h^{-1}$ Mpc est significativement plus faible que celle déduite des anisotropies du RFC.
- **"Dipole tension"** : La composante dipolaire observée du RFC interprétée comme l'effet Doppler-Fizeau de notre vrai déplacement (369 ± 1 km/s) par rapport à ce rayonnement (z $\sim$ 1000) est proche mais significativement différente en module et en orientation de celle que l'on observe à plus «faible» distance sur les quasars (z $\sim$ 2).

15.3 Nouvelles théories

Parallèlement de nouvelles théories cosmologiques ont éte proposées
- Inflations : ces théories ne remettent pas forcément en cause le modèle ΛCDM mais permettraient d'expliquer les valeurs «initiales» (avant $\sim 10^{-30}$ s) de ses paramètres
- Énergie sombre
- et bien d'autres...

CosmoGravity inclut maintenant les simulations d'univers avec l'«énergie sombre» en alternative à la constante cosmologique géométrique Λ.

16 Énergie sombre

16.1 Équations d'état relativistes

La matière, la radiation, n'interviennent dans le tenseur énergie-quantité de mouvement d'un fluide parfait qu'à travers leur *«équation d'état»* : $p = p(\rho)$. On peut ainsi, tout en restant dans le cadre des équations de Friedmann-Lemaître, prendre en compte différents *«fluides» i*, connus ou hypothétiques, caractérisés par une équation d'état du type $p_i = w_i \rho_i c^2$. Les masse volumique et pression totales d'un univers à n «fluides» sont alors :

19. $h \stackrel{déf}{=} H_0(\mathrm{km\ s^{-1}Mpc^{-1}})/100$

$\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \quad et \quad p = c^2 \sum_{i=1}^{n} w_i p_i$.

Pour la *«poussière»* (Dust d) (matière non relativiste) $p \ll \rho c^2$ et $w_d = w_{nr} \approx 0$. Pour la radiation (lumière et particules ultra-relativistes) $w_r = 1/3$.

L'évolution du facteur d'échelle a et celle des autres paramètres cosmologiques peuvent être généralisées à un mélange de n fluides i. On obtient pour l'évolution du taux d'expansion $H = \dot{a}/a$:

$$\frac{H}{H_\circ} = \left[\sum_{i=1}^{n} \Omega_i a^{-3(1+w_i)}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \Omega_i (1+z)^{3(1+w_i)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{54}$$

La courbure de l'espace est alors équivalente à un fluide de $w_k = -1/3$.

16.2 De Λ à l'énergie sombre

La constante cosmologique Λ est équivalente à (et peut être interprétée comme[20]) un fluide de «vide», invariant de Lorentz de $w_\Lambda = w_v = -1$ et de masse volumique $\rho_{DE} = \dfrac{\Lambda c^2}{8\Pi G}$. Cette substitution laisse en effet mathématiquement inchangée l'équation d'Einstein de 1917 (4) et par conséquent celles de Friedmann-Lemaître si l'on conserve le principe cosmologique.

Par ailleurs la constante cosmologique géométrique Λ peut poser un problème d'ajustement initial sévère[21] et on a cherché à la remplacer par un fluide physique. Si cette nouvelle entité, pour l'instant spéculative, est décrite par une équation d'état de paramètre w ce paramètre doit être spatialement constant (principe cosmologique) mais différent de -1, voire variable avec le temps t (c'est-à-dire avec z et a).

Le caractère géométrique de Λ peut aussi être une motivation (philosophique) de son remplacement par une entité physique. Il faut toutefois noter que dans l'équation du champ d'Einstein de 1917 (4) qui inclue Λ et présente une bien plus grande généralité mathématique, si l'on peut «rajouter» de nouveaux fluides physiques du coté gauche de l'équation, «remplacer» le terme de *Lambda* par un fluide physique à droite est une modification de l'équation mathématique (4) sauf si ce fluide DE (Dark Energy) a pour paramètre $w_{DE} = cte = -1$ et une masse volumique $\rho_{DE} = \dfrac{\Lambda c^2}{8\Pi G}$.

