¿Puede calcular la distancia que recorre el coche anterior en media hora? ....

Definición

Dados dos puntos de una recta, que no sea paralela al eje y : $P=(x_1;y_2)\wedge Q=(x_2;y_2)$

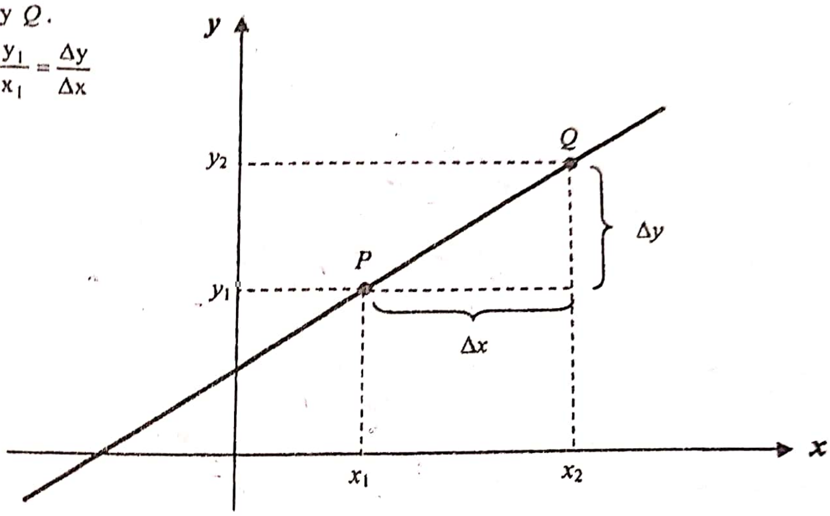
Se denomina **pendiente de la recta** PQ al cociente entre la diferencia de las ordenadas y la diferencia de las abscisas de los respectivos puntos P y Q.

Pendiente de la recta PQ : $a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Donde:

Δy : incremento de y

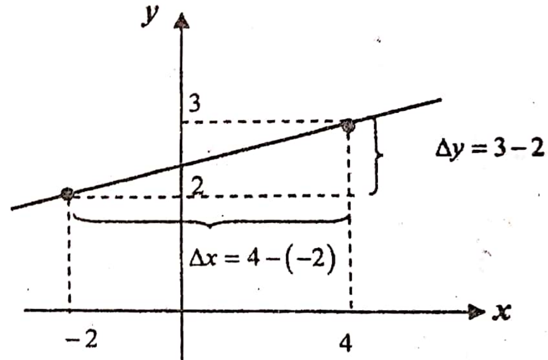
Δx : incremento de x



Ejemplo 1

Pendiente de la recta que pasa por los puntos:
$P=(-2;2)\wedge Q=(4;3)$.

Pendiente de la recta PQ : $a=\dfrac{3-2}{4-(-2)}=\dfrac{1}{6}$



Ejemplo 2

Sea la recta r de ecuación: $r: y=2x-1$

Considerando el punto: $P=(0;-1)\in r$

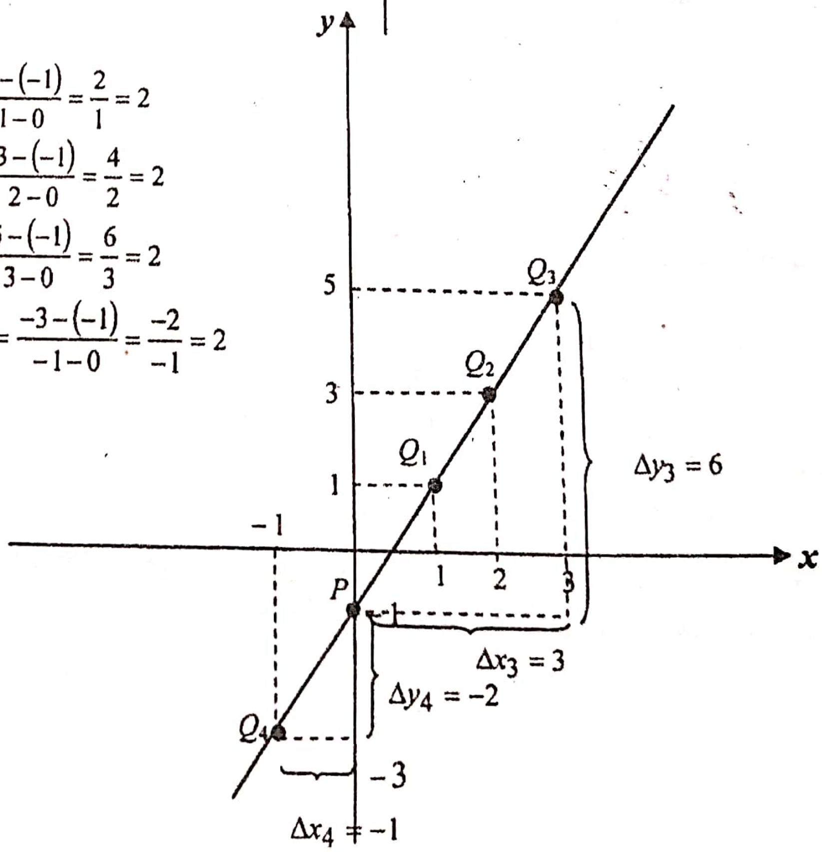
Para otro punto de la recta: $Q_1=(1;1)\in r\Rightarrow a=\dfrac{1-(-1)}{1-0}=\dfrac{2}{1}=2$

