Primer Proyecto Simulación

Daniel Abad Fundora C411
Enzo Rojas D´Toste C411

Febrero 2024

Contents

1 Introducción

En este proyecto simulamos un sistema de colas de n servidores en serie, analizando diferentes distribuciones tanto de llegada al sistema como de servicios, las posibles llegadas al sistema podrán suceder durante un determinado tiempo. Cuando un cliente termina de ser atendido por un servidor, se incorpora en la cola del siguiente, y así sucesivamente hasta ser atendido por el último servidor. Tanto las llegadas de los clientes como la atención de los servidores distribuirán aleatoriamente a partir de cierta distribución de probabilidad.

1.1 Objetivos del proyecto y principales parámetros a estimar

El objetivo fundamental del proyecto es simular el descrito anteriormente y comprender el funcionamiento de un sistema de colas en serie y estimar distintos parámetros, como por ejemplo:

1. Tiempo de espera promedio que permanece un cliente en la cola.
2. Tiempo que permanece el servidor en funcionamiento luego de cerrar (cesa la llegada de los clientes).
3. Tiempo máximo que permanece un cliente en la cola.
4. Tamaño promedio de la cola (este parámetro no será necesario analizarlo computacionalmente, por razones que estimaremos posteriormente).

1.2 Variables que describen el problema

Nuestro problema a simular, dependerá de las siguientes variables de entrada:

1. Distribución de llegada de los clientes a la cola.
2. Cantidad de servidores y distribución de tiempo de servicio de cada uno.
3. Duración del proceso de llegada de los clientes.

Nota: Nuestro sistema continuará proporcionando servicio hasta que la cola se vacíe

Además en algunos casos, trataremos de responder ciertas interrogantes, como por ejemplo ¿Cuál es el mejor orden en el que debemos colocar los servidores para optimizar el tiempo de espera?

2 Sitemas específicos

En este proyecto prestamos especial atención a la simulaciones de sistemas de cola con llegadas en forma de procesos de Poisson (homogéneo o no) y con servidores en serie, cuyo tiempo de atención suele ser exponencial, nuestra implementación admite cualquier distribución, pero tenemos mayor interés matemático en las antes mencionadas.

Seguiremos el siguiente enfoque, comenzaremos con un sistema sencillo y lo iremos complejizando poco a poco, para así analizar con mayor facilidad las propiedades que se cumplen en cada uno.

Las distintas variantes que implementaremos serán:

1. Sistema simple de un único servidor, llegadas en forma de un proceso de Poisson homogéneo y tiempo de atención con distribución exponencial.
2. Sistema de n servidores en serie, con tiempo de atención con distribución exponencial y llegadas en forma de un proceso de Poisson homogéneo.
3. Sistema de n servidores en serie, con tiempo de atención con distribución exponencial y llegadas en forma de un proceso de Poisson no homogéneo.
4. Por último simularemos el proceso utilizando otras distribuciones en el tiempo de atención de los servidores.

3 Detalles de implementación

Nuestro proyecto está implementado en el lenguaje de programación Python, utilizando la biblioteca simpy para generar un ambiente en el que se desarrolla nuestra simulación y creando procesos que representan a los clientes y los servidores. Introducimos a nuestro sistema los servidores que queremos utilizar en forma de una lista de delegados, así como la distribución de llegada de los clientes, también como un delegado. También se puede especificar la duración de nuestra simulación.

Simulamos la llega de clientes a nuestro sistema, generando los intervalos de tiempo mediante la generación de variables aleatorias con la intensidad introducida y, cada vez que un servidor esté disponible, comenzará a brindar servicio al primer cliente en la cola.

Para poder estimar el tiempo medio de espera en la cola, cada vez que un cliente salga del sistema, se suma el tiempo que estuvo dicho cliente en la cola a una variable global. De la misma forma, cada vez que concluya la llegada de los clientes al sistema, analizaremos cuanto tiempo transcurre desde este momento hasta que termina el proceso.

4 Resultados y experimentos

4.1 Único servidor y llegadas homogéneas

Nuestra primer conjunto de simulaciones será sobre una cola simple con un solo servidor con intensidad μ y donde las llegadas siguen un proceso de Poisson con intensidad λ, se harán n simulaciones de duración t.

4.1.1 Simulación 1

Nuestros parámetros serán:
$\lambda = \frac{1}{3}$
$\mu = \frac{1}{4}$
n = 1000
t = 5000

Table 1:

	Valor Esperado (μ)	Varianza (σ^2)
Tiempo promedio de espera	12	140
Retraso promedio	13.50	137. 25
Máxima espera	59,3	329.51

4.1.2 Simulación 2

Nuestros parámetros serán:
$\lambda = \frac{1}{5}$
$\mu = \frac{1}{3}$
n = 1000
t = 5000

Table 2:

	Valor Esperado (μ)	Varianza (σ^2)
Tiempo promedio de espera	7.43	0.7
Retraso promedio	10.6	137. 25
Máxima espera	42.73	329.51

4.2 N servidores en serie, distribución de llegada y atención exponencial

En esta sección simularemos varios servidores en serie con proceso de atención con distribución exponencial con distintos parámetros de intensidad μ_i . La llegada de los clientes al sistema seguirá una distribución exponencial con parámetro λ.

