1.11. NOTACIONES Y DETERMINACIÓN DE CONJUNTOS

1.11.1. Notaciones

Para denotar conjuntos, aunque no es necesario, utilizaremos generalmente letras mayúsculas, y para especificar elementos se usarán habitualmente letras minúsculas. Para indicar la pertenencia de un elemento a un conjunto será utilizado el símbolo $\in$.

La expresión "$a \in$ A" se lee: "*a* pertenece a A", o bien "el elemento *a* pertenece al conjunto A".

Su negación es "$a \notin$ A", que se lee: "a no pertenece a A".

Si el conjunto A está formado por los elementos a, b y c, escribimos

$$A = \{a, b, c\}$$

en este caso se nombran todos los elementos del conjunto, y se dice que está determinado por *extensión*.

Las notaciones usuales para caracterizar conjuntos numéricos son las siguientes:

N conjunto de los números naturales
Z conjunto de los números enteros
Q conjunto de los números racionales
R conjunto de los números reales
C conjunto de los números complejos

La representación por extensión del conjunto cuyos elementos son -1, 0 y 1, es

Ej (1) $$A = \{-1, 0, 1\}$$

Es fácil ver que se trata del conjunto de los números enteros cuyo valor absoluto es menor que 2; en este enunciado hacemos referencia a elementos del conjunto **Z**, de los números enteros, el cual se llama *referencial o universal*; además, estamos interesados en aquéllos que satisfacen la propiedad de ser, en valor absoluto, menores que 2.

La notación correspondiente es

Ej (2) $$A = \{x \in \mathbf{Z} \,/\, |x| < 2\}$$

y se dice que el conjunto ha sido determinado *por comprensión*.

El conjunto universal depende de la disciplina en estudio; se fija de antemano, y está formado por todos los elementos que intervienen en el tema de interés. En general se denotará U.

Definición

Un conjunto se determina *por extensión* (1) si y sólo si se enumeran todos los elementos que lo constituyen. Un conjunto se define por comprensión (2) si y sólo si se da una propiedad que caracteriza a sus elementos.

El conjunto cuyos elementos verifican la propiedad P se indica

$$A = \{x \in U \,/\, P(x)\}$$

o más brevemente, si U está sobrentendido

$$A = \{x \,/\, P(x)\}$$

1.11.2. Conjuntos especiales

Extendemos la noción intuitiva de conjunto a los casos de carencia de elementos o de unicidad de elementos, mediante la introducción de los conjuntos *vacío* y *unitario*.

Un conjunto vacío es aquel que carece de elementos. Un conjunto unitario está formado por un único elemento.

Una propiedad o función proposicional, que se convierte en proposición falsa para todos los elementos del universal, caracteriza por comprensión un conjunto vacío. Designaremos mediante ∅ al conjunto vacío, y puede definirse simbólicamente así

$$\varnothing = \{x \,/\, x \neq x\}$$

En este caso la propiedad relativa a x es P (x) : $x \neq x$, la cual resulta falsa cualquiera que sea x.

Si A es el conjunto cuyo único elemento es a, escribiremos

$$\text{A} = \{a\} = \{x \,/\, x = a\}$$

1.12. INCLUSIÓN

1.12.1. Concepto

Sean A y B dos conjuntos. Si ocurre que todo elemento de A pertenece a B, diremos que A está incluido en B, o que A es parte de B, o que A es un subconjunto de B, y escribiremos $A \subset B$.

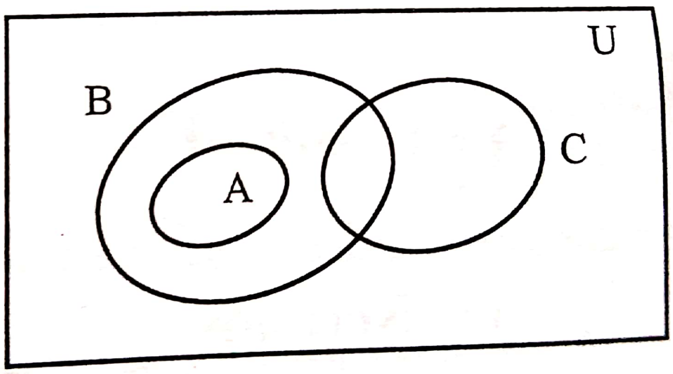
Definición

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

1.12.2. Diagramas de Venn

Existe una representación visual de los conjuntos dada por diagramas llamados de *Venn*. En este sentido, el conjunto universal suele representarse por un rectángulo, y los conjuntos por recintos cerrados. Es claro que todo elemento de A pertenece a U, esto es, $A \subset U$.