Para otro punto de la recta: $Q_2=(2;3)\in r\Rightarrow a=\dfrac{3-(-1)}{2-0}=\dfrac{4}{2}=2$

Para otro punto de la recta: $Q_3=(3;5)\in r\Rightarrow a=\dfrac{5-(-1)}{3-0}=\dfrac{6}{3}=2$

Para otro punto de la recta: $Q_4=(-1;-3)\in r\Rightarrow a=\dfrac{-3-(-1)}{-1-0}=\dfrac{-2}{-1}=2$

Gráficamente:



Observación

El valor de la pendiente de una recta se mantiene constante independientemente del par de puntos de la recta que se consideren para calcularla.

La pendiente de una recta nos informa sobre su inclinación en el Sistema de Ejes Cartesianos Ortogonales, ya que se trata de la proporción entre la variación vertical y la variación horizontal entre dos puntos cualesquiera de dicha recta.

Actividad de aplicación N° 10

Realice la gráfica de cuestas con el siguiente valor de pendiente: a) 0,5 b) $\frac{5}{2}$ c) $-\frac{4}{3}$

Actividad de aplicación N° 11

Analice si los siguientes puntos están alineados: $P_1(3;1), P_2(0;3), P_3(-3;5)$

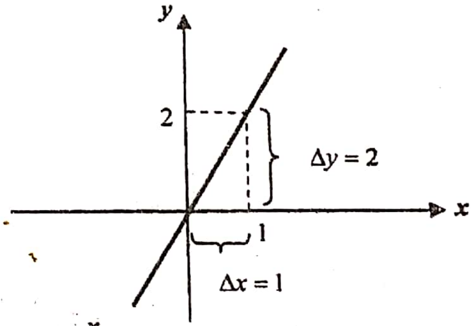
Ecuación Explícita de la recta que pasa por el origen de coordenadas

Considérese una recta en el plano, que no coincida con el eje y, tal que $(0;0)$ pertenezca a ella.

La pendiente de esa recta es $a = \frac{y-0}{x-0} \Leftrightarrow a = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = a.x$

Conclusión

Toda recta del plano que contenga al origen de coordenadas y no coincida con el eje y, responde a la ecuación de la forma: $y = a.x$ donde a es la pendiente de la recta.



Ejemplos

a) $\ell : y = 2x$

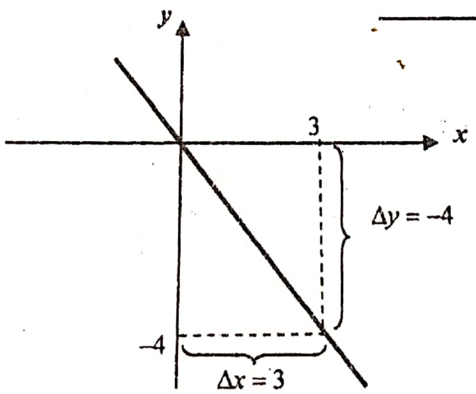
$(0;0) \in \ell$

Pendiente: $\frac{y}{x} = \frac{2}{1}$

b) $r : y = -\frac{4}{3}x$

$(0;0) \in r$

Pendiente: $\frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$



Ecuación Explícita de la recta que no pasa por el origen de coordenadas

Consideremos una recta ℓ, no vertical, que corta al eje y en el valor real: $b \neq 0$.

Por Geometría Euclidiana, existe una sola recta ℓ' paralela a la recta ℓ que pase por el origen de coordenadas.