4.2.1 Simulación 3

Comencemos simulando con 3 servidores en serie, nuestros parámetros serán:
$\lambda = \frac{1}{5}$
$\mu_1 = \frac{1}{3}$
$\mu_2 = \frac{1}{4}$
$\mu_3 = \frac{1}{2}$
n = 1000
t = 5000

Table 3:

	Valor Esperado (μ)	Varianza (σ^2)
Tiempo promedio de espera	30	477
Retraso promedio	32.2	323
Máxima espera	100.5	809

4.2.2 Simulación 4

Cambiemos el orden de los servidores:
$\lambda = \frac{1}{5}$
$\mu_1 = \frac{1}{4}$
$\mu_2 = \frac{1}{2}$
$\mu_3 = \frac{1}{3}$
n = 1000
t = 5000

Table 4:

	Valor Esperado (μ)	Varianza (σ^2)
Tiempo promedio de espera	30.1	430
Retraso promedio	32.4	340
Máxima espera	100.3	396

Se puede observar que no ocurren cambios significativos en las medias, en la siguiente sección daremos una pequeña explicación de esto.

4.3 N servidores en serie, llegadas en forma de proceso de Poisson no homogéneo

En esta sección comenzamos a simular variables con distribución exponencial para simular las llegadas, pero a diferencia de los casos anteriores, la intensidad varía en función del tiempo.

4.3.1 Simulación 5

Simulamos un proceso de Poisson no homogéneo y un sistema de servidores en serie con los siguientes parámetros:
$\lambda = 1/5$ en la primera mitad del tiempo y $1/10$ en la segunda mitad.
$\mu_1 = \frac{1}{4}$
$\mu_2 = \frac{1}{2}$
$\mu_3 = \frac{1}{3}$
n = 1000
t = 500

Table 5:

	Valor Esperado (μ)	Varianza (σ^2)
Tiempo promedio de espera	24	455
Retraso promedio	31.6	568
Máxima espera	58	512

4.3.2 Simulación 6

Analicemos una situación similar a la anterior, pero invirtiendo las intensidades de la distribución, es decir:
$\lambda = 1/10$ en la primera mitad del tiempo y $1/5$ en la segunda mitad.
$\mu_1 = \frac{1}{4}$
$\mu_2 = \frac{1}{2}$
$\mu_3 = \frac{1}{3}$
n = 100
t = 500

Table 6:

	Valor Esperado (μ)	Varianza (σ^2)
Tiempo promedio de espera	23.5	449
Retraso promedio	31.3	536
Máxima espera	57.3	507

4.4 Analizando otras distibuciones

En esta sección simularemos los servidores con distintos tipos de distribuciones y analizaremos si el orden en que se encuentran ofrece diferencias significativas en las variables a analizar.

4.4.1 Simulación 7

Simularemos un sistema de servidores en serie con:

1. Un servidor que posee distribución Uniforme(1,3), es decir, que el tiempo de servicio es cualquier unidad de tiempo entre 1 y 3 minutos con la misma probabilidad.
2. Un servidor con tiempo de atención constante de 2 minutos.
3. Un servidor con tiempo de atención exponencial con una intensidad $\lambda = 1/3$

Se obtuvieron los siguientes resultados:

Table 7:

	Valor Esperado (μ)	Varianza (σ^2)
Tiempo promedio de espera	16.5	138.9
Retraso promedio	17.6	76,24
Máxima espera	67.4	504

4.4.2 Simulación 8

En esta simulación cambiamos el orden de nuestros servidores, comenzando por el de distribución constante, luego el de distribución exponencial y luego el de distribución uniforme. Se obtuvieron los siguientes resultados.

Table 8:

	Valor Esperado (μ)	Varianza (σ^2)
Tiempo promedio de espera	17.09	137.4
Retraso promedio	16.31	266
Máxima espera	65.01	235.5

4.5 Resultados de las simulaciones

En las primeras dos secciones, pudimos observar que los resultados de las simulaciones de nuestro sistema coinciden con nuestro modelo matemático. En la tercera sección notamos que al invertir los órdenes de las intensidades, si los fragmentos poseen el mismo tamaño, no es afectado notablemente el valor de las variables del sistema. En la última sección pudimos observar, que al tener servidores con distribuciones diferentes, si son afectados los valores de las variables en dependencia del orden de los servidores.

Se notaron también algunas cuestiones bastante evidentes, como que al aumentar el valor del parámetro λ aumenta el tiempo de espera promedio y al aumentar el valor de μ, este disminuye.

4.5.1 Análisis de parada de la simulación

Debido a la relativa lenta convergencia de los resultados, en algunos casos no es posible hacer la suficiente cantidad de simulaciones como para obtener aproximaciones más exactas del valor esperado de las variables, sin embargo en los sistemas más sencillos, se obtienen aproximaciones bastante exactas del valor hallado analíticamente.