On distingue parfois l'*«énergie sombre»* ($w_{DE}(z) \neq -1$), de la «quintessence» ($w_Q \neq cte$), de l'*«énergie fantôme»* ($w_{PE} < -1$) ... mais il est devenu habituel et plus simple de généraliser l'appellation *«énergie sombre»* à l'ensemble des possibilités et d'utiliser la paramétrisation CPL[22] à deux paramètres (constants) w_0 et w_1 :

$$w(z) = w_\circ + w_1 \frac{z}{1+z} = w_\circ + w_1(1-a) \tag{55}$$

20. Lemaître, 1934, Proc.National. Acad. Sciences USA, vol 20, pp12-17

21. sa valeur très faible mais constante la rend en effet insignifiante dans l'univers primordial mais si sa valeur était plus grande, l'accélération précoce de l'expansion qu'elle aurait provoquée aurait empêché la formation des structures.

22. Chevalier & Polarski 2001,Int. J. Mod. Phys. D10,213 ; Linder 2003 Phys. Rev. Lett. 90,091301 et Sahni & Starobinsky, Int. J. Mod. Phys., 2006, Vol. 15, pp 2105-2132 ou arXiv :astro-ph/0610026

Dans cette représentation Λ apparaît comme un cas particulier d'une énergie sombre de paramètres $w_0 = -1$ et $w_1 = 0$

Les observations permettent de contraindre la zone de notre univers dans un plan (w_0, w_1) comme on le fait pour le champ des $(\Omega_{m0}, \Omega_{\Lambda 0})$.

La plus que centenaire [23] constante cosmologique géométrique Λ ou son équivalent physique ($w_0 = -1$ et $w_1 = 0$) reste toutefois, en début 2025, à moins de 2 σ, compatible avec les observations.

16.3 Calculs

De même qu'avec $E(x)$ pour le modèle avec la constante Λ, des fonctions simplifient l'écriture des relations, $Y(x)$ et $F(x)$:

$$\mathbf{Y(x)} \overset{\text{déf}}{=} \exp\{\mathbf{-3(1 + w_0 + w_1)}\log\mathbf{x} - \mathbf{3w_1(1 - x)}\} \tag{56}$$

$$\mathbf{F(x)} \overset{\text{déf}}{=} \left[\frac{\mathbf{H(x)}}{\mathbf{H_0}}\right]^{\mathbf{2}} = \mathbf{(1+x)^2\Omega_{k0} + (1+x)^3\Omega_{m0} + (1+x)^4\Omega_{r0} + Y((1+x)^{-1})\Omega_{DE0}} \tag{57}$$

De la sorte les dérivées première et seconde de $a(\tau)$ deviennent :

$$\frac{\mathbf{da}}{\mathbf{d}\tau} = \left[\frac{\mathbf{\Omega_{r0}}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{\Omega_{m0}}}{\mathbf{a}} + \mathbf{\Omega_{DE0}\ a^2Y(a) + \Omega_{k0}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{58}$$

$$\frac{\mathbf{d^2a}}{\mathbf{d}\tau^{\mathbf{2}}} = -\frac{\mathbf{\Omega_{r0}}}{\mathbf{a^3}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{\Omega_{m0}}}{\mathbf{a^2}} + \mathbf{\Omega_{DE0}}\left[\mathbf{aY(a)} + \frac{\mathbf{a^2}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{dY}}{\mathbf{da}}\right] \tag{59}$$

et celle de la distance métrique, selon la courbure négative, nulle ou positive :

$$\mathbf{d_{p\circ-}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{H_\circ} \mid \mathbf{\Omega_{k\circ}} \mid^{\frac{1}{2}}} \sinh\left\{\mid \mathbf{\Omega_{k\circ}} \mid^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{F}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{(x)dx}\right\} \tag{60}$$

$$\mathbf{d_{p\circ}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{H_\circ}} \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{F}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{(x)dx} \tag{61}$$

$$\mathbf{d_{p\circ+}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{H_\circ} \mid \mathbf{\Omega_{k\circ}} \mid^{\frac{1}{2}}} \sin\left\{\mid \mathbf{\Omega_{k\circ}} \mid^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{F}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{(x)dx}\right\} \tag{62}$$

La suite des expressions servant dans les calculs de E [24], d_L, d_A, θ, d_{LT}, l ...est identique à celles du modèle avec Λ en remplaçant $E(x)$ [25] par $F(x)$.