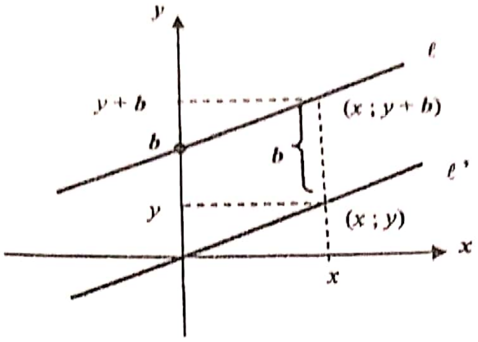
Para cualquier punto: $(x;y) \in \ell'$; resulta que el punto de coordenadas: $(x; y+b) \in \ell$. (Ver gráfico)

Luego, si: $y = a.x$ es la ecuación explícita de la recta ℓ'; entonces: $y = a.x + b$, es la ecuación explícita de la recta ℓ.

El valor real b se llama ordenada al origen.

Conclusión

La ecuación de una recta del plano no paralela al eje y, tiene como ecuación $y = a.x + b$ se denomina ***Ecuación Explícita de la recta en el plano***. Dondo a es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen.



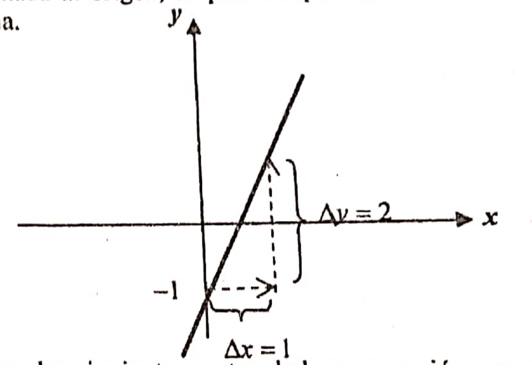
Ejemplo 1
$r: y = 2x - 1$ es la ecuación explícita de la recta r, donde: $a = 2$ es la pendiente; y, $b = -1$, es la ordenada al origen.

Nota
Si $b = 0$ (es decir, la recta pasa por el origen de coordenadas) resulta que su ecuación explícita es $y = a.x$, tal como se analizó anteriormente.

MCL

Ejemplo 2
Utilizando la definición de pendiente y ordenada al origen, se puede representar una recta sin necesidad de calcular las coordenadas de puntos de la misma.

Ejemplo:
$r: y = 2x - 1$
La ordenada al origen: $b = -1$
La pendiente: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$



Actividad de Aplicación N° 12

Representar en un Sistema de Ejes Cartesianos las siguientes rectas dada su ecuación, empleando el valor de ordenada al origen y el valor de pendiente:

a) $y = x$
b) $y = -2x$
c) $y = \frac{1}{2}x$
d) $y = 3x - 1$
e) $y = -x + 1$
f) $y = 2x - 2$
g) $y = -3x + 2$
h) $y = 3$

Rectas Verticales

Las rectas *verticales* son *paralelas al eje de ordenadas* (eje y).
Las rectas verticales no tienen pendiente y se representan por la ecuación: $x = m \quad \wedge \quad m \in R$

Actividad de Aplicación N° 13

¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2;-3)$ *y* $Q(2;4)$?

¿Qué ecuación tiene la recta que pasa por los puntos $P(2;-3)$ *y* $Q(2;4)$?

Rectas Horizontales

Las rectas horizontales son paralelas al eje de abscisas x.
Las rectas horizontales tienen pendiente nula y se representan por la ecuación: $y = p \quad \wedge \quad p \in R$

Actividad de Aplicación N° 14

¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2;-3)$ *y* $Q(4;-3)$*?*

¿Qué ecuación tiene la recta que pasa por los puntos $P(2;-3)$ *y* $Q(4;-3)$*?*

Ecuación Implícita de la recta en el plano

Definición

Toda ecuación de la forma: $Ax + By + C = 0$ donde A y B son números reales no son simultáneamente nulos; es la ecuación implícita de una recta en el plano.

Ejemplo

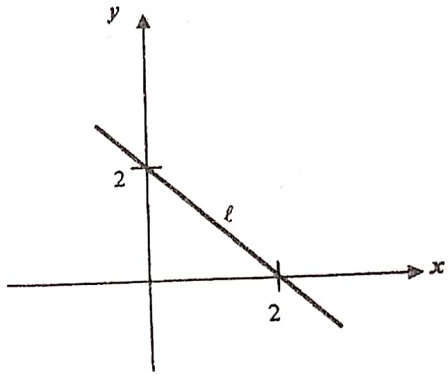
$x + y - 2 = 0$ es la ecuación implícita de la recta ℓ.

Busquemos puntos que verifiquen la ecuación.

$x = 2 \Rightarrow y = 0$ Por esto el punto de coordenadas $(2;0)$ pertenece a la recta.

$y = 2 \Rightarrow x = 0$ El punto de coordenadas $(0;2)$ es otro punto de la recta.