Sean A, B y C subconjuntos de U, como indica el diagrama; en este caso particular se verifica: $A \subset B$.



1.12.3. Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. Entonces, todo elemento del primero pertenece al segundo, y todo elemento de éste pertenece al primero.

Definición

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

1.12.5. Caracterización del conjunto vacío

i) **Propiedad**. El conjunto vacío está incluido en cualquier conjunto.

1.13. CONJUNTO DE PARTES

Dado un conjunto A, podemos formar un nuevo conjunto constituido por todos los subconjuntos de A, el cual recibe el nombre de *conjunto de partes de* A.

Definición

Conjunto de partes de A es el conjunto cuyos elementos son todos subconjuntos de A.

$$\boldsymbol{P}(A)=\{X \,/\, X\subset A\}$$

Los elementos de este conjunto son a su vez conjuntos, y, en consecuencia $\boldsymbol{P}(A)$ es un conjunto de conjuntos.

De acuerdo con la definición, es

$$X\in \boldsymbol{P}(A) \Leftrightarrow X\subset A$$

El problema de decidir si un objeto es un elemento de $\boldsymbol{P}(A)$ se reduce a determinar si dicho objeto es un subconjunto de A.

De acuerdo con la propiedad reflexiva de la inclusión, cualquiera que sea A, es $A \subset A$, y en consecuencia $A \in \boldsymbol{P}(A)$ por definición de conjunto de partes.

Además, por 1.12.5. i) se sabe que $\varnothing \subset A$, y por la misma definición es $\varnothing \in \boldsymbol{P}(A)$.

Luego, cualquiera que sea A, el mismo A y el conjunto vacío son elementos de $\boldsymbol{P}(A)$.

Ejemplo 1-24.

Determinamos el conjunto de partes de $A = \{2 , 3 , 4\}$

Los elementos de $\boldsymbol{P}(A)$ son todos los subconjuntos de A, esto es

$\varnothing$

$\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$

$\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$

A

Y la notación por extensión es

$$\boldsymbol{P}(A)=\{\varnothing , \{2\} , \{3\} , \{4\} , \{2,3\} , \{2,4\} , \{3,4\} , A\}$$

ii) La pertenencia relaciona elementos con conjuntos, mientras que la inclusión relaciona conjuntos entre sí. Desde este punto de vista, damos los valores de verdad de las siguientes proposiciones relativas al ejemplo 1-24.

$\varnothing \subset A$	V	$2 \in \boldsymbol{P}(A)$	F
$\varnothing \in A$	F	$\{2\} \in \boldsymbol{P}(A)$	V
$\varnothing \in \boldsymbol{P}(A)$	V	$A \in \boldsymbol{P}(A)$	V
$\varnothing \subset \boldsymbol{P}(A)$	V	$A \in A$	F
$\{2,3\} \in \boldsymbol{P}(A)$	V	$A \subset A$	V

Ejemplo 1-26.

Si A tiene n elementos. entonces $\boldsymbol{P}$ (A) tiene 2^n elementos. Se trata de computar

1.14. COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Sean A y B subconjuntos de U.

1.14.1. Definición

Complemento de A es el conjunto formado por los elementos de U que no pertenecen a A.