L'introduction de termes d'autres fluides dans les expressions de la distance métrique d_m ouvre la voie à des tests observationnels et à la contrainte des nouveaux paramètres, en inversant la relation {paramètres} $\longrightarrow$ {observables}, puisque ces dernières, comme l'éclat

23. Einstein, 1917, Sitzungsberichte der Königlich PreuBischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 142-152
24. éclat photométrique
25. la fonction E(x)

ou le diamètre apparent, dépendent de d_m[26].

Avec l'énergie sombre, si on définit arbitrairement (N pour normalisé) :

$$\rho_{DEN} \overset{déf}{=} \rho_{DE0} Y(a) \quad \text{et} \quad \Omega_{DEN} \overset{déf}{=} \frac{8\pi G \rho_{DEN}}{3H^2} = \Omega_{DE0} Y(a) \tag{63}$$

on retrouve l'équation de fermeture (2) **A VERIFIER** :

$$\mathbf{\Omega_r(t) + \Omega_m(t) + \Omega_{DEN}(t) + \Omega_k(t) = 1 \quad \forall t} \tag{64}$$

16.4 Le"Big Rip" et le "Big Fall"

Le modèle standard ΛCDM commence par un "Big Bang" et son futur est une croissance exponentielle infinie du facteur d'échelle. De par cette expansion à grande échelle et de l'extinction progressive des étoiles, c'est un grand refroidissement progressif qui s'annonce (en anglais *Big Chill* ou *Big Freeze*).

Les contraintes observationnelles présentes (début 2025) de notre univers dans le plan (w_0, w_1) sont compatibles à moins de 2 σ avec $w_0 = -1$ et $w_1 = 0$ (la constante cosmologique géométrique Λ) mais elles le sont également avec des valeurs légèrement différentes de w_0 et w_1 dont certaines prévoient un **"Big Rip"**.

Contrairement au "Big Chill" (ou "Big Freeze") du modèle standard ΛCDM où le taux d'expansion tend vers une constante (et plus faible que sa valeur actuelle) qui préserve les structures non actuellement en expansion, l'énergie sombre peut permettre un "Big Rip" (grand déchirement) où a(t) et le taux d'expansion H lui-même tendent vers l'infini en un même temps fini et désagrégent alors de plus en plus vite jusqu'aux plus petites structures matérielles. Il s'agit donc pour la matière d'une singularité (physique), existentiellement aussi extrême que celle du $a = 0$ du "Big Bang".

Et il est aussi possible avec l'énergie sombre de concevoir des univers sans Big Bang ni Big Crunch mais avec un "Big Fall" et un "Big Rip" c'est-à-dire avec un passé et un futur finis entre 2 asymptotes verticales de $a(t)$ et donc une durée finie de l'Univers.

Pour les simulations avec l'option énergie sombre (et la paramétrisation CPL), Cosmo-Gravity recherche d'abord s'il y a un "Big Crunch". Si (et seulement si) la réponse est négative il reste alors (au moins) 4 possibilités :

1. Si $w_1 < 0$ alors $w \to +\infty$ quand $z \to -1$ pas de Big Rip.
2. Si $w_1 > 0$ alors $w \to -\infty$ quand $z \to -1$ Big Rip (sauf pour un *univers oscillant* entre deux valeurs non nulles du facteur d'échelle)
3. Si $w_1 = 0$ et $w_0 < -1$ alors $w(\text{constant}) < -1$ Big Rip
4. Si $w_1 = 0$ et $w_0 > -1$ alors $w(\text{constant}) > -1$ pas de Big Rip

Dans les cas 2 et 3 ci-dessus de Big Rip, le temps $t_{BR} - t_0$ restant avant le Big Rip est alors

$$\mathbf{t_{BR} - t_0 = \frac{1}{H_\circ} \int_{-1}^{0} (1+x)^{-1} F^{-\frac{1}{2}}(x)\, dx} \tag{65}$$

La "durée" de cet univers" est évidemment $t_0 + t_{BR}$.