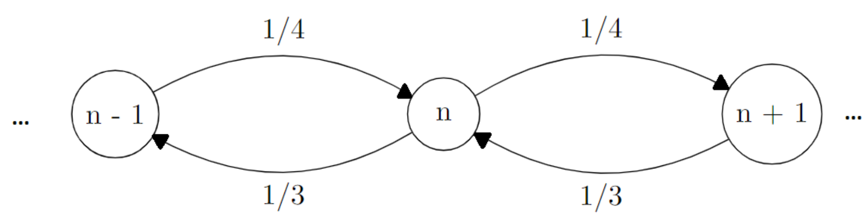
5 Modelo Matemático y explicación de las simulaciones

5.1 El sistema más simple posible

Comenzaremos analizando la forma más simplificada posible del sistema. Un único servidor con tiempo de atención exponencial. El proceso de llegada al sistema seguirá una distribución de Poisson homogénea con una intensidad de $\lambda = 15$ arribos por hora y el tiempo de atención a clientes tendrá una distribución exponencial con una intensidad media de 1 persona cada 3 minutos. Se puede arribar al servidor desde las 10:00 am a las 6:00 pm (8 horas).

Tenemos que la tasa de llegada es de a(t) = $\frac{1}{3} * e^{-\frac{1}{3}t}$ y la tasa de salida es de $\frac{1}{4} * e^{-\frac{1}{4}t}$.

La cantidad de clientes en el sistema puede ser representada por una cadena de Markov de la forma:



Hallemos el valor esperado del tamaño de la cola.

Sea p = λ/μ

La probabilidad de que la cola tenga tamaño n es de $p^n(1-p)$

Para hallar el valor esperado de p resolvemos la serie:

$\sum np^n(1-p)$ = p/ (1-p) A partir de los datos, se puede derivar que la cantidad promedio de personas en la cola converge a $\frac{1}{4} * 12 = 3$.

Aplicando Ley de Little, el tiempo de espera promedio será de 3 * 4 = 12 minutos.

Al simular este proceso en nuestro sistema anexo con un solo servidor, distribución de llegada /lambda = math.expovariate(1/4) y distribución del servidor /lambda = math.expovariate(1/3) se notará que el tiempo de espera promedio converge a 12.

5.2 Añadiendo más servidores

En esta sección complejizamos un poco más el problema:

Se tiene una sistema que consiste en 3 servidores en series que siguen una distribución exponencial y tienen un tiempo de atención de 20, 15 y 30 personas por hora respectivamente y el tiempo de llegada es un proceso de Poisson con una intensidad de 12 personas por hora.

En esta situación, es posible aplicar un teorema que establece que:

Si se posee un sistema de colas en serie en el que se cumplen las siguientes condiciones:

-Los arribos al servidor poseen distribución exponencial con parámetro λ.

-La atención de los servidores posee una distribución exponencial con parámetros μ_i.

-Se asume que las capacidades de cada cola son potencialmente infinitas.

Entonces cada una de las colas se puede analizar como una cola independiente con intensidad de arribo λ e intensidad de atención μ_i.

Con razonamientos análogos al capítulo anterior, se puede demostrar que el tamaño promedio de la primera cola es de 1.5, de la segunda 4 y de la tercera es de 4/5, con lo que podemos deducir que el tiempo de espera promedio será de 7.5, 20 , 3.33.. minutos respectivamente, por lo que el tiempo de espera total será de aproximadamente 30.83 minutos.

Al correr la simulación hecha, se obtienen valores ligeramente inferiores a dicha media (aproximadamente 30), esto se debe a que el modelo matemático se asume para procesos de duración infinita, mientras que la simulación dura un tiempo finito y la cola comienza vacía por lo que al comienzo del proceso, los tiempos de espera son menores.

Además de los valores estimados, este modelo matemático nos proporciona un dato importante, como los servidores funcionan como procesos independientes entre sí, el orden de los servidores no afecta el tiempo de espera promedio de las personas en la cola.

5.3 Llegadas no homogéneas

Hasta el momento hemos asumido que el proceso de llegada al sistema es un proceso de Poisson homogéneo, pero en la realidad esto no tiene por qué ser así, digamos que una cafetería funciona de 8:00 am a 10:00 pm, el ritmo de llegada de las personas a las horas de almuerzo y comida será mayor que, digamos, a las 11:00 am o 4:00 pm.

¿Como simulamos un proceso de possion no homogéneo?

Seguimos la siguiente idea:

Simulamos una variable aleatoria de distribución exponencial con intensidad max(λ_i) donde λ_i son las distintas intensidades, cada vez que simulemos una de estas variables y ubiquemos un suceso, generamos una variable aleatoria con distribución U(0,1) si el valor de esta variable aleatoria es menor que $\lambda_i/max(\lambda)$ aceptamos la llegada, si no, la rechazamos y continuamos simulando desde dicho instante de tiempo.

6 Supuestos

En nuestra simulación asumimos los siguientes supuestos:

1. Permanencia de los clientes en la cola: Se asume que los clientes, siempre permanecerán en la cola hasta ser atendidos y no se irán por razón alguna.

2. Movimiento instantáneo de los clientes: No se tiene en cuenta el tiempo que toma a los clientes desplazarse de un servidor a otro.