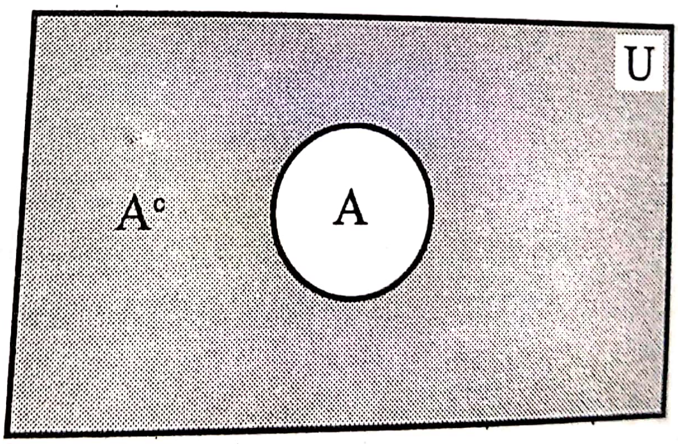
El complemento de A se denotará A^c. Suelen usarse también A' y $\bar{A}$

En símbolos $\qquad A^c = \{x \in U / x \notin A\}$

o bien $\qquad A^c = \{x / x \notin A\}$

Se verifica $\qquad x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$

El diagrama de Venn correspondiente es



1.14.2. Propiedades de la complementación

I) INVOLUCIÓN. $\left(A^c\right)^c = A$

Demostración)

$$x \in \left(A^c\right)^c \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow \sim\left(x \in A^c\right) \Leftrightarrow \sim\left(x \notin A\right) \Leftrightarrow x \in A$$

En esta demostración hemos utilizado la definición de complemento y la ley involutiva del cálculo proposicional.

II) $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$

Demostración) Utilizando sucesivamente las definiciones de complemento, de inclusión y de complemento, es

$$x \in B^c \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in A^c$$

Luego $B^c \subset A^c$

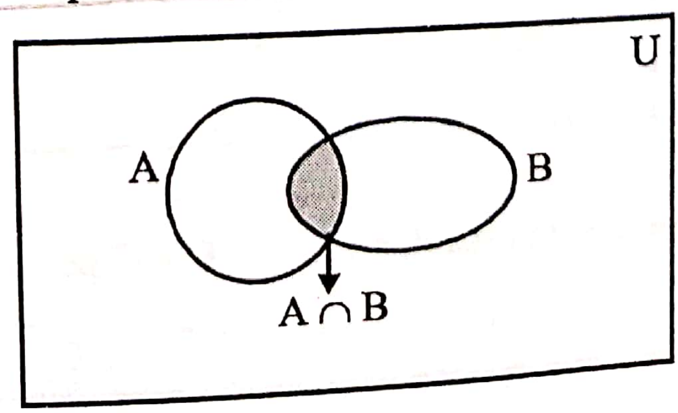
1.15. INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Sean A y B subconjuntos de U.

1.15.1. *Definición*

Intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B.

El diagrama de Venn correspondiente es



En símbolos es

$$A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$$

O bien, sobreentendido U

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

La intersección entre conjuntos es una *operación binaria*, porque a partir de dos conjuntos se obtiene un tercero.

La propiedad que caracteriza a los elementos de la intersección es la de pertenecer simultáneamente a los dos conjuntos, y se especifica en términos de una conjunción.

La definición de intersección establece

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Si la intersección de dos conjuntos es el conjunto vacío, dichos conjuntos se llaman *disjuntos*.

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$$

Ejemplo 1-29.

1.15.2. Propiedades de la intersección

Quedan a cargo del lector las demostraciones de las siguientes proposiciones:

I) IDEMPOTENCIA: $A \cap A = A$.

II) ASOCIATIVIDAD: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

III) CONMUTATIVIDAD: $A \cap B = B \cap A$.

IV) ELEMENTO NEUTRO PARA LA INTERSECCIÓN ES EL UNIVERSAL: $A \cap U = U \cap A = A$

Propiedad: $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

1.16. UNIÓN DE CONJUNTOS

1.16.1. *Definición*

Unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B.

Simbólicamente se indica

$$A \cup B = \{x \in U / x \in A \vee x \in B\}$$

Prescindiendo del universal

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

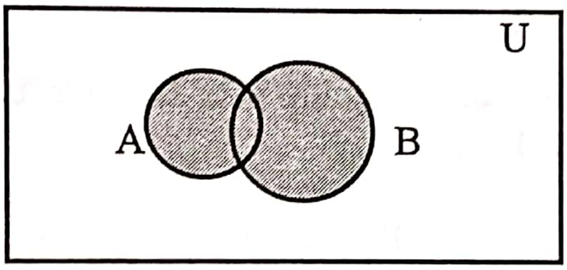
La unión de conjuntos, lo mismo que la intersección, es una operación binaria definida en el conjunto de partes de U.