Finalmente, como en la Geometría Euclidiana, por dos puntos en el plano pasa una recta única; podemos trazar la recta ℓ, cuya ecuación implícita es la dada, y donde las coordenadas de cada uno de sus puntos, son las soluciones de dicha ecuación.



Actividad de Aplicación N° 18

Obtener el valor de la pendiente y de la ordenada al origen de la recta, cuya ecuación implícita es $r: 3x - 6y - 12 = 0$. Generalice considerando $r: Ax + By + C = 0$

Rectas Paralelas

Definición

Sean las rectas del plano:

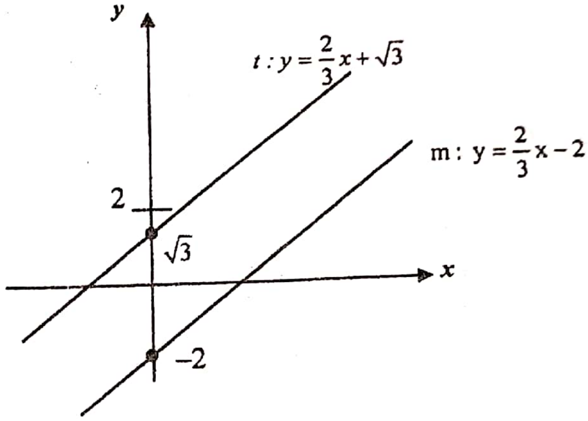
$$r: y = a_1 . x + b_1$$
$$\ell: y = a_2 . x + b_2$$
$$r \ // \ \ell \ \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ o bien, son dos rectas verticales}$$

Nota: // significa: rectas paralelas

Ejemplos

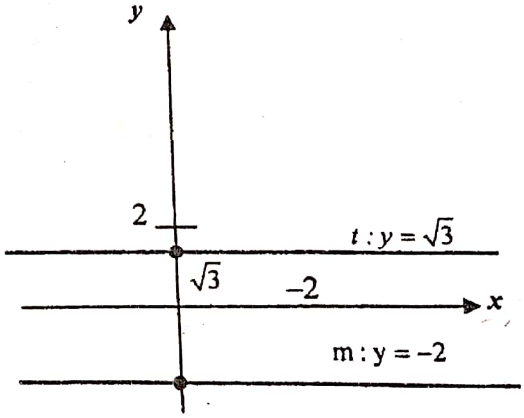
- Sean las rectas: $t: y = \frac{2}{3}x + \sqrt{3}$; $m: y = \frac{2}{3}x - 2$

Como las pendientes son iguales, entonces: $t \parallel m$



- Sean las rectas: $t: y = \sqrt{3}$; $m: y = -2$

Claramente las rectas de este ejemplo son rectas horizontales, en consecuencia, tienen pendiente nula y son paralelas.
Es decir: $a_t = a_m = 0$ entonces $t \parallel m$



Rectas Perpendiculares

Definición

Sean las rectas del plano

$$r: y = a_1 . x + b_1$$
$$\ell: y = a_2 . x + b_2$$

$r \perp \ell \Leftrightarrow a_1 . a_2 = -1$ o bien una de ellas es vertical y la otra es una recta horizontal.

Nota: $\perp$ significa: rectas perpendiculares

2.1.3.2 Ecuación segmentaria de la recta

Sea una recta $r: Ax + By + C = 0$ no paralela a los ejes coordenados y que no contiene al origen de coordenadas; esto es, A, B y C son números reales no nulos.

Entonces, $r: Ax+By+C=0 \Rightarrow \left(-\frac{A}{C}\right)x+\left(-\frac{B}{C}\right)=1$, pues $C \neq 0$ (I)

Siendo (I) equivalente con $\frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)}=1$

Si convenimos en llamar $p=\left(-\frac{C}{A}\right)$ y $q=\left(-\frac{C}{B}\right)$ y, resulta la ecuación de la recta:

$$r: \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

Esta expresión se denomina ecuación segmentaria de la recta, siendo p y q la abscisa y la ordenada al origen, respectivamente.

Forma general de la ecuación de una recta

Cualquiera de las distintas formas de poner la ecuación de la recta es un caso particular de la siguiente:

$$ax + by + c = 0$$

Observa que

- si $a = 0$: $by + c = 0 \rightarrow y = -\frac{c}{b}$ recta paralela al eje X.
- si $b = 0$: $ax + c = 0 \rightarrow x = -\frac{c}{a}$ recta paralela al eje Y.
- a y b no pueden ser los dos 0, pues desaparecerían ambas variables.
- si $a \neq 0$ y $b \neq 0$: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, recta con pendiente $-\frac{a}{b}$ y ordenada en el origen $-\frac{c}{b}$.