26. Évidemment la multiplication du nombre de paramètres libres du modèle avec les mêmes données élargit les incertitudes sur chacun lors de l'inversion

17 Univers avec une fonction $a(t)$ non monotone

Les univers avec :
— Big Bang et Big Crunch
— ni Big Bang ni Big Crunch
— Big Fall et Big Rip
pésentent un maximum ou un minimum de a(t) et donc respectivement un minimum ou un maximum de z observé. et si l'on choisit un z (et donc un $a(t)$) observables, il y correspond 2 possibiités pour les temps et les distances : une possibilité alors que le z est croissant et un lorsqu'il est décroissant. Le choix de cette croissance ou de cette décroissance peut être (avec un peu de patience) considéré comme une observable (cf. § 11) et, dans ses cas, CosmoGravity laisse à l'utilisateur le choix de z croissant ou décroissant pour calculer distances et temps.

17.1 maximum de $a(t)$ et donc minimum z_{min} de z

Distances métriques : Par rapport au §9, l'intégration de la fonction $E^{\frac{i}{2}}(x)$ est
— de 0 à z pour z croissant
— la somme de 0 à z_{min} et de z_{min} à z pour z décroissant.
Horizon des particules
— intégration de 0 à ∞
Horizon des évènements
— intégration de la somme de z_{min} à 0 et de z_{min} à ∞

17.2 minimum de $a(t)$ et donc maximum z_{max} de z

A FAIRE

18 D'UNIVERS à TRAJECTOIRES : La structuration

Avec UNIVERS CosmoGravity permet des simulations d'un univers vérifiant le principe cosmologique c'est à dire avec une distribution homogène et isotrope du contenu. Pour notre univers actuel on peut dire qu'est homogène sa ditribution de ... super-amas de galaxies (10^5 galaxies chacun).

La simulation de la formation des superamas de galaxies et des structures de plus en plus petites, diverses et nombreuses nécessite de plus en plus de puissance (et de temps) de calcul : la croissance des surdensités n'est plus linéaire et la simulation nécessite un «pavage» du contenu en un nombre N de pavés jointifs qui devient rapidement astronomique. D'où la nécessité d'une puissance (et une durée) de calcul hors de portée du *client server* CosmoGravity.

On peut toutefois noter que l'attraction Newtonienne en d^{-2} (que rejoint la relativité générale pour les faibles champs gravitationnels lors de la formation des galaxies étoiles, planètes, astéroïdes) rend très rapide la contraction finale des astres : le passage d'un nuage de gaz et de poussières d'environ 1 année lumière à un amas ouvert de quelques dizaines d'étoiles (comme pour la formation de notre soleil) dure $\sim 10^5$ ans, soit $\sim 10^{-5}$ fois l'âge de l'univers quand il s'est formé...

Et le niveau de structuration présente de l'univers à petite échelle est extrême : Rien que dans notre proche environnement dans le disque de notre galaxie, la distance de la plus proche étoile est ≈ 4 années lumière (soit $\sim 4\ 10^{16}$ m). La masse volumique moyenne de notre planète est $\rho_{\oplus} \approx 5500$ kg$\cdot$ m^3, celle de notre étoile $\rho_{\odot} \approx 1400$ kg$\cdot$m^{-3}.

Comme le diamètre du soleil est $D_{\oplus} \approx 1,4\ 10^9$ m, le rapport en distances est $\sim 3\ 10^7$ ...et donc $\sim 10^{23}$ en volume. Dans notre envronnement proche le contenu est $\sim\ 10^{23}$ m^3 de vide pour 1 m^3 d'astres massifs.

En raison de cet extrême contraste la géométrie de l'espace-temps **au voisinage d'un seul astre isolé** est ainsi essentiellement définie par la masse de cet astre. On retrouve ainsi un fort degré de symétrie qui permet, avec la relativité générale et la "métrique" qu'elle associe au voisinage de cet astre, des simulations dynamiques de voyages économiques en puissance et temps de calcul.

Et c'est l'objectif des simulations TRAJECTOIRES de CosmoGravity : Elles sont dynamiques en montrant le déplacement du spationaute (supposés lui et son véhicule) de masse négligeable par rapport à celle de l'astre et en affichant notamment les déroulements de temps différents pour le spationaute et un observateur lointain, les contraintes ressenties, ...