De acuerdo con la definición, podemos escribir

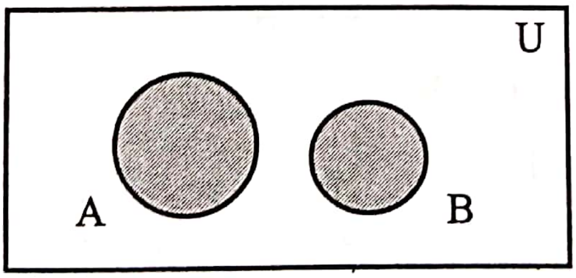
$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

El "o" utilizado es incluyente, y pertenecen a la unión aquellos elementos de U para los cuales es verdadera la disyunción; entonces un elemento pertenece a la unión si y sólo si pertenece a alguno de los dos conjuntos.

El diagramas de Venn correspondiente es:



En el caso disjunto la intersección es el conjunto vacío, y a la unión pertenecen todos los elementos de los conjuntos dados.



Es claro que todo conjunto está incluido en su unión con cualquier conjunto. En efecto

1.16.2. Propiedades de la unión

I) IDEMPOTENCIA. Cualquiera que sea A, se verifica $A \cup A = A$

II) ASOCIATIVIDAD. Cualesquiera que sean A, B y C: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

III) CONMUTATIVIDAD. Cualesquiera que sean A y B: $A \cup B = B \cup A$

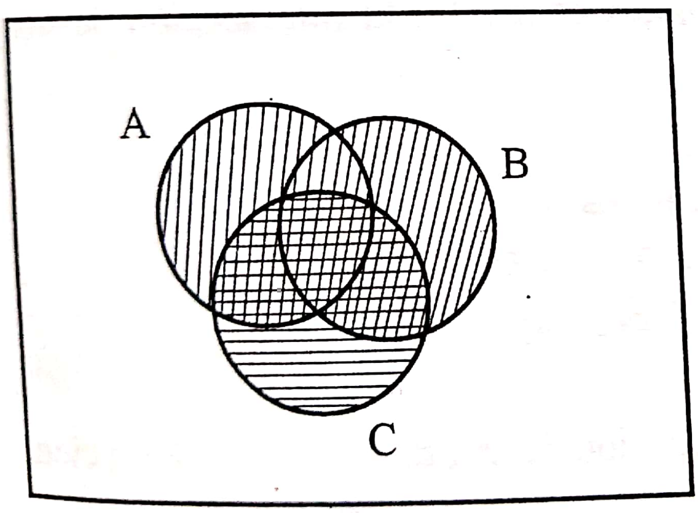
IV) ELEMENTO NEUTRO PARA LA UNIÓN ES EL CONJUNTO VACÍO.
En efecto, cualquiera que sea $A \subset U$, es: $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$

1.17. LEYES DISTRIBUTIVAS

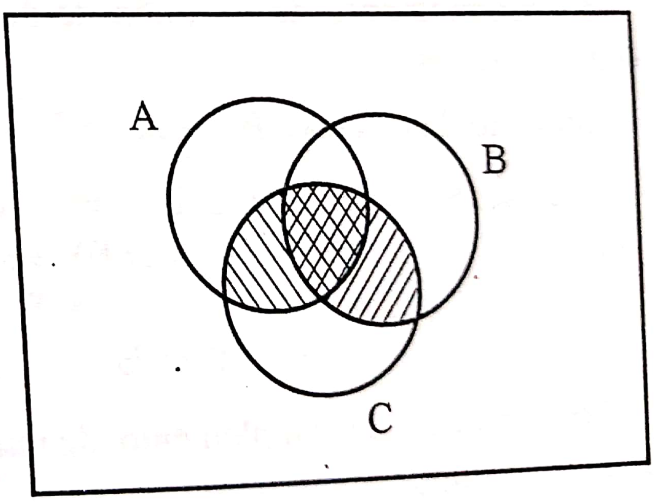
La unión e intersección de conjuntos pueden conectarse a través de dos propiedades fundamentales, llamadas leyes distributivas, que se expresan mediante las fórmulas

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Vamos a verificar, mediante diagramas de Venn, la primera de estas leyes. Los dibujos corresponden al primero y al segundo miembro de la igualdad.



$(A \cup B) \cap C$



$(A \cap C) \cup (B \cap C)$

1.18. LEYES DE DE MORGAN

Estas leyes, de gran aplicación, permiten relacionar la complementación con la unión e intersección.

1.18.1. Teorema

El complemento de la unión de dos conjuntos es igual a la intersección de sus complementos.

En símbolos: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Demostración) $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sim(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \sim (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \wedge \in B^c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

Por definición de complemento, de unión, negación de una disyunción, y definición de intersección.

1.18.2. Teorema

El complemento de la intersección de dos conjuntos es igual a la unión de sus complementos.

En símbolos: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

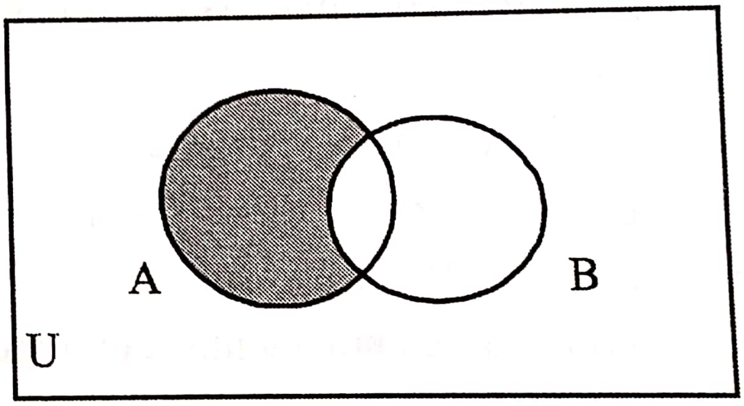
1.19. DIFERENCIA DE CONJUNTOS

1.19.1. *Definición*

Diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

El diagrama correspondiente es



Es claro que $A - B \neq B - A$; es decir, la diferencia de conjuntos no és conmutativa.

1.19.2. Propiedad

La diferencia entre dos conjuntos es igual a la intersección entre el primero y el complemento del segundo.

En símbolos $A - B = A \cap B^c$.

En efecto, aplicando sucesivamente las definiciones de diferencia, complementación e intersección, es

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\} = \{x / x \in A \wedge x \in B^c\} = A \cap B^c$$

1.20. DIFERENCIA SIMÉTRICA

Sean A y B dos subconjuntos de U.

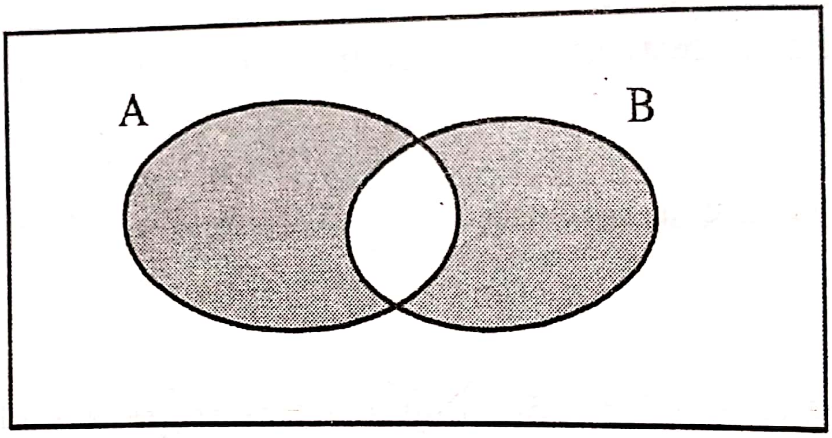
1.20.1. Definición

Diferencia simétrica de los conjuntos A y B es la unión entre los conjuntos A – B y B – A.

La notación es

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A) \qquad (1)$$

y el diagrama correspondiente



Otra identificación de la diferencia simétrica es

$$A \,\Delta\, B = \left(A \cap B^c\right) \cup \left(B \cap A^c\right) \qquad (2)$$

que se deduce como consecuencia inmediata de la definición, teniendo en cuenta que la diferencia entre dos conjuntos es igual a la intersección entre el primero y el complemento del segundo, según 1.19.2.

Resulta también

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B) \qquad (3